

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого  
Институт прикладной математики и механики

Выпускная квалификационная работа магистра

# Продольные волны деформации в нелинейно упругих волноводах

Выполнил студент гр. 23641/1

Ф. Е. Гарбузов

Руководитель (СПб ПУ)

Б. С. Григорьев

Научный консультант (ФТИ им. Иоффе)

Я. М. Бельтюков

- Построить асимптотическую одномерную модель для продольных волн в нелинейно упругом стержне, учитывающую нагрузку на поверхности стержня.
- Найти солитонные решения и проанализировать свойства выведенной модели.
- В численном моделировании сравнить полученную модель с полной трёхмерной моделью.

# Полные трёхмерные уравнения

Трёхмерный вектор перемещения  $\underline{U}$ .

Слабонелинейная деформация (малой, но не бесконечно малой амплитуды).

Тензоры деформации и напряжения:

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} ((\nabla \underline{U})^T + \nabla \underline{U} + (\nabla \underline{U})^T \cdot \nabla \underline{U})$$

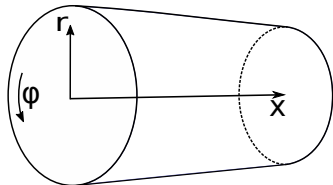
$$\underline{\underline{P}} = \lambda (\text{tr } \underline{\underline{E}}) \underline{\underline{I}} + 2\mu \underline{\underline{E}} + l (\text{tr } \underline{\underline{E}})^2 \underline{\underline{I}} - m \left( (\text{tr } \underline{\underline{E}})^2 \underline{\underline{I}} - 2 (\text{tr } \underline{\underline{E}}) \underline{\underline{E}} - (\text{tr } \underline{\underline{E}}^2) \underline{\underline{I}} \right) + n (\underline{\underline{E}}^*)^T,$$

$\lambda, \mu$  — модули упругости Ламе (линейные),

$l, m, n$  — модули упругости Мурнагана (нелинейные).

Полные трёхмерные уравнения движения:

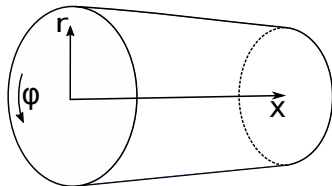
$$\rho \ddot{\underline{U}} = \text{div } \underline{\underline{P}}$$



# Упрощающие предположения

Предположения:

- Стержень бесконечен вдоль оси  $x$ .
- Осесимметричная задача: нет кручения и от угловой координаты  $\varphi$  ничего не зависит.
- Малые деформации:  $U, V \sim \varepsilon \ll 1$
- Функции медленно меняются:  
 $x, r \sim L$ .
- Тонкий стержень:  $R/L = \delta \ll 1$ .



Радиус стержня —  $R$ .

Перемещения:

$U$  — осевое (продольное),

$V$  — радиальное (поперечное).

Разложение перемещений по радиальной переменной:

$$U(x, r, t) = U_0(x, t) + r^2 U_2(x, t) + r^4 U_4(x, t) + \dots,$$

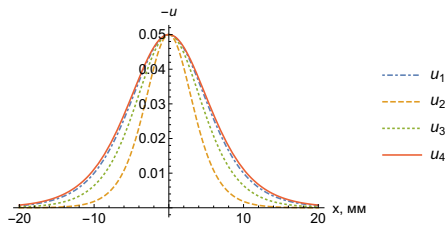
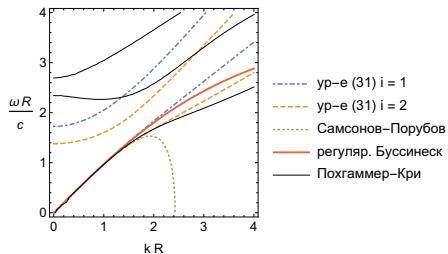
$$V(x, r, t) = r V_1(x, t) + r^3 V_3(x, t) + r^5 V_5(x, t) + \dots$$

# Уравнения типа Буссинеска

На границе задано нормальное напряжение  $P(x, t)$  и касательное  $T(x, t)$ .

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} - \frac{2}{\rho} \left( \nu P_{xx} + \frac{1}{R} T_x \right) - \left( \frac{\beta_1}{2\rho} u^2 + \frac{\beta_2}{\rho E} u P + \frac{\beta_3}{2\rho E^2} P^2 \right)_{xx} + R^2 \left( \frac{\alpha_1^{(i)}}{c^2} u_{tttt} + \alpha_2^{(i)} u_{xxtt} + c^2 \alpha_3^{(i)} u_{xxxx} + G^{(i)}(P, T) \right) = 0,$$

# Дисперсионные свойства и солитонные решения



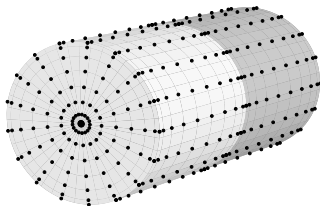
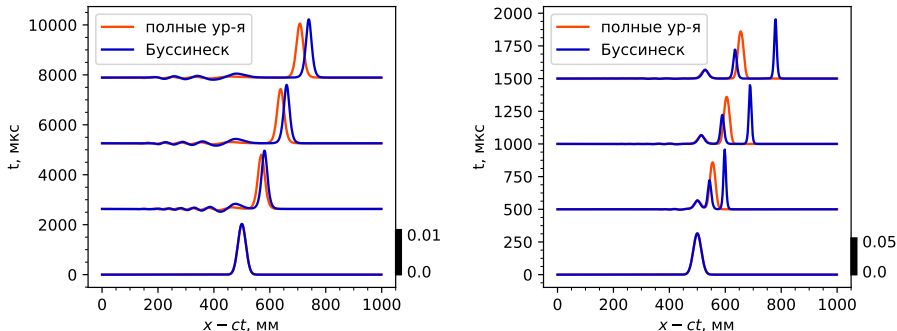


Рис.: Пример трёхмерной сетки из двух доменов, обозначенных разными цветами.

# Сравнение моделей: эволюция волны



**Рис.:** Профили решений  $-u(x - ct, t)$  регуляризованного уравнения Буссинеска и продольной деформации  $-U_x(x - ct, 0, t)$  в центре стержня ( $r = 0$ ) в различные моменты времени. Масштаб амплитуды деформации показан чёрным прямоугольником.

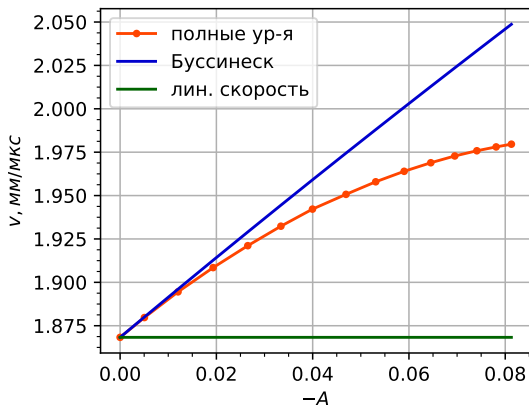


# Сравнение моделей: скорость-амплитуда

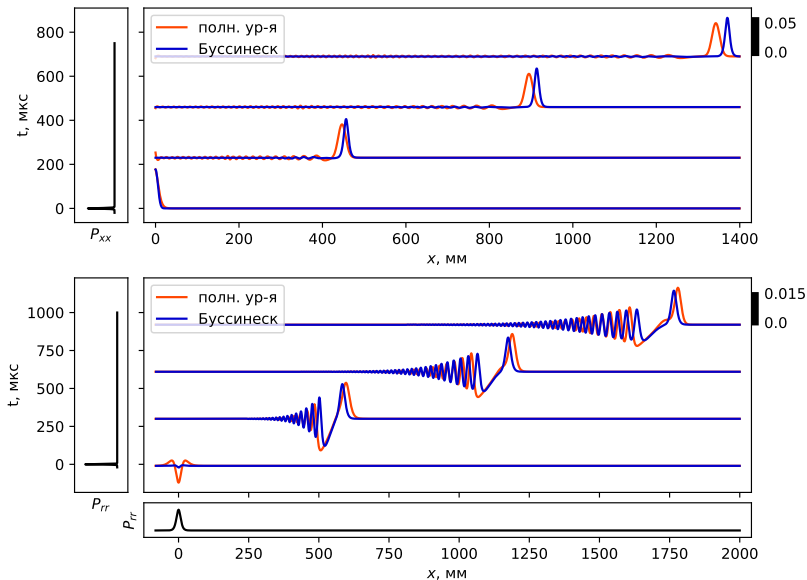
Зависимость  
скорости от амплитуды  
в модели Буссинеска:

$$v(A) = \sqrt{c^2 + A \frac{\beta_1}{3\rho}}$$

Зависимость  
для полных уравнений  
получена в серии  
численных экспериментов.



# Сравнение моделей: удар по поверхности



- Выведены две новые асимптотические модели типа Буссинеска с внешним воздействием, описывающие продольные волны в нелинейно упругих стержнях круглого сечения.
- Построен метод, позволяющий численно моделировать полные трёхмерные уравнения движения стержня в рамках нелинейной теории упругости.
- Численно решён ряд начально-краевых задач, показывающих хорошую применимость уравнения типа Буссинеска для моделирования возникновения солитонов деформации.

## Статьи и конференции:

- 1 Garbuzov F. E., Khusnutdinova K. R., Semenova I. V., On Boussinesq-type models for long longitudinal waves in elastic rods, *Wave Motion* 88 (2019) 129–143.
- 2 International Conference "Days on Diffraction 2018", Steklov Mathematical Institute, St. Petersburg, Russia, 4 - 8 June 2018, oral presentation.