

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого  
Институт прикладной математики и механики

Работа допущена к защите  
Заведующий кафедрой  
«Прикладная математика»

\_\_\_\_\_ М. Е. Фролов

” \_\_\_\_ ” \_\_\_\_\_

## **ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА МАГИСТРА**

### **ПРОДОЛЬНЫЕ ВОЛНЫ ДЕФОРМАЦИИ В НЕЛИНЕЙНО УПРУГИХ ВОЛНОВОДАХ**

по направлению 01.04.02 «Прикладная математика и информатика»  
по образовательной программе 01.04.02\_01 «Математическое моделирование»

Выполнил  
студент гр. 23641/1

Ф. Е. Гарбузов

Руководитель  
проф., д.т.н.

Б. С. Григорьев

Научный консультант  
к.ф.-м.н.

Я. М. Бельтюков

Санкт-Петербург  
2019

## **РЕФЕРАТ**

ключевые слова

Сам реферат на полстранички.

## **ABSTRACT**

key words

The same in English.

# Оглавление

<b>Введение</b>	<b>5</b>
<b>1 Обзор литературы и постановка задачи</b>	<b>6</b>
1.1 Нелинейные волновые уравнения и методы их решения . . . . .	6
1.2 Нелинейная динамика твёрдого тела . . . . .	8
1.3 Нелинейные волны деформации в твёрдых упругих волноводах . . . . .	9
<b>2 Слабо нелинейные продольные волны деформации в тонких волноводах</b>	<b>12</b>
2.1 Формулировка задачи . . . . .	12
2.2 Вывод уравнения типа Буссинеска с внешним воздействием . . . . .	13
2.2.1 Вывод с помощью степенных разложений по радиусу . . . . .	13
2.2.2 Вывод с помощью асимптотического разложения . . . . .	20
2.3 Вывод уравнения типа Буссинеска с внешним воздействием в растянутом стержне . . . . .	22
2.4 Дисперсионные свойства и солитонные решения . . . . .	23
<b>3 Численное решение уравнений нелинейной теории упругости</b>	<b>27</b>
3.1 Численная схема . . . . .	27
3.1.1 Одномерное уравнение типа Буссинеска . . . . .	27
3.1.2 Полные трёхмерные уравнения . . . . .	29
3.2 Численные эксперименты . . . . .	29
3.2.1 Образование солитона из начального условия . . . . .	29
3.2.2 Образование солитона из удара по торцу стержня . . . . .	30
3.2.3 Образование солитона из бегущего по поверхности напряжения . . . . .	31
<b>4 Обработка экспериментальных данных</b>	<b>33</b>
<b>Заключение</b>	<b>34</b>

## Введение

Волнами деформации называют механические колебания, распространяющиеся в твёрдом теле. Эти волны могут возникать естественным образом в природе, например, во время землетрясений, а также искусственно возбуждаться человеком для исследования внутреннего строения твёрдых тел. Так, волны деформации, а именно, упругие волны, применяются во множестве практических задач, например, в дефектоскопии, сейсморазведке, ультразвуковом исследовании.

Для изучения упругих волн деформации важное значение имеет модель упругости тела, которая определяет связь двух величин: напряжения и деформации. Простейшая модель – закон Гука – даёт линейную зависимость возникающих напряжений от деформации тела. Существует ряд более сложных моделей, в рамках которых напряжения нелинейно связаны с деформацией. Волны, возникающие в линейно упругих материалах, в настоящее время хорошо исследованы, в то время как изучение волн в нелинейно упругих телах является актуальной научной задачей.

Изучение нелинейных волновых процессов началось ещё в XIX веке, главным образом, в связи с задачами газо- и гидродинамики. Впоследствии нелинейные волны были обнаружены и в других областях физики, например, оптике, физике плазмы, электронике. Исследования показали, что нелинейные волны, наблюдаемые в системах самой различной природы, могут быть описаны небольшим количеством одних и тех же уравнений, что дало толчок к развитию теории нелинейных волн, как отдельной науки.

Теория нелинейных волн деформации в твёрдых волноводах начала разрабатываться во второй половине XX века, когда исследователям удалось получить первые классические уравнения нелинейной теории волн для длинноволнового случая. Полученные модели позволили проанализировать свойства нелинейных волн. В частности, выяснилось, что такие волны сохраняют память о прохождении через область волновода с дефектом. В отличие от линейных волн, нелинейные волны могут распространяться на намного большие расстояния, что делает их перспективным средством в дефектоскопии.

Целью настоящей работы является изучение нелинейных продольных волн деформации средствами математического моделирования.

# Глава 1.

## Обзор литературы и постановка задачи

### 1.1. Нелинейные волновые уравнения и методы их решения

Изучение нелинейных волновых процессов является важной научной задачей, берущей начало ещё в XIX веке в связи с исследованием волн, возникающих на поверхности воды. С тех пор нелинейные волны были обнаружены во многих других физических системах, имеющих самую различную природу, а исследования в этой области ведутся и по сей день. Для описания нелинейных волновых явлений была сформирована единая теория, систематическому изложению которой посвящено множество книг, например, [1, 2]. Приведём здесь некоторые важные положения, необходимые для дальнейшего изложения.

Исследование нелинейных волн началось в связи с открытием шотландского инженера Дж. Скотта Рассела, наблюдавшего в 1834 году на поверхности канала уединённую волну, бегавшую несколько миль почти без затухания. Впоследствии Рассел неоднократно воспроизводил это явление в экспериментах и определил соотношение между глубиной канала, скоростью и амплитудой этой волны, однако первая математическая модель, описывающая уединённые волны, была получена в работе Ж. Буссинеска в 1872 году. Уравнение Буссинеска включает в себя помимо линейных волновых членов также нелинейное и дисперсионное слагаемые:

$$u_{tt} - u_{xx} - 3(u^2)_{xx} - u_{xxxx} = 0. \quad (1.1)$$

Здесь  $x$  – безразмерная пространственная переменная,  $t$  – безразмерное время,  $u$  – нормированная высота поднятия воды над уровнем невозмущённой поверхности, а нижний индекс означает частную производную по соответствующей переменной. Уравнение (1.1) имеет однопараметрическое решение в виде двух уединённых волн, бегущих в противоположных направлениях:

$$u(x, t) = A \cosh^{-2} \left[ \sqrt{\frac{A}{2}} \left( x \pm t \sqrt{1 + 2A} \right) \right], \quad (1.2)$$

где амплитуда  $A$  является свободным параметром. Для той же задачи Д. Кортевегом и Г. де Фризом в 1895 году было выведено другое уравнение:

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0, \quad (1.3)$$

которое тоже имеет решение в виде уединённой волны.

Существование решений нелинейных уравнений в виде устойчивых уединённых волн обусловлено так называемым балансом нелинейности и дисперсии. Нелинейное слагаемое, нестро-

го говоря, стремится сделать фронт волны более крутым и в конечном счёте опрокинуть его, а дисперсионное слагаемое, наоборот, стремится сделать волну более пологой. Стоит отметить, что уравнивать нелинейность может не только дисперсия, но и диссипация. Например, уравнение Бюргерса описывает простейшую нелинейную физическую систему с диссипацией:

$$u_t + uu_x = \nu u_{xx}, \quad (1.4)$$

а систему и с диссипацией и с дисперсией может описывать уравнение Бюргерса-Кортевега-де Фриза:

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = \nu u_{xx}. \quad (1.5)$$

Существует множество других классических уравнений теории нелинейных волн, например, нелинейное уравнение Шрёдингера, однако в настоящей работе они не затрагиваются. Отметим, что приведённые выше уравнения имеют множество других похожих на себя уравнений. Так, уравнением типа Буссинеска будем называть всякое уравнение вида (1.1), возможно, с другим нелинейным или дисперсионным слагаемым, например:

$$u_{tt} - u_{xx} - 3(u^3)_{xx} + u_{xxtt} = 0.$$

Важнейшие свойства уединённых волн, являющихся решением уравнения Кортевега-де Фриза (1.3), были открыты в 1965 году Н. Забужским и М. Краскалом [3]. Оказалось, что уединённые волны сталкиваются «упруго», то есть после взаимодействия полностью восстанавливают свою форму. На рисунке 1.1 изображены результаты численного эксперимента, где видно, как волна с большей амплитудой обгоняет волну с меньшей амплитудой, причём в результате столкновения уединённые волны не изменили свою форму, а лишь претерпели фазовый сдвиг. Для того, чтобы подчеркнуть «упругий» характер взаимодействия, свойственный частицам, Забужский и Краскал называли такие уединённые волны *солитонами*.

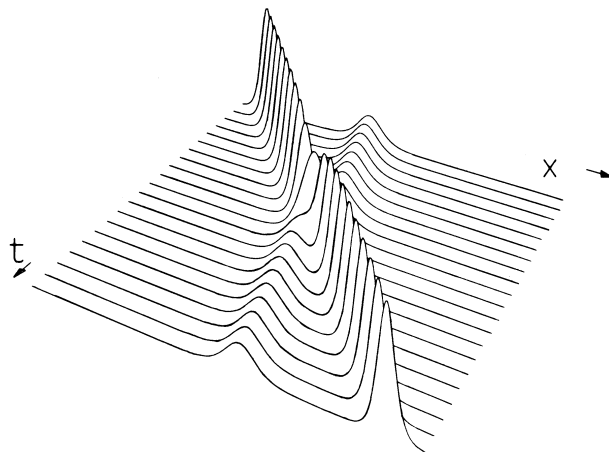


Рис. 1.1: Попутное столкновение двух солитонов (из книги Р. Додда [1]).

Работа Забужского и Краскала дала толчок к аналитическим исследованиям уравнения Кортевега-де Фриза (КдФ), которые привели к возникновению в 1967 году метода обратной задачи рассеяния (МОЗР), позволяющего получить точное аналитическое решение уравнения

по заданному начальному условию [4]. Позже этот метод был обобщён и на некоторые другие нелинейные волновые уравнения, однако лишь очень небольшое количество нелинейных систем являются полностью интегрируемыми (решаемыми с помощью МОЗР) [5].

Для численного эксперимента в работе 1965 года Забужский и Краскал использовали простейшую явную конечно-разностную схему второго порядка по временной и пространственной переменной. Впоследствии был предложен ряд других более сложных неявных конечно-разностных схем и псевдоспектральных методов, обзору которых посвящена работа [6]. Численное моделирование особенно важно для неинтегрируемых систем, к числу которых относятся, например, все уравнения типа Буссинеска, кроме (1.1). Для таких уравнений были предложены конечно-разностные схемы, в которых на каждом шаге для обработки нелинейного слагаемого проводится несколько внутренних итераций [7, 8]. Помимо метода конечных разностей к нелинейным уравнениям применяют и другие численные методы, например, конечных объёмов и конечных элементов [9, 10]. Отметим, что для численного решения уравнений, обладающих гладкими решениями, в областях простой геометрии одним из лучших методов является псевдоспектральный метод, широко применяющийся в нелинейных задачах [11].

## 1.2. Нелинейная динамика твёрдого тела

В этом разделе приведены важные для дальнейшего изложения сведения по нелинейной динамике твёрдого тела, систематическому описанию которой посвящено множество книг, например, [13].

Динамика упругой сплошной среды, занимающей объём  $\Omega$ , описывается уравнениями движения, которые в векторном виде в случае однородного тела представляются следующим образом:

$$\rho \ddot{\underline{U}}(\underline{x}, t) = \operatorname{div} \underline{\underline{P}} + \underline{F}, \quad \underline{x} \in \Omega. \quad (1.6)$$

Здесь  $\rho$  – плотность материала,  $\underline{U}(\underline{x}, t)$  – вектор перемещений,  $\underline{x}$  – координаты точки среды в отсчётной конфигурации,  $\underline{\underline{P}}$  – первый тензор напряжений Пиолы-Кирхгофа,  $\underline{F}$  – плотность массовых сил, точка обозначает взятие частной производной по времени, а дивергенция берётся по координатам в отсчётной конфигурации. Тензор напряжений  $\underline{\underline{P}}$  выражается через тензор деформации  $\underline{\underline{E}}$  следующим образом:

$$\underline{\underline{P}} = (\underline{I} + \nabla \underline{U}) \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial \underline{\underline{E}}}, \quad (1.7)$$

где  $\Pi$  – плотность энергии деформации, а тензор деформации связан с градиентом перемещения:

$$2\underline{\underline{E}} = (\nabla \underline{U})^T + \nabla \underline{U} + (\nabla \underline{U})^T \cdot \nabla \underline{U}. \quad (1.8)$$

Заметим, что в линейной теории деформация предполагается бесконечно малой и нелинейное слагаемое в (1.8) отбрасывается. Для завершения постановки задачи уравнения (1.6) – (1.8) необходимо дополнить соотношением, связывающим энергию и деформацию, а также гранич-

ными условиями:

$$\underline{U} = \underline{U}_b, \quad \underline{x} \in S_U; \quad \underline{P} \cdot \underline{n} = \underline{P}_b, \quad \underline{x} \in S_P; \quad S_U \cup S_P = \partial\Omega. \quad (1.9)$$

Энергия деформации  $\Pi$  однородного и изотропного тела может быть разложена в ряд по инвариантам  $I_i$  тензора деформации:

$$\Pi = \frac{\lambda + 2\mu}{2} I_1(\underline{E})^2 - 2\mu I_2(\underline{E}) + \frac{l + 2m}{3} I_1(\underline{E})^3 - 2m I_1(\underline{E}) I_2(\underline{E}) + n I_3(\underline{E}) + \dots, \quad (1.10)$$

при этом коэффициенты в этом разложении характеризуют упругость материала и называются модулями упругости ( $\lambda$  и  $\mu$  – коэффициенты Ламе, а  $l$ ,  $m$ ,  $n$  – модули Мурнагана). Заметим, что первые два слагаемых в приведённом разложении являются слагаемыми второго порядка относительно компонент тензора  $\underline{E}$ , а следующие три – третьего порядка. В разложении (1.10) для линейно упругого материала удерживаются только слагаемые второго порядка, а для слабо нелинейного материала Мурнагана [14] учитываются ещё и слагаемые третьего порядка. Существуют другие нелинейно упругие материалы, например, материал Муни-Ривлина или Огдена, однако они предназначены в первую очередь для описания резиноподобных материалов, подверженных большим деформациям [15]. Отметим, что нелинейно упругие материалы иногда называют гиперупругими.

Помимо классической постановки задачи в виде дифференциальных уравнений в частных производных (1.6), (1.9), существует вариационная постановка на основе принципа Гамильтона, гласящего, что истинная траектория системы  $\underline{U}$  является стационарной точкой функционала действия  $\mathcal{S}$ :

$$\delta\mathcal{S} = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} \rho \dot{\underline{U}}^2 - \Pi + \underline{F} \cdot \underline{U} \right) dx + \int_{S_P} \underline{P}_b \cdot \underline{U} ds \right] = 0. \quad (1.11)$$

В (1.11) варьирование происходит по перемещениям  $\underline{U}$ . Отметим, что существует обобщённый принцип Гамильтона, где в функционал действия включаются соотношения (1.7) и (1.8), а варьирование осуществляется не только по перемещениям, но и по деформациям  $\underline{E}$  и напряжениям  $\underline{P}$  [16].

### 1.3. Нелинейные волны деформации в твёрдых упругих волноводах

Изучение нелинейных волн деформации в твёрдых телах, в том числе солитонов деформации, является важной темой современного изучения волн [17, 18]. Разработка теории началась в 1970-х годах с исследования волн в упругом стержне круглого сечения, поскольку такая геометрия волновода является наиболее простой.

Исторически первым исследованием стала работа Г. Нариболи и А. Седова, которым удалось вывести уравнение Бюргерса-Кортевега-де Фриза для длинных продольных волн в бесконечном вязкоупругом осесимметричном стержне со свободной от напряжений поверхностью [19]. Для этого уравнения нелинейной теории упругости (1.6) и граничные условия (1.9),



записанные в цилиндрической системе координат  $(x, r, \varphi)$ , были упрощены с помощью:

- предположения о малости радиуса стержня  $a \ll 1$ ,
- разложения перемещений в степенной ряд по радиусу стержня:

$$U(x, r, t) = U_0(x, t) + a^2 U_2(x, r, t) + \mathcal{O}(a^4), \quad (1.12)$$

$$V(x, r, t) = -a\nu r \frac{\partial U_0}{\partial x} + a^3 V_3(x, r, t) + \mathcal{O}(a^5), \quad (1.13)$$

где  $U$  – продольное перемещение вдоль оси стержня, совпадающей с осью  $x$ ,  $V$  – радиальное перемещение, а  $\nu$  – коэффициент Пуассона,

- предположения о малых деформациях  $U, V \sim \varepsilon \ll 1$ .

Позже Л. Островский и А. Сутин получили модель типа Буссинеска, используя принцип Гамильтона и нижеследующие гипотезы, позволившие упростить функционал действия задачи [20]:

$$U(x, r, t) = U(x, t), \quad V(x, r, t) = -\nu r \frac{\partial U}{\partial x}. \quad (1.14)$$

Первая из этих гипотез называется гипотезой плоских сечений и означает, что поперечные сечения стержня остаются плоскими после деформации, а вторая гипотеза аналогична гипотезе Кирхгофа-Лява в теории тонких пластин и оболочек [21]. А. М. Самсонов, используя подход Островского и Сутина, предложил модель типа Буссинеска с двумя дисперсионными слагаемыми и обобщил её на случай с меняющимися вдоль оси стержня радиусом и модулями упругости [22, 23]. Коэффициенты модели Самсонова с двумя типами дисперсионных членов были позже уточнены в работах А. М. Самсонова и А. В. Порубова [24]. А. В. Порубовым и М. Велларде предложена дисперсионно-диссипативная модель для длинных волн в упругом стержне, помещённом в вязкоупругую среду [25]. Модель типа Буссинеска с тремя типами дисперсионных членов обсуждалась В. И. Ерофеевым, однако коэффициент при нелинейном слагаемом в его модели отличается от соответствующего коэффициента у Островского и Самсонова [26]. Все выводы моделей типа Буссинеска в упомянутых исследованиях основывались на представлении Мурнагана для энергии упругой деформации и последующем упрощении полного функционала действия задачи с использованием некоторых гипотез.

Несколько другой подход к задаче применён в работе Х. Дая и Х. Фана, которым удалось упростить полные уравнения движения с граничными условиями в виде свободной от напряжений поверхности стержня, сведя их к системе из двух связанных уравнений [27]. Для этого была введена система масштабов для переменных и функций так, что масштаб перемещений  $h$  и радиус стержня  $a$  предполагались малыми по сравнению с характерной длиной волны  $l$ :  $\varepsilon = h/l \ll 1$ ,  $\delta = a^2/l^2 \ll 1$ . Полные уравнения были упрощены при помощи разложения перемещений в степенной ряд по радиальной координате и отбрасывания членов порядка  $\mathcal{O}(\varepsilon^2, \varepsilon\delta, \delta^2)$ . В другой работе Х. Дай и З. Цай применили аналогичный асимптотический вывод для описания волн в предварительно растянутом гиперупругом стержне, сделанном из материала Муни-Ривлина [28].

Во всех приведённых выше работах твёрдое тело считалось непрерывным. Однако по-

мимо непрерывной модели существует решётчатая (дискретная) модель, согласно которой твёрдое тело представляется в виде системы частиц некоторой массы, соединённых пружинами. В рамках такой модели К. Р. Хуснутдинова и др., предполагая пружины нелинейно упругими, получили систему разностно-дифференциальных уравнений, которая в континуальном пределе сводится к уравнению типа Буссинеска [29]. Заметим, что уравнение модели было получено из полных уравнений движения с помощью асимптотических методов без использования упрощающих гипотез. Интересно, что в этом исследовании была выведена модель типа Буссинеска с тремя дисперсионными слагаемыми, а также система связанных уравнений типа Буссинеска для волн в слоистом волноводе с неидеальным контактом. В недавних исследованиях модели типа Буссинеска использовались для изучения распространения длинных продольных уединённых волн деформации в волноводе с расслоением [30, 31, 32], а некоторые соответствующие экспериментальные наблюдения были опубликованы в [33, 34].

Целью настоящей работы является исследование длинных продольных слабонелинейных волн деформации в круглом бесконечном стержне методами асимптотического анализа и численного моделирования. Исследователи, занимавшиеся этой задачей ранее, полагали боковую поверхность стержня свободной от напряжений, поэтому научный интерес представляет обобщение вывода модели типа Буссинеска на случай, когда имеется ненулевая осесимметричная нагрузка на боковой поверхности, а также продольное предварительное растяжение стержня. Большое значение имеет построение численной схемы решения полных нелинейных уравнений динамики упругого стержня, поскольку она может служить средством для верификации упрощённых моделей и более детального исследования нелинейных волн.

Вывод моделей в настоящей работе выполнен с помощью пакета символьных вычислений Mathematica, а результаты работы частично опубликованы автором в сотрудничестве с К. Р. Хуснутдиновой и И. В. Семёновой [35].

## Глава 2.

# Слабо нелинейные продольные волны деформации в тонких волноводах

### 2.1. Формулировка задачи

Рассмотрим стержень круглого поперечного сечения радиуса  $R$ . Введём цилиндрическую систему координат  $(x, r, \varphi)$ , где  $x$  – осевая координата,  $r$  – продольная,  $\varphi$  – угловая, как показано на рисунке 2.1. Будем использовать Лагранжев подход и введём вектор перемещения  $\underline{U} = (U, V, W)$ , где  $U$  – осевое (продольное) перемещение,  $V$  – радиальное (поперечное) перемещение, а  $W$  – вращение.

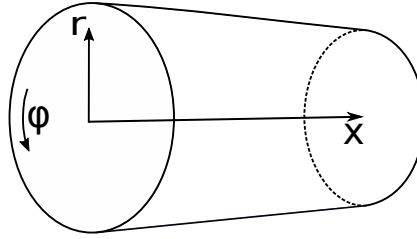


Рис. 2.1: Стержень с круглым поперечным сечением.

Следуя предыдущим исследованиям, которые обсуждались в главе 1, будем рассматривать стержень, сделанный из материала Мурнагана, энергия упругой деформации которого представляется в виде:

$$\Pi = \frac{\lambda + 2\mu}{2} I_1(\underline{E})^2 - 2\mu I_2(\underline{E}) + \frac{l + 2m}{3} I_1(\underline{E})^3 - 2m I_1(\underline{E}) I_2(\underline{E}) + n I_3(\underline{E}), \quad (2.1)$$

где  $I_1(\underline{E}) = \text{tr } \underline{E}$ ,  $I_2(\underline{E}) = [(\text{tr } \underline{E})^2 - \text{tr } \underline{E}^2] / 2$ ,  $I_3(\underline{E}) = \text{tr } \underline{E}$  являются инвариантами тензора деформации Грина  $\underline{E} = ((\nabla \underline{U})^T + \nabla \underline{U} + (\nabla \underline{U})^T \cdot \nabla \underline{U}) / 2$ ,  $\lambda, \mu$  – коэффициенты Ламе,  $l, m, n$  – модули Мурнагана. Здесь и далее в тексте работы все частные производные берутся по координатам в отсчётной конфигурации. Отметим, что модель Мурнагана используется здесь потому, что она является общей моделью слабо нелинейных упругих деформаций.

Рассмотрим задачу, в которой отсутствует кручение стержня, а продольное и поперечное перемещения  $U$  и  $V$  не зависят от угла  $\varphi$ :

$$U = U(x, r, t), \quad V = V(x, r, t), \quad W = 0. \quad (2.2)$$

Уравнения движения, в условиях (2.2) и отсутствия массовых сил, принимают вид

$$\rho \frac{\partial^2 U(x, r, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial P_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial P_{xr}}{\partial r} - \frac{P_{xr}}{r} = 0, \quad (2.3)$$

$$\rho \frac{\partial^2 V(x, r, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial P_{rx}}{\partial x} - \frac{\partial P_{rr}}{\partial r} - \frac{P_{rr} - P_{\varphi\varphi}}{r} = 0, \quad (2.4)$$

а третье уравнение представляется в виде тождества  $0 \equiv 0$ . Здесь  $P_{\alpha\beta}$  обозначает компоненту первого тензора Пиолы-Кирхгофа, а  $\rho$  – плотность материала.

Зададим на поверхности стержня осесимметричное напряжение  $\underline{P}_b = (P(x, t), T(x, t), 0)$ . Тогда граничные условия имеют вид:

$$P_{rr} = P(x, t) \quad \text{при} \quad r = R, \quad (2.5)$$

$$P_{xr} = T(x, t) \quad \text{при} \quad r = R. \quad (2.6)$$

Поскольку компонента  $P_{\varphi r} \equiv 0$ , третье граничное условие  $P_{\varphi r} = 0$  при  $r = R$  выполняется автоматически.

## 2.2. Вывод уравнения типа Буссинеска с внешним воздействием

### 2.2.1. Вывод с помощью степенных разложений по радиусу

Подход к выводу уравнения модели в этом разделе опирается на метод, описанный в [27]. Упростим этот метод с помощью разложений, использованных для вывода линейной модели [36]. Таким образом, будем искать решение в виде степенного ряда по радиальной координате:

$$U(x, r, t) = U_0(x, t) + r^2 U_2(x, t) + r^4 U_4(x, t) + \dots, \quad (2.7)$$

$$V(x, r, t) = r V_1(x, t) + r^3 V_3(x, t) + r^5 V_5(x, t) + \dots. \quad (2.8)$$

Отметим, что продольное перемещение разложено в ряд по чётным степеням радиуса, в то время как поперечное перемещение по нечётным. В линейной задаче такие разложения приняты потому, что, если учесть все степени в разложении, то уравнения движения (2.3), (2.4) разобьются на две независимые системы уравнений. В первую систему войдут слагаемые  $U_{2k}$  и  $V_{2k+1}$ , а во вторую  $U_{2k+1}$  и  $V_{2k}$  ( $k \geq 0$ ). Для продольных волн в осесимметричном стержне должны выполняться очевидные условия:

$$\frac{\partial U}{\partial r} = 0, \quad V = 0 \quad \text{при} \quad r = 0, \quad (2.9)$$

из которых следует, что  $U_1 = V_0 = 0$ . В линейной задаче равенство нулю этих двух слагаемых достаточно, для того, чтобы все слагаемые  $U_{2k+1}$  и  $V_{2k}$  были равны нулю. Для нелинейной задачи тоже можно показать справедливость этого утверждения, однако, чтобы не слишком усложнять вывод, примем эти разложения в качестве допущения. Кроме того, в отличие от [27], мы сведём задачу к одному уравнению типа Буссинеска, учтём ненулевое осесимметричное напря-

жение, приложенное к поверхности стержня, а также рассмотрим предварительно растянутый стержень.

Введём масштабные множители, выделяющие среди прочих задачу о распространении длинных по сравнению с радиусом стержня волн малой амплитуды. Тогда безразмерные переменные и функции определяются следующими выражениями:

$$\tilde{t} = \frac{t}{L/c}, \quad \tilde{x} = \frac{x}{L}, \quad \tilde{r} = \frac{r}{L}, \quad \tilde{U} = \frac{U}{\varepsilon L}, \quad \tilde{V} = \frac{V}{\varepsilon L}, \quad \tilde{P} = \frac{P}{E\varepsilon}, \quad \tilde{T} = \frac{T}{E\varepsilon\delta}, \quad (2.10)$$

из которых следует, что  $\tilde{U}_n = \frac{L^n U_n}{\varepsilon L}$ ,  $\tilde{V}_n = \frac{L^n V_n}{\varepsilon L}$  для  $n \geq 0$ . Здесь  $L$  является характерной длиной волны,  $c$  – скорость линейной волны,  $E$  – модуль Юнга,  $\varepsilon \ll 1$  – малый параметр амплитуды,  $\delta = \frac{R}{L} \ll 1$  – второй малый параметр, а тильда обозначает безразмерную величину. Вспомним, что модуль Юнга и коэффициент Пуассона выражаются через коэффициенты Ламе:

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}. \quad (2.11)$$

С учётом (2.10) разложения (2.7), (2.8) представляются в виде:

$$\tilde{U}(\tilde{x}, \tilde{r}, \tilde{t}) = \tilde{U}_0(\tilde{x}, \tilde{t}) + \tilde{r}^2 \tilde{U}_2(\tilde{x}, \tilde{t}) + \tilde{r}^4 \tilde{U}_4(\tilde{x}, \tilde{t}) + O(\tilde{r}^6), \quad (2.12)$$

$$\tilde{V}(\tilde{x}, \tilde{r}, \tilde{t}) = \tilde{r} \tilde{V}_1(\tilde{x}, \tilde{t}) + \tilde{r}^3 \tilde{V}_3(\tilde{x}, \tilde{t}) + \tilde{r}^5 \tilde{V}_5(\tilde{x}, \tilde{t}) + O(\tilde{r}^7). \quad (2.13)$$

Радиальная координата  $\tilde{r}$  точек стержня принимает значения от 0 до  $\delta$  и, следовательно, является малой величиной. В дальнейшем мы опустим тильду над безразмерными величинами.

Подставляя (2.12) и (2.13) в уравнения движения (2.3), (2.4), получаем

$$\begin{aligned} \rho c^2 U_{0tt} - (\lambda + 2\mu) U_{0xx} - 2(\lambda + \mu) V_{1x} - 4\mu U_2 + \Phi_1(U_0, V_1, U_2)\varepsilon \\ + [\rho c^2 U_{2tt} - (\lambda + 2\mu) U_{2xx} - 4(\lambda + \mu) V_{3x} - 16\mu U_4] r^2 + O(\varepsilon^2, \varepsilon r^2, r^4) = 0, \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} r(\rho c^2 V_{1tt} - \mu V_{1xx} - 2(\lambda + \mu) U_{2x} - 8(\lambda + 2\mu) V_3 - \Phi_2(U_0, V_1, U_2, V_3)\varepsilon \\ - [\rho c^2 V_{3tt} - \mu V_{3xx} - 4(\lambda + \mu) U_{4x} - 24(\lambda + 2\mu) V_5] r^2 + O(\varepsilon^2, \varepsilon r^2, r^4)) = 0, \end{aligned} \quad (2.15)$$

где индексы  $x$  и  $t$  обозначают частные производные по соответствующим переменным, а выражения для нелинейных функций  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  приведены в Приложении 1. Функции  $U_2$ ,  $V_3$ ,  $U_4$  могут быть получены из (2.14) и (2.15), приравнявая к нулю коэффициенты при различных степенях  $r$ :

$$U_2 = \frac{1}{4\mu} [\rho c^2 U_{0tt} - (\lambda + 2\mu) U_{0xx} - 2(\lambda + \mu) V_{1x}] + \varepsilon f_2(x, t) + O(\varepsilon^2), \quad (2.16)$$

$$V_3 = \frac{1}{8(\lambda + 2\mu)} [\rho c^2 V_{1tt} - 2(\lambda + \mu) U_{2x} - \mu V_{1xx}] + \varepsilon f_3(x, t) + O(\varepsilon^2), \quad (2.17)$$

$$U_4 = \frac{1}{16\mu} [\rho c^2 U_{2tt} - (\lambda + 2\mu) U_{2xx} - 4(\lambda + \mu) V_{3x}] + O(\varepsilon). \quad (2.18)$$

Выражения для функций  $f_2$  и  $f_3$  очень громоздки и поэтому не приводятся здесь.

Затем, подставляя функции  $U_2$ ,  $V_3$ ,  $U_4$  в граничные условия (2.5), (2.6), которые в безраз-

мерном виде должны выполняться при  $r = \delta$ , получаем уравнения:

$$2(\lambda + \mu)V_1 + \lambda U_{0x} + \varepsilon \Psi_1(U_0, V_1) + \frac{\delta^2}{8} \left[ (\lambda + 3\mu)U_{0xxx} - \frac{\rho c^2(\lambda + 3\mu)}{\lambda + 2\mu} U_{0xtt} + \frac{2\rho c^2(2\lambda + 3\mu)}{\lambda + 2\mu} V_{1tt} + 2\lambda V_{1xx} \right] + O(\varepsilon^2, \varepsilon\delta^2, \delta^4) = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} P, \quad (2.19)$$

$$\rho c^2 U_{0tt} - 2\lambda V_{1x} - (\lambda + 2\mu)U_{0xx} - \varepsilon \Psi_2(U_0, V_1) + \frac{\delta^2}{8} \left[ (3\lambda + 4\mu)U_{0xxxx} + \frac{\rho^2 c^4}{\mu} U_{0tttt} - \frac{\rho c^2(\lambda^2 + 7\lambda\mu + 8\mu^2)}{\mu(\lambda + 2\mu)} U_{0xxtt} + 2(3\lambda + 2\mu)V_{1xxx} - \frac{2\rho c^2(\lambda^2 + 4\lambda\mu + 2\mu^2)}{\mu(\lambda + 2\mu)} V_{1xtt} \right] + O(\varepsilon^2, \varepsilon\delta^2, \delta^4) = \frac{2\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} T, \quad (2.20)$$

где нелинейные члены выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= (4l + 2m + 3\lambda + 3\mu)V_1^2 + (4l - 2m + n + \lambda)U_{0x}V_1 + \frac{1}{2}(2l + \lambda)U_{0x}^2, \\ \Psi_2 &= \left( (4l - 2m + n + \lambda)V_1^2 + 2(2l + \lambda)U_{0x}V_1 + \frac{1}{2}(2l + 4m + 3\lambda + 6\mu)U_{0x}^2 \right)_x. \end{aligned}$$

Отметим, что при  $\varepsilon = 0$  уравнения (2.19) и (2.20) сводятся к уравнениям, полученным в линейной задаче [36]. Эта система связанных уравнений представляет собой довольно сложную модель, однако она может быть сведена к одному уравнению типа Буссинеска.

Существует два естественных способа вывода модели типа Буссинеска. В первом способе исключение функции  $V_1$  из уравнений (2.19) и (2.20) осуществляется с помощью асимптотического выражения, следующего из уравнения (2.19):

$$V_1(x, t) = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)P - \lambda(\lambda + \mu)U_{0x}}{2(\lambda + \mu)^2} + \varepsilon f(x, t) + \delta^2 g(x, t) + O(\varepsilon^2, \varepsilon\delta^2, \delta^4), \quad (2.21)$$

где неизвестные функции  $f$  и  $g$  могут быть найдены из условия равенства нулю коэффициентов при  $\varepsilon$  и  $\delta^2$  в (2.19). Затем, подстановка  $V_1$  в (2.20) приводит к следующему уравнению типа Буссинеска относительно  $U_0$ :

$$\begin{aligned} \rho c^2 U_{0tt} - \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \left( U_{0xx} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} P_x + 2T \right) - \varepsilon (\gamma_1 U_{0x}^2 + \gamma_2 U_x P + \gamma_3 P^2)_x \\ + \delta^2 \left[ \frac{\rho^2 c^4 U_{0tttt}}{8\mu} + \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)^2 U_{0xxxx}}{8(\lambda + \mu)^2} - \frac{\rho c^2 (7\lambda^2 + 10\lambda\mu + 4\mu^2) U_{0xxtt}}{8(\lambda + \mu)^2} + F \right] \\ + O(\varepsilon^2, \varepsilon\delta^2, \delta^4) = 0. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Здесь нелинейные коэффициенты  $\gamma_i$  и функция  $F$  представляются в виде:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{3n(\lambda + \mu)\lambda^2 + 2\mu[9\lambda^3 + 24\mu\lambda^2 + 21\mu^2\lambda + m(3\lambda + 2\mu)^2 + 2\mu^2(l + 3\mu)]}{4(\lambda + \mu)^3}, \\ \gamma_2 &= \frac{[3\lambda^3 + 5\lambda^2\mu + 2\lambda\mu^2 + 4l\mu^2 + 2\lambda m(3\lambda + 2\mu) - 2\lambda n(\lambda + \mu)]\mu(3\lambda + 2\mu)}{2(\lambda + \mu)^4}, \end{aligned}$$

$$\gamma_3 = \frac{[n(\lambda + \mu) - 2(\lambda^2 + \lambda\mu - 2l\mu) - 2m(2\lambda + \mu)]\mu^2(3\lambda + 2\mu)^2}{4(\lambda + \mu)^5},$$

$$F = \frac{3\lambda + 2\mu}{8\mu(\lambda + \mu)^3} [\mu(4\lambda^2 + 5\lambda\mu + 2\mu^2)P_{xxx} - \rho c^2(\lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2)P_{xtt}].$$

Другой метод основан на исключении  $V_1$  из (2.19) и (2.20) таким образом, каким это сделано в [36] для линейной задачи. В линейном случае этот подход не использует асимптотическое выражение (2.21) и приводит к уравнению того же типа, что и (2.22), но с другими коэффициентами при дисперсионных слагаемых. Действительно, уравнения (2.19) и (2.20) могут быть записаны в виде:

$$L_1 V_1 + \varepsilon N_1(U_0, V_1, \dots) = M_1(U_0, P, \dots) + O(\varepsilon^2, \varepsilon\delta^2, \delta^4), \quad (2.23)$$

$$L_2 V_1 + \varepsilon N_2(U_0, V_1, \dots) = M_2(U_0, T, \dots) + O(\varepsilon^2, \varepsilon\delta^2, \delta^4), \quad (2.24)$$

где  $L_1$  и  $L_2$  – линейные дифференциальные операторы, действующие на  $V_1$ , а  $N_1(U_0, V_1, \dots)$ ,  $M_1(U_0, P, \dots)$  и  $N_2(U_0, V_1, \dots)$ ,  $M_2(U_0, T, \dots)$  – нелинейные функции своих аргументов в уравнениях (2.19) и (2.20) соответственно. Теперь, применяя  $L_2$  к первому уравнению,  $L_1$  ко второму и вычитая одно уравнение из другого, получаем:

$$\varepsilon[L_2 N_1(U_0, V_1, \dots) - L_1 N_2(U_0, V_1, \dots)] = L_2 M_1(U_0, P, \dots) - L_1 M_2(U_0, T, \dots) + O(\varepsilon^2, \varepsilon\delta^2, \delta^4). \quad (2.25)$$

Здесь  $V_1$  исключена из линейной части уравнений точно, а не асимптотически. Чтобы исключить её из нелинейной части, воспользуемся выражением (2.21) и получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \rho c^2 U_{0tt} - \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \left( U_{0xx} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} P_x + 2T \right) - \varepsilon (\gamma_1 U_{0x}^2 + \gamma_2 U_x P + \gamma_3 P^2)_x \\ + \delta^2 \left[ \frac{\rho^2 c^4 (\lambda^2 + 5\lambda\mu + 5\mu^2) U_{0tttt}}{8\mu(\lambda + 2\mu)(\lambda + \mu)} - \frac{\rho c^2 (6\lambda^2 + 21\lambda\mu + 14\mu^2) U_{0xxtt}}{8(\lambda + 2\mu)(\lambda + \mu)} \right. \\ \left. + \frac{\mu(3\lambda + 2\mu) U_{0xxxx}}{4(\lambda + \mu)} + G \right] + O(\varepsilon^2, \varepsilon\delta^2, \delta^4) = 0, \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$G = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{8(\lambda + \mu)^2} \left[ (3\lambda + 2\mu) P_{xxx} - \frac{\rho c^2 (\lambda^2 + 4\lambda\mu + 2\mu^2)}{\mu(\lambda + 2\mu)} P_{xtt} - \frac{2\rho c^2 (2\lambda + 3\mu)}{\lambda + 2\mu} T_{tt} - 2\lambda T_{xx} \right].$$

Отметим, что в линейном приближении при  $\varepsilon = 0$  уравнение (2.26) совпадает с уравнениями, выведенными для линейной задачи в [36]. Из (2.22) и (2.26), задавая  $\varepsilon = 0$ ,  $\delta = 0$  и  $P = T = 0$ , получаем скорость линейной продольной волны в бесконечно тонком стержне:

$$c = \sqrt{\frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\rho(\lambda + \mu)}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (2.27)$$

Теперь перепишем оба выведенных уравнения типа Буссинеска (2.22) и (2.26) в унифицированной форме и выразим коэффициенты Ламе через модуль Юнга  $E$  и коэффициент

Пуассона  $\nu$ :

$$U_{0tt} - U_{0xx} - 2(\nu P_x + T) - \frac{\varepsilon}{2E} (\beta_1 U_{0x}^2 + 2\beta_2 U_{0x} P + \beta_3 P^2)_x + \delta^2 \left( \alpha_1^{(i)} U_{0tttt} + \alpha_2^{(i)} U_{0xxtt} + \alpha_3^{(i)} U_{0xxxx} + F^{(i)} \right) + O(\varepsilon^2, \varepsilon\delta^2, \delta^4) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (2.28)$$

где

$$\alpha_1^{(1)} = \alpha_3^{(1)} = \frac{1 + \nu}{4}, \quad \alpha_2^{(1)} = -\frac{1 + \nu + \nu^2}{2}, \quad (2.29)$$

$$\alpha_1^{(2)} = \frac{5 - 5\nu - 6\nu^2 + 4\nu^3}{8(1 - \nu)}, \quad \alpha_2^{(2)} = -\frac{7 - 7\nu - 2\nu^2}{8(1 - \nu)}, \quad \alpha_3^{(2)} = \frac{1}{4}, \quad (2.30)$$

$$\beta_1 = 3E + 2l(1 - 2\nu)^3 + 4m(1 + \nu)^2(1 - 2\nu) + 6n\nu^2, \quad (2.31)$$

$$\beta_2 = 2(1 + \nu) [2l(1 - 2\nu)^3 + \nu(E + 4m(1 - \nu - 2\nu^2) - 2n(1 - 2\nu))], \quad (2.32)$$

$$\beta_3 = 2(1 + \nu)(1 - 2\nu) [(1 + \nu)(1 - 2\nu)[4l(1 - 2\nu) - 2m(1 + 2\nu) + n] - 2\nu E] \quad (2.33)$$

$$F^{(1)} = \frac{1}{4} [(1 + \nu + 2\nu^2)P_{xxx} - (1 - \nu + 2\nu^2 + 4\nu^3)P_{xtt}], \quad (2.34)$$

$$F^{(2)} = \frac{1}{4} \left[ (1 + \nu)P_{xxx} - \frac{1 + \nu - 2\nu^2 - 2\nu^3}{1 - \nu} P_{xtt} - \frac{3 - 5\nu - 4\nu^2 + 4\nu^3}{2(1 - \nu)} T_{tt} - 2\nu T_{xx} \right]. \quad (2.35)$$

Дифференцируя (2.28) по  $x$ , получаем два уравнения для продольной «деформации»  $u = U_{0x}$ :

$$u_{tt} - u_{xx} - 2(\nu P_{xx} + T_x) - \frac{\varepsilon}{2E} (\beta_1 u^2 + 2\beta_2 u P + \beta_3 P^2)_{xx} + \delta^2 \left( \alpha_1^{(i)} u_{tttt} + \alpha_2^{(i)} u_{xxtt} + \alpha_3^{(i)} u_{xxxx} + F_x^{(i)} \right) + O(\varepsilon^2, \varepsilon\delta^2, \delta^4) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (2.36)$$

Три различных асимптотических модели следует из уравнений (2.36) в зависимости от соотношения между двумя малыми параметрами  $\varepsilon$  и  $\delta$ . Во-первых, если нелинейность сильно слабее дисперсии, т.е.  $\varepsilon \ll \delta^2 \ll 1$ , мы можем асимптотически свести (2.36) к линейным уравнениям:

$$u_{tt} - u_{xx} - 2(\nu P_{xx} + T_x) + \delta^2 \left( \alpha_1^{(i)} u_{tttt} + \alpha_2^{(i)} u_{xxtt} + \alpha_3^{(i)} u_{xxxx} + F_x^{(i)} \right) + O(\delta^4) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (2.37)$$

из которых следует, что эволюция волн будет происходить главным образом под влиянием дисперсии. Во-вторых, если нелинейность намного сильнее дисперсии, т.е.  $\delta^2 \ll \varepsilon \ll 1$ , мы получаем уравнение

$$u_{tt} - u_{xx} - 2(\nu P_{xx} + T_x) - \frac{\varepsilon}{2E} (\beta_1 u^2 + 2\beta_2 u P + \beta_3 P^2)_{xx} + O(\varepsilon^2) = 0, \quad (2.38)$$

означающее, что эволюция волн определяется нелинейностью. Наконец, если нелинейное и дисперсионные слагаемые уравновешивают друг друга, т.е.  $\varepsilon \sim \delta^2$ , мы получаем «модель мак-



симального баланса» (“maximal balance model” согласно терминологии, используемой в [2]):

$$u_{tt} - u_{xx} - 2(\nu P_{xx} + T_x) - \varepsilon \left[ \frac{1}{2E} (\beta_1 u^2 + 2\beta_2 uP + \beta_3 P^2)_{xx} - \frac{\delta^2}{\varepsilon} \left( \alpha_1^{(i)} u_{tttt} + \alpha_2^{(i)} u_{xxtt} + \alpha_3^{(i)} u_{xxxx} + F_x^{(i)} \right) \right] + O(\varepsilon^2) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (2.39)$$

Последняя асимптотическая модель (2.39) (обе её версии  $i = 1, 2$ ) является уравнением типа Буссинеска. Хорошо известно, что такие уравнения имеют решения в виде солитонов сжатия [17].

Отбросим члены порядка  $O(\varepsilon^2)$  в уравнениях (2.39) и запишем их в размерном виде, не меняя обозначения для размерных переменных:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} - \frac{2}{\rho} \left( \nu P_{xx} + \frac{1}{R} T_x \right) - \left( \frac{\beta_1}{2\rho} u^2 + \frac{\beta_2}{\rho E} uP + \frac{\beta_3}{2\rho E^2} P^2 \right)_{xx} + R^2 \left( \frac{\alpha_1^{(i)}}{c^2} u_{tttt} + \alpha_2^{(i)} u_{xxtt} + c^2 \alpha_3^{(i)} u_{xxxx} + G^{(i)} \right) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (2.40)$$

где  $c^2 = E/\rho$ , а размерные функции  $G^{(i)}$  представляются в виде:

$$G^{(1)} = \frac{1 + \nu + 2\nu^2}{4\rho} P_{xxxx} - \frac{1 - \nu + 2\nu^2 + 4\nu^3}{4E} P_{xxtt}, \quad (2.41)$$

$$G^{(2)} = \frac{1 + \nu}{4\rho} P_{xxxx} - \frac{1 + \nu - 2\nu^2 - 2\nu^3}{4E(1 - \nu)} P_{xxtt} - \frac{3 - 5\nu - 4\nu^2 + 4\nu^3}{8ER(1 - \nu)} T_{xtt} - \frac{\nu}{2\rho R} T_{xxx}. \quad (2.42)$$

Уравнения (2.39) были выведены для случая сильных поверхностных напряжений, когда соответствующие слагаемые находятся в ведущем порядке по малому параметру  $\varepsilon$ . Если напряжения сравнительно невелики:

$$P = \varepsilon \hat{P}, \quad T = \varepsilon \hat{T},$$

тогда уравнения (2.39) асимптотически сводятся к

$$u_{tt} - u_{xx} - \varepsilon \left[ 2 \left( \nu \hat{P}_{xx} + \hat{T}_x \right) + \frac{1}{2E} (\beta_1 u^2)_{xx} + \frac{\delta^2}{\varepsilon} \left( \alpha_1^{(i)} u_{tttt} + \alpha_2^{(i)} u_{xxtt} + \alpha_3^{(i)} u_{xxxx} \right) \right] + O(\varepsilon^2) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (2.43)$$

а в размерном виде эти уравнения записываются следующим образом:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} - \frac{2}{\rho} \left( \nu P_{xx} + \frac{1}{R} T_x \right) - \left( \frac{\beta_1}{2\rho} u^2 \right)_{xx} + R^2 \left( \frac{\alpha_1^{(i)}}{c^2} u_{tttt} + \alpha_2^{(i)} u_{xxtt} + c^2 \alpha_3^{(i)} u_{xxxx} \right) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (2.44)$$

Отметим, что в случае условия свободной поверхности, т.е.  $P = T = 0$ , уравнения (2.40)

и (2.44) сводятся к

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = \frac{\beta_1}{2\rho} (u^2)_{xx} - R^2 \left( \frac{\alpha_1^{(i)}}{c^2} u_{tttt} + \alpha_2^{(i)} u_{xxtt} + c^2 \alpha_3^{(i)} u_{xxxx} \right), \quad i = 1, 2. \quad (2.45)$$

Сравним оба уравнения (2.45) с «уравнением с двумя дисперсиями», полученным Самсоновым и Порубовым [24]:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = \frac{\beta_1}{2\rho} (u^2)_{xx} - \frac{\nu(1-\nu)R^2}{2} u_{xxtt} + \frac{\nu c^2 R^2}{2} u_{xxxx}, \quad (2.46)$$

и уравнением, выведенным Островским и Сутиным [20]:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = \frac{\beta_1}{2\rho} (u^2)_{xx} + \frac{\nu^2 R^2}{2} u_{xxtt}. \quad (2.47)$$

Все четыре модели имеют одинаковое нелинейное слагаемое, однако дисперсионные слагаемые отличаются. Уравнения (2.46) и (2.47) могут быть записаны в форме уравнений (2.45) с помощью следующих дисперсионных коэффициентов:

$$\begin{aligned} \alpha_1^{(3)} &= 0, & \alpha_2^{(3)} &= \frac{(1-\nu)\nu}{2}, & \alpha_3^{(3)} &= -\frac{\nu}{2}, \\ \alpha_1^{(4)} &= 0, & \alpha_2^{(4)} &= -\frac{\nu^2}{2}, & \alpha_3^{(4)} &= 0. \end{aligned}$$

Отметим, что все четыре приведённые выше модели не являются асимптотически точными уравнениями, т.е. в безразмерной форме они содержат как члены  $O(1)$ , так и  $O(\varepsilon)$ . Следовательно, все эти уравнения могут быть «регуляризованы» (сведены) к одному уравнению, в котором есть только одно дисперсионное слагаемое, используя отношение в главном порядке  $u_{tt} = c^2 u_{xx} + \text{<малые члены>}$ . Коэффициент при этом дисперсионном слагаемом является суммой всех дисперсионных коэффициентов и одинаков для всех четырех уравнений:

$$\alpha_1^{(i)} + \alpha_2^{(i)} + \alpha_3^{(i)} = -\frac{\nu^2}{2}, \quad i = \overline{1, 4}, \quad (2.48)$$

что означает, что эти уравнения асимптотически эквивалентны. Однако до регуляризации модели обладают различными дисперсионными свойствами, и, подобно линейным исследованиям [36], было бы интересно сравнить характеристики этих четырех нелинейных моделей с численным решением полной нелинейной задачи. **Скорректировать после описания численных экспериментов**

Поскольку модель с одним дисперсионным членом проще, чем модель с тремя дисперсионными членами, представляется целесообразным получить регуляризованную модель с внешним воздействием. Из уравнения (2.39) следует асимптотическое соотношение

$$u_{tt} = u_{xx} + 2(\nu P_{xx} + T_x) + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad (2.49)$$

с помощью которого можно выразить  $u_{tttt}$  и  $u_{xxxx}$  через  $u_{xxtt}$ . Получаемая таким образом из

(2.39,  $i = 1$ ) модель в размерной форме имеет вид:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} - \frac{2}{\rho} \left( \nu P_{xx} + \frac{1}{R} T_x \right) - \left( \frac{\beta_1}{2\rho} u^2 + \frac{\beta_2}{\rho E} uP + \frac{\beta_3}{2\rho E^2} P^2 \right)_{xx} - \frac{\nu^2 R^2}{2} u_{xxtt} + \frac{R^2}{4} \left( \frac{1-\nu}{\rho} P_{xxx} - \frac{1-3\nu+4\nu^3}{E} P_{xxtt} \right) + \frac{(1+\nu)R}{2} \left( \frac{1}{E} T_{xtt} - \frac{1}{\rho} T_{xxx} \right) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (2.50)$$

### 2.2.2. Вывод с помощью асимптотического разложения

В этом разделе предложен вывод уравнения (2.36) из полной постановки задачи (2.3) и (2.4), используя менее жёсткие предположения о форме асимптотических разложений перемещений и, следовательно, обосновывая разложения (2.7) в виде степенного ряда по радиальной переменной, использованные в предыдущем разделе.

Введём безразмерные переменные так, как это было сделано ранее в (2.10), изменив лишь масштаб радиуса:

$$\tilde{r} = \frac{r}{\delta L} \quad (2.51)$$

чтобы безразмерный радиус  $\tilde{r}$  был порядка 1, а не  $\delta$ . Как и ранее, опустим тильду над безразмерными величинами в дальнейшем изложении. Будем искать безразмерные перемещения в виде асимптотических разложений по малому параметру  $\delta$ :

$$U(x, r, t) = U_0(x, t) + U_2(x, r, t)\delta^2 + U_4(x, r, t)\delta^4 + O(\delta^6), \quad (2.52)$$

$$V(x, r, t) = V_1(x, r, t)\delta + V_3(x, r, t)\delta^3 + V_5(x, r, t)\delta^5 + O(\delta^7). \quad (2.53)$$

Здесь для краткости уже использовано предположение о том, что  $U_0$  не зависит от  $r$ , которое следует из соотношения в главном порядке по  $\delta$  в уравнении (2.3). Кроме того, здесь мы сразу опускаем нечётные степени по  $\delta$  в  $U_0$  и чётные в  $V_0$ , что может быть доказано в ходе подробного, но громоздкого вывода, который здесь приводить не будем.

Подставляя разложения (2.52) и (2.53) в уравнения движения (2.3) (2.4), получаем

$$\rho c^2 U_{0tt} - (\lambda + 2\mu) U_{0xx} - (\lambda + \mu) \left( V_{1xr} + \frac{V_{1x}}{r} \right) - \mu \left( U_{2rr} + \frac{U_{2r}}{r} \right) + \varepsilon \tilde{\Phi}_1(U_0, V_1, U_2) + \delta^2 \left[ \rho c^2 U_{2tt} - (\lambda + 2\mu) U_{2xx} - (\lambda + \mu) \left( V_{3xr} + \frac{V_{3x}}{r} \right) - \mu \left( U_{4rr} + \frac{U_{4r}}{r} \right) \right] + O(\varepsilon^2, \varepsilon \delta^2, \delta^4) = 0, \quad (2.54)$$

$$(\lambda + 2\mu) \left( \frac{V_1}{r^2} - \frac{V_{1r}}{r} - V_{1rr} \right) + \varepsilon \tilde{\Phi}_2(U_0, V_1) + \delta^2 \left[ \rho c^2 V_{1tt} - \mu V_{1xx} - (\lambda + \mu) U_{2xr} + (\lambda + 2\mu) \left( \frac{V_3}{r^2} - \frac{V_{3r}}{r} - V_{3rr} \right) \right] + O(\varepsilon^2, \varepsilon \delta^2, \delta^4) = 0, \quad (2.55)$$

где функции  $\tilde{\Phi}_1$  и  $\tilde{\Phi}_2$  включают все нелинейные члены (для краткости не приводятся здесь). Нижний индекс  $x$ ,  $r$  и  $t$ , как и раньше, обозначают частную производную по соответствующей переменной.

Граничные условия при  $r = 1$  принимают вид:

$$\lambda U_{0x} + (\lambda + 2\mu)V_{1r} + \lambda V_1 + \varepsilon \tilde{\Psi}_1(U_0, V_1, U_2, V_3) + \delta^2 [\lambda U_{2x} + (\lambda + 2\mu)V_{3r} + \lambda V_3] + O(\varepsilon^2, \varepsilon\delta^2, \delta^4) = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} P(x, t), \quad (2.56)$$

$$\mu(U_{2r} + V_{1x}) + \varepsilon \tilde{\Psi}_2(U_0, V_1, U_2, V_3) + \delta^2 \mu(U_{4r} + V_{3x}) + O(\varepsilon^2, \varepsilon\delta^2, \delta^4) = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} T(x, t). \quad (2.57)$$

Собирая коэффициенты при одинаковых степенях  $\delta$  в уравнениях (2.54) и (2.55), получаем систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений по переменной  $r$ , где все нелинейные слагаемые порядка  $n$  умножены на  $\varepsilon^{n-1}$ . Мы решаем эти уравнения с граничными условиями, следующими из (2.56) и (2.57), используя асимптотические разложения функций по  $\varepsilon$ . Покажем эту процедуру на примере функции  $V_1$ , которую представим в следующем виде:

$$V_1(x, r, t) = f(x, r, t) + \varepsilon g(x, r, t) + O(\varepsilon^2), \quad (2.58)$$

где  $f$  и  $g$  неизвестные функции. Подставляя разложение (2.58) в уравнение (2.55), получаем ОДУ относительно  $f$  в главном порядке по  $\varepsilon$ :

$$f_{rr} + \frac{f_r}{r} - \frac{f}{r^2} = 0, \quad (2.59)$$

общее решение которого имеет вид:

$$f(x, r, t) = C_1(x, t)r + \frac{C_2(x, t)}{r}. \quad (2.60)$$

Неизвестные функции  $C_1$  и  $C_2$  находятся из граничного условия, следующего из (2.56), а также из условия симметрии, согласно которому поперечное перемещение равно нулю в центре стержня:

$$(\lambda + 2\mu)f_r + \lambda f = -\lambda U_{0x} + \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} P(x, t) \quad \text{при } r = 1, \quad (2.61)$$

$$f = 0 \quad \text{при } r = 0. \quad (2.62)$$

Из (2.62) следует, что  $C_2 \equiv 0$ , а  $C_1$  находится из (2.61), что даёт итоговое выражение для  $f$ :

$$f(x, r, t) = \frac{r}{2(\lambda + \mu)} \left( \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} P - \lambda U_{0x} \right). \quad (2.63)$$

Используя (2.63), получаем уравнение относительно функции  $g$  в следующем порядке по  $\varepsilon$  с граничными условиями в виде:

$$g_{rr} + \frac{g_r}{r} - \frac{g}{r^2} = 0, \quad (2.64)$$

$$(\lambda + 2\mu)g_r + \lambda g = a_1 U_{0x}^2 + a_2 U_{0x} P + a_3 P^2 \quad \text{при } r = 1, \quad (2.65)$$

$$g = 0 \quad \text{при } r = 0. \quad (2.66)$$

Решение задачи (2.64) – (2.66) имеет форму:

$$g(x, t) = \frac{r(a_1 U_{0x}^2 + a_2 U_{0x} P + a_3 P^2)}{2(\lambda + \mu)}. \quad (2.67)$$

Функции  $U_2$ ,  $V_3$  и  $U_4$  исключаются аналогичным образом, при использовании ещё одного условия  $U_r = 0$  при  $r = 0$ . В конечном итоге получаем:

$$V_1(x, r, t) = \frac{r}{2(\lambda + \mu)} \left( \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} P - \lambda U_{0x} + \varepsilon(a_1 U_{0x}^2 + a_2 U_{0x} P + a_3 P^2) \right) + O(\varepsilon^2), \quad (2.68)$$

$$U_2(x, r, t) = \frac{r^2}{4\mu} \left( \rho c^2 U_{0tt} - 2\mu U_{0xx} - \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} P_x \right) + \varepsilon r^2 [U_{0x}(a_4 U_{0tt} + a_5 U_{0xx} + a_6 P_x) + P(a_7 U_{0tt} + a_8 U_{0xx} + a_9 P_x)] + O(\varepsilon^2), \quad (2.69)$$

$$V_3(x, r, t) = r(b_1(r)P_{tt} + b_2(r)U_{0xtt} + b_3(r)P_{xx} + b_4(r)U_{0xxx}) + O(\varepsilon), \quad (2.70)$$

$$U_4(x, r, t) = r^4 a_{10} U_{0tttt} + r^2(b_5(r)U_{0xxxx} + b_6(r)U_{0xxtt} + b_7(r)P_{xtt} + b_8(r)P_{xxx}) + O(\varepsilon). \quad (2.71)$$

Здесь функции  $b_i(r) = b_i^{(2)}r^2 + b_i^{(0)}$ , коэффициенты  $a_i$  и  $b_i^{(j)}$  зависят от упругих модулей  $\lambda, \mu, l, m, n$  и плотности  $\rho$ .

Итоговое уравнение, следующее из (2.57) после подстановки  $V_1$ ,  $U_2$ ,  $V_3$  и  $U_4$  совпадает с ранее выведенным уравнением (2.22).

### 2.3. Вывод уравнения типа Буссинеска с внешним воздействием в растянутом стержне

Рассмотрим распространение продольных волн в равномерно растянутом вдоль своей оси стержне. Продольное перемещение в растянутом состоянии представляется в виде:

$$U^*(x) = \kappa x, \quad (2.72)$$

где  $\kappa$  – постоянная. Обезразмерим предварительное растяжение с помощью того же масштаба, что  $U$  в (2.10):

$$\tilde{U}^* = \frac{U^*}{\varepsilon L} = \tilde{\kappa} \tilde{x}, \quad \text{где } \tilde{\kappa} = \frac{\kappa}{\varepsilon}. \quad (2.73)$$

Более того, будем предполагать, что в предварительно растянутом состоянии на стержень не действуют внешние напряжения, приложенные к его поверхности. Решая уравнения движения (2.3) и (2.4) с граничными условиями (2.5) и (2.6) при  $P = T = 0$ , записанными в безразмерном виде с помощью (2.10) и (2.73), получаем поперечное перемещение  $\tilde{V}^*$  в растянутом стержне:

$$\tilde{V}^*(\tilde{r}) = -\frac{\lambda \tilde{\kappa} \tilde{r}}{2(\lambda + \mu)} \left( 1 + \varepsilon \frac{\tilde{\kappa} (2\mu^2(\lambda + 2l) + \lambda^2(3\lambda + 6m - 2n) + \lambda\mu(5\lambda + 4m - 2n))}{4\lambda(\lambda + \mu)^2} + O(\varepsilon^2) \right). \quad (2.74)$$

Введём новые безразмерные разложения перемещений (тильды опущены):

$$U(x, r, t) = U^*(x) + U_0 + r^2 U_2 + r^4 U_4 + O(r^6), \quad (2.75)$$

$$V(x, r, t) = V^*(r) + r V_1 + r^3 V_3 + r^5 V_5 + O(r^7). \quad (2.76)$$

Следуя выводу уравнений (2.36) и используя разложения (2.75), (2.76) взамен (2.12), (2.13), получаем уравнения:

$$u_{tt} - \left(1 + \varepsilon \kappa \frac{\beta_1}{E}\right) u_{xx} - 2 \left[ \left(\nu + \varepsilon \kappa \frac{\beta_2}{2E}\right) P_{xx} + T_x \right] - \varepsilon \left( \frac{\beta_1}{2E} u^2 + \frac{\beta_2}{E} uP + \frac{\beta_3}{2E} P^2 \right)_{xx} \quad (2.77)$$

$$+ \delta^2 \left( \alpha_1^{(i)} u_{tttt} + \alpha_2^{(i)} u_{xxtt} + \alpha_3^{(i)} u_{xxxx} + F_x^{(i)} \right) + O(\varepsilon^2, \varepsilon \delta^2, \delta^4) = 0, \quad i = 1, 2,$$

где использованы обозначения, введённые в предыдущих разделах. Отметим, что здесь  $u = U_{0x}$  является возмущением относительно растянутого состояния, в то время как в уравнениях (2.36) оно обозначает возмущение относительно недеформированного состояния.

Предполагая, что нелинейные и дисперсионные слагаемые одного порядка ( $\varepsilon \sim \delta^2$ ) и отбрасывая малые члены в (2.77), получаем уравнение, которое в размерном виде представляется следующим образом:

$$u_{tt} - \left(c^2 + \kappa \frac{\beta_1}{\rho}\right) u_{xx} - \frac{2}{\rho} \left[ \left(\nu + \kappa \frac{\beta_2}{2E}\right) P_{xx} + \frac{1}{R} T_x \right] - \left( \frac{\beta_1}{2\rho} u^2 + \frac{\beta_2}{\rho E} uP + \frac{\beta_3}{2\rho E^2} P^2 \right)_{xx} \quad (2.78)$$

$$+ R^2 \left( \frac{\alpha_1^{(i)}}{c^2} u_{tttt} + \alpha_2^{(i)} u_{xxtt} + c^2 \alpha_3^{(i)} u_{xxxx} + G^{(i)} \right) = 0, \quad i = 1, 2.$$

Здесь коэффициенты  $\alpha_j^{(i)}$ ,  $\beta_j$  и функции  $G^{(i)}$  задаются формулами (2.29) – (2.33) и (2.41) – (2.42) соответственно.

Отметим, что акустоэластический эффект (изменение скорости линейной волны в растянутой среде) изучался в [37, 38]. Насколько известно автору, обе модели, описываемые уравнениями (2.78), а также их упрощённые версии (2.40) и (2.45), получены впервые.

## 2.4. Дисперсионные свойства и солитонные решения

На рисунке 2.2 представлены дисперсионные кривые четырёх упрощённых (с нулевыми напряжениями на поверхности и без предварительного растяжения) линеаризованных уравнения типа Буссинеска, приведённые в предыдущих разделах, а также нижние три ветви точного дисперсионного соотношения Похгаммера-Кри для линейной задачи. Дисперсионные соотношения этих моделей имеют вид:

$$\frac{2p}{R} (q^2 + k^2) J_1(pR) J_1(qR) - (q^2 - k^2)^2 J_0(pR) J_1(qR) - 4k^2 p q J_1(pR) J_0(qR) = 0, \quad (2.79)$$

$$\alpha_1^{(i)} \bar{\omega}^4 - \left(1 - \alpha_2^{(i)} \bar{k}^2\right) \bar{\omega}^2 + \bar{k}^2 \left(1 + \alpha_3^{(i)} \bar{k}^2\right) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (2.80)$$

$$\left(1 - \frac{(1-\nu)\nu\bar{k}^2}{2}\right)\bar{\omega}^2 - \bar{k}^2\left(1 - \frac{\nu\bar{k}^2}{2}\right) = 0, \quad (2.81)$$

$$\left(1 + \frac{\nu^2\bar{k}^2}{2}\right)\bar{\omega}^2 - \bar{k}^2 = 0, \quad (2.82)$$

для решения Похгаммера-Кри и уравнений (2.45,  $i = 1, 2$ ), (2.46) и (2.47) соответственно. Здесь  $\bar{k} = kR$ ,  $\bar{\omega} = \omega R/c$ , где  $k$  и  $\omega$  – волновое число и волновая частота соответственно,  $J_i$  – функция Бесселя первого рода, а параметры  $p$  и  $q$  выражаются следующим образом:

$$p^2 = \frac{\rho\omega^2}{\lambda + 2\mu} - k^2, \quad q^2 = \frac{\rho\omega^2}{\mu} - k^2. \quad (2.83)$$

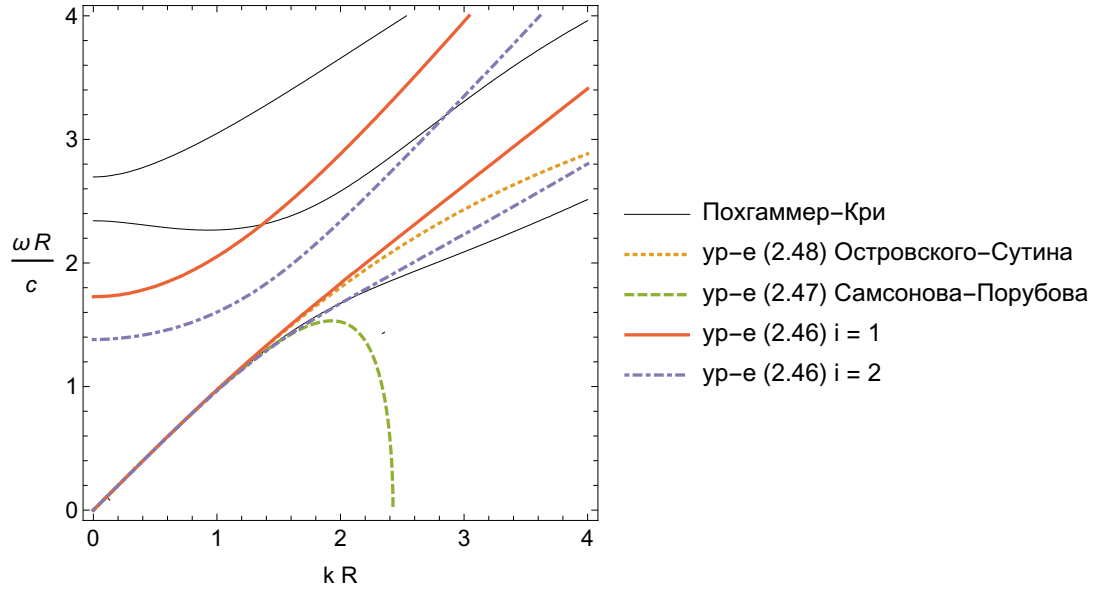


Рис. 2.2: Дисперсионные кривые для стержня с  $\nu = 0.34$ .

Все модели достаточно хорошо описывают нижнюю ветвь дисперсионной кривой в длинноволновой области. Уравнение Самсонова-Порубова (2.46) обладает коротковолновой неустойчивостью, в то время как остальные три модели не имеют такого эффекта. Отметим, что коротковолновая неустойчивость затрудняет численный счёт, поскольку высокочастотные гармоники в таком случае могут неограниченно возрастать. Полученные в настоящей работе уравнения (2.45) в отличие от других уравнений улавливают вторую ветвь дисперсионной кривой, правда описывают её очень неточно.

Отметим, что улавливание ещё одной моды колебаний в численном моделировании является скорее недостатком, чем преимуществом, поскольку к длинным продольным волнам, для изучения которых была построена модель, подмешиваются другие колебания.

Все четыре уравнения (2.45,  $i = 1, 2$ ), (2.46) и (2.47) имеют семейство солитонных решений:

$$u_i(x, t) = A \operatorname{sech}^2 \left[ B_i \left( x \pm t \sqrt{c^2 + \frac{A\beta_1}{3\rho}} \right) \right], \quad i = \overline{1, 4}, \quad (2.84)$$

где амплитуда  $A$  является свободным параметром. Для заданной амплитуды  $A$ , соответствующей

щие солитонные решения имеют одинаковую скорость, но разные параметры ширины  $B_i$ :

$$B_i = \sqrt{\frac{3A\beta_1 E}{-4 \left[ (A\beta_1 + 3E)^2 \alpha_1^{(i)} + 3E(A\beta_1 + 3E) \alpha_2^{(i)} + 9E^2 \alpha_3^{(i)} \right] R^2}}, \quad i = 1, 2, \quad (2.85)$$

$$B_3 = \sqrt{\frac{A\beta_1}{[6\nu E + 2A\beta_1(\nu - 1)] \nu R^2}}, \quad (2.86)$$

$$B_4 = \sqrt{\frac{A\beta_1}{(6E + 2A\beta_1) \nu^2 R^2}}, \quad (2.87)$$

для уравнений (2.45), (2.46) и (2.47) соответственно. Получению солитонных решений посвящено Приложение 2.

На рисунке 2.3 в левой части изображены четыре солитона, задаваемых формулами (2.84) – (2.87) и имеющих амплитудный параметр  $A = -0.07$ . Видно, что все четыре солитона имеют разную длину, причём «регуляризованный» солитон (2.87) самый длинный. Однако солитоны такой амплитуды вызывают напряжения близкие к пределу упругости для полистирола. В экспериментах с полистироловым стержнем, описанных в [35], амплитуда очень мала:  $A \sim 10^{-3} - 10^{-4}$ . Следовательно, в главном порядке по  $A$  во всех четырёх формулах параметр длины примерно равен

$$B = \sqrt{\frac{A\beta_1}{6\nu^2 E R^2}}, \quad (2.88)$$

а соответствующее солитонное решение изображено в правой части рисунка 2.3 для  $A = -0.001$ .

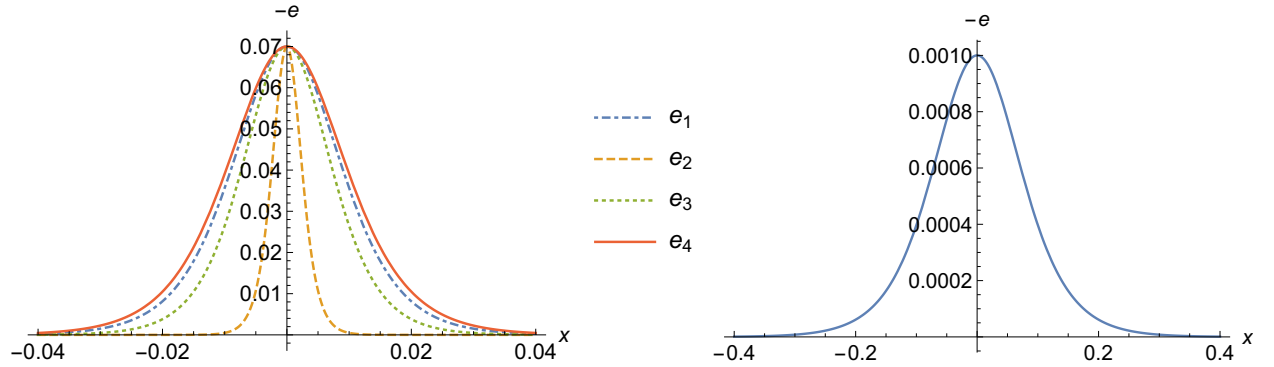


Рис. 2.3: Солитоны в стержне радиуса  $R = 1$  см, сделанном из полистирола при  $A = -0.07$  (слева) и  $A = -0.001$  (справа). Упругие модули полистирола приведены в таблице 2.1.

Модуль Юнга $E$ , Н/м <sup>2</sup>	Коэффициент Пуассона, $\nu$	Модули Мурнагана, Н/м <sup>2</sup>			Плотность $\rho$ , кг/м <sup>3</sup>
		$l$	$m$	$n$	
$3.7 \cdot 10^9$	0.34	$-18.9 \cdot 10^9$	$-13.3 \cdot 10^9$	$-10 \cdot 10^9$	1060

Таблица 2.1: Упругие модули полистирола [37].



Репараметризуем солитонное решение (2.84) через скорость  $v$  вместо амплитуды  $A$ :

$$u_i(x, t) = \frac{3\rho(v^2 - c^2)}{\beta_1} \text{sech}^2 \left[ \tilde{B}_i(x \pm vt) \right], \quad v = \sqrt{c^2 + \frac{A\beta_1}{3\rho}}, \quad (2.89)$$

$$\tilde{B}_i = \sqrt{\frac{c^2(v^2 - c^2)}{-4 \left( \alpha_1^{(i)} v^4 + \alpha_2^{(i)} c^2 v^2 + \alpha_3^{(i)} c^4 \right) R^2}}, \quad i = 1, 2, \quad (2.90)$$

$$\tilde{B}_3 = \sqrt{\frac{v^2 - c^2}{2\nu R^2 [c^2 - (1 - \nu)v^2]}}, \quad (2.91)$$

$$\tilde{B}_4 = \sqrt{\frac{v^2 - c^2}{2\nu^2 v^2 R^2}}. \quad (2.92)$$

Солитонное решение существует, только если параметр длины  $\tilde{B}$  вещественен, и, следовательно,  $\tilde{B}^2 > 0$ , что приводит, предполагая  $\nu < 0.5$ , к следующим ограничениям на скорость солитона:

- $\tilde{B}_i^2 > 0 \implies v^2 < \frac{-\alpha_2^{(i)} - \sqrt{\alpha_2^{(i)2} - 4\alpha_1^{(i)}\alpha_3^{(i)}}}{2\alpha_1^{(i)}} c^2$  или  $c^2 < v^2 < \frac{-\alpha_2^{(i)} + \sqrt{\alpha_2^{(i)2} - 4\alpha_1^{(i)}\alpha_3^{(i)}}}{2\alpha_1^{(i)}} c^2$ ,  
 $i = 1, 2$ ,
- $\tilde{B}_3^2 > 0 \implies c^2 < v^2 < \frac{c^2}{1 - \nu}$ ,
- $\tilde{B}_4^2 > 0 \implies c^2 < v^2$ .

Отметим, что  $0 < \frac{-\alpha_2^{(i)} - \sqrt{\alpha_2^{(i)2} - 4\alpha_1^{(i)}\alpha_3^{(i)}}}{2\alpha_1^{(i)}} \leq 1$  и  $\frac{-\alpha_2^{(i)} + \sqrt{\alpha_2^{(i)2} - 4\alpha_1^{(i)}\alpha_3^{(i)}}}{2\alpha_1^{(i)}} \geq 1 \forall \nu \in [0, 0.5]$  для  $i = 1, 2$ .

Таким образом, в то время как первые три модели дают ограниченный диапазон скоростей солитона сжатия, регуляризованная модель не накладывает ограничения сверху на скорость. Также первые две модели, в отличие от двух других, допускают существование солитонов растяжения.

Отметим, что помимо математического ограничения на параметры солитона (вещественность параметра ширины  $B$ ) есть физическое ограничение: солитон не должен вызывать пластических деформаций, поскольку модель строилась только для упругих деформаций. Так, для полистирола и широкого круга других материалов именно физическое ограничение сильнее всего сужает диапазон допустимых скоростей, ведь амплитуда солитона пропорциональна  $v^2 - c^2$ . Длинные волны в стержнях из таких материалов целесообразнее всего моделировать с помощью регуляризованной модели, являющейся наиболее простой среди рассмотренных моделей и в рамках которой не учитываются колебания других мод, а также отсутствует коротковолновая неустойчивость.

## Глава 3.

### Численное решение уравнений нелинейной теории упругости

В главе 2 из полных нелинейных уравнений движения выведены упрощённые модели типа Буссинеска, описывающие длинные продольные волны деформации, которые теперь интересно сравнить с численным решением полных уравнений.

В настоящей работе основной интерес представляют непрерывные гладкие решения нелинейных уравнений. Наилучшим средством для этого является псевдоспектральный метод, с помощью которого мы будем решать как пространственно одномерные уравнения типа Буссинеска, так и полные трёхмерные уравнения движения. Отметим, что псевдоспектральный метод чаще всего используется только для пространственной дискретизации, в то время как дискретизация по времени осуществляется с помощью стандартных методов, например, Рунге-Кутты 4-го порядка.

Псевдоспектральный метод основан на поиске решения в некотором подпространстве, имеющем конечный базис, в качестве которого чаще всего выбирается базис Фурье (набор синусов и косинусов) или семейство ортогональных многочленов. Выбор базиса определяется граничными условиями Дирихле: базисные функции должны удовлетворять им.

Псевдоспектральный метод, называемый также методом коллокации, является одним из семейства спектральных методов. Его отличительной особенностью является выполнение уравнений не на всей области, а лишь в конечном наборе точек, называемых точками коллокации. Выбор этих точек определяется используемым базисом: для базиса Фурье точки равномерно распределены по области, а для многочленов Чебышёва эти точки должны быть распределены согласно чебышёвской плотности с разрежением в центре области и сгущением к краям. Неправильный выбор точек коллокации грозит возникновением больших ошибок в решении.

### 3.1. Численная схема

#### 3.1.1. Одномерное уравнение типа Буссинеска

Сформулируем задачу Коши для одномерного регуляризованного уравнения Буссинеска с внешним воздействием:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} - g_1 P_{xx} - g_2 T_x - \left( \tilde{\beta}_1 u^2 + \tilde{\beta}_2 uP + \tilde{\beta}_3 P^2 \right)_{xx} + \tilde{\alpha} u_{xxtt} + \gamma_1 P_{xxxx} + \gamma_2 P_{xxtt} + \gamma_3 T_{xtt} + \gamma_4 T_{xxx} = 0, \quad x \in (0, L), \quad (3.1)$$

$$u(x, 0) = \phi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad (3.2)$$

где на границах области поставлены условия симметрии, поскольку модель Буссинеска выводилась для бесконечного стержня. Уравнение (3.1) совпадает по форме с (2.50), где некоторые коэффициенты переобозначены для лаконичности записи.

Будем решать регуляризованное уравнение типа Буссинеска с помощью псевдоспектрального метода Фурье. Для этого сначала отобразим область задачи  $(0, L)$  в  $(0, 2\pi)$  с помощью замены  $\tilde{x} = Sx$ , где  $S = 2\pi/L$ , и запишем новое уравнение, опустив тильду над  $x$ :

$$\begin{aligned} u_{tt} - S^2 c^2 u_{xx} - S^2 g_1 P_{xx} - S g_2 T_x - S^2 \left( \tilde{\beta}_1 u^2 + \tilde{\beta}_2 uP + \tilde{\beta}_3 P^2 \right)_{xx} + S^2 \tilde{\alpha} u_{xxtt} \\ + S^4 \gamma_1 P_{xxxx} + S^2 \gamma_2 P_{xxtt} + S \gamma_3 T_{xtt} + S^3 \gamma_4 T_{xxx} = 0, \quad x \in (0, 2\pi), \end{aligned} \quad (3.3)$$

Будем искать неизвестную функцию в виде комбинации из  $N$  гармоник:

$$u(x, t) = \sum_{k=-N/2+1}^{N/2} \hat{u}(k, t) e^{ikx}, \quad x \in (0, 2\pi). \quad (3.4)$$

Для нахождения коэффициентов  $\hat{u}(k, t)$  при гармониках по значениям в узлах сетки используется дискретное преобразование Фурье (ДПФ), а для обратной операции – обратное ДПФ:

$$\hat{u}(k, t) = \mathcal{F}u = \sum_{j=0}^{N-1} u(x_j, t) e^{-ikx_j}, \quad k = -\frac{N}{2} + 1, \dots, \frac{N}{2}, \quad (3.5)$$

$$u(x_j, t) = \mathcal{F}^{-1}\hat{u} = \sum_{k=-N/2+1}^{N/2} \hat{u}(k, t) e^{ikx_j}, \quad x_j = \frac{2\pi j}{N-1}, \quad j = 0, \dots, N-1. \quad (3.6)$$

Применим ДПФ к уравнению (3.3) и начальным условиям (3.2). Приравнявая коэффициент при каждой гармонике к нулю, получим систему ОДУ с начальными условиями в виде:

$$\begin{aligned} (1 - \tilde{\alpha} S^2 k^2) \hat{u}'' = - S^2 k^2 \left( c^2 \hat{u} + \tilde{\beta}_1 \hat{u}^2 + \tilde{\beta}_2 \hat{u} \hat{P} + \tilde{\beta}_3 \hat{P}^2 \right) + S^2 g_1 \widehat{P_{xx}} - S g_2 \widehat{T_x} \\ - \left( S^4 \gamma_1 \widehat{P_{xxxx}} + S^2 \gamma_2 \widehat{P_{xxtt}} + S \gamma_3 \widehat{T_{xtt}} + S^3 \gamma_4 \widehat{T_{xxx}} \right), \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\hat{u}_0(k) = \hat{\phi}(k), \quad \hat{u}'_0(k) = \hat{\psi}(k), \quad k = -\frac{N}{2} + 1, \dots, \frac{N}{2}, \quad (3.8)$$

где штрих обозначает производную по времени. Для нахождения Фурье образа нелинейного слагаемого  $u^2$ , а также  $uP$ , к Фурье образу  $\hat{u}$  применяется обратное преобразование, затем полученная функция  $u(x_j, t)$  возводится в квадрат в узлах сетки или домножается на  $P(x_j, t)$  и переводится обратно в пространство Фурье:

$$\widehat{u^2} = \mathcal{F}[(\mathcal{F}^{-1}\hat{u})^2], \quad \widehat{uP} = \mathcal{F}[P \cdot \mathcal{F}^{-1}\hat{u}].$$

Решать систему (3.7), (3.8) будем с помощью метода Рунге-Кутты 4-го порядка. Применяя обратное ДПФ к решению этой системы, получаем приближение исходной задачи Коши (3.1), (3.2).

### 3.1.2. Полные трёхмерные уравнения

Разрабатывая численную схему для решения полных уравнений, мы задались целью сделать её пригодной для как можно более широкого круга численных экспериментов. Во-первых, схема должна подходить для моделирования эволюции некоторого начального импульса (решение задачи Коши на периодическом интервале). Во-вторых, должна быть возможность моделировать волны, возникающие в результате некоторого внешнего воздействия ...

Рассмотрим осесимметричный стержень круглого сечения длиной  $L$  и радиусом  $R$ . Выпишем полные уравнения движения и граничные условия в векторном виде:

$$\rho \ddot{\underline{U}}(\underline{X}, t) = \nabla \cdot \underline{P}, \quad \underline{X} \in \Omega = \{(x, r, \varphi) \in \mathbb{R}^3 \mid -L < x < L, 0 < r < R, 0 < \varphi < 2\pi\}, \quad (3.9)$$

$$\underline{P} \cdot \underline{n} = \underline{P}_b, \quad r = R, \quad (3.10)$$

$$\underline{P} = \lambda (\text{tr } \underline{E}) \underline{\mathcal{I}} + 2\mu \underline{E} + l (\text{tr } \underline{E})^2 \underline{\mathcal{I}} - m \left( (\text{tr } \underline{E})^2 \underline{\mathcal{I}} - 2 (\text{tr } \underline{E}) \underline{E} - (\text{tr } \underline{E}^2) \underline{\mathcal{I}} \right) + n (\underline{E}^*)^T, \quad (3.11)$$

$$\underline{E} = \frac{1}{2} (\nabla \underline{U}^T + \nabla \underline{U} + \nabla \underline{U}^T \cdot \nabla \underline{U}), \quad (3.12)$$

где  $\underline{E}^*$  – союзная матрица, а  $\underline{\mathcal{I}}$  – единичный тензор. Будем искать решение этой задачи в некотором конечномерном пространстве, задаваемым системой базисных функций  $\{\Phi_n(x), \Psi_m(r), \Theta_l(\varphi)\}$ . Представим неизвестную функцию  $\underline{U}$  в виде

$$\underline{U}(x, r, \varphi, t) = \sum a(t) \Phi_n(x) \Psi_m(r) \Theta_l(\varphi) \quad (3.13)$$

Подстановка (3.13) в уравнения (3.9) приводит к системе однородных дифференциальных уравнений по времени.

## 3.2. Численные эксперименты

### 3.2.1. Образование солитона из начального условия

Будем решать задачу Коши для полных уравнений, где начальное условие задано распространяющимся вправо со скоростью  $c$  гладким импульсом:

$$U_0(x, r) = A_0 W \operatorname{erf} \left( \frac{x - L/2}{W} \right), \quad \dot{U}_0(x, r) = -c \frac{\partial U_0}{\partial x} \quad (3.14)$$

$$V_0(x, r) = -\nu r \frac{\partial U_0}{\partial x}, \quad \dot{V}_0(x, r) = -c \frac{\partial V_0}{\partial x} \quad (3.15)$$

На рисунке 3.1 слева изображена эволюция этого импульса и зарождение солитона при  $A_0 = 0.01$ ,  $W = 20$ . Исходный импульс испускает некоторые осцилляции и отрывается от них, что согласуется с моделью Буссинеска, согласно которой солитон имеет большую скорость, чем линейные волны. На рисунке справа представлено сравнение оторвавшегося импульса («экспериментального» солитона) с «теоретическим» солитонном (2.89). Если скорость теоретического солитона, являющуюся свободным параметром в (2.89), подобрать так, чтобы она совпадала со скоростью экспериментального солитона, то последний имеет почти ту же длину, что и теоре-

тический, но на 6% большую амплитуду.

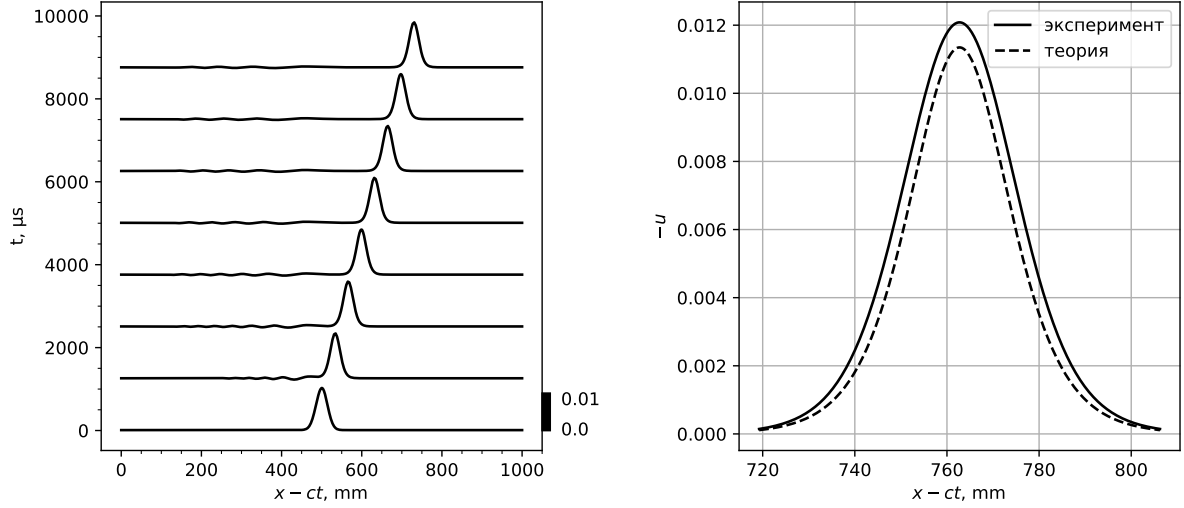


Рис. 3.1: Слева: решение задачи Коши с начальными условиями (3.14), (3.15) для полных уравнений. На графике изображены профили продольной деформации в центре стержня ( $r = 0$ ) в различные моменты времени:  $-U_x(x - ct, 0, t)$ . Масштаб деформации задан показан чёрным прямоугольником. Справа: сравнение профиля «экспериментального» солитона, полученного в численном эксперименте, и «теоретического» солитона (2.89). Скорость теоретического солитона  $v$  подобрана так, чтобы она совпадала со скоростью экспериментального.

Теперь решим аналогичную задачу Коши для регуляризованного уравнения типа Буссинеска, где начальное условие задано формулой:

$$u_0(x) = 2A_0 \exp\left(\frac{(x - L/2)^2}{W^2}\right), \quad \dot{u}_0(x) = -c \frac{\partial u_0}{\partial x}. \quad (3.16)$$

Отметим, что уравнение Буссинеска записано относительно функции  $u = U_x$ , а выражение поперечного перемещения  $V$  через продольное  $U$  уже «вшито» в модель. На рисунке 3.2 представлено сравнение эволюции импульса согласно полным уравнениям и согласно модели Буссинеска. Обе модели показывают качественно одинаковый результат, однако модель Буссинеска в этом эксперименте дала солитон примерно на 8% большей амплитуды и, как следствие, бегущий быстрее солитона в полной модели.

Отличительной особенностью нелинейных волн является зависимость скорости от амплитуды волны. На основе численных решений задачи Коши для полных уравнений с начальными импульсами разной амплитуды можно построить «экспериментальную» зависимость скорости от амплитуды образовавшегося солитона и сравнить её с «теоретической», задаваемой формулой (2.89). Эти зависимости изображены на рисунке 3.3. Теоретическая зависимость для небольших амплитуд почти линейна, в то время как в численном эксперименте рост скорости солитона существенно замедляется с увеличением амплитуды.

### 3.2.2. Образование солитона из удара по торцу стержня

В предыдущем параграфе моделирование волн проводилось в стержне со свободной от напряжений поверхностью, однако представляет интерес изучение волн, вызываемых внешним воз-

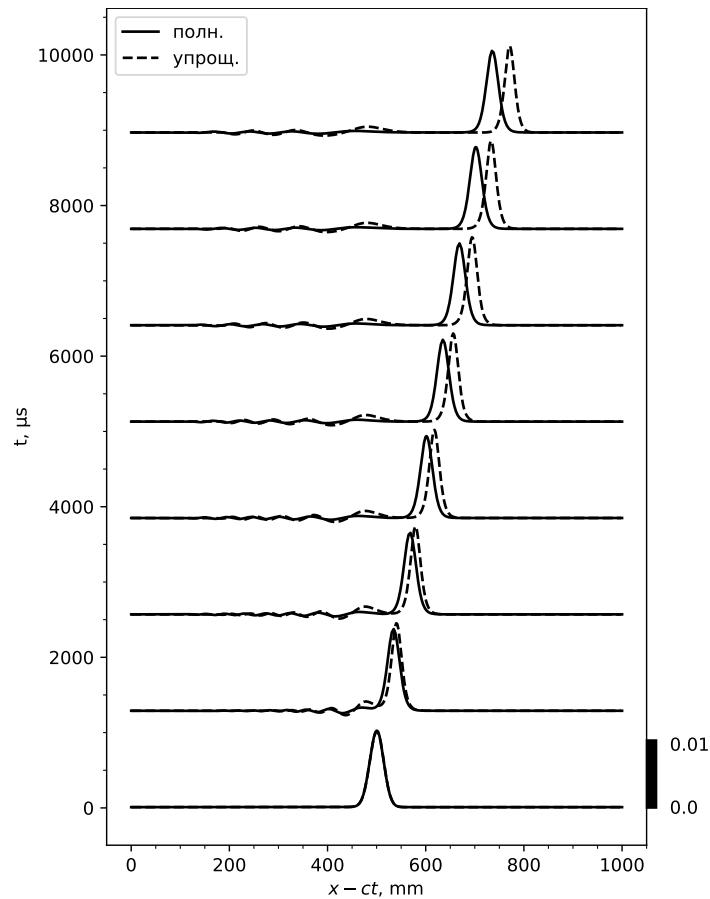


Рис. 3.2: Сравнение решений задачи Коши (3.14), (3.15) для полной модели и задачи Коши (3.16) для упрощённой модели типа Буссинеска.

действием, например, ударом по торцу стержня. Эти результаты могут быть полезны для того, чтобы возбудить уединённые волны в эксперименте.

Модель типа Буссинеска строилась для бесконечного стержня, следовательно, она применима для описания волн вдали от торцов стержня. Моделирование волн вблизи торцов возможно с помощью полных уравнений движения. На рис. ... представлены результаты

### 3.2.3. Образование солитона из бегущего по поверхности напряжения

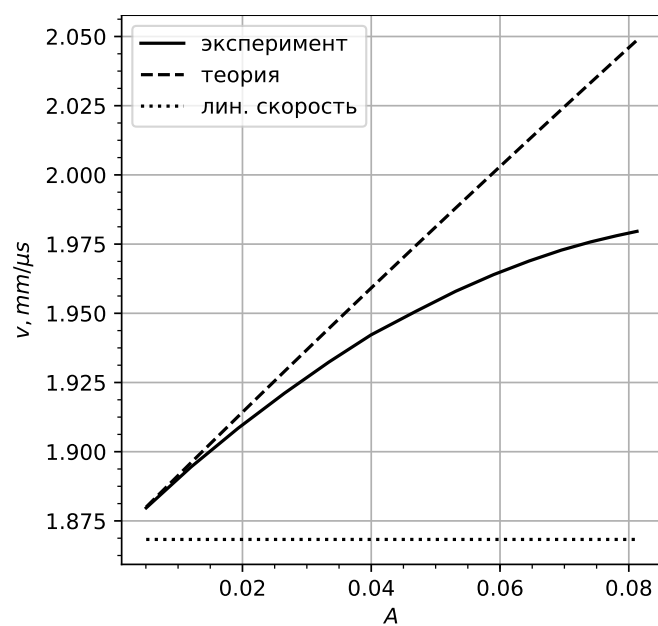


Рис. 3.3: Сравнение «экспериментальной» и «теоретической» зависимостей скорости от амплитуды. Горизонтальная линия – скорость линейных продольных волн  $c$ .

## **Глава 4.**

### **Обработка экспериментальных данных**



## **Заключение**

## Приложение 1

Нелинейные функции в уравнении (2.15):

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= 2 [(-4\lambda - 4\mu + n - 4m)V_1 - 2(\lambda + 2\mu + m)U_{0x}] U_2 \\ &\quad - [2(2l + \lambda)V_1 + (3\lambda + 6\mu + 2l + 4m)U_{0x}] U_{0xx} \\ &\quad - [(2\lambda + 2\mu + 8l + n)V_1 + 2(\lambda + \mu + 2l + m)U_{0x}] V_{1x}, \\ \Phi_2 &= \frac{1}{2} [2(2\lambda + 2\mu + 8l + n)U_{2x} + (4\lambda + 4\mu + 4m - n)V_{1xx} + 32(2\lambda + 3\mu + 2l + 2m)V_3] V_1 \\ &\quad + 2(\lambda + \mu + 2l + m)U_{0x}U_{2x} + 2(\mu + m) [U_{0xx} + 4V_{1x}] U_2 + (\lambda + 2\mu + m)(U_{0x}V_{1x})_x \\ &\quad + \frac{1}{4}(12\lambda + 20\mu + 12m - n)V_{1x}^2 + 8(\lambda + 2l)V_3U_{0x} + (4\lambda + 12\mu + 4m + n)U_2^2.\end{aligned}$$

## Приложение 2

Все уравнения типа Буссинеска, обсуждавшиеся в настоящей работе, могут быть записаны в виде:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = d_1(u^2)_{xx} + d_2 u_{tttt} + d_3 u_{ttxx} + d_4 u_{xxxx}, \quad (4.1)$$

где  $c$  и  $d_i$  – некоторые постоянные. Будем искать решения в виде волн, бегущих влево или вправо:  $u = u(\xi)$ , где  $\xi = x \pm vt$ , что сводит исходное уравнение к обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$(v^2 - c^2)u'' = d_1(u^2)'' + (d_2 v^4 + d_3 v^2 + d_4)u^{IV}. \quad (4.2)$$

Интегрируя это уравнения по  $\xi$  дважды и требуя, чтобы на бесконечности не было возмущений  $u, u', u'', u''' \rightarrow 0$  при  $\xi \rightarrow \pm\infty$ , получаем уравнение:

$$u'' = \frac{(v^2 - c^2)u - d_1 u^2}{d_2 v^4 + d_3 v^2 + d_4}, \quad (4.3)$$

которое может рассматриваться как уравнение движения частицы единичной массы в поле потенциальной силы. Интеграл энергии имеет вид:

$$E = \frac{1}{2} (u')^2 - \frac{3(v^2 - c^2)u^2 - 2d_1 u^3}{6(d_2 v^4 + d_3 v^2 + d_4)}, \quad (4.4)$$

а солитонное решение соответствует нулевому уровню энергии  $E = 0$ . Разделение переменных и последующая подстановка

$$u = \frac{3(v^2 - c^2)}{2d_1} \text{sech}^2 \theta$$

позволяет получить солитонное решение в виде:

$$u = \frac{3(v^2 - c^2)}{2d_1} \text{sech}^2 \left[ \sqrt{\frac{v^2 - c^2}{4(d_4 + d_3 v^2 + d_2 v^4)}} (x \pm vt) \right] \quad (4.5)$$

для таких значений параметра  $v$ , что это решение вещественнозначное.

## Литература

- [1] Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: «Мир», 1988.
- [2] M.J. Ablowitz, *Nonlinear dispersive waves: asymptotic analysis and solitons*, Cambridge University Press, Cambridge, 2011.
- [3] Zabusky N.J., Kruskal M.D. Interaction of «solitons» in a collisionless plasma and the recurrence of initial states // Phys. Rev. Lett. 1965. Vol. 15, No 6. P. 240–243.
- [4] Gardner C. S., Greene J. M., Kruskal M. D., Miura R. M., Method for Solving the Korteweg-de Vries Equation, Physical Review Letters, 1967, 19(19), 1095–1097.
- [5] Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П., Теория солитонов: метод обратной задачи, Наука, М., 1980.
- [6] Taha T.R., Ablowitz M. I., Analytical and numerical aspects of certain nonlinear evolution equations. III. Numerical, Korteweg-de Vries equation, Journal of Computational Physics, 1984, 55(2), 231–253.
- [7] Christov C.I., Conservative Difference Scheme for Boussinesq Model of Surface Waves, Proceedings ICFD 5, 1996, 343–349.
- [8] Kolkovska N., Dimova M., A new conservative finite difference scheme for Boussinesq paradigm equation, Central European Journal of Mathematics, 2012, 10(3), 1159–1171.
- [9] Dutykh D., Katsaounis T., Mitsotakis D., Finite volume schemes for Boussinesq type equations, электронная публикация, arXiv/HAL
- [10] Karczewska A., Rozmej P., Szczecinski M., Boguniewicz B., A finite element method for extended KdV equations, International Journal of Applied Mathematics and Computer Science, 2016, 26(3), 555–567.
- [11] Gottlieb D., Orszag S. A., Numerical Analysis of Spectral Methods: Theory and Applications, SIAM, Philadelphia, 1977.
- [12] Trefethen L. N., Spectral Methods in MATLAB, SIAM, Philadelphia, 2000.
- [13] Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. М.: «Наука», 1980.
- [14] F.D. Murnaghan, *Finite deformation of an elastic solid*, John Wiley and Sons, 1951.
- [15] J. Bergström, *Mechanics of Solid Polymers*, William Andrew Publishing, 2015.

- [16] Y.-Y. Yu, Generalized Hamilton's Principle and Variational Equation of Motion in Nonlinear Elasticity Theory, With Application to Plate Theory, *Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 36, 1964, pp. 111-120.
- [17] A.M. Samsonov, *Strain solitons in solids and how to construct them*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2001.
- [18] A.V. Porubov, *Amplification of nonlinear strain waves in solids*, World Scientific, Singapore, 2003.
- [19] G.A. Nariboli, A. Sedov, Burgers-Korteweg de Vries equation for viscoelastic rods and plates, *J. Math. Anal. Appl.* 32(3) (1970) 661-677.
- [20] L.A. Ostrovsky, A.M. Sutin, Nonlinear elastic waves in rods, *PMM* 41 (1977) 531-537.
- [21] A.E.H. Love, *A treatise on the mathematical theory of elasticity*, Cambridge University Press, London, 1927.
- [22] A.M. Samsonov, Structural optimization in nonlinear wave propagation problems. In: *Structural Optimization under Dynamical Loading. Seminar and Workshop for Junior Scientists*, U. Lepik ed., Tartu University Press, 75-76 (1982).
- [23] A.M. Samsonov, Soliton evolution in a rod with variable cross section, *Sov. Physics - Doklady* 29 (1984) 586-587.
- [24] A.M. Samsonov, A.V. Porubov, Refinement of the model for the propagation of longitudinal strain waves in a rod with nonlinear elasticity, *Tech. Phys. Lett.* 19(6) (1993) 365-366.
- [25] A.V. Porubov, M.G. Velarde, Dispersive - dissipative solitons in nonlinear solids, *Wave Motion* 31(3) (2000) 197-207.
- [26] V.I. Erofeev, V.V. Kazhaev, N.P. Semerikova, *Waves in rods: dispersion, dissipation, nonlinearity*, Fizmatlit, Moscow, 2002 (in Russian).
- [27] H.-H. Dai, X. Fan, Asymptotically approximate model equations for weakly nonlinear long waves in compressible elastic rods and their comparisons with other simplified model equations, *Maths. Mech. Solids* 9 (2004) 61-79.
- [28] H.-H. Dai, and Z. Cai, Uniform asymptotic analysis for transient waves in a pre-stressed compressible hyperelastic rod, *Acta Mechanica* 139 (2000) 201-230.
- [29] K.R. Khusnutdinova, A.M. Samsonov, A.S. Zakharov, Nonlinear layered lattice model and generalized solitary waves in imperfectly bonded structures, *Phys. Rev. E* 79(5) (2009) 056606.
- [30] K.R. Khusnutdinova, A.M. Samsonov, Fission of a longitudinal strain solitary wave in a delaminated bar, *Phys. Rev. E* 77 (2008) 066603.

- [31] K.R. Khusnutdinova, M.R. Tranter, Modelling of nonlinear wave scattering in a delaminated elastic bar, *Proc. R. Soc. A* 471 (2015) 20150584.
- [32] K.R. Khusnutdinova, M.R. Tranter, On radiating solitary waves in bi-layers with delamination and coupled Ostrovsky equations, *Chaos* 27 (2017) 013112.
- [33] G.V. Dreiden, K.R. Khusnutdinova, A.M. Samsonov, and I.V. Semenova, Splitting induced generation of soliton trains in layered waveguides, *J. Appl. Phys.* 107 (2010) 034909.
- [34] G.V. Dreiden, K.R. Khusnutdinova, A.M. Samsonov, and I.V. Semenova, Bulk strain solitary waves in bonded layered polymeric bars with delamination, *J. Appl. Phys.* 112 (2012) 063516.
- [35] F.E. Garbuzov, K.R. Khusnutdinova, I.V. Semenova, On Boussinesq-type models for long longitudinal waves in elastic rods. *Wave Motion*, 88 (2019), 129-143.
- [36] A. Boström, On wave equations for elastic rods, *ZAMM* 80(4) (2000) 245-251.
- [37] D.S. Hughes, J.L. Kelly, Second order elastic deformation of solids, *Phys. Rev.* 92 (1953) 1145-1149.
- [38] Z. Abiza, M. Destrade, and R.W. Ogden, Large acoustoelastic effect, *Wave Motion* 49 (2012) 364-374.
- [39] A.V. Pichugin, H. Askes, A. Tyas, Asymptotic equivalence of homogenisation procedures and fine-tuning of continuum theories, *J. Sound and Vibration* 313 (2008) 858-874.
- [40] I.V. Andrianov, V.D. Danishevsky, J.D. Kaplunov and B. Markert, Wide frequency higher-order dynamic model for transient waves in a lattice, In: I.V. Andrianov et al. ed., "Problems of Nonlinear Mechanics and Physics of Materials Springer, 2019.
- [41] G. V. Dreiden, Yu. I. Ostrovsky, A. M. Samsonov, I. V. Semenova, E. V. Sokurinskaya, Formation and propagation of strain solitons in nonlinearly elastic solid, *Techn. Phys.* 58 (1988) 2040-2017. (in Russian)
- [42] G.V. Dreiden, A.M. Samsonov, I.V. Semenova, Evolution of bulk strain solitons in long polymeric waveguides, *Techn. Phys.* 53 (2008) 540-546.
- [43] G.V. Dreiden, A.M. Samsonov, I.V. Semenova, Bulk elastic strain solitons in polycarbonate, *Techn. Phys. Lett.* 37 (2011) 500-502.
- [44] G.V. Dreiden, K.R. Khusnutdinova, A.M. Samsonov, I.V. Semenova, Comparison of the effect of cyanoacrylate- and polyurethane-based adhesives on a longitudinal strain solitary wave in layered polymethylmethacrylate waveguides, *J. Appl. Phys.* 104 (2008) 086106.
- [45] G.V. Dreiden, A.M. Samsonov, I.V. Semenova, and A.G. Shvartz, Strain solitary waves in a thin-walled waveguide, *Appl. Phys. Lett.* 105 (2014) 211906.

- [46] A.V. Belashov, Y.M. Beltukov, N.V. Petrov, A.M. Samsonov, I.V. Semenova, Indirect assessment of bulk strain soliton velocity in opaque solids, *Appl. Phys. Lett.* 112 (2018) 121903.
- [47] G.V. Dreiden, K.R. Khusnutdinova, A.M. Samsonov, I.V. Semenova, Longitudinal strain solitary wave in a two-layered polymeric bar, *Strain* 46 (2010) 589-598.
- [48] A.V. Belashov, Y.M. Beltukov, I.V. Semenova, Pump-probe digital holography for monitoring of long bulk nonlinear strain waves in solid waveguides, *Proc. SPIE* 10678 (2018) 1067810.