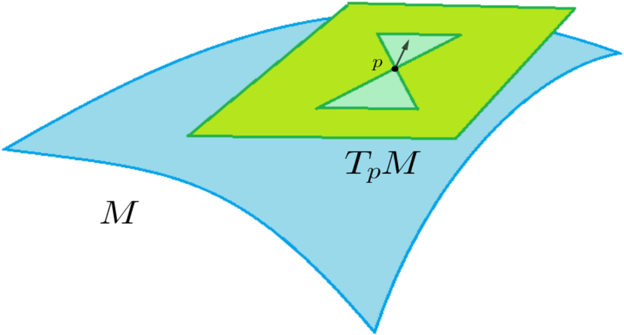
Teoría causal

Fernando Adrián Frías Ochoa

4 de septiembre de 2020

El ambiente usual serán las variedades lorentzianas, estas son variedades suaves n-dimensionales dotadas de una métrica semiriemanniana de índice 1. Además pediremos que estén orientandas temporalmente, i.e., existe un campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ temporal en cada punto.



Relaciones de causalidad

Notación: sean $p, q \in M$,escribimos:

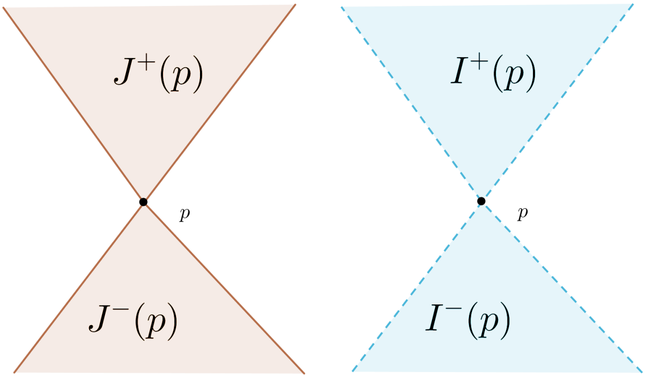
- $p \ll q$ si existe una curva temporal en M que une p con q.
- $p \leq q$ si $p = q$, o bien existe una curva causal en M que une p con q.

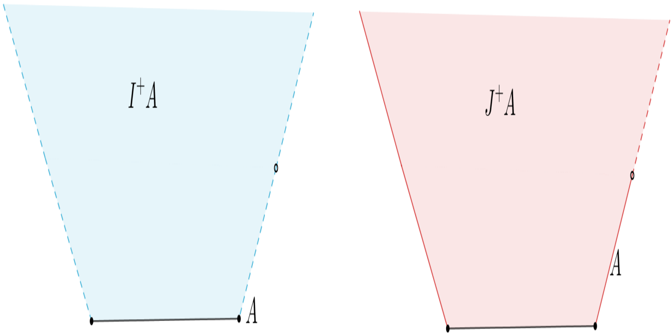
OBS: $p \ll q \Rightarrow p < q$. Para un subconjunto $A \subseteq M$

$$I^{+}A = \{q \in M : \text{ hay un } p \in A \text{ tal que } p \ll q\}, \text{futuro cronológico}$$

$$J^{+}A = \{q \in M : \text{ hay un } p \in A \text{ tal que } p \leq q\}, \text{futuro causal.}$$

Similarmente definimos el pasado cronológico $I^{-}A$ y el pasado causal $J^{-}A$.

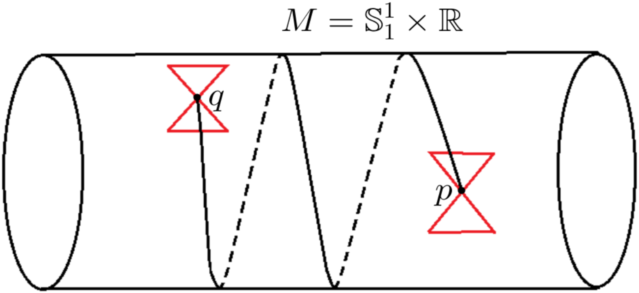

$J^+(p)$
p
$J^-(p)$
$I^+(p)$
p
$I^-(p)$



Siempre se tiene que $A \cup I^+A \subseteq J^+A$.

Ejemplo 1.1

Consideremos el cilindro lorentziano $M = S_1^1 \times \mathbb{R}$, para todo $p \in M$ se tiene que $I^+(p) = J^+(p) = M$. Decimos que M tiene causalidad trivial.



Corolario 1.1 ($\ll$ y $\leq$ sontransitivas)

Si $x \ll y$ y $y \leq z$, o bien $x \leq y$ y $y \ll z$, entonces $x \ll z$.

Dicho de otro modo, dado $A \subseteq M$

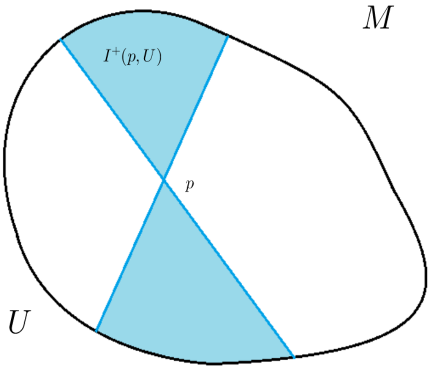
$$I^+A = I^+I^+A = I^+J^+A = J^+I^+A \subseteq J^+J^+A = J^+A.$$

Recordemos que si $U \subseteq M$ es abierto, entonces U es una subvariedad lorentziana orientada temporalmente, entonces podemos considerar la causalidad en U dado un conjunto $A \subseteq U$ como

$$I^+(A, U) = \{q \in U : \text{ hay un } p \in A \text{ tal que } p \ll q\}, \text{futuro cronológi}$$

$$J^+(A, U) = \{q \in U : \text{ hay un } p \in A \text{ tal que } p \leq q\}, \text{futuro causal.}$$

Similarmente definimos el pasado cronológico $I^-(A, U$ y el pasado causal $J^-(A, U)$.


M
$I^+(p, U)$
p
U

Lema 1.1

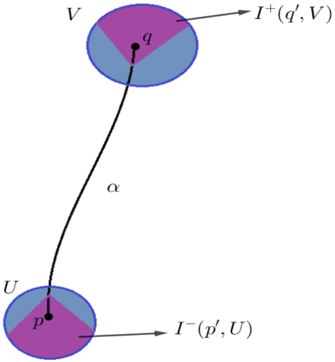
Sea $C \subseteq M$ convexo, es cierto que:

- *para $p \neq q$, $q \in J^+(p, C) \Leftrightarrow \overrightarrow{pq}$ es causal al futuro, lo mismo para $q \in I^+(p, C)$.*
- *$I^+(p, C)$ es abierto en C y por tanto en M.*
- *En C, $\overline{I^+(p, C)} = J^+(p, C)$.*
- *La relación es cerrada en C, i.e., si $\{p_n\}$ y $\{q_n\}$ son tales que $p_n \to p$ y $q_n \to q$ con $q_n \in J^+(p_n, C) \Rightarrow q \in J^+(p, C)$.*

Lema 1.2

$\ll$ es abta en M Sean $p, q \in M$ con $p \ll q$, entonces $\exists U, V \subseteq M$ vecindades de p y q respectivamente tales que $p' \ll q'$ para todo $p' \in U$ y $q' \in V$.

Demostración.



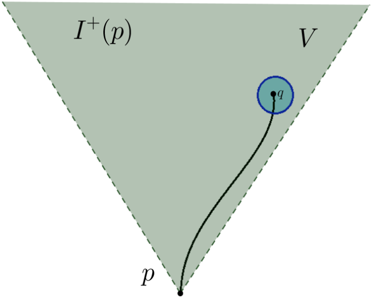
I^+A es abto

Corolario 1.2

Dado $A \subseteq M$, I^+A es abierto en M.

Demostración.

Basta ver que si $p \in M$, entonces $I^+(p)$ es abierto. Por definición $intI^+(p) \subseteq I^+(p)$, solo resta ver que $I^+(p) \subseteq intI^+(p)$.



Obs: J^+A puede no ser cerrado.

Lema 1.3

Dado $A \subseteq M$

- $intJ^+A = I^+A$.
- $J^+A \subseteq \overline{I^+A}$, *la igualdad si y sólo si* J^+A *es cerrado.*

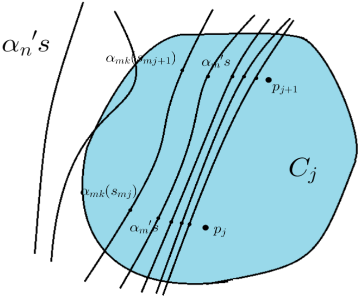
Definición 2.1

Sea $\{\alpha_n\}$ una sucesión infinita de curvas causales al futuro en M y sea R una cubierta convexa de M. Decimos que $\{p_n\}$ con $p = p_0 < p_1 < \ldots < p_n < \ldots$ es una sucesión límite en M si

1.- *para cada p_i existe una subsucesión $\{\alpha_m\}$ de $\{\alpha_n\}$ tal que para cada m hay $s_{m0} < \ldots < s_{mj}$, $j \leq i$, entonces*

- a.- $\lim_{m\to\infty} \alpha_m(s_{mj}) = p_j$ *para cada $j \leq i$.*
- b.- *Para cada $j < i$, los puntos p_j y p_{j+1} y los segmentos $\alpha_m\big|_{[s_{mj}, s_{mj+1}]}$ están contenidos en algún $C_j \in R$.*

2.- Si $\{p_i\}$ es infinita, entonces esta no converge. Si es finita, esta sucesión tiene más de un punto y ninguna sucesión que contenga estrictamente a $\{p_i\}$ cumple (1).

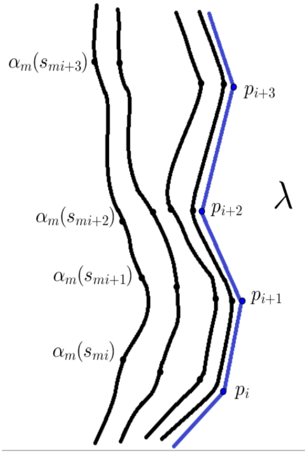


Existencia de sucesiones límite

Proposición 2.1

Sea $\{\alpha_n\}$ una sucesión de curvas causales al futuro tales que $\alpha_n(0) \to p$. Si existe una vecindad de p que contiene un número finito de curvas α_n, entonces relativas a cualquier cubierta convexa R hay una sucesión límite que empieza en p.

Uniendo los puntos de la sucesión límite p_i por medio de segmentos geodésicos λ_i obtenemos una curva causal $\lambda = \sum \lambda_i$ obtenemos una curva geodésica causal a trozos con vértices en p_i. A tal curva le llamamos **cuasi-límite**.
Una primera observación es que si $\{p_i\}$ es infinita, entonces λ es inextendible y si es finita entonces une dos puntos p y un p_k.


$\alpha_m(s_{mi+3})$
p_{i+3}
λ
$\alpha_m(s_{mi+2})$
p_{i+2}
$\alpha_m(s_{mi+1})$
p_{i+1}
$\alpha_m(s_{mi})$
p_i

Definición 3.1

Decimos que la condición de cronología (causalidad) *se cumple en M, si no hay curvas cerradas temporales (causales) en M.*

OBS: cond de causalidad implica cond de cronología.

Lema 3.1

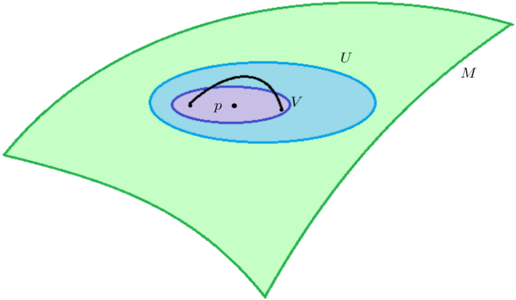
Si M es compacta, entonces no se cumple la condición de cronología en M.

Demostración.

La colección $\{I^+(p) : p \in M\}$ forma una cubierta abta de M, así obtenemos una subcubierta abta $\{I^+(p_i)\}_{1 \leq i \leq n}$. Si
$p_1 \in I^+(p_1)$ ✓.
Si $p_1 \in I^+(p_i)$ con $i \neq 1$, entonces $I^+(p_1) \subseteq I^+(p_i)$, así sucesivamente obtenemos que $p_j \in I^+(p_j)$, o bien $M = I^+(p_k)$ $\Rightarrow p_k \in I^+(p_k)$. □

Definición 3.2 (Condición fuerte de causalidad)

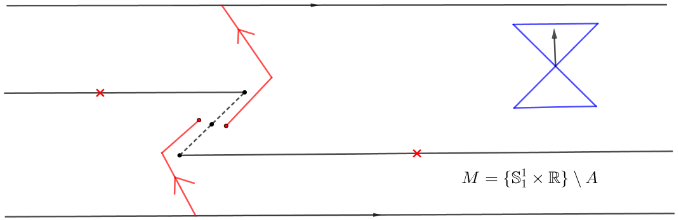
Decimos que la condición fuerte de causalidad se cumple en $p \in M$ *si dada* $U \subseteq M$ *vecindad de* p $\exists V \subseteq U$ *vecindad de* p *tal que cada segmento de curva causal con puntos finales en* V *está totalmente contenida en* U*.*



Obs.- La condición fuerte de causalidad nos dice que si una curva α empieza en un p donde se cumple tal condición y deja cierta vecindad fija de p, entonces no puede regresar arbitrariamente cerca de p, dicho de otro modo no hay curvas "casi-cerradas" en p. Por lo tanto

Condición fuerte de causalidad $\Rightarrow$ Condición de causalidad.

Nota:
Condición de causalidad $\not\Rightarrow$ Condición fuerte de causalidad.



Separación temporal

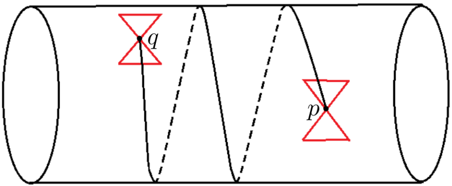
Definición 4.1

Sean $p, q \in M$, la separación temporal de p a q está definida como
$\tau(p, q) = \sup\{L(\alpha) : \alpha$ *es curva causal que une p con q.*$\}$

Tenemos que $\tau(p, q) = \infty$ si el conjunto de curvas causales que unen p con q no está acotado y $\tau(p, q) = 0$ si $p = q$.

Nota: $\tau(p, q)$ se puede pensar como el tiempo propio del viaje más largo de p a q. En $M = \mathbb{S}^1_1 \times \mathbb{R}$, $\tau(p, q) = \infty$.

$M = \mathbb{S}^1_1 \times \mathbb{R}$

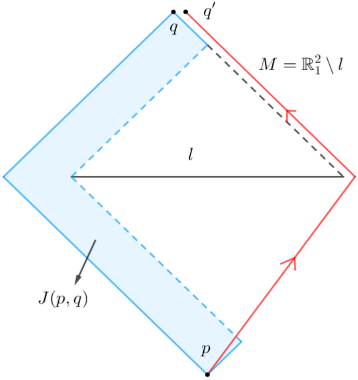


Lema 4.1

La función separación temporal es semicontinua inferior $\tau : M \times M \to [0, \infty]$.

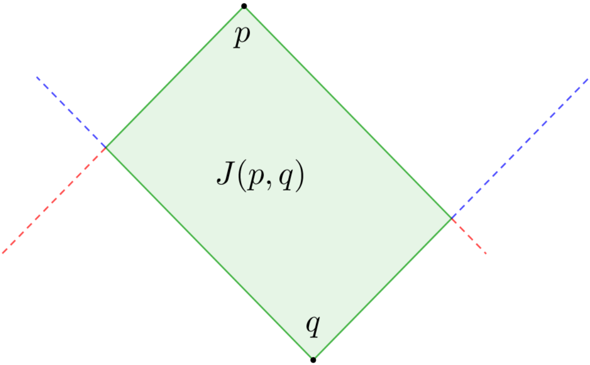
Notación $J(p, q) = J^+(p) \cap J^-(q)$.

Ejemplo 4.1



Proposición 4.1

Si $p < q$, $J(p, q)$ es compacto y se cumple la condición fuerte de causalidad, entonces existe una geodésica causal de p a q con longitud $\tau(p, q)$.



Lo que motiva la siguiente definición

Definición 4.2 (globalmente hiperbólico)

Decimos que M es globalmente hiperbólico si cumple la condición fuerte de causalidad y $\forall p, q \in M$ $J(p, q)$ es compacto.

Si M es globalmente hiperbólico, dados $p, q \in M$ siempre existe una geodésica causal de p a q con longitud $\tau(p, q)$.

Remover puntos destruye globalmente hiperbólico

Lema 4.2

Si $U \subseteq M$ es globalmente hiperbólico, entonces $\tau(p, q) : U \times U \to \mathbb{R}$ es continua.

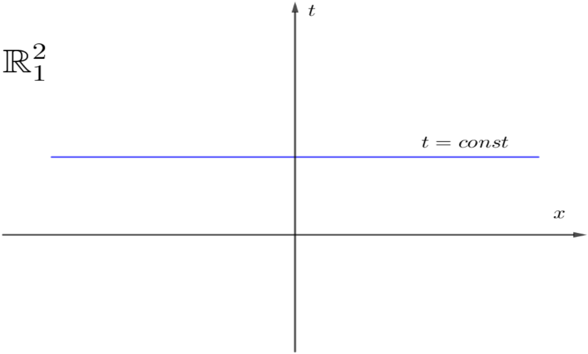
Lema 4.3

La relación de causalidad $\leq$ es cerrada en conjuntos abiertos globalmente hiperbólicos.

Definición 5.1

Decimos que $A \subseteq M$ es acronal (acausal) si $\forall p, q \in A$ NO se cumple que $p \ll q$ $(p < q)$.

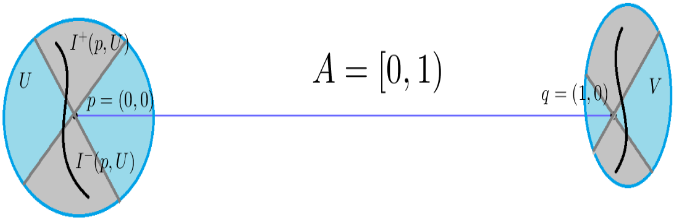
Intuitivamente toda curva temporal cruza solo una vez al conjunto A.



Definición 5.2

El borde de un conjunto acronal A **(denotado por $bd(A)$)** *consta de puntos $p \in \overline{A}$ tales que cada vecindad U de p contiene una curva temporal que va de $I^{-}(p,U)$ a $I^{+}(q,U)$ sin cruzar A.*

Ejemplo.-



Considerando $A \subseteq \mathbb{R}^3_1$ $bd(A) = \overline{A}$.

Corolario 5.1

Un conjunto A es una hipersuperficie topológica cerrada acronal $\Leftrightarrow A \cap bd(A) = \emptyset$.

Corolario 5.2

El borde (no vacío) de un conjunto futuro $(I^+A \subseteq A)$ *es una hipersuperficie topológica cerrada acronal.*

Definición 6.1

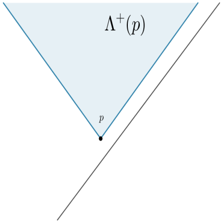
Decimos que $S \subseteq M$ es una hipersuperficie de Cauchy si S es intersecado una sola vez por cada curva temporal inextendible en M.

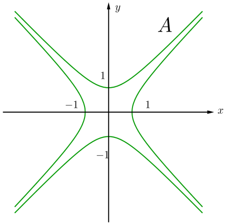
Obs.-

1.- S es en particular acronal.

2.- Los hiperplanos $t = const$ en $\mathbb{R}^2_1$ son hipersuperficies de Cauchy.

3.- $\Lambda^+(p)$ y $\mathbb{H}^1$ no son hipersuperficies de Cauchy.





Lema 6.1

Una hipersuperficie de Cauchy S es efectivamente una hipersuperficie topológica, además es cerrada, acronal y es intersecada por cada curva causal inextendible.

Lema 6.2

Sea α una curva causal pasado inextendible que empieza en p y no interseca a un conjunto C cerrado.

1) *Si $p_0 \in I^+(p, M \setminus C)$, hay una curva temporal-pasado inextendible que empieza en p_0 y que no interseca C.*
2) *Si α NO es una geodésica nula libre de puntos conjugados, entonces hay una curva temporal pasado-inextendible que empieza en $\alpha(0)$ y que no interseca a C.*

Proposición 6.1

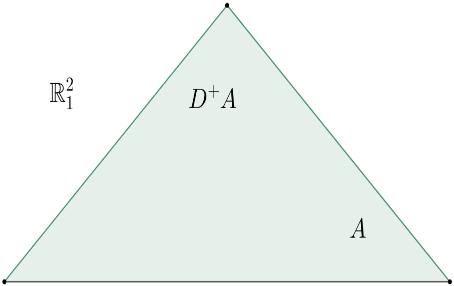
Sea $S \subseteq M$ una hipersuperficie de Cauchy y $X \in \mathfrak{X}(M)$ temporal. Si $p \in M$ entonces las curvas integrales maximales de X que pasan por p intersecan a S en único punto $\rho(p)$. Entonces el mapa que proyecta M en S $\rho : M \to S$ es un mapa continuo y abto sobre S que deja fijo S. En particular S es conexa.

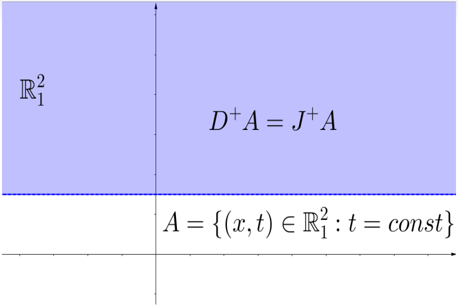
Corolario 6.1

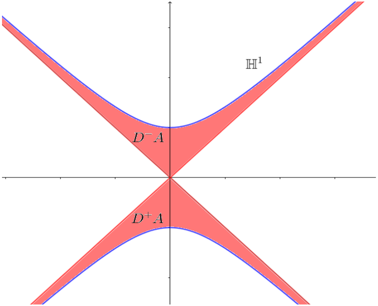
Cualesquiera dos hipersuperficies de Cauchy en M son homeomorfas.

Definición 7.1

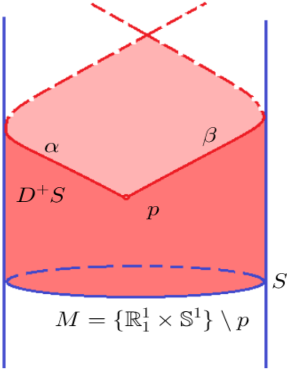
Sea $A \subseteq M$ acronal, el **desarrollo futuro de Cauchy** *de A es el conjunto D^+A de puntos $p \in M$ tales que cada curva causal pasado inextendible que pasa por p cruza A. En particular $A \subseteq D(A)$.*




$\mathbb{R}^2_1$
$D^+A = J^+A$
$A = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2_1 : t = const\}$


$\mathbb{H}^1$
D^-A
D^+A

Ejemplo 7.1 (El cilindro menos un punto p)



$D^-S = J^-S.$

El desarrollo de Cauchy $D(S)$ se puede pensar como el dominio de influencia más grande para el cual S juega el rol de hipersuperficie de Cauchy.

En particular, S es una hipersuperficie de Cauchy $\Leftrightarrow$ $D(S) = M$.

Teorema 7.1

Si A es acronal, entonces $intD(A) \neq \emptyset$ es globalmente hiperbólico.

Lema 7.1

Una hipersuperficie $S \subseteq M$ espacial acronal es acausal.

Lema 7.2

Si S es una hipersuperficie topológica acausal en M, entonces $D(S)$ es abierto.

Obs.- Esto nos dice que si S es hipersuperficie topológica acausal, entonces $intD(S) = D(S)$ pero por teorema 7.1 $intD(S) = D(S)$ es globalmente hiperbólico.

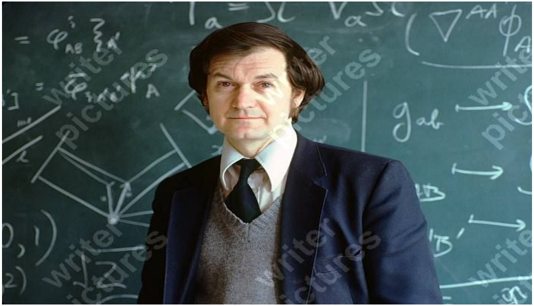
Teorema 7.2

Si M tiene una hipersuperficie de Cauchy espacial, entonces M es globalmente hiperbólico.

Demostración.

Sea S la hipersuperficie de Cauchy de M, por lema 6.1 S es hipersuperficie topológica cerrada acronal, aplicando entonces el lema 7.1 concluimos que S es acausal y por el lema 7.2 $D(S)$ es abierto, i.e., $intD(S) = D(S) = M$ por ser S una hipersuperficie de Cauchy. $\square$

TEOREMA DE PENROSE



Definición 8.1

Una subvariedad espacial de M es **futura convergente** *siempre que su vector de curvatura media H es temporal y apunta al pasado.*

Notación: para un subconjunto $A \subseteq M$, $E^+A = J^+A \setminus I^+A$.

Definición 8.2

Un subconjunto cerrado acronal $A \subseteq M$ es **futuro atrapado** *si E^+A es compacto.*

La siguiente proposición será útil para probar el teorema de Penrose.

Proposición 8.1

Supongamos lo siguiente

- $Ric(v, v) \geq 0$ *para todo* $v \in TM$ *nulo,*
- M *es futura completa.*

Si P *es una* $(n-2)$ *subvariedad espacial completa de* M *futura convergente, entonces* P *es futura atrapada.*

Teorema 8.1 (Penrose)

Supongamos lo siguiente:

1.- $Ric(v, v) \geq 0$ *para todo* $v \in TM$ *nulo,*

2.- M *tiene una hipersuperficie de Cauchy,*

3.- P *es una* $(n-2)$ *subvariedad espacial compacta acronal en* M *que es futura convergente,*

4.- M *es nula completa al futuro.*

Entonces $E^{+}P$ *es una hipersuperficie de Cauchy.*

Demostración.

En vista del que M tiene una hip de Cauchy, por el teorema 7.2 M es globalmente hiperbólico, aplicando el lema 4.3 $\geq$ es cerrada en M y esto implica que $J^+(p)$ y $J^-(p)$ son cerrados. Como P es compacta, entonces J^+P es cerrada. Tenemos también que $intJ^+P = I^+P$. $\therefore E^+P = bdP$.
Usando que E^+P es el borde de un conjunto futuro, obtenemos que E^+P es una hipersuperficie topológica cerrada acronal y compacta, ya que por la proposición 8.1 P es futura atrapada. $\square$

Demostración.

Dado un $X \in \mathfrak{X}(M)$ temporal sus curvas integrales son temporales, si consideramos $p \in M$ el mapa ρ tal que $p \mapsto p' \in S$ como el punto de intersección de S con la única curva integral que pasa por p, el mapa $\rho\mid_{E^+P}: E^+P \to \rho(E^+P) \subseteq S$ es un homeomorfismo. $\therefore \rho(E^+P)$ es abierto; y cerrado también pues E^+P es compacto $\Rightarrow \rho(E^+P)$ es compacto, en particular cerrado. Como S es conexa $\Rightarrow \rho(E^+P) = S$. Como E^+P es acronal, la condición fuerte de causalidad y S hip de Cauchy garantiza que E^+P es intersecada por cada curva temporal inextendible, i.e., E^+P es una hip de Cauchy. $\square$

Corolario 8.1

Suponiendo 1), 2) y 3) y que la hipersuperficie de Cauchy es no compacta, entonces M es nula incompleta al futuro.

Demostración.

En la prueba anterior vimos que $\rho(E^+P) = S$, entonces $\rho(E^+P)$ es no compacto pues S no lo es, como ρ es continuo se sigue que E^+P no es compacto, por lo tanto no es futura atrapada. Pero si suponemos 1), 2) y 3) podemos aplicar la proposición 8.1 y obtenemos que P es futura atrapada, lo cual es absurdo. Así M tiene que ser nula incompleta al futuro. $\square$

Corolario 8.2

Suponiendo 1), 2), 3) y que hay una curva causal inextendible que no interseca E^+P, entonces M es nula futura incompleta.

Demostración.

Si suponemos que M es futura nula completa, dado que estamos suponiendo ciertas 1), 2) y 3) podemos aplicar el teorema de Penrose y obtener que E^+P es una hipersuperficie de Cauchy, pero por el lema 6.1 E^+P al ser hipersuperficie de Cauchy debe ser intersecada por cada curva causal inextendible , esto contradice la hipótesis que dice que hay una de esas curvas que no interseca E^+P. Por lo tanto M tiene que ser nula incompleta al futuro. $\square$

Bibliografía

Referencia principal y pruebas tomadas de [1].

B. O'neill.
Semi-Riemannian geometry with applications to relativity.
Academic press, 1983.