

РЕФЕРАТ ПО ТЕМЕ МАГИСТЕРСКОЙ ДИССЕРТАЦИИ

**ПРОДОЛЬНЫЕ ВОЛНЫ ДЕФОРМАЦИИ В НЕЛИНЕЙНО УПРУГИХ  
ВОЛНОВОДАХ**

Выполнил

Ф. Е. Гарбузов

Руководитель  
проф., д.т.н.

Б. С. Григорьев

Научный консультант  
к.ф.-м.н.

Я. М. Бельтюков

Санкт-Петербург  
2019

# 1 Введение

Динамика упругой сплошной среды, занимающей объём  $\Omega$ , описывается уравнениями движения, которые в векторном виде в случае однородного тела представляются следующим образом:

$$\rho \ddot{\underline{U}}(\underline{x}, t) = \operatorname{div} \underline{\underline{P}} + \underline{F}, \quad \underline{x} \in \Omega. \quad (1)$$

Здесь  $\rho$  – плотность материала,  $\underline{U}(\underline{x}, t)$  – вектор перемещений,  $\underline{x}$  – координаты точки среды в отсчётной конфигурации,  $\underline{\underline{P}}$  – первый тензор напряжений Пиолы-Кирхгофа,  $\underline{F}$  – плотность массовых сил, точка обозначает взятие частной производной по времени, а дивергенция берётся по координатам в отсчётной конфигурации. Тензор напряжений  $\underline{\underline{P}}$  выражается через тензор деформации  $\underline{\underline{E}}$  следующим образом:

$$\underline{\underline{P}} = (\underline{I} + \nabla \underline{U}) \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial \underline{\underline{E}}}, \quad (2)$$

где  $\Pi$  – плотность энергии деформации, а тензор деформации связан с градиентом перемещения:

$$2\underline{\underline{E}} = (\nabla \underline{U})^T + \nabla \underline{U} + (\nabla \underline{U})^T \cdot \nabla \underline{U}. \quad (3)$$

Заметим, что в линейной теории деформация предполагается бесконечно малой и нелинейное слагаемое в (3) отбрасывается. Для завершения постановки задачи уравнения (1) – (3) необходимо дополнить соотношением, связывающем энергию и деформацию, а также граничными условиями:

$$\underline{U} = \underline{U}_b, \quad \underline{x} \in S_U; \quad \underline{\underline{P}} \cdot \underline{n} = \underline{P}_b, \quad \underline{x} \in S_P; \quad S_U \cup S_P = \partial\Omega. \quad (4)$$

Энергия деформации  $\Pi$  однородного и изотропного тела может быть разложена в ряд по инвариантам  $I_i$  тензора деформации:

$$\Pi = \frac{\lambda + 2\mu}{2} I_1(\underline{\underline{E}})^2 - 2\mu I_2(\underline{\underline{E}}) + \frac{l + 2m}{3} I_1(\underline{\underline{E}})^3 - 2m I_1(\underline{\underline{E}}) I_2(\underline{\underline{E}}) + n I_3(\underline{\underline{E}}) + \dots, \quad (5)$$

при этом коэффициенты в этом разложении характеризуют упругость материала и называются модулями упругости ( $\lambda$  и  $\mu$  – коэффициенты Ламе, а  $l$ ,  $m$ ,  $n$  – модули Мурнагана). Заметим, что первые два слагаемых в приведённом разложении являются слагаемыми второго порядка относительно компонент тензора  $\underline{\underline{E}}$ , а следующие три – третьего порядка. В разложении (5) для линейно упругого материала удерживаются только слагаемые второго порядка, а для слабо нелинейного материала Мурнагана [14] учитываются ещё и слагаемые третьего порядка. Существуют другие нелинейно упругие материалы, например, материал Муни-Ривлина или Огдена, однако они предназначены в первую очередь для описания резиноподобных материалов, подверженных большим деформациям [15]. Отметим, что нелинейно упругие материалы иногда называют гиперупругими.

Помимо классической постановки задачи в виде дифференциальных уравнений в частных производных (1), (4), существует вариационная постановка на основе принци-

на Гамильтона, гласящего, что истинная траектория системы  $\underline{U}$  является стационарной точкой функционала действия  $\mathcal{S}$ :

$$\delta\mathcal{S} = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} \rho \dot{\underline{U}}^2 - \Pi + \underline{F} \cdot \underline{U} \right) dx + \int_{S_P} \underline{P}_b \cdot \underline{U} ds \right] = 0. \quad (6)$$

В (6) варьирование происходит по перемещениям  $\underline{U}$ . Отметим, что существует обобщённый принцип Гамильтона, где в функционал действия включаются соотношения (2) и (3), а варьирование осуществляется не только по перемещениям, но и по деформациям  $\underline{E}$  и напряжениям  $\underline{P}$  [16].

Изучение нелинейных волн деформации в твёрдых телах, в том числе солитонов деформации, является важной темой современного изучения волн [17, 18]. Разработка теории началась в 1970-х годах с исследования волн в упругом стержне круглого сечения, поскольку такая геометрия волновода является наиболее простой.

Исторически первым исследованием стала работа Г. Нариболи и А. Седова, которым удалось вывести уравнение Бюргерса-Кортвега-де Фриза для длинных продольных волн в бесконечном вязкоупругом осесимметричном стержне со свободной от напряжений поверхностью [19]. Для этого уравнения нелинейной теории упругости (1) и граничные условия (4), записанные в цилиндрической системе координат  $(x, r, \varphi)$ , были упрощены с помощью:

- предположения о малости радиуса стержня  $a \ll 1$ ,
- разложения перемещений в степенной ряд по радиусу стержня:

$$U(x, r, t) = U_0(x, t) + a^2 U_2(x, r, t) + \mathcal{O}(a^4), \quad (7)$$

$$V(x, r, t) = -a\nu r \frac{\partial U_0}{\partial x} + a^3 V_3(x, r, t) + \mathcal{O}(a^5), \quad (8)$$

где  $U$  – продольное перемещение вдоль оси стержня, совпадающей с осью  $x$ ,  $V$  – радиальное перемещение, а  $\nu$  – коэффициент Пуассона,

- предположения о малых деформациях  $U, V \sim \varepsilon \ll 1$ .

Позже Л. Островский и А. Сутин получили модель типа Буссинеска, используя принцип Гамильтона и нижеследующие гипотезы, позволившие упростить функционал действия задачи [20]:

$$U(x, r, t) = U(x, t), \quad V(x, r, t) = -\nu r \frac{\partial U}{\partial x}. \quad (9)$$

Первая из этих гипотез называется гипотезой плоских сечений и означает, что поперечные сечения стержня остаются плоскими после деформации, а вторая гипотеза аналогична гипотезе Кирхгофа-Лява в теории тонких пластин и оболочек [21]. А. М. Самсонов, используя подход Островского и Сутина, предложил модель типа Буссинеска с двумя дисперсионными слагаемыми и обобщил её на случай с меняющимися вдоль оси стержня радиусом и модулями упругости [22, 23]. Коэффициенты модели Самсонова с двумя типами дисперсионных членов были позже уточнены в работах А. М. Самсонова и А. В. Порубова [24]. А. В. Порубовым и М. Веларде предложена дисперсионно-диссипативная модель

для длинных волн в упругом стержне, помещённом в вязкоупругую среду [25]. Модель типа Буссинеска с тремя типами дисперсионных членов обсуждалась В. И. Ерофеевым, однако коэффициент при нелинейном слагаемом в его модели отличается от соответствующего коэффициента у Островского и Самсонова [26]. Все выводы моделей типа Буссинеска в упомянутых исследованиях основывались на представлении Мурнагана для энергии упругой деформации и последующем упрощении полного функционала действия задачи с использованием некоторых гипотез.

Несколько другой подход к задаче применён в работе Х. Дая и Х. Фана, которым удалось упростить полные уравнения движения с граничными условиями в виде свободной от напряжений поверхности стержня, сведя их к системе из двух связанных уравнений [27]. Для этого была введена система масштабов для переменных и функций так, что масштаб перемещений  $h$  и радиус стержня  $a$  предполагались малыми по сравнению с характерной длиной волны  $l$ :  $\varepsilon = h/l \ll 1$ ,  $\delta = a^2/l^2 \ll 1$ . Полные уравнения были упрощены при помощи разложения перемещений в степенной ряд по радиальной координате и отбрасывания членов порядка  $\mathcal{O}(\varepsilon^2, \varepsilon\delta, \delta^2)$ . В другой работе Х. Дай и З. Цай применили аналогичный асимптотический вывод для описания волн в предварительно растянутом гиперупругом стержне, сделанном из материала Муни-Ривлина [28].

Во всех приведённых выше работах твёрдое тело считалось непрерывным. Однако помимо непрерывной модели существует решётчатая (дискретная) модель, согласно которой твёрдое тело представляется в виде системы частиц некоторой массы, соединённых пружинами. В рамках такой модели К. Р. Хуснутдинова и др., предполагая пружины нелинейно упругими, получили систему разностно-дифференциальных уравнений, которая в континуальном пределе сводится к уравнению типа Буссинеска [29]. Заметим, что уравнение модели было получено из полных уравнений движения с помощью асимптотических методов без использования упрощающих гипотез. Интересно, что в этом исследовании была выведена модель типа Буссинеска с тремя дисперсионными слагаемыми, а также система связанных уравнений типа Буссинеска для волн в слоистом волноводе с неидеальным контактом. В недавних исследованиях модели типа Буссинеска использовались для изучения распространения длинных продольных уединённых волн деформации в волноводе с расслоением [30, 31, 32], а некоторые соответствующие экспериментальные наблюдения были опубликованы в [33, 34].

Целью настоящей работы является исследование длинных продольных слабонелинейных волн деформации в круглом бесконечном стержне методами асимптотического анализа и численного моделирования. Исследователи, занимавшиеся этой задачей ранее, полагали боковую поверхность стержня свободной от напряжений, поэтому научный интерес представляет обобщение вывода модели типа Буссинеска на случай, когда имеется ненулевая осесимметричная нагрузка на боковой поверхности, а также продольное предварительное растяжение стержня. Большое значение имеет построение численной схемы решения полных нелинейных уравнений динамики упругого стержня, поскольку она может служить средством для верификации упрощённых моделей и более детального исследова-

дования нелинейных волн.

Вывод моделей в настоящей работе выполнен с помощью пакета символьных вычислений Mathematica, а результаты работы частично опубликованы автором в содружестве с К. Р. Хуснутдиновой и И. В. Семёновой [35].

## 2 Вывод модели типа Буссинеска с внешним воздействием

Рассмотрим стержень круглого поперечного сечения радиуса  $R$ . Введём цилиндрическую систему координат  $(x, r, \varphi)$ , где  $x$  – осевая координата,  $r$  – продольная,  $\varphi$  – угловая, как показано на рисунке 1. Положим стержень бесконечным вдоль оси  $x$ . Используя Лагранжев подход, введём вектор перемещения точек тела:  $\underline{U} = (U, V, W)$ , где  $U$  – осевое (продольное) перемещение,  $V$  – радиальное (поперечное) перемещение, а  $W$  – вращение.

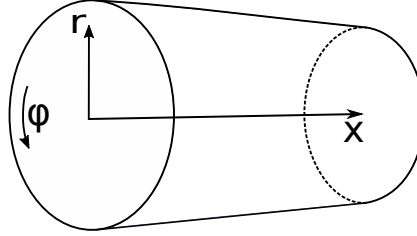


Рис. 1: Стержень с круглым поперечным сечением.

Следуя предыдущим исследованиям, которые обсуждались в главе 1, будем рассматривать стержень, сделанный из материала Мурнагана, энергия упругой деформации которого представляется в виде:

$$\Pi = \frac{\lambda + 2\mu}{2} I_1(\underline{E})^2 - 2\mu I_2(\underline{E}) + \frac{l + 2m}{3} I_1(\underline{E})^3 - 2m I_1(\underline{E}) I_2(\underline{E}) + n I_3(\underline{E}), \quad (10)$$

где  $I_1(\underline{E}) = \text{tr } \underline{E}$ ,  $I_2(\underline{E}) = [(\text{tr } \underline{E})^2 - \text{tr } \underline{E}^2] / 2$ ,  $I_3(\underline{E}) = \text{tr } \underline{E}$  являются инвариантами тензора деформации Грина  $\underline{E} = ((\nabla \underline{U})^T + \nabla \underline{U} + (\nabla \underline{U})^T \cdot \nabla \underline{U}) / 2$ ,  $\lambda, \mu$  – коэффициенты Ламе,  $l, m, n$  – модули Мурнагана. Здесь и далее в тексте работы все частные производные берутся по координатам в отсчётной конфигурации. Отметим, что модель Мурнагана является общей моделью слабо нелинейных упругих деформаций.

Рассмотрим задачу, в которой отсутствует кручение стержня, а продольное и поперечное перемещения  $U$  и  $V$  не зависят от угла  $\varphi$ :

$$U = U(x, r, t), \quad V = V(x, r, t), \quad W = 0. \quad (11)$$

Уравнения движения, в условиях (11) и отсутствия массовых сил, принимают вид

$$\rho \frac{\partial^2 U(x, r, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial P_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial P_{xr}}{\partial r} - \frac{P_{xr}}{r} = 0, \quad (12)$$

$$\rho \frac{\partial^2 V(x, r, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial P_{rx}}{\partial x} - \frac{\partial P_{rr}}{\partial r} - \frac{P_{rr} - P_{\varphi\varphi}}{r} = 0, \quad (13)$$

а третье уравнение представляется в виде тождества  $0 \equiv 0$ . Здесь  $P_{\alpha\beta}$  обозначает компоненту первого тензора Пиолы-Кирхгофа, а  $\rho$  – плотность материала.

Зададим на поверхности стержня осесимметричное напряжение  $\underline{P}_b = (P(x, t), T(x, t), 0)$ . Тогда граничные условия имеют вид:

$$P_{rr} = P(x, t) \quad \text{при} \quad r = R, \quad (14)$$

$$P_{xr} = T(x, t) \quad \text{при} \quad r = R. \quad (15)$$

Поскольку компонента  $P_{\varphi r} \equiv 0$ , третье граничное условие  $P_{\varphi r} = 0$  при  $r = R$  выполняется автоматически.

Подход к выводу уравнения модели в этом разделе опирается на метод, описанный в [27]. Упростим этот метод с помощью разложений, использованных для вывода линейной модели [36]. Таким образом, будем искать решение в виде степенного ряда по радиальной координате:

$$U(x, r, t) = U_0(x, t) + r^2 U_2(x, t) + r^4 U_4(x, t) + \dots, \quad (16)$$

$$V(x, r, t) = r V_1(x, t) + r^3 V_3(x, t) + r^5 V_5(x, t) + \dots. \quad (17)$$

Отметим, что продольное перемещение разложено в ряд по чётным степеням радиуса, в то время как поперечное перемещение по нечётным. В линейной задаче такие разложения приняты потому, что, если учесть все степени в разложении, то уравнения движения (12), (13) разобьются на две независимые системы уравнений. В первую систему войдут слагаемые  $U_{2k}$  и  $V_{2k+1}$ , а во вторую  $U_{2k+1}$  и  $V_{2k}$  ( $k \geq 0$ ). Для продольных волн в осесимметричном стержне должны выполняться очевидные условия:

$$\frac{\partial U}{\partial r} = 0, \quad V = 0 \quad \text{при} \quad r = 0, \quad (18)$$

из которых следует, что  $U_1 = V_0 = 0$ . В линейной задаче из равенства нулю этих двух слагаемых автоматически следует, что все слагаемые  $U_{2k+1}$  и  $V_{2k}$  тоже равны нулю. Для нелинейной задачи тоже можно показать справедливость этого утверждения, однако, чтобы не слишком усложнять вывод, примем эти разложения в качестве допущения. Кроме того, в отличие от [27], мы сведём задачу к одному уравнению типа Буссинеска, учтём ненулевое осесимметричное напряжение, приложенное к поверхности стержня, а также рассмотрим предварительно растянутый стержень.

Введём масштабные множители, выделяющие среди прочих задачу о распространении длинных по сравнению с радиусом стержня волн малой амплитуды. Тогда безразмерные переменные и функции определяются следующими выражениями:

$$\tilde{t} = \frac{t}{L/c}, \quad \tilde{x} = \frac{x}{L}, \quad \tilde{r} = \frac{r}{L}, \quad \tilde{U} = \frac{U}{\varepsilon L}, \quad \tilde{V} = \frac{V}{\varepsilon L}, \quad \tilde{P} = \frac{P}{E\varepsilon}, \quad \tilde{T} = \frac{T}{E\varepsilon\delta}, \quad (19)$$

из которых следует, что  $\tilde{U}_n = \frac{L^n U_n}{\varepsilon L}$ ,  $\tilde{V}_n = \frac{L^n V_n}{\varepsilon L}$  для  $n \geq 0$ . Здесь  $L$  является характерной длиной волны,  $c$  – скорость линейной волны,  $E$  – модуль Юнга,  $\varepsilon \ll 1$  – малый параметр амплитуды,  $\delta = \frac{R}{L} \ll 1$  – второй малый параметр, а тильда обозначает безразмерную величину. Вспомним, что модуль Юнга и коэффициент Пуассона выражаются через коэффициенты Ламе:

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}. \quad (20)$$

С учётом (19) разложения (16), (17) представляются в виде:

$$\tilde{U}(\tilde{x}, \tilde{r}, \tilde{t}) = \tilde{U}_0(\tilde{x}, \tilde{t}) + \tilde{r}^2 \tilde{U}_2(\tilde{x}, \tilde{t}) + \tilde{r}^4 \tilde{U}_4(\tilde{x}, \tilde{t}) + O(\tilde{r}^6), \quad (21)$$

$$\tilde{V}(\tilde{x}, \tilde{r}, \tilde{t}) = \tilde{r} \tilde{V}_1(\tilde{x}, \tilde{t}) + \tilde{r}^3 \tilde{V}_3(\tilde{x}, \tilde{t}) + \tilde{r}^5 \tilde{V}_5(\tilde{x}, \tilde{t}) + O(\tilde{r}^7). \quad (22)$$

Радиальная координата  $\tilde{r}$  точек стержня принимает значения от 0 до  $\delta$  и, следовательно, является малой величиной. В дальнейшем мы опустим тильду над безразмерными величинами.

Подставляя (21) и (22) в уравнения движения (12), (13), получаем

$$\begin{aligned} \rho c^2 U_{0tt} - (\lambda + 2\mu) U_{0xx} - 2(\lambda + \mu) V_{1x} - 4\mu U_2 + \Phi_1(U_0, V_1, U_2) \varepsilon \\ + [\rho c^2 U_{2tt} - (\lambda + 2\mu) U_{2xx} - 4(\lambda + \mu) V_{3x} - 16\mu U_4] r^2 + O(\varepsilon^2, \varepsilon r^2, r^4) = 0, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} r(\rho c^2 V_{1tt} - \mu V_{1xx} - 2(\lambda + \mu) U_{2x} - 8(\lambda + 2\mu) V_3 - \Phi_2(U_0, V_1, U_2, V_3) \varepsilon \\ - [\rho c^2 V_{3tt} - \mu V_{3xx} - 4(\lambda + \mu) U_{4x} - 24(\lambda + 2\mu) V_5] r^2 + O(\varepsilon^2, \varepsilon r^2, r^4)) = 0, \end{aligned} \quad (24)$$

где индексы  $x$  и  $t$  обозначают частные производные по соответствующим переменным, а выражения для нелинейных функций  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  приведены в Приложении 1. Функции  $U_2$ ,  $V_3$ ,  $U_4$  могут быть получены из (23) и (24), приравнявая к нулю коэффициенты при различных степенях  $r$ :

$$U_2 = \frac{1}{4\mu} [\rho c^2 U_{0tt} - (\lambda + 2\mu) U_{0xx} - 2(\lambda + \mu) V_{1x}] + \varepsilon f_2(x, t) + O(\varepsilon^2), \quad (25)$$

$$V_3 = \frac{1}{8(\lambda + 2\mu)} [\rho c^2 V_{1tt} - 2(\lambda + \mu) U_{2x} - \mu V_{1xx}] + \varepsilon f_3(x, t) + O(\varepsilon^2), \quad (26)$$

$$U_4 = \frac{1}{16\mu} [\rho c^2 U_{2tt} - (\lambda + 2\mu) U_{2xx} - 4(\lambda + \mu) V_{3x}] + O(\varepsilon). \quad (27)$$

Выражения для функций  $f_2$  и  $f_3$  приведены в Приложении 1.

Затем, подставляя функции  $U_2$ ,  $V_3$ ,  $U_4$  в граничные условия (14), (15), которые в безразмерном виде должны выполняться при  $r = \delta$ , получаем уравнения:

$$\begin{aligned} 2(\lambda + \mu) V_1 + \lambda U_{0x} + \varepsilon \Psi_1(U_0, V_1) + \frac{\delta^2}{8} \left[ (\lambda + 3\mu) U_{0xxx} - \frac{\rho c^2 (\lambda + 3\mu)}{\lambda + 2\mu} U_{0xtt} \right. \\ \left. + \frac{2\rho c^2 (2\lambda + 3\mu)}{\lambda + 2\mu} V_{1tt} + 2\lambda V_{1xx} \right] + O(\varepsilon^2, \varepsilon \delta^2, \delta^4) = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} P, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned}
\rho c^2 U_{0tt} - 2\lambda V_{1x} - (\lambda + 2\mu)U_{0xx} - \varepsilon \Psi_2(U_0, V_1) + \frac{\delta^2}{8} \left[ (3\lambda + 4\mu)U_{0xxxx} + \frac{\rho^2 c^4}{\mu} U_{0tttt} \right. \\
\left. - \frac{\rho c^2 (\lambda^2 + 7\lambda\mu + 8\mu^2)}{\mu(\lambda + 2\mu)} U_{0xxtt} + 2(3\lambda + 2\mu)V_{1xxx} - \frac{2\rho c^2 (\lambda^2 + 4\lambda\mu + 2\mu^2)}{\mu(\lambda + 2\mu)} V_{1xtt} \right] \\
+ O(\varepsilon^2, \varepsilon\delta^2, \delta^4) = \frac{2\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} T,
\end{aligned} \tag{29}$$

где нелинейные члены выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned}
\Psi_1 &= (4l + 2m + 3\lambda + 3\mu)V_1^2 + (4l - 2m + n + \lambda)U_{0x}V_1 + \frac{1}{2}(2l + \lambda)U_{0x}^2, \\
\Psi_2 &= \left( (4l - 2m + n + \lambda)V_1^2 + 2(2l + \lambda)U_{0x}V_1 + \frac{1}{2}(2l + 4m + 3\lambda + 6\mu)U_{0x}^2 \right)_x.
\end{aligned}$$

Отметим, что при  $\varepsilon = 0$  уравнения (28) и (29) сводятся к уравнениям, полученным в линейной задаче [36]. Эта система связанных уравнений представляет собой довольно сложную модель, однако она может быть сведена к одному уравнению типа Буссинеска.

Существует два естественных способа вывода модели типа Буссинеска. В первом способе исключение функции  $V_1$  из уравнений (28) и (29) осуществляется с помощью асимптотического выражения, следующего из уравнения (28):

$$V_1(x, t) = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)P - \lambda(\lambda + \mu)U_{0x}}{2(\lambda + \mu)^2} + \varepsilon f(x, t) + \delta^2 g(x, t) + O(\varepsilon^2, \varepsilon\delta^2, \delta^4), \tag{30}$$

где неизвестные функции  $f$  и  $g$  ищутся из условия равенства нулю коэффициентов при  $\varepsilon$  и  $\delta^2$  в (28). Их вид представлен в Приложении 1. Затем, подстановка  $V_1$  в (29) приводит к следующему уравнению типа Буссинеска относительно  $U_0$ :

$$\begin{aligned}
\rho c^2 U_{0tt} - \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \left( U_{0xx} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} P_x + 2T \right) - \varepsilon (\gamma_1 U_{0x}^2 + \gamma_2 U_x P + \gamma_3 P^2)_x \\
+ \delta^2 \left[ \frac{\rho^2 c^4 U_{0tttt}}{8\mu} + \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)^2 U_{0xxxx}}{8(\lambda + \mu)^2} - \frac{\rho c^2 (7\lambda^2 + 10\lambda\mu + 4\mu^2) U_{0xxtt}}{8(\lambda + \mu)^2} + F \right] \\
+ O(\varepsilon^2, \varepsilon\delta^2, \delta^4) = 0.
\end{aligned} \tag{31}$$

Здесь нелинейные коэффициенты  $\gamma_i$  и функция  $F$  представляются в виде:

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= \frac{3n(\lambda + \mu)\lambda^2 + 2\mu[9\lambda^3 + 24\mu\lambda^2 + 21\mu^2\lambda + m(3\lambda + 2\mu)^2 + 2\mu^2(l + 3\mu)]}{4(\lambda + \mu)^3}, \\
\gamma_2 &= \frac{[3\lambda^3 + 5\lambda^2\mu + 2\lambda\mu^2 + 4l\mu^2 + 2\lambda m(3\lambda + 2\mu) - 2\lambda n(\lambda + \mu)]\mu(3\lambda + 2\mu)}{2(\lambda + \mu)^4}, \\
\gamma_3 &= \frac{[n(\lambda + \mu) - 2(\lambda^2 + \lambda\mu - 2l\mu) - 2m(2\lambda + \mu)]\mu^2(3\lambda + 2\mu)^2}{4(\lambda + \mu)^5}, \\
F &= \frac{3\lambda + 2\mu}{8\mu(\lambda + \mu)^3} [\mu(4\lambda^2 + 5\lambda\mu + 2\mu^2)P_{xxx} - \rho c^2(\lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2)P_{xtt}].
\end{aligned}$$

Другой метод основан на исключении  $V_1$  из (28) и (29) таким образом, каким это сделано в [36] для линейной задачи. В линейном случае этот подход не использует асимпто-



тическое выражение (30) и приводит к уравнению того же типа, что и (31), но с другими коэффициентами при дисперсионных слагаемых. Действительно, уравнения (28) и (29) могут быть записаны в виде:

$$L_1 V_1 + \varepsilon N_1(U_0, V_1, \dots) = M_1(U_0, P, \dots) + O(\varepsilon^2, \varepsilon \delta^2, \delta^4), \quad (32)$$

$$L_2 V_1 + \varepsilon N_2(U_0, V_1, \dots) = M_2(U_0, T, \dots) + O(\varepsilon^2, \varepsilon \delta^2, \delta^4), \quad (33)$$

где  $L_1$  и  $L_2$  – линейные дифференциальные операторы, действующие на  $V_1$ , а  $N_1(U_0, V_1, \dots)$ ,  $M_1(U_0, P, \dots)$  и  $N_2(U_0, V_1, \dots)$ ,  $M_2(U_0, T, \dots)$  – нелинейные функции своих аргументов в уравнениях (28) и (29) соответственно. Теперь, применяя  $L_2$  к первому уравнению,  $L_1$  ко второму и вычитая одно уравнение из другого, получаем:

$$\varepsilon [L_2 N_1(U_0, V_1, \dots) - L_1 N_2(U_0, V_1, \dots)] = L_2 M_1(U_0, P, \dots) - L_1 M_2(U_0, T, \dots) + O(\varepsilon^2, \varepsilon \delta^2, \delta^4). \quad (34)$$

Здесь  $V_1$  исключена из линейной части уравнений точно, а не асимптотически. Чтобы исключить её из нелинейной части, воспользуемся выражением (30) и получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \rho c^2 U_{0tt} - \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \left( U_{0xx} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} P_x + 2T \right) - \varepsilon (\gamma_1 U_{0x}^2 + \gamma_2 U_x P + \gamma_3 P^2)_x \\ + \delta^2 \left[ \frac{\rho^2 c^4 (\lambda^2 + 5\lambda\mu + 5\mu^2) U_{0tttt}}{8\mu(\lambda + 2\mu)(\lambda + \mu)} - \frac{\rho c^2 (6\lambda^2 + 21\lambda\mu + 14\mu^2) U_{0xxtt}}{8(\lambda + 2\mu)(\lambda + \mu)} \right. \\ \left. + \frac{\mu(3\lambda + 2\mu) U_{0xxxx}}{4(\lambda + \mu)} + G \right] + O(\varepsilon^2, \varepsilon \delta^2, \delta^4) = 0, \\ G = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{8(\lambda + \mu)^2} \left[ (3\lambda + 2\mu) P_{xxx} - \frac{\rho c^2 (\lambda^2 + 4\lambda\mu + 2\mu^2)}{\mu(\lambda + 2\mu)} P_{xtt} - \frac{2\rho c^2 (2\lambda + 3\mu)}{\lambda + 2\mu} T_{tt} - 2\lambda T_{xx} \right]. \end{aligned} \quad (35)$$

Отметим, что в линейном приближении при  $\varepsilon = 0$  уравнение (35) совпадает с уравнениями, выведенными для линейной задачи в [36]. Из (31) и (35), задавая  $\varepsilon = 0$ ,  $\delta = 0$  и  $P = T = 0$ , получаем скорость линейной продольной волны в бесконечно тонком стержне:

$$c = \sqrt{\frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\rho(\lambda + \mu)}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (36)$$

Теперь перепишем оба выведенных уравнения типа Буссинеска (31) и (35) в унифицированной форме и выразим коэффициенты Ламе через модуль Юнга  $E$  и коэффициент Пуассона  $\nu$ :

$$\begin{aligned} U_{0tt} - U_{0xx} - 2(\nu P_x + T) - \frac{\varepsilon}{2E} (\beta_1 U_{0x}^2 + 2\beta_2 U_{0x} P + \beta_3 P^2)_x \\ + \delta^2 \left( \alpha_1^{(i)} U_{0tttt} + \alpha_2^{(i)} U_{0xxtt} + \alpha_3^{(i)} U_{0xxxx} + F^{(i)} \right) + O(\varepsilon^2, \varepsilon \delta^2, \delta^4) = 0, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (37)$$

$$\alpha_1^{(1)} = \alpha_3^{(1)} = \frac{1+\nu}{4}, \quad \alpha_2^{(1)} = -\frac{1+\nu+\nu^2}{2}, \quad (38)$$

$$\alpha_1^{(2)} = \frac{5-5\nu-6\nu^2+4\nu^3}{8(1-\nu)}, \quad \alpha_2^{(2)} = -\frac{7-7\nu-2\nu^2}{8(1-\nu)}, \quad \alpha_3^{(2)} = \frac{1}{4}, \quad (39)$$

$$\beta_1 = 3E + 2l(1-2\nu)^3 + 4m(1+\nu)^2(1-2\nu) + 6n\nu^2, \quad (40)$$

$$\beta_2 = 2(1+\nu) [2l(1-2\nu)^3 + \nu(E + 4m(1-\nu-2\nu^2) - 2n(1-2\nu))], \quad (41)$$

$$\beta_3 = 2(1+\nu)(1-2\nu) [(1+\nu)(1-2\nu)[4l(1-2\nu) - 2m(1+2\nu) + n] - 2\nu E] \quad (42)$$

$$F^{(1)} = \frac{1}{4} [(1+\nu+2\nu^2)P_{xxx} - (1-\nu+2\nu^2+4\nu^3)P_{xtt}], \quad (43)$$

$$F^{(2)} = \frac{1}{4} \left[ (1+\nu)P_{xxx} - \frac{1+\nu-2\nu^2-2\nu^3}{1-\nu}P_{xtt} - \frac{3-5\nu-4\nu^2+4\nu^3}{2(1-\nu)}T_{tt} - 2\nu T_{xx} \right]. \quad (44)$$

Дифференцируя (37) по  $x$ , получаем два уравнения для продольной «деформации»  $u = U_{0x}$ :

$$u_{tt} - u_{xx} - 2(\nu P_{xx} + T_x) - \frac{\varepsilon}{2E} (\beta_1 u^2 + 2\beta_2 uP + \beta_3 P^2)_{xx} + \delta^2 \left( \alpha_1^{(i)} u_{tttt} + \alpha_2^{(i)} u_{xttt} + \alpha_3^{(i)} u_{xxxx} + F_x^{(i)} \right) + O(\varepsilon^2, \varepsilon\delta^2, \delta^4) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (45)$$

Три различных асимптотических модели следует из уравнений (45) в зависимости от соотношения между двумя малыми параметрами  $\varepsilon$  и  $\delta$ . Во-первых, если нелинейность сильно слабее дисперсии, т.е.  $\varepsilon \ll \delta^2 \ll 1$ , мы можем асимптотически свести (45) к линейным уравнениям:

$$u_{tt} - u_{xx} - 2(\nu P_{xx} + T_x) + \delta^2 \left( \alpha_1^{(i)} u_{tttt} + \alpha_2^{(i)} u_{xttt} + \alpha_3^{(i)} u_{xxxx} + F_x^{(i)} \right) + O(\delta^4) = 0, \quad (46)$$

$i = 1, 2,$

из которых следует, что эволюция волн будет происходить главным образом под влиянием дисперсии. Во-вторых, если нелинейность намного сильнее дисперсии, т.е.  $\delta^2 \ll \varepsilon \ll 1$ , мы получаем уравнение

$$u_{tt} - u_{xx} - 2(\nu P_{xx} + T_x) - \frac{\varepsilon}{2E} (\beta_1 u^2 + 2\beta_2 uP + \beta_3 P^2)_{xx} + O(\varepsilon^2) = 0, \quad (47)$$

означающее, что эволюция волн определяется нелинейностью. Наконец, если нелинейное и дисперсионные слагаемые уравновешивают друг друга, т.е.  $\varepsilon \sim \delta^2$ , мы получаем «модель максимального баланса» (“maximal balance model” согласно терминологии, используемой в [2]):

$$u_{tt} - u_{xx} - 2(\nu P_{xx} + T_x) - \varepsilon \left[ \frac{1}{2E} (\beta_1 u^2 + 2\beta_2 uP + \beta_3 P^2)_{xx} - \frac{\delta^2}{\varepsilon} \left( \alpha_1^{(i)} u_{tttt} + \alpha_2^{(i)} u_{xttt} + \alpha_3^{(i)} u_{xxxx} + F_x^{(i)} \right) \right] + O(\varepsilon^2) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (48)$$

Последняя асимптотическая модель (48) (обе её версии  $i = 1, 2$ ) является уравнением

типа Буссинеска. Хорошо известно, что такие уравнения имеют решения в виде солитонов сжатия [17].

Отбросим члены порядка  $O(\varepsilon^2)$  в уравнениях (48) и запишем их в размерном виде, не меняя обозначения для размерных переменных:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} - \frac{2}{\rho} \left( \nu P_{xx} + \frac{1}{R} T_x \right) - \left( \frac{\beta_1}{2\rho} u^2 + \frac{\beta_2}{\rho E} uP + \frac{\beta_3}{2\rho E^2} P^2 \right)_{xx} + R^2 \left( \frac{\alpha_1^{(i)}}{c^2} u_{tttt} + \alpha_2^{(i)} u_{xxtt} + c^2 \alpha_3^{(i)} u_{xxxx} + G^{(i)} \right) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (49)$$

где  $c^2 = E/\rho$ , а размерные функции  $G^{(i)}$  представляются в виде:

$$G^{(1)} = \frac{1 + \nu + 2\nu^2}{4\rho} P_{xxx} - \frac{1 - \nu + 2\nu^2 + 4\nu^3}{4E} P_{xxt}, \quad (50)$$

$$G^{(2)} = \frac{1 + \nu}{4\rho} P_{xxx} - \frac{1 + \nu - 2\nu^2 - 2\nu^3}{4E(1 - \nu)} P_{xxt} - \frac{3 - 5\nu - 4\nu^2 + 4\nu^3}{8ER(1 - \nu)} T_{xt} - \frac{\nu}{2\rho R} T_{xx}. \quad (51)$$

Уравнения (48) были выведены для случая сильных поверхностных напряжений, когда соответствующие слагаемые находятся в ведущем порядке по малому параметру  $\varepsilon$ . Если напряжения сравнительно невелики:  $P = \varepsilon \hat{P}$ ,  $T = \varepsilon \hat{T}$ , тогда в (48) напряжения «сдвигаются» в следующий порядок по  $\varepsilon$ , что в размерном виде приводит следующим уравнениям:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} - \frac{2}{\rho} \left( \nu P_{xx} + \frac{1}{R} T_x \right) - \left( \frac{\beta_1}{2\rho} u^2 \right)_{xx} + R^2 \left( \frac{\alpha_1^{(i)}}{c^2} u_{tttt} + \alpha_2^{(i)} u_{xxtt} + c^2 \alpha_3^{(i)} u_{xxxx} \right) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (52)$$

Отметим, что в случае условия свободной поверхности, т.е.  $P = T = 0$ , уравнения (49) и (52) сводятся к

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = \frac{\beta_1}{2\rho} (u^2)_{xx} - R^2 \left( \frac{\alpha_1^{(i)}}{c^2} u_{tttt} + \alpha_2^{(i)} u_{xxtt} + c^2 \alpha_3^{(i)} u_{xxxx} \right), \quad i = 1, 2. \quad (53)$$

Сравним оба уравнения (53) с «уравнением с двумя дисперсиями», полученным Самсоновым и Порубовым [24]:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = \frac{\beta_1}{2\rho} (u^2)_{xx} - \frac{\nu(1 - \nu)R^2}{2} u_{xxt} + \frac{\nu c^2 R^2}{2} u_{xxx}, \quad (54)$$

и «регуляризованным» уравнением, выведенным Островским и Сутиным [20]:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = \frac{\beta_1}{2\rho} (u^2)_{xx} + \frac{\nu^2 R^2}{2} u_{xxt}. \quad (55)$$

Все четыре модели имеют одинаковое нелинейное слагаемое, однако дисперсионные сла-

гаемые отличаются. Уравнения (54) и (55) могут быть записаны в форме уравнений (53) с помощью следующих дисперсионных коэффициентов:

$$\begin{aligned}\alpha_1^{(3)} &= 0, & \alpha_2^{(3)} &= \frac{(1-\nu)\nu}{2}, & \alpha_3^{(3)} &= -\frac{\nu}{2}, \\ \alpha_1^{(4)} &= 0, & \alpha_2^{(4)} &= -\frac{\nu^2}{2}, & \alpha_3^{(4)} &= 0.\end{aligned}$$

Отметим, что все четыре приведённые выше модели не являются асимптотически точными уравнениями, т.е. в безразмерной форме они содержат как члены  $O(1)$ , так и  $O(\varepsilon)$ . Следовательно, все эти уравнения могут быть «регуляризованы» (сведены) к одному уравнению, в котором есть только одно дисперсионное слагаемое, используя соотношение в главном порядке  $u_{tt} = c^2 u_{xx} + \langle \text{малые члены} \rangle$ . Коэффициент при этом дисперсионном слагаемом определяется суммой дисперсионных коэффициентов  $\alpha_j$  и одинаков для всех четырех уравнений:

$$\alpha_1^{(i)} + \alpha_2^{(i)} + \alpha_3^{(i)} = -\frac{\nu^2}{2}, \quad i = \overline{1, 4}, \quad (56)$$

что означает, что эти уравнения асимптотически эквивалентны.

Поскольку модель с одним дисперсионным членом проще, чем модель с тремя дисперсионными членами, представляется целесообразным получить регуляризованную модель с внешним воздействием. Из безразмерного уравнения (48) следует асимптотическое соотношение

$$u_{tt} = u_{xx} + 2(\nu P_{xx} + T_x) + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad (57)$$

с помощью которого можно выразить  $u_{tttt}$  и  $u_{xxxx}$  через  $u_{xxtt}$ . Получаемая таким образом из (48,  $i = 1$ ) модель в размерной форме имеет вид:

$$\begin{aligned}u_{tt} - c^2 u_{xx} - \frac{2}{\rho} \left( \nu P_{xx} + \frac{1}{R} T_x \right) - \left( \frac{\beta_1}{2\rho} u^2 + \frac{\beta_2}{\rho E} u P + \frac{\beta_3}{2\rho E^2} P^2 \right)_{xx} - \frac{\nu^2 R^2}{2} u_{xxtt} \\ + \frac{R^2}{4} \left( \frac{1-\nu}{\rho} P_{xxxx} - \frac{1-3\nu+4\nu^3}{E} P_{xxtt} \right) + \frac{(1+\nu)R}{2} \left( \frac{1}{E} T_{xtt} - \frac{1}{\rho} T_{xxx} \right) = 0, \quad i = 1, 2.\end{aligned} \quad (58)$$

Уравнение (58) является обобщением уравнения (55) на случай ненулевых напряжений на поверхности.

Отметим, что в некоторых исследованиях, в частности, Самсонова и Порубова [24, 17, 18], для вывода модели типа Буссинеска использовались асимптотические разложения перемещений по малому параметру, а не степенные разложения по поперечной координате (радиусу). В следующем пункте мы кратко покажем, что, используя такой подход, можно получить уравнение (49,  $i = 1$ ).

Некоторые исследователи рассматривали задачу о распространении длинных продольных волн в предварительно растянутом стержне [27]. Вывод уравнений, предложенный в предыдущем параграфе, позволяет легко учесть это растяжение.

Рассмотрим распространение продольных волн в равномерно растянутом вдоль сво-

ей оси стержне. Продольное перемещение в растянутом состоянии представляется в виде:

$$U^*(x) = \kappa x, \quad (59)$$

где  $\kappa$  – постоянная. Обезразмерим предварительное растяжение с помощью того же масштаба, что  $U$  в (19):

$$\tilde{U}^* = \frac{U^*}{\varepsilon L} = \tilde{\kappa} \tilde{x}, \quad \text{где} \quad \tilde{\kappa} = \frac{\kappa}{\varepsilon}. \quad (60)$$

Более того, будем предполагать, что в предварительно растянутом состоянии на стержень не действуют внешние напряжения, приложенные к его поверхности. Решая уравнения движения (12) и (13) с граничными условиями (14) и (15) при  $P = T = 0$ , записанными в безразмерном виде с помощью (19) и (60), получаем поперечное перемещение  $\tilde{V}^*$  в растянутом стержне:

$$\tilde{V}^*(\tilde{r}) = -\frac{\lambda \tilde{\kappa} \tilde{r}}{2(\lambda + \mu)} \left( 1 + \varepsilon \frac{\tilde{\kappa} (2\mu^2(\lambda + 2l) + \lambda^2(3\lambda + 6m - 2n) + \lambda\mu(5\lambda + 4m - 2n))}{4\lambda(\lambda + \mu)^2} + O(\varepsilon^2) \right). \quad (61)$$

Введём новые безразмерные разложения перемещений (тильды опущены):

$$U(x, r, t) = U^*(x) + U_0 + r^2 U_2 + r^4 U_4 + O(r^6), \quad (62)$$

$$V(x, r, t) = V^*(r) + r V_1 + r^3 V_3 + r^5 V_5 + O(r^7). \quad (63)$$

Следуя выводу уравнений (45) и используя разложения (62), (63) взамен (21), (22), получаем уравнения:

$$\begin{aligned} u_{tt} - \left( 1 + \varepsilon \kappa \frac{\beta_1}{E} \right) u_{xx} - 2 \left[ \left( \nu + \varepsilon \kappa \frac{\beta_2}{2E} \right) P_{xx} + T_x \right] - \varepsilon \left( \frac{\beta_1}{2E} u^2 + \frac{\beta_2}{E} uP + \frac{\beta_3}{2E} P^2 \right)_{xx} \\ + \delta^2 \left( \alpha_1^{(i)} u_{tttt} + \alpha_2^{(i)} u_{xxtt} + \alpha_3^{(i)} u_{xxxx} + F_x^{(i)} \right) + O(\varepsilon^2, \varepsilon \delta^2, \delta^4) = 0, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (64)$$

где использованы обозначения, введённые в предыдущих разделах. Отметим, что здесь  $u = U_{0x}$  является возмущением относительно растянутого состояния, в то время как в уравнениях (45) оно обозначает возмущение относительно недеформированного состояния.

Предполагая, что нелинейные и дисперсионные слагаемые одного порядка ( $\varepsilon \sim \delta^2$ ) и отбрасывая малые члены в (64), получаем уравнение, которое в размерном виде представляется следующим образом:

$$\begin{aligned} u_{tt} - \left( c^2 + \kappa \frac{\beta_1}{\rho} \right) u_{xx} - \frac{2}{\rho} \left[ \left( \nu + \kappa \frac{\beta_2}{2E} \right) P_{xx} + \frac{1}{R} T_x \right] - \left( \frac{\beta_1}{2\rho} u^2 + \frac{\beta_2}{\rho E} uP + \frac{\beta_3}{2\rho E^2} P^2 \right)_{xx} \\ + R^2 \left( \frac{\alpha_1^{(i)}}{c^2} u_{tttt} + \alpha_2^{(i)} u_{xxtt} + c^2 \alpha_3^{(i)} u_{xxxx} + G^{(i)} \right) = 0, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (65)$$

Здесь коэффициенты  $\alpha_j^{(i)}$ ,  $\beta_j$  и функции  $G^{(i)}$  задаются формулами (38) – (42) и (50) –

(51) соответственно. Предварительное растяжение изменило скорость длинных линейных волн, квадрат которой равен коэффициенту при  $u_{xx}$ . Это явление называется акустоэластическим эффектом и изучалось в [37, 38]. Отметим, что акустоэластический эффект используется для экспериментального определения упругих модулей Мурнагана.

Насколько известно автору, обе модели, описываемые уравнениями (65), а также их упрощённые версии (49), (53) и (58), получены впервые. В следующем параграфе мы анализируем свойства полученных уравнений и сравним их с уравнениями выведенными ранее.

### 3 Дисперсионные свойства и солитонные решения

На рисунке 2 представлены дисперсионные кривые четырёх упрощённых (с нулевыми напряжениями на поверхности и без предварительного растяжения) линеаризованных уравнения типа Буссинеска, приведённые в предыдущих разделах, а также нижние три ветви точного дисперсионного соотношения Похгаммера-Кри для линейной задачи. Дисперсионные соотношения этих моделей имеют вид:

$$\frac{2p}{R} (q^2 + k^2) J_1(pR)J_1(qR) - (q^2 - k^2)^2 J_0(pR)J_1(qR) - 4k^2 pq J_1(pR)J_0(qR) = 0, \quad (66)$$

$$\alpha_1^{(i)} \bar{\omega}^4 - \left(1 - \alpha_2^{(i)} \bar{k}^2\right) \bar{\omega}^2 + \bar{k}^2 \left(1 + \alpha_3^{(i)} \bar{k}^2\right) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (67)$$

$$\left(1 - \frac{(1-\nu)\nu}{2} \bar{k}^2\right) \bar{\omega}^2 - \bar{k}^2 \left(1 - \frac{\nu \bar{k}^2}{2}\right) = 0, \quad (68)$$

$$\left(1 + \frac{\nu^2}{2} \bar{k}^2\right) \bar{\omega}^2 - \bar{k}^2 = 0, \quad (69)$$

для решения Похгаммера-Кри и уравнений (53,  $i = 1, 2$ ), (54) и (55) соответственно. Здесь  $\bar{k} = kR$ ,  $\bar{\omega} = \omega R/c$ , где  $k$  и  $\omega$  – волновое число и волновая частота соответственно,  $J_i$  – функция Бесселя первого рода, а параметры  $p$  и  $q$  выражаются следующим образом:

$$p^2 = \frac{\rho \bar{\omega}^2}{\lambda + 2\mu} - \bar{k}^2, \quad q^2 = \frac{\rho \bar{\omega}^2}{\mu} - \bar{k}^2.$$

Все модели достаточно хорошо описывают нижнюю ветвь дисперсионной кривой в длинноволновой области, однако наиболее точной является модель (53,  $i = 2$ ). Уравнение Самсонова – Порубова (54) обладает коротковолновой неустойчивостью, в то время как остальные три модели не имеют такого эффекта. Отметим, что коротковолновая неустойчивость затрудняет численный счёт, поскольку высокочастотные гармоники в таком случае могут неограниченно возрастать. Полученные в настоящей работе уравнения (53) в отличие от других уравнений улавливают вторую ветвь дисперсионной кривой, правда описывают её очень неточно: помимо большого отличия по значению, эти кривые имеют всюду положительный наклон, тогда как точная кривая имеет отрицательный наклон в области длинных волн, что соответствует отрицательной групповой скорости.

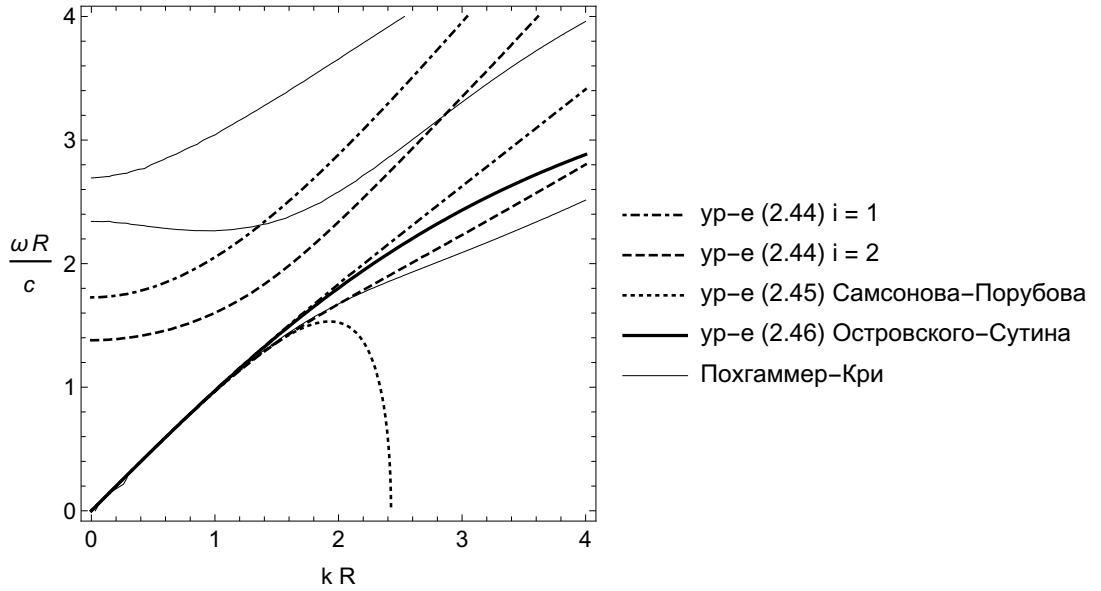


Рис. 2: Дисперсионные кривые для стержня с  $\nu = 0.34$ .

Все четыре уравнения (53,  $i = 1, 2$ ), (54) и (55) имеют семейство солитонных решений, вывод которых описан в Приложении 2:

$$u_i(x, t) = A \operatorname{sech}^2 \left[ B_i \left( x \pm t \sqrt{c^2 + \frac{A\beta_1}{3\rho}} \right) \right], \quad i = \overline{1, 4}. \quad (70)$$

Здесь амплитуда  $A$  является свободным параметром, причём при  $A < 0$  такая волна называется солитоном сжатия, а при  $A > 0$  — солитоном разрежения. Для заданной амплитуды  $A$ , соответствующие солитонные решения имеют одинаковую скорость, но разные параметры длины  $B_i$ :

$$B_i = \sqrt{\frac{3A\beta_1 E}{-4 \left[ (A\beta_1 + 3E)^2 \alpha_1^{(i)} + 3E(A\beta_1 + 3E) \alpha_2^{(i)} + 9E^2 \alpha_3^{(i)} \right] R^2}}, \quad i = 1, 2, \quad (71)$$

$$B_3 = \sqrt{\frac{A\beta_1}{[6\nu E + 2A\beta_1(\nu - 1)] \nu R^2}}, \quad (72)$$

$$B_4 = \sqrt{\frac{A\beta_1}{(6E + 2A\beta_1) \nu^2 R^2}}, \quad (73)$$

для уравнений (53), (54) и (55) соответственно.

На рисунке 3 в левой части изображены четыре солитона сжатия, задаваемых формулами (70) – (73) и имеющих амплитудный параметр  $A = -0.05$ . «Регуляризованный» солитон (73) и солитон (71,  $i = 1$ ) практически полностью совпадают и являются самыми длинными из всех. Однако солитоны такой амплитуды вызывают напряжения близкие к пределу упругости для полистирола. В экспериментах с полистироловым стержнем, описанных в [35], амплитуда очень мала:  $A \sim 10^{-3} - 10^{-4}$ , и, следовательно, в во всех четырёх

формулах параметр длины примерно равен

$$B = \sqrt{\frac{A\beta_1}{6\nu^2 ER^2}}, \quad (74)$$

а соответствующее солитонное решение изображено в правой части рисунка 3 для  $A = -0.001$ . Отметим, что для полистирола, упругие характеристики которого представлены в таблице 1, коэффициент  $\beta_1$ , задаваемый формулой (40) отрицателен и, следовательно, параметр  $B$  вещественен. Более того, из формулы (74) следует, что при малых значениях  $A$  тип солитона (сжатия или растяжения) определяется именно знаком коэффициента  $\beta_1$ .

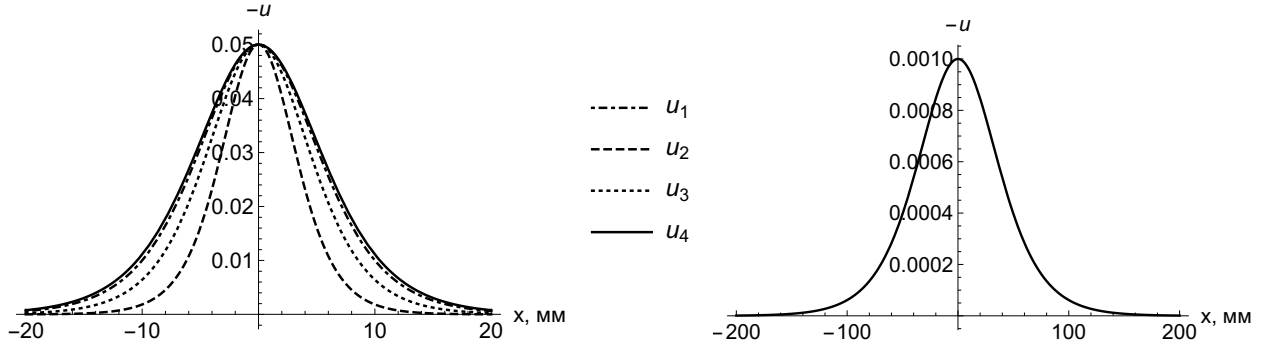


Рис. 3: Графики функций  $-u_i(x, t)$ , задаваемых формулой (70), в стержне радиуса  $R = 5$  мм, сделанном из полистирола при  $A = -0.05$  (слева) и  $A = -0.001$  (справа). Упругие модули полистирола приведены в таблице 1.

Таблица 1: Упругие модули полистирола [37].

Модуль Юнга $E$ , Н/м <sup>2</sup>	Коэффициент Пуассона, $\nu$	Модули Мурнагана, Н/м <sup>2</sup>			Плотность $\rho$ , кг/м <sup>3</sup>
		$l$	$m$	$n$	
$3.7 \cdot 10^9$	0.34	$-18.9 \cdot 10^9$	$-13.3 \cdot 10^9$	$-10 \cdot 10^9$	1060

На рисунке 4 показано, как выглядит деформированный стержень, когда по нему бежит солитон сжатия. Увеличенные перемещения позволяют увидеть эффект Пуассона (утолщение тела при продольном сжатии), а также нелинейную зависимость продольного перемещения от  $r$  (вертикальные линии немного изгибаются в месте сжатия). На всякий случай напомним, что на рисунке 3 изображён график продольной деформации на оси стержня, а не форма границы стержня на рисунке 4.

Репараметризуем солитонное решение (70) через скорость  $v$  вместо амплитуды  $A$ :

$$u_i(x, t) = \frac{3\rho(v^2 - c^2)}{\beta_1} \operatorname{sech}^2 \left[ \tilde{B}_i(x \pm vt) \right], \quad v = \sqrt{c^2 + \frac{A\beta_1}{3\rho}}, \quad (75)$$

$$\tilde{B}_i = \sqrt{\frac{c^2(v^2 - c^2)}{-4 \left( \alpha_1^{(i)} v^4 + \alpha_2^{(i)} c^2 v^2 + \alpha_3^{(i)} c^4 \right) R^2}}, \quad i = 1, 2, \quad (76)$$



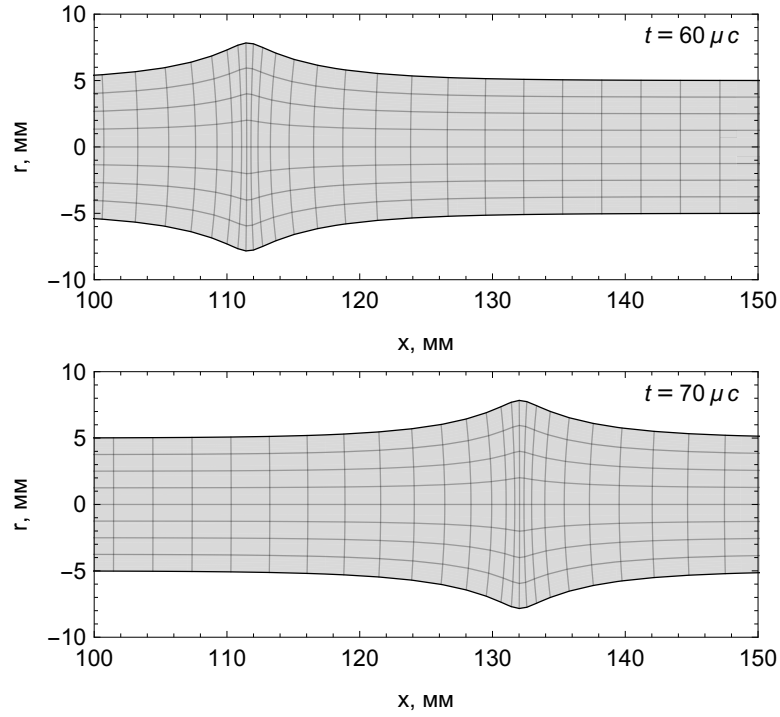


Рис. 4: Стержень из полистирола при прохождении солитона деформации (70,  $i = 1$ ) с амплитудным параметром  $A = -0.03$ . Продольные перемещения увеличены в 30 раз, поперечные в 60 раз.

$$\tilde{B}_3 = \sqrt{\frac{v^2 - c^2}{2\nu R^2[c^2 - (1 - \nu)v^2]}}, \quad (77)$$

$$\tilde{B}_4 = \sqrt{\frac{v^2 - c^2}{2\nu^2 v^2 R^2}}. \quad (78)$$

Солитонное решение существует, только если параметр длины  $\tilde{B}$  вещественен, что приводит, предполагая  $\nu < 0.5$ , к следующим ограничениям на скорость солитона:

- $\tilde{B}_i^2 > 0 \implies v^2 < \frac{-\alpha_2^{(i)} - \sqrt{\alpha_2^{(i)2} - 4\alpha_1^{(i)}\alpha_3^{(i)}}}{2\alpha_1^{(i)}}c^2$  или  $c^2 < v^2 < \frac{-\alpha_2^{(i)} + \sqrt{\alpha_2^{(i)2} - 4\alpha_1^{(i)}\alpha_3^{(i)}}}{2\alpha_1^{(i)}}c^2$ ,  
 $i = 1, 2$ ,

- $\tilde{B}_3^2 > 0 \implies c^2 < v^2 < \frac{c^2}{1 - \nu}$ ,

- $\tilde{B}_4^2 > 0 \implies c^2 < v^2$ ,

причём  $0 < \frac{-\alpha_2^{(i)} - \sqrt{\alpha_2^{(i)2} - 4\alpha_1^{(i)}\alpha_3^{(i)}}}{2\alpha_1^{(i)}} \leq 1$  и  $\frac{-\alpha_2^{(i)} + \sqrt{\alpha_2^{(i)2} - 4\alpha_1^{(i)}\alpha_3^{(i)}}}{2\alpha_1^{(i)}} \geq 1$  при  $\nu \in [0, 0.5]$ ,

$i = 1, 2$ . Таким образом, в то время как первые три модели дают ограниченный диапазон скоростей, регуляризованная модель не накладывает ограничения сверху на скорость солитона. Также первые две модели, в отличие от двух других, допускают существование солитонов противоположного знака.

Помимо математического ограничения на параметры солитона (вещественность параметра длины  $B$ ) есть физическое ограничение: солитон не должен вызывать пластиче-

ских деформаций, поскольку модель строилась только для упругих деформаций. Так, для полистирола и широкого круга других материалов именно физическое ограничение сильнее всего сужает диапазон допустимых скоростей, поскольку, как видно из формулы (75), чем больше разность  $v^2 - c^2$ , тем больше амплитуда и меньше длина солитона.

## 4 Численное решение уравнений нелинейной теории упругости

В главе 2 из полных нелинейных уравнений движения выведены упрощённые модели типа Буссинеска, описывающие длинные продольные волны деформации, которые теперь интересно сравнить с численным решением полных уравнений.

В настоящей работе основной интерес представляют непрерывные гладкие решения нелинейных уравнений. Наилучшим средством для их нахождения является псевдоспектральный метод, с помощью которого мы будем решать как пространственно одномерные уравнения типа Буссинеска, так и полные трёхмерные уравнения движения. Отметим, что псевдоспектральный метод чаще всего используется только для пространственной дискретизации, в то время как дискретизация по времени осуществляется с помощью стандартных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений, например, Рунге-Кутты 4-го порядка.

Семейство спектральных методов, одним из которых является псевдоспектральный метод или метод коллокации, основано на поиске решения задачи в некотором подпространстве, имеющем конечный базис, в качестве которого чаще всего выбирается базис Фурье (набор синусов и косинусов) или семейство ортогональных многочленов, например, Чебышёва или Лежандра. Отличительной особенностью псевдоспектрального метода является выполнение уравнений не на всей области, а лишь в конечном наборе точек, называемых точками коллокации. Получаемые в результате значения решения в точках коллокации затем интерполируются на всю область задачи. Выбор точек коллокации определяется используемым базисом: для базиса Фурье точки равномерно распределены по области, а для ортогональных многочленов выбираются точки соответствующей интерполяционной квадратуры, задаваемые нулями определённых многочленов. Конкретный вид многочлена, у которого ищутся нули, определяется типом квадратуры: Гаусса, Гаусса-Радона или Гаусса-Лобатто. Более подробному описанию этого метода применительно к решаемым уравнениям посвящён следующий параграф.

## 4.1 Одномерное уравнение типа Буссинеска

Сформулируем задачу Коши для одномерного регуляризованного уравнения Буссинеска с внешним воздействием:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} - g_1 P_{xx} - g_2 T_x - \left( \tilde{\beta}_1 u^2 + \tilde{\beta}_2 uP + \tilde{\beta}_3 P^2 \right)_{xx} + \tilde{\alpha} u_{xxtt} + \gamma_1 P_{xxxx} + \gamma_2 P_{xxtt} + \gamma_3 T_{xtt} + \gamma_4 T_{xxx} = 0, \quad x \in (0, L), \quad (79)$$

$$u(x, 0) = \phi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad (80)$$

где на границах области поставлены условия симметрии, поскольку модель Буссинеска выводилась для бесконечного стержня. Уравнение (79) совпадает по форме с (58), где некоторые коэффициенты переобозначены для лаконичности записи.

Будем решать регуляризованное уравнение типа Буссинеска с помощью псевдоспектрального метода Фурье. Для этого сначала отобразим область задачи  $(0, L)$  в  $(0, 2\pi)$  с помощью замены  $\tilde{x} = Sx$ , где  $S = 2\pi/L$ , и запишем новое уравнение, опустив тильду над  $x$ :

$$u_{tt} - S^2 c^2 u_{xx} - S^2 g_1 P_{xx} - S g_2 T_x - S^2 \left( \tilde{\beta}_1 u^2 + \tilde{\beta}_2 uP + \tilde{\beta}_3 P^2 \right)_{xx} + S^2 \tilde{\alpha} u_{xxtt} + S^4 \gamma_1 P_{xxxx} + S^2 \gamma_2 P_{xxtt} + S \gamma_3 T_{xtt} + S^3 \gamma_4 T_{xxx} = 0, \quad x \in (0, 2\pi), \quad (81)$$

Будем искать приближённое решение  $u_N$  в виде комбинации из  $N$  гармоник:

$$u_N(x, t) = \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} \hat{u}(k, t) e^{ikx}, \quad x \in (0, 2\pi). \quad (82)$$

Ключевая идея псевдоспектрального метода заключается в поиске таких коэффициентов  $\hat{u}(k, t)$ , что точное решение  $u$  совпадает с приближённым решением  $u_N$  в точках коллокации  $x_j$ :

$$u_N(x_j, t) = u(x_j, t), \quad x_j = \frac{2\pi j}{N}, \quad j = 0, \dots, N-1. \quad (83)$$

Из условия (83) естественным образом вытекает применение дискретного преобразования Фурье (ДПФ) для нахождения  $\hat{u}(k, t)$ , а для обратной операции – обратного ДПФ:

$$\hat{u}(k, t) = \mathcal{F}u = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} u(x_j, t) e^{-ikx_j}, \quad k = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1, \quad (84)$$

$$u(x_j, t) = \mathcal{F}^{-1}\hat{u} = \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} \hat{u}(k, t) e^{ikx_j}, \quad j = 0, \dots, N-1. \quad (85)$$

Отметим, что использование ДПФ выгодно с вычислительной точки зрения, поскольку для его реализации есть алгоритм быстрого преобразования Фурье.

Спектральное представление (82) позволяет быстро находить производную по про-

странственной переменной:

$$u'_N(x, t) = \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} ik\widehat{u}(k, t)e^{ikx}. \quad (86)$$

Применим спектральное представление (82) к уравнению (81) и начальным условиям (80). Приравнявая коэффициент при каждой гармонике к нулю, получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными условиями в виде:

$$(1 - \tilde{\alpha}S^2k^2)\ddot{\widehat{u}} = -S^2k^2\left(c^2\widehat{u} + \tilde{\beta}_1\widehat{u}^2 + \tilde{\beta}_2\widehat{uP} + \tilde{\beta}_3\widehat{P^2}\right) + S^2g_1\widehat{P_{xx}} - Sg_2\widehat{T_x} - \left(S^4\gamma_1\widehat{P_{xxx}} + S^2\gamma_2\widehat{P_{xtt}} + S\gamma_3\widehat{T_{xtt}} + S^3\gamma_4\widehat{T_{xxx}}\right), \quad (87)$$

$$\widehat{u}(k, 0) = \widehat{\phi}(k), \quad \dot{\widehat{u}}(k, 0) = \widehat{\psi}(k), \quad k = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1, \quad (88)$$

где точка над функцией обозначает производную по времени. Для нахождения Фурье образа нелинейного слагаемого  $u^2$ , а также  $uP$ , к функции  $\widehat{u}$  применяется обратное преобразование, затем полученная функция  $u(x_j, t)$  возводится в квадрат в узлах сетки или домножается на  $P(x_j, t)$  и переводится обратно в пространство Фурье:

$$\widehat{u^2} = \mathcal{F}[(\mathcal{F}^{-1}\widehat{u})^2], \quad \widehat{uP} = \mathcal{F}[P \cdot \mathcal{F}^{-1}\widehat{u}].$$

Такой метод при использовании быстрого преобразования Фурье позволяет эффективно вычислять  $\widehat{u^2}$  и  $\widehat{uP}$ . Решать систему (87), (88) будем с помощью метода Рунге-Кутты 4-го порядка. Применяя обратное ДПФ к решению этой системы, получаем приближение исходной задачи Коши (79), (80).

С помощью псевдоспектрального метода уравнения в частных производных часто сводятся к системе ОДУ относительно значений функции в точках коллокации  $u_N(x_j, t)$ , а не коэффициентов  $\widehat{u}(k, t)$ . В таком случае нелинейные слагаемые вычисляются простым поточечным произведением значений функций в точках коллокации, а вычисление пространственных производных осуществляется через умножение вектора значений  $u_N(x_j, t)$  на матрицу производной  $D_N$ :

$$\underline{u}'_N(t) = D_N \underline{u}_N(t), \quad \underline{u}_N(t) = \{u_N(x_j, t)\}_{j=0}^{N-1}. \quad (89)$$

Однако для регуляризованного уравнения Буссинеска, где присутствует смешанная производная  $u_{xxtt}$ , применить такой метод вычисления производной затруднительно. Матрицы  $D_N$  для различных базисов приведены в [12].

Аналогичным образом можно дискретизировать уравнения (49) с тремя дисперсионными слагаемыми, однако возникающая система обыкновенных дифференциальных уравнений 4-го порядка оказывается жёсткой и не поддаётся решению явными методами. В настоящей работе много времени было уделено реализации псевдоспектрального метода для полных уравнений, описанию которого посвящён следующий пункт, поэтому задачу

о численном моделировании уравнений (49) было решено оставить на будущее.

## 4.2 Полные трёхмерные уравнения

Сформулируем задачу Коши для полных уравнений, описывающих динамику однородного стержня круглого сечения длиной  $L$  и радиусом  $R$ :

$$\ddot{\underline{U}}(x, r, \varphi, t) = \rho^{-1} \operatorname{div} \underline{P}, \quad 0 < x < L, \quad 0 < r < R, \quad 0 < \varphi < 2\pi, \quad (90)$$

$$\underline{P} \cdot \underline{n} = \underline{P}_b, \quad r = R, \quad (91)$$

$$\underline{U}(x, r, \varphi, 0) = \underline{U}_0(x, r, \varphi), \quad \dot{\underline{U}}(x, r, \varphi, 0) = \dot{\underline{U}}_0(x, r, \varphi), \quad (92)$$

$$\underline{P} = \lambda (\operatorname{tr} \underline{E}) \underline{\mathcal{I}} + 2\mu \underline{E} + l (\operatorname{tr} \underline{E})^2 \underline{\mathcal{I}} - m \left( (\operatorname{tr} \underline{E})^2 \underline{\mathcal{I}} - 2 (\operatorname{tr} \underline{E}) \underline{E} - (\operatorname{tr} \underline{E}^2) \underline{\mathcal{I}} \right) + n (\underline{E}^*)^T, \quad (93)$$

$$\underline{E} = \frac{1}{2} (\nabla \underline{U}^T + \nabla \underline{U} + \nabla \underline{U}^T \cdot \nabla \underline{U}), \quad (94)$$

где  $\underline{E}^*$  – союзная матрица,  $\underline{\mathcal{I}}$  – единичный тензор, а по  $x$  ставятся периодические граничные условия. Напомним, что уравнения (90) совпадают с (12), (13) при отсутствии кручения и независимости перемещений от  $\varphi$ .

Будем искать решение в некотором конечномерном пространстве, задаваемым системой базисных функций  $\Phi_{n_1}(x)$ ,  $\Psi_{n_2}(r)$ ,  $\Theta_{n_3}(\varphi)$ . Представим приближённое решение  $\underline{U}_N$  в спектральном виде и потребуем, чтобы приближённое решение совпадало с точным в точках коллокации:

$$\underline{U}_N(x, r, \varphi, t) = \sum_{n_1, n_2, n_3} \hat{\underline{U}}(n_1, n_2, n_3, t) \Phi_{n_1}(x) \Psi_{n_2}(r) \Theta_{n_3}(\varphi), \quad (95)$$

$$\underline{U}_N(x_{j_1}, r_{j_2}, \varphi_{j_3}, t) = \underline{U}(x_{j_1}, r_{j_2}, \varphi_{j_3}, t), \quad j_1 = 0, \dots, N_1 - 1, \quad j_2 = 0, \dots, N_2 - 1, \quad j_3 = 0, \dots, N_3 - 1. \quad (96)$$

В уравнении (90) отсутствуют смешанные производные по временной и пространственным переменным, поэтому подстановка (95) в (90) приводит к системе ОДУ второго порядка относительно  $\underline{U}$ :

$$\ddot{\underline{U}}_{N,k} = F_k(\underline{U}_{N,k_0}, \dots, \underline{U}_{N,k_N}), \quad k = k_0, \dots, k_N. \quad (97)$$

Здесь  $k$  – мультииндекс:  $k = (j_1, j_2, j_3)$ ,  $k_0 = (0, 0, 0)$ ,  $k_N = (N_1 - 1, N_2 - 1, N_3 - 1)$ , а также использовано обозначение:  $\hat{\underline{U}}_{N,j_1,j_2,j_3} = \hat{\underline{U}}_N(x_{j_1}, r_{j_2}, \varphi_{j_3}, t)$ . В граничных узлах необходимо сделать добавку, чтобы выполнялись граничные условия (91):

$$\ddot{\underline{U}}_{N,k} = F_k(\underline{U}_{N,k_0}, \dots, \underline{U}_{N,k_N}) + \underline{P}_{b,k} - \underline{P}(\underline{U}_{N,k_0}, \dots, \underline{U}_{N,k_N}), \quad r_k = R. \quad (98)$$

Функция  $F_k$  содержит в себе множество пространственных производных, которые можно вычислить по формуле (89) с помощью умножения на матрицу дифференцирования  $D_N$ . Оценим сложность этого метода на примере вычисления спектральной производ-

ной:

$$\left(\frac{\partial U_N}{\partial x}\right)_{j_1, j_2, j_3} = (D_{N_1})_{j_1 l} U_{N, l, j_2, j_3}, \quad \begin{aligned} j_1 &= 0, \dots, N_1 - 1, & j_2 &= 0, \dots, N_2 - 1, \\ j_3 &= 0, \dots, N_3 - 1, \end{aligned} \quad (99)$$

где в правой части выполняется суммирование по повторяющемуся индексу  $l$ . Такое вычисление производной требует  $O(N_1^2 N_2 N_3)$  операций. Если в задаче используется базис Фурье или Чебышёва, то дифференцирование можно провести в пространстве коэффициентов  $\hat{U}_N$ , для перехода к которым используется быстрое преобразование Фурье, что потребует  $O(N_1 \log(N_1) N_2 N_3)$  операций. Если используется другой базис, например, Лежандра, то такой возможности ускорить вычисление производной нет, однако практическая реализация алгоритма показала, что метод с использованием быстрого преобразования Фурье эффективнее умножения на матрицу лишь начиная со значения  $N_1 \sim 1000$ . Это обусловлено тем, что константа алгоритма умножения матриц значительно меньше константы быстрого преобразования Фурье.

Для того, чтобы иметь возможность относительно быстро получать решения уравнений на сетке с большим количеством точек, мы применили *многодоменный* псевдоспектральный метод, он же метод *спектрального элемента*. В рамках этого метода область задачи  $\Omega$  разбивается на  $M$  подобластей (доменов)  $\Omega_m$ :

$$\begin{aligned} \Omega &= \{(x, r, \varphi) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < x < L, 0 < r < R, 0 < \varphi < 2\pi\} = \bigcup_{i=1}^M \Omega_m, \\ \Omega_m &= \{(x, r, \varphi) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq L_m < x < L_{m+1} \leq L, 0 < R_m < r < R_{m+1} \leq R, \\ &\quad 0 \leq \varphi_m < \varphi < \varphi_{m+1} \leq 2\pi\}. \end{aligned}$$

На каждом домене осуществляется дискретизация согласно псевдоспектральному методу, а затем домены сшиваются так, как это происходит в методе конечных элементов. Теперь для вычисления производной (99) требуется  $O(M N_{1,M}^2 N_{2,M} N_{3,M})$ , где  $N_{1,M}$ ,  $N_{2,M}$ ,  $N_{3,M}$  — размерность базиса на одном домене. Выбирая базисы не слишком большой размерности на каждом элементе, мы сможем добиться более высокой скорости вычисления пространственных производных.

Пример сетки с двумя доменами вдоль оси  $x$  представлен на рисунке 5, где для дискретизации по  $x$  и по  $r$  используется базис Лежандра, причём по  $x$  в качестве точек коллокации выбираются точки Гаусса-Лобатто, включающие границы, а по  $r$  — точки Гаусса-Радо, чтобы исключить центральную точку стержня ( $r = 0$ ). По  $\varphi$  используется базис Фурье с равномерно распределёнными по интервалу  $(0, 2\pi)$  точками. Узлы такой сетки распределены по объёму сильно неравномерно со сгущением около оси стержня и разрежением у его поверхности. В работах [ссылки] предложен ряд способов как равномернее распределить узлы и, следовательно, повысить точность аппроксимации при том же количестве узлов, однако реализацию этих методов мы оставили на будущее.

Следующий параграф посвящён описанию результатов численного моделирования

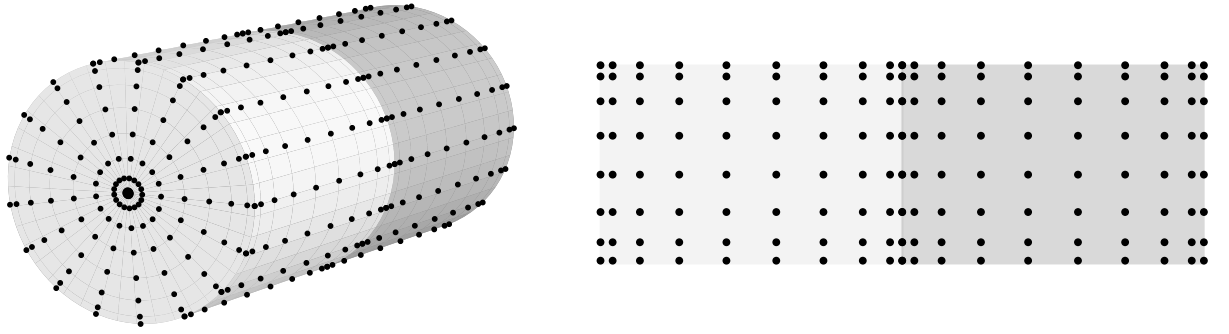


Рис. 5: Пример трёхмерной (слева) и двумерной (справа) сеток из двух доменов, обозначенных разными цветами.

согласно приведённым здесь методам. В настоящей работе представляют интерес решения уравнений в осесимметричном случае, поэтому мы не провидим дискретизацию по  $\varphi$ , и, следовательно, проблемы неравномерного распределения узлов не возникает. Пример двумерной сетки по  $x$  и  $r$  приведён на рисунке 5 справа.

### 4.3 Образование солитона из длинной волны

Будем решать задачу Коши для полных уравнений со свободными от напряжений границами ( $\underline{P}_b = 0$ ), где начальное условие задано распространяющимся вправо со скоростью  $c$  гладким импульсом:

$$U_0(x, r) = A_0 W \operatorname{erf} \left( \frac{x - L/2}{W} \right), \quad \dot{U}_0(x, r) = -c \frac{\partial U_0}{\partial x} \quad (100)$$

$$V_0(x, r) = -\nu r \frac{\partial U_0}{\partial x}, \quad \dot{V}_0(x, r) = -c \frac{\partial V_0}{\partial x} \quad (101)$$

На рисунке 6 слева изображена эволюция этого импульса и зарождение солитона при  $A_0 = -0.01$ ,  $W = 20$  в стержне из полистирола, характеристики которого представлены в таблице 1. Исходный импульс испускает небольшие осцилляции и отрывается от них, что согласуется с моделью Буссинеска, согласно которой солитон распространяется со скоростью недоступной линейным волнам. На рисунке 6 справа представлено сравнение оторвавшегося в численном моделировании импульса («численного» солитона) с солитонном (75) из модели Буссинеска. Если скорость солитона Буссинеска, являющуюся свободным параметром в (75), подобрать так, чтобы она совпадала со скоростью численного солитона, то последний имеет почти ту же длину, что и солитон Буссинеска, но на 6% большую амплитуду. Отметим, что формула (75) задаёт четыре солитона различной длины, однако при амплитуде около 0.01 они практически идентичны.

На рисунке 7 представлены результаты моделирования, аналогичного тому, что показано на рисунке 6, только с параметром  $A_0 = -0.05$ . Исходная волна рождает два солитона, причём больший солитон движется быстрее меньшего. Сравнение большего солитона с регуляризованным солитоном Буссинеска показано на рисунке 7 справа. При одинаковых скоростях численный солитон значительно длиннее и имеет примерно на 45%

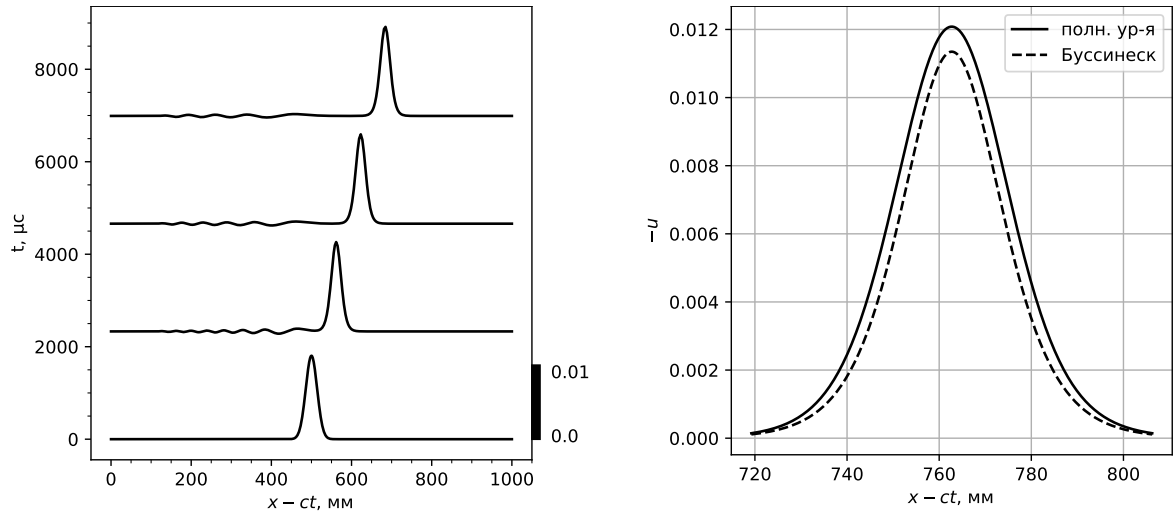


Рис. 6: Слева: решение задачи Коши с начальными условиями (100), (101) при  $A_0 = -0.01$ ,  $W = 20$  для полных уравнений. На графике изображены профили продольной деформации  $-U_x(x-ct, 0, t)$  в центре стержня ( $r = 0$ ) в различные моменты времени в движущейся со скоростью  $c = \sqrt{E/\rho}$  системе координат. Масштаб деформации показан чёрным прямоугольником. На границах расчётной области задан поглощающий слой, чтобы волны, выходящие за левую границу области не входили справа.

Справа: сравнение профиля солитона, полученного в численном моделировании, и солитона Буссинеска (75), скорость  $v$  которого подобрана так, чтобы она совпадала со скоростью численного солитона.

большую амплитуду, чем солитон Буссинеска.

Теперь решим аналогичную задачу Коши для регуляризованного уравнения типа Буссинеска, где начальное условие задано формулой:

$$u_0(x) = 2A_0 \exp\left(\frac{(x - L/2)^2}{W^2}\right), \quad \dot{u}_0(x) = -c \frac{\partial u_0}{\partial x}. \quad (102)$$

Отметим, что уравнение Буссинеска записано относительно функции  $u = U_x$ , а выражение поперечного перемещения  $V$  через продольное  $U$  уже «вшито» в модель. На рисунке 8 слева представлено сравнение эволюции импульса согласно полным уравнениям и согласно модели Буссинеска. В первом случае ( $A_0 = -0.01$ ) обе модели показывают качественно одинаковый результат, однако модель Буссинеска дала солитон примерно на 8% большей амплитуды и, как следствие, бегущий быстрее солитона в полной модели. Во втором случае ( $A_0 = -0.05$ ) в модели Буссинеска родилось три солитона, а в полной модели два. Меньший солитон в обеих моделях идентичен, а больший солитон в модели Буссинеска на 26% выше, чем солитон в полной модели.

Отличительной особенностью нелинейных волн является зависимость скорости от амплитуды волны. На основе численных решений задачи Коши для полных уравнений с начальными импульсами разной амплитуды мы построили зависимость скорости от амплитуды образовавшегося солитона и сравнили её с зависимостью в модели Буссинеска, задаваемой формулой (75) (см. рисунок 9). Зависимость скорости солитона Буссинеска для небольших амплитуд почти линейна, в то время как в полной модели рост скорости соли-



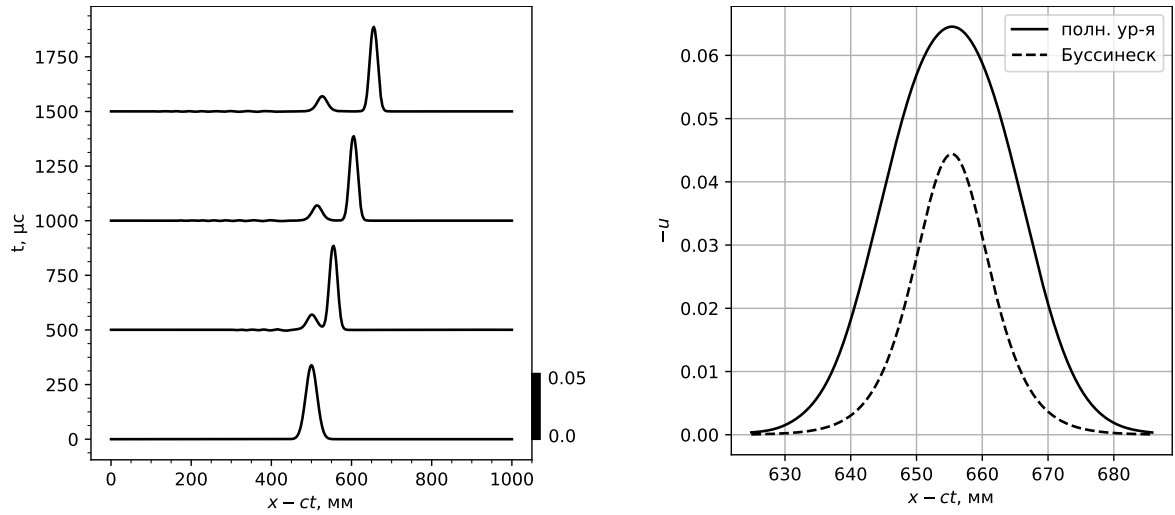


Рис. 7: Слева: решение задачи Коши при  $A_0 = -0.05$ ,  $W = 20$ . Справа: сравнение профиля численного солитона и регуляризованного солитона Буссинеска (75), (78).

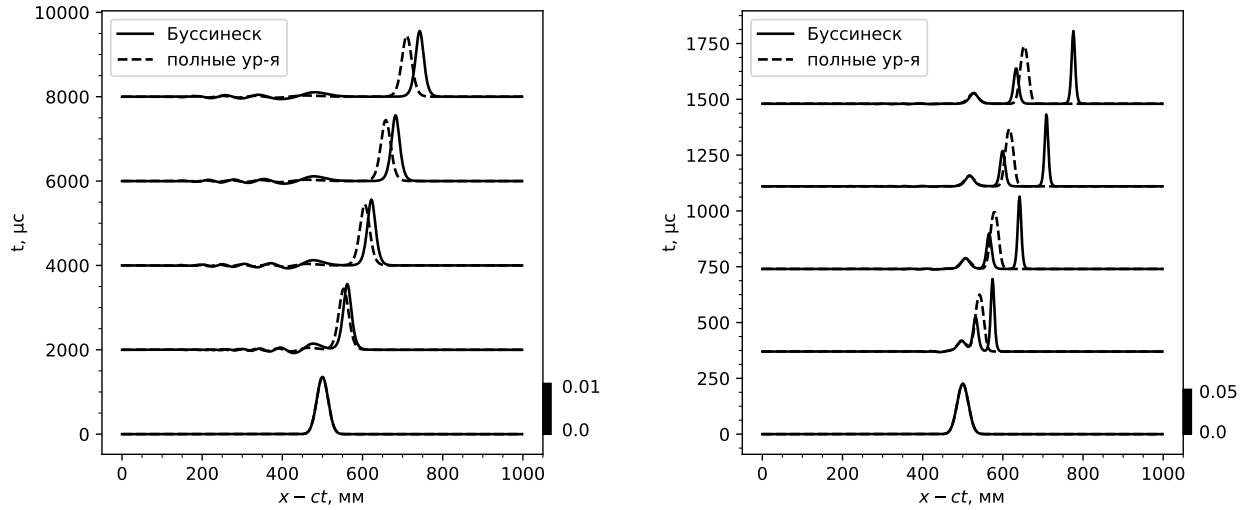


Рис. 8: Сравнение решения задачи Коши (102) для регуляризованной модели Буссинеска и задачи Коши (100), (101) для полной модели с параметрами  $A_0 = -0.01$  (слева) и  $A_0 = -0.05$  (справа).

тона существенно замедляется с увеличением амплитуды. На рисунке 9 отчётливо виден асимптотический характер модели Буссинеска: чем меньше амплитуда волны, использовавшаяся как малый параметр  $\varepsilon$  при выводе в параграфе ??, тем больше соответствие полной модели.

#### 4.4 Образование солитона из удара по торцу стержня

В предыдущем пункте моделирование волн проводилось в стержне со свободной от напряжений поверхностью, однако представляет интерес изучение волн, вызываемых внешним воздействием, например, ударом по торцу стержня. Эти результаты могут быть полезны для того, чтобы возбудить уединённые волны в эксперименте.

Модель типа Буссинеска строилась для бесконечного стержня, следовательно, она применима для описания волн вдали от торцов стержня. Моделирование волн вблизи тор-

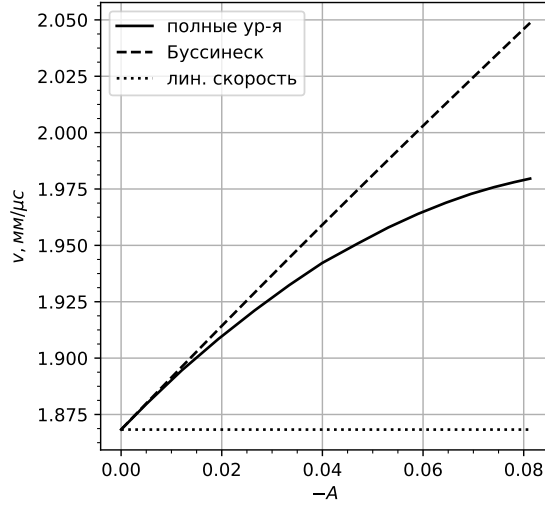


Рис. 9: Сравнение зависимостей скорости от амплитуды для полных уравнений и модели Буссинеска. Горизонтальная линия – скорость линейных продольных волн  $c$ .

цов возможно с помощью полных уравнений (90) – (94) с нулевыми начальными условиями (отсутствие возмущения) следующими условиями на левой и правой границах стержня:

$$P_{xx} = 0.2 \cosh^{-2} \left( \frac{t}{2} \right) \text{ ГПа}, \quad P_{rx} = 0 \quad \text{при } x = 0, \quad (103)$$

$$P_{xx} = P_{rx} = 0 \quad \text{при } x = L \quad (104)$$

Решение полных уравнений представлено рисунке 10 слева. Быстрое воздействие (103), зависимость которого от времени представлена на вертикальном графике, формирует короткий импульс, который впоследствии теряет амплитуду, удлиняется и отрывается от множества порождённых им осцилляций.

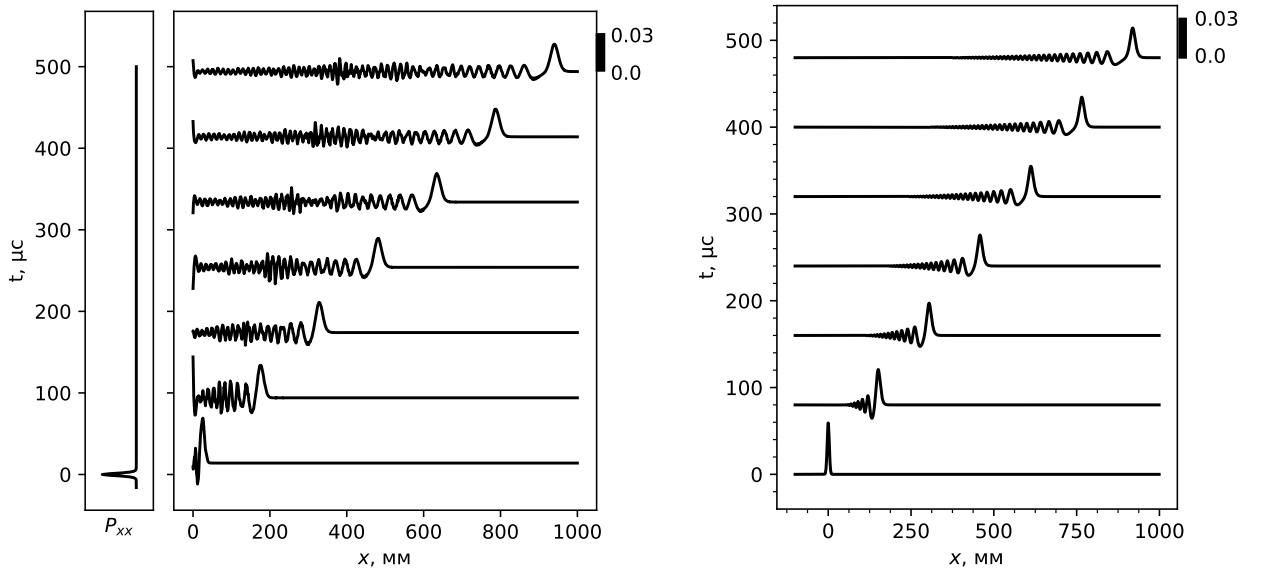


Рис. 10: Моделирование удара по торцу. Слева: решение краевой задачи (103), (104) для полных уравнений. Справа: решение задачи Коши (105) для регуляризованного уравнения Буссинеска.

Сравним полученный результат с приближённой моделью Буссинеска. Мы не можем задать напряжение на торце стержня в этой модели, однако мы можем поставить начальное условие в виде узкого импульса, похожего по амплитуде и длине на тот, что образовался в первый момент времени на рисунке 10 слева. Для этого мы использовали начальное условие в виде:

$$u_0(x) = -0.072 \exp\left(\frac{x^2}{5^2}\right), \quad \dot{u}_0(x) = -c \frac{\partial u_0}{\partial x}. \quad (105)$$

Результаты моделирования представлены на рисунке 10 справа. Обе модели дают похожий результат лишь с той разницей, что полная модель учитывает большее количество различных мелких вибраций, порождаемые вошедшим импульсом. Однако по скорости и форме родившиеся в обеих моделях солитоны близки, что свидетельствует о применимости модели Буссинеска для моделирования генерации солитонов из коротких волн, возникающих вследствие удара.

#### 4.5 Образование солитона из удара по боковой поверхности

Представляет интерес возможность возбуждения солитона с помощью воздействия не только на его торец, но и на боковую поверхность. Для этого зададим непродолжительное локализованное на небольшом участке в центре стержня нормальное напряжение:

$$P_{rr} = 0.3 \cosh^{-2}\left(\frac{t}{10}\right) \cosh^{-2}\left(\frac{x}{10}\right) \text{ ГПа}, \quad P_{xr} = 0, \quad \text{при } r = R. \quad (106)$$

Напомним, что в уравнении Буссинеска (79) нормальное граничное напряжение  $P_{rr}$  обозначено как функция  $P(x, t)$ , а тангенциальное напряжение  $P_{xr}$  как  $T(x, t)$ .

Результаты моделирования согласно полной модели и согласно модели Буссинеска представлены на рисунке 11. Моделирование проводилось на отрезке  $-2000 < x < 2000$ , однако в силу симметричности результата относительно нуля мы показываем только правую часть этого промежутка. Зависимости напряжения  $P_{rr}$  от  $x$  и  $r$  представлены на горизонтальном и вертикальном подграфиках соответственно.

В полной модели непродолжительное воздействие на стержень формирует импульс, который потом разделяется на мелкие осцилляции и солитон. В модели Буссинеска формируется солитон с большей амплитудой и скоростью, чем в полной модели, а мелких осцилляций практически нет. Отметим, что созданная внешним воздействием деформация около  $x = 0$  никуда не движется, что является существенным недостатком модели Буссинеска в этом численном моделировании.

## 5 Заключение

В настоящей работе получены следующие результаты:

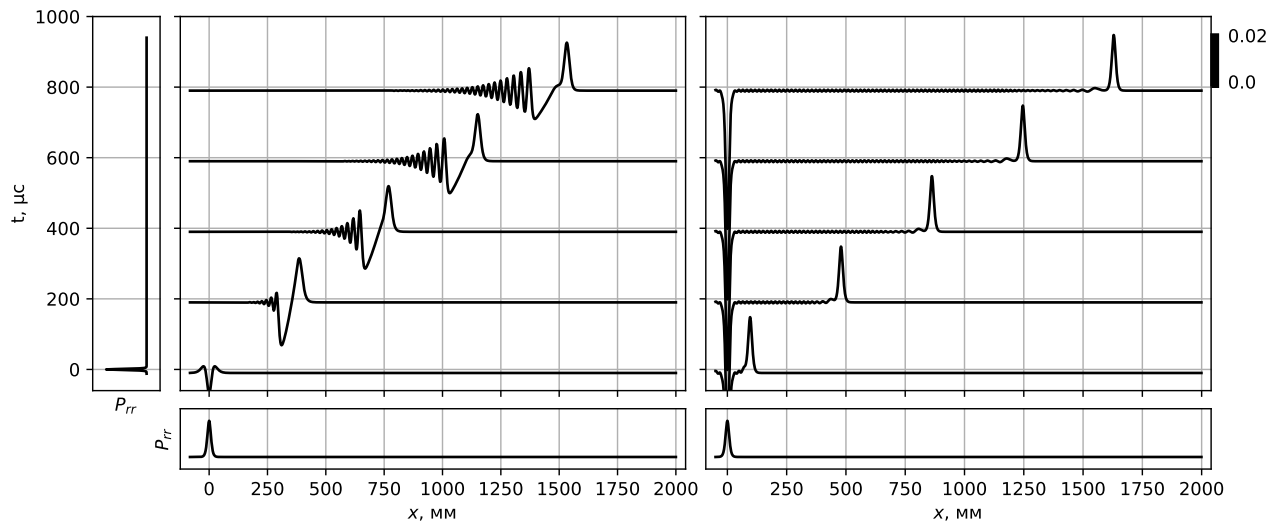


Рис. 11: Моделирование удара по поверхности (106) в полных уравнениях (слева) и в регуляризованной модели Буссинеска (справа).

1. Для описания продольных длинных волн в стержнях круглого сечения выведены две новые асимптотические модели типа Буссинеска, отличающиеся друг от друга коэффициентами при дисперсионных слагаемых. Эти модели обобщены на случай ненулевой осесимметричной нагрузки на боковой поверхности, а также на случай предварительно растянутого стержня. Установлено, что новые модели:

- имеют семейство решений в виде солитонов деформации;
- асимптотически эквивалентны моделям, выведенным ранее;
- обладают лучшими дисперсионными свойствами, чем модели, выведенные ранее.

2. Построен метод, позволяющий численно моделировать полные трёхмерные уравнения движения стержня в рамках нелинейной теории упругости. Проведена серия численных экспериментов, в ходе которых:

- показано, что в полной модели, как и в модели Буссинеска, формируются солитоны;
- построена зависимость скорости от амплитуды солитона в полной модели и показано, что чем меньше амплитуда солитона, тем более схожи его свойства в полной модели и модели Буссинеска;
- установлено, что солитоны деформации могут быть возбуждены с помощью воздействия на поверхность стержня (удара), причём модель Буссинеска даёт схожие с полной моделью солитоны.

Результаты настоящей работы могут быть полезны для экспериментального обнаружения солитонов деформации, поскольку, несмотря на многочисленные попытки, надёжных результатов, свидетельствующих об их существовании, до сих пор нет.

Настоящая работа предполагает продолжение исследования нелинейных волн деформации. Во-первых, представляет научный интерес получение асимптотических моде-

лей в волноводах другой геометрии: в стержне прямоугольного сечения, в тонкостенной оболочке и др. Во-вторых, естественным продолжением этого исследования является попытка учёта в модели вязкоупругого эффекта, приводящего к диссипации энергии и затуханию волн. В-третьих, построенный многодоменный псевдоспектральный метод позволяет легко моделировать волны в многослойных структурах, в частности, в композитах с неидеальным контактом слоёв. Такое исследование может быть применено в дефектоскопии для обнаружения областей расслоения многослойных композитов.

## Список литературы

- [1] Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: «Мир», 1988.
- [2] Ablowitz M. J., Nonlinear dispersive waves: asymptotic analysis and solitons, Cambridge: Cambridge University Press, 2011.
- [3] Zabusky N.J., Kruskal M.D. Interaction of «solitons» in a collisionless plasma and the recurrence of initial states, Physical Review Letters, 1965, 15 (6), 240–243.
- [4] Gardner C. S., Greene J. M., Kruskal M. D., Miura R. M., Method for Solving the Korteweg-de Vries Equation, Physical Review Letters, 1967, 19 (19), 1095–1097.
- [5] Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П., Теория солитонов: метод обратной задачи, М.: «Наука», 1980.
- [6] Taha T. R., Ablowitz M. I., Analytical and numerical aspects of certain nonlinear evolution equations. III. Numerical, Korteweg-de Vries equation, Journal of Computational Physics, 1984, 55 (2), 231–253.
- [7] Christov C.I., Conservative Difference Scheme for Boussinesq Model of Surface Waves, Proceedings ICFD 5, 1996, 343–349.
- [8] Kolkovska N., Dimova M., A new conservative finite difference scheme for Boussinesq paradigm equation, Central European Journal of Mathematics, 2012, 10 (3), 1159–1171.
- [9] Dutykh D., Katsaounis T., Mitsotakis D., Finite volume schemes for Boussinesq type equations, электронная публикация, <https://arxiv.org/abs/1101.1728>
- [10] Karczewska A., Rozmej P., Szczecinski M., Boguniewicz B., A finite element method for extended KdV equations, International Journal of Applied Mathematics and Computer Science, 2016, 26 (3), 555–567.
- [11] Gottlieb D., Orszag S.A., Numerical Analysis of Spectral Methods: Theory and Applications, Philadelphia: SIAM, 1977.

- [12] Canuto C. et al., Spectral Methods. Evolution to Complex Geometries and Applications to Fluid Dynamics, Berlin: Springer-Verlag, 2007.
- [13] Лурье А. И., Нелинейная теория упругости, М.: «Наука», 1980.
- [14] Murnaghan F. D., Finite deformation of an elastic solid, New York: John Wiley and Sons, 1951.
- [15] Bergström J., Mechanics of Solid Polymers, Amsterdam: William Andrew Publishing, 2015.
- [16] Yu Y.-Y., Generalized Hamilton's Principle and Variational Equation of Motion in Nonlinear Elasticity Theory, With Application to Plate Theory, Journal of the Acoustical Society of America, 1964, 36, 111–120.
- [17] Samsonov A. M., Strain solitons in solids and how to construct them, Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2001.
- [18] Porubov A. V., Amplification of nonlinear strain waves in solids, Singapore: World Scientific, 2003.
- [19] Nariboli G. A., Sedov A., Burgers-Korteweg de Vries equation for viscoelastic rods and plates, J. Math. Anal. Appl., 1970, 32 (3), 661–677.
- [20] Ostrovsky L. A., Sutin A. M., Nonlinear elastic waves in rods, PMM, 1977, 41, 531–537.
- [21] Love A. E. H., A treatise on the mathematical theory of elasticity, London: Cambridge University Press, 1927.
- [22] Samsonov A. M., Structural optimization in nonlinear wave propagation problems. In: *Structural Optimization under Dynamical Loading. Seminar and Workshop for Junior Scientists*, U. Lepik ed., Tartu University Press, 75–76 (1982).
- [23] Samsonov A. M., Soliton evolution in a rod with variable cross section, *Sov. Physics - Doklady* 29 (1984) 586–587.
- [24] Samsonov A. M., Porubov A. V., Refinement of the model for the propagation of longitudinal strain waves in a rod with nonlinear elasticity, *Tech. Phys. Lett.* 19(6) (1993) 365–366.
- [25] Porubov A. V., M. G. Velarde, Dispersive - dissipative solitons in nonlinear solids, *Wave Motion* 31(3) (2000) 197–207.
- [26] V. I. Erofeev, V. V. Kazhaev, N. P. Semerikova, *Waves in rods: dispersion, dissipation, nonlinearity*, Fizmatlit, Moscow, 2002 (in Russian).
- [27] Dai H.-H., Fan X., Asymptotically approximate model equations for weakly nonlinear long waves in compressible elastic rods and their comparisons with other simplified model equations, *Maths. Mech. Solids* 9 (2004) 61–79.

- [28] Dai H.-H., and Z. Cai, Uniform asymptotic analysis for transient waves in a pre-stressed compressible hyperelastic rod, *Acta Mechanica* 139 (2000) 201-230.
- [29] Khusnutdinova K. R., Samsonov A. M., A.S. Zakharov, Nonlinear layered lattice model and generalized solitary waves in imperfectly bonded structures, *Phys. Rev. E* 79(5) (2009) 056606.
- [30] Khusnutdinova K. R., Samsonov A. M., Fission of a longitudinal strain solitary wave in a delaminated bar, *Phys. Rev. E* 77 (2008) 066603.
- [31] Khusnutdinova K. R., Tranter M. R., Modelling of nonlinear wave scattering in a delaminated elastic bar, *Proc. R. Soc. A* 471 (2015) 20150584.
- [32] Khusnutdinova K. R., Tranter M. R., On radiating solitary waves in bi-layers with delamination and coupled Ostrovsky equations, *Chaos* 27 (2017) 013112.
- [33] Dreiden G. V., Khusnutdinova K. R., Samsonov A. M., and Semenova I. V., Splitting induced generation of soliton trains in layered waveguides, *J. Appl. Phys.* 107 (2010) 034909.
- [34] Dreiden G. V., Khusnutdinova K. R., Samsonov A. M., and Semenova I. V., Bulk strain solitary waves in bonded layered polymeric bars with delamination, *J. Appl. Phys.* 112 (2012) 063516.
- [35] Garbuzov F. E., Khusnutdinova K. R., Semenova I. V., On Boussinesq-type models for long longitudinal waves in elastic rods, *Wave Motion*, 2019, 88 129–143.
- [36] Boström A., On wave equations for elastic rods, *ZAMM*, 2000, 80 (4), 245–251.
- [37] Hughes D. S., Kelly J. L., Second order elastic deformation of solids, *Phys. Rev.*, 1953, 92, 1145-1149.
- [38] Abiza Z., Destrade M., Ogden R. W., Large acoustoelastic effect, *Wave Motion*, 2012, 49, 364–374.