Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Институт прикладной математики и механики

Работа допущена к защите
Заведующий кафедрой
«Прикладная математика»

__________________ М. Е. Фролов

"____"__________________________

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА МАГИСТРА

ПРОДОЛЬНЫЕ ВОЛНЫ ДЕФОРМАЦИИ В НЕЛИНЕЙНО УПРУГИХ ВОЛНОВОДАХ

по направлению 01.04.02 «Прикладная математика и информатика»
по образовательной программе 01.04.02_01 «Математическое моделирование»

Выполнил
студент гр. 23641/1 Ф. Е. Гарбузов

Руководитель
проф., д.т.н. Б. С. Григорьев

Научный консультант
к.ф.-м.н. Я. М. Бельтюков

Санкт-Петербург
2019

РЕФЕРАТ

ключевые слова

Сам реферат на полстранички.

ABSTRACT

key words

The same in English.

Оглавление

Введение

Волнами деформации называют механические колебания, распространяющиеся в твёрдом теле. Эти волны могут возникать естественным образом в природе, например, во время землетрясений, а также искусственно возбуждаться человеком для исследования внутреннего строения твёрдых тел. Так, волны деформации, а именно, упругие волны, применяются во множестве практических задач, например, в дефектоскопии, сейсморазведке, ультразвуковом исследовании. Существуют различные типы упругих волн деформации: продольные, поперечные, поверхностные, изгибные и другие. Продольные волны, рассматриваемые в настоящей работе, характеризуются тем, что частицы среды колеблются вдоль направления распространения волны.

Для изучения упругих волн деформации важное значение имеет модель упругости тела, которая определяет связь двух величин: напряжения и деформации. Простейшая модель – закон Гука – даёт линейную зависимость возникающих напряжений от деформации тела. Существует ряд более сложных моделей, например, Муни-Ривлина, Огдена, Мурнагана, в рамках которых напряжения нелинейно связаны с деформацией. Волны, возникающие в линейно упругих материалах, в настоящее время хорошо исследованы, в то время как изучение волн в нелинейно упругих телах является актуальной научной задачей.

Изучение нелинейных волновых процессов началось ещё в XIX веке, главным образом, в связи с задачами газо- и гидродинамики. Теория нелинейных волн деформации в твёрдых волноводах разрабатывается с 1970-х годов такими учёными, как Островский, Сутин, Самсонов, Порубов и другие. Используя ряд гипотез, им удалось свести задачу к некоторым классическим уравнениям нелинейной теории волн. Целью настоящей работы является уточнение и систематическое изложение вывода уравнения типа Буссинеска с целью обобщить его на ряд случаев, не исследованных ранее, а также проведение серии численных экспериментов по моделированию нелинейных волн.

Работа состоит из введения, трёх глав, заключения и списка литературы. В первой главе приведён обзор литературы, а также подробно сформулирована задача, решению которой посвящена работа. Во второй главе содержится вывод нового уравнения типа Буссинеска, описывающего нелинейные продольные волны в стержнях, а также сравнение с уравнениями, полученными ранее. Третья глава посвящена численному моделированию нелинейных волн в стержне, а именно, подбору метода, позволяющего эффективно решить задачу, и описанию результатов численных экспериментов.

TODO: переделать

Глава 1.

Обзор литературы и постановка задачи

1.1. Нелинейные волновые процессы

Изучение нелинейных волновых процессов является важной научной задачей, берущей начало ещё в XIX веке в связи с исследованием волн, возникающих на поверхности воды. С тех пор нелинейные волны были обнаружены во многих других физических системах, имеющих самую различную природу, а исследования в этой области ведутся и по сей день. Для описания нелинейных волновых явлений была сформирована единая теория, систематическому изложению которой посвящено множество книг, например, [1], [2], [3]. Приведём здесь некоторые важные положения, необходимые для дальнейшего изложения.

Исследование нелинейных волн началось в связи с открытием шотландского инженера Дж. Скотта Рассела, наблюдавшего в 1834 году на поверхности канала уединённую волну, бежавшую несколько миль почти без затухания. Впоследствии Рассел неоднократно воспроизводил это явление в экспериментах и определил соотношение между глубиной канала, скоростью и амплитудой этой волны [4], однако первая математическая модель, описывающая уединённые волны, была получена в работе Ж. Буссинеска [5] в 1872 году. Уравнение Буссинеска включает в себя помимо линейных волновых членов также нелинейное и дисперсионное слагаемые:

$$u_{tt} - u_{xx} - 3(u^2)_{xx} - u_{xxxx} = 0. \tag{1.1}$$

Здесь x – безразмерная пространственная переменная, t – безразмерное время, u – нормированная высота поднятия воды над уровнем невозмущённой поверхности, а нижний индекс означает частную производную по соответствующей переменной. Уравнение (1.1) имеет однопараметрическое решение в виде двух уединённых волн, бегущих в противоположных направлениях:

$$u(x,t) = A\cosh^{-2}\left[\sqrt{\frac{A}{2}}\left(x \pm t\sqrt{1+2A}\right)\right], \tag{1.2}$$

где амплитуда A является свободным параметром. Для той же задачи Д. Кортевегом и Г. де Фризом [6] в 1895 году было выведено другое уравнение:

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0, \tag{1.3}$$

которое тоже имеет решение в виде уединённой волны.

Существование решений нелинейных уравнений в виде устойчивых уединённых волн обусловлено так называемым балансом нелинейности и дисперсии. Нелинейное слагаемое, нестрого говоря, стремится сделать фронт волны более крутым и в конечном счёте опрокинуть его, а дисперсионное слагаемое, наоборот, стремится сделать волну более пологой. Стоит отметить, что уравновешивать нелинейность может не только дисперсия, но и диссипация. Например, уравнение Бюргерса описывает простейшую нелинейную физическую систему с диссипацией:

$$u_t + uu_x = \nu u_{xx}, \tag{1.4}$$

а систему и с диссипацией и с дисперсией может описывать уравнение Бюргерса- Кортевега-де Фриза:

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = \nu u_{xx}. \tag{1.5}$$

Существует множество других классических уравнений теории нелинейных волн, например, нелинейное уравнение Шрёдингера, однако в настоящей работе они не затрагиваются.

Важнейшие свойства уединённых волн, являющихся решением уравнения Кортевега-де Фриза (1.3), были открыты Н. Забужским и М. Краскалом [8] (1965). Оказалось, что уединённые волны сталкиваются «упруго», то есть после взаимодействия полностью восстанавливают свою форму. На рисунке 1.1 изображены результаты численного эксперимента, где видно, как волна с большей амплитудой обгоняет волну с меньшей амплитудой, причём в результате столкновения уединённые волны не изменили свою форму, а лишь претерпели фазовый сдвиг. Для того, чтобы подчеркнуть «упругий» характер взаимодействия, свойственный частицам, Забужский и Краскал назвали такие уединённые волны *солитонами*.

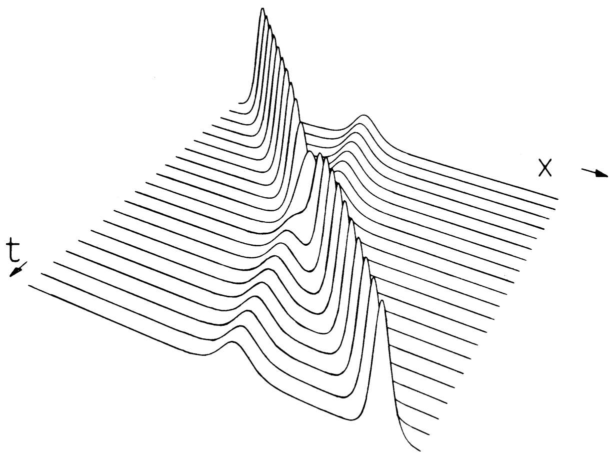

Рис. 1.1: Попутное столкновение двух солитонов.

1.2. Нелинейная динамика твёрдого тела

В этом разделе приведены важные для дальнейшего изложения сведения по нелинейной динамике твёрдого тела, систематическому описанию которой посвящено множество книг, например, [9].

Динамика упругой сплошной среды, занимающей объём Ω, описывается уравнениями движения, которые в векторном виде в случае однородного тела представляются следующим

образом:
$$\rho\ddot{\underline{U}}(\underline{x},t) = \mathrm{div}\underline{\underline{P}} + \underline{F}, \quad \underline{x} \in \Omega. \tag{1.6}$$

Здесь ρ – плотность материала, $\underline{U}(\underline{x},t)$ – вектор перемещений, $\underline{x}$ – координаты точки среды в отсчётной конфигурации, $\underline{\underline{P}}$ – первый тензор напряжений Пиолы-Кирхгофа, $\underline{F}$ – плотность массовых сил, точка обозначает взятие частной производной по времени, а дивергенция берётся по координатам в отсчётной конфигурации. Тензор напряжений $\underline{\underline{P}}$ выражается через тензор деформации $\underline{\underline{E}}$ следующим образом:

$$\underline{\underline{P}} = (\underline{\underline{I}} + \nabla\underline{U}) \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial \underline{\underline{E}}}, \tag{1.7}$$

где Π – плотность энергии деформации, а тензор деформации связан с градиентом перемещения:

$$2\underline{\underline{E}} = (\nabla\underline{U})^T + \nabla\underline{U} + (\nabla\underline{U})^T \cdot \nabla\underline{U}\,. \tag{1.8}$$

Заметим, что в линейной теории деформация предполагается бесконечно малой и нелинейное слагаемое в (1.8) отбрасывается. Для завершения постановки задачи уравнения (1.6) – (1.8) необходимо дополнить соотношением, связывающем энергию и деформацию, а также граничными условиями:

$$\underline{U} = \underline{U}_b, \ \ \underline{x} \in S_U; \qquad \underline{\underline{P}} \cdot \underline{n} = \underline{P}_b, \ \ \underline{x} \in S_P; \qquad S_U \cup S_P = \partial\Omega. \tag{1.9}$$

Энергия деформации Π однородного и изотропного тела может быть разложена в ряд по инвариантам I_i тензора деформации:

$$\Pi = \frac{\lambda + 2\mu}{2} I_1(\underline{\underline{E}})^2 - 2\mu I_2(\underline{\underline{E}}) + \frac{l + 2m}{3} I_1(\underline{\underline{E}})^3 - 2m I_1(\underline{\underline{E}}) I_2(\underline{\underline{E}}) + n I_3(\underline{\underline{E}}) + \ldots, \tag{1.10}$$

при этом коэффициенты в этом разложении характеризуют упругость материала и называются модулями упругости (λ и μ – коэффициенты Ламе, а l, m, n – модули Мурнагана). Заметим, что первые два слагаемых в приведённом разложении являются слагаемыми второго порядка относительно компонент тензора $\underline{\underline{E}}$, а следующие три – третьего порядка. В разложении (1.10) для линейно упругого материала удерживаются только слагаемые второго порядка, а для слабо нелинейного материала Мурнагана [10] учитываются ещё и слагаемые третьего порядка. Существуют другие нелинейно упругие материалы, например, материал Муни-Ривлина или Огдена, однако они предназначены в первую очередь для описания резиноподобных материалов, подверженных большим деформациям [11]. Отметим, что нелинейно упругие материалы иногда называют гиперупругими.

Помимо классической постановки задачи в виде дифференциальных уравнений в частных производных (1.6), (1.9), существует вариационная постановка на основе принципа Гамильтона, гласящего, что истинная траектория системы является стационарной точкой функционала действия:

$$\delta\mathcal{S} = \delta\int_{t_1}^{t_2} dt \left[\int_{\Omega}\left(\frac{1}{2}\rho\underline{\dot{U}}^2 - \Pi + \underline{F}\cdot\underline{U}\right)dx + \int_{S_P}\underline{P}_b\cdot\underline{U}ds\right] = 0. \tag{1.11}$$

В (1.11) варьирование происходит по перемещениям $\underline{U}$. Отметим, что существует обобщённый принцип Гамильтона, где в функционал действия включаются соотношения (1.7) и (1.8), а варьирование осуществляется не только по перемещениям, но и по деформациям $\underline{\underline{E}}$ и напряжениям $\underline{\underline{P}}$ [12].

1.3. Нелинейные волны деформации в твёрдых упругих волноводах

Изучение нелинейных волн деформации в твёрдых телах является важной темой современного изучения волн [13, 14, 15, 16, 17, 18, 19]. Исследование включает в себя изучение солитонов деформации в твердотельных волноводах [20, 21]. Исторически разработка теории началась с исследования волн в упругом стержне круглого сечения, поскольку такая геометрия волновода является наиболее простой.

Г. Нариболи и А. Седов вывели уравнение Бюргерса-Кортевега-де Фриза для длинных продольных волн в бесконечном вязкоупругом осесимметричном стержне со свободной от напряжений поверхностью [22]. Для этого уравнения нелинейной теории упругости (1.6) и (1.9), записанные в цилиндрической системе координат (x, r, φ), были упрощены с помощью:

- предположения о малости радиуса стержня $a \ll 1$,
- предположения о малых деформациях U, $V \sim \varepsilon \ll 1$,
- разложения перемещений в степенной ряд по радиусу стержня:

$$U(x,r,t) = U_0(x,t) + a^2U_2(x,r,t) + \mathcal{O}(a^4), \tag{1.12}$$

$$V(x,r,t) = -\nu ar\frac{\partial U_0}{\partial x} + a^3V_3(x,r,t) + \mathcal{O}(a^5), \tag{1.13}$$

где U – продольное перемещение вдоль оси стержня, совпадающей с осью x, V – радиальное перемещение, а ν – коэффициент Пуассона.

Позже, Л. Островский и А. Сутин получили регуляризованную модель типа Буссинеска, используя принцип Гамильтона и нижеследующие гипотезы, позволившие упростить функционал действия задачи [23]:

$$U(x,r,t) = U(x,t), \qquad V(x,r,t) = -\nu rU_x. \tag{1.14}$$

А.М. Самсонов, используя подход Островского и Сутина, предложил модель типа Буссинеска с двумя дисперсионными слагаемыми [24] и обобщил её на случай неоднородного стержня с меняющимися радиусом и модулями упругости [25]. Коэффициенты модели Самсонова с двумя типами дисперсионных членов были позже уточнены в работах А.М. Самсонова и А.В. Порубова [26, 20, 21]. А.В. Порубовым и М. Веларде предложена дисперсионно-диссипативная модель для длинных волн в упругом стержне, помещённом в некоторую среду [27]. Модель типа Буссинеска с тремя типами дисперсионных членов обсуждалась В.И. Ерофеевым и соавторами [28], однако коэффициент при нелинейном слагаемом в их модели отличается от соответствующего коэффициента у Островского, Сутина и Самсонова, Порубова. Все выводы моделей типа Буссинеска в этих исследованиях основывались на использовании модели Мурнагана для энергии упругой деформации и последующем упрощении полного функционала действия задачи с использованием некоторых гипотез.

Х. Дай и Х. Фан, упростили полные уравнения движения с граничными условиями в виде свободной от напряжений поверхности стержня, сведя их к системе из двух связанных уравнений [29]. Для этого была введена система масштабов переменных и функций, которые удовлетворяли следующим условиям:

- масштаб перемещений h мал по сравнению с характерной длиной волны l: $\varepsilon = h/l \ll 1$,
- радиус стержня a мал по сравнению с характерной длиной волны l: $\delta = a^2/l^2 \ll 1$.

Кроме того, были использованы разложения перемещений в ряд по радиальной координате. Упрощённые уравнения были выведены из полных с помощью метода регулярных возмущений и отбрасывания членов порядка $\mathcal{O}(\varepsilon^2, \varepsilon\delta, \delta^2)$. В [30] Х. Дай и З. Цай применили систематический асимптотический анализ для описания волн в предварительно растянутом гиперупругом стержне, сделанном из материала Муни-Ривлина.

Во всех описанных работах использовалась непрерывная модель твёрдого тела, которое однако можно описывать дискретно с помощью решёточной модели. К.Р. Хуснутдинова и соавторы получили модель типа Буссинеска для нелинейно упругого стержня с помощью систематического асимптотического вывода в рамках решеточной модели [31]. Заметим, что уравнение модели было получено из полных уравнений движения без использования упрощающих гипотез. Интересно, что в этом исследовании выводились модели типа Буссинеска с двумя и тремя дисперсионными слагаемыми, а также система связанных уравнений типа Буссинеска для волн в слоистом волноводе с неидеальным контактом.

В недавних исследованиях модели типа Буссинеска использовались для изучения распространения длинных продольных уединенных волн деформации в волноводе с расслоением [32, 33, 34], а некоторые соответствующие экспериментальные наблюдения были опубликованы в [35, 36]. Отметим исследования по распространению нелинейных волн на дефектах в решетках [37] и струнах [38]. Некоторые другие модели типа Буссинеска были получены для описания распространения поперечных волн большой амплитуды [39].

Цель нашей настоящей работы – вернуться к выводу нелинейных длинноволновых моделей для продольных волн в круглом стержне, чтобы систематически получить новую модель типа Буссинеска и распространить её на более сложный случай, когда имеется ненулевая осесимметричная нагрузка на граничной поверхности и продольное предварительное растяжение. Кроме этого, в настоящей работе обсуждаются основные решения в виде уединённых волн, а также дисперсионные свойства описанных здесь моделей. Результаты этой работы опубликованы автором в сотрудничестве с К.Р. Хуснутдиновой и И.В. Семёновой [40].

1.4. Численные методы решения нелинейных уравнений

Конечно-разностные схемы для уравнений типа Буссинеска разработаны Христовом, и др. (ссылки).

Мощным инструментом является псевдоспектральный метод (ссылки на Кануто, Готтлиба-Орсага).

Глава 2.
Слабо нелинейные продольные волны деформации в тонких волноводах

2.1. Формулировка задачи

Рассмотрим стержень круглого поперечного сечения радиуса R. Введём цилиндрическую систему координат (x, r, φ), где x – осевая координата, r – продольная, φ – угловая, как показано на рисунке 2.1. Будем использовать Лагранжев подход и введём вектор перемещения $\underline{U} = (U, V, W)$, где U – осевое (продольное) перемещение, V – радиальное (поперечное) перемещение, а W – вращение.

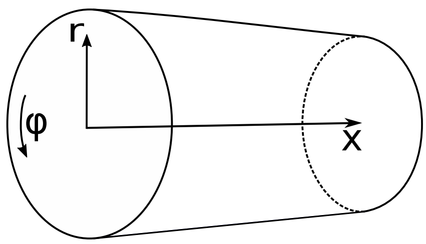

Рис. 2.1: Схема стержня.

Следуя предыдущим исследованиям, которые обсуждались в главе 1, будем рассматривать стержень, сделанный из материала Мурнагана, энергия упругой деформации которого представляется в виде:

$$\Pi = \frac{\lambda + 2\mu}{2} I_1(\underline{\underline{E}})^2 - 2\mu I_2(\underline{\underline{E}}) + \frac{l + 2m}{3} I_1(\underline{\underline{E}})^3 - 2m I_1(\underline{\underline{E}}) I_2(\underline{\underline{E}}) + n I_3(\underline{\underline{E}}), \tag{2.1}$$

где $I_1(\underline{\underline{E}}) = \operatorname{tr} \underline{\underline{E}},\ I_2(\underline{\underline{E}}) = \left[(\operatorname{tr} \underline{\underline{E}})^2 - \operatorname{tr} \underline{\underline{E}}^2\right]/2,\ I_3(\underline{\underline{E}}) = \det \underline{\underline{E}}$ являются инвариантами тензора деформации Грина $\underline{\underline{E}} = \left((\nabla \underline{U})^T + \nabla \underline{U} + (\nabla \underline{U})^T \cdot \nabla \underline{U}\right)/2$, λ, μ – коэффициенты Ламе, l, m, n – модули Мурнагана. Здесь и далее в тексте работы все частные производные берутся по координатам в отсчётной конфигурации. Отметим, что модель Мурнагана используется здесь потому, что она является общей моделью слабо нелинейных упругих деформаций.

Рассмотрим задачу, в которой отсутствует кручение стержня, а продольное и поперечное перемещения U и V не зависят от угла φ:

$$U = U(x, r, t), \quad V = V(x, r, t), \quad W = 0. \tag{2.2}$$

Уравнения движения, в условиях (2.2) и отсутствия массовых сил, принимают вид

$$\rho \frac{\partial^2 U(x,r,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial P_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial P_{xr}}{\partial r} - \frac{P_{xr}}{r} = 0, \tag{2.3}$$

$$\rho \frac{\partial^2 V(x,r,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial P_{rx}}{\partial x} - \frac{\partial P_{rr}}{\partial r} - \frac{P_{rr} - P_{\varphi\varphi}}{r} = 0, \tag{2.4}$$

а третье уравнение представляется в виде тождества $0 \equiv 0$. Здесь $P_{\alpha\beta}$ обозначает компоненту первого тензора Пиолы-Кирхгофа, а ρ – плотность материала.

На поверхности стержня задано осесимметричное напряжение:

$$\underline{\underline{P}} \cdot \underline{n} = \underline{P_b} = (P(x,t), T(x,t), 0), \tag{2.5}$$

где $\underline{n}$ – нормаль к поверхности. Следовательно, граничные условия представляются в виде

$$P_{rr} = P(x,t) \quad \text{при} \quad r = R, \tag{2.6}$$

$$P_{xr} = T(x,t) \quad \text{при} \quad r = R. \tag{2.7}$$

Поскольку компонента $P_{\varphi r} \equiv 0$, третье граничное условие $P_{\varphi r} = 0$ при $r = R$ удовлетворяется автоматически.

2.2. Вывод уравнения типа Буссинеска

Подход к выводу уравнения модели в этом разделе опирается на метод, описанный в [29]. Упростим этот метод с помощью разложений, использованных для вывода линейной модели [42]. Таким образом, будем искать решение в виде степенного ряда по радиальной координате:

$$U(x,r,t) = U_0(x,t) + r^2 U_2(x,t) + r^4 U_4(x,t) + \dots\,, \tag{2.8}$$

$$V(x,r,t) = r V_1(x,t) + r^3 V_3(x,t) + r^5 V_5(x,t) + \dots\,. \tag{2.9}$$

Отметим, что продольное перемещение разложено в ряд по чётным степеням радиуса, в то время как поперечное перемещение по нечётным. В линейной задаче такие разложения приняты потому, что, если учесть все степени в разложении, то уравнения движения (2.3), (2.4) разобьются на две независимые системы уравнений. В первую систему войдут слагаемые U_{2k} и V_{2k+1}, а во вторую U_{2k+1} и V_{2k} ($k \geqslant 0$). Для продольных волн в осесимметричном стержне должны выполняться очевидные условия:

$$\frac{\partial U}{\partial r} = 0, \quad V = 0 \quad \text{при} \quad r = 0, \tag{2.10}$$

из которых следует, что $U_1 = V_0 = 0$. В линейной задаче равенство нулю этих двух слагаемых достаточно, для того, чтобы все слагаемые U_{2k+1} и V_{2k} были равны нулю. Для нелинейной задачи тоже можно показать справедливость этого утверждения, однако, чтобы не слишком усложнять вывод, примем эти разложения в качестве допущения. Кроме того, в отличие от [29], мы сведём задачу к одному уравнению типа Буссинеска, учтём ненулевое осесимметричное напряжение, приложенное к поверхности стержня, а также рассмотрим предварительно растянутый стержень.

Введём масштабные множители, выделяющие среди прочих задачу о распространении длинных по сравнению с радиусом стержня волн малой амплитуды. Тогда безразмерные переменные и функции определяются следующими выражениями:

$$\tilde{t} = \frac{t}{L/c}, \quad \tilde{x} = \frac{x}{L}, \quad \tilde{r} = \frac{r}{L}, \quad \tilde{U} = \frac{U}{\varepsilon L}, \quad \tilde{V} = \frac{V}{\varepsilon L}, \quad \tilde{P} = \frac{P}{E\varepsilon}, \quad \tilde{T} = \frac{T}{E\varepsilon\delta}, \tag{2.11}$$

из которых следует, что $\tilde{U}_n = \dfrac{L^n U_n}{\varepsilon L}$, $\tilde{V}_n = \dfrac{L^n V_n}{\varepsilon L}$ для $n \geqslant 0$. Здесь L является характерной длиной волны, c – скорость линейной волны, E – модуль Юнга, $\varepsilon \ll 1$ – малый параметр амплитуды, $\delta = \dfrac{R}{L} \ll 1$ – второй малый параметр, а тильда обозначает безразмерную величину. Вспомним, что модуль Юнга и коэффициент Пуассона выражаются через коэффициенты Ламе:

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}. \tag{2.12}$$

С учётом (2.11) разложения (2.8), (2.9) представляются в виде:

$$\widetilde{U}(\tilde{x}, \tilde{r}, \tilde{t}) = \widetilde{U}_0(\tilde{x}, \tilde{t}) + \tilde{r}^2 \widetilde{U}_2(\tilde{x}, \tilde{t}) + \tilde{r}^4 \widetilde{U}_4(\tilde{x}, \tilde{t}) + O(\tilde{r}^6), \tag{2.13}$$

$$\widetilde{V}(\tilde{x}, \tilde{r}, \tilde{t}) = \tilde{r} \widetilde{V}_1(\tilde{x}, \tilde{t}) + \tilde{r}^3 \widetilde{V}_3(\tilde{x}, \tilde{t}) + \tilde{r}^5 \widetilde{V}_5(\tilde{x}, \tilde{t}) + O(\tilde{r}^7). \tag{2.14}$$

Радиальная координата $\tilde{r}$ точек стержня принимает значения от 0 до δ и, следовательно, является малой величиной. В дальнейшем мы опустим тильду над безразмерными величинами.

Подставляя (2.13) и (2.14) в уравнения движения (2.3), (2.4), получаем

$$\begin{aligned} &\rho c^2 U_{0tt} - (\lambda + 2\mu) U_{0xx} - 2(\lambda + \mu) V_{1x} - 4\mu U_2 + \Phi_1(U_0, V_1, U_2)\varepsilon \\ &\quad + \left[\rho c^2 U_{2tt} - (\lambda + 2\mu) U_{2xx} - 4(\lambda + \mu) V_{3x} - 16\mu U_4\right] r^2 + O(\varepsilon^2, \varepsilon r^2, r^4) = 0, \end{aligned} \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned} &r\big(\rho c^2 V_{1tt} - \mu V_{1xx} - 2(\lambda + \mu) U_{2x} - 8(\lambda + 2\mu) V_3 - \Phi_2(U_0, V_1, U_2, V_3)\varepsilon \\ &\quad - \left[\rho c^2 V_{3tt} - \mu V_{3xx} - 4(\lambda + \mu) U_{4x} - 24(\lambda + 2\mu) V_5\right] r^2 + O(\varepsilon^2, \varepsilon r^2, r^4)\big) = 0, \end{aligned} \tag{2.16}$$

где индексы x и t обозначают частные производные по соответствующим переменным, а нелинейные члены выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \Phi_1 = {} & 2\left[(-4\lambda - 4\mu + n - 4m) V_1 - 2(\lambda + 2\mu + m) U_{0x}\right] U_2 \\ & - \left[2(2l + \lambda) V_1 + (3\lambda + 6\mu + 2l + 4m) U_{0x}\right] U_{0xx} \\ & - \left[(2\lambda + 2\mu + 8l + n) V_1 + 2(\lambda + \mu + 2l + m) U_{0x}\right] V_{1x}, \\ \Phi_2 = {} & \frac{1}{2}\left[2(2\lambda + 2\mu + 8l + n) U_{2x} + (4\lambda + 4\mu + 4m - n) V_{1xx} + 32(2\lambda + 3\mu + 2l + 2m) V_3\right] V_1 \\ & + 2(\lambda + \mu + 2l + m) U_{0x} U_{2x} + 2(\mu + m)\left[U_{0xx} + 4V_{1x}\right] U_2 + (\lambda + 2\mu + m)(U_{0x} V_{1x})_x \\ & + \frac{1}{4}(12\lambda + 20\mu + 12m - n) V_{1x}^2 + 8(\lambda + 2l) V_3 U_{0x} + (4\lambda + 12\mu + 4m + n) U_2^2. \end{aligned}$$

Функции U_2, V_3, U_4 могут быть получены из (2.15) и (2.16), приравнивая к нулю коэффициенты при различных степенях r:

$$U_2 = \frac{1}{4\mu}\left[\rho c^2 U_{0tt} - (\lambda+2\mu)U_{0xx} - 2(\lambda+\mu)V_{1x}\right] + \varepsilon f_2(x,t) + O(\varepsilon^2), \tag{2.17}$$

$$V_3 = \frac{1}{8(\lambda+2\mu)}\left[\rho c^2 V_{1tt} - 2(\lambda+\mu)U_{2x} - \mu V_{1xx}\right] + \varepsilon f_3(x,t) + O(\varepsilon^2), \tag{2.18}$$

$$U_4 = \frac{1}{16\mu}\left[\rho c^2 U_{2tt} - (\lambda+2\mu)U_{2xx} - 4(\lambda+\mu)V_{3x}\right] + O(\varepsilon). \tag{2.19}$$

Выражения для функций f_2 и f_3 очень громоздки и поэтому не приводятся здесь.

Затем, подставляя функции U_2, V_3, U_4 в граничные условия (2.6), (2.7), которые в безразмерном виде должны выполняться при $r=\delta$, получаем уравнения:

$$\begin{aligned}
2(\lambda+\mu)V_1 + \lambda U_{0x} + \varepsilon\Psi_1(U_0,V_1) + \frac{\delta^2}{8}\Bigg[(\lambda+3\mu)U_{0xxx} - \frac{\rho c^2(\lambda+3\mu)}{\lambda+2\mu}U_{0xtt} \\
+ \frac{2\rho c^2(2\lambda+3\mu)}{\lambda+2\mu}V_{1tt} + 2\lambda V_{1xx}\Bigg] + O(\varepsilon^2,\varepsilon\delta^2,\delta^4) = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}P,
\end{aligned} \tag{2.20}$$

$$\begin{aligned}
\rho c^2 U_{0tt} - 2\lambda V_{1x} - (\lambda+2\mu)U_{0xx} - \varepsilon\Psi_2(U_0,V_1) + \frac{\delta^2}{8}\Bigg[(3\lambda+4\mu)U_{0xxxx} + \frac{\rho^2c^4}{\mu}U_{0tttt} \\
-\frac{\rho c^2\left(\lambda^2+7\lambda\mu+8\mu^2\right)}{\mu(\lambda+2\mu)}U_{0xxtt} + 2(3\lambda+2\mu)V_{1xxx} - \frac{2\rho c^2\left(\lambda^2+4\lambda\mu+2\mu^2\right)}{\mu(\lambda+2\mu)}V_{1xtt}\Bigg] \\
+ O(\varepsilon^2,\varepsilon\delta^2,\delta^4) = \frac{2\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}T,
\end{aligned} \tag{2.21}$$

где нелинейные члены выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned}
\Psi_1 &= (4l+2m+3\lambda+3\mu)V_1^2 + (4l-2m+n+\lambda)U_{0x}V_1 + \frac{1}{2}(2l+\lambda)U_{0x}^2, \\
\Psi_2 &= \left((4l-2m+n+\lambda)V_1^2 + 2(2l+\lambda)U_{0x}V_1 + \frac{1}{2}(2l+4m+3\lambda+6\mu)U_{0x}^2\right)_x.
\end{aligned}$$

Отметим, что при $\varepsilon=0$ уравнения (2.20) и (2.21) сводятся к уравнениям, полученным в линейной задаче [42]. Эта система связанных уравнений представляет собой довольно сложную модель, однако она может быть сведена к одному уравнению типа Буссинеска.

Существует два естественных способа вывода модели типа Буссинеска. В первом способе исключение функции V_1 из уравнений (2.20) и (2.21) осуществляется с помощью асимптотического выражения, следующего из уравнения (2.20):

$$V_1(x,t) = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)P - \lambda(\lambda+\mu)U_{0x}}{2(\lambda+\mu)^2} + \varepsilon f(x,t) + \delta^2 g(x,t) + O(\varepsilon^2,\varepsilon\delta^2,\delta^4), \tag{2.22}$$

где неизвестные функции f и g могут быть найдены из условия равенства нулю коэффициентов при ε и δ^2 в (2.20). Затем, подстановка V_1 в (2.21) приводит к следующему уравнению типа

Буссинеска относительно U_0:

$$
\begin{aligned}
\rho c^2 U_{0tt} - \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}\left(U_{0xx} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}P_x + 2T\right) - \varepsilon\left(\gamma_1 U_{0x}^2 + \gamma_2 U_x P + \gamma_3 P^2\right)_x \\
+\delta^2\left[\frac{\rho^2 c^4 U_{0tttt}}{8\mu} + \frac{\mu(3\lambda+2\mu)^2 U_{0xxxx}}{8(\lambda+\mu)^2} - \frac{\rho c^2\left(7\lambda^2+10\lambda\mu+4\mu^2\right)U_{0xxtt}}{8(\lambda+\mu)^2} + F\right] \\
+O(\varepsilon^2, \varepsilon\delta^2, \delta^4) = 0.
\end{aligned}
\tag{2.23}
$$

Здесь нелинейные коэффициенты γ_i и функция F представляются в виде:

$$
\begin{aligned}
\gamma_1 &= \frac{3n(\lambda+\mu)\lambda^2 + 2\mu\left[9\lambda^3 + 24\mu\lambda^2 + 21\mu^2\lambda + m(3\lambda+2\mu)^2 + 2\mu^2(l+3\mu)\right]}{4(\lambda+\mu)^3}, \\
\gamma_2 &= \frac{\left[3\lambda^3 + 5\lambda^2\mu + 2\lambda\mu^2 + 4l\mu^2 + 2\lambda m(3\lambda+2\mu) - 2\lambda n(\lambda+\mu)\right]\mu(3\lambda+2\mu)}{2(\lambda+\mu)^4}, \\
\gamma_3 &= \frac{\left[n(\lambda+\mu) - 2\left(\lambda^2+\lambda\mu-2l\mu\right) - 2m(2\lambda+\mu)\right]\mu^2(3\lambda+2\mu)^2}{4(\lambda+\mu)^5}, \\
F &= \frac{3\lambda+2\mu}{8\mu(\lambda+\mu)^3}\left[\mu(4\lambda^2+5\lambda\mu+2\mu^2)P_{xxx} - \rho c^2(\lambda^2+\lambda\mu+\mu^2)P_{xtt}\right].
\end{aligned}
$$

Другой метод основан на исключении V_1 из (2.20) и (2.21) таким образом, каким это сделано в [42] для линейной задачи. В линейном случае этот подход не использует асимптотическое выражение (2.22) и приводит к уравнению того же типа, что и (2.23), но с другими коэффициентами при дисперсионных слагаемых. Действительно, уравнения (2.20) и (2.21) могут быть записаны в виде:

$$
L_1 V_1 + \varepsilon N_1(U_0, V_1, \dots) = M_1(U_0, P, \dots) + O(\varepsilon^2, \varepsilon\delta^2, \delta^4), \tag{2.24}
$$

$$
L_2 V_1 + \varepsilon N_2(U_0, V_1, \dots) = M_2(U_0, T, \dots) + O(\varepsilon^2, \varepsilon\delta^2, \delta^4), \tag{2.25}
$$

где L_1 и L_2 – линейные дифференциальные операторы, действующие на V_1, а $N_1(U_0, V_1, \dots)$, $M_1(U_0, P, \dots)$ и $N_2(U_0, V_1, \dots)$, $M_2(U_0, T, \dots)$ – нелинейные функции своих аргументов в уравнениях (2.20) и (2.21) соответственно. Теперь, применяя L_2 к первому уравнению, L_1 ко второму и вычитая одно уравнение из другого, получаем:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon[L_2 N_1(U_0, V_1, \dots) - L_1 N_2(U_0, V_1, \dots)] = L_2 M_1(U_0, P, \dots) - L_1 M_2(U_0, T, \dots) \\
+ O(\varepsilon^2, \varepsilon\delta^2, \delta^4).
\end{aligned}
\tag{2.26}
$$

Здесь V_1 исключена из линейной части уравнений точно, а не асимптотически. Чтобы исключить её из нелинейной части, воспользуемся выражением (2.22) и получим следующее уравнение:

$$
\begin{aligned}
\rho c^2 U_{0tt} - \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}\left(U_{0xx} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}P_x + 2T\right) - \varepsilon\left(\gamma_1 U_{0x}^2 + \gamma_2 U_x P + \gamma_3 P^2\right)_x \\
+\delta^2\left[\frac{\rho^2 c^4(\lambda^2+5\lambda\mu+5\mu^2)U_{0tttt}}{8\mu(\lambda+2\mu)(\lambda+\mu)} - \frac{\rho c^2\left(6\lambda^2+21\lambda\mu+14\mu^2\right)U_{0xxtt}}{8(\lambda+2\mu)(\lambda+\mu)}\right. \\
\left. + \frac{\mu(3\lambda+2\mu)U_{0xxxx}}{4(\lambda+\mu)} + G\right] + O(\varepsilon^2, \varepsilon\delta^2, \delta^4) = 0,
\end{aligned}
\tag{2.27}
$$

где

$$G=\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{8(\lambda+\mu)^2}\left[(3\lambda+2\mu)P_{xxx}-\frac{\rho c^2(\lambda^2+4\lambda\mu+2\mu^2)}{\mu(\lambda+2\mu)}P_{xtt}-\frac{2\rho c^2(2\lambda+3\mu)}{\lambda+2\mu}T_{tt}-2\lambda T_{xx}\right].$$

Отметим, что в линейном приближении при $\varepsilon=0$ уравнение (2.27) совпадает с уравнениями, выведенными для линейной задачи в [42]. Из (2.23) и (2.27), задавая $\varepsilon=0$, $\delta=0$ и $P=T=0$, получаем скорость линейной продольной волны в бесконечно тонком стержне:

$$c=\sqrt{\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\rho(\lambda+\mu)}}=\sqrt{\frac{E}{\rho}}. \tag{2.28}$$

Теперь перепишем оба выведенных уравнения типа Буссинеска (2.23) и (2.27) в унифицированной форме и выразим коэффициенты Ламе через модуль Юнга E и коэффициент Пуассона ν:

$$\begin{aligned} &U_{0tt}-U_{0xx}-2\left(\nu P_x+T\right)-\frac{\varepsilon}{2E}\left(\beta_1U_{0x}^2+2\beta_2U_{0x}P+\beta_3P^2\right)_x \\ &\quad+\delta^2\left(\alpha_1^{(i)}U_{0tttt}+\alpha_2^{(i)}U_{0xxtt}+\alpha_3^{(i)}U_{0xxxx}+F^{(i)}\right)+O(\varepsilon^2,\varepsilon\delta^2,\delta^4)=0,\quad i=1,2,\end{aligned} \tag{2.29}$$

где

$$\alpha_1^{(1)}=\alpha_3^{(1)}=\frac{1+\nu}{4},\quad \alpha_2^{(1)}=-\frac{1+\nu+\nu^2}{2}, \tag{2.30}$$

$$\alpha_1^{(2)}=\frac{5-5\nu-6\nu^2+4\nu^3}{8(1-\nu)},\quad \alpha_2^{(2)}=-\frac{7-7\nu-2\nu^2}{8(1-\nu)},\quad \alpha_3^{(2)}=\frac{1}{4}, \tag{2.31}$$

$$\beta_1=3E+2l(1-2\nu)^3+4m(1+\nu)^2(1-2\nu)+6n\nu^2, \tag{2.32}$$

$$\beta_2=2(1+\nu)\left[2l(1-2\nu)^3+\nu\left(E+4m\left(1-\nu-2\nu^2\right)-2n(1-2\nu)\right)\right], \tag{2.33}$$

$$\beta_3=2(1+\nu)(1-2\nu)\Big[(1+\nu)(1-2\nu)[4l\left(1-2\nu\right)-2m(1+2\nu)+n]-2\nu E\Big] \tag{2.34}$$

$$F^{(1)}=\frac{1}{4}\left[(1+\nu+2\nu^2)P_{xxx}-(1-\nu+2\nu^2+4\nu^3)P_{xtt}\right], \tag{2.35}$$

$$F^{(2)}=\frac{1}{4}\left[(1+\nu)P_{xxx}-\frac{1+\nu-2\nu^2-2\nu^3}{1-\nu}P_{xtt}-\frac{3-5\nu-4\nu^2+4\nu^3}{2(1-\nu)}T_{tt}-2\nu T_{xx}\right]. \tag{2.36}$$

Дифференцируя (2.29) по x, получаем два уравнения для продольного «напряжения» $e=U_{0x}$:

$$\begin{aligned} &e_{tt}-e_{xx}-2\left(\nu P_{xx}+T_x\right)-\frac{\varepsilon}{2E}\left(\beta_1e^2+2\beta_2eP+\beta_3P^2\right)_{xx} \\ &\quad+\delta^2\left(\alpha_1^{(i)}e_{tttt}+\alpha_2^{(i)}e_{xxtt}+\alpha_3^{(i)}e_{xxxx}+F_x^{(i)}\right)+O(\varepsilon^2,\varepsilon\delta^2,\delta^4)=0,\quad i=1,2.\end{aligned} \tag{2.37}$$

Три различных асимптотических модели следует из уравнений (2.37) в зависимости от соотношения между двумя малыми параметрами ε и δ. Во-первых, если нелинейность сильно слабее дисперсии, т.е. $\varepsilon \ll \delta^2 \ll 1$, мы можем асимптотически свести (2.37) к линейным уравнениям:

$$e_{tt} - e_{xx} - 2\left(\nu P_{xx} + T_x\right) + \delta^2\left(\alpha_1^{(i)} e_{tttt} + \alpha_2^{(i)} e_{xxtt} + \alpha_3^{(i)} e_{xxxx} + F_x^{(i)}\right) + O(\delta^4) = 0, \quad i = 1, 2, \tag{2.38}$$

из которых следует, что эволюция волн будет происходить главным образом под влиянием дисперсии. Во-вторых, если нелинейность намного сильнее дисперсии, т.е. $\delta^2 \ll \varepsilon \ll 1$, мы получаем уравнение

$$e_{tt} - e_{xx} - 2\left(\nu P_{xx} + T_x\right) - \frac{\varepsilon}{2E}\left(\beta_1 e^2 + 2\beta_2 eP + \beta_3 P^2\right)_{xx} + O(\varepsilon^2) = 0, \tag{2.39}$$

означающее, что эволюция волн определяется нелинейностью. Наконец, если нелинейное и дисперсионные слагаемые уравновешивают друг друга, т.е. $\varepsilon \sim \delta^2$, мы получаем «модель максимального баланса» ("maximal balance model" согласно терминологии, используемой в [3]):

$$\begin{aligned} e_{tt} - e_{xx} - 2\left(\nu P_{xx} + T_x\right) - \varepsilon\Bigg[\frac{1}{2E}\left(\beta_1 e^2 + 2\beta_2 eP + \beta_3 P^2\right)_{xx} \\ + \frac{\delta^2}{\varepsilon}\left(\alpha_1^{(i)} e_{tttt} + \alpha_2^{(i)} e_{xxtt} + \alpha_3^{(i)} e_{xxxx} + F_x^{(i)}\right)\Bigg] + O(\varepsilon^2) = 0, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \tag{2.40}$$

Последняя асимптотическая модель (2.40) (обе её версии $i = 1, 2$) является уравнением типа Буссинеска. Хорошо известно, что такие уравнения имеют решения в виде солитонов сжатия [3, 20].

Отбросим члены порядка $O(\varepsilon^2)$ в уравнениях (2.40) и запишем их в размерном виде, не меняя обозначения для размерных переменных:

$$\begin{aligned} e_{tt} - c^2 e_{xx} - \frac{2}{\rho}\left(\nu P_{xx} + \frac{1}{R}T_x\right) - \left(\frac{\beta_1}{2\rho}e^2 + \frac{\beta_2}{\rho E}eP + \frac{\beta_3}{2\rho E^2}P^2\right)_{xx} \\ + R^2\left(\frac{\alpha_1^{(i)}}{c^2}e_{tttt} + \alpha_2^{(i)} e_{xxtt} + c^2\alpha_3^{(i)} e_{xxxx} + G^{(i)}\right) = 0, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \tag{2.41}$$

где $c^2 = E/\rho$, а размерные функции $G^{(i)}$ представляются в виде:

$$G^{(1)} = \frac{1 + \nu + 2\nu^2}{4\rho}P_{xxxx} - \frac{1 - \nu + 2\nu^2 + 4\nu^3}{4E}P_{xxtt}, \tag{2.42}$$

$$G^{(2)} = \frac{1 + \nu}{4\rho}P_{xxxx} - \frac{1 + \nu - 2\nu^2 - 2\nu^3}{4E(1 - \nu)}P_{xxtt} - \frac{3 - 5\nu - 4\nu^2 + 4\nu^3}{8ER(1 - \nu)}T_{xtt} - \frac{\nu}{2\rho R}T_{xxx}. \tag{2.43}$$

Уравнения (2.40) были выведены для случая сильных поверхностных напряжений, когда соответствующие слагаемые находятся в ведущем порядке по малому параметру ε. Если напряжения сравнительно невелики:

$$P = \varepsilon\hat{P}, \quad T = \varepsilon\hat{T},$$

тогда уравнения (2.40) асимптотически сводятся к

$$e_{tt} - e_{xx} - \varepsilon \Big[2\left(\nu \hat{P}_{xx} + \hat{T}_x\right) + \frac{1}{2E}\left(\beta_1 e^2\right)_{xx} + \frac{\delta^2}{\varepsilon}\left(\alpha_1^{(i)} e_{tttt} + \alpha_2^{(i)} e_{xxtt} + \alpha_3^{(i)} e_{xxxx}\right)\Big] + O(\varepsilon^2) = 0, \quad i = 1, 2, \tag{2.44}$$

а в размерном виде эти уравнения записываются следующим образом:

$$e_{tt} - c^2 e_{xx} - \frac{2}{\rho}\left(\nu P_{xx} + \frac{1}{R} T_x\right) - \left(\frac{\beta_1}{2\rho} e^2\right)_{xx} + R^2\left(\frac{\alpha_1^{(i)}}{c^2} e_{tttt} + \alpha_2^{(i)} e_{xxtt} + c^2 \alpha_3^{(i)} e_{xxxx}\right) = 0, \quad i = 1, 2. \tag{2.45}$$

Отметим, что в случае условия свободной поверхности, т.е. $P = T = 0$, уравнения (2.41) и (2.45) сводятся к

$$e_{tt} - c^2 e_{xx} = \frac{\beta_1}{2\rho}\left(e^2\right)_{xx} - R^2\left(\frac{\alpha_1^{(i)}}{c^2} e_{tttt} + \alpha_2^{(i)} e_{xxtt} + c^2 \alpha_3^{(i)} e_{xxxx}\right), \quad i = 1, 2. \tag{2.46}$$

Сравним оба уравнения (2.46) с «уравнением с двумя дисперсиями (УДД)», полученным Самсоновым и Порубовым [26, 20, 21]:

$$e_{tt} - c^2 e_{xx} = \frac{\beta_1}{2\rho}(e^2)_{xx} - \frac{\nu(1-\nu)R^2}{2} e_{xxtt} + \frac{\nu c^2 R^2}{2} e_{xxxx}, \tag{2.47}$$

и уравнением, выведенным Островским и Сутиным [23]:

$$e_{tt} - c^2 e_{xx} = \frac{\beta_1}{2\rho}(e^2)_{xx} + \frac{\nu^2 R^2}{2} e_{xxtt}. \tag{2.48}$$

Все четыре модели имеют одинаковое нелинейное слагаемое, однако дисперсионные слагаемые отличаются. Уравнения (2.47) и (2.48) могут быть записаны в форме уравнений (2.46) с помощью следующих дисперсионных коэффициентов:

$$\alpha_1^{(3)} = 0, \qquad \alpha_2^{(3)} = \frac{(1-\nu)\nu}{2}, \qquad \alpha_3^{(3)} = -\frac{\nu}{2},$$
$$\alpha_1^{(4)} = 0, \qquad \alpha_2^{(4)} = -\frac{\nu^2}{2}, \qquad \alpha_3^{(4)} = 0.$$

Отметим, что все четыре приведённые выше модели типа Буссинеска не являются асимптотически точными уравнениями, т.е. в безразмерной форме они содержат как члены $O(1)$, так и $O(\varepsilon)$. Следовательно, все эти уравнения могут быть «регуляризованы» (сведены) к одному уравнению, в котором есть только одно дисперсионное слагаемое, используя отношение в главном порядке $e_{tt} = c^2 e_{xx} + \dots$. Коэффициент при этом дисперсионном слагаемом является суммой всех дисперсионных коэффициентов и одинаков для всех четырех уравнений:

$$\alpha_1^{(i)} + \alpha_2^{(i)} + \alpha_3^{(i)} = -\frac{\nu^2}{2}, \quad i = \overline{1,4}, \tag{2.49}$$

что означает что эти уравнения асимптотически эквивалентны. Однако до регуляризации модели обладают различными дисперсионными свойствами, и, подобно линейным исследованиям [42], было бы интересно сравнить характеристики этих четырех нелинейных моделей с численным решением полной нелинейной задачи. Также отметим, что три дисперсионных члена, присутствующих в уравнениях (2.46) алогичны дисперсионным членам в уравнении типа Буссинеска, полученных из нелинейной решеточной модели для волновода в [31].

2.3. Альтернативный вывод

В этом разделе предложен вывод уравнения (2.37) из полной постановки задачи (2.3) и (2.4), используя менее жёсткие предположения о форме асимптотических разложений перемещений и, следовательно, обосновывая разложения (2.8) в виде степенного ряда по радиальной переменной, использованной в предыдущем разделе.

Введём безразмерные переменные так, как это было сделано ранее в (2.11), изменив лишь масштаб радиуса:

$$\tilde{r} = \frac{r}{\delta L} \tag{2.50}$$

чтобы безразмерный $\tilde{r}$ был порядка 1, а не δ. Как и ранее, опустим тильду над безразмерными величинами в дальнейшем изложении. Будем искать безразмерные перемещения в виде асимптотических разложений по малому параметру δ:

$$U(x,r,t) = U_0(x,t) + U_2(x,r,t)\delta^2 + U_4(x,r,t)\delta^4 + O(\delta^6), \tag{2.51}$$

$$V(x,r,t) = V_1(x,r,t)\delta + V_3(x,r,t)\delta^3 + V_5(x,r,t)\delta^5 + O(\delta^7). \tag{2.52}$$

Здесь для краткости уже использовано предположение о том, что U_0 не зависит от r, которое следует из соотношения в главном порядке по δ в уравнении (2.3). Кроме того, здесь мы сразу опускаем нечётные степени по δ в U_0 и чётные в V_0, что может быть доказано в ходе подробного, но громоздкого вывода, который здесь приводить не будем.

Подставляя разложения (2.51) и (2.52) в уравнения движения (2.3) (2.4), получаем

$$\begin{aligned}&\rho c^2 U_{0tt} - (\lambda+2\mu)U_{0xx} - (\lambda+\mu)\left(V_{1xr} + \frac{V_{1x}}{r}\right) - \mu\left(U_{2rr} + \frac{U_{2r}}{r}\right) + \varepsilon\widetilde{\Phi}_1(U_0, V_1, U_2)\\ &+ \delta^2\left[\rho c^2 U_{2tt} - (\lambda+2\mu)U_{2xx} - (\lambda+\mu)\left(V_{3xr} + \frac{V_{3x}}{r}\right) - \mu\left(U_{4rr} + \frac{U_{4r}}{r}\right)\right] + O(\varepsilon^2, \varepsilon\delta^2, \delta^4) = 0,\end{aligned} \tag{2.53}$$

$$\begin{aligned}(\lambda+2\mu)\left(\frac{V_1}{r^2} - \frac{V_{1r}}{r} - V_{1rr}\right) + \varepsilon\widetilde{\Phi}_2(U_0, V_1) + \delta^2\Big[\rho c^2 V_{1tt} - \mu V_{1xx} - (\lambda+\mu)U_{2xr}\\ + (\lambda+2\mu)\left(\frac{V_3}{r^2} - \frac{V_{3r}}{r} - V_{3rr}\right)\Big] + O(\varepsilon^2, \varepsilon\delta^2, \delta^4) = 0,\end{aligned} \tag{2.54}$$

где функции $\widetilde{\Phi}_1$ и $\widetilde{\Phi}_2$ включают все нелинейные члены (для краткости не приводятся здесь). Нижний индекс x, r и t, как и раньше, обозначают частную производную по соответствующей переменной.

Граничные условия при $r = 1$ принимают вид:

$$\begin{aligned}\lambda U_{0x} + (\lambda + 2\mu)V_{1r} + \lambda V_1 + \varepsilon\widetilde{\Psi}_1(U_0, V_1, U_2, V_3) + \delta^2\big[\lambda U_{2x} + (\lambda + 2\mu)V_{3r} + \lambda V_3\big] \\ + O(\varepsilon^2, \varepsilon\delta^2, \delta^4) = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}P(x,t),\end{aligned} \tag{2.55}$$

$$\mu\left(U_{2r} + V_{1x}\right) + \varepsilon\widetilde{\Psi}_2(U_0, V_1, U_2, V_3) + \delta^2\mu\left(U_{4r} + V_{3x}\right) + O(\varepsilon^2, \varepsilon\delta^2, \delta^4) = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}T(x,t). \tag{2.56}$$

Собирая коэффициенты при одинаковых степенях δ в уравнениях (2.53) и (2.54), получаем систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно переменной r, где все нелинейные слагаемые умножены на ε. Мы решаем эти уравнения с граничными условиями, следующими из (2.55) и (2.56), используя асимптотические разложения функций по ε. Покажем эту процедуру на примере функции V_1, которую представим в следующем виде:

$$V_1(x, r, t) = f(x, r, t) + \varepsilon g(x, r, t) + O\left(\varepsilon^2\right), \tag{2.57}$$

где f и g неизвестные функции. Подставляя (2.57) в (2.54) получаем ОДУ относительно f в главном порядке по ε:

$$f_{rr} + \frac{f_r}{r} - \frac{f}{r^2} = 0. \tag{2.58}$$

Граничные условия, следующие из (2.55), принимают вид:

$$(\lambda + 2\mu)f_r + \lambda f = -\lambda U_{0x} + \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}P(x,t) \quad \text{at } r = 1. \tag{2.59}$$

Задача (2.58), (2.59) дополняется условием симметрии, требующим, чтобы поперечное перемещение было равно нулю в центре стержня:

$$f = 0 \quad \text{при} \quad r = 0. \tag{2.60}$$

Общее решение уравнения (2.58) имеет вид:

$$f(x, r, t) = C_1(x,t)r + \frac{C_2(x,t)}{r}. \tag{2.61}$$

Из (2.60) следует, что $C_2 \equiv 0$, а C_1 находится из (2.59), что даёт итоговое выражение для f:

$$f(x, r, t) = \frac{r}{2(\lambda + \mu)}\left(\frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}P - \lambda U_{0x}\right). \tag{2.62}$$

Используя (2.62), получаем уравнение относительно функции g в следующем порядке по ε:

$$g_{rr} + \frac{g_r}{r} - \frac{g}{r^2} = 0, \tag{2.63}$$

с граничными условиями:

$$(\lambda + 2\mu)g_r + \lambda g = a_1 U_{0x}^2 + a_2 U_{0x} P + a_3 P^2 \qquad \text{при} \quad r = 1, \tag{2.64}$$

$$g = 0 \qquad \text{при} \quad r = 0. \tag{2.65}$$

Решение уравнений (2.63), (2.64), (2.65) имеет вид:

$$g(x,t) = \frac{r(a_1 U_{0x}^2 + a_2 U_{0x} P + a_3 P^2)}{2(\lambda + \mu)}. \tag{2.66}$$

Функции U_2, V_3 и U_4 исключаются аналогичным образом, при использовании ещё одного условия $U_r = 0$ при $r = 0$. В конечном итоге получаем:

$$V_1(x,r,t) = \frac{r}{2(\lambda+\mu)}\left(\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}P - \lambda U_{0x} + \varepsilon(a_1 U_{0x}^2 + a_2 U_{0x} P + a_3 P^2)\right) + O(\varepsilon^2), \tag{2.67}$$

$$\begin{aligned} U_2(x,r,t) = {} & \frac{r^2}{4\mu}\left(\rho c^2 U_{0tt} - 2\mu U_{0xx} - \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}P_x\right) \\ & + \varepsilon r^2 \big[U_{0x}\left(a_4 U_{0tt} + a_5 U_{0xx} + a_6 P_x\right) + P(a_7 U_{0tt} + a_8 U_{0xx} + a_9 P_x)\big] + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \tag{2.68}$$

$$V_3(x,r,t) = r\left(b_1(r) P_{tt} + b_2(r) U_{0xtt} + b_3(r) P_{xx} + b_4(r) U_{0xxx}\right) + O(\varepsilon), \tag{2.69}$$

$$U_4(x,r,t) = r^4 a_{10} U_{0tttt} + r^2\left(b_5(r) U_{0xxxx} + b_6(r) U_{0xxtt} + b_7(r) P_{xtt} + b_8(r) P_{xxx}\right) + O(\varepsilon). \tag{2.70}$$

Здесь функции $b_i(r) = b_i^{(2)} r^2 + b_i^{(0)}$, коэффициенты a_i и $b_i^{(j)}$ зависят от упругих модулей λ, μ, l, m, n и плотности ρ.

Итоговое уравнение, следующее из (2.56) после подстановки V_1, U_2, V_3 и U_4 совпадает с ранее выведенным уравнением (2.23).

2.4. Вывод уравнения типа Буссинеска в растянутом стержне

Рассмотрим распространение продольных волн в равномерно растянутом вдоль своей оси стержне. Продольное перемещение в растянутом состоянии представляется в виде:

$$U^*(x) = \kappa x, \tag{2.71}$$

где κ – постоянная. Обезразмерим предварительное растяжение с помощью того же масштаба, что U в (2.11):

$$\tilde{U}^* = \frac{U^*}{\varepsilon L} = \tilde{\kappa}\tilde{x}, \quad \text{where} \quad \tilde{\kappa} = \frac{\kappa}{\varepsilon}. \tag{2.72}$$

Более того, будем предполагать, что в предварительно растянутом состоянии на стержень не действуют внешние напряжения, приложенные к его поверхности. Решая уравнения движения (2.3) и (2.4) с граничными условиями (2.6) и (2.7) при $P = T = 0$, записанными в безразмерном виде с помощью (2.11) и (2.72), получаем поперечное перемещение $\tilde{V}^*$ в растянутом стержне:

$$\tilde{V}^*(\tilde{r}) = -\frac{\lambda\tilde{\kappa}\tilde{r}}{2(\lambda+\mu)}\left(1+\varepsilon\frac{\tilde{\kappa}\left(2\mu^2(\lambda+2l)+\lambda^2(3\lambda+6m-2n)+\lambda\mu(5\lambda+4m-2n)\right)}{4\lambda(\lambda+\mu)^2}+O(\varepsilon^2)\right). \tag{2.73}$$

Введём новые безразмерные разложения перемещений (тильды опущены):

$$U(x,r,t) = U^*(x) + U_0 + r^2U_2 + r^4U_4 + O(r^6), \tag{2.74}$$

$$V(x,r,t) = V^*(r) + rV_1 + r^3V_3 + r^5V_5 + O(r^7). \tag{2.75}$$

Следуя выводу уравнений (2.37) и используя разложения (2.74), (2.75) взамен (2.13), (2.14), получаем уравнения:

$$\begin{gathered} e_{tt} - \left(1+\varepsilon\kappa\frac{\beta_1}{E}\right)e_{xx} - 2\left[\left(\nu+\varepsilon\kappa\frac{\beta_2}{2E}\right)P_{xx}+T_x\right] - \varepsilon\left(\frac{\beta_1}{2E}e^2+\frac{\beta_2}{E}eP+\frac{\beta_3}{2E}P^2\right)_{xx} \\ +\delta^2\left(\alpha_1^{(i)}e_{tttt}+\alpha_2^{(i)}e_{xxtt}+\alpha_3^{(i)}e_{xxxx}+F_x^{(i)}\right)+O(\varepsilon^2,\varepsilon\delta^2,\delta^4)=0, \quad i=1,2, \end{gathered} \tag{2.76}$$

где использованы обозначения, введённые в предыдущих разделах. Отметим, что здесь $e = U_{0x}$ является возмущением относительно растянутого состояния, в то время как в уравнениях (2.37) оно обозначает возмущение относительно недеформированного состояния.

Предполагая, что нелинейные и дисперсионные слагаемые одного порядка ($\varepsilon \sim \delta^2$) и отбрасывая малые члены в (2.76), получаем уравнение, которое в размерном виде представляется следующим образом:

$$\begin{gathered} e_{tt} - \left(c^2+\kappa\frac{\beta_1}{\rho}\right)e_{xx} - \frac{2}{\rho}\left[\left(\nu+\kappa\frac{\beta_2}{2E}\right)P_{xx}+\frac{1}{R}T_x\right] - \left(\frac{\beta_1}{2\rho}e^2+\frac{\beta_2}{\rho E}eP+\frac{\beta_3}{2\rho E^2}P^2\right)_{xx} \\ +R^2\left(\frac{\alpha_1^{(i)}}{c^2}e_{tttt}+\alpha_2^{(i)}e_{xxtt}+c^2\alpha_3^{(i)}e_{xxxx}+G^{(i)}\right)=0, \quad i=1,2. \end{gathered} \tag{2.77}$$

Здесь коэффициенты $\alpha_j^{(i)}$, β_j и функции $G^{(i)}$ Задаются формулами (2.30) – (2.34) и (2.42) – (2.43) соответственно. В случае слабых граничных напряжений, описанных в разделе 2.2., это уравнение асимптотически сводится к

$$\begin{gathered} e_{tt} - \left(c^2+\kappa\frac{\beta_1}{\rho}\right)e_{xx} - \frac{2}{\rho}\left[\left(\nu+\kappa\frac{\beta_2}{2E}\right)P_{xx}+\frac{1}{R}T_x\right] - \left(\frac{\beta_1}{2\rho}e^2\right)_{xx} \\ +R^2\left(\frac{\alpha_1^{(i)}}{c^2}e_{tttt}+\alpha_2^{(i)}e_{xxtt}+c^2\alpha_3^{(i)}e_{xxxx}\right)=0, \quad i=1,2. \end{gathered} \tag{2.78}$$

Отметим, что акустоэластический эффект (изменение скорости линейной волны в растянутой среде) изучался в [45, 46, 18]. Насколько известно автору, обе модели, описываемые уравнениями (2.77) (а также их упрощённые версии (2.41) и (2.46)) не были получены ранее.

2.5. Дисперсионные свойства и солитонные решения

На рисунке 2.2 представлены дисперсионные кривые четырёх упрощённых (с нулевыми напряжениями на поверхности и без предварительного растяжения) уравнения типа Буссинеска, приведённые в предыдущих разделах, а также нижние три ветви точного дисперсионного соотношения Похгаммера-Кри для линейной задачи.

Дисперсионные соотношения имеют вид:

$$\frac{2p}{R}\left(q^2+k^2\right)J_1(pR)J_1(qR)-\left(q^2-k^2\right)^2 J_0(pR)J_1(qR)-4k^2pqJ_1(pR)J_0(qR)=0, \tag{2.79}$$

$$\alpha_1^{(i)}\overline{\omega}^4-\left(1-\alpha_2^{(i)}\overline{k}^2\right)\overline{\omega}^2+\overline{k}^2\left(1+\alpha_3^{(i)}\overline{k}^2\right)=0, \quad i=1,2, \tag{2.80}$$

$$\left(1-\frac{(1-\nu)\nu}{2}\overline{k}^2\right)\overline{\omega}^2-\overline{k}^2\left(1-\frac{\nu\overline{k}^2}{2}\right)=0, \tag{2.81}$$

$$\left(1+\frac{\nu^2}{2}\overline{k}^2\right)\overline{\omega}^2-\overline{k}^2=0, \tag{2.82}$$

для решения Похгаммера-Кри и уравнений (2.46, $i=1,2$), (2.47) и (2.48) соответственно. Здесь $\overline{k}=kR$, $\overline{\omega}=\omega R/c$, где k и ω – волновое число и волновая частота соответственно, J_i – функция Бесселя первого рода, а параметры p и q выражаются следующим образом:

$$p^2=\frac{\rho\omega^2}{\lambda+2\mu}-k^2, \quad q^2=\frac{\rho\omega^2}{\mu}-k^2. \tag{2.83}$$

Все модели достаточно хорошо описывают нижнюю ветвь дисперсионной кривой, соответствующую длинным продольным волнам. Уравнение Самсонова-Порубова (2.47) обладает коротковолновой неустойчивостью, в то время как остальные три модели не имеют такого эффекта. Отметим, что коротковолновая неустойчивость затрудняет выполнять численный счёт, поскольку высокие гармоники в таком случае могут неограниченно возрастать. Полученные в настоящей работе уравнения (2.46) в отличие от уравнения Островского-Сутина (2.48) улавливают вторую ветвь дисперсионной кривой. Уравнение (2.46, $i=2$) лучше описывает нижнюю ветвь для коротких волн, в то время как (2.46, $i=1$) обладает лучшими дисперсионными свойствами как длинноволновая модель.

Все четыре уравнения (2.46, $i=1,2$), (2.47) и (2.48) имеют семейство солитонных решений (см. Приложение 1):

$$e_i(x,t)=A\,\mathrm{sech}^2\left[B_i\left(x\pm t\sqrt{c^2+\frac{A\beta_1}{3\rho}}\right)\right], \quad i=\overline{1,4}, \tag{2.84}$$

где амплитуда A является свободным параметром. Для заданной амплитуды A, соответствующие солитонные решения имеют одинаковую скорость, но разные параметры ширины B_i:

$$B_i = \sqrt{\frac{3A\beta_1E}{-4\left[(A\beta_1+3E)^2\alpha_1^{(i)}+3E(A\beta_1+3E)\alpha_2^{(i)}+9E^2\alpha_3^{(i)}\right]R^2}}, \quad i=1,2, \tag{2.85}$$

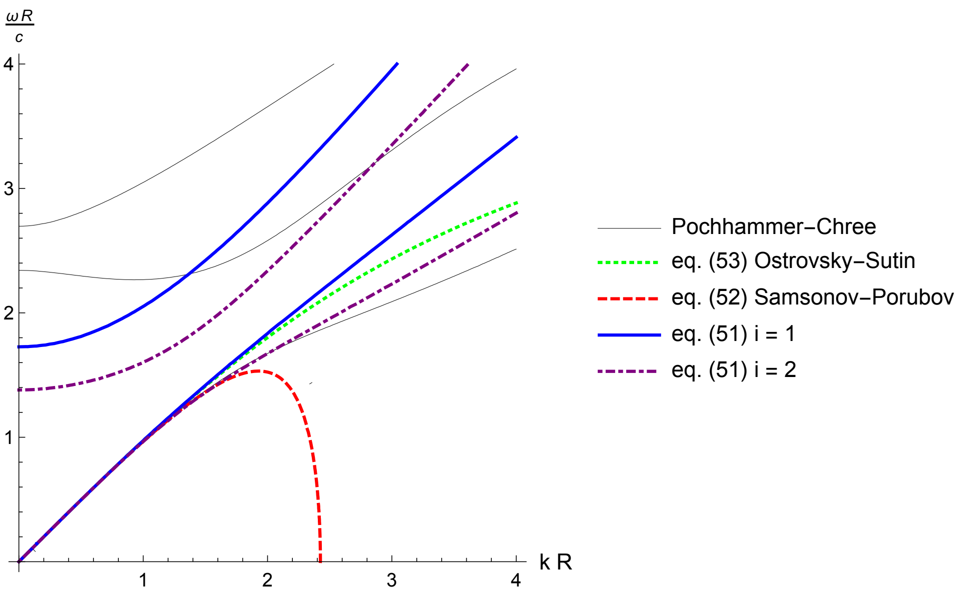

Рис. 2.2: Дисперсионные кривые для стержня радиуса $R = 10^{-2}m$, сделанного из полистирола, упругие модули которого приведены в таблице 2.1.

$$B_3 = \sqrt{\frac{A\beta_1}{[6\nu E + 2A\beta_1(\nu - 1)]\,\nu R^2}}, \tag{2.86}$$

$$B_4 = \sqrt{\frac{A\beta_1}{(6E + 2A\beta_1)\nu^2 R^2}}, \tag{2.87}$$

для уравнений (2.46), (2.47) и (2.48) соответственно.

На рисунке 2.3 в левой части изображены четыре солитона, задаваемых формулами (2.84) – (2.87) и имеющих амплитудный параметр $A = -0.05$ (упругие модули полистирола). Видно, что все четыре солитона имеют разную длину, причём «регуляризованный» солитон (2.87) самый длинный. Однако такая амплитуда солитона деформации превышает предел текучести для полистирола и, следовательно, на практике недостижима. В экспериментах с полистироловым стержнем, описанных в [40], амплитуда очень мала: $A \sim 10^{-3} - 10^{-4}$. Следовательно, в главном порядке по A во всех четырёх формулах параметр длины примерно равен

$$B = \sqrt{\frac{A\beta_1}{6\nu^2 E R^2}}, \tag{2.88}$$

а соответствующее солитонное решение изображено в правой части рисунка 2.3 для $A = -0.001$.

Модуль Юнга E, Н/м^2	Коэффициент Пуассона, ν	Модули Мурнагана, Н/м^2			Плотность ρ, кг/м^3
		l	m	n	
$3.7 \cdot 10^9$	0.34	$-18.9 \cdot 10^9$	$-13.3 \cdot 10^9$	$-10 \cdot 10^9$	1060

Таблица 2.1: Elastic moduli of the polystyrene (PS) [45].

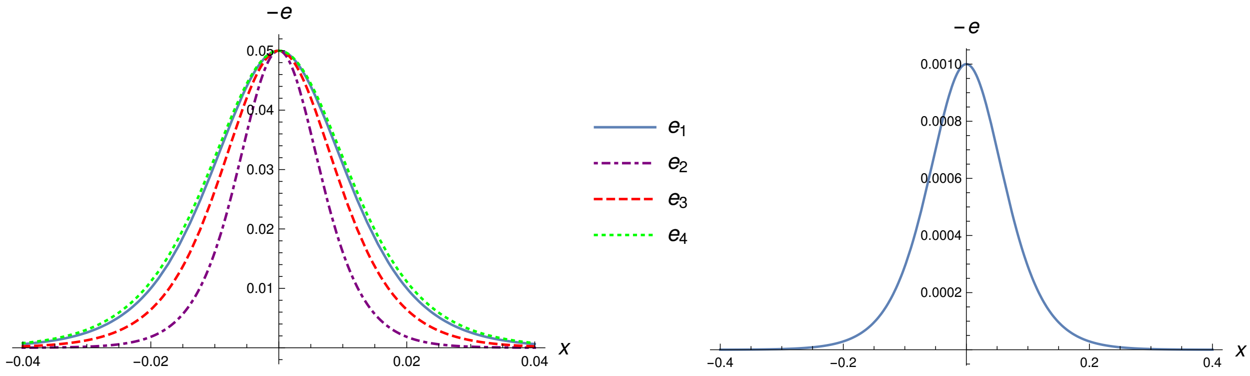

Рис. 2.3: Солитоны в стержне радиуса $R = 10^{-2}m$, сделанном из полистирола при $A = -0.05$ (слева) и $A = -0.001$ (справа). Упругие модули полистирола в таблице 2.1.

Репараметризуем солитонное решение (2.84) через скорость v вместо амплитуды A:

$$e_i(x,t) = \frac{3\rho\,(v^2 - c^2)}{\beta_1}\text{sech}^2\left[\tilde{B}_i(x \pm vt)\right], \qquad v = \sqrt{c^2 + \frac{A\beta_1}{3\rho}}, \tag{2.89}$$

где

$$\tilde{B}_i = \sqrt{\frac{c^2(v^2-c^2)}{-4\left(\alpha_1^{(i)}v^4 + \alpha_2^{(i)}c^2v^2 + \alpha_3^{(i)}c^4\right)R^2}}, \quad i = 1,2, \tag{2.90}$$

$$\tilde{B}_3 = \sqrt{\frac{v^2-c^2}{2\nu R^2[c^2-(1-\nu)v^2]}}, \tag{2.91}$$

$$\tilde{B}_4 = \sqrt{\frac{v^2-c^2}{2\nu^2 v^2 R^2}}. \tag{2.92}$$

Солитонное решение существует, только если параметр длины $\tilde{B}$ вещественен, и, следовательно, $\tilde{B}^2 > 0$, что приводит, предполагая $\nu < 0.5$, к следующим ограничениям на скорость солитона:

- $\tilde{B}_i^2 > 0 \implies v^2 < \dfrac{-\alpha_2^{(i)} - \sqrt{\alpha_2^{(i)2} - 4\alpha_1^{(i)}\alpha_3^{(i)}}}{2\alpha_1^{(i)}}c^2$ или $c^2 < v^2 < \dfrac{-\alpha_2^{(i)} + \sqrt{\alpha_2^{(i)2} - 4\alpha_1^{(i)}\alpha_3^{(i)}}}{2\alpha_1^{(i)}}c^2$, $i = 1,2$,
- $\tilde{B}_3^2 > 0 \implies c^2 < v^2 < \dfrac{c^2}{1-\nu}$,
- $\tilde{B}_4^2 > 0 \implies c^2 < v^2$.

Отметим, что $0 < \dfrac{-\alpha_2^{(i)} - \sqrt{\alpha_2^{(i)2} - 4\alpha_1^{(i)}\alpha_3^{(i)}}}{2\alpha_1^{(i)}} \leqslant 1$ и $\dfrac{-\alpha_2^{(i)} + \sqrt{\alpha_2^{(i)2} - 4\alpha_1^{(i)}\alpha_3^{(i)}}}{2\alpha_1^{(i)}} \geqslant 1\ \forall \nu \in [0, 0.5]$ для $i = 1,2$.

Таким образом, в то время как первые три модели дают ограниченный диапазон скоростей солитона сжатия, регуляризованная модель не накладывает ограничения сверху на скорость. Также первые две модели, в отличие от двух других, допускают существование солитонов растяжения.

Глава 3.

Численное решение уравнений нелинейной теории упругости

3.1. Псевдоспектральный метод

3.2. Численные эксперименты

3.2. Эволюция солитона

3.2. Генерация из удара по торцу стержня

Заключение

Литература

[1] Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: «Мир», 1988.

[2] Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи. М.: Мир, 1987.

[3] M.J. Ablowitz, *Nonlinear dispersive waves: asymptotic analysis and solitons*, Cambridge University Press, Cambridge, 2011.

[4] Scott Russell J. *Report on waves*, Rept. 14th meetings of the British Assoc. for the Advancement of Science. London: John Murray, 1844. P. 311–390.

[5] Boussinesq J. The?orie de l'intumescence liquid apple?e onde solitarie ou de translation se propagent dans un canal rectangularie // Comptes Rendus. 1871. Vol. 72. P. 755–759.

[6] Korteweg D.J., de Vries G. On the change of form of long waves advancing in a rectangular channel, and on a new type of long stationary waves // Phil. Mag. 1895. Vol. 39. P. 422–443.

[7] T.B. Benjamin, J.L. Bona, and J.J. Mahony, Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems, *Philos. Trans. R. Soc. London, Ser. A* 272(1220) (1972) 47-78.

[8] Zabusky N.J., Kruskal M.D. Interaction of «solitons» in a collisionless plasma and the reccurence of initial states // Phys. Rev. Lett. 1965. Vol. 15, No 6. P. 240–243.

[9] Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. М.: «Наука», 1980.

[10] F.D. Murnaghan, *Finite deformation of an elastic solid*, John Wiley and Sons, 1951.

[11] J. Bergström, *Mechanics of Solid Polymers*, William Andrew Publishing, 2015.

[12] Y.-Y. Yu, Generalized Hamilton's Principle and Variational Equation of Motion in Nonlinear Elasticity Theory, With Application to Plate Theory, Journal of the Acoustical Society of America, vol. 36, 1964, pp. 111-120.

[13] G.A. Maugin, *Nonlinear waves in elastic crystals*, Oxford University Press, Oxford, 1999.

[14] H.-H. Dai, Z. Cai, Phase transition in a slender cylinder composed of an incompressible elastic material. I. Asymptotic model equation, *Proc. Roy. Soc. A* 462 (2006) 419-438.

[15] A. Mayer, Nonlinear surface acoustic waves: Theory, *Ultrasonics* 48 (2008) 478-481.

[16] P. Hess, A.M. Lomonosov, Solitary surface acoustic waves and bulk solitons in nanosecond and picosecond laser ultrasonics, *Ultrasonics* 50 (2010) 167-171.

[17] J. Engelbrecht, A. Salupere and K. Tamm, Waves in microstructured solids and the Boussinesq paradigm, *Wave Motion* 48 (2011) 717-726.

[18] A. Pau, F. Lanza di Scalea, Nonlinear guided wave propagation in prestressed plates, *J. Acoust. Soc. Am.* 137 (2015) 1529-1540.

[19] T. Peets, K. Tamm, J. Engelbrecht, On the role of nonlinearities in the Boussinesq-type wave equations, *Wave Motion* 71 (2017) 113-119.

[20] A.M. Samsonov, *Strain solitons in solids and how to construct them*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2001.

[21] A.V. Porubov, *Amplification of nonlinear strain waves in solids*, World Scientific, Singapore, 2003.

[22] G.A. Nariboli, A. Sedov, Burgers-Korteweg de Vries equation for viscoelastic rods and plates, *J. Math. Anal. Appl.* 32(3) (1970) 661-677.

[23] L.A. Ostrovsky, A.M. Sutin, Nonlinear elastic waves in rods, *PMM* 41 (1977) 531-537.

[24] A.M. Samsonov, Structural optimization in nonlinear wave propagation problems. In: *Structural Optimization under Dynamical Loading. Seminar and Workshop for Junior Scientists*, U. Lepik ed., Tartu University Press, 75-76 (1982).

[25] A.M. Samsonov, Soliton evolution in a rod with variable cross section, *Sov. Physics - Doklady* 29 (1984) 586-587.

[26] A.M. Samsonov, A.V. Porubov, Refinement of the model for the propagation of longitudinal strain waves in a rod with nonlinear elasticity, *Tech. Phys. Lett.* 19(6) (1993) 365-366.

[27] A.V. Porubov, M.G. Velarde, Dispersive - dissipative solitons in nonllinear solids, *Wave Motion* 31(3) (2000) 197-207.

[28] V.I. Erofeev, V.V. Kazhaev, N.P. Semerikova, *Waves in rods: dispersion, dissipation, nonlinearity*, Fizmatlit, Moscow, 2002 (in Russian).

[29] H.-H. Dai, X. Fan, Asymptotically approximate model equations for weakly nonlinear long waves in compressible elastic rods and their comparisons with other simplified model equations, *Maths. Mechs. Solids* 9 (2004) 61-79.

[30] H.-H. Dai, and Z. Cai, Uniform asymptotic analysis for transient waves in a pre-stressed compressible hyperelastic rod, *Acta Mechanica* 139 (2000) 201-230.

[31] K.R. Khusnutdinova, A.M. Samsonov, A.S. Zakharov, Nonlinear layered lattice model and generalized solitary waves in imperfectly bonded structures, *Phys. Rev. E* 79(5) (2009) 056606.

[32] K.R. Khusnutdinova, A.M. Samsonov, Fission of a longitudinal strain solitary wave in a delaminated bar, *Phys. Rev. E* 77 (2008) 066603.

[33] K.R. Khusnutdinova, M.R. Tranter, Modelling of nonlinear wave scattering in a delaminated elastic bar, *Proc. R. Soc. A* 471 (2015) 20150584.

[34] K.R. Khusnutdinova, M.R. Tranter, On radiating solitary waves in bi-layers with delamination and coupled Ostrovsky equations, *Chaos* 27 (2017) 013112.

[35] G.V. Dreiden, K.R. Khusnutdinova, A.M. Samsonov, and I.V. Semenova, Splitting induced generation of soliton trains in layered waveguides, *J. Appl. Phys.* 107 (2010) 034909.

[36] G.V. Dreiden, K.R. Khusnutdinova, A.M. Samsonov, and I.V. Semenova, Bulk strain solitary waves in bonded layered polymeric bars with delamination, *J. Appl. Phys.* 112 (2012) 063516.

[37] J.-F. Mercier, B. Lombard, A two-way model for nonlinear acoustic waves in a non-unfirm lattice of Helmholtz resonators, *Wave Motion* 72 (2017) 260-275.

[38] R. Arredondo and J.P. McHugh, Mean displacement near an interface in a nonlinear string, *SIAM J. Appl. Math.* 78 (2018) 1470-1488.

[39] M. Destrade and G. Saccomandi, Nonlinear transverse waves in deformed dispersive solids, *Wave Motion* 45 (2008) 325-336.

[40] F.E. Garbuzov, K.R. Khusnutdinova, I.V. Semenova, On Boussinesq-type models for long longitudinal waves in elastic rods. *Wave Motion*, 88 (2019), 129-143.

[41] M. Destrade, G. Saccomandi, I. Sigura, Methodical fitting for mathematical models of rubber-like materials, *Proc. R. Soc. A* 473 (2017) 20160811.

[42] A. Boström, On wave equations for elastic rods, *ZAMM* 80(4) (2000) 245-251.

[43] P. Rosenau, Dynamics of dense lattices, *Phys. Rev. B* 36 (1987) 5868-5876.

[44] M.B. Rubin, P. Rosenau, O. Gottlieb, Continuum model of dispersion caused by an inherent material characteristic length, *J. Appl. Phys.* 77 (1995) 4054-4063.

[45] D.S. Hughes, J.L. Kelly, Second order elastic deformation of solids, *Phys. Rev.* 92 (1953) 1145-1149.

[46] Z. Abiza, M. Destrade, and R.W. Ogden, Large acoustoelastic effect, *Wave Motion* 49 (2012) 364-374.

[47] A.E.H. Love, *A treatise on the mathematical theory of elasticity*, Cambridge University Press, London, 1927.

[48] A.V. Pichugin, H. Askes, A. Tyas, Asymptotic equivalence of homogenisation procedures and fine-tuning of continuum theories, *J. Sound and Vibration* 313 92008) 858-874.

[49] I.V. Andrianov, V.D. Danishevsky, J.D. Kaplunov and B. Markert, Wide frequency higher-order dynamic model for transient waves in a lattice, In: I.V. Andrianov et al. ed., "Problems of Nonlinear Mechanics and Physics of Materials Springer, 2019.

[50] G. V. Dreiden, Yu. I. Ostrovsky, A. M. Samsonov, I. V. Semenova, E. V. Sokurinskaya, Formation and propagation of strain solitons in nonlinearly elastic solid, *Techn. Phys.* 58 (1988) 2040-2017. (in Russian)

[51] G.V. Dreiden, A.M. Samsonov, I.V. Semenova, Evolution of bulk strain solitons in long polymeric waveguides, *Techn. Phys.* 53 (2008) 540-546.

[52] G.V. Dreiden, A.M. Samsonov, I.V. Semenova, Bulk elastic strain solitons in polycarbonate, *Techn. Phys. Lett.* 37 (2011) 500-502.

[53] G.V. Dreiden, K.R. Khusnutdinova, A.M. Samsonov, I.V. Semenova, Comparison of the effect of cyanoacrylate- and polyurethane-based adhesives on a longitudinal strain solitary wave in layered polymethylmethacrylate waveguides, *J. Appl. Phys.* 104 (2008) 086106.

[54] G.V. Dreiden, A.M. Samsonov, I.V. Semenova, and A.G. Shvartz, Strain solitary waves in a thin-walled waveguide, *Appl. Phys. Lett.* 105 (2014) 211906.

[55] A.V. Belashov, Y.M. Beltukov, N.V. Petrov, A.M. Samsonov, I.V. Semenova, Indirect assessment of bulk strain soliton velocity in opaque solids, *Appl. Phys. Lett.* 112 (2018) 121903.

[56] G.V. Dreiden, K.R. Khusnutdinova, A.M. Samsonov, I.V. Semenova, Longitudinal strain solitary wave in a two-layered polymeric bar, *Strain* 46 (2010) 589-598.

[57] A.V. Belashov, Y.M. Beltukov, I.V. Semenova, Pump-probe digital holography for monitoring of long bulk nonlinear strain waves in solid waveguides, *Proc. SPIE* 10678 (2018) 1067810.