

РЕФЕРАТ ПО ТЕМЕ МАГИСТЕРСКОЙ ДИССЕРТАЦИИ

**ПРОДОЛЬНЫЕ ВОЛНЫ ДЕФОРМАЦИИ В НЕЛИНЕЙНО УПРУГИХ  
ВОЛНОВОДАХ**

Выполнил

Ф. Е. Гарбузов

Руководитель  
проф., д.т.н.

Б. С. Григорьев

Научный консультант  
к.ф.-м.н.

Я. М. Бельтюков

Санкт-Петербург  
2019

# 1 Введение

Исследование волн деформации в нелинейно упругих телах является важной темой современного изучения волн. Начиная с 1970-х годов опубликован ряд работ, в которых выводились упрощённые асимптотические модели типа Буссинеска и Кортвега–де Фриза для описания длинных продольных волн малой амплитуды в волноводах разной геометрии [1, 2, 3, 4, 5, 7, 6, 8]. Эти модели имеют семейства точных решений в виде уединённых волн — солитонов деформации.

В литературе обсуждается гипотетическая возможность применения солитонов деформации в задачах дефектоскопии, поскольку, как показано в недавних работах [9, 10, 11], солитоны сохраняют память о прохождении через область с дефектом (например, с расслоением). В ФТИ им. Иоффе много лет ведётся работа по экспериментальному обнаружению солитонов деформации [12, 13], однако до сих пор надёжных данных об их существовании нет. Ввиду этого представляет интерес построение моделей, учитывающих внешнее воздействие на волновод, с целью моделирования возникновения солитонов в результате воздействия внешних сил.

В настоящей работе мы рассмотрели нелинейные волны в однородных стержнях круглого сечения. Во-первых, следуя асимптотическому подходу, схожему с использовавшимся в ранее опубликованных работах, мы получили новую модель типа Буссинеска, учитывающую осесимметричную нагрузку на боковой поверхности стержня. Во-вторых, на основе многодоменного псевдоспектрального метода нам удалось построить эффективный численный метод для решения полных уравнений, описывающих динамику нелинейно упругого стержня. Мы провели численное моделирование ряда начально-краевых задач, в ходе которых возникали солитоны, и сравнили параметры солитонов в полной модели и упрощённой модели типа Буссинеска.

## 2 Нелинейная теория упругости

В рамках линейной теории упругости потенциальная энергия деформации включает в себя только слагаемые второго порядка относительно градиента вектора перемещения, в то время как в нелинейной теории учитываются слагаемые более высоких порядков. В случае слабой нелинейности (малых, но конечных деформаций) общей моделью для потенциальной энергии является модель Мурнагана:

$$W = \frac{\lambda + 2\mu}{2} I_1(\underline{\underline{E}})^2 - 2\mu I_2(\underline{\underline{E}}) + \frac{l + 2m}{3} I_1(\underline{\underline{E}})^3 - 2m I_1(\underline{\underline{E}}) I_2(\underline{\underline{E}}) + n I_3(\underline{\underline{E}}), \quad (1)$$

где  $I_1(\underline{\underline{E}}) = \text{tr } \underline{\underline{E}}$ ,  $I_2(\underline{\underline{E}}) = [(\text{tr } \underline{\underline{E}})^2 - \text{tr } \underline{\underline{E}}^2] / 2$ ,  $I_3(\underline{\underline{E}}) = \det \underline{\underline{E}}$  — инварианты тензора;  $\lambda$  и  $\mu$  — коэффициенты упругости Ламе;  $l$ ,  $m$ ,  $n$  — упругие модули Мурнагана; а тензор конечных деформаций Грина записывается следующим образом ( $\underline{U}$  — вектор перемещения):

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} ((\nabla \underline{U})^T + \nabla \underline{U} + (\nabla \underline{U})^T \cdot \nabla \underline{U}). \quad (2)$$

Полные уравнения движения стержня в отсутствие массовых сил записываются в векторном виде следующим образом:

$$\rho \ddot{\underline{U}} = \text{div} \underline{\underline{P}}, \quad \underline{\underline{P}} = (\underline{\underline{I}} + \nabla \underline{U}) \cdot \frac{\partial W}{\partial \underline{\underline{E}}}, \quad (3)$$

где  $\underline{\underline{P}}$  — первый тензор напряжений Пиолы-Кирхгофа, а  $\underline{\underline{I}}$  — единичный тензор.

### 3 Вывод упрощённой системы двух связанных уравнений

Рассмотрим стержень круглого поперечного сечения радиуса  $R$ . Введём цилиндрическую систему координат  $(x, r, \varphi)$ , где  $x$  — осевая координата,  $r$  — продольная,  $\varphi$  — угловая, как показано на рисунке 1. Положим стержень бесконечным вдоль оси  $x$ . Используя Лагранжев подход, введём вектор перемещения точек тела:  $\underline{U} = (U, V, W)$ , где  $U$  — осевое (продольное) перемещение,  $V$  — радиальное (поперечное) перемещение, а  $W$  — вращение.

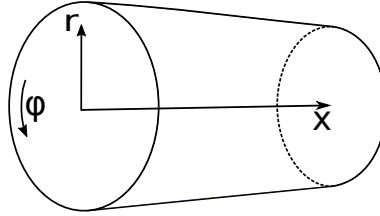


Рис. 1: Стержень с круглым поперечным сечением.

Рассмотрим задачу, в которой отсутствует кручение стержня, а продольное и поперечное перемещения не зависят от угла  $\varphi$ :

$$U = U(x, r, t), \quad V = V(x, r, t), \quad W = 0. \quad (4)$$

Уравнения движения, в условиях (4) и отсутствия массовых сил, принимают вид

$$\rho \frac{\partial^2 U(x, r, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial P_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial P_{xr}}{\partial r} - \frac{P_{xr}}{r} = 0, \quad (5)$$

$$\rho \frac{\partial^2 V(x, r, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial P_{rx}}{\partial x} - \frac{\partial P_{rr}}{\partial r} - \frac{P_{rr} - P_{\varphi\varphi}}{r} = 0, \quad (6)$$

а третье уравнение представляется в виде тождества  $0 \equiv 0$ . Здесь  $P_{\alpha\beta}$  обозначает компоненту первого тензора Пиолы-Кирхгофа. Задавая на поверхности стержня осесимметричное напряжение  $\underline{P}_b = (P(x, t), T(x, t), 0)$ , получаем граничные условия в виде:

$$P_{rr} = P(x, t) \quad \text{при} \quad r = R, \quad (7)$$

$$P_{xr} = T(x, t) \quad \text{при} \quad r = R. \quad (8)$$

Поскольку компонента  $P_{\varphi r} \equiv 0$ , третье граничное условие  $P_{\varphi r} = 0$  при  $r = R$  выполняется автоматически.

Следуя обсуждавшимся во введении работам и аналогичным исследованиям в рамках линейной упругости [15], будем искать решение в виде степенного ряда по радиальной координате:

$$U(x, r, t) = U_0(x, t) + r^2 U_2(x, t) + r^4 U_4(x, t) + \dots, \quad (9)$$

$$V(x, r, t) = r V_1(x, t) + r^3 V_3(x, t) + r^5 V_5(x, t) + \dots. \quad (10)$$

Введём масштабные множители, выделяющие среди прочих задачу о распространении длинных по сравнению с радиусом стержня волн малой амплитуды. Тогда безразмерные переменные и функции определяются следующими выражениями:

$$\tilde{t} = \frac{t}{L/c}, \quad \tilde{x} = \frac{x}{L}, \quad \tilde{r} = \frac{r}{L}, \quad \tilde{U} = \frac{U}{\varepsilon L}, \quad \tilde{V} = \frac{V}{\varepsilon L}, \quad \tilde{P} = \frac{P}{E\varepsilon}, \quad \tilde{T} = \frac{T}{E\varepsilon\delta}, \quad (11)$$

из которых следует, что  $\tilde{U}_n = L^{n-1}U_n/\varepsilon$ ,  $\tilde{V}_n = L^{n-1}V_n/\varepsilon$  для  $n \geq 0$ . Здесь  $L$  является характерной длиной волны,  $c$  – скорость линейной волны,  $E$  – модуль Юнга,  $\varepsilon \ll 1$  – малый параметр амплитуды,  $\delta = R/L \ll 1$  – второй малый параметр, а тильда обозначает безразмерную величину. Отметим, что при таком выборе масштабов переменная  $\tilde{r}$  принимает значения от 0 до  $\delta$  и является малой величиной. В дальнейшем мы опустим тильду над безразмерными величинами.

Подстановка (9), (10) в уравнения движения (5), (6) и приравнивание к нулю коэффициентов при различных степенях  $r$  позволяет выразить все старшие члены разложений ( $U_2$ ,  $V_3$ ,  $U_4$ ) через первые ( $U_0$  и  $V_1$ ), представляя их в виде ряда по малому параметру  $\varepsilon$ :

$$U_2 = \frac{1}{4\mu} [\rho c^2 U_{0tt} - (\lambda + 2\mu) U_{0xx} - 2(\lambda + \mu) V_{1x}] + \varepsilon f_2(x, t) + O(\varepsilon^2), \quad (12)$$

$$V_3 = \frac{1}{8(\lambda + 2\mu)} [\rho c^2 V_{1tt} - 2(\lambda + \mu) U_{2x} - \mu V_{1xx}] + \varepsilon f_3(x, t) + O(\varepsilon^2), \quad (13)$$

$$U_4 = \frac{1}{16\mu} [\rho c^2 U_{2tt} - (\lambda + 2\mu) U_{2xx} - 4(\lambda + \mu) V_{3x}] + O(\varepsilon). \quad (14)$$

Здесь  $x$  и  $t$  в нижнем индексе обозначает частную производную по соответствующей переменной, а выражения для нелинейных функций  $f_2$  и  $f_3$  очень громоздки и не приводятся здесь.

Подстановка функций  $U_2$ ,  $V_3$ ,  $U_4$  в граничные условия (7), (8) приводит к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} 2(\lambda + \mu)V_1 + \lambda U_{0x} + \varepsilon \Psi_1(U_0, V_1) + \frac{\delta^2}{8} \left[ (\lambda + 3\mu) U_{0xxx} - \frac{\rho c^2 (\lambda + 3\mu)}{\lambda + 2\mu} U_{0xtt} \right. \\ \left. + \frac{2\rho c^2 (2\lambda + 3\mu)}{\lambda + 2\mu} V_{1tt} + 2\lambda V_{1xx} \right] + O(\varepsilon^2, \varepsilon\delta^2, \delta^4) = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} P, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned}
\rho c^2 U_{0tt} - 2\lambda V_{1x} - (\lambda + 2\mu)U_{0xx} - \varepsilon \Psi_2(U_0, V_1) + \frac{\delta^2}{8} \left[ (3\lambda + 4\mu)U_{0xxxx} + \frac{\rho^2 c^4}{\mu} U_{0tttt} \right. \\
\left. - \frac{\rho c^2 (\lambda^2 + 7\lambda\mu + 8\mu^2)}{\mu(\lambda + 2\mu)} U_{0xxtt} + 2(3\lambda + 2\mu)V_{1xxx} - \frac{2\rho c^2 (\lambda^2 + 4\lambda\mu + 2\mu^2)}{\mu(\lambda + 2\mu)} V_{1xtt} \right] \\
+ O(\varepsilon^2, \varepsilon\delta^2, \delta^4) = \frac{2\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} T,
\end{aligned} \tag{16}$$

где нелинейные члены выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned}
\Psi_1 &= (4l + 2m + 3\lambda + 3\mu)V_1^2 + (4l - 2m + n + \lambda)U_{0x}V_1 + \frac{1}{2}(2l + \lambda)U_{0x}^2, \\
\Psi_2 &= \left( (4l - 2m + n + \lambda)V_1^2 + 2(2l + \lambda)U_{0x}V_1 + \frac{1}{2}(2l + 4m + 3\lambda + 6\mu)U_{0x}^2 \right)_x.
\end{aligned}$$

Эта система связанных уравнений представляет собой довольно сложную модель, однако она может быть сведена к одному уравнению типа Буссинеска.

## 4 Вывод уравнения типа Буссинеска

Существует два естественных способа вывода модели типа Буссинеска. В первом способе исключение функции  $V_1$  из уравнений (15) и (16) осуществляется с помощью асимптотического выражения, следующего из уравнения (15):

$$V_1(x, t) = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)P}{2(\lambda + \mu)^2} - \frac{\lambda U_{0x}}{2(\lambda + \mu)} + \varepsilon f(x, t) + \delta^2 g(x, t) + O(\varepsilon^2, \varepsilon\delta^2, \delta^4), \tag{17}$$

где неизвестные функции  $f$  и  $g$  ищутся из условия равенства нулю коэффициентов при  $\varepsilon$  и  $\delta^2$  в (15). Затем, подстановка  $V_1$  в (16) приводит к следующему уравнению типа Буссинеска относительно  $U_0$ :

$$\begin{aligned}
\rho c^2 U_{0tt} - \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \left( U_{0xx} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} P_x + 2T \right) - \varepsilon (\gamma_1 U_{0x}^2 + \gamma_2 U_x P + \gamma_3 P^2)_x \\
+ \delta^2 \left[ \frac{\rho^2 c^4 U_{0tttt}}{8\mu} + \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)^2 U_{0xxxx}}{8(\lambda + \mu)^2} - \frac{\rho c^2 (7\lambda^2 + 10\lambda\mu + 4\mu^2) U_{0xxtt}}{8(\lambda + \mu)^2} + F(P, T) \right] \\
+ O(\varepsilon^2, \varepsilon\delta^2, \delta^4) = 0.
\end{aligned} \tag{18}$$

Коэффициенты  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ ,  $\gamma_3$  и функция  $F$  громоздки и не приводятся здесь.

Другой метод основан на точном, а не асимптотическом исключении  $V_1$  из линейной части уравнений (15) и (16). Уравнения (15) и (16) могут быть записаны в следующем виде:

$$L_1 V_1 + \varepsilon \Psi_1(U_0, V_1) = a_1 P + M_1 U_0 + O(\varepsilon^2, \varepsilon\delta^2, \delta^4), \tag{19}$$

$$L_2 V_1 + \varepsilon \Psi_2(U_0, V_1) = a_2 T + M_2 U_0 + O(\varepsilon^2, \varepsilon\delta^2, \delta^4), \tag{20}$$

где  $a_1$  и  $a_2$  — константы;  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $M_1$  и  $M_2$  — линейные дифференциальные операторы, действующие на  $V_1$  и  $U_0$  соответственно в уравнениях (15) и (16). Теперь, применяя  $L_2$  к первому уравнению,  $L_1$  ко второму и вычитая одно уравнение из другого, получаем:

$$\varepsilon [L_2 \Psi_1(U_0, V_1) - L_1 \Psi_2(U_0, V_1)] = L_2 (a_1 P + M_1 U_0) - L_1 (a_2 T + M_2 U_0) + O(\varepsilon^2, \varepsilon\delta^2, \delta^4). \tag{21}$$

Чтобы исключить  $V_1$  из нелинейной части приходится воспользоваться асимптотическим выражением (17), что приводит к следующему уравнению:

$$\begin{aligned} \rho c^2 U_{0tt} - \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \left( U_{0xx} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} P_x + 2T \right) - \varepsilon (\gamma_1 U_{0x}^2 + \gamma_2 U_x P + \gamma_3 P^2)_x \\ + \delta^2 \left[ \frac{\rho^2 c^4 (\lambda^2 + 5\lambda\mu + 5\mu^2) U_{0tttt}}{8\mu(\lambda + 2\mu)(\lambda + \mu)} - \frac{\rho c^2 (6\lambda^2 + 21\lambda\mu + 14\mu^2) U_{0xxtt}}{8(\lambda + 2\mu)(\lambda + \mu)} \right. \\ \left. + \frac{\mu(3\lambda + 2\mu) U_{0xxxx}}{4(\lambda + \mu)} + G(P, T) \right] + O(\varepsilon^2, \varepsilon\delta^2, \delta^4) = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Теперь, предполагая, что коэффициенты при нелинейных и дисперсионных слагаемых в уравнениях (18) и (22) являются величинами одного порядка ( $\varepsilon \sim \delta^2$ ), можно отбросить слагаемые  $O(\varepsilon^2, \varepsilon\delta^2, \delta^4)$ .

Полученные уравнения записаны относительно перемещения  $U_0$ , однако основной интерес представляют значения не перемещения, а деформации. Продифференцируем уравнения (18) и (22) по  $x$  и введём новую функцию  $u = U_{0x}$ , характеризующую продольную деформацию. Получаемые в результате уравнения мы запишем в размерном виде, вместо упругих модулей Ламе  $\lambda$  и  $\mu$  подставим их выражения через модуль Юнга  $E$  и коэффициент Пуассона  $\nu$ , а также учтём, что  $c = \sqrt{E/\rho}$ :

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} - \frac{2}{\rho} \left( \nu P_{xx} + \frac{1}{R} T_x \right) - \left( \frac{\beta_1}{2\rho} u^2 + \frac{\beta_2}{\rho E} u P + \frac{\beta_3}{2\rho E^2} P^2 \right)_{xx} \\ + R^2 \left( \frac{\alpha_1^{(i)}}{c^2} u_{tttt} + \alpha_2^{(i)} u_{xttt} + c^2 \alpha_3^{(i)} u_{xxxx} + G^{(i)}(P, T) \right) = 0, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (23)$$

где  $i = 1$  соответствует уравнению (18), а  $i = 2$  уравнению (22), а коэффициенты принимают следующий вид:

$$\beta_1 = 3E + 2l(1 - 2\nu)^3 + 4m(1 + \nu)^2(1 - 2\nu) + 6n\nu^2, \quad (24)$$

$$\beta_2 = 2(1 + \nu) [2l(1 - 2\nu)^3 + \nu (E + 4m(1 - \nu - 2\nu^2) - 2n(1 - 2\nu))], \quad (25)$$

$$\beta_3 = 2(1 + \nu)(1 - 2\nu) [(1 + \nu)(1 - 2\nu)[4l(1 - 2\nu) - 2m(1 + 2\nu) + n] - 2\nu E] \quad (26)$$

$$\alpha_1^{(1)} = \alpha_3^{(1)} = \frac{1 + \nu}{4}, \quad \alpha_2^{(1)} = -\frac{1 + \nu + \nu^2}{2}, \quad (27)$$

$$\alpha_1^{(2)} = \frac{5 - 5\nu - 6\nu^2 + 4\nu^3}{8(1 - \nu)}, \quad \alpha_2^{(2)} = -\frac{7 - 7\nu - 2\nu^2}{8(1 - \nu)}, \quad \alpha_3^{(2)} = \frac{1}{4}, \quad (28)$$

$$G^{(1)} = \frac{1 + \nu + 2\nu^2}{4\rho} P_{xxxx} - \frac{1 - \nu + 2\nu^2 + 4\nu^3}{4E} P_{xtt}, \quad (29)$$

$$G^{(2)} = \frac{1 + \nu}{4\rho} P_{xxxx} - \frac{1 + \nu - 2\nu^2 - 2\nu^3}{4E(1 - \nu)} P_{xtt} - \frac{3 - 5\nu - 4\nu^2 + 4\nu^3}{8ER(1 - \nu)} T_{xtt} - \frac{\nu}{2\rho R} T_{xxx}. \quad (30)$$

В случае условия свободной поверхности, т.е.  $P = T = 0$ , уравнения (23) сводятся к

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = \frac{\beta_1}{2\rho} (u^2)_{xx} - R^2 \left( \frac{\alpha_1^{(i)}}{c^2} u_{tttt} + \alpha_2^{(i)} u_{xttt} + c^2 \alpha_3^{(i)} u_{xxxx} \right), \quad i = 1, 2. \quad (31)$$

Сравним оба уравнения (31) с «уравнением с двумя дисперсиями», полученным

Самсоновым и Порубовым [5] и «регуляризованным» уравнением, выведенным Островским и Сутиным [1]. Эти уравнения могут быть записаны в форме уравнений (23) с помощью следующих дисперсионных коэффициентов:

$$\begin{aligned}\alpha_1^{(3)} &= 0, & \alpha_2^{(3)} &= \frac{(1-\nu)\nu}{2}, & \alpha_3^{(3)} &= -\frac{\nu}{2}, \\ \alpha_1^{(4)} &= 0, & \alpha_2^{(4)} &= -\frac{\nu^2}{2}, & \alpha_3^{(4)} &= 0,\end{aligned}$$

для уравнения Самсонова–Порубова и регуляризованного уравнения соответственно.

Поясним подробнее что значит «регуляризация». Все четыре приведённые выше модели не являются асимптотически точными уравнениями, т.е. в безразмерной форме они содержат как члены  $O(1)$ , так и  $O(\varepsilon, \delta^2)$ . Следовательно, все эти уравнения могут быть «регуляризованы» (сведены) к одному уравнению, в котором есть только одно дисперсионное слагаемое, используя асимптотическое соотношение  $u_{tt} = c^2 u_{xx} + \text{< малые члены >}$ . Коэффициент при этом дисперсионном слагаемом определяется суммой дисперсионных коэффициентов  $\alpha_j$  и одинаков для всех четырех уравнений:

$$\alpha_1^{(i)} + \alpha_2^{(i)} + \alpha_3^{(i)} = -\frac{\nu^2}{2}, \quad i = \overline{1, 4}, \quad (32)$$

что означает, что эти уравнения асимптотически эквивалентны.

Регуляризация может быть применена и к уравнению с внешним воздействием (23) в виде  $u_{tt} = c^2 u_{xx} + \frac{2}{\rho} (\nu P_{xx} + \frac{1}{R} T_x) + \text{< мал. члены >}$ . Получаемое таким образом уравнение имеет вид:

$$\begin{aligned}u_{tt} - c^2 u_{xx} - \frac{2}{\rho} \left( \nu P_{xx} + \frac{1}{R} T_x \right) - \left( \frac{\beta_1}{2\rho} u^2 + \frac{\beta_2}{\rho E} uP + \frac{\beta_3}{2\rho E^2} P^2 \right)_{xx} - \frac{\nu^2 R^2}{2} u_{xxtt} \\ + \frac{R^2}{4} \left( \frac{1-\nu}{\rho} P_{xxxx} - \frac{1-3\nu+4\nu^3}{E} P_{xxtt} \right) + \frac{(1+\nu)R}{2} \left( \frac{1}{E} T_{xtt} - \frac{1}{\rho} T_{xxx} \right) = 0, \quad i = 1, 2.\end{aligned} \quad (33)$$

Некоторые исследователи рассматривали задачу о распространении длинных продольных волн в предварительно растянутом стержне [7], поэтому для систематичности исследования мы рассмотрели и такую задачу. Продольное равномерное осевое растяжение задаётся в виде:

$$U^*(x) = \kappa x, \quad (34)$$

где  $\kappa$  – постоянная, что приводит, следуя описанному выше выводу, к несколько модифицированному уравнению (23):

$$\begin{aligned}u_{tt} - \left( c^2 + \kappa \frac{\beta_1}{\rho} \right) u_{xx} - \frac{2}{\rho} \left[ \left( \nu + \kappa \frac{\beta_2}{2E} \right) P_{xx} + \frac{1}{R} T_x \right] - \left( \frac{\beta_1}{2\rho} u^2 + \frac{\beta_2}{\rho E} uP + \frac{\beta_3}{2\rho E^2} P^2 \right)_{xx} \\ + R^2 \left( \frac{\alpha_1^{(i)}}{c^2} u_{tttt} + \alpha_2^{(i)} u_{xxtt} + c^2 \alpha_3^{(i)} u_{xxxx} + G^{(i)}(P, T) \right) = 0, \quad i = 1, 2.\end{aligned} \quad (35)$$

Предварительное растяжение изменило скорость длинных линейных волн, квадрат которой равен коэффициенту при  $u_{xx}$ , сделав её зависимой от коэффициента  $\beta_1$ , содержащего упругие модули Мурнагана. Это явление, называемое акустоэластическим эффектом, ле-

жит в основе экспериментального определения модулей Мурнагана.

Насколько известно автору, обе модели, описываемые уравнениями (35), а также их упрощённые версии (23), (31) и (33) получены впервые.

## 5 Дисперсионные свойства и солитонные решения

На рисунке 2 представлены дисперсионные кривые четырёх упрощённых (с нулевыми напряжениями на поверхности и без предварительного растяжения) линеаризованных уравнения типа Буссинеска, приведённые в предыдущих разделах, а также нижние три ветви точного дисперсионного соотношения Похгаммера-Кри для линейной задачи.

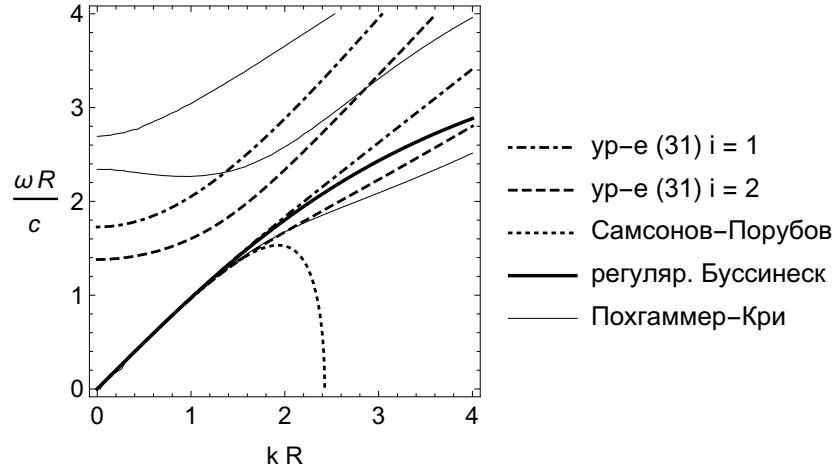


Рис. 2: Дисперсионные кривые для стержня с  $\nu = 0.34$ .

Все модели достаточно хорошо описывают нижнюю ветвь дисперсионной кривой в длинноволновой области, однако наиболее точной является модель (31,  $i = 2$ ), что объясняется более аккуратной процедурой исключения функции  $V_1$  из уравнений (15) и (16). Уравнение Самсонова – Порубова обладает коротковолновой неустойчивостью, в то время как остальные три модели не имеют такого эффекта. Полученные в настоящей работе уравнения (31) в отличие от других уравнений улавливают вторую ветвь дисперсионной кривой, правда описывают её очень неточно: помимо большого отличия по значению, эти кривые имеют всюду положительный наклон, тогда как точная кривая имеет отрицательный наклон в области длинных волн, что соответствует отрицательной групповой скорости.

Все четыре уравнения (31) имеют семейство солитонных решений:

$$u_i(x, t) = A \operatorname{sech}^2 \left[ B_i \left( x \pm t \sqrt{c^2 + \frac{A\beta_1}{3\rho}} \right) \right], \quad i = \overline{1, 4}. \quad (36)$$

$$B_i = \sqrt{\frac{3A\beta_1 E}{-4 \left[ (A\beta_1 + 3E)^2 \alpha_1^{(i)} + 3E(A\beta_1 + 3E) \alpha_2^{(i)} + 9E^2 \alpha_3^{(i)} \right] R^2}}, \quad i = \overline{1, 4}. \quad (37)$$

Здесь амплитуда  $A$  является свободным параметром, причём при  $A < 0$  такая волна называется солитоном сжатия, а при  $A > 0$  — солитоном разрежения.



На рисунке 3 в левой части изображены четыре солитона сжатия, задаваемых формулами (36) и имеющих амплитудный параметр  $A = -0.05$ . «Регуляризованный» солитон (36,  $i = 4$ ) и солитон (36,  $i = 1$ ) практически полностью совпадают и являются самыми длинными из всех. Однако солитоны такой амплитуды вызывают напряжения близкие к пределу упругости для полистирола. В экспериментах с полистироловым стержнем, описанных в [14], амплитуда очень мала:  $A \sim 10^{-3} - 10^{-4}$ , и, следовательно, в во всех четырёх формулах параметр длины примерно равен

$$B = \sqrt{\frac{A\beta_1}{6\nu^2 ER^2}}, \quad (38)$$

а соответствующее солитонное решение изображено в правой части рисунка 3 для  $A = -0.001$ . Отметим, что для полистирола, упругие характеристики которого представлены в таблице 1, коэффициент  $\beta_1$ , задаваемый формулой (24) отрицателен и, следовательно, параметр  $B$  вещественен. Более того, из формулы (38) следует, что при малых значениях  $A$  тип солитона (сжатия или растяжения) определяется именно знаком коэффициента  $\beta_1$ .

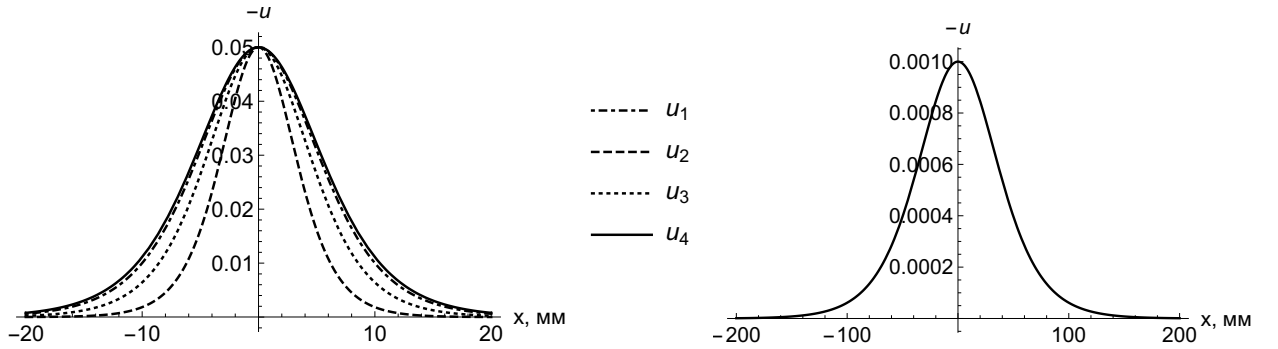


Рис. 3: Графики функций  $-u_i(x, t)$ , задаваемых формулой (36), в стержне радиуса  $R = 5$  мм, сделанном из полистирола при  $A = -0.05$  (слева) и  $A = -0.001$  (справа).

Таблица 1: Упругие модули полистирола.

| Модуль Юнга<br>$E$ , Н/м <sup>2</sup> | Коэффициент<br>Пуассона, $\nu$ | Модули Мурнагана, Н/м <sup>2</sup> |                    |                  | Плотность<br>$\rho$ , кг/м <sup>3</sup> |
|---------------------------------------|--------------------------------|------------------------------------|--------------------|------------------|---|
|                                       |                                | $l$                                | $m$                | $n$              |   |
| $3.7 \cdot 10^9$                      | 0.34                           | $-18.9 \cdot 10^9$                 | $-13.3 \cdot 10^9$ | $-10 \cdot 10^9$ | 1060                                    |

## 6 Численное моделирование

Основной интерес для нас представляют непрерывные гладкие решения рассмотренных в предыдущих разделах уравнений, поэтому для численного моделирования мы воспользовались многодоменным псевдоспектральным методом [16], с помощью которого мы решали как полные трёхмерные уравнения (1) – (3), так и одномерное регуляризованное уравнение Буссинеска (33). Пример трёхмерной пространственной дискретизации (расположение узлов сетки в стержне) показан на рисунке 4.

На рисунке 5 представлено сравнение эволюции заданной в начальный момент времени волны согласно полным уравнениям и регуляризованному уравнению Буссинеска при отсутствии граничных напряжений. В рамках обеих моделей возникают солитоны,

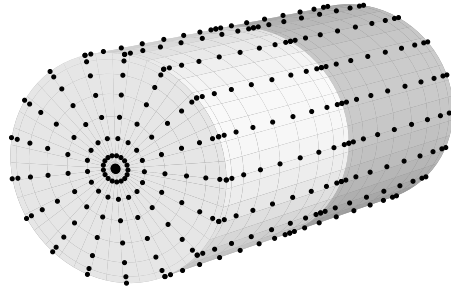


Рис. 4: Пример трёхмерной сетки из двух доменов, обозначенных разными цветами.

двигающиеся быстрее линейной скорости  $c = \sqrt{E/\rho}$ . В первом случае (левый график) модель Буссинеска дала солитон на 8% большей амплитуды и, как следствие, бегущий несколько быстрее солитона в полной модели. Во втором случае (правый график), отличающегося от первого большей амплитудой начальной волны, отличие полной модели от модели Буссинеска намного значительнее.

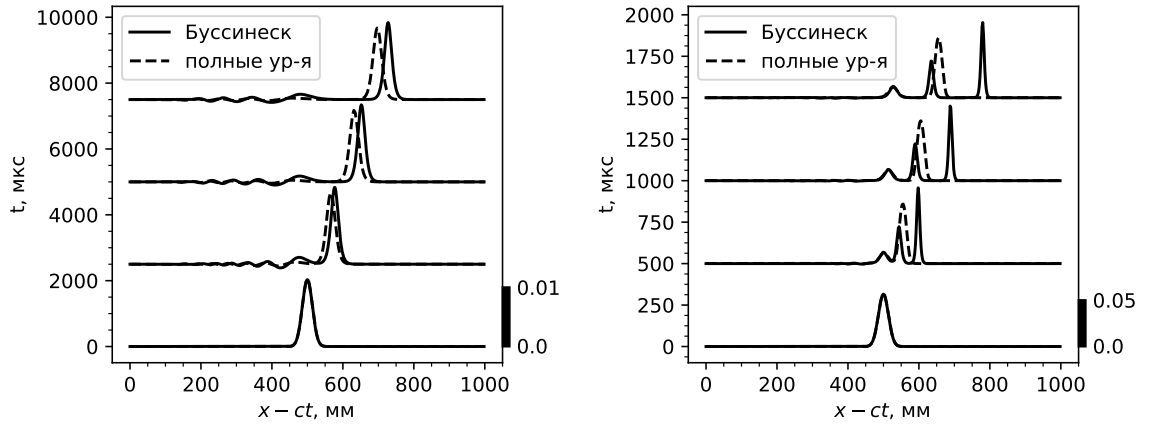


Рис. 5: Профили решений  $-u(x-ct, t)$  регуляризованного уравнения Буссинеска и продольной деформации  $-U_x(x-ct, 0, t)$  в центре стержня ( $r = 0$ ) в различные моменты времени. Масштаб амплитуды деформации показан чёрным прямоугольником.

На рисунке 6 представлено сравнение зависимости скорости солитона от амплитуды в модели Буссинеска (36) и в полной модели. На этом рисунке отчётливо виден асимптотический характер модели Буссинеска.

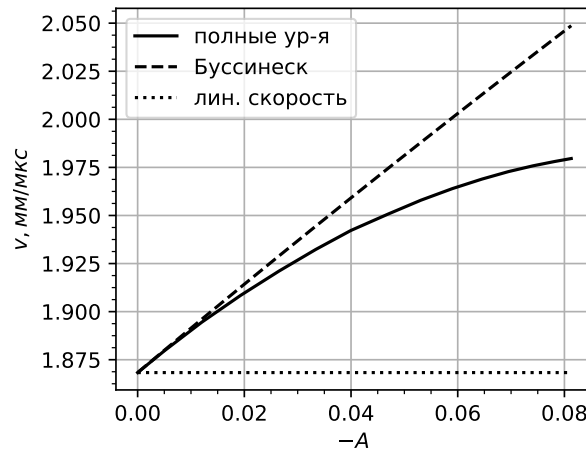


Рис. 6: Зависимость скорости солитона от амплитуды. Горизонтальная линия — скорость линейных волн  $c$ .

Представляет большой интерес возможность возбуждения солитонов в результате внешнего воздействия. На рисунке 7 представлены результаты моделирования при наличии коротких воздействий (ударов) на торец и на боковую поверхность стержня. Отметим, что в модели Буссинеска стержень предполагается бесконечным и, следовательно, не имеет торцов, однако, мы можем симитировать удар, задав короткую начальную волну, похожую на ту, что возникает при ударе в полной модели.

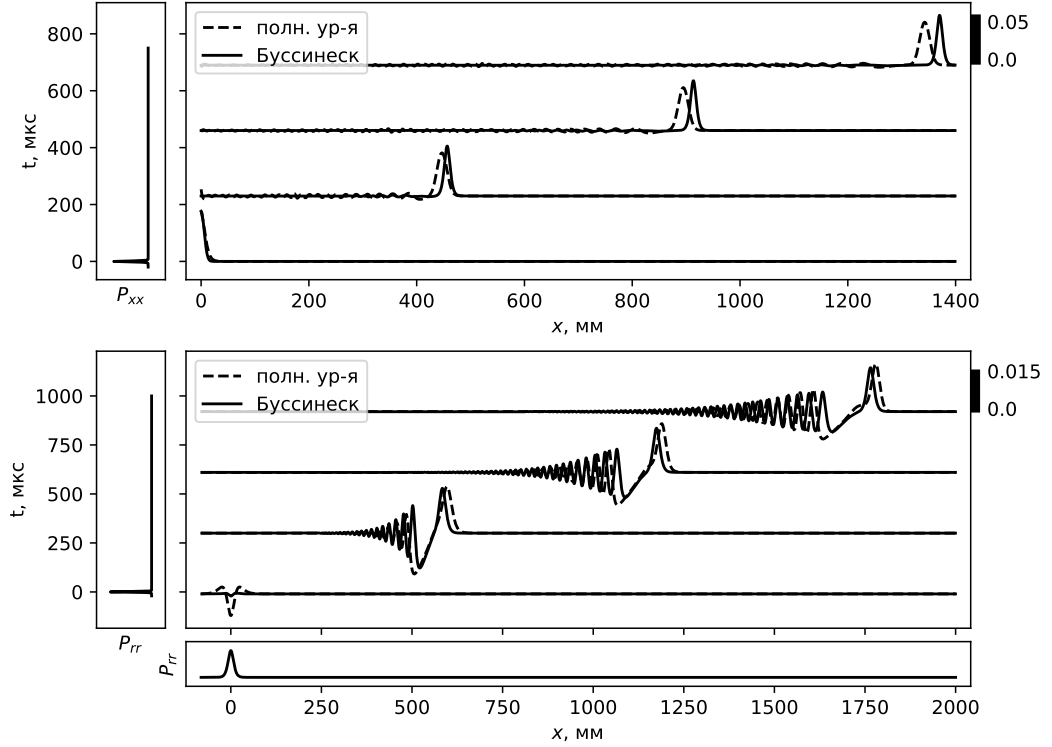


Рис. 7: Удар по торцу (верхний график) и по боковой поверхности (нижний график) в стержне из полистирола. Вертикальный и горизонтальные подграфики показывают зависимость нормального напряжения на поверхности от времени и координаты  $x$ . При ударе по торцу напряжение задано одинаковым на всей площади торца.

На рисунках видно, что модель Буссинеска даёт результаты, схожие с полной моделью. Учитывая, что на рисунках 7 амплитуды деформации являются достаточно большими в сравнении с пределом упругости и в реальных экспериментах амплитуды как правило на порядок меньше, то можно сделать вывод о хорошей применимости модели Буссинеска для моделирования возникновения солитонов.

## 7 Заключение

Для описания продольных длинных волн в стержнях круглого сечения мы вывели две новые асимптотические модели типа Буссинеска, отличающиеся друг от друга коэффициентами при дисперсионных слагаемых. Эти модели обобщены на случай ненулевой осесимметричной нагрузки на боковой поверхности, а также на случай предварительно растянутого стержня.

Нам удалось построить метод, позволяющий численно моделировать полные трёхмерные уравнения движения стержня в рамках нелинейной теории упругости. Мы чис-

ленно решили ряд начально-краевых задач и показали хорошую применимость модели типа Буссинеска для моделирования возникновения солитонов.

Результаты настоящей работы частично опубликованы в [14].

## Список литературы

- [1] Ostrovsky L. A., Sutin A. M., Nonlinear elastic waves in rods, *PMM*, 1977, 41, 531–537.
- [2] Nariboli G. A., Sedov A., Burgers-Korteweg de Vries equation for viscoelastic rods and plates, *J. Math. Anal. Appl.*, 1970, 32 (3), 661–677.
- [3] Samsonov A. M., Strain solitons in solids and how to construct them, Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2001.
- [4] Porubov A. V., Amplification of nonlinear strain waves in solids, Singapore: World Scientific, 2003.
- [5] Samsonov A. M., Porubov A. V., Refinement of the model for the propagation of longitudinal strain waves in a rod with nonlinear elasticity, *Tech. Phys. Lett.*, 1993, 19 (6), 365–366.
- [6] Dai H.-H., Fan X., Asymptotically approximate model equations for weakly nonlinear long waves in compressible elastic rods and their comparisons with other simplified model equations, *Maths. Mechs. Solids* 9 (2004) 61–79.
- [7] Dai H.-H., and Z. Cai, Uniform asymptotic analysis for transient waves in a pre-stressed compressible hyperelastic rod, *Acta Mechanica* 139 (2000) 201–230.
- [8] Khusnutdinova K. R., Samsonov A. M., A.S. Zakharov, Nonlinear layered lattice model and generalized solitary waves in imperfectly bonded structures, *Phys. Rev. E* 79(5) (2009) 056606.
- [9] Khusnutdinova K. R., Samsonov A. M., Fission of a longitudinal strain solitary wave in a delaminated bar, *Phys. Rev. E* 77 (2008) 066603.
- [10] Khusnutdinova K. R., Tranter M. R., Modelling of nonlinear wave scattering in a delaminated elastic bar, *Proc. R. Soc. A* 471 (2015) 20150584.
- [11] Khusnutdinova K. R., Tranter M. R., On radiating solitary waves in bi-layers with delamination and coupled Ostrovsky equations, *Chaos* 27 (2017) 013112.
- [12] Dreiden G. V., Khusnutdinova K. R., Samsonov A. M., and Semenova I. V., Splitting induced generation of soliton trains in layered waveguides, *J. Appl. Phys.* 107 (2010) 034909.
- [13] Dreiden G. V., Khusnutdinova K. R., Samsonov A. M., and Semenova I. V., Bulk strain solitary waves in bonded layered polymeric bars with delamination, *J. Appl. Phys.* 112 (2012) 063516.
- [14] Garbuzov F. E., Khusnutdinova K. R., Semenova I. V., On Boussinesq-type models for long longitudinal waves in elastic rods, *Wave Motion*, 2019, 88 129–143.
- [15] Boström A., On wave equations for elastic rods, *ZAMM*, 2000, 80 (4), 245–251.
- [16] Canuto C. et al., Spectral Methods. Evolution to Complex Geometries and Applications to Fluid Dynamics, Berlin: Springer-Verlag, 2007.