Macro 2

TD 1 - Fonction de Production

Oscar Fentanes
oscar.fentanes@tse-fr.eu

TSE

21 Janvier, 2021

Organisation Générale

Oscar Fentanes

- Mexicain
- Licence UT1, Doctorant à la TSE (2ème année)
- Macroéconomie et Développement Économique
- www.oscarfentanes.com
- oscar.fentanes@tse-fr.eu

Organisation Générale

Oscar Fentanes

- Mexicain
- Licence UT1, Doctorant à la TSE (2ème année)
- Macroéconomie et Développement Économique
- www.oscarfentanes.com
- oscar.fentanes@tse-fr.eu

Les TD

- Jeudi, 17h00 - 18h30
- 10 semaines (dernière séance le 1 avril)
- 100% à distance
- Faire l'appel

Plan du Cours

1. Chapitre 1 : Le revenu national et sa répartition
   - Les déterminants de la production $Y = F(L, K)$
   - La répartition du revenu
   - La demande de biens et services
   - L'équilibre macroéconomique et le taux d'intérêt

   R Prix

Plan du Cours

1. Chapitre 1 : Le revenu national et sa répartition
   - Les déterminants de la production
   - La répartition du revenu
   - La demande de biens et services
   - L'équilibre macroéconomique et le taux d'intérêt
2. Chapitre 2 : L'économie ouverte
   - Le rôle des ~~exportations nettes~~
   - L'épargne et l'investissement dans une petite économie ouverte
   - Les taux de change ϵ
   - L'impact des politiques économiques sur ϵ
   - Parité de Pouvoir d'achat
   - La grande économie ouverte

$I = S$

Plan du Cours

3. Chapitre 3 : La monnaie et l'inflation
   - La monnaie : définition
   - L'offre de monnaie
   - La demande de monnaie
   - L'inflation et les taux d'intérêt
   - Le taux d'intérêt nominal et la demande de monnaie
   - Les coûts sociaux de l'inflation
   - Conclusion : la dichotomie classique

Plan des TD

1. Rendements d'échelle et productivité marginale
2. Production agrégée - Répartition du revenu
3. Épargne, investissement et taux d'intérêt
4. Politiques budgétaires : taxes et dépenses publiques
5. L'économie ouverte
6. Monnaie, Inflation et taux d'intérêt

ch1

ch2

ch3

Exercice 1 : Rendements d'échelle et productivité marginale

Objectifs

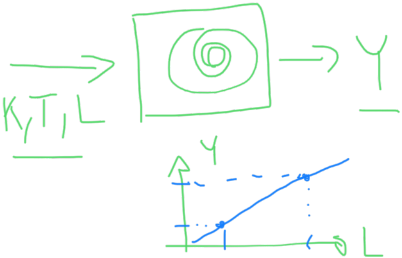
- Déterminants de la production
- REC, productivité marginale et moyenne
- Propriétés de la fonction de production dérivées du problème de maximisation π

Objectifs

- Déterminants de la production
- REC, productivité marginale et moyenne
- Propriétés de la fonction de production dérivées du problème de maximisation

La fonction de production

- $Y = F(K, L)$ fonction de production agrégée
- Y le PIB
- K le stock de capital
- L le nombre de travailleurs



Question 1

(a) Rappelez la définition d'une fonction de production à rendements d'échelles constants

Question 1

(a) Rappelez la définition d'une fonction de production à rendements d'échelles constants

Définition : Une fonction de production est à rendements d'échelles constants si un accroissement proportionnel de tous les facteurs de production suscite une hausse équivalente de la production.

$$Y_1 = F(L, K)$$

$$Y_2 = F(\lambda L, \lambda K) = \lambda Y_1$$

Question 1

(a) Rappelez la définition d'une fonction de production à rendements d'échelles constants

Définition : Une fonction de production est à rendements d'échelles constants si un accroissement proportionnel de tous les facteurs de production suscite une hausse équivalente de la production.

Exemple 1 :

$$\begin{aligned} F(2K, 2L) &= 2F(K, L) \\ &= 2Y \end{aligned}$$

REC

Question 1

(a) Rappelez la définition d'une fonction de production à rendements d'échelles constants

Définition : Une fonction de production est à rendements d'échelles constants si un accroissement proportionnel de tous les facteurs de production suscite une hausse équivalente de la production.

Exemple 1 :

$$F(2K, 2L) = 2F(K, L)$$
$$= 2Y$$

REC

$X > 0$

Exemple 2 :

$$F(\frac{1}{2}K, \frac{1}{2}L) = \frac{1}{2}F(K, L)$$
$$= \frac{1}{2}Y$$

(b) Donner une expression formelle et un exemple

Expression Formelle

Soit $\lambda > 0$, REC si :

$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L)$$
$$= \lambda Y$$

REC

$A + B = 1$

$Y_1 = K^A L^B$

$Y_2 = (\lambda K)^A (\lambda L)^B$

$= \lambda^A K^A \lambda^B L^B$

$= \lambda^A \lambda^B K^A L^B$

$= \lambda^{A+B} K^A L^B$

$\boxed{Y_2 = \lambda^{A+B} Y_1}$

A, B

$Y_2 = \lambda^1 Y_1$

Question 1

(b) Donner une expression formelle et un exemple

Expression Formelle
Soit $\lambda > 0$, REC si :

$$\begin{aligned} F(\lambda K, \lambda L) &= \lambda F(K, L) \\ &= \lambda Y \end{aligned}$$

Exemple : Fonction de production Cobb-Douglas

$$Y = F(K, L) = K^A L^B \text{ avec } A, B \in [0, 1]$$

$$\begin{aligned} F(\lambda K, \lambda L) &= (\lambda K)^A (\lambda L)^B \\ &= \lambda^A K^A \lambda^B L^B \\ &= \lambda^{A+B} K^A L^B \\ &= \lambda^{A+B} Y \end{aligned}$$

$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda^{A+B} Y$$

$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda^{A+B} Y$$

$$= \lambda Y\,?$$
$$< \lambda Y\,?$$
$$> \lambda Y\,?$$

$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda^{A+B} Y$$

$$= \lambda Y \, ?$$
$$< \lambda Y \, ?$$
$$> \lambda Y \, ?$$

Si $A + B = 1$ les rendements d'échelle sont constants.

$$\begin{aligned} F(\lambda K, \lambda L) &= \lambda^{A+B} Y \\ &= \lambda^1 Y \\ &= \lambda Y \end{aligned}$$

Question 2

On définit la fonction de production Cobb-Douglas comme

$$\boxed{Y = F(K,L) = K^{\alpha}L^{1-\alpha}} \text{ avec } \alpha \in [0,1]$$

A B

Question 2

On définit la fonction de production Cobb-Douglas comme

$$Y = F(K, L) = K^{\alpha} L^{1-\alpha} \text{ avec } \alpha \in [0, 1]$$

(a) Vérifiez que cette fonction a des rendements d'échelle constants.

$$Y_1 = F(K,L) = K^{\alpha} L^{1-\alpha}$$
$$Y_2 = F(\lambda K, \lambda L) = (\lambda K)^{\alpha} (\lambda L)^{1-\alpha}$$
$$= \lambda^{\alpha} K^{\alpha} \lambda^{1-\alpha} L^{1-\alpha}$$
$$= \lambda^{\alpha} \lambda^{1-\alpha} \boxed{K^{\alpha} L^{1-\alpha}}$$
$$= \lambda^1 Y_1$$

REC

$$A + B = 1$$
$$A = \alpha$$
$$B = 1 - \alpha$$
$$A + B = \alpha + 1 - \alpha$$
$$= 1$$

Question 2

On définit la fonction de production Cobb-Douglas comme

$$Y = F(K, L) = K^{\alpha} L^{1-\alpha} \text{ avec } \alpha \in [0, 1]$$

(a) Vérifiez que cette fonction a des rendements d'échelle constants.

$$\begin{aligned}
F(\lambda K, \lambda L) &= (\lambda K)^{\alpha} (\lambda L)^{1-\alpha} \\
&= \lambda^{\alpha} K^{\alpha} \lambda^{1-\alpha} L^{1-\alpha} \\
&= \lambda^{\alpha+1-\alpha} K^{A} L^{B} \\
&= \lambda^{1} Y \\
&= \lambda Y
\end{aligned}$$

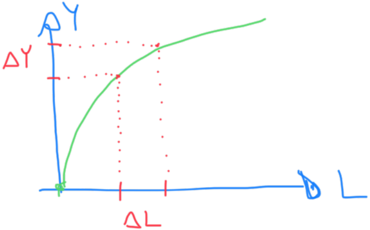
Question 2

(b) Productivité marginale et moyenne.

Question 2

(b) Productivité marginale et moyenne.

i. Définissez et interpréte~~r~~z la notion de productivité marginale d'un facteur de production.



$$PmL = \frac{\Delta Y}{\Delta L}$$

$$PmL = \frac{\Delta Y}{1}$$

Question 2

(b) Productivité marginale et moyenne.

i. Définissez et interpréter la notion de productivité marginale d'un facteur de production.

- **Définition** : La productivité marginale d'un facteur de production est l'accroissement de production induit par l'utilisation d'une unité supplémentaire de ce facteur, toutes choses égales par ailleurs.

Question 2

(b) Productivité marginale et moyenne.

i. Définissez et interpréter la notion de productivité marginale d'un facteur de production.

- **Définition** : La productivité marginale d'un facteur de production est l'accroissement de production induit par l'utilisation d'une unité supplémentaire de ce facteur, toutes choses égales par ailleurs.

  En quoi cette notion diffère-t-elle de celle de rendements d'échelle ?

- Les rendements d'échelles mesurent dans quelles proportions varient la production suite à une variation proportionnelle de tous les facteurs de productions.

Question 2

ii. Calculez les productivités marginales du capital et du travail.

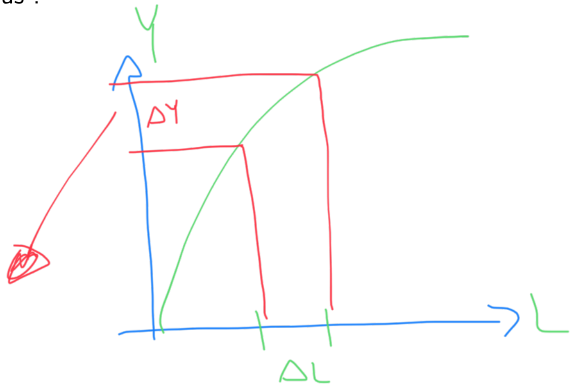
Fonction de production Cobb-Douglas :

$$Y = K^{\alpha} L^{1-\alpha}$$

$$PmL = \frac{\Delta Y}{\Delta L} = \frac{\partial Y}{\partial L}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial L} = (1-\alpha) K^{\alpha} L^{-\alpha}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = \alpha K^{\alpha-1} L^{1-\alpha}$$



Question 2

ii. Calculez les productivités marginales du capital et du travail.

Fonction de production Cobb-Douglas :

$$Y = F(K, L) = K^{\alpha} L^{1-\alpha} \text{ avec } \alpha \in [0, 1]$$

$$PmL = \frac{\partial F(K, L)}{\partial L} = (1 - \alpha) K^{\alpha} L^{-\alpha}$$

$$PmK = \frac{\partial F(K, L)}{\partial K} = \alpha K^{\alpha - 1} L^{1-\alpha}$$

iii. Définissez et interprétez la notion de productivité moyenne d'un facteur de production

Définition : la productivité moyenne mesure combien produit en moyenne chaque unité de facteur de production utilisé actuellement dans la firme. Mathématiquement :

$$PML = \frac{\boxed{F(K,L)}}{\boxed{L}} = \frac{K^{\alpha}L^{1-\alpha}}{L} = K^{\alpha}L^{-\alpha}$$

$$= K^{\alpha}L^{1-\alpha}L^{-1} = K^{\alpha}L^{-\alpha}$$

$$\boxed{PMK} = \frac{\boxed{F(K,L)}}{\boxed{K}} = \frac{K^{\alpha}L^{1-\alpha}}{K} = K^{\alpha-1}L^{1-\alpha}$$

Question 2

iv. Avec une fonction de production Cobb-Douglas, quelle relation lie productivité marginale et productivité moyenne d'un facteur de production ?

$$PmL = \boxed{(1-\alpha)} K^{\alpha} L^{-\alpha}$$

$$PML = K^{\alpha} L^{-\alpha}$$

$$PmL = (1-\alpha) \underline{PML}$$

Question 2

iv. Avec une fonction de production Cobb-Douglas, quelle relation lie productivité marginale et productivité moyenne d'un facteur de production ?

$$PmL = (1-\alpha)K^{\alpha}L^{-\alpha}$$

$$PML = K^{\alpha}L^{-\alpha}$$

$$PmL = (1-\alpha)PML$$

Question 3

- Info. Parfaite
- Libre entrée
- Prix donnés
- Un seul Bien, 1 L, 1 K

Productivité marginale et répartition du revenu.

(a) Montrez qu'à l'équilibre de concurrence pure et parfaite, la maximisation du profit par la firme conduit à ce que les facteurs de production soient rémunérés à leur productivité marginale.

Profit : revenus - coûts de la production :

$$\Pi = pY - wL - RK$$
$$\Pi = pF(K, L) - wL - RK$$

$\Pi = \text{Prod} - \text{Coûts}$

$= p \cdot Y - wL - rK$

$\max_{\{L, K\}} \Pi = p F(L,K) - wL - rK$

Prix donnés

Maximisation :

$$\max_{K,L} \Pi = pF(K, L) - wL - RK$$

$\frac{\Delta \Pi}{\Delta L} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial L} = 0$

$p \cdot Pm L - w = 0$

$p \cdot Pm K - r = 0$

Conditions du premier ordre L :

$$\frac{\partial \Pi}{\partial L} = 0$$

$$p * \frac{\partial F(K,L)}{\partial L} - w = 0$$

$$p * PmL - w = 0$$

$$PmL = \frac{w}{p}$$

$p \cdot PmL = w$

$p \cdot PmK = r$

$\Rightarrow PmL = \frac{w}{p}$ ← Salaire réel

$\Rightarrow PmK = \frac{r}{p}$ ← Taux d'int réel

$\Pi = PY - wL - RK$

$= P \cdot F(K,L) - wL - RK$

$\nearrow L$, $\underbrace{F \nearrow}_{+}$, $\underbrace{wL \nearrow}_{-}$

$F \nearrow > wL \nearrow$

$F \nearrow < wL \nearrow$

$F \nearrow = wL \nearrow$

$\Delta F - \Delta wL = 0$

Conditions du premier ordre L :

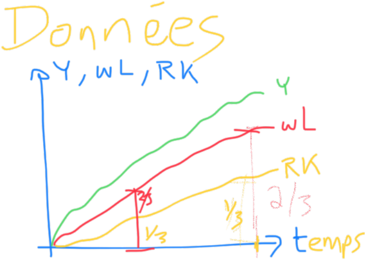
$$\frac{\partial \Pi}{\partial L} = 0$$
$$p * \frac{\partial F(K,L)}{\partial L} - w = 0$$
$$p * PmL - w = 0$$
$$PmL = \frac{w}{p}$$

Conditions du premier ordre K :

$$\frac{\partial \Pi}{\partial K} = 0$$
$$p * \frac{\partial F(K,L)}{\partial K} - R = 0$$
$$p * PmK - R = 0$$
$$PmK = \frac{R}{p}$$

Question 3

(b) Montrez que $wL = (1-\alpha)Y$ et $RK = \alpha Y$. Interprétez.



Avec Cobb-Douglas : $wL + RK = (1-\alpha)Y + \alpha Y = Y - \alpha Y + \alpha Y = Y$

$$Y = K^{\alpha} L^{1-\alpha}$$

$$PmL = \frac{w}{p}$$

$$(1-\alpha)K^{\alpha}L^{-\alpha}L = \frac{w}{p}L$$

$$(1-\alpha)\boxed{K^{\alpha}L^{1-\alpha}} = \frac{wL}{p}$$

$$(1-\alpha)Y = \frac{wL}{p}$$

$$\boxed{(1-\alpha)pY = wL}$$

$$PmL = \frac{w}{p}$$

$$(1-\alpha)K^{\alpha}L^{-\alpha} = \frac{w}{p}$$

$$(1-\alpha)K^{\alpha}L^{-\alpha} * L = \frac{w}{p} * L$$

$$(1-\alpha)K^{\alpha}L^{1-\alpha} = \frac{w}{p} * L$$

$$(1-\alpha)Y = \frac{w}{p} * L$$

$$(1-\alpha)pY = wL$$

Question 3

$$PmK = \frac{R}{p}$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial K} = 0$$

$$K^{\alpha-1}L^{1-\alpha} = \frac{R}{p}$$

$$K^{\alpha-1}L^{1-\alpha} * K = \frac{w}{p} * K$$

$$\alpha K^{\alpha}L^{1-\alpha} = \frac{w}{p} * K$$

C-D

Tautologie

$$\alpha Y = \frac{R}{p} * K$$

$$\alpha pY = RK$$

$(1-\alpha)$ représente alors la part distributive du revenu qui va au travail, et α représente la part distributive qui va au capital.

Question 3

(c) Dans la plupart des économies développées, la part du capital dans la rémunération des facteurs est égale à 30%.
En utilisant expression de la productivité marginale dans le cas de la fonction Cobb-Douglas, établissez comment l'on peut rendre compte de ce fait stylisé. On utilisera le fait que $\frac{PmK * K}{Y} = 30\%$. Commentez.

$$\frac{RK}{PY} = 30\%$$

$$P = 1$$

$$\frac{RK}{PY} = \alpha \approx 30\%$$

$$\alpha = 3/10$$

Question 3

(c) Dans la plupart des économies développées, la part du capital dans la rémunération des facteurs est égale à 30%.
En utilisant expression de la productivité marginale dans le cas de la fonction Cobb-Douglas, établissez comment l'on peut rendre compte de ce fait stylisé. On utilisera le fait que $\frac{PmK*K}{Y} = 30\%$. Commentez.

On sait que :

$$\begin{aligned} \alpha p Y &= RK \\ \alpha &= \frac{RK}{pY} \\ \alpha &= \frac{PmK * K}{Y} \\ \alpha &= 30\% \end{aligned}$$

On en conclue que le paramètre relatif au capital dans la fonction de production Cobb-Douglas représente donc la part de la richesse produite qui sera redistribuée sous forme de rémunération du capital dans une économie où les facteurs sont rémunérés à leur productivité marginale.

Question 3

(d) Que peut-on en déduire sur la part du PIB revenant au facteur travail ?

$$\frac{wL}{PY} = (1-\alpha)$$
$$= (1-0.3)$$
$$= 0.7$$

$$\Rightarrow \frac{wL}{PY} = 70\%$$

Question 3

(d) Que peut-on en déduire sur la part du PIB revenant au facteur travail ?

On sait que :

$$(1-\alpha)pY = wL$$
$$(1-\alpha) = \frac{wL}{pY}$$
$$(1-\alpha) = \frac{PmL * L}{Y}$$
$$(1-0.3) = \frac{PmL * L}{Y}$$

Conclusion

- Concept de Rendements d'échelle
- Productivité marginale et moyenne
- Propriétés intéressants de la fonction de production Cobb-Douglas