

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Институт прикладной математики и механики

Работа допущена к защите
Заведующий кафедрой
«Прикладная математика»

_____ М. Е. Фролов

" ____ " _____

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА МАГИСТРА

ПРОДОЛЬНЫЕ ВОЛНЫ ДЕФОРМАЦИИ В НЕЛИНЕЙНО УПРУГИХ ВОЛНОВОДАХ

по направлению 01.04.02 «Прикладная математика и информатика»
по образовательной программе 01.04.02_01 «Математическое моделирование»

Выполнил
студент гр. 23641/1

Ф. Е. Гарбузов

Руководитель
проф., д.т.н.

Б. С. Григорьев

Научный консультант
к.ф.-м.н.

Я. М. Бельтюков

Санкт-Петербург
2019

РЕФЕРАТ

ключевые слова

Сам реферат на полстранички.

ABSTRACT

key words

The same in English.

Оглавление

Введение	5
1 Обзор литературы и постановка задачи	6
1.1. Нелинейные волновые процессы	6
1.2. Нелинейная динамика твёрдого тела	7
1.3. Нелинейные волны деформации в твёрдых упругих волноводах	9
1.4. Численные методы решения нелинейных уравнений	11
2 Слабо нелинейные продольные волны деформации в тонких волноводах	12
2.1. Формулировка задачи	12
2.2. Вывод уравнения типа Буссинеска	13
2.3. Derivation of a Boussinesq-type equation for a pre-stretched rod	20
2.4. Dispersive properties and solitary wave solutions	21
3 Численное решение уравнений нелинейной теории упругости	25
3.1. Обзор	25
3.2. Псевдоспектральный метод	25
3.3. Численные эксперименты	25
Заключение	26

Введение

Волнами деформации называют механические колебания, распространяющиеся в твёрдом теле. Эти волны могут возникать естественным образом в природе, например, во время землетрясений, а также искусственно возбуждаться человеком для исследования внутреннего строения твёрдых тел. Так, волны деформации, а именно, упругие волны, применяются во множестве практических задач, например, в дефектоскопии, сейсморазведке, ультразвуковом исследовании. Существуют различные типы упругих волн деформации: продольные, поперечные, поверхностные, изгибные и другие. Продольные волны, рассматриваемые в настоящей работе, характеризуются тем, что частицы среды колеблются вдоль направления распространения волны.

Для изучения упругих волн деформации важное значение имеет модель упругости тела, которая определяет связь двух величин: напряжения и деформации. Простейшая модель – закон Гука – даёт линейную зависимость возникающих напряжений от деформации тела. Существует ряд более сложных моделей, например, Муни-Ривлина, Огдена, Мурнагана, в рамках которых напряжения нелинейно связаны с деформацией. Волны, возникающие в линейно упругих материалах, в настоящее время хорошо исследованы, в то время как изучение волн в нелинейно упругих телах является актуальной научной задачей.

Изучение нелинейных волновых процессов началось ещё в XIX веке, главным образом, в связи с задачами газо- и гидродинамики. Теория нелинейных волн деформации в твёрдых волноводах разрабатывается с 1970-х годов такими учёными, как Островский, Сутин, Самсонов, Порубов и другие. Используя ряд гипотез, им удалось свести задачу к некоторым классическим уравнениям нелинейной теории волн. Целью настоящей работы является уточнение и систематическое изложение вывода уравнения типа Буссинеска с целью обобщить его на ряд случаев, не исследованных ранее, а также проведение серии численных экспериментов по моделированию нелинейных волн.

Работа состоит из введения, трёх глав, заключения и списка литературы. В первой главе приведён обзор литературы, а также подробно сформулирована задача, решению которой посвящена работа. Во второй главе содержится вывод нового уравнения типа Буссинеска, описывающего нелинейные продольные волны в стержнях, а также сравнение с уравнениями, полученными ранее. Третья глава посвящена численному моделированию нелинейных волн в стержне, а именно, подбору метода, позволяющего эффективно решить задачу, и описанию результатов численных экспериментов.

TODO: переделать

Глава 1.

Обзор литературы и постановка задачи

1.1. Нелинейные волновые процессы

Изучение нелинейных волновых процессов является важной научной задачей, берущей начало ещё в XIX веке в связи с исследованием волн, возникающих на поверхности воды. С тех пор нелинейные волны были обнаружены во многих других физических системах, имеющих самую различную природу, а исследования в этой области ведутся и по сей день. Для описания нелинейных волновых явлений была сформирована единая теория, систематическому изложению которой посвящено множество книг, например, [1], [2], [3]. Приведём здесь некоторые важные положения, необходимые для дальнейшего изложения.

Исследование нелинейных волн началось в связи с открытием шотландского инженера Дж. Скотта Рассела, наблюдавшего в 1834 году на поверхности канала уединённую волну, бежавшую несколько миль почти без затухания. Впоследствии Рассел неоднократно воспроизводил это явление в экспериментах и определил соотношение между глубиной канала, скоростью и амплитудой этой волны [4], однако первая математическая модель, описывающая уединённые волны, была получена в работе Ж. Буссинеска [5] в 1872 году. Уравнение Буссинеска включает в себя помимо линейных волновых членов также нелинейное и дисперсионное слагаемые:

$$u_{tt} - u_{xx} - 3(u^2)_{xx} - u_{xxxx} = 0. \quad (1.1)$$

Здесь x – безразмерная пространственная переменная, t – безразмерное время, u – нормированная высота поднятия воды над уровнем невозмущённой поверхности, а нижний индекс означает частную производную по соответствующей переменной. Уравнение (1.1) имеет однопараметрическое решение в виде двух уединённых волн, бегущих в противоположных направлениях:

$$u(x, t) = A \cosh^{-2} \left[\sqrt{\frac{A}{2}} \left(x \pm t\sqrt{1 + 2A} \right) \right], \quad (1.2)$$

где амплитуда A является свободным параметром. Для той же задачи Д. Кортевегом и Г. де Фризом [6] в 1895 году было выведено другое уравнение:

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0, \quad (1.3)$$

которое тоже имеет решение в виде уединённой волны.

Существование решений нелинейных уравнений в виде устойчивых уединённых волн обусловлено так называемым балансом нелинейности и дисперсии. Нелинейное слагаемое,

нестрого говоря, стремится сделать фронт волны более крутым и в конечном счёте опрокинуть его, а дисперсионное слагаемое, наоборот, стремится сделать волну более пологой. Стоит отметить, что уравнивать нелинейность может не только дисперсия, но и диссипация. Например, уравнение Бюргерса описывает простейшую нелинейную физическую систему с диссипацией:

$$u_t + uu_x = \nu u_{xx}, \quad (1.4)$$

а систему и с диссипацией и с дисперсией может описывать уравнение Бюргерса-Кортевега-де Фриза:

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = \nu u_{xx}. \quad (1.5)$$

Существует множество других классических уравнений теории нелинейных волн, например, нелинейное уравнение Шрёдингера, однако в настоящей работе они не затрагиваются.

Важнейшие свойства уединённых волн, являющихся решением уравнения Кортевега-де Фриза (1.3), были открыты Н. Забужским и М. Краскалом [8] (1965). Оказалось, что уединённые волны сталкиваются «упруго», то есть после взаимодействия полностью восстанавливают свою форму. На рисунке 1.1 изображены результаты численного эксперимента, где видно, как волна с большей амплитудой обгоняет волну с меньшей амплитудой, причём в результате столкновения уединённые волны не изменили свою форму, а лишь претерпели фазовый сдвиг. Для того, чтобы подчеркнуть «упругий» характер взаимодействия, свойственный частицам, Забужский и Краскал назвали такие уединённые волны *солитонами*.

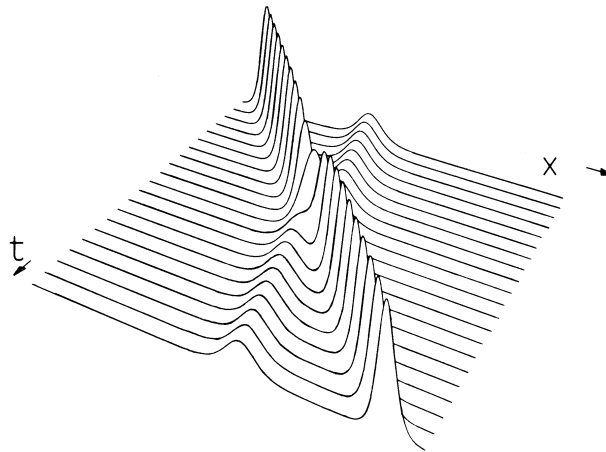


Рис. 1.1: Попутное столкновение двух солитонов.

1.2. Нелинейная динамика твёрдого тела

В этом разделе приведены важные для дальнейшего изложения сведения по нелинейной динамике твёрдого тела, систематическому описанию которой посвящено множество книг, например, [9].

Динамика упругой сплошной среды, занимающей объём Ω , описывается уравнениями движения, которые в векторном виде в случае однородного тела представляются следующим

образом:

$$\rho \ddot{\underline{U}}(\underline{x}, t) = \operatorname{div} \underline{\underline{P}} + \underline{F}, \quad \underline{x} \in \Omega. \quad (1.6)$$

Здесь ρ – плотность материала, $\underline{U}(\underline{x}, t)$ – вектор перемещений, \underline{x} – координаты точки среды в отсчётной конфигурации, $\underline{\underline{P}}$ – первый тензор напряжений Пиолы-Кирхгофа, \underline{F} – плотность массовых сил, точка обозначает взятие частной производной по времени, а дивергенция берётся по координатам в отсчётной конфигурации. Тензор напряжений $\underline{\underline{P}}$ выражается через тензор деформации $\underline{\underline{E}}$ следующим образом:

$$\underline{\underline{P}} = (\underline{I} + \nabla \underline{U}) \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial \underline{\underline{E}}}, \quad (1.7)$$

где Π – плотность энергии деформации, а тензор деформации связан с градиентом перемещения:

$$2\underline{\underline{E}} = (\nabla \underline{U})^T + \nabla \underline{U} + (\nabla \underline{U})^T \cdot \nabla \underline{U}. \quad (1.8)$$

Заметим, что в линейной теории деформация предполагается бесконечно малой и нелинейное слагаемое в (1.8) отбрасывается. Для завершения постановки задачи уравнения (1.6) – (1.8) необходимо дополнить соотношением, связывающем энергию и деформацию, а также граничными условиями:

$$\underline{U} = \underline{U}_b, \quad \underline{x} \in S_U; \quad \underline{\underline{P}} \cdot \underline{n} = \underline{P}_b, \quad \underline{x} \in S_P; \quad S_U \cup S_P = \partial \Omega. \quad (1.9)$$

Энергия деформации Π однородного и изотропного тела может быть разложена в ряд по инвариантам I_i тензора деформации:

$$\Pi = \frac{\lambda + 2\mu}{2} I_1(\underline{\underline{E}})^2 - 2\mu I_2(\underline{\underline{E}}) + \frac{l + 2m}{3} I_1(\underline{\underline{E}})^3 - 2m I_1(\underline{\underline{E}}) I_2(\underline{\underline{E}}) + n I_3(\underline{\underline{E}}) + \dots, \quad (1.10)$$

при этом коэффициенты в этом разложении характеризуют упругость материала и называются модулями упругости (λ и μ – коэффициенты Ламе, а l , m , n – модули Мурнагана). Заметим, что первые два слагаемых в приведённом разложении являются слагаемыми второго порядка относительно компонент тензора $\underline{\underline{E}}$, а следующие три – третьего порядка. В разложении (1.10) для линейно упругого материала удерживаются только слагаемые второго порядка, а для слабо нелинейного материала Мурнагана [10] учитываются ещё и слагаемые третьего порядка. Существуют другие нелинейно упругие материалы, например, материал Муни-Ривлина или Огдена, однако они предназначены в первую очередь для описания резиноподобных материалов, подверженных большим деформациям [11]. Отметим, что нелинейно упругие материалы иногда называют гиперупругими.

Помимо классической постановки задачи в виде дифференциальных уравнений в частных производных (1.6), (1.9), существует вариационная постановка на основе принципа Гамильтона, гласящего, что истинная траектория системы является стационарной точкой функционала

действия:

$$\delta \mathcal{S} = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \rho \dot{\underline{U}}^2 - \Pi + \underline{F} \cdot \underline{U} \right) dx + \int_{S_P} \underline{P}_b \cdot \underline{U} ds \right] = 0. \quad (1.11)$$

В (1.11) варьирование происходит по перемещениям \underline{U} . Отметим, что существует обобщённый принцип Гамильтона, где в функционал действия включаются соотношения (1.7) и (1.8), а варьирование осуществляется не только по перемещениям, но и по деформациям $\underline{\underline{E}}$ и напряжениям $\underline{\underline{P}}$ [12].

1.3. Нелинейные волны деформации в твёрдых упругих волноводах

Изучение нелинейных волн деформации в твёрдых телах является важной темой современного изучения волн [13, 14, 15, 16, 17, 18, 19]. Исследование включает в себя изучение солитонов деформации в твердотельных волноводах [20, 21]. Исторически разработка теории началась с исследования волн в упругом стержне круглого сечения, поскольку такая геометрия волновода является наиболее простой.

Г. Нариболи и А. Седов вывели уравнение Бюргерса-Кортевега-де Фриза для длинных продольных волн в бесконечном вязкоупругом осесимметричном стержне со свободной от напряжений поверхностью [22]. Для этого уравнения нелинейной теории упругости (1.6) и (1.9), записанные в цилиндрической системе координат (x, r, φ) , были упрощены с помощью:

- предположения о малости радиуса стержня $a \ll 1$,
- предположения о малых деформациях $U, V \sim \varepsilon \ll 1$,
- разложения перемещений в степенной ряд по радиусу стержня:

$$U(x, r, t) = U_0(x, t) + a^2 U_2(x, r, t) + \mathcal{O}(a^4), \quad (1.12)$$

$$V(x, r, t) = -\nu a r \frac{\partial U_0}{\partial x} + a^3 V_3(x, r, t) + \mathcal{O}(a^5), \quad (1.13)$$

где U – продольное перемещение вдоль оси стержня, совпадающей с осью x , V – радиальное перемещение, а ν – коэффициент Пуассона.

Позже, Л. Островский и А. Сутин получили регуляризованную модель типа Буссинеска, используя принцип Гамильтона и нижеследующие гипотезы, позволившие упростить функционал действия задачи [23]:

$$U(x, r, t) = U(x, t), \quad V(x, r, t) = -\nu r U_x. \quad (1.14)$$

А.М. Самсонов, используя подход Островского и Сутина, предложил модель типа Буссинеска с двумя дисперсионными слагаемыми [24] и обобщил её на случай неоднородного стержня с меняющимся радиусом и модулями упругости [25]. Коэффициенты модели Самсонова с двумя типами дисперсионных членов были позже уточнены в работах А.М. Самсонова и А.В. Порубова [26, 20, 21]. А.В. Порубовым и М. Веларде предложена дисперсионно-диссипативная модель для длинных волн в упругом стержне, помещённом в некоторую среду [27]. Модель типа Буссинеска с тремя типами дисперсионных членов обсуждалась В.И. Ерофеевым и соавторами [28],

однако коэффициент при нелинейном слагаемом в их модели отличается от соответствующего коэффициента у Островского, Сутина и Самсонова, Порубова. Все выводы моделей типа Буссинеска в этих исследованиях основывались на использовании модели Мурнагана для энергии упругой деформации и последующем упрощении полного функционала действия задачи с использованием некоторых гипотез.

Х. Дай и Х. Фан, упростили полные уравнения движения с граничными условиями в виде свободной от напряжений поверхности стержня, сведя их к системе из двух связанных уравнений [29]. Для этого была введена система масштабов переменных и функций, которые удовлетворяли следующим условиям:

- масштаб перемещений h мал по сравнению с характерной длиной волны l : $\varepsilon = h/l \ll 1$,
- радиус стержня a мал по сравнению с характерной длиной волны l : $\delta = a^2/l^2 \ll 1$.

Кроме того, были использованы разложения перемещений в ряд по радиальной координате. Упрощённые уравнения были выведены из полных с помощью метода регулярных возмущений и отбрасывания членов порядка $\mathcal{O}(\varepsilon^2, \varepsilon\delta, \delta^2)$. В [30] Х. Дай и З. Цай применили систематический асимптотический анализ для описания волн в предварительно растянутом гиперупругом стержне, сделанном из материала Муни-Ривлина.

Во всех описанных работах использовалась непрерывная модель твёрдого тела, которое однако можно описывать дискретно с помощью решёточной модели. К.Р. Хуснутдинова и соавторы получили модель типа Буссинеска для нелинейно упругого стержня с помощью систематического асимптотического вывода в рамках решёточной модели [31]. Заметим, что уравнение модели было получено из полных уравнений движения без использования упрощающих гипотез. Интересно, что в этом исследовании выводились модели типа Буссинеска с двумя и тремя дисперсионными слагаемыми, а также система связанных уравнений типа Буссинеска для волн в слоистом волноводе с неидеальным контактом.

В недавних исследованиях модели типа Буссинеска использовались для изучения распространения длинных продольных уединённых волн деформации в волноводе с расслоением [32, 33, 34], а некоторые соответствующие экспериментальные наблюдения были опубликованы в [35, 36]. Отметим исследования по распространению нелинейных волн на дефектах в решетках [37] и струнах [38]. Некоторые другие модели типа Буссинеска были получены для описания распространения поперечных волн большой амплитуды [39].

Цель нашей настоящей работы – вернуться к выводу нелинейных длинноволновых моделей для продольных волн в круглом стержне, чтобы систематически получить новую модель типа Буссинеска и распространить её на более сложный случай, когда имеется ненулевая осесимметричная нагрузка на граничной поверхности и продольное предварительное растяжение. Кроме этого, в настоящей работе обсуждаются основные решения в виде уединённых волн, а также дисперсионные свойства описанных здесь моделей. Результаты этой работы опубликованы автором в сотрудничестве с К.Р. Хуснутдиновой и И.В. Семёновой [40].

1.4. Численные методы решения нелинейных уравнений

Конечно-разностные схемы для уравнений типа Буссинеска разработаны Христовом, и др. (ссылки).

Мощным инструментом является псевдоспектральный метод (ссылки на Кануто, Готтлиба-Орсага).

Глава 2.

Слабо нелинейные продольные волны деформации в тонких волноводах

2.1. Формулировка задачи

Рассмотрим стержень круглого поперечного сечения радиуса R . Введём цилиндрическую систему координат (x, r, φ) , где x – осевая координата, r – продольная, φ – угловая, как показано на рисунке 2.1. Будем использовать Лагранжев подход и введём вектор перемещения $\underline{U} = (U, V, W)$, где U – осевое (продольное) перемещение, V – радиальное (поперечное) перемещение, а W – вращение.

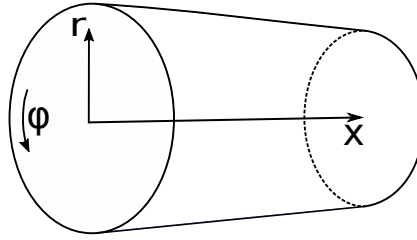


Рис. 2.1: Схема стержня.

Следуя предыдущим исследованиям, которые обсуждались в главе 1, будем рассматривать стержень, сделанный из материала Мурнагана, энергия упругой деформации которого представляется в виде:

$$\Pi = \frac{\lambda + 2\mu}{2} I_1(\underline{E})^2 - 2\mu I_2(\underline{E}) + \frac{l + 2m}{3} I_1(\underline{E})^3 - 2m I_1(\underline{E}) I_2(\underline{E}) + n I_3(\underline{E}), \quad (2.1)$$

где $I_1(\underline{E}) = \text{tr } \underline{E}$, $I_2(\underline{E}) = [(\text{tr } \underline{E})^2 - \text{tr } \underline{E}^2] / 2$, $I_3(\underline{E}) = \det \underline{E}$ являются инвариантами тензора деформации Грина $\underline{E} = ((\nabla \underline{U})^T + \nabla \underline{U} + (\nabla \underline{U})^T \cdot \nabla \underline{U}) / 2$, λ, μ – коэффициенты Ламе, l, m, n – модули Мурнагана. Здесь и далее в тексте работы все частные производные берутся по координатам в отсчётной конфигурации. Отметим, что модель Мурнагана используется здесь потому, что она является общей моделью слабо нелинейных упругих деформаций.

Рассмотрим задачу, в которой отсутствует кручение стержня, а продольное и поперечное перемещения U и V не зависят от угла φ :

$$U = U(x, r, t), \quad V = V(x, r, t), \quad W = 0. \quad (2.2)$$

Уравнения движения, в условиях (2.2) и отсутствия массовых сил, принимают вид

$$\rho \frac{\partial^2 U(x, r, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial P_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial P_{xr}}{\partial r} - \frac{P_{xr}}{r} = 0, \quad (2.3)$$

$$\rho \frac{\partial^2 V(x, r, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial P_{rx}}{\partial x} - \frac{\partial P_{rr}}{\partial r} - \frac{P_{rr} - P_{\varphi\varphi}}{r} = 0, \quad (2.4)$$

а третье уравнение представляется в виде тождества $0 \equiv 0$. Здесь $P_{\alpha\beta}$ обозначает компоненту первого тензора Пиолы-Кирхгофа, а ρ – плотность материала.

На поверхности стержня задано осесимметричное напряжение:

$$\underline{\underline{P}} \cdot \underline{n} = \underline{P}_b = (P(x, t), T(x, t), 0), \quad (2.5)$$

где \underline{n} – нормаль к поверхности. Следовательно, граничные условия представляются в виде

$$P_{rr} = P(x, t) \quad \text{при} \quad r = R, \quad (2.6)$$

$$P_{xr} = T(x, t) \quad \text{при} \quad r = R. \quad (2.7)$$

Поскольку компонента $P_{\varphi r} \equiv 0$, третье граничное условие $P_{\varphi r} = 0$ при $r = R$ удовлетворяется автоматически.

2.2. Вывод уравнения типа Буссинеска

Подход к выводу уравнения модели в этом разделе опирается на метод, описанный в [29]. Упростим этот метод с помощью разложений, использованных для вывода линейной модели [42]. Таким образом, будем искать решение в виде степенного ряда по радиальной координате:

$$U(x, r, t) = U_0(x, t) + r^2 U_2(x, t) + r^4 U_4(x, t) + \dots, \quad (2.8)$$

$$V(x, r, t) = r V_1(x, t) + r^3 V_3(x, t) + r^5 V_5(x, t) + \dots. \quad (2.9)$$

Отметим, что продольное перемещение разложено в ряд по чётным степеням радиуса, в то время как поперечное перемещение по нечётным. В линейной задаче такие разложения приняты потому, что, если учесть все степени в разложении, то уравнения движения (2.3), (2.4) разобьются на две независимые системы уравнений. В первую систему войдут слагаемые U_{2k} и V_{2k+1} , а во вторую U_{2k+1} и V_{2k} ($k \geq 0$). Для продольных волн в осесимметричном стержне должны выполняться условия:

$$\frac{\partial U}{\partial r} = 0, \quad V = 0 \quad \text{при} \quad r = 0, \quad (2.10)$$

из которых следует, что $U_1 = 0$ и $V_0 = 0$. В линейной задаче равенство нулю этих двух слагаемых достаточно, для того, чтобы все слагаемые U_{2k+1} и V_{2k} были равны нулю. В нелинейной задаче это, строго говоря, не так, однако мы примем эти разложения в качестве допущения. Кроме того, в отличие от [29], мы сведём задачу к одному уравнению типа Буссинеска, учтём нену-

левое осесимметричное напряжение, приложенное к поверхности стержня, а также рассмотрим предварительно растянутый стержень.

Введём масштабные множители, выделяющие среди прочих задачу о распространении длинных по сравнению с радиусом стержня волн малой амплитуды. Тогда безразмерные переменные и функции определяются следующими выражениями:

$$\tilde{t} = \frac{t}{L/c}, \quad \tilde{x} = \frac{x}{L}, \quad \tilde{r} = \frac{r}{L}, \quad \tilde{U} = \frac{U}{\varepsilon L}, \quad \tilde{V} = \frac{V}{\varepsilon L}, \quad \tilde{P} = \frac{P}{E\varepsilon}, \quad \tilde{T} = \frac{T}{E\varepsilon\delta}, \quad (2.11)$$

из которых следует, что $\tilde{U}_n = \frac{L^n U_n}{\varepsilon L}$, $\tilde{V}_n = \frac{L^n V_n}{\varepsilon L}$ для $n \geq 0$. Здесь L является характерной длиной волны, c – скорость линейной волны, E – модуль Юнга, $\varepsilon \ll 1$ – малый параметр амплитуды, $\delta = \frac{R}{L} \ll 1$ – второй малый параметр, а тильда обозначает безразмерную величину. Вспомним, что модуль Юнга и коэффициент Пуассона выражаются через коэффициенты Ламе:

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}. \quad (2.12)$$

С учётом (2.11) разложения (2.8), (2.9) представляются в виде:

$$\tilde{U}(\tilde{x}, \tilde{r}, \tilde{t}) = \tilde{U}_0(\tilde{x}, \tilde{t}) + \tilde{r}^2 \tilde{U}_2(\tilde{x}, \tilde{t}) + \tilde{r}^4 \tilde{U}_4(\tilde{x}, \tilde{t}) + O(\tilde{r}^6), \quad (2.13)$$

$$\tilde{V}(\tilde{x}, \tilde{r}, \tilde{t}) = \tilde{r} \tilde{V}_1(\tilde{x}, \tilde{t}) + \tilde{r}^3 \tilde{V}_3(\tilde{x}, \tilde{t}) + \tilde{r}^5 \tilde{V}_5(\tilde{x}, \tilde{t}) + O(\tilde{r}^7). \quad (2.14)$$

Радиальная координата \tilde{r} точек стержня принимает значения от 0 до δ и, следовательно, является малой величиной. В дальнейшем мы опустим тильду над безразмерными величинами.

Подставляя (2.13) и (2.14) в уравнения движения (2.3), (2.4), получаем

$$\begin{aligned} \rho c^2 U_{0tt} - (\lambda + 2\mu) U_{0xx} - 2(\lambda + \mu) V_{1x} - 4\mu U_2 + \Phi_1(U_0, V_1, U_2)\varepsilon \\ + [\rho c^2 U_{2tt} - (\lambda + 2\mu) U_{2xx} - 4(\lambda + \mu) V_{3x} - 16\mu U_4] r^2 + O(\varepsilon^2, \varepsilon r^2, r^4) = 0, \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} r(\rho c^2 V_{1tt} - \mu V_{1xx} - 2(\lambda + \mu) U_{2x} - 8(\lambda + 2\mu) V_3 - \Phi_2(U_0, V_1, U_2, V_3)\varepsilon \\ - [\rho c^2 V_{3tt} - \mu V_{3xx} - 4(\lambda + \mu) U_{4x} - 24(\lambda + 2\mu) V_5] r^2 + O(\varepsilon^2, \varepsilon r^2, r^4)) = 0, \end{aligned} \quad (2.16)$$

где индексы x и t обозначают частные производные по соответствующим переменным, а нелинейные члены выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= 2[(-4\lambda - 4\mu + n - 4m)V_1 - 2(\lambda + 2\mu + m)U_{0x}] U_2 \\ &\quad - [2(2l + \lambda)V_1 + (3\lambda + 6\mu + 2l + 4m)U_{0x}] U_{0xx} \\ &\quad - [(2\lambda + 2\mu + 8l + n)V_1 + 2(\lambda + \mu + 2l + m)U_{0x}] V_{1x}, \\ \Phi_2 &= \frac{1}{2}[2(2\lambda + 2\mu + 8l + n)U_{2x} + (4\lambda + 4\mu + 4m - n)V_{1xx} + 32(2\lambda + 3\mu + 2l + 2m)V_3] V_1 \\ &\quad + 2(\lambda + \mu + 2l + m)U_{0x}U_{2x} + 2(\mu + m)[U_{0xx} + 4V_{1x}] U_2 + (\lambda + 2\mu + m)(U_{0x}V_{1x})_x \\ &\quad + \frac{1}{4}(12\lambda + 20\mu + 12m - n)V_{1x}^2 + 8(\lambda + 2l)V_3U_{0x} + (4\lambda + 12\mu + 4m + n)U_2^2. \end{aligned}$$

Функции U_2 , V_3 , U_4 могут быть получены из (2.15) и (2.16), приравнявая к нулю коэффициенты при различных степенях r :

$$U_2 = \frac{1}{4\mu} [\rho c^2 U_{0tt} - (\lambda + 2\mu) U_{0xx} - 2(\lambda + \mu) V_{1x}] + \varepsilon f_2(x, t) + O(\varepsilon^2), \quad (2.17)$$

$$V_3 = \frac{1}{8(\lambda + 2\mu)} [\rho c^2 V_{1tt} - 2(\lambda + \mu) U_{2x} - \mu V_{1xx}] + \varepsilon f_3(x, t) + O(\varepsilon^2), \quad (2.18)$$

$$U_4 = \frac{1}{16\mu} [\rho c^2 U_{2tt} - (\lambda + 2\mu) U_{2xx} - 4(\lambda + \mu) V_{3x}] + O(\varepsilon). \quad (2.19)$$

Выражения для функций f_2 и f_3 очень громоздки и поэтому не приводятся здесь.

Затем, подставляя функции U_2 , V_3 , U_4 в граничные условия (2.6), (2.7), которые в безразмерном виде должны выполняться при $r = \delta$, получаем уравнения:

$$2(\lambda + \mu) V_1 + \lambda U_{0x} + \varepsilon \Psi_1(U_0, V_1) + \frac{\delta^2}{8} \left[(\lambda + 3\mu) U_{0xxx} - \frac{\rho c^2 (\lambda + 3\mu)}{\lambda + 2\mu} U_{0xtt} + \frac{2\rho c^2 (2\lambda + 3\mu)}{\lambda + 2\mu} V_{1tt} + 2\lambda V_{1xx} \right] + O(\varepsilon^2, \varepsilon \delta^2, \delta^4) = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} P, \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} \rho c^2 U_{0tt} - 2\lambda V_{1x} - (\lambda + 2\mu) U_{0xx} - \varepsilon \Psi_2(U_0, V_1) + \frac{\delta^2}{8} \left[(3\lambda + 4\mu) U_{0xxxx} + \frac{\rho^2 c^4}{\mu} U_{0tttt} - \frac{\rho c^2 (\lambda^2 + 7\lambda\mu + 8\mu^2)}{\mu(\lambda + 2\mu)} U_{0xxtt} + 2(3\lambda + 2\mu) V_{1xxx} - \frac{2\rho c^2 (\lambda^2 + 4\lambda\mu + 2\mu^2)}{\mu(\lambda + 2\mu)} V_{1xtt} \right] \\ + O(\varepsilon^2, \varepsilon \delta^2, \delta^4) = \frac{2\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} T, \end{aligned} \quad (2.21)$$

где нелинейные члены выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= (4l + 2m + 3\lambda + 3\mu) V_1^2 + (4l - 2m + n + \lambda) U_{0x} V_1 + \frac{1}{2} (2l + \lambda) U_{0x}^2, \\ \Psi_2 &= \left((4l - 2m + n + \lambda) V_1^2 + 2(2l + \lambda) U_{0x} V_1 + \frac{1}{2} (2l + 4m + 3\lambda + 6\mu) U_{0x}^2 \right)_x. \end{aligned}$$

Отметим, что при $\varepsilon = 0$ уравнения (2.20) и (2.21) сводятся к уравнениям, полученным в линейной задаче [42]. Эта система связанных уравнений представляет собой довольно сложную модель, однако она может быть сведена к одному уравнению типа Буссинеска.

Существует два естественных способа вывода модели типа Буссинеска. В первом способе исключение функции V_1 из уравнений (2.20) и (2.21) осуществляется с помощью асимптотического выражения, следующего из уравнения (2.20):

$$V_1(x, t) = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)P - \lambda(\lambda + \mu)U_{0x}}{2(\lambda + \mu)^2} + \varepsilon f(x, t) + \delta^2 g(x, t) + O(\varepsilon^2, \varepsilon \delta^2, \delta^4), \quad (2.22)$$

где неизвестные функции f и g могут быть найдены из условия равенства нулю коэффициентов при ε и δ^2 в (2.20). Затем, подстановка V_1 в (2.21) приводит к следующему уравнению типа

Буссинеска относительно U_0 :

$$\begin{aligned} \rho c^2 U_{0tt} - \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \left(U_{0xx} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} P_x + 2T \right) - \varepsilon (\gamma_1 U_{0x}^2 + \gamma_2 U_x P + \gamma_3 P^2)_x \\ + \delta^2 \left[\frac{\rho^2 c^4 U_{0tttt}}{8\mu} + \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)^2 U_{0xxxx}}{8(\lambda + \mu)^2} - \frac{\rho c^2 (7\lambda^2 + 10\lambda\mu + 4\mu^2) U_{0xxtt}}{8(\lambda + \mu)^2} + F \right] \\ + O(\varepsilon^2, \varepsilon\delta^2, \delta^4) = 0. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Здесь нелинейные коэффициенты γ_i и функция F представляются в виде:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{3n(\lambda + \mu)\lambda^2 + 2\mu[9\lambda^3 + 24\mu\lambda^2 + 21\mu^2\lambda + m(3\lambda + 2\mu)^2 + 2\mu^2(l + 3\mu)]}{4(\lambda + \mu)^3}, \\ \gamma_2 &= \frac{[3\lambda^3 + 5\lambda^2\mu + 2\lambda\mu^2 + 4l\mu^2 + 2\lambda m(3\lambda + 2\mu) - 2\lambda n(\lambda + \mu)]\mu(3\lambda + 2\mu)}{2(\lambda + \mu)^4}, \\ \gamma_3 &= \frac{[n(\lambda + \mu) - 2(\lambda^2 + \lambda\mu - 2l\mu) - 2m(2\lambda + \mu)]\mu^2(3\lambda + 2\mu)^2}{4(\lambda + \mu)^5}, \\ F &= \frac{3\lambda + 2\mu}{8\mu(\lambda + \mu)^3} [\mu(4\lambda^2 + 5\lambda\mu + 2\mu^2)P_{xxx} - \rho c^2(\lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2)P_{xtt}]. \end{aligned}$$

Другой метод основан на исключении V_1 из (2.20) и (2.21) таким образом, каким это сделано в [42] для линейной задачи. В линейном случае этот подход не использует асимптотическое выражение (2.22) и приводит к уравнению того же типа, что и (2.23), но с другими коэффициентами при дисперсионных слагаемых. Действительно, уравнения (2.20) и (2.21) могут быть записаны в виде:

$$L_1 V_1 + \varepsilon N_1(U_0, V_1, \dots) = M_1(U_0, P, \dots) + O(\varepsilon^2, \varepsilon\delta^2, \delta^4), \quad (2.24)$$

$$L_2 V_1 + \varepsilon N_2(U_0, V_1, \dots) = M_2(U_0, T, \dots) + O(\varepsilon^2, \varepsilon\delta^2, \delta^4), \quad (2.25)$$

где L_1 и L_2 – линейные дифференциальные операторы, действующие на V_1 , а $N_1(U_0, V_1, \dots)$, $M_1(U_0, P, \dots)$ и $N_2(U_0, V_1, \dots)$, $M_2(U_0, T, \dots)$ – нелинейные функции своих аргументов в уравнениях (2.20) и (2.21) соответственно. Теперь, применяя L_2 к первому уравнению, L_1 ко второму и вычитая одно уравнение из другого, получаем:

$$\begin{aligned} \varepsilon [L_2 N_1(U_0, V_1, \dots) - L_1 N_2(U_0, V_1, \dots)] = L_2 M_1(U_0, P, \dots) - L_1 M_2(U_0, T, \dots) \\ + O(\varepsilon^2, \varepsilon\delta^2, \delta^4). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Здесь V_1 исключена из линейной части уравнений точно, а не асимптотически. Чтобы исключить её из нелинейной части, воспользуемся выражением (2.22) и получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \rho c^2 U_{0tt} - \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \left(U_{0xx} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} P_x + 2T \right) - \varepsilon (\gamma_1 U_{0x}^2 + \gamma_2 U_x P + \gamma_3 P^2)_x \\ + \delta^2 \left[\frac{\rho^2 c^4 (\lambda^2 + 5\lambda\mu + 5\mu^2) U_{0tttt}}{8\mu(\lambda + 2\mu)(\lambda + \mu)} - \frac{\rho c^2 (6\lambda^2 + 21\lambda\mu + 14\mu^2) U_{0xxtt}}{8(\lambda + 2\mu)(\lambda + \mu)} \right. \\ \left. + \frac{\mu(3\lambda + 2\mu) U_{0xxxx}}{4(\lambda + \mu)} + G \right] + O(\varepsilon^2, \varepsilon\delta^2, \delta^4) = 0, \end{aligned} \quad (2.27)$$

где

$$G = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{8(\lambda + \mu)^2} \left[(3\lambda + 2\mu)P_{xxx} - \frac{\rho c^2(\lambda^2 + 4\lambda\mu + 2\mu^2)}{\mu(\lambda + 2\mu)}P_{xtt} - \frac{2\rho c^2(2\lambda + 3\mu)}{\lambda + 2\mu}T_{tt} - 2\lambda T_{xx} \right].$$

Отметим, что в линейном приближении при $\varepsilon = 0$ уравнение (2.27) совпадает с уравнениями, выведенными для линейной задачи в [42]. Из (2.23) и (2.27), задавая $\varepsilon = 0$, $\delta = 0$ и $P = T = 0$, получаем скорость линейной продольной волны в бесконечно тонком стержне:

$$c = \sqrt{\frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\rho(\lambda + \mu)}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (2.28)$$

Теперь перепишем оба выведенных уравнения типа Буссинеска (2.23) и (2.27) в унифицированной форме и выразим коэффициенты Ламе через модуль Юнга E и коэффициент Пуассона ν :

$$U_{0tt} - U_{0xx} - 2(\nu P_x + T) - \frac{\varepsilon}{2E} (\beta_1 U_{0x}^2 + 2\beta_2 U_{0x}P + \beta_3 P^2)_x + \delta^2 \left(\alpha_1^{(i)} U_{0tttt} + \alpha_2^{(i)} U_{0xtt} + \alpha_3^{(i)} U_{0xxxx} + F^{(i)} \right) + O(\varepsilon^2, \varepsilon\delta^2, \delta^4) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (2.29)$$

где

$$\alpha_1^{(1)} = \alpha_3^{(1)} = \frac{1 + \nu}{4}, \quad \alpha_2^{(1)} = -\frac{1 + \nu + \nu^2}{2}, \quad (2.30)$$

$$\alpha_1^{(2)} = \frac{5 - 5\nu - 6\nu^2 + 4\nu^3}{8(1 - \nu)}, \quad \alpha_2^{(2)} = -\frac{7 - 7\nu - 2\nu^2}{8(1 - \nu)}, \quad \alpha_3^{(2)} = \frac{1}{4}, \quad (2.31)$$

$$\beta_1 = 3E + 2l(1 - 2\nu)^3 + 4m(1 + \nu)^2(1 - 2\nu) + 6n\nu^2, \quad (2.32)$$

$$\beta_2 = 2(1 + \nu) [2l(1 - 2\nu)^3 + \nu(E + 4m(1 - \nu - 2\nu^2) - 2n(1 - 2\nu))], \quad (2.33)$$

$$\beta_3 = 2(1 + \nu)(1 - 2\nu) [(1 + \nu)(1 - 2\nu)[4l(1 - 2\nu) - 2m(1 + 2\nu) + n] - 2\nu E] \quad (2.34)$$

$$F^{(1)} = \frac{1}{4} [(1 + \nu + 2\nu^2)P_{xxx} - (1 - \nu + 2\nu^2 + 4\nu^3)P_{xtt}], \quad (2.35)$$

$$F^{(2)} = \frac{1}{4} \left[(1 + \nu)P_{xxx} - \frac{1 + \nu - 2\nu^2 - 2\nu^3}{1 - \nu}P_{xtt} - \frac{3 - 5\nu - 4\nu^2 + 4\nu^3}{2(1 - \nu)}T_{tt} - 2\nu T_{xx} \right]. \quad (2.36)$$

Дифференцируя (2.29) по x , получаем два уравнения для продольного «напряжения» $e = U_{0x}$:

$$e_{tt} - e_{xx} - 2(\nu P_{xx} + T_x) - \frac{\varepsilon}{2E} (\beta_1 e^2 + 2\beta_2 eP + \beta_3 P^2)_{xx} + \delta^2 \left(\alpha_1^{(i)} e_{tttt} + \alpha_2^{(i)} e_{xtt} + \alpha_3^{(i)} e_{xxxx} + F_x^{(i)} \right) + O(\varepsilon^2, \varepsilon\delta^2, \delta^4) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (2.37)$$

Три различных асимптотических модели следует из уравнений (2.37) в зависимости от соотношения между двумя малыми параметрами ε и δ . Во-первых, если нелинейность сильно слабее дисперсии, т.е. $\varepsilon \ll \delta^2 \ll 1$, мы можем асимптотически свести (2.37) к линейным

уравнениям:

$$e_{tt} - e_{xx} - 2(\nu P_{xx} + T_x) + \delta^2 \left(\alpha_1^{(i)} e_{tttt} + \alpha_2^{(i)} e_{xxtt} + \alpha_3^{(i)} e_{xxxx} + F_x^{(i)} \right) + O(\delta^4) = 0, \quad (2.38)$$

$$i = 1, 2,$$

из которых следует, что эволюция волн будет происходить главным образом под влиянием дисперсии. Во-вторых, если нелинейность намного сильнее дисперсии, т.е. $\delta^2 \ll \varepsilon \ll 1$, мы получаем уравнение

$$e_{tt} - e_{xx} - 2(\nu P_{xx} + T_x) - \frac{\varepsilon}{2E} (\beta_1 e^2 + 2\beta_2 eP + \beta_3 P^2)_{xx} + O(\varepsilon^2) = 0, \quad (2.39)$$

означающее, что эволюция волн определяется нелинейностью. Наконец, если нелинейное и дисперсионные слагаемые уравниваются друг друга, т.е. $\varepsilon \sim \delta^2$, мы получаем «модель максимального баланса» (“maximal balance model” согласно терминологии, используемой в [3]):

$$e_{tt} - e_{xx} - 2(\nu P_{xx} + T_x) - \varepsilon \left[\frac{1}{2E} (\beta_1 e^2 + 2\beta_2 eP + \beta_3 P^2)_{xx} + \frac{\delta^2}{\varepsilon} \left(\alpha_1^{(i)} e_{tttt} + \alpha_2^{(i)} e_{xxtt} + \alpha_3^{(i)} e_{xxxx} + F_x^{(i)} \right) \right] + O(\varepsilon^2) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (2.40)$$

Последняя асимптотическая модель (2.40) (обе её версии $i = 1, 2$) является уравнением типа Буссинеска. Хорошо известно, что такие уравнения имеют решения в виде солитонов сжатия [3, 20].

Отбросим члены порядка $O(\varepsilon^2)$ в уравнениях (2.40) и запишем их в размерном виде, не меняя обозначения для размерных переменных:

$$e_{tt} - c^2 e_{xx} - \frac{2}{\rho} \left(\nu P_{xx} + \frac{1}{R} T_x \right) - \left(\frac{\beta_1}{2\rho} e^2 + \frac{\beta_2}{\rho E} eP + \frac{\beta_3}{2\rho E^2} P^2 \right)_{xx} + R^2 \left(\frac{\alpha_1^{(i)}}{c^2} e_{tttt} + \alpha_2^{(i)} e_{xxtt} + c^2 \alpha_3^{(i)} e_{xxxx} + G^{(i)} \right) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (2.41)$$

где $c^2 = E/\rho$, а размерные функции $G^{(i)}$ представляются в виде:

$$G^{(1)} = \frac{1 + \nu + 2\nu^2}{4\rho} P_{xxxx} - \frac{1 - \nu + 2\nu^2 + 4\nu^3}{4E} P_{xxtt},$$

$$G^{(2)} = \frac{1 + \nu}{4\rho} P_{xxxx} - \frac{1 + \nu - 2\nu^2 - 2\nu^3}{4E(1 - \nu)} P_{xxtt} - \frac{3 - 5\nu - 4\nu^2 + 4\nu^3}{8ER(1 - \nu)} T_{xtt} - \frac{\nu}{2\rho R} T_{xxx}.$$

Уравнения (2.40) были выведены для случая сильных поверхностных напряжений, когда соответствующие слагаемые находятся в ведущем порядке по малому параметру ε . Если напряжения сравнительно невелики:

$$P = \varepsilon \hat{P}, \quad T = \varepsilon \hat{T},$$

тогда уравнения (2.40) асимптотически сводятся к

$$e_{tt} - e_{xx} - \varepsilon \left[2 \left(\nu \hat{P}_{xx} + \hat{T}_x \right) + \frac{1}{2E} (\beta_1 e^2)_{xx} + \frac{\delta^2}{\varepsilon} \left(\alpha_1^{(i)} e_{tttt} + \alpha_2^{(i)} e_{xxtt} + \alpha_3^{(i)} e_{xxxx} \right) \right] + O(\varepsilon^2) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (2.42)$$

а в размерном виде эти уравнения записываются следующим образом:

$$e_{tt} - c^2 e_{xx} - \frac{2}{\rho} \left(\nu P_{xx} + \frac{1}{R} T_x \right) - \left(\frac{\beta_1}{2\rho} e^2 \right)_{xx} + R^2 \left(\frac{\alpha_1^{(i)}}{c^2} e_{tttt} + \alpha_2^{(i)} e_{xxtt} + c^2 \alpha_3^{(i)} e_{xxxx} \right) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (2.43)$$

Отметим, что в случае условия свободной поверхности, т.е. $P = T = 0$, уравнения (2.41) и (2.43) сводятся к

$$e_{tt} - c^2 e_{xx} = \frac{\beta_1}{2\rho} (e^2)_{xx} - R^2 \left(\frac{\alpha_1^{(i)}}{c^2} e_{tttt} + \alpha_2^{(i)} e_{xxtt} + c^2 \alpha_3^{(i)} e_{xxxx} \right), \quad i = 1, 2. \quad (2.44)$$

Сравним оба уравнения (2.44) с «уравнением с двумя дисперсиями (УДД)», полученным Самсоновым и Порубовым [26, 20, 21]:

$$e_{tt} - c^2 e_{xx} = \frac{\beta_1}{2\rho} (e^2)_{xx} - \frac{\nu(1-\nu)R^2}{2} e_{xxtt} + \frac{\nu c^2 R^2}{2} e_{xxxx}, \quad (2.45)$$

и уравнением, выведенным Островским и Сутиным [23]:

$$e_{tt} - c^2 e_{xx} = \frac{\beta_1}{2\rho} (e^2)_{xx} + \frac{\nu^2 R^2}{2} e_{xxtt}. \quad (2.46)$$

Все четыре модели имеют одинаковое нелинейное слагаемое, однако дисперсионные слагаемые отличаются. Уравнения (2.45) и (2.46) могут быть записаны в форме уравнений (2.44) с помощью следующих дисперсионных коэффициентов:

$$\alpha_1^{(3)} = 0, \quad \alpha_2^{(3)} = \frac{(1-\nu)\nu}{2}, \quad \alpha_3^{(3)} = -\frac{\nu}{2}, \\ \alpha_1^{(4)} = 0, \quad \alpha_2^{(4)} = -\frac{\nu^2}{2}, \quad \alpha_3^{(4)} = 0.$$

Отметим, что все четыре приведённые выше модели типа Буссинеска не являются асимптотически точными уравнениями, т.е. в безразмерной форме они содержат как члены $O(1)$, так и $O(\varepsilon)$. Следовательно, все эти уравнения могут быть «регуляризованы» (сведены) к одному уравнению, в котором есть только одно дисперсионное слагаемое, используя отношение в главном порядке $e_{tt} = c^2 e_{xx} + \dots$. Коэффициент при этом дисперсионном слагаемом является

суммой всех дисперсионных коэффициентов и одинаков для всех четырех уравнений:

$$\alpha_1^{(i)} + \alpha_2^{(i)} + \alpha_3^{(i)} = -\frac{\nu^2}{2}, \quad i = \overline{1, 4}, \quad (2.47)$$

что означает что эти уравнения асимптотически эквивалентны. Однако до регуляризации модели обладают различными дисперсионными свойствами, и, подобно линейным исследованиям [42], было бы интересно сравнить характеристики этих четырех нелинейных моделей с численным решением полной нелинейной задачи. Также отметим, что три дисперсионных члена, присутствующих в уравнении (2.44, $i = 1$) алогичны дисперсионным членам в уравнении типа Буссинеска, полученных из нелинейной решеточной модели для волновода в [31].

2.3. Derivation of a Boussinesq-type equation for a pre-stretched rod

In this section we consider the propagation of longitudinal waves in the uniformly pre-stretched rod (in the axial direction). The longitudinal displacement in the pre-stretched state is given by

$$U^*(x) = \kappa x, \quad (2.48)$$

where κ is the constant longitudinal pre-strain. We non-dimensionalise the pre-stretch using the same scaling factor as U in (2.11) which yields

$$\tilde{U}^* = \frac{U^*}{\varepsilon L} = \tilde{\kappa} \tilde{x}, \quad \text{where} \quad \tilde{\kappa} = \frac{\kappa}{\varepsilon}. \quad (2.49)$$

Moreover, we assume that in the initial pre-stretched state there are zero tractions on the rod's lateral surface. Solving the equations of motion (2.3) and (2.4) with the free surface (i.e. $P = T = 0$) boundary conditions (2.6) and (2.7) written in dimensionless form using (2.11) and (2.49), we obtain the radial displacement \tilde{V}^* in the pre-stretched rod:

$$\tilde{V}^*(\tilde{r}) = -\frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \tilde{\kappa} \tilde{r} \left(1 + \varepsilon \frac{\tilde{\kappa} (2\mu^2(\lambda + 2l) + \lambda^2(3\lambda + 6m - 2n) + \lambda\mu(5\lambda + 4m - 2n))}{4\lambda(\lambda + \mu)^2} + O(\varepsilon^2) \right). \quad (2.50)$$

We introduce new dimensionless power series expansions of displacements (tildes omitted):

$$U(x, r, t) = \varepsilon L (U^*(x) + U_0 + \delta^2 r^2 U_2 + \delta^4 r^4 U_4 + O(\delta^6)), \quad (2.51)$$

$$V(x, r, t) = \varepsilon L \delta (V^*(r) + r V_1 + \delta^2 r^3 V_3 + \delta^4 r^5 V_5 + O(\delta^6)). \quad (2.52)$$

Following the steps of the derivation of the equations (2.37) using the power series (2.51), (2.52) instead of (2.13), (2.14) we obtain the equations

$$\begin{aligned} e_{tt} - \left(1 + \varepsilon \kappa \frac{\beta_1}{E} \right) e_{xx} - 2 \left[\left(\nu + \varepsilon \kappa \frac{\beta_2}{2E} \right) P_{xx} + T_x \right] - \varepsilon \left(\frac{\beta_1}{2E} e^2 + \frac{\beta_2}{E} e P + \frac{\beta_3}{2E} P^2 \right)_{xx} \\ + \delta^2 \left(\alpha_1^{(i)} e_{tttt} + \alpha_2^{(i)} e_{xxtt} + \alpha_3^{(i)} e_{xxxx} + F_x^{(i)} \right) + O(\varepsilon^2, \varepsilon \delta^2, \delta^4) = 0, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (2.53)$$

where we used notations introduced in the previous sections. We note that here $e = U_{0x}$ is the deviation from the pre-stretched state, while in the equations (2.37) it represents the deviation from the undeformed state.

Assuming that nonlinear and dispersive terms are of the same order ($\varepsilon \sim \delta^2$) and truncating (2.53) we obtain the equation, which in dimensional variables takes the form

$$e_{tt} - \left(c^2 + \kappa \frac{\beta_1}{\rho}\right) e_{xx} - \frac{2}{\rho} \left[\left(\nu + \kappa \frac{\beta_2}{2E}\right) P_{xx} + \frac{1}{R} T_x \right] - \left(\frac{\beta_1}{2\rho} e^2 + \frac{\beta_2}{\rho E} eP + \frac{\beta_3}{2\rho E^2} P^2 \right)_{xx} + R^2 \left(\frac{\alpha_1^{(i)}}{c^2} e_{tttt} + \alpha_2^{(i)} e_{xxtt} + c^2 \alpha_3^{(i)} e_{xxxx} + G^{(i)} \right) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (2.54)$$

where the coefficients $\alpha_j^{(i)}$, β_j and the functions $G^{(i)}$ are given by the formulae (??) – (2.34) and (2.42) – (2.42), respectively. **In the case of the weak tractions discussed in Section 3 this equation asymptotically reduces to**

$$e_{tt} - \left(c^2 + \kappa \frac{\beta_1}{\rho}\right) e_{xx} - \frac{2}{\rho} \left[\left(\nu + \kappa \frac{\beta_2}{2E}\right) P_{xx} + \frac{1}{R} T_x \right] - \left(\frac{\beta_1}{2\rho} e^2 \right)_{xx} + R^2 \left(\frac{\alpha_1^{(i)}}{c^2} e_{tttt} + \alpha_2^{(i)} e_{xxtt} + c^2 \alpha_3^{(i)} e_{xxxx} \right) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (2.55)$$

We note that the acoustoelastic effect (modification of the linear wave speed in a pre-stressed media) has been studied in [45, 46, 18] (see also references therein). To the best of our knowledge, both models derived in our paper and described by the equations (2.54) (as well as their reduced versions (2.41) and (2.44)) have not been obtained before.

2.4. Dispersive properties and solitary wave solutions

In Fig. 2.2 we compare the linear dispersion curves of the four basic (i.e. with the free surface and no pre-stretch) Boussinesq-type equations listed in the previous section, as well as plotting the three lowest branches of the exact (Pochhammer - Chree) dispersion relation of the linear problem for a circular rod (see, for example, [29, 42, 47]).

The dispersive relations have the following form:

$$\frac{2p}{R} (q^2 + k^2) J_1(pR) J_1(qR) - (q^2 - k^2)^2 J_0(pR) J_1(qR) - 4k^2 p q J_1(pR) J_0(qR) = 0 \quad (2.56)$$

$$\alpha_1^{(i)} \bar{\omega}^4 - \left(1 - \alpha_2^{(i)} \bar{k}^2\right) \bar{\omega}^2 + \bar{k}^2 \left(1 + \alpha_3^{(i)} \bar{k}^2\right) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (2.57)$$

$$\left(1 - \frac{(1 - \nu)\nu}{2} \bar{k}^2\right) \bar{\omega}^2 - \bar{k}^2 \left(1 - \frac{\nu \bar{k}^2}{2}\right) = 0, \quad (2.58)$$

$$\left(1 + \frac{\nu^2}{2} \bar{k}^2\right) \bar{\omega}^2 - \bar{k}^2 = 0, \quad (2.59)$$

for the Pochhammer - Chree solution and equations (2.44) $i = 1, 2$, (2.45) and (2.46) respectively.

Here $\bar{k} = kR$, $\bar{\omega} = \omega R/c$, k and ω are the wavenumber and wave frequency respectively, J_i are the Bessel functions of the first kind, and parameters p and q are given by

$$p^2 = \frac{\rho\omega^2}{\lambda + 2\mu} - k^2, \quad q^2 = \frac{\rho\omega^2}{\mu} - k^2. \quad (2.60)$$

All models reasonably well describe the lowest branch of the dispersion curves for the long waves. Eq. (2.45) suffers from a short-wave instability, while other three models do not have this defect. Eq. (2.44) for $i = 1, 2$, capture the presence of the second branch. We also note that, at least in this example, eq. (2.44) for $i = 1$ has better dispersive properties than eq. (2.44) for $i = 2$ (as a long-wave model). However, eq. (2.44) for $i = 2$ better describes the lowest branch in the short wave region. One can expect that both derived Boussinesq-type models in (2.44) can be useful, depending on the type of the dominant dispersive radiation in the problem under study. One could also try to artificially “optimise” the dispersive properties as discussed, for example, in [48, 49]. However, in this paper we were interested in the “natural” derivation of Boussinesq-type models.

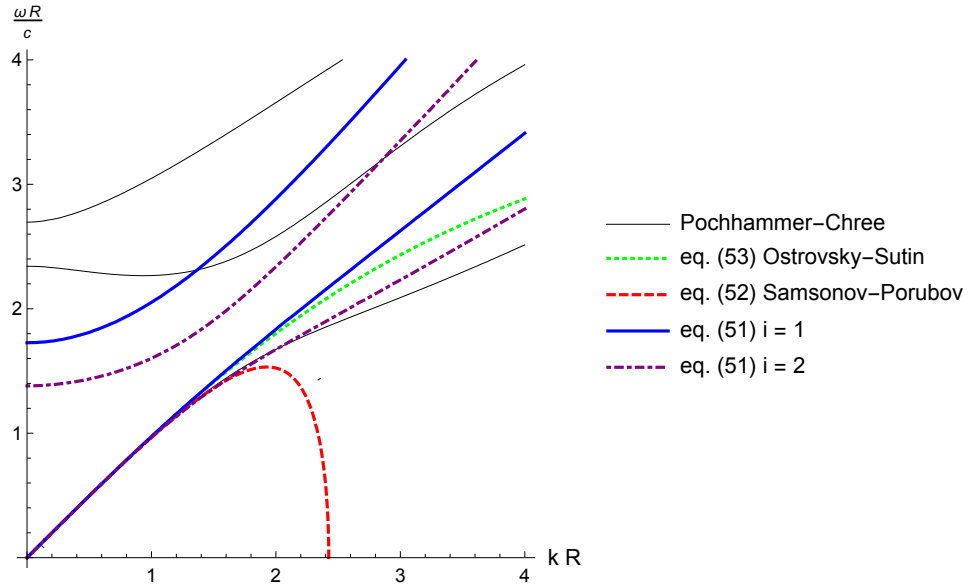


Рис. 2.2: Linear dispersion curves for a rod made of polystyrene (PS) for $R = 10^{-2}m$. PS elastic moduli are given in the Table 2.1.

All four equations, i.e. eq. (2.44) for $i = 1, 2$, eq. (2.45) and eq. (2.46) have one-parameter families of solitary wave solutions (see Appendix A):

$$e_i(x, t) = A \operatorname{sech}^2 \left[B_i \left(x \pm t \sqrt{c^2 + \frac{A\beta_1}{3\rho}} \right) \right], \quad i = \overline{1, 4}, \quad (2.61)$$

here parametrised by the amplitude A . For a given amplitude A , the respective solitary wave solutions have the same velocity but different width parameters B_i :

$$B_i = \sqrt{\frac{3A\beta_1 E}{-4 \left[(A\beta_1 + 3E)^2 \alpha_1^{(i)} + 3E(A\beta_1 + 3E) \alpha_2^{(i)} + 9E^2 \alpha_3^{(i)} \right] R^2}}, \quad i = 1, 2, \quad (2.62)$$

$$B_3 = \sqrt{\frac{A\beta_1}{[6\nu E + 2A\beta_1(\nu - 1)]\nu R^2}}, \quad (2.63)$$

$$B_4 = \sqrt{\frac{A\beta_1}{(6E + 2A\beta_1)\nu^2 R^2}}, \quad (2.64)$$

for the equations (2.44), (2.45) and (2.46) respectively.

In the left part of the Figure 2.3 we plot the four solitons given by the formulae (2.61) - (2.64) for one and the same value of the amplitude parameter $A = -0.05$ and the same elastic moduli shown in Table 2.1 (typical for a polystyrene [45]). We can see that the four solitons have a different width, with the regularised soliton (2.64) being the widest. However, this figure is plotted for the value of A which exceeds the yield point for the polystyrene, and therefore in practice this difference would not be important for that particular material (but could be important for some other materials). Indeed, in experiments with polystyrene discussed in the next section the value of A is very small, $A \sim 10^{-3} - 10^{-4}$. Therefore, to leading order in A , all four formulae will give the width parameter approximately equal to

$$B = \sqrt{\frac{A\beta_1}{6\nu^2 ER^2}}, \quad (2.65)$$

and the respective solitary wave solution is plotted in the right part of the same Figure 2.3 for $A = -0.001$.

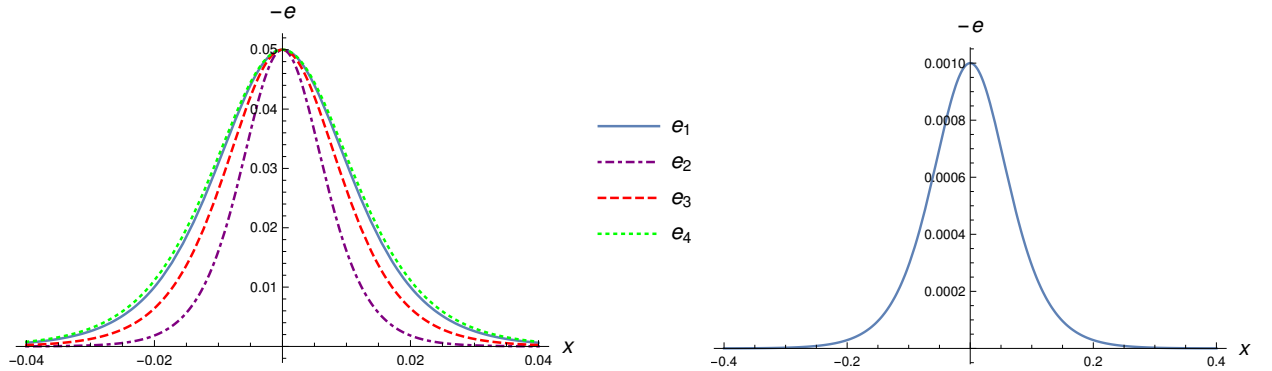


Рис. 2.3: Solitons in a rod made of polystyrene (PS) for $R = 10^{-2}m$, $A = -0.05$ (left) and $A = -0.001$ (right). PS elastic moduli are given in the Table 2.1.

Young modulus $E, \text{N/m}^2$	Poisson ratio, ν	Murnaghan moduli, N/m^2			Density $\rho, \text{kg/m}^3$
		l	m	n	
$3.7 \cdot 10^9$	0.34	$-18.9 \cdot 10^9$	$-13.3 \cdot 10^9$	$-10 \cdot 10^9$	1060

Таблица 2.1: Elastic moduli of the polystyrene (PS) [45].

Let us now reparametrise the solitary wave solution (??) by the speed of the soliton v instead of its amplitude A :

$$e_i(x, t) = \frac{3\rho(v^2 - c^2)}{\beta_1} \text{sech}^2 \left[\tilde{B}_i(x \pm vt) \right], \quad v = \sqrt{c^2 + \frac{A\beta_1}{3\rho}}, \quad (2.66)$$

where

$$\tilde{B}_i = \sqrt{\frac{c^2(v^2 - c^2)}{-4\left(\alpha_1^{(i)}v^4 + \alpha_2^{(i)}c^2v^2 + \alpha_3^{(i)}c^4\right)R^2}}, \quad i = 1, 2, \quad (2.67)$$

$$\tilde{B}_3 = \sqrt{\frac{v^2 - c^2}{2\nu R^2[c^2 - (1 - \nu)v^2]}}, \quad (2.68)$$

$$\tilde{B}_4 = \sqrt{\frac{v^2 - c^2}{2\nu^2 v^2 R^2}}. \quad (2.69)$$

The solitary wave solution exists only if the width parameter \tilde{B} is real and therefore $\tilde{B}^2 > 0$, which yields, assuming that $\nu < 1$, the following restrictions on the speed of solitary waves:

- $\tilde{B}_i^2 > 0 \implies v^2 < \frac{-\alpha_2^{(i)} - \sqrt{\alpha_2^{(i)2} - 4\alpha_1^{(i)}\alpha_3^{(i)}}}{2\alpha_1^{(i)}}c^2$ or $c^2 < v^2 < \frac{-\alpha_2^{(i)} + \sqrt{\alpha_2^{(i)2} - 4\alpha_1^{(i)}\alpha_3^{(i)}}}{2\alpha_1^{(i)}}c^2$,
 $i = 1, 2$,
- $\tilde{B}_3^2 > 0 \implies c^2 < v^2 < \frac{c^2}{1 - \nu}$,
- $\tilde{B}_4^2 > 0 \implies c^2 < v^2$.

We also note that $0 < \frac{-\alpha_2^{(i)} - \sqrt{\alpha_2^{(i)2} - 4\alpha_1^{(i)}\alpha_3^{(i)}}}{2\alpha_1^{(i)}} \leq 1$ and $\frac{-\alpha_2^{(i)} + \sqrt{\alpha_2^{(i)2} - 4\alpha_1^{(i)}\alpha_3^{(i)}}}{2\alpha_1^{(i)}} \geq 1 \forall \nu \in [0, 0.5]$ for $i = 1, 2$.

Thus, while the first three model equations give a finite range for the speeds of compression solitary waves, the regularised model does not impose an upper bound (see also the related discussions in [20]). Also, the first two models allow for the existence of solitons of opposite polarity, while the other two models do not allow that. It would be interesting to compare the predictions for the permissible range of soliton speeds and polarities with direct numerical simulations of the full problem formulation. This could guide some future laboratory experiments.

Глава 3.

Численное решение уравнений нелинейной теории упругости

3.1. Обзор

3.2. Псевдоспектральный метод

3.3. Численные эксперименты

Заключение

Литература

- [1] Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: «Мир», 1988.
- [2] Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи. М.: Мир, 1987.
- [3] M.J. Ablowitz, *Nonlinear dispersive waves: asymptotic analysis and solitons*, Cambridge University Press, Cambridge, 2011.
- [4] Scott Russell J. *Report on waves*, Rept. 14th meetings of the British Assoc. for the Advancement of Science. London: John Murray, 1844. P. 311–390.
- [5] Boussinesq J. The?orie de l'intumescence liquid apple?e onde solitaire ou de translation se propagent dans un canal rectangularie // *Comptes Rendus*. 1871. Vol. 72. P. 755–759.
- [6] Korteweg D.J., de Vries G. On the change of form of long waves advancing in a rectangular channel, and on a new type of long stationary waves // *Phil. Mag*. 1895. Vol. 39. P. 422–443.
- [7] T.B. Benjamin, J.L. Bona, and J.J. Mahony, Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems, *Philos. Trans. R. Soc. London, Ser. A* 272(1220) (1972) 47-78.
- [8] Zabusky N.J., Kruskal M.D. Interaction of «solitons» in a collisionless plasma and the recurrence of initial states // *Phys. Rev. Lett*. 1965. Vol. 15, No 6. P. 240–243.
- [9] Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. М.: «Наука», 1980.
- [10] F.D. Murnaghan, *Finite deformation of an elastic solid*, John Wiley and Sons, 1951.
- [11] J. Bergström, *Mechanics of Solid Polymers*, William Andrew Publishing, 2015.
- [12] Y.-Y. Yu, Generalized Hamilton's Principle and Variational Equation of Motion in Nonlinear Elasticity Theory, With Application to Plate Theory, *Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 36, 1964, pp. 111-120.
- [13] G.A. Maugin, *Nonlinear waves in elastic crystals*, Oxford University Press, Oxford, 1999.
- [14] H.-H. Dai, Z. Cai, Phase transition in a slender cylinder composed of an incompressible elastic material. I. Asymptotic model equation, *Proc. Roy. Soc. A* 462 (2006) 419-438.
- [15] A. Mayer, Nonlinear surface acoustic waves: Theory, *Ultrasonics* 48 (2008) 478-481.
- [16] P. Hess, A.M. Lomonosov, Solitary surface acoustic waves and bulk solitons in nanosecond and picosecond laser ultrasonics, *Ultrasonics* 50 (2010) 167-171.

- [17] J. Engelbrecht, A. Salupere and K. Tamm, Waves in microstructured solids and the Boussinesq paradigm, *Wave Motion* 48 (2011) 717-726.
- [18] A. Pau, F. Lanza di Scalea, Nonlinear guided wave propagation in prestressed plates, *J. Acoust. Soc. Am.* 137 (2015) 1529-1540.
- [19] T. Peets, K. Tamm, J. Engelbrecht, On the role of nonlinearities in the Boussinesq-type wave equations, *Wave Motion* 71 (2017) 113-119.
- [20] A.M. Samsonov, *Strain solitons in solids and how to construct them*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2001.
- [21] A.V. Porubov, *Amplification of nonlinear strain waves in solids*, World Scientific, Singapore, 2003.
- [22] G.A. Nariboli, A. Sedov, Burgers-Korteweg de Vries equation for viscoelastic rods and plates, *J. Math. Anal. Appl.* 32(3) (1970) 661-677.
- [23] L.A. Ostrovsky, A.M. Sutin, Nonlinear elastic waves in rods, *PMM* 41 (1977) 531-537.
- [24] A.M. Samsonov, Structural optimization in nonlinear wave propagation problems. In: *Structural Optimization under Dynamical Loading. Seminar and Workshop for Junior Scientists*, U. Lepik ed., Tartu University Press, 75-76 (1982).
- [25] A.M. Samsonov, Soliton evolution in a rod with variable cross section, *Sov. Physics - Doklady* 29 (1984) 586-587.
- [26] A.M. Samsonov, A.V. Porubov, Refinement of the model for the propagation of longitudinal strain waves in a rod with nonlinear elasticity, *Tech. Phys. Lett.* 19(6) (1993) 365-366.
- [27] A.V. Porubov, M.G. Velarde, Dispersive - dissipative solitons in nonlinear solids, *Wave Motion* 31(3) (2000) 197-207.
- [28] V.I. Erofeev, V.V. Kazhaev, N.P. Semerikova, *Waves in rods: dispersion, dissipation, nonlinearity*, Fizmatlit, Moscow, 2002 (in Russian).
- [29] H.-H. Dai, X. Fan, Asymptotically approximate model equations for weakly nonlinear long waves in compressible elastic rods and their comparisons with other simplified model equations, *Maths. Mech. Solids* 9 (2004) 61-79.
- [30] H.-H. Dai, and Z. Cai, Uniform asymptotic analysis for transient waves in a pre-stressed compressible hyperelastic rod, *Acta Mechanica* 139 (2000) 201-230.
- [31] K.R. Khusnutdinova, A.M. Samsonov, A.S. Zakharov, Nonlinear layered lattice model and generalized solitary waves in imperfectly bonded structures, *Phys. Rev. E* 79(5) (2009) 056606.
- [32] K.R. Khusnutdinova, A.M. Samsonov, Fission of a longitudinal strain solitary wave in a delaminated bar, *Phys. Rev. E* 77 (2008) 066603.

- [33] K.R. Khusnutdinova, M.R. Tranter, Modelling of nonlinear wave scattering in a delaminated elastic bar, *Proc. R. Soc. A* 471 (2015) 20150584.
- [34] K.R. Khusnutdinova, M.R. Tranter, On radiating solitary waves in bi-layers with delamination and coupled Ostrovsky equations, *Chaos* 27 (2017) 013112.
- [35] G.V. Dreiden, K.R. Khusnutdinova, A.M. Samsonov, and I.V. Semenova, Splitting induced generation of soliton trains in layered waveguides, *J. Appl. Phys.* 107 (2010) 034909.
- [36] G.V. Dreiden, K.R. Khusnutdinova, A.M. Samsonov, and I.V. Semenova, Bulk strain solitary waves in bonded layered polymeric bars with delamination, *J. Appl. Phys.* 112 (2012) 063516.
- [37] J.-F. Mercier, B. Lombard, A two-way model for nonlinear acoustic waves in a non-uniform lattice of Helmholtz resonators, *Wave Motion* 72 (2017) 260-275.
- [38] R. Arredondo and J.P. McHugh, Mean displacement near an interface in a nonlinear string, *SIAM J. Appl. Math.* 78 (2018) 1470-1488.
- [39] M. Destrade and G. Saccomandi, Nonlinear transverse waves in deformed dispersive solids, *Wave Motion* 45 (2008) 325-336.
- [40] F.E. Garbuzov, K.R. Khusnutdinova, I.V. Semenova, On Boussinesq-type models for long longitudinal waves in elastic rods. *Wave Motion*, 88 (2019), 129-143.
- [41] M. Destrade, G. Saccomandi, I. Sigura, Methodical fitting for mathematical models of rubber-like materials, *Proc. R. Soc. A* 473 (2017) 20160811.
- [42] A. Boström, On wave equations for elastic rods, *ZAMM* 80(4) (2000) 245-251.
- [43] P. Rosenau, Dynamics of dense lattices, *Phys. Rev. B* 36 (1987) 5868-5876.
- [44] M.B. Rubin, P. Rosenau, O. Gottlieb, Continuum model of dispersion caused by an inherent material characteristic length, *J. Appl. Phys.* 77 (1995) 4054-4063.
- [45] D.S. Hughes, J.L. Kelly, Second order elastic deformation of solids, *Phys. Rev.* 92 (1953) 1145-1149.
- [46] Z. Abiza, M. Destrade, and R.W. Ogden, Large acoustoelastic effect, *Wave Motion* 49 (2012) 364-374.
- [47] A.E.H. Love, *A treatise on the mathematical theory of elasticity*, Cambridge University Press, London, 1927.
- [48] A.V. Pichugin, H. Askes, A. Tyas, Asymptotic equivalence of homogenisation procedures and fine-tuning of continuum theories, *J. Sound and Vibration* 313 (2008) 858-874.

- [49] I.V. Andrianov, V.D. Danishevsky, J.D. Kaplunov and B. Markert, Wide frequency higher-order dynamic model for transient waves in a lattice, In: I.V. Andrianov et al. ed., “Problems of Nonlinear Mechanics and Physics of Materials Springer, 2019.
- [50] G. V. Dreiden, Yu. I. Ostrovsky, A. M. Samsonov, I. V. Semenova, E. V. Sokurinskaya, Formation and propagation of strain solitons in nonlinearly elastic solid, *Techn. Phys.* 58 (1988) 2040-2047. (in Russian)
- [51] G.V. Dreiden, A.M. Samsonov, I.V. Semenova, Evolution of bulk strain solitons in long polymeric waveguides, *Techn. Phys.* 53 (2008) 540-546.
- [52] G.V. Dreiden, A.M. Samsonov, I.V. Semenova, Bulk elastic strain solitons in polycarbonate, *Techn. Phys. Lett.* 37 (2011) 500-502.
- [53] G.V. Dreiden, K.R. Khusnutdinova, A.M. Samsonov, I.V. Semenova, Comparison of the effect of cyanoacrylate- and polyurethane-based adhesives on a longitudinal strain solitary wave in layered polymethylmethacrylate waveguides, *J. Appl. Phys.* 104 (2008) 086106.
- [54] G.V. Dreiden, A.M. Samsonov, I.V. Semenova, and A.G. Shvartz, Strain solitary waves in a thin-walled waveguide, *Appl. Phys. Lett.* 105 (2014) 211906.
- [55] A.V. Belashov, Y.M. Beltukov, N.V. Petrov, A.M. Samsonov, I.V. Semenova, Indirect assessment of bulk strain soliton velocity in opaque solids, *Appl. Phys. Lett.* 112 (2018) 121903.
- [56] G.V. Dreiden, K.R. Khusnutdinova, A.M. Samsonov, I.V. Semenova, Longitudinal strain solitary wave in a two-layered polymeric bar, *Strain* 46 (2010) 589-598.
- [57] A.V. Belashov, Y.M. Beltukov, I.V. Semenova, Pump-probe digital holography for monitoring of long bulk nonlinear strain waves in solid waveguides, *Proc. SPIE* 10678 (2018) 1067810.