РЕФЕРАТ ПО ТЕМЕ МАГИСТЕРСКОЙ ДИССЕРТАЦИИ

ПРОДОЛЬНЫЕ ВОЛНЫ ДЕФОРМАЦИИ В НЕЛИНЕЙНО УПРУГИХ ВОЛНОВОДАХ

Выполнил	Ф. Е. Гарбузов
Руководитель проф., д.т.н.	Б. С. Григорьев
Научный консультант к.ф.-м.н.	Я. М. Бельтюков

Санкт-Петербург

2019

1 Введение

Исследование волн деформации в нелинейно упругих телах является важной темой современного изучения волн. Начиная с 1970-х годов опубликован ряд работ, в которых выводились упрощённые асимптотические модели типа Буссинеска и Кортевега–де Фриза для описания длинных продольных волн малой амплитуды в волноводах разной геометрии [1, 2, 3, 4, 5, 7, 6, 8]. Эти модели имеют семейства точных решений в виде уединённых волн — солитонов деформации.

В литературе обсуждается гипотетическая возможность применения солитонов деформации в задачах дефектоскопии, поскольку, как показано в недавних работах [9, 10, 11], солитоны сохраняют память о прохождении через область с дефектом (например, с расслоением). В ФТИ им. Иоффе много лет ведётся работа по экспериментальному обнаружению солитонов деформации [12, 13], однако до сих пор надёжных данных об их существовании нет. Ввиду этого представляет интерес построение моделей, учитывающих внешнее воздействие на волновод, с целью моделирования возникновения солитонов в результате воздействия внешних сил.

В настоящей работе мы рассмотрели нелинейные волны в однородных стержнях круглого сечения. Во-первых, следуя асимптотическому подходу, схожему с использовавшимся в ранее опубликованных работах, мы получили новую модель типа Буссинеска, учитывающую осесимметричную нагрузку на боковой поверхности стержня. Во-вторых, на основе многодоменного псевдоспектрального метода нам удалось построить эффективный численный метод для решения полных уравнений, описывающих динамику нелинейно упругого стержня. Мы провели численное моделирование ряда начально-краевых задач, в ходе которых возникали солитоны, и сравнили параметры солитонов в полной модели и упрощённой модели типа Буссинеска.

2 Нелинейная теория упругости

В рамках линейной теории упругости потенциальная энергия деформации включает в себя только слагаемые второго порядка относительно градиента вектора перемещения, в то время как в нелинейной теории учитываются слагаемые более высоких порядков. В случае слабой нелинейности (малых, но конечных деформаций) общей моделью для потенциальной энергии является модель Мурнагана:

$$W = \frac{\lambda + 2\mu}{2} I_1(\underline{\underline{E}})^2 - 2\mu I_2(\underline{\underline{E}}) + \frac{l + 2m}{3} I_1(\underline{\underline{E}})^3 - 2m I_1(\underline{\underline{E}}) I_2(\underline{\underline{E}}) + n I_3(\underline{\underline{E}}), \tag{1}$$

где $I_1(\underline{\underline{E}}) = \operatorname{tr}\underline{\underline{E}},\ I_2(\underline{\underline{E}}) = \left[(\operatorname{tr}\underline{\underline{E}})^2 - \operatorname{tr}\underline{\underline{E}}^2\right]/2,\ I_3(\underline{\underline{E}}) = \det\underline{\underline{E}}$ — инварианты тензора; λ и μ — коэффициенты упругости Ламе; l, m, n — упругие модули Мурнагана; а тензор конечных деформаций Грина записывается следующим образом ($\underline{U}$ — вектор перемещения):

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2}\left((\nabla\underline{U})^T + \nabla\underline{U} + (\nabla\underline{U})^T \cdot \nabla\underline{U}\right). \tag{2}$$

Полные уравнения движения стержня в отсутствие массовых сил записываются в векторном виде следующим образом:

$$\rho \ddot{\underline{U}} = \mathrm{div} \underline{\underline{P}}, \qquad \underline{\underline{P}} = (\underline{\underline{I}} + \nabla \underline{U}) \cdot \frac{\partial W}{\partial \underline{\underline{E}}}, \tag{3}$$

где P — первый тензор напряжений Пиолы-Кирхгофа, а $\underline{\underline{I}}$ — единичный тензор.

3 Вывод упрощённой системы двух связанных уравнений

Рассмотрим стержень круглого поперечного сечения радиуса R. Введём цилиндрическую систему координат (x, r, φ), где x – осевая координата, r – продольная, φ – угловая, как показано на рисунке 1. Положим стержень бесконечным вдоль оси x. Используя Лагранжев подход, введём вектор перемещения точек тела: $\underline{U} = (U, V, W)$, где U – осевое (продольное) перемещение, V – радиальное (поперечное) перемещение, а W – вращение.

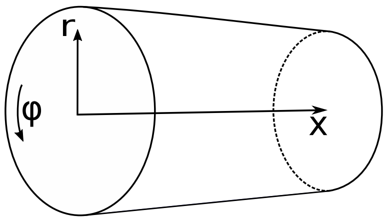

Рис. 1: Стержень с круглым поперечным сечением.

Рассмотрим задачу, в которой отсутствует кручение стержня, а продольное и поперечное перемещения не зависят от угла φ:

$$U = U(x, r, t), \quad V = V(x, r, t), \quad W = 0. \tag{4}$$

Уравнения движения, в условиях (4) и отсутствия массовых сил, принимают вид

$$\rho \frac{\partial^2 U(x, r, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial P_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial P_{xr}}{\partial r} - \frac{P_{xr}}{r} = 0, \tag{5}$$

$$\rho \frac{\partial^2 V(x, r, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial P_{rx}}{\partial x} - \frac{\partial P_{rr}}{\partial r} - \frac{P_{rr} - P_{\varphi\varphi}}{r} = 0, \tag{6}$$

а третье уравнение представляется в виде тождества $0 \equiv 0$. Здесь $P_{\alpha\beta}$ обозначает компоненту первого тензора Пиолы-Кирхгофа. Задавая на поверхности стержня осесимметричное напряжение $\underline{P_b} = (P(x,t), T(x,t), 0)$, получаем граничные условия в виде:

$$P_{rr} = P(x, t) \quad \text{при} \quad r = R, \tag{7}$$

$$P_{xr} = T(x, t) \quad \text{при} \quad r = R. \tag{8}$$

Поскольку компонента $P_{\varphi r} \equiv 0$, третье граничное условие $P_{\varphi r} = 0$ при $r = R$ выполняется автоматически.

Следуя обсуждавшимся во введении работам и аналогичным исследованиям в рамках линейной упругости [15], будем искать решение в виде степенного ряда по радиальной координате:

$$U(x,r,t) = U_0(x,t) + r^2 U_2(x,t) + r^4 U_4(x,t) + \dots, \tag{9}$$

$$V(x,r,t) = rV_1(x,t) + r^3 V_3(x,t) + r^5 V_5(x,t) + \dots. \tag{10}$$

Введём масштабные множители, выделяющие среди прочих задачу о распространении длинных по сравнению с радиусом стержня волн малой амплитуды. Тогда безразмерные переменные и функции определяются следующими выражениями:

$$\tilde{t} = \frac{t}{L/c}, \quad \tilde{x} = \frac{x}{L}, \quad \tilde{r} = \frac{r}{L}, \quad \tilde{U} = \frac{U}{\varepsilon L}, \quad \tilde{V} = \frac{V}{\varepsilon L}, \quad \tilde{P} = \frac{P}{E\varepsilon}, \quad \tilde{T} = \frac{T}{E\varepsilon\delta}, \tag{11}$$

из которых следует, что $\tilde{U}_n = L^{n-1}U_n/\varepsilon$, $\tilde{V}_n = L^{n-1}V_n/\varepsilon$ для $n \geqslant 0$. Здесь L является характерной длиной волны, c – скорость линейной волны, E – модуль Юнга, $\varepsilon \ll 1$ — малый параметр амплитуды, $\delta = R/L \ll 1$ — второй малый параметр, а тильда обозначает безразмерную величину. Отметим, что при таком выборе масштабов переменная $\tilde{r}$ принимает значения от 0 до δ и является малой величиной. В дальнейшем мы опустим тильду над безразмерными величинами.

Подстановка (9), (10) в уравнения движения (5), (6) и приравнивание к нулю коэффициентов при различных степенях r позволяет выразить все старшие члены разложений (U_2, V_3, U_4) через первые (U_0 и V_1), представляя их в виде ряда по малому параметру ε:

$$U_2 = \frac{1}{4\mu}\left[\rho c^2 U_{0tt} - (\lambda+2\mu)U_{0xx} - 2(\lambda+\mu)V_{1x}\right] + \varepsilon f_2(x,t) + O(\varepsilon^2), \tag{12}$$

$$V_3 = \frac{1}{8(\lambda+2\mu)}\left[\rho c^2 V_{1tt} - 2(\lambda+\mu)U_{2x} - \mu V_{1xx}\right] + \varepsilon f_3(x,t) + O(\varepsilon^2), \tag{13}$$

$$U_4 = \frac{1}{16\mu}\left[\rho c^2 U_{2tt} - (\lambda+2\mu)U_{2xx} - 4(\lambda+\mu)V_{3x}\right] + O(\varepsilon). \tag{14}$$

Здесь x и t в нижнем индексе обозначает частную производную по соответствующей переменной, а выражения для нелинейных функций f_2 и f_3 очень громоздки и не приводятся здесь.

Подстановка функций U_2, V_3, U_4 в граничные условия (7), (8) приводит к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} 2(\lambda+\mu)V_1 + \lambda U_{0x} + \varepsilon\Psi_1(U_0,V_1) + \frac{\delta^2}{8}\Bigg[(\lambda+3\mu)U_{0xxx} - \frac{\rho c^2(\lambda+3\mu)}{\lambda+2\mu}U_{0xtt} \\ + \frac{2\rho c^2(2\lambda+3\mu)}{\lambda+2\mu}V_{1tt} + 2\lambda V_{1xx}\Bigg] + O(\varepsilon^2, \varepsilon\delta^2, \delta^4) = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}P, \end{aligned} \tag{15}$$

$$
\begin{gathered}
\rho c^2 U_{0tt} - 2\lambda V_{1x} - (\lambda+2\mu) U_{0xx} - \varepsilon \Psi_2(U_0, V_1) + \frac{\delta^2}{8}\Bigg[(3\lambda+4\mu)U_{0xxxx} + \frac{\rho^2 c^4}{\mu} U_{0tttt} \\
- \frac{\rho c^2\left(\lambda^2+7\lambda\mu+8\mu^2\right)}{\mu(\lambda+2\mu)} U_{0xxtt} + 2(3\lambda+2\mu)V_{1xxx} - \frac{2\rho c^2\left(\lambda^2+4\lambda\mu+2\mu^2\right)}{\mu(\lambda+2\mu)} V_{1xtt}\Bigg] \\
+ O(\varepsilon^2, \varepsilon\delta^2, \delta^4) = \frac{2\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu} T,
\end{gathered} \tag{16}
$$

где нелинейные члены выражаются следующим образом:

$$
\begin{aligned}
\Psi_1 &= (4l+2m+3\lambda+3\mu)V_1^2 + (4l-2m+n+\lambda)U_{0x}V_1 + \frac{1}{2}(2l+\lambda)U_{0x}^2, \\
\Psi_2 &= \left((4l-2m+n+\lambda)V_1^2 + 2(2l+\lambda)U_{0x}V_1 + \frac{1}{2}(2l+4m+3\lambda+6\mu)U_{0x}^2\right)_x .
\end{aligned}
$$

Эта система связанных уравнений представляет собой довольно сложную модель, однако она может быть сведена к одному уравнению типа Буссинеска.

4 Вывод уравнения типа Буссинеска

Существует два естественных способа вывода модели типа Буссинеска. В первом способе исключение функции V_1 из уравнений (15) и (16) осуществляется с помощью асимптотического выражения, следующего из уравнения (15):

$$
V_1(x,t) = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)P}{2(\lambda+\mu)^2} - \frac{\lambda U_{0x}}{2(\lambda+\mu)} + \varepsilon f(x,t) + \delta^2 g(x,t) + O(\varepsilon^2, \varepsilon\delta^2, \delta^4), \tag{17}
$$

где неизвестные функции f и g ищутся из условия равенства нулю коэффициентов при ε и δ^2 в (15). Затем, подстановка V_1 в (16) приводит к следующему уравнению типа Буссинеска относительно U_0:

$$
\begin{gathered}
\rho c^2 U_{0tt} - \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}\left(U_{0xx} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}P_x + 2T\right) - \varepsilon\left(\gamma_1 U_{0x}^2 + \gamma_2 U_x P + \gamma_3 P^2\right)_x \\
+ \delta^2\left[\frac{\rho^2 c^4 U_{0tttt}}{8\mu} + \frac{\mu(3\lambda+2\mu)^2 U_{0xxxx}}{8(\lambda+\mu)^2} - \frac{\rho c^2\left(7\lambda^2+10\lambda\mu+4\mu^2\right)U_{0xxtt}}{8(\lambda+\mu)^2} + F(P,T)\right] \\
+ O(\varepsilon^2, \varepsilon\delta^2, \delta^4) = 0.
\end{gathered} \tag{18}
$$

Коэффициенты γ_1, γ_2, γ_3 и функция F громоздки и не приводятся здесь.

Другой метод основан на точном, а не асимптотическом исключении V_1 из линейной части уравнений (15) и (16). Уравнения (15) и (16) могут быть записаны в следующем виде:

$$
L_1 V_1 + \varepsilon \Psi_1(U_0, V_1) = a_1 P + M_1 U_0 + O(\varepsilon^2, \varepsilon\delta^2, \delta^4), \tag{19}
$$

$$
L_2 V_1 + \varepsilon \Psi_2(U_0, V_1) = a_2 T + M_2 U_0 + O(\varepsilon^2, \varepsilon\delta^2, \delta^4), \tag{20}
$$

где a_1 и a_2 — константы; L_1, L_2, M_1 и M_2 – линейные дифференциальные операторы, действующие на V_1 и U_0 соответственно в уравнениях (15) и (16). Теперь, применяя L_2 к первому уравнению, L_1 ко второму и вычитая одно уравнение из другого, получаем:

$$\varepsilon[L_2\Psi_1(U_0,V_1) - L_1\Psi_2(U_0,V_1)] = L_2\left(a_1P + M_1U_0\right) - L_1\left(a_2T + M_2U_0\right) + O(\varepsilon^2,\varepsilon\delta^2,\delta^4). \quad (21)$$

Чтобы исключить V_1 из нелинейной части приходится воспользоваться асимптотическим выражением (17), что приводит к следующему уравнению:

$$\begin{aligned}\rho c^2 U_{0tt} - \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}\left(U_{0xx} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}P_x + 2T\right) - \varepsilon\left(\gamma_1 U_{0x}^2 + \gamma_2 U_x P + \gamma_3 P^2\right)_x \\ + \delta^2\Bigg[\frac{\rho^2c^4(\lambda^2+5\lambda\mu+5\mu^2)U_{0tttt}}{8\mu(\lambda+2\mu)(\lambda+\mu)} - \frac{\rho c^2\left(6\lambda^2+21\lambda\mu+14\mu^2\right)U_{0xxtt}}{8(\lambda+2\mu)(\lambda+\mu)} \\ + \frac{\mu(3\lambda+2\mu)U_{0xxxx}}{4(\lambda+\mu)} + G(P,T)\Bigg] + O(\varepsilon^2,\varepsilon\delta^2,\delta^4) = 0.\end{aligned} \quad (22)$$

Теперь, предполагая, что коэффициенты при нелинейных и дисперсионных слагаемых в уравнениях (18) и (22) являются величинами одного порядка ($\varepsilon \sim \delta^2$), можно отбросить слагаемые $O(\varepsilon^2,\varepsilon\delta^2,\delta^4)$.

Полученные уравнения записаны относительно перемещения U_0, однако основной интерес представляют значения не перемещения, а деформации. Продифференцируем уравнения (18) и (22) по x и введём новую функцию $u = U_{0x}$, характеризующую продольную деформацию. Получаемые в результате уравнения мы запишем в размерном виде, вместо упругих модулей Ламе λ и μ подставим их выражения через модуль Юнга E и коэффициент Пуассона ν, а также учтём, что $c = \sqrt{E/\rho}$:

$$\begin{aligned}u_{tt} - c^2u_{xx} - \frac{2}{\rho}\left(\nu P_{xx} + \frac{1}{R}T_x\right) - \left(\frac{\beta_1}{2\rho}u^2 + \frac{\beta_2}{\rho E}uP + \frac{\beta_3}{2\rho E^2}P^2\right)_{xx} \\ + R^2\left(\frac{\alpha_1^{(i)}}{c^2}u_{tttt} + \alpha_2^{(i)}u_{xxtt} + c^2\alpha_3^{(i)}u_{xxxx} + G^{(i)}(P,T)\right) = 0, \quad i = 1,2,\end{aligned} \quad (23)$$

где $i = 1$ соответствует уравнению (18), а $i = 2$ уравнению (22), а коэффициенты принимают следующий вид:

$$\beta_1 = 3E + 2l(1-2\nu)^3 + 4m(1+\nu)^2(1-2\nu) + 6n\nu^2, \quad (24)$$

$$\beta_2 = 2(1+\nu)\left[2l(1-2\nu)^3 + \nu\left(E + 4m\left(1-\nu-2\nu^2\right) - 2n(1-2\nu)\right)\right], \quad (25)$$

$$\beta_3 = 2(1+\nu)(1-2\nu)\Big[(1+\nu)(1-2\nu)[4l\,(1-2\nu) - 2m(1+2\nu) + n] - 2\nu E\Big] \quad (26)$$

$$\alpha_1^{(1)} = \alpha_3^{(1)} = \frac{1+\nu}{4}, \quad \alpha_2^{(1)} = -\frac{1+\nu+\nu^2}{2}, \quad (27)$$

$$\alpha_1^{(2)} = \frac{5-5\nu-6\nu^2+4\nu^3}{8(1-\nu)}, \quad \alpha_2^{(2)} = -\frac{7-7\nu-2\nu^2}{8(1-\nu)}, \quad \alpha_3^{(2)} = \frac{1}{4}, \quad (28)$$

$$G^{(1)} = \frac{1+\nu+2\nu^2}{4\rho}P_{xxxx} - \frac{1-\nu+2\nu^2+4\nu^3}{4E}P_{xxtt}, \quad (29)$$

$$G^{(2)} = \frac{1+\nu}{4\rho}P_{xxxx} - \frac{1+\nu-2\nu^2-2\nu^3}{4E(1-\nu)}P_{xxtt} - \frac{3-5\nu-4\nu^2+4\nu^3}{8ER(1-\nu)}T_{xtt} - \frac{\nu}{2\rho R}T_{xxx}. \quad (30)$$

В случае условия свободной поверхности, т.е. $P = T = 0$, уравнения (23) сводятся к

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = \frac{\beta_1}{2\rho}\left(u^2\right)_{xx} - R^2\left(\frac{\alpha_1^{(i)}}{c^2}u_{tttt} + \alpha_2^{(i)}u_{xxtt} + c^2\alpha_3^{(i)}u_{xxxx}\right), \quad i = 1, 2. \tag{31}$$

Сравним оба уравнения (31) с «уравнением с двумя дисперсиями», полученным Самсоновым и Порубовым [5] и «регуляризованным» уравнением, выведенным Островским и Сутиным [1]. Эти уравнения могут быть записаны в форме уравнений (23) с помощью следующих дисперсионных коэффициентов:

$$\begin{aligned} &\alpha_1^{(3)} = 0, && \alpha_2^{(3)} = \frac{(1-\nu)\nu}{2}, && \alpha_3^{(3)} = -\frac{\nu}{2}, \\ &\alpha_1^{(4)} = 0, && \alpha_2^{(4)} = -\frac{\nu^2}{2}, && \alpha_3^{(4)} = 0, \end{aligned}$$

для уравнения Самсонова–Порубова и регуляризованного уравнения соответственно.

Поясним подробнее что значит «регуляризация». Все четыре приведённые выше модели не являются асимптотически точными уравнениями, т.е. в безразмерной форме они содержат как члены $O(1)$, так и $O(\varepsilon, \delta^2)$. Следовательно, все эти уравнения могут быть «регуляризованы» (сведены) к одному уравнению, в котором есть только одно дисперсионное слагаемое, используя асимптотическое соотношение $u_{tt} = c^2 u_{xx} + <$ малые члены $>$. Коэффициент при этом дисперсионном слагаемом определяется суммой дисперсионных коэффициентов α_j и одинаков для всех четырех уравнений:

$$\alpha_1^{(i)} + \alpha_2^{(i)} + \alpha_3^{(i)} = -\frac{\nu^2}{2}, \quad i = \overline{1,4}, \tag{32}$$

что означает, что эти уравнения асимптотически эквивалентны.

Регуляризация может быть применена и к уравнению с внешним воздействием (23) в виде $u_{tt} = c^2 u_{xx} + \frac{2}{\rho}\left(\nu P_{xx} + \frac{1}{R}T_x\right) + <$ мал. члены $>$. Получаемое таким образом уравнение имеет вид:

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} - \frac{2}{\rho}\left(\nu P_{xx} + \frac{1}{R}T_x\right) - \left(\frac{\beta_1}{2\rho}u^2 + \frac{\beta_2}{\rho E}uP + \frac{\beta_3}{2\rho E^2}P^2\right)_{xx} - \frac{\nu^2 R^2}{2}u_{xxtt} \\ + \frac{R^2}{4}\left(\frac{1-\nu}{\rho}P_{xxxx} - \frac{1-3\nu+4\nu^3}{E}P_{xxtt}\right) + \frac{(1+\nu)R}{2}\left(\frac{1}{E}T_{xtt} - \frac{1}{\rho}T_{xxx}\right) = 0, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \tag{33}$$

Некоторые исследователи рассматривали задачу о распространении длинных продольных волн в предварительно растянутом стержне [7], поэтому для систематичности исследования мы рассмотрели и такую задачу. Продольное равномерное осевое растяжение задаётся в виде:

$$U^*(x) = \kappa x, \tag{34}$$

где κ – постоянная, что приводит, следуя описанному выше выводу, к несколько модифицированному уравнению (23):

$$u_{tt} - \left(c^2 + \kappa\frac{\beta_1}{\rho}\right)u_{xx} - \frac{2}{\rho}\left[\left(\nu + \kappa\frac{\beta_2}{2E}\right)P_{xx} + \frac{1}{R}T_x\right] - \left(\frac{\beta_1}{2\rho}u^2 + \frac{\beta_2}{\rho E}uP + \frac{\beta_3}{2\rho E^2}P^2\right)_{xx}$$
$$+R^2\left(\frac{\alpha_1^{(i)}}{c^2}u_{tttt} + \alpha_2^{(i)}u_{xxtt} + c^2\alpha_3^{(i)}u_{xxxx} + G^{(i)}(P,T)\right) = 0, \quad i = 1,2. \tag{35}$$

Предварительное растяжение изменило скорость длинных линейных волн, квадрат которой равен коэффициенту при u_{xx}. Это явление, называемое акустоэластическим эффектом, лежит в основе экспериментального определения упругих модулей Мурнагана.

Насколько известно автору, обе модели, описываемые уравнениями (35), а также их упрощённые версии (23), (31) и (33) получены впервые.

5 Дисперсионные свойства и солитонные решения

На рисунке 2 представлены дисперсионные кривые четырёх упрощённых (с нулевыми напряжениями на поверхности и без предварительного растяжения) линеаризованных уравнения типа Буссинеска, приведённые в предыдущих разделах, а также нижние три ветви точного дисперсионного соотношения Похгаммера-Кри для линейной задачи.

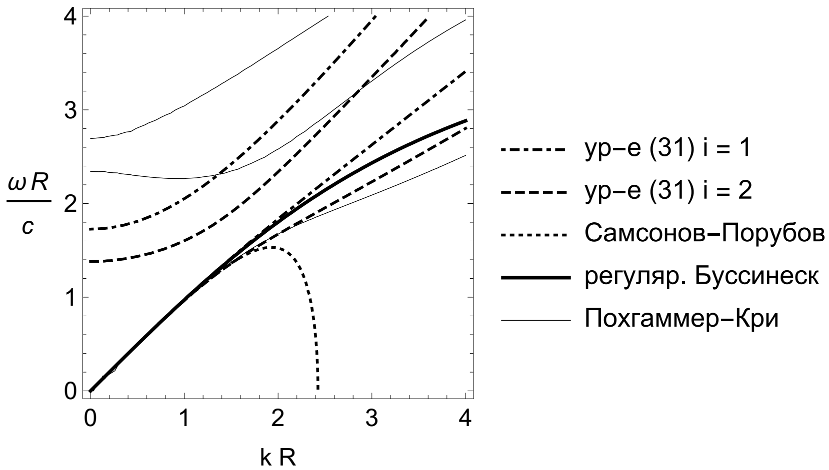

Рис. 2: Дисперсионные кривые для стержня с $\nu = 0.34$.

Все модели достаточно хорошо описывают нижнюю ветвь дисперсионной кривой в длинноволновой области, однако наиболее точной является модель (31, $i = 2$), что объясняется более аккуратной процедурой исключения функции V_1 из уравнений (15) и (16). Уравнение Самсонова – Порубова обладает коротковолновой неустойчивостью, в то время как остальные три модели не имеют такого эффекта. Полученные в настоящей работе уравнения (31) в отличие от других уравнений улавливают вторую ветвь дисперсионной кривой, правда описывают её очень неточно: помимо большого отличия по значению, эти кривые имеют всюду положительный наклон, тогда как точная кривая имеет отрицательный наклон в области длинных волн, что соответствует отрицательной групповой скорости.

Все четыре уравнения (31) имеют семейство солитонных решений:

$$u_i(x,t) = A\,\mathrm{sech}^2\,\left[B_i\left(x \pm t\sqrt{c^2 + \frac{A\beta_1}{3\rho}}\right)\right], \quad i = \overline{1,4}. \tag{36}$$

$$B_i = \sqrt{\frac{3A\beta_1 E}{-4\left[(A\beta_1+3E)^2\alpha_1^{(i)} + 3E(A\beta_1+3E)\alpha_2^{(i)} + 9E^2\alpha_3^{(i)}\right]R^2}}, \quad i = \overline{1,4}. \tag{37}$$

Здесь амплитуда A является свободным параметром, причём при $A < 0$ такая волна называется солитоном сжатия, а при $A > 0$ — солитоном разрежения.

На рисунке 3 в левой части изображены четыре солитона сжатия, задаваемых формулами (36) и имеющих амплитудный параметр $A = -0.05$. «Регуляризованный» солитон (36, $i = 4$) и солитон (36, $i = 1$) практически полностью совпадают и являются самыми длинными из всех. Однако солитоны такой амплитуды вызывают напряжения близкие к пределу упругости для полистирола. В экспериментах с полистироловым стержнем, описанных в [14], амплитуда очень мала: $A \sim 10^{-3} - 10^{-4}$, и, следовательно, в во всех четырёх формулах параметр длины примерно равен

$$B = \sqrt{\frac{A\beta_1}{6\nu^2 E R^2}}, \tag{38}$$

а соответствующее солитонное решение изображено в правой части рисунка 3 для $A = -0.001$. Отметим, что для полистирола, упругие характеристики которого представлены в таблице 1, коэффициент β_1, задаваемый формулой (24) отрицателен и, следовательно, параметр B вещественен. Более того, из формулы (38) следует, что при малых значениях A тип солитона (сжатия или растяжения) определяется именно знаком коэффициента β_1.

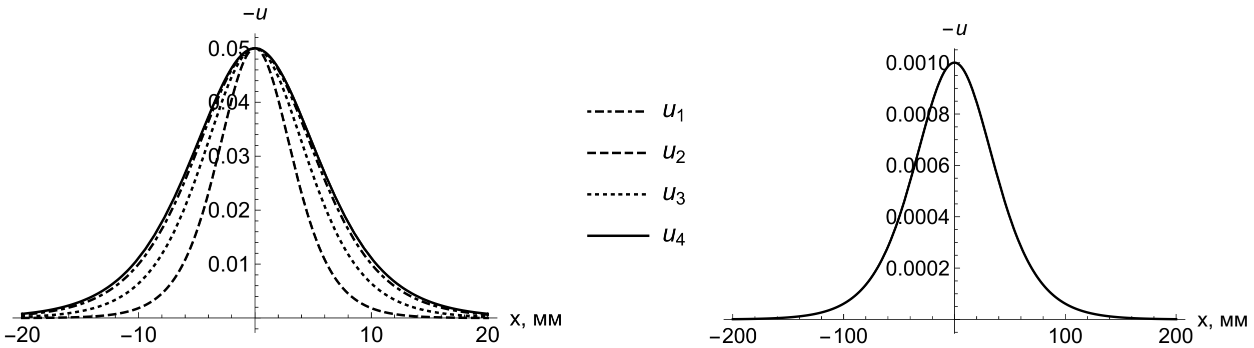

Рис. 3: Графики функций $-u_i(x,t)$, задаваемых формулой (36), в стержне радиуса $R = 5$ мм, сделанном из полистирола при $A = -0.05$ (слева) и $A = -0.001$ (справа).

Таблица 1: Упругие модули полистирола.

Модуль Юнга E, Н/м^2	Коэффициент Пуассона, ν	Модули Мурнагана, Н/м^2			Плотность ρ, кг/м^3
		l	m	n	
$3.7 \cdot 10^9$	0.34	$-18.9 \cdot 10^9$	$-13.3 \cdot 10^9$	$-10 \cdot 10^9$	1060

6 Численное моделирование

Основной интерес для нас представляют непрерывные гладкие решения рассмотренных в предыдущих разделах уравнений, поэтому для численного моделирования мы воспользовались псевдоспектральным методом [16].

На рисунке 4 представлено сравнение эволюции заданной в начальный момент времени волны согласно полной модели (1) – (3) и регуляризованной модели Буссинеска (33) при отсутствии граничных напряжений. В рамках обеих моделей возникают солитоны, двигающиеся быстрее линейной скорости $c = \sqrt{E/\rho}$. В первом случае (левый график) модель Буссинеска дала солитон на 8% большей амплитуды и, как следствие, бегущий несколько быстрее солитона в полной модели. Во втором случае (правый график), отличающегося от первого большей амплитудой начальной волны, отличие полной модели от модели Буссинеска намного значительнее.

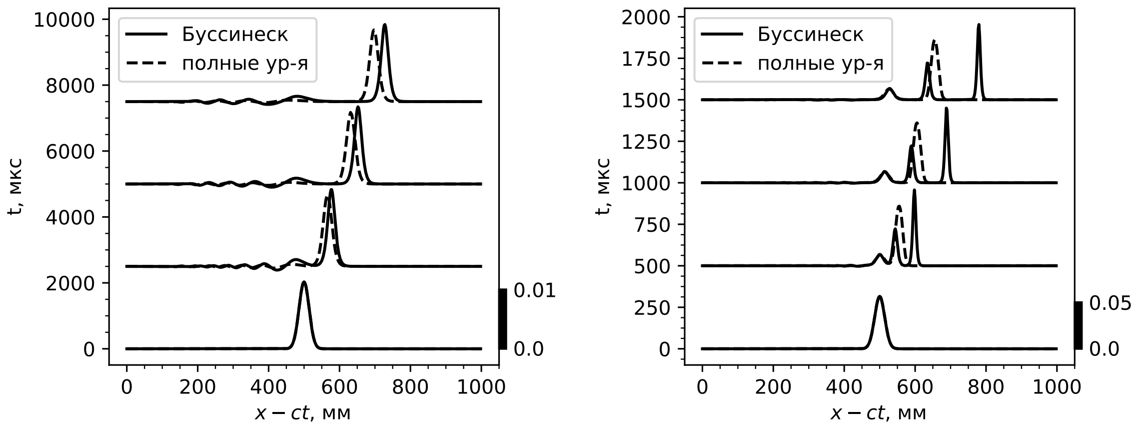

Рис. 4: Профили решений $-u(x-ct,t)$ регуляризованного уравнения Буссинеска и продольной деформации $-U_x(x-ct,0,t)$ в центре стержня ($r=0$) в различные моменты времени. Масштаб амплитуды деформации показан чёрным прямоугольником.

На рисунке 5 представлено сравнение зависимости скорости солитона от амплитуды в модели Буссинеска и в полной модели. На этом рисунке отчётливо виден асимптотический характер модели Буссинеска.

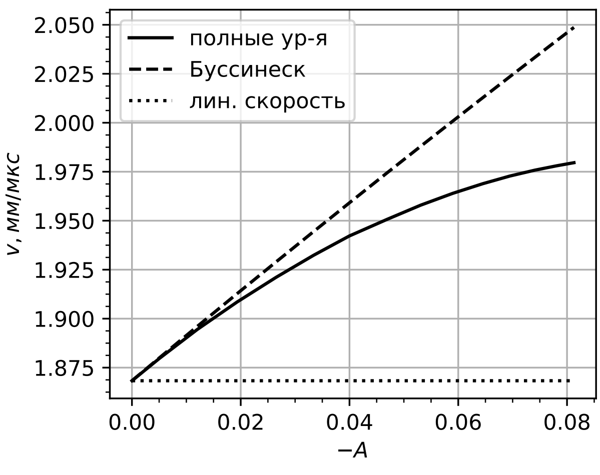

Рис. 5: Зависимость скорости солитона от амплитуды. Горизонтальная линия — скорость линейных волн c.

Представляет большой интерес возможность возбуждения солитонов в результате внешнего воздействия. На рисунках 6 и 7 представлены результаты моделирования при наличии коротких воздействий (ударов) на торец и на боковую поверхность стержня. Отметим, что в модели Буссинеска стержень предполагается бесконечным и, следовательно, не имеет торцов, однако, мы можем сымитировать удар, задав короткую начальную волну, похожую на ту, что возникает при ударе в полной модели.

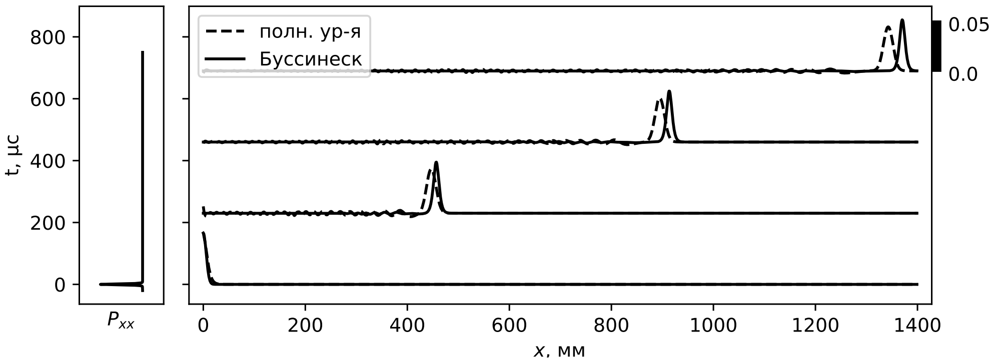

Рис. 6: Удар по торцу. Вертикальный подграфик показывает зависимость нормального напряжения на левом торце от времени.

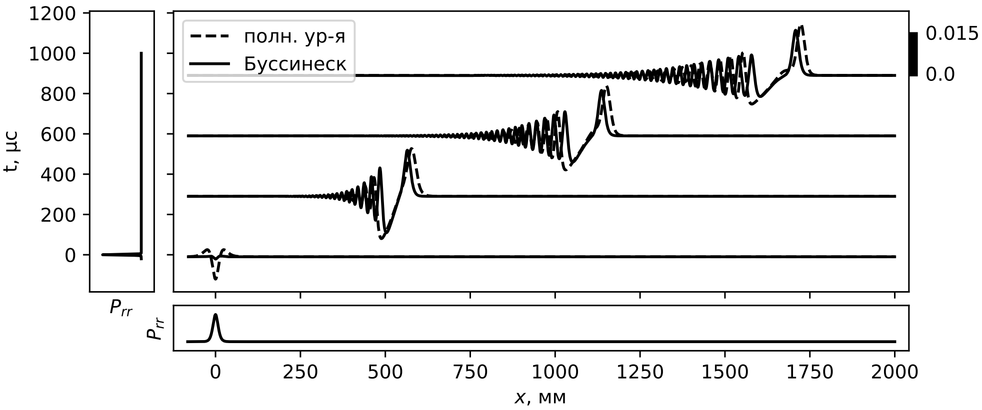

Рис. 7: Удар по боковой поверхности. Вертикальный и горизонтальные подграфики показывают зависимость нормального напряжения на боковой поверхности от времени и координаты x.

7 Заключение

Для описания продольных длинных волн в стержнях круглого сечения мы вывели две новые асимптотические модели типа Буссинеска, отличающиеся друг от друга коэффициентами при дисперсионных слагаемых. Эти модели обобщены на случай ненулевой осесимметричной нагрузки на боковой поверхности, а также на случай предварительно растянутого стержня.

Нам удалось построить метод, позволяющий численно моделировать полные трёхмерные уравнения движения стержня в рамках нелинейной теории упругости. Мы численно решили ряд начально-краевых задач и показали хорошую применимость модели типа Буссинеска для моделирования возникновения солитонов.

Результаты настоящей работы частично опубликованы в [14].

Список литературы

[1] Ostrovsky L. A., Sutin A. M., Nonlinear elastic waves in rods, PMM, 1977, 41, 531–537.

[2] Nariboli G. A., Sedov A., Burgers-Korteweg de Vries equation for viscoelastic rods and plates, J. Math. Anal. Appl., 1970, 32 (3), 661–677.

[3] Samsonov A. M., Strain solitons in solids and how to construct them, Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2001.

[4] Porubov A. V., Amplification of nonlinear strain waves in solids, Singapore: World Scientific, 2003.

[5] Samsonov A. M., Porubov A. V., Refinement of the model for the propagation of longitudinal strain waves in a rod with nonlinear elasticity, Tech. Phys. Lett., 1993, 19 (6), 365-366.

[6] Dai H.-H., Fan X., Asymptotically approximate model equations for weakly nonlinear long waves in compressible elastic rods and their comparisons with other simplified model equations, *Maths. Mechs. Solids* 9 (2004) 61-79.

[7] Dai H.-H., and Z. Cai, Uniform asymptotic analysis for transient waves in a pre-stressed compressible hyperelastic rod, *Acta Mechanica* 139 (2000) 201-230.

[8] Khusnutdinova K. R., Samsonov A. M., A.S. Zakharov, Nonlinear layered lattice model and generalized solitary waves in imperfectly bonded structures, *Phys. Rev. E* 79(5) (2009) 056606.

[9] Khusnutdinova K. R., Samsonov A. M., Fission of a longitudinal strain solitary wave in a delaminated bar, *Phys. Rev. E* 77 (2008) 066603.

[10] Khusnutdinova K. R., Tranter M. R., Modelling of nonlinear wave scattering in a delaminated elastic bar, *Proc. R. Soc. A* 471 (2015) 20150584.

[11] Khusnutdinova K. R., Tranter M. R., On radiating solitary waves in bi-layers with delamination and coupled Ostrovsky equations, *Chaos* 27 (2017) 013112.

[12] Dreiden G. V., Khusnutdinova K. R., Samsonov A. M., and Semenova I. V., Splitting induced generation of soliton trains in layered waveguides, *J. Appl. Phys.* 107 (2010) 034909.

[13] Dreiden G. V., Khusnutdinova K. R., Samsonov A. M., and Semenova I. V., Bulk strain solitary waves in bonded layered polymeric bars with delamination, *J. Appl. Phys.* 112 (2012) 063516.

[14] Garbuzov F. E., Khusnutdinova K. R., Semenova I. V., On Boussinesq-type models for long longitudinal waves in elastic rods, Wave Motion, 2019, 88 129–143.

[15] Boström A., On wave equations for elastic rods, ZAMM, 2000, 80 (4), 245–251.

[16] Canuto C. et al., Spectral Methods. Evolution to Complex Geomenties and Applications to Fluid Dynamics, Berlin: Springer-Verlag, 2007.