Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Институт прикладной математики и механики

Выпускная квалификационная работа магистра

Продольные волны деформации в нелинейно упругих волноводах

Выполнил студент гр. 23641/1 — Ф. Е. Гарбузов
Руководитель, д.т.н., проф. (СПб ПУ) — Б. С. Григорьев
Научный консультант, к.ф.-м.н. (ФТИ им. Иоффе) — Я. М. Бельтюков

Постановка задачи

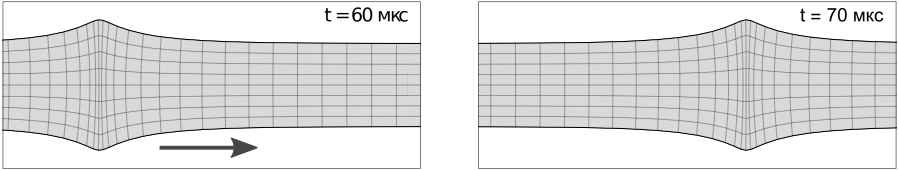
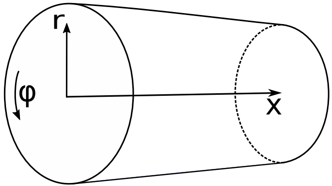


Рис.: Продольная волна в стержне.

- Построить асимптотическую одномерную модель для продольных волн в нелинейно упругом стержне, учитывающую нагрузку на поверхности стержня.
- Найти солитонные решения и проанализировать свойства выведенной модели.
- Провести серию численных экспериментов. Сравнить выведенную одномерную модель с полной моделью.

Полная трёхмерная модель

Трёхмерный вектор перемещения $\underline{U}$.



Слабонелинейная деформация (малой, но не бесконечно малой амплитуды).

Тензор деформации и плотность потенциальной энергии:

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2}\left((\nabla\underline{U})^T + \nabla\underline{U} + (\nabla\underline{U})^T \cdot \nabla\underline{U}\right)$$

$$W = \frac{\lambda+2\mu}{2} I_1(\underline{\underline{E}})^2 - 2\mu I_2(\underline{\underline{E}}) + \frac{l+2m}{3} I_1(\underline{\underline{E}})^3 - 2m I_1(\underline{\underline{E}}) I_2(\underline{\underline{E}}) + n I_3(\underline{\underline{E}})$$

$\lambda,\ \mu$ — модули упругости Ламе (линейные),
$l,\ m,\ n$ — модули упругости Мурнагана (нелинейные).

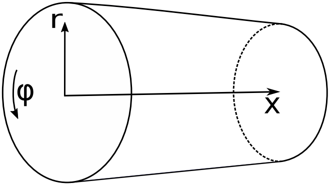
Полные трёхмерные уравнения движения:

$$\rho\ddot{\underline{U}} = \mathrm{div}\underline{\underline{P}}, \qquad \underline{\underline{P}} = (\underline{\underline{I}} + \nabla\underline{U}) \cdot \frac{\partial W}{\partial \underline{\underline{E}}}$$

Упрощающие предположения

Предположения:

- Стержень бесконечен вдоль оси x.
- Осесимметричная задача: нет кручения и от угловой координаты φ ничего не зависит.
- Малые деформации: $U,\ V \sim \varepsilon \ll 1$
- Функции медленно меняются: $\partial/\partial x,\ \partial/\partial r \sim 1/L$.
- Тонкий стержень: $R/L = \delta \ll 1$.



Радиус стержня — R.
Перемещения:
U — осевое (продольное),
V — радиальное (поперечное).

Разложение перемещений в степенной ряд по радиальной переменной:

$$U(x,r,t) = U_0(x,t) + r^2 U_2(x,t) + r^4 U_4(x,t) + \dots ,$$
$$V(x,r,t) = rV_1(x,t) + r^3 V_3(x,t) + r^5 V_5(x,t) + \dots .$$

Подстановка разложений в уравнения движения позволяет выразить $U_2,\ V_3,\ U_4,\ V_5$ через U_0 и V_1.

Упрощённая система двух уравнений

На границе задано нормальное напряжение $P(x,t)$ и касательное $T(x,t)$:

$$2(\lambda+\mu)V_1 + \lambda U_{0x} + \varepsilon\Psi_1(U_0, V_1) + \delta^2\Big[\gamma_1 U_{0xxx} + \gamma_2 U_{0xtt} + \gamma_3 V_{1tt} + \gamma_4 V_{1xx}\Big] + \\ + O(\varepsilon^2, \varepsilon\delta^2, \delta^4) = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}P,$$

$$\rho c^2 U_{0tt} - 2\lambda V_{1x} - (\lambda+2\mu)U_{0xx} - \varepsilon\Psi_2(U_0, V_1) + \delta^2\Big[\gamma_5 U_{0xxxx} + \gamma_6 U_{0tttt} + \\ + \gamma_7 U_{0xxtt} + \gamma_8 V_{1xxx} + \gamma_9 V_{1xtt}\Big] + O(\varepsilon^2, \varepsilon\delta^2, \delta^4) = \frac{2\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}T.$$

Коэффициенты γ_j зависят от упругих модулей, Ψ — нелинейные функции.

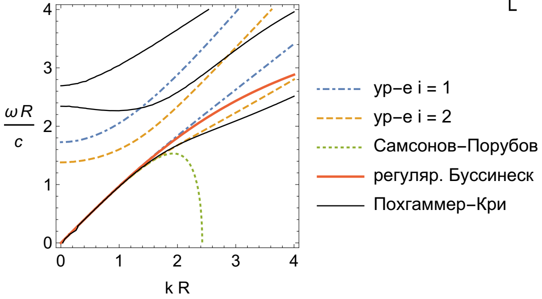
Существует два способа исключения V_1, приводящие к одномерному уранению типа Буссинеска.

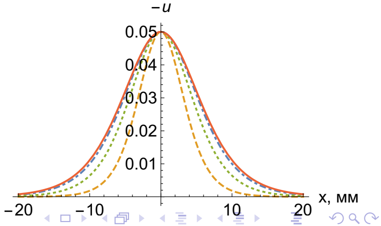
Уравнение типа Буссинеска

$u = U_{0x}$ — продольная деформация, $c = \sqrt{E/\rho}$ — скорость длинных линейных волн.

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} - \frac{2}{\rho}\left(\nu P_{xx} + \frac{1}{R}T_x\right) - \left(\frac{\beta_1}{2\rho}u^2 + \frac{\beta_2}{\rho E}uP + \frac{\beta_3}{2\rho E^2}P^2\right)_{xx} +$$
$$+ R^2\left(\frac{\alpha_1^{(i)}}{c^2}u_{tttt} + \alpha_2^{(i)}u_{xxtt} + c^2\alpha_3^{(i)}u_{xxxx} + G^{(i)}(P,T)\right) = 0, \quad i = 1, 2.$$

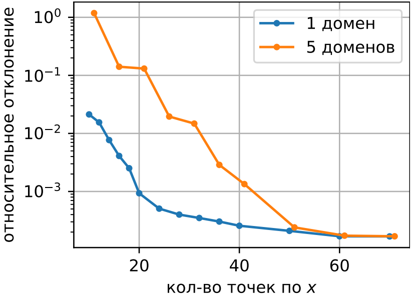
Солитонное решение: $u_i(x,t) = A\,\mathrm{sech}^2\left[B_i\left(x \pm t\sqrt{c^2 + \frac{A\beta_1}{3\rho}}\right)\right].$

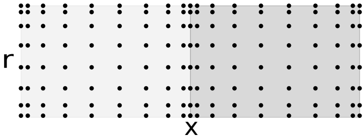




Численная схема

- Псевдоспектральный метод: поиск в конечномерном пространстве функции, совпадающей с решением в точках коллокации.
- Точки коллокации — узлы интерполяционной квадратуры Гаусса (Радо, Лобатто).
- Пространственные производные вычисляются умножением на матрицу дифференцирования.
- Для ускорения: многодоменный псевдоспектральный метод.





Пример сетки из двух доменов.

Сравнение моделей: эволюция волны

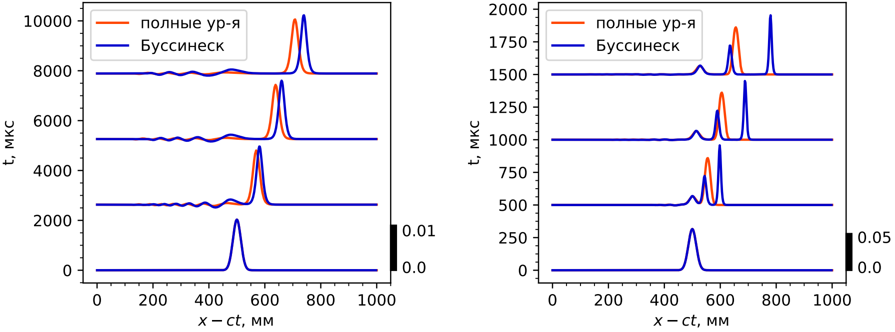


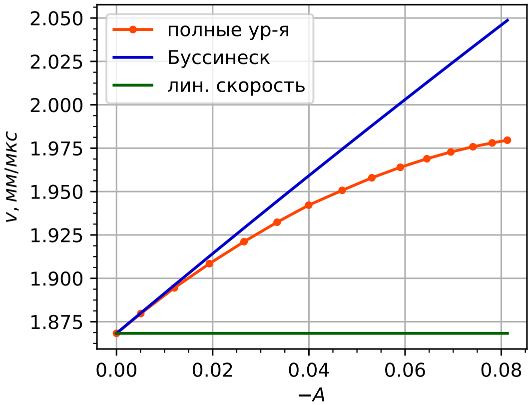
Рис.: Профили решений $-u(x - ct, t)$ регуляризованного уравнения Буссинеска и продольной деформации $-U_x(x - ct, 0, t)$ в центре стержня $(r = 0)$ в различные моменты времени. Масштаб амплитуды деформации показан чёрным прямоугольником.

Сравнение моделей: скорость-амплитуда

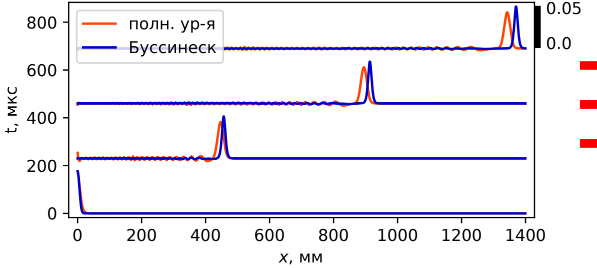
Зависимость
скорости от амплитуды
в модели Буссинеска:

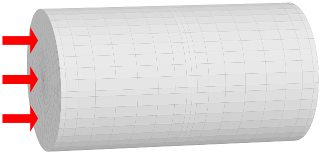
$$v(A) = \sqrt{c^2 + A\frac{\beta_1}{3\rho}}$$

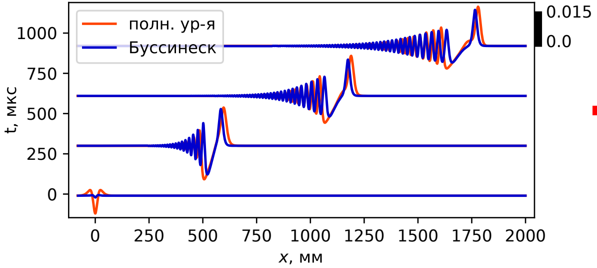
Зависимость
для полных уравнений
получена в серии
численных экспериментов.

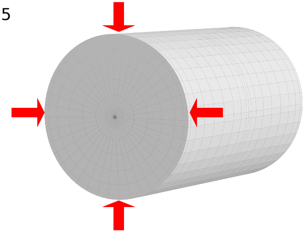


Сравнение моделей: удар по поверхности









Заключение

- Выведены две новые асимптотические модели типа Буссинеска с внешним воздействием, описывающие продольные волны в нелинейно упругих стержнях круглого сечения.
- Построен метод, позволяющий численно моделировать полные трёхмерные уравнения движения стержня в рамках нелинейной теории упругости.
- Численно решён ряд начально-краевых задач, показывающих хорошую применимость уравнения типа Буссинеска для моделирования возникновения солитонов деформации.

Статьи и конференции

Результаты работы частично опубликованы:

- Garbuzov F. E., Khusnutdinova K. R., Semenova I. V., On Boussinesq-type models for long longitudinal waves in elastic rods, *Wave Motion* 88 (2019) 129–143.

Публикации по смежным темам:

- Samsonov A. M., Semenova I. V., Garbuzov F. E., Nonlinear guided bulk waves in heterogeneous elastic structural elements. *Int. J. Nonlin. Mech.* 94 (2017) 343–350.
- Semenova I. V., Belashov A. V., Garbuzov F. E., Samsonov A. M., Semenov A. A., Bulk strain solitons as a tool for determination of the third order elastic moduli of composite materials. *Proceedings of SPIE 10329* (2017) 103291W.
- Гарбузов Ф. Е., Самсонов А. М., Семёнов А. А., Шварц А. Г., Определение упругих модулей 3-го порядка по параметрам объёмных солитонов деформации, *ПЖТФ* 42 (2) (2016) 121–123.

Конференции:

- Days on Diffraction, С.-Петербург, 4 – 8 июня 2018.
- Научная школа "Нелинейные волны 2018", Н. Новгород, 26 февр. – 4 марта 2018.
- Nonlinear Waves, С.-Петербург, 22 декабря 2017.