Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Институт прикладной математики и механики

Выпускная квалификационная работа магистра

Продольные волны деформации в нелинейно упругих волноводах

Выполнил студент гр. 23641/1 Ф. Е. Гарбузов

Руководитель (СПб ПУ) Б. С. Григорьев

Научный консультант (ФТИ им. Иоффе) Я. М. Бельтюков

Постановка задачи

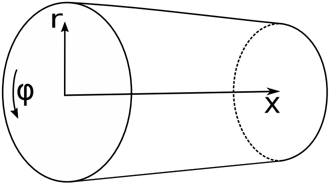
- Построить асимптотическую одномерную модель для продольных волн в нелинейно упругом стержне, учитывающую нагрузку на поверхности стержня.
- Найти солитонные решения и проанализировать свойства выведенной модели.
- ести… В численном моделировании сравнить полученную модель с полной трёхмерной моделью.

Полные трёхмерные уравнения

Трёхмерный вектор перемещения $\underline{U}$.

Слабонелинейная деформация (малой, но не бесконечно малой амплитуды).

Тензор деформации и плотность потенциальной энергии:



$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2}\left((\nabla \underline{U})^T + \nabla \underline{U} + (\nabla \underline{U})^T \cdot \nabla \underline{U}\right)$$

$$W = \frac{\lambda + 2\mu}{2} I_1(\underline{\underline{E}})^2 - 2\mu I_2(\underline{\underline{E}}) + \frac{l + 2m}{3} I_1(\underline{\underline{E}})^3 - 2m I_1(\underline{\underline{E}}) I_2(\underline{\underline{E}}) + n I_3(\underline{\underline{E}})$$

$\lambda, \ \mu$ — модули упругости Ламе (линейные),
$l, \ m, \ n$ — модули упругости Мурнагана (нелинейные).

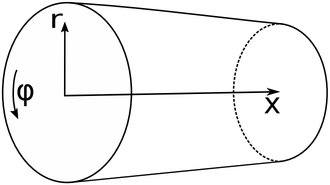
Полные трёхмерные уравнения движения:

$$\rho \ddot{\underline{U}} = \mathrm{div} \underline{\underline{P}}, \qquad \underline{\underline{P}} = (\underline{\underline{I}} + \nabla \underline{U}) \cdot \frac{\partial W}{\partial \underline{\underline{E}}}$$

Упрощающие предположения

Предположения:

- Стержень бесконечен вдоль оси x.
- Осесимметричная задача: нет кручения и от угловой координаты φ ничего не зависит.
- Малые деформации: $U,\ V \sim \varepsilon \ll 1$
- Функции медленно меняются: $\partial/\partial x,\ \partial/\partial r \sim 1/L$.
- Тонкий стержень: $R/L = \delta \ll 1$.



Радиус стержня — R.
Перемещения:
U — осевое (продольное),
V — радиальное (поперечное).

Разложение перемещений в степенной ряд по радиальной переменной:

$$U(x,r,t) = U_0(x,t) + r^2 U_2(x,t) + r^4 U_4(x,t) + \dots\,,$$
$$V(x,r,t) = rV_1(x,t) + r^3 V_3(x,t) + r^5 V_5(x,t) + \dots\,.$$

Подстановка разложений в уравнения движения позволяет выразить $U_2,\ V_3,\ U_4,\ V_5$ через U_0 и V_1.

Упрощённая система двух уравнений

На границе задано нормальное напряжение $P(x,t)$ и касательное $T(x,t)$:

$$2(\lambda+\mu)V_1+\lambda U_{0x}+\varepsilon\Psi_1(U_0,V_1)+\delta^2\Big[\gamma_1 U_{0xxx}+\gamma_2 U_{0xtt}+\gamma_3 V_{1tt}+\gamma_4 V_{1xx}\Big]+$$
$$+O(\varepsilon^2,\varepsilon\delta^2,\delta^4)=\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}P,$$
$$\rho c^2 U_{0tt}-2\lambda V_{1x}-(\lambda+2\mu)U_{0xx}-\varepsilon\Psi_2(U_0,V_1)+\delta^2\Big[\gamma_5 U_{0xxxx}+\gamma_6 U_{0tttt}+$$
$$+\gamma_7 U_{0xxtt}+\gamma_8 V_{1xxx}+\gamma_9 V_{1xtt}\Big]+O(\varepsilon^2,\varepsilon\delta^2,\delta^4)=\frac{2\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}T.$$

Коэффициенты γ_j зависят от упругих модулей, Ψ — нелинейные функции.

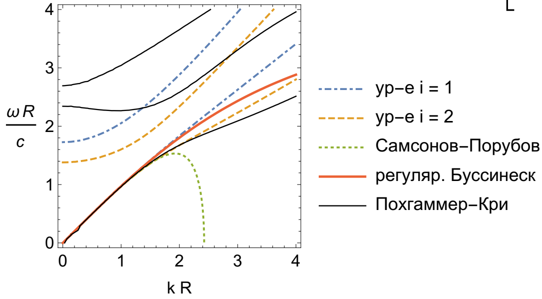
Существует два способа исключения V_1, приводящие к одномерному уранению типа Буссинеска.

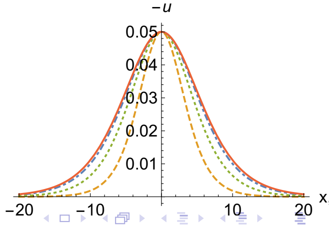
Уравнения типа Буссинеска

$u = U_{0x}$ — продольная деформация, $c = \sqrt{E/\rho}$ — скорость длинных линейных волн.

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} - \frac{2}{\rho}\left(\nu P_{xx} + \frac{1}{R} T_x\right) - \left(\frac{\beta_1}{2\rho} u^2 + \frac{\beta_2}{\rho E} uP + \frac{\beta_3}{2\rho E^2} P^2\right)_{xx} +$$
$$+ R^2\left(\frac{\alpha_1^{(i)}}{c^2} u_{tttt} + \alpha_2^{(i)} u_{xxtt} + c^2 \alpha_3^{(i)} u_{xxxx} + G^{(i)}(P,T)\right) = 0, \quad i = 1, 2.$$

Солитонное решение: $u_i(x,t) = A\,\mathrm{sech}^2\left[B_i\left(x \pm t\sqrt{c^2 + \frac{A\beta_1}{3\rho}}\right)\right].$





Численная схема

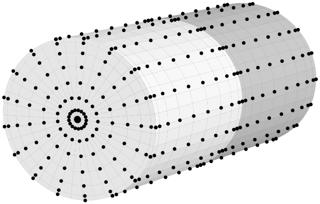


Рис.: Сетка из двух доменов.

Сравнение моделей: эволюция волны

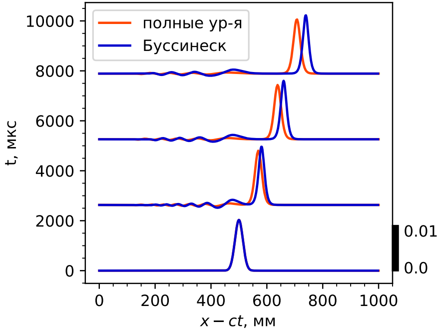


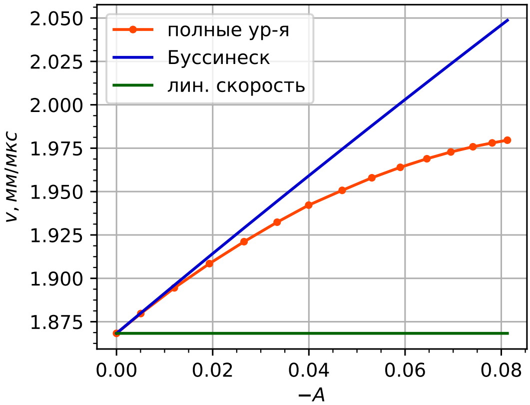
Рис.: Профили решений $-u(x-ct,t)$ регуляризованного уравнения Буссинеска и продольной деформации $-U_x(x-ct,0,t)$ в центре стержня $(r=0)$ в различные моменты времени. Масштаб амплитуды деформации показан чёрным прямоугольником.

Сравнение моделей: скорость-амплитуда

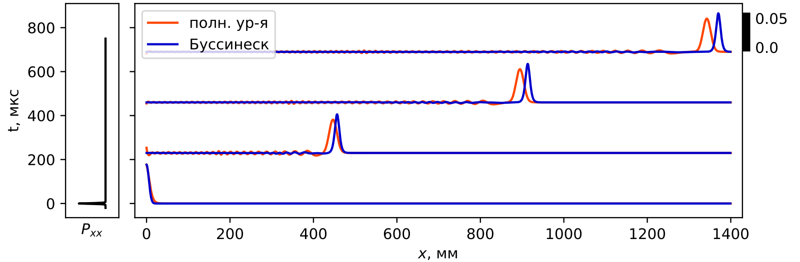
Зависимость
скорости от амплитуды
в модели Буссинеска:

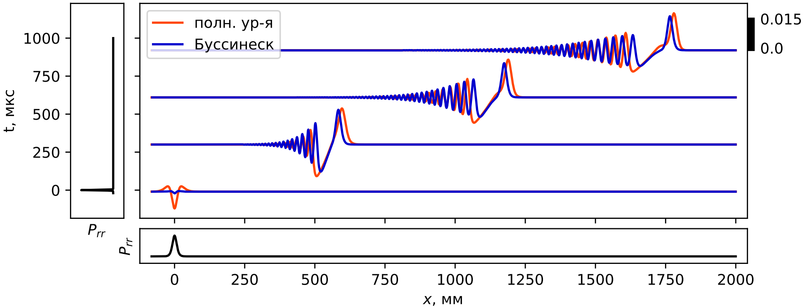
$$v(A) = \sqrt{c^2 + A\frac{\beta_1}{3\rho}}$$

Зависимость
для полных уравнений
получена в серии
численных экспериментов.



Сравнение моделей: удар по поверхности





Заключение

- Выведены две новые асимптотические модели типа Буссинеска с внешним воздействием, описывающие продольные волны в нелинейно упругих стержнях круглого сечения.
- Построен метод, позволяющий численно моделировать полные трёхмерные уравнения движения стержня в рамках нелинейной теории упругости.
- Численно решён ряд начально-краевых задач, показывающих хорошую применимость уравнения типа Буссинеска для моделирования возникновения солитонов деформации.

Статьи и конференции:

1. Garbuzov F. E., Khusnutdinova K. R., Semenova I. V., On Boussinesq-type models for long longitudinal waves in elastic rods, *Wave Motion* 88 (2019) 129–143.
2. International Conference "Days on Diffraction 2018", Steklov Mathematical Institute, St. Petersburg, Russia, 4 - 8 June 2018, oral presentation.