Causalidad O'Neill

Lema 2.- Si $\mathcal{C}$ es un abto convexo en M, ent

1) Para $p \neq q \in \mathcal{C}$, $q \in J^+(p, \mathcal{C}) \iff \overrightarrow{pq}$ es causal al futuro (análogamente para I^+).

2) $I^+(p, \mathcal{C})$ es abto en $\mathcal{C}$ (por tanto en M)

3) $J^+(p, \mathcal{C})$ es la clausura en $\mathcal{C}$ de $I^+(p, \mathcal{C})$.

4) La relación $\leq$ es cerrada en $\mathcal{C}$; esto es si $\{p_n\} \to p$ & $\{q_n\} \to q$ con todos los puntos en $\mathcal{C}$, ent $q_n \in J^+(p_n, \mathcal{C}) \Rightarrow q \in J^+(p, \mathcal{C})$.

5) Una curva causal contenida en un conjunto compacto $K \subseteq \mathcal{C}$ es (continuamente) extendible.

Dem.

1) Recordemos que si $\alpha: I \to M$ es una curva que une p con q & $I = [0,1]$, ent $\overrightarrow{pq} := \alpha'(0)$ & $\alpha(0) = p, \alpha(1) = q$.

Sup que $\overrightarrow{pq}$ es causal al futuro, ent como $p, q \in \mathcal{C}$ & $\mathcal{C}$ es convexo, $\exists! \alpha: [0,1] \to \mathcal{C}$ geodésica causal en $\mathcal{C}$ t.q. $\alpha(0) = p$ & $\alpha(1) = q$ & $\alpha'(0) = \overrightarrow{pq}$, $\Rightarrow \langle \alpha'(0), \alpha'(0) \rangle \leq 0$.

Pero $\frac{d}{dt} \langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle = 2 \langle \cancel{\alpha''(t)}^{=0}, \alpha'(t) \rangle = 0$

$\Rightarrow |\alpha'(t)|^2 = |\alpha'(0)|^2 = cte \leq 0$. $\therefore \alpha$ es una curva causal que une p con q, i.e., $q \in J^+(p, \mathcal{C})$.

$\Leftarrow$) Sea $q \in J^+(p, \mathcal{C})$. Como $p \in \mathcal{C}$ & $\mathcal{C}$ es convexo, ent $\mathcal{C}$ es vecindad normal de p, ent $\exp_p: \tilde{\mathcal{C}} \subseteq T_pM \to \mathcal{C} \subseteq M$ es difeo & $\exp_p 0 = p$. Si $\exp_p \tilde{q} = q$, sea $\tilde{\alpha}: I \to T_pM$ t.q. $\exp_p \tilde{\alpha}(t) = \alpha(t) \Rightarrow \tilde{\alpha}(0) = 0$ & $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{q}$, por el lema 5.33 la curva $\tilde{\alpha}$ permanece en el mismo cono causal de T_pM tal como tiene que ser $J^+(0)$ pues la curva α está dirigida al futuro ~~$(0 \geq \langle \alpha'(0), \alpha'(0) \rangle = \langle (\exp_p \circ \alpha)'(0), (\exp_p \circ \alpha)'(0) \rangle$ $= \langle d\exp_{\alpha(0)}(\alpha'(0)), d\exp_{\alpha(0)}(\alpha'(0)) \rangle = \langle \alpha'(0), \alpha'(0) \rangle)$~~.

Ent $q \in J^+(0)$, & $\vec{pq} = \alpha'(0) = d\exp_{\tilde\alpha(0)}(\tilde\alpha'(0)) = d\exp_0(\tilde\alpha'(0))$
$= \tilde\alpha'(0)$ la curva $\tilde\alpha$ es causal al futuro.
$\therefore \vec{pq}$ es causal al futuro.

2) Sea $\tilde{\mathcal{C}} \subseteq T_pM$ t.q. $\exp_p \tilde{\mathcal{C}} = \mathcal{C}$, ent $\tilde{\mathcal{C}}$ es abto en $\tilde{\mathcal{C}}$ & $I^+(0)$ también $\Rightarrow$ $I^+(0) \cap \tilde{\mathcal{C}}$ también como $\exp_p$ es difeo en $\tilde{\mathcal{C}}$ ent $\exp_p(I^+(0) \cap \tilde{\mathcal{C}})$ es abto, así si probamos que $I^+(p,\mathcal{C}) = \exp_p(I^+(0) \cap \tilde{\mathcal{C}})$ ent ya acabamos. Sea $q \in \exp_p(I^+(0) \cap \tilde{\mathcal{C}}) \Rightarrow$ sea $\tilde q \in I^+(0) \cap \tilde{\mathcal{C}}$ t.q. $\exp_p \tilde q = q \Rightarrow \tilde q \in I^+(0) \Rightarrow \exists$ recta temporal al futuro que une 0 con $\tilde q$ en $\tilde{\mathcal{C}}$ $\Rightarrow \alpha(t) = \exp_p \circ l(t)$ es la única geodésica al futuro que va de p a q $\Rightarrow$ como l es temporal se tiene que $\vec{pq}$ también, por inciso anterior $q \in I^+(p,\mathcal{C})$.
$\therefore \exp_p(I^+(0) \cap \tilde{\mathcal{C}}) = I^+(p,\mathcal{C})$.

Si $q \in I^+(p,\mathcal{C}) \Rightarrow \vec{pq}$ es temporal al futuro, sea $\tilde q \in T_pM$ con $\exp_p \tilde q = q \Rightarrow$ la recta que va de 0 a $\tilde q$ también es temporal $\Rightarrow \tilde q \in I^+(0) \Rightarrow \tilde q \in I^+(0) \cap \tilde{\mathcal{C}} \Rightarrow q \in \exp_p(I^+(0) \cap \tilde{\mathcal{C}})$
$\therefore I^+(p,\mathcal{C}) \subseteq \exp_p(I^+(0) \cap \tilde{\mathcal{C}}) \Rightarrow I^+(p,\mathcal{C}) = \exp_p(I^+(0) \cap \tilde{\mathcal{C}})$
así $I^+(p,\mathcal{C})$ es abto.

3) $J(p,\mathcal{C}) = \overline{I^+(p,\mathcal{C})}$: Mostraremos que
$\overline{I^+(p,\mathcal{C})} \overset{\checkmark}{=} \exp_p(J^+(0) \cap \tilde{\mathcal{C}}) \overset{\checkmark}{=} \exp_p(\overline{I^+(0)} \cap \tilde{\mathcal{C}})$.

Si $q \in \exp_p(J^+(0) \cap \tilde{\mathcal{C}}) \Rightarrow \tilde q \in \tilde{\mathcal{C}}$ y el vector que va de 0 a $\tilde q$ es causal al futuro $\Rightarrow \vec{pq}$ es causal al futuro $\Rightarrow q \in J^+(p,\mathcal{C})$.
Si $q \in J^+(p,\mathcal{C}) \Rightarrow \vec{pq}$ es causal al futuro $\Rightarrow$ el vector que va de 0 a $\tilde q$ también $\Rightarrow \tilde q \in J^+(0)$ & $\tilde q \in \tilde{\mathcal{C}} \Rightarrow \tilde q \in J^+(0) \cap \tilde{\mathcal{C}}$
$\Rightarrow q \in \exp_p(J^+(0) \cap \tilde{\mathcal{C}})$ $\therefore \overline{I^+(p,\mathcal{C})} = \exp_p(\overline{I^+(0)} \cap \tilde{\mathcal{C}})$
$= \exp_p(J^+(0) \cap \tilde{\mathcal{C}}) = J^+(p,\mathcal{C})$. ∎

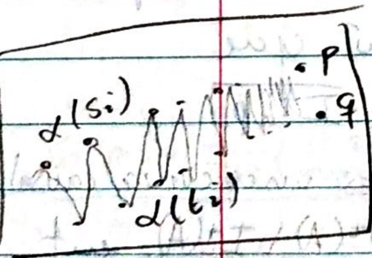
4): La relación $\leq$ es cerrada: Sea $\overrightarrow{pq}: \mathcal{C}\times\mathcal{C} \to TM$ tal función es continua, si $p_n \to p$ & $q_n \to q$, sup $q_n \in J^+(p_n, \mathcal{C})$ $\Rightarrow$ $\overrightarrow{p_nq_n}$ es causal al futuro y $\lim_{n\to\infty} \overrightarrow{p_nq_n} = \overrightarrow{pq}$ & como $\langle \cdot,\cdot \rangle$ es continuo y cada $\overrightarrow{p_nq_n}$ es causal $\Rightarrow \langle \overrightarrow{p_nq_n}, \overrightarrow{p_nq_n} \rangle \leq 0$.

$\Rightarrow \langle \lim_{n\to\infty} \overrightarrow{p_nq_n}, \lim_{n\to\infty} \overrightarrow{p_nq_n} \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \overrightarrow{p_nq_n}, \overrightarrow{p_nq_n} \rangle$

$= \langle \overrightarrow{pq}, \overrightarrow{pq} \rangle \leq 0$ y por la misma continuidad se preserva la orientación en el sentido de que si $\overrightarrow{p_nq_n}$ está dirigido al futuro $\Rightarrow$ $\overrightarrow{pq}$ también, ent $\overrightarrow{pq}$ es causal al futuro $\Rightarrow$ $q \in J^+(p, \mathcal{C})$. $\therefore \leq$ es cerrada. $\blacksquare$

5) Una curva causal α contenida en un subconjunto compacto K de $\mathcal{C}$ es (continuamente extendible).

Sup $\alpha: [0, B)$ con $B \leq \infty$. Como K es compacto, ent $\exists \{s_i\} \subseteq [0, B)$ t.q $s_i \to B$, digamos $\{\alpha(s_i)\}$ es t.q $\alpha(s_i) \to p \in K$. Mostremos que cada sucesión converge a p. Sea $\{t_i\} \to B$ pero que $\{\alpha(t_i)\} \to q \neq p$. pero por 4)



$q \in J^+(p, \mathcal{C})$ & $p \in J^+(q, \mathcal{C})$, por lo tanto $\overrightarrow{pq}$ tiene que estar tanto orientado al futuro como al pasado. $\therefore \alpha$ es extendible continuamente a $[0, B]$. $\blacksquare$

Lema 3: La relación $\ll$ es abierta, i.e., si $p \ll q$ en M, ent $\exists\, U, V \subseteq M$ vecindades de p & q respect. t.q $p' \ll q'$ $\forall p' \in U$ & $\forall q' \in V$.

Dem: Sea σ una curva temporal de p a q. Si $\mathcal{C}$ es una vecindad convexa de q, sea $q^- \in \mathcal{C}$ un punto σ antes que q.

Similarmente sea $\mathcal{C}'$ vecindad convexa de p y sea p^+ un punto de σ en $\mathcal{C}'$, p^+ entre p y q^-

por el Lema anterior, $I^+(q^-, \xi)$ & $I^-(p^+, \xi')$ son abtos en M. Los conjuntos $q \in I^+(q^-, \xi) = V$ & $p \in I^-(p^+, \xi') = U$ son abtos buscados. ■

Corolario 2.8 (Tesis Eduardo). Para cualquier subconjunto $A \subseteq M$, $I^+(A)$ es abto.

Dem: P.d $I^+(p)$ es abto. P.d $I^+(p) = \text{int}\, I^+(p)$.

Sea $p \in M$ & $q \in I^+(p) \Rightarrow p \ll q$, por la proposición anterior $\exists U$ abto en M con $q \in U$ t.q $\forall q' \in U$ se tiene que $p \ll q'$ i.e., $U \subseteq I^+(p) \Rightarrow q \in \text{int}\, I^+(p)$

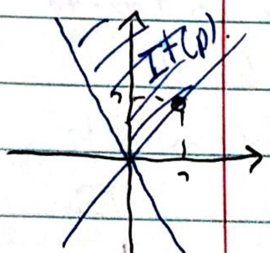
$\Rightarrow I^+(p) \subseteq \text{int}\, I^+(p)$, ~~Sabemos también que~~

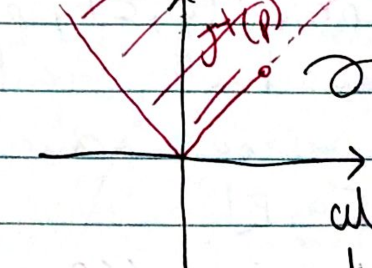
Por definición $\text{int}\, I^+(p) \subseteq I^+(p)$. $\therefore I^+(p) = \text{int}\, I^+(p)$.

$\therefore I^+(p)$ es abto. Como $I^+(A) = \bigcup_{p \in A} I^+(p)$ ent $I^+(A)$ es abto en M $\forall A \subseteq M$. ■

Obs: En contraste con $\mathbb{R}^n_1$, para M Lorentz arbitraria los conjuntos $J^+(p)$ no necesariamente son cerrados.

Ejemplo 4.- Sea $M = \mathbb{R}^2_1$ con un punto menos, i.e., $M = \mathbb{R}^2_1 \setminus (1,1)$. Sea $p = (0,0)$. $I^+(p)$ es el cono usual temporal.

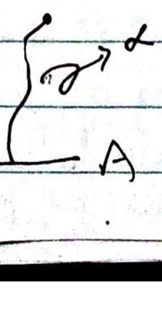




Tenemos aquí que $\sigma \xrightarrow{s} J^+(p)$. $J^+(p) \subsetneq \overline{I^+(p)}$

Corolario 5.- Si α es una curva causal al futuro de A a $q \in J^+(A) \setminus I^+(A)$, ent α es un geodésica nula que no tiene puntos conjugados antes de q & no meet $I^+(A)$.

Dem: Consecuencia de 10.51. ■



!Hay al menos un punto donde β es nula

Obs: $J^+(A)$ es la unión de $I^+(A)$, A y posiblemente algunas geodésicas nulas de A.

Lema 6.- Sea $A \subseteq M$. 1) $\text{int}\, J^+(A) = I^+(A)$.
2) $J^+A \subseteq \overline{I^+A}$ con la igualdad si y sólo si J^+A es cerrado.

Dem: Como I^+A es abto & $I^+A \subseteq J^+A \Rightarrow I^+A \subseteq \text{int}\, J^+A$.
Si $q \in \text{int}\, J^+A$, ent para una vecindad convexa de $\mathcal{C}$ de q, $I^-(q, \mathcal{C})$ contiene un punto de $J^+A \Rightarrow q \in I^+J^+A = I^+A$.
$\therefore \text{int}\, J^+A \subseteq I^+A$. Por lo tanto $I^+A = \text{int}\, J^+A$.

2) Como $I^+A \subset J^+A \Rightarrow \overline{I^+A} \subset \overline{J^+A}$ si J^+A es cerrado
$\Rightarrow \overline{I^+A} \subset J^+A$ y como siempre sucede que $J^+A \subset \overline{I^+A}$
$\Rightarrow J^+A = \overline{I^+A}$ si J^+A es cerrado.
Si $J^+A = \overline{I^+A} \Rightarrow J^+A$ es cerrado pues $\overline{I^+A}$ lo és.

$J^+A \subset \overline{I^+A}$: Basta ver que $J^+(p) \subset \overline{I^+(p)}$.
Es claro que $p \in \overline{I^+(p)}$, ent supondremos que $p < q$.
Sea α curva causal al futuro de p a q. Si $\mathcal{C}$ es vecindad convexa de q, sea q^- un punto de α en $J^-(q, \mathcal{C})$.
Por Lema 2 $q \in J^+(q^-, \mathcal{C}) = \overline{I^+(q^-, \mathcal{C})}$. Pero $\overline{I^+(q^-, \mathcal{C}) \subseteq I^+J^+(p)}$
$= I^+p \Rightarrow q \in \overline{I^+(q^-, \mathcal{C})} \subseteq \overline{I^+(p)}$. $\therefore q \in \overline{I^+(p)}$
$\therefore J^+(p) \subseteq \overline{I^+(p)}$.

$$\therefore J^+A = \bigcup_{p \in A} J^+(p) \subseteq \bigcup_{p \in A} \overline{I^+(p)} \subseteq \overline{\bigcup_{p \in A} I^+(p)} = \overline{I^+A}. \blacksquare$$

§ Cuasi-limites.

Def 7.- Sea $\{\alpha_n\}$ una sucesión infinita de curvas causales al futuro en M, sea $\mathcal{R}$ el ~~[illegible]~~ cubierta convexa de M.
Una sucesión límite para $\{\alpha_n\}$ relativa a $\mathcal{R}$ es una sucesión (finita o infinita) $p = p_0 < p_1 < \ldots$ en M t.q
(L1) Para cada p_i $\exists \{\alpha_{n_k}\}$ subsucesión de $\{\alpha_n\}$ y para cada n_k $\exists$ $s_{n_k 0} < s_{n_k 1} < \ldots < s_{n_k i}$ t.q
a) $\lim_{n_k \to \infty} \alpha_{n_k}(s_{n_k j}) = p_j$ para cada $j \leq i$

b) Para cada $j<i$ los puntos p_j, p_{j+1} y los segmentos

$\alpha_{n_K} \mid [s_{n_K j}, s_{n_K (j+1)}] \subset \mathcal{C}_j \quad \forall n_K \in \mathcal{R}$

(L2) Si $\{p_i\}$ es infinita, esta no es convergente. Si $\{p_i\}$ es finita, tiene más de un punto & ninguna sucesión estrictamente más larga satisface (L1).

Prop 8.- Sea $\{\alpha_n\}$ una sucesión de curvas causales al futuro t.q $\{\alpha_n(0)\} \to p$ pero $\{\alpha_n\} \not\to p$ ($\nexists$ U vecindad de p ~~t.q~~ que solo tiene tiene un número finito de curvas α_n.). Ent relativa a cualquier cubriente convexo $\mathcal{R}$, $\{\alpha_n\}$ tiene una sucesión límite que empieza en p.

Dem: Ya que M es paracompacto, tiene una cubienta localmente finita $\mathcal{R}'$ por abtos $\mathcal{B}$ t.q $\overline{\mathcal{B}}$ es compacto y contenido en algún miembro de $\mathcal{R}$. Por hipótesis en $\{\alpha_n\}$

... Demostración en Semi-Riem (O'Neill) pags 405, 406.

Si $\{p_i\}$ es una sucesión límite para $\{\alpha_n\}$ como arriba.
Sea λ_i la geodésica (causal al futuro) de p_i a p_{i+1} en un conjunto convexo $\mathcal{C}_i$ como en (L1). La geodésica a trozos $\lambda = \sum \lambda_i$ es llamada cuasi-límite de $\{\alpha_n\}$ con vertices p_i
Así λ es una geodésica al futuro causal a trozos que empieza en p. Si $\{p_i\}$ es finita, ent por (L2) λ es inextendible al futuro.
& en el caso $p_0 < \dots < p_K$ la curva va de p_0 a p_K.

Obs: Un cuasi-límite λ de curvas futuras inextendibles $\{\alpha_n\}$ es futura inextendible, ~~es claro~~ de la prueba de Prop 8 se sigue cada sucesión límite es infinita, por lo tanto λ será inextendible.

Ejemplo 9.-

Ejemplo 9.- En $\mathbb{R}^2_1$ sea α_n el segmento temporal geodésico de 0 a $(n+\frac{1}{n}, n)$. En cualquier sucesión límite para $\{\alpha_n\}$ los vértices deben estar en la geodésica nula $\lambda(s) = (s, s)$, $s \geq 0$, de hecho, con 0 como punto inicial λ es el único cuasi-límite. Sea $M = \mathbb{R}^2_1 \setminus (1,1)$. Ent, $\{\alpha_n\}$ tiene el único cuasi límite $\beta = \lambda|[0,1)$ la cual es futuro inextendible e incompleta en M. Note que solamente decreciendo segmentos iniciales pequeños de las curvas α_n son β.

§ Condiciones de causalidad

Def: Si M NO contiene curvas ~~...~~ cerradas temporales decimos que la condición de cronologías se cumple en M

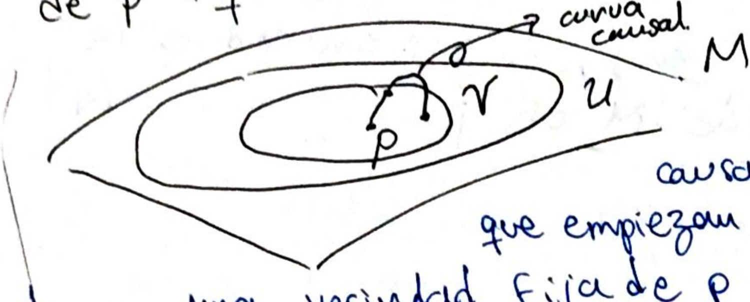
Lema 10.- (Conjuntos compactos no cumplen la condición de cronología) Si M es compacto, ent esta contiene un curva cerrada temporal.

Dem.: Como M es compacto la cubierta abta $\{I^+(p) ; p \in M\}$ tiene una subcubierta $I^+(p_1), \dots, I^+(p_K)$. Podemos asumir que $I^+(p_1) \not\subseteq I^+(p_i)$ $i \neq 1$. Pero si $p_1 \in I^+(p_1)$, ent $\exists$ curva temporal de p_1 a p_1, i.e., $\exists$ curva cerrada temporal. Si $p_1 \in I^+(p_i)$, $i \neq 1$, ent $I^+(p_1) \subseteq I^+(p_i)$, así sucesivamente tenemos que o bien, $\exists p_j \in M$ con $p_j \in I^+(p_j)$ o bien $M = I^+(p_K) \Rightarrow p_K \in I^+(p_K)$ y tendriamos nuevamente que $\exists$ curva cerrada temporal. $\boxtimes$

Decimos que M cumple la condición de causalidad siempre que no existan curvas causales ~~...~~ cerradas

3/Junio/2020.

Def: La condición fuerte de causalidad se cumple en $p\in M$ siempre dada cualquier vecindad U de p hay una vecindad $V\subseteq U$ de p t.q cada segmento de curva causal con puntos finales en V vive enteramente en U.



Obs: La condición fuerte de causalidad nos dice que las curvas causales que empiezan arbitrariamente cerca a p y dejan una vecindad fija de p no puede regresar arbitrariamente arbitrariamente cerca de p. Dicho de otro modo no hay curvas causales "casi" cerradas en p. Y por tanto no hay curvas causales cerradas. Así

condición fuerte de causalidad $\Longrightarrow$ condición de causalidad.

Nata: el converso no es cierto

Ejemplo 12:- Consideremos $M=S^1_1\times\mathbb{R}^1$ y eliminamos 2 medias rectas con puntos finales sobre una geodésica nula.

La condición de causalidad se cumple pero no la condición fuerte de causalidad (en el caso de puntos sobre la geodésica nula en la curva "lineada".

Lema 13.- Supongamos que la condición fuerte causalidad se cumple en subconjunto compacto $K\subseteq M$. Si α es una curva causal al futuro in-extendible que empieza en K, ent α eventualmente deja K para nunca volver; esto es, hay un $s>0$ t.q $\alpha(t)\notin K$ $\forall t>s$.

Dem: Supongamos que la conclusión es falsa, ent α o se queda en K o regresa. Así, si el dominio de α es $[0,B)$, $B\leq\infty$, existe una sucesión $\{s_i\}$ en $[0,B)$ t.q $s_i\to B$ y $\{\alpha(s_i)\}$ está contenida en K. Ent, para una subsucesión $\{\alpha(s_j)\}\to p\in K$. Ya que α no tiene punto futuro final, tiene que existir otra sucesión $\{t_j\}$ convergiente a B t.q $\alpha(t_j)\not\to p$.

Para otra subsucesión podemos suponer que alguna vecindad $\mathcal{U}$ de p no contiene un $\alpha(t_j)$. Ya que $s_j, t_j \to B$ tienen subsucesiones alternadas $s_1 < t_1 < s_2 < t_2 < \dots$, Así las curvas $\alpha|[s_k, s_{k+1}]$ son "casi cerradas" en p, lo que contradice la condición fuerte de causalidad de M en p. ∎

⚠ ~~Tho~~ Lo siguiente será el paso principal en construir una geodésica que une los puntos $p < q$.

Lema 14: Supongamos que la condición fuerte de causalidad se cumple en un subconjunto compacto K. Sea $\{\alpha_n\}$ una sucesión de segmentos de curvas causales al futuro en K tq. $\{\alpha_n(0)\} \to p$ & $\{\alpha_n(1)\} \to q \neq p$. Entonces hay una geodésica causal al futuro a trozos λ de p a q y una subsucesión $\{\alpha_m\}$ de $\{\alpha_n\}$ tq. $\lim_{m\to\infty} L(\alpha_m) \leq L(\lambda)$.

Dem: Leen en O'Neill.

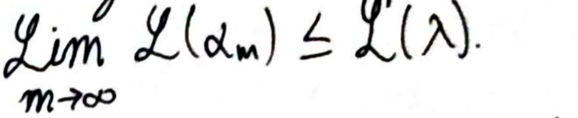
6/7/2020

§ Separación temporal. M variedad Lorentz, orientada temporalmente.

Def 15: Si $p, q \in M$, ~~the~~ la separación temporal $\tau(p,q)$ de p a q es $\sup\{L(\alpha) : \alpha$ es un segmento de curva causal al futuro de p a $q\}$.

Aquí $\tau(p,q) = \infty$ si el conjunto de curvas es no acotado y $\tau(p,q) = 0$ si tal conjunto es vacío, i.e., $q \in J^+(p)$.

Nota: podemos ver $\tau(p,q)$ como el tiempo propio del viaje más lento de p a q



Ejemplo: $M: S^1 \times \mathbb{R}^1$

$\tau(p,q) = \infty$.

τ maximiza & d minimiza.

τ es simétrica solo en caso triviales (por la orientación temp).

Lema 16.- 1) Si $\tau(p,q)>0 \Leftrightarrow p\ll q$

2) Desigualdad inversa del triangulo: Si $p\le q\le r$, ent
$$\tau(p,q)+\tau(q,r)\le\tau(p,r).$$

Dem: 1) Si $\tau(p,q)>0$, ent hay una curva causal al futuro α t.q $\mathcal{L}(\alpha)>0$, ent esta curva no es nula, aproximando por una deformación de punto fijo de α a una curva temporal, tenemos que $p\ll q$.

Si $p\ll q$, ent $\exists\alpha$ curva temporal al futuro que une p con q y es t.q ~~$\mathcal{L}(\alpha)\geq 0$~~ $0<\mathcal{L}(\alpha)<\sup\{\alpha: \sim\} = \tau(p,q)$.
α une p con q

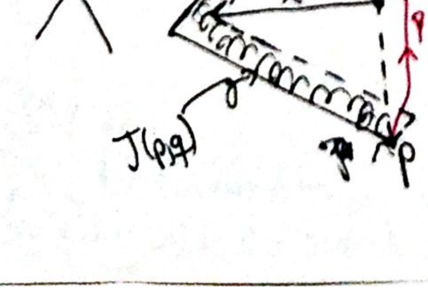
2). Si hay curvas causales ~~de~~ al futuro α de p a q y β de q a r, ent para cualquier $\delta>0$ podemos tomar α y β con longitudes entre $\tau(p,r)\,\tau(p,q)-\delta/2$ y $\tau(p,q)$ y $\tau(q,r)$ respect. Ent
$$\tau(p,r)\geq\mathcal{L}(\alpha+\beta)=\mathcal{L}(\alpha)+\mathcal{L}(\beta)\geq\tau(p,q)-\frac{\delta}{2}+\tau(q,r)-\frac{\delta}{2}$$
$$=\tau(p,q)+\tau(q,r)-\delta \quad \forall\delta>0.$$
$$\therefore \tau(p,r)\geq\tau(p,q)+\tau(q,r).$$ $\boxed{\Xi}$

Lema 17.- La función separación temporal es semicontinua ~~por~~ inferior.
$$\tau: M\times M\to[0,\infty]$$

Dem: O'Neill pág 410

Nota: $J(p,q)=J^+(p)\cap J^-(p)$

Ejemplo 18.- La separación temporal no necesariamente es continua.



$\mathbb{R}^2_1\setminus\{\ell\}$. Para puntos p y q como en el dibujo $J(p,q)$ τ no es continua para $\varepsilon>0$ pequeño, cada segmento causal de p a q es "cercanamente" nulo. por tanto "corto" en longitud, sin embargo para puntos q' arbitrariamente cerca de q, nuevas rutas causales como β son ahora largas $L(\beta)$.

Dados $A, B \subseteq M$, $\tau(A,B) = \sup\{\tau(p,q) : p \in A \ q \in B\}$

Prop 19: Para $p < q$, si el conjunto $J(p,q) = J^+(p) \cap J^-(q)$ es compacto y se la condición fuente de causalidad se cumple, ent $\exists$ una geodésica causal ~~tag~~ de p a q con longitud $\tau(p,q)$.

Dem: Sea $\{\alpha_n\}$ una curva causal al futuro atrozos de p a q t.q $L(\alpha_n) \to \tau(p,q)$, ~~esta~~ $\{\alpha_n\} \subseteq J(p,q)$, por el Lema 14 hay una geodésica ~~tg~~ causal a trozos λ de p a q y

$$\lim L(\alpha_n) \leq L(\lambda) \quad \text{pero por hipótesis } L(\alpha_n) \to \tau(p,q)$$

$$\Rightarrow \lim L(\alpha_n) = \tau(p,q) = L(\lambda).$$

Si λ tiene esquinas, hay una curva causal más larga de p a q (10.3 & 10.46), lo cual no puede ser, por definición de $\tau(p,q)$.

$\therefore \lambda$ no tiene esquinas. $\blacksquare$

Def (Globalmente hiperbólico): Decimos que M es globalmente hiperbólico si la condición fuente de causalidad se cumple y $\forall p < q$, $J(p,q)$ es compacto.

Obs: $\mathbb{R}^n_1$ es globalmente hiperbólico, sea $\mathbb{R}^n_1 \setminus \{p\}$

- Remover puntos destruye globalmente hiperbólico, ~~...~~ $p' \in J^+(p)$ (con respect $\mathbb{R}^n_1$). consideremos $J(p, q^0)$ con ~~...~~ considerar $\{q_n\} \to p'$, tal sucesión ~~ha~~ hace que $p \in J^+(p)$ con respect $\mathbb{R}^n_1 \setminus \{p'\}$. $\therefore J^+(p,q)$ NO es compacto en $\mathbb{R}^n_1 \setminus \{p'\}$. $\therefore$ No es globalmente hiperbólico

Def 20: Un subconjunto $\mathcal{H}$ de M es globalmente hiperbólico siempre que (1) se cumple la condición fuente de causalidad. y 2) si $p, q \in \mathcal{H}$ con $p < q$ ent $J(p,q)$ es compacto y $J(p,q) \subseteq \mathcal{H}$.

Obs: la def anterior no es intrínseca a $\mathcal{H}$

- Por prop 19 en $\mathcal{H}$ globalmente hiperbólico si $p < q \Rightarrow \exists \alpha$ geodésica causal al futuro t.q $L(\alpha) = \tau(p,q)$ de p a q

Lema 2.1.- Si U es un conjunto abierto globalmente hiperbólico, ent la función separación temporal $\tau: U\times U \to \mathbb{R}$ es continua.

Dem: Sabemos que τ es semicontinua inferior, sup que τ no es semicontinua superior en $(p,q)\in U\times U$. Así $\exists\ \delta>0$ y $\{p_n\}\to p$ y $\{q_n\}\to q$ t.q $\tau(p_n,q_n)\geq \tau(p,q)+\delta$ $\forall n$.
Ya que $\tau(p_n,q_n)>0$, ent hay una curva causal α_n de p_n a q_n t.q $L(\alpha_n)>\tau(p_n,q_n)-1/n$, ya que U es abierto, ent $\exists p^-$ y q^+ t.q $p^- \ll p$ y $q^+ \gg q$, podemos suponer que $\{p_n\}\in I^+(p^-)$ y $\{q_n\}\in I^-(q^+)$ respect. Ent dado que α_n son causales de p_n a q_n y $p_n\in I^+(p^-)$ y $q_n\in I^-(q^+)$, ent $\alpha_n \in K = J(p^-,q^+)$. Ya que

U es globalmente hiperbólico, el lema 14 implica que $\exists\lambda$ curva causal t.q $L(\lambda)\geq\tau(p,q)+\delta$. pues $\tau(p,q)$ es ~~cota super~~ supremo de las λ's.
$\therefore$ τ es semicontinua sup y $\therefore$ τ es continua. ■

Lema 2.2: Si $U\subseteq M$ es globalmente hiperbólico y abto, la relación de causalidad $\leq$ de M es cerrada en U.

Dem: si $p_n=q_n$ para infinitos ✓. Sup $p_n<q_n$ es t.q $p_n\to p$ y $q_n\to q$ con $p_n\leq q_n$. Sea α_n la curva causal de p_n a q_n, por el lema anterior $\alpha_n\in J(p^-,q^+)$, si $p\neq q \Rightarrow$ el lema 14 implica que $\exists\lambda$ causal de p a q, i.e., $p<q$. ■

Obs: En particular si M es globalmente hiperbólico, ent $J^+(p)$, $J^-(p)$ y $J(p,q)$ son cerrados.

§ Conjuntos acronales

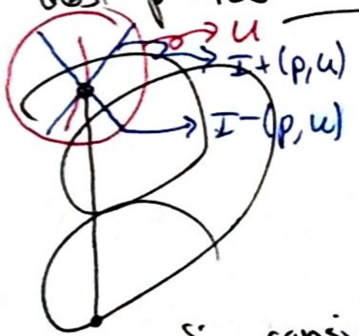
Def: (conjunto acronal) Sea $A \subseteq M$ es <u>acronal</u> siempre que $p \not\ll q$ para $p, q \in A$, esto es, ninguna curva temporal se cruza con A más de una vez.

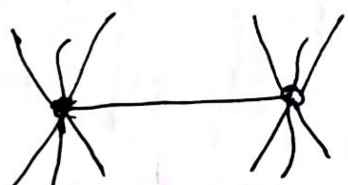
Por ejemplo un hiperplano con $t=\text{const}$ es acronal. Obviamente $B \subseteq A$, con A acronal es acronal. Por tener $\exists$ $\bar{A}$ es acronal si A lo es.

$\Rightarrow$ A es acronal

Def: El <u>borde de un conjunto A acronal</u> consiste de todos los puntos $p \in \bar{A}$ t.q cada vecindad U de p contiene una curva temporal de $I^-(p,U)$ a $I^+(p,U)$ que no intersecta A.

Ejemplo: En $\mathbb{R}^2_1$ el intervalo $A = \{(0,x) : \cancel{0 \le x \le 1}\} = \cancel{\{0\} \times [0,1]}\ [0,1] \times \{0\}$ es acronal y tiene ~~dos~~ puntos <u>borde</u> $\cancel{(0,0)}$ ~~y~~ $(0,1)$ $(0,0)$ y $(1,0)$





Si consideramos $A \subseteq \mathbb{R}^3_1$ ent $\mathrm{bd}(A) = \bar{A}$.

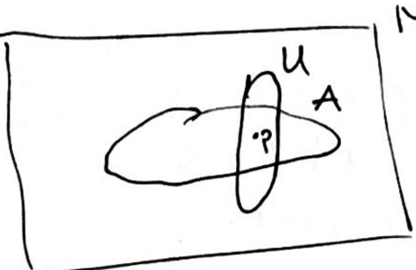
Def 24: Un subespacio S de T es una hipersuperficie topológica siempre que para cada $p \in S$ hay una vecindad U de p en T y un homeomorfismo $\phi : U \subseteq T \to \mathbb{R}^n$ uno-uno sobre un abierto $\phi(U)$ t.q $\phi(U \cap S) = \phi(U) \cap \Pi$ donde Π es un hiperplano en $\mathbb{R}^n$. Ent S es $(n-1)$-dimensional variedad topológica.

Ejemp: el cono de luz $\Lambda^+(0) \subseteq \mathbb{R}^n_1$ es una hipersuperficie topológica ya que el mapa $(t,x) \mapsto (t-|x|, x)$ es homeo uno-uno y lleva al cono en el hiperplano $t=0$.

Prop 25: Un conjunto no cronológico A es una hipersuperficie topológica si y sólo si A no contiene puntos borde ($A \cap \mathrm{bd}(A) = \emptyset$).

Dem: $\longrightarrow$

Dem: $\Rightarrow$) Sea $A \subseteq M$ no cronológico una hipersuperficie topológica
Si $p \in A$, sea U una vecindad coordenada en p. Sup U es conexa y $U \setminus A$ tiene dos componentes.



Como A es no cronológico, $I^+(p,U)$ y $I^-(p,U)$ son abtos y tales que $I^+(p,U) \cap A = \emptyset = I^-(p,U) \cap A$ pues si $\exists q \in I^+(p,U)$ con $q \in A \Rightarrow q \in U$ y $p \ll q$ con $p, q \in A$, lo que contradice que A es no cronológico $\Rightarrow I^+(p,U) \cap A = \emptyset$, Similarmente $I^-(p,U) \cap A = \emptyset$ además $I^+(p,U)$, $I^-(p,U)$ son conexos pues U lo es. Y también se tiene que $I^+(p,U) \cap I^-(p,U) = \emptyset$, ya que si $\exists q \in I^+(p,U) \cap I^-(p,U) \Rightarrow \exists$ curva temporal de q a q que pasa por $p \Rightarrow p \ll p$ pero $p \in A$, esto nuevamente contradice no cronología.

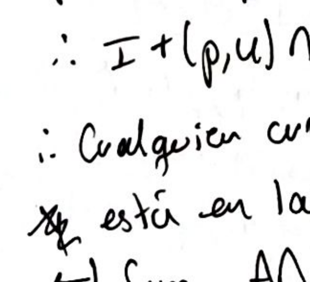
$\therefore I^+(p,U) \cap I^-(p,U) = \emptyset. \Rightarrow I^+(p,U), I^-(p,U) \subseteq U \setminus A$.

$\therefore$ Cualquier curva temporal que va de $I^-(p,U)$ a $I^+(p,U)$ ~~cruza~~ está en las dos componentes $U \setminus A$. $\therefore p \in bd(A)$.

$\Leftarrow$) Sup $A \cap bd(A) = \emptyset$. Si $p \in A$, consideremos U vecindad coordenada. con $\xi = (x^0, \dots, x^{n-1})$ sistema de coordenadas t.q. ∂_0 es temporal al futuro.

De manera que podemos tomar $\mathcal{V}$ vecindad t.q

1) $\xi(\mathcal{V}) = (a-\delta, b+\delta) \times \mathcal{N} \subseteq \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^{n-1} = \mathbb{R}^n$.
2) La rebanada $x_0 = a$ de $\mathcal{V}$ está en $I^-(p,U)$, la rebanada $x_0 = b$ de $\mathcal{V}$ está en $I^+(p,U)$.



Para U suficientemente pequeño, sea $y \in \mathcal{N} \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$, la curva $s \mapsto \alpha(s) = \xi^{-1}(s, y)$ $(a \leq s \leq b)$ tiene que intersectar a A, pues $p \notin bd(A)$ y como A es no cronológico este puntos es único. Consideremos $h: \mathcal{N} \to (a,b)$ donde $h(y)$ es su coordenada x^0 por lo anterior h es uno-uno. Ahora tomamos $\phi: A \cap \mathcal{V} \to \mathbb{R}^n$ dada por $\phi = (x^0 - h(x^1, \dots, x^{n-1}), x^1, \dots, x^{n-1})$ basta probar que h es continua para que ϕ sea homeo que lleva $A \cap U$ en la rebanada $u^0 = 0$. de $\xi(\mathcal{V})$ $\therefore A$ sería una hipersuperficie topológica. Sean $y_n \to y$ en $\mathcal{N}$, sup $h(y_n) \not\to h(y)$ ent $\exists$ alguna subsucesión $h(y_m) \to r \neq h(y)$ (pues los valores de h están acotados). Ent $\xi^{-1}(y, r) \in I^-(q, \mathcal{V}) \cup I^+(q, \mathcal{V})$ donde $q = \xi^{-1}(y, r) \in A$ y lo mismo es cierto para algún $q' = \xi^{-1}(y_n, h(y_n)) \in A$) pues $\ll$ es abta.

$\therefore q \ll q'$ o $q \ll q'$ en A lo que contradice que A es no cronológico $\therefore h$ es continua $\therefore \phi$ es homeo $\therefore A$ es hipersuperficie topológica. $\blacksquare$

Corolario 26.- Un conjunto A no cronológico es una hipersupersuperficie topológica cerrada $\iff$ $bd(A)=\emptyset$.

Dem: $\Rightarrow$) Si A es una hipersuperficie cerrada ent por prop 25 $A \cap bd(A)=\emptyset$. Pero $bd(A) \subseteq \bar{A} = A$ pues A es cerrado $\Rightarrow bd(A)=\emptyset$.

$\Leftarrow$) sup $db(A)=\emptyset \Rightarrow A \cap bd(A)=\emptyset$, por prop 25 A es hipersuperficie topológica, Ahora tenemos que $\underline{\bar{A} \setminus A \subseteq bd(A)} = \emptyset$ ~~como~~ $\Rightarrow \bar{A}\setminus A = \emptyset$ pero $A \subseteq \bar{A} \Rightarrow \bar{A} = A \Rightarrow A$ es cerrado.

$\underline{\bar{A} \setminus A \subseteq bd(A)}$: Sea $q \in \bar{A}\setminus A$, notemos que $\bar{A}$ es no cronológico, ya que si $\exists p, q \in \bar{A}$ con $p \ll q$, ~~con p,q~~ como A es no cronológico ent p, q son puntos de acumulación para A, ent dados $I^+(p, A)$ y $I^+(q, A)$ hay puntos $p', q' \in A$ t.q $p' \neq p$ y $q' \neq q$ con $p' \in I^+(p, A)$ y $q' \in I^+(q, A) \Rightarrow q' \ll q \ll p \ll p' \Rightarrow q' \ll p'$ con $p, q' \in A$ lo que es absurdo, pues A es no cronológico. $\therefore \bar{A}$ es no cronológico. $\Rightarrow$ ninguna curva temporal que pasa por q puede intersecar A, pues si lo hace contradice que $\bar{A}$ es no cronológico. $\therefore q \in bd(A)$. $\blacksquare$

$\therefore \bar{A} \setminus A \subseteq bd(A)$ $\therefore \bar{A}$ es cerrado.

Corolario 27.- ~~Es~~ El borde (no vacío) de un conjunto futuro es una hipersuperficie topológica cerrada no cronológica.

Dem: Sea $p \in bd\, F$. Si $q \in I^+(p)$, ent $I^-(q)$ es vecindad de p y por tanto contiene un punto de F. Así $q \in I^+(F) \subseteq F$. Esto prueba que $I^+(p) \subseteq F$; ~~de la misma~~ similarmente podemos ver que $I^-(p) \subseteq M\setminus F$.

$\Rightarrow I^+(p) \cap I^-(p) = \emptyset \quad \forall p \in bd(F) \Rightarrow I^+(bd(F)) \cap I^-(bd(F)) = \emptyset$.

de manera que si sup $\exists p, q \in bd(F)$ t.q $p \ll q$, tomamos r en la curva temporal que une p con q entre p y q. $\Rightarrow r \in I^+(bd(F)) \cap I^-(bd(F)) \neq \emptyset$

por lo tanto $bd(F)$ es no cronológico, usando la prop anterior basta ver que $bd(bd(F)) = \emptyset$. Como $I^+(p) \subseteq F$ y $I^+(p)$ es abto, ent $I^+(p) \subseteq int\, F$, similarmente $I^-(p) \subseteq ext(F)$ $\forall p \in bd(F)$, así cualquier curva de $I^+(p)$ a $I^-(p)$ tiene que pasar por $bd F$ $\therefore$ ~~bd(F)~~ $= bd(bd(F)) = \emptyset$. $\blacksquare$

Por ejemplo, en $\mathbb{R}^4_1$. el cono de luz nulo. $\Lambda^+(p) = \mathrm{bd}\, J^+(p)$.
es una hipersuperficie topológica cerrada no acronal.

Def: Un subconjunto B de M es ~~acausal~~ no causal siempre que $p \not< q$ $\forall p, q \in B$

§ Hipersuperficies de Cauchy

Def 28:- Una hipersuperficie de Cauchy en M es un subconjunto S que es intersecado una sola vez por cada curva temporal inextendible en M.

Obs: $\mathbb{H}^{n-1}$ y $\Lambda(p)$ son no cronológicos pero no son hipersuperficies de Cauchy. Una variedad M puede no contener hipersuperficie de Cauchy. 30

Lema 29:- Una hipersuperficie de Cauchy S es una hipersuperficie topológica no cronológica cerrada. y es intersecada por cada curva causal inextendible.

Dem: ~~tenemos que $I^+(S) \cap S = \emptyset$, ya que si $\exists p \in I^+(S) \cap S$, ent~~
~~(*) $\exists q \in S$ t.q $q \ll p \Rightarrow \exists$ curva temporal que une p con q y cruza S en p y q, pues $p \in S$, lo cual contradice que S es hipersuperficie de Cauchy. Similarmente $I^-(S) \cap S = \emptyset$.~~
~~Ya que siempre dado punto p se puede tomar una curva temporal que pase por tal punto, y por la condición de ser de Cauchy tenemos que $M = I^+(S) \cup S \cup I^-(S)$, por (*) $I^+(S) \cap S = \emptyset = I^-(S) \cap S$.~~
~~y $I^+(S) \cap I^-(S) = \emptyset$~~

~~Podemos ver que $S \subseteq \partial I^+(S)$~~ Por def de hip de Cauchy $I^+(S) \cap S = \emptyset$ y $M = S \cup I^+(S) \cup I^-(S)$, ~~$I^+(S) \cap I^-(S) = \emptyset$~~
? $I^+(S) \cap I^-(S) = \emptyset$. De manera que cada curva temporal que pasa por S cruza de $I^+(S)$ a $I^-(S)$. Por lo tanto $S = \partial I^+(S) = \partial I^-(S)$, por el corolario 27, S es hip topológica no cronológica cerrada. Para ver que es intersecada por cada curva causal inextendible asumimos que α es curva causal no-extendible t.q no interseca S. Por definición sea $\alpha(0) \in I^+(S)$. Por lema 30 (más adelante), hay una curva temporal inextendible al pasado β que empieza en $I^+(S)$ que no cruza a S.

Cualquier curva temporal al futuro que empieza en $\beta(0)$ tiene que permanecer en $I^+(S)$, así uniendo tal curva con β obtenemos una curva inextendible temporal que no interseca S, lo cual es absurdo ya que esto contradice que S es de Cauchy. ∎

Lema 36.- (29 Tesis) Sea α una curva causal pasado-inextendible que empieza en p y que no interseca un conjunto cerrado C.

~~Dem:~~ 1) Si $p_0 \in I^+(p, M \setminus C)$, hay una curva temporal pasado-inextendible que empieza en p_0 que no intersecta a C.

2) Si α no es geodésica conjugado-libre nula, hay una curva temporal pasado-inextendible que empieza en $\alpha(0)$ y que no interseca C.

Dem.- Ya que α es pasado-inextendible, podemos suponer que tiene dominio $[0,\infty)$ y que la sucesión y que la sucesión $\{\alpha(n)\}$ no converge.

Vamos a "empujar" un poco α al futuro, el desplazamiento cae a medida que uno avanza hacia el pasado en α. Trabajaremos solamente en la subvariedad abta $M \setminus C$; todos los puntos están en $M \setminus C$ y la relación $\ll$ es la de $M \setminus C$ (la que implica la de M).

1) Tenemos que $\alpha(0) = p \Rightarrow p_0 \gg \alpha(0)$, además podemos suponer que $\alpha(1) \ll p_0$. Ent hay un punto p_1 t.q $\alpha(1) \ll p_1 \ll p_0$. Continuando por inducción escogemos una una sucesión p_n t.q $\alpha(n) \ll p_n \ll p_{n-1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Uniendo cada p_{n-1} con p_n por medio de un segmento temporal, obtenemos una curva temporal al pasado β en $M \setminus C$ con $\beta(0) = p_0$. Si además tomamos los p_n's muy cerca de $\alpha(n)$ (digamos $d(\alpha(n), p_n) < \frac{1}{n}$ para algún métrica ~~[illegible]~~ topológica de M). De manera que β es la curva que buscamos pues no interseca C (vive en $M \setminus C$) empieza en p_0 y dado que α es pasado-inextendible β es inextendible.

2) Tomamos $\alpha|_{[0,1]}$ no geodésica nula libre-conjugada, ya que $\alpha|_{[0,1]}$ es compacta y no interseca C se sigue por teorema 10.51 que este segmento puede ser deformado a un segmento temporal con los mismos puntos finales, aún sin intersecar C. Sea α_1 la curva obtenida por reemplazar el tramo $[0,1]$ por la curva temporal deformada.

Ahora $\alpha|_{[1,\infty)}$ puede ser una geodésica nula con puntos conjugados, Pero para $\delta_1>0$ pequeño, $\alpha|[1+\delta_1, 2]$ no. Como antes obtenemos α_2 reemplazando este segmento por el segmento temporal deformado. que no interseca C. Iterando estos pasos obtenemos una curva temporal al pasado ~~inextendible~~ que empieza en $\alpha(0)$ y que no interseca C. Tomando $\{\delta_n\}$ convergente a cero lo suficientemente rápido asegura que β es pasado-inextendible. ∎

Ejemplo.- (La excepción en 2 es necesaria). Sea C la hoja inferior de H^n en $\mathbb{R}^{n+1}_1$, ent cada curva pasado-inextendible temporal que pasa por 0 tiene que cruzar C, pero las geodésicas nulas que pasan en 0 no.

Prop 31.- Sea S un hipersuperficie de Cauchy en M, y sea $X\in\mathfrak{X}(M)$ temporal. Si $p\in M$, es una curva integral maximal de X que pasa por p y se cruza con S en un único punto $\rho(p)$. Ent $\rho: M\to S$ es un mapa continuo abto sobre S dejando S puntualmente fijo. En particular S es conexa.

Dem: Lema 1.56 y ejercicio 1.16 muestran que una curva integral maximal de X es inextendible. Sea $\tilde{\psi}:\mathcal{D}\to M$ el flujo de X. $\mathcal{D}$ es abto en $M\times\mathbb{R}$ y S es hipersuperficie topológica, por lo tanto $\mathcal{D}(S)=(S\times\mathbb{R})\cap\mathcal{D}$ es hipersuperficie topológica en $\mathcal{D}$. La restricción de flujo $\tilde{\psi}|_{\mathcal{D}(S)}=\psi$ es continua y ya que S es una hipersuperficie ~~topol~~ de Cauchy ψ es uno-uno y sobre. Como $\mathcal{D}(S)$ y M son ~~hipersuperficies~~ variedades topológicas de la misma dimensión por la invarianza del dominio, ψ es homeomorfismo. La proyección natural $\pi: S\times\mathbb{R}\to S$ es abta, continua y sobre. Pero $\rho=\pi\circ\psi^{-1}$, ya que $\rho\circ\psi(p,t)=\rho(\alpha_p(t))=\pi\circ\psi^{-1}(\alpha_p(t))=\pi(\alpha_p(0),0)=\alpha_p(0)=p\in S$. Así ρ tiene las mismas propiedades que π, i.e., ρ es continua abta y sobre en S, además $\rho|_S=id|_S$, i.e., ρ deja fijo S puntualmente. También ~~Además~~ ya que M es conexa, se sigue que S es conexa. ∎

Corolario 32.- Cualesquiera dos hipersuperficies de Cauchy en M son homeomorfas.

Dem: Sean S y T dos hipersuperficies de Cauchy. Para un campo vectorial temporal $X \in \mathfrak{X}(M)$, sean ρ_S y ρ_T sean las retracciones de M a S y T respectivamente. Claramente $\rho_T|_S$ y $\rho_S|_T$ son mapas inversos. $\boxtimes$

Def (retracción):

- § Productos alabeados

Vamos a considerar algunas relaciones de Causalidad en productos alabeados ~~~~ lorentzianos $M = B \times_f F$ que son parecidos a los espacios tiempo de Schwarzchild, tenemos B y F variedades ~~riemannianas~~ lorentzianas y riemannianas respect. Recordemos que $\forall q \in F$ la hoja $\sigma^{-1}(q)$ es totalmente geodésica en M e isométrica a B bajo la proyección $\pi : M \to B$.

(W1) $\langle d\pi(v), d\pi(v)\rangle \leq \langle v, v\rangle$ $\forall v \in TM$, con la igualdad si y sólo si v es horizontal.

De aquí se sigue que

(W2) $d\pi$ lleva vectores causales en vectores causales $\therefore d\pi(v)$ es causal siempre $0 \geq \langle v, v\rangle \geq \langle d\pi(v), d\pi(v)\rangle$. que v lo sea también.

Tenemos que curvas causales [temporales] en M se proyectan sobre ~~en~~ curvas causales [temporales] en B, a través de B. Se sigue ~~que~~ además que M es temporalmente orientable si y sólo si B lo es. Siempre asumiremos que M es conexa y orientada temporalmente, Si Orientamos B temporalmente, ent $d\pi$ ~~~~ lleva vectores temporales en vectores temporales.

(W3) Un subconjunto A de B es ~~no~~ cronológico (no causal) si y sólo si $\pi^{-1}(A)$ es no cronológico (no causal) en M.

Dem: Si α es una curva temporal con puntos finales en $\pi^{-1}(A)$ $\Rightarrow$ $\pi\circ\alpha$ es temporal con puntos finales en A. De igual forma si γ es curva temporal con puntos finales en A, ent cualquier curva levantamiento horizontal es una curva temporal en $\pi^{-1}(A)$. ▲

similarmente,

w4) M satisface la condición de cronología (causalidad o condición fuente de causalidad si y solo si B la cumple respect.

W5) Supongamos que F es completa y se cumple la condición fuerte de causalidad en B (y por tanto en M). Si α es una curva causal en M es una inextendible, ent $\pi\circ\alpha$ es inextendible en B (y viceversa).

Dem: Sup $\pi\circ\alpha : [0,b) \to B$ es extendible a $\beta : [0,b] \to B$. Por el ejercicio 5.14 $\pi\circ\alpha$ tiene longitud finita. Ya que $f>0$ en el conjunto compacto $\beta([0,b])$, ent hay $C>0$ t.q $f\circ\pi\circ\alpha \geq C$. La fórmula para productos alabeados nos lleva a que $|d\sigma(\alpha')| \leq |d\pi(\alpha')|/C$. Consecuentemente $\sigma\circ\alpha$ también tiene longitud finita. Ya que F es riemanniana, esto significa que $\sigma\circ\alpha$ permanece en algún compacto K. Así α permanece en el conjunto compacto $\beta([0,b]) \times K$, contradiciendo el lema 13. ■

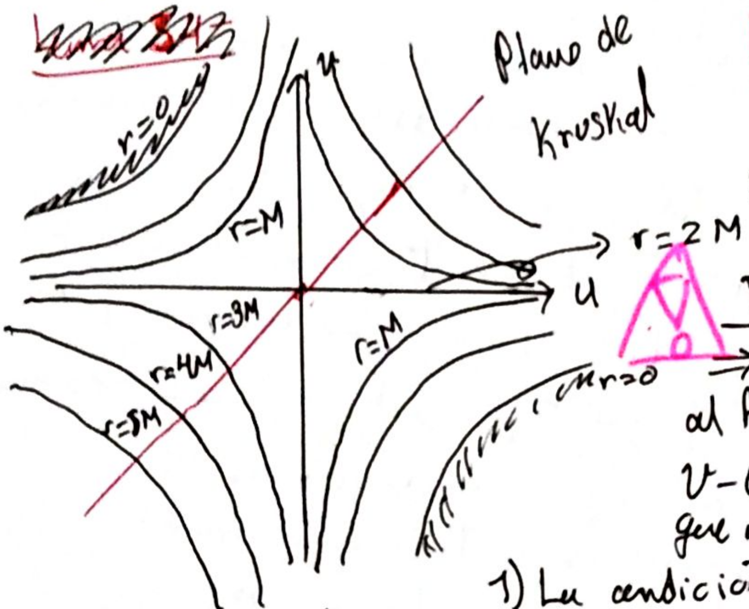
Por lo tanto $\pi\circ\alpha : [0,b) \to B$ es inextendible. ■

Lema 33: Si F es completa, ent $M = B \times_f F$ tiene una hipersuperficie de Cauchy si y sólo si B la tiene.

Dem: Si M tiene una hip de Cauchy, ent $N = S \cap \sigma^{-1}(q)$ es una hip de Cauchy en $\sigma^{-1}(q) \subseteq M$, por lo tanto $\pi(S\cap\sigma^{-1}(q))$ es una hip de Cauchy en B, de lo contrario N no sería de Cauchy.

Sea Σ una hip de Cauchy en B, por corolario 39 se cumple la condición fuerte de causalidad en B. Por lo tanto por W5), si α es una curva causal inextendible en M, ent $\pi\circ\alpha$ es inextendible en B y como Σ es hip de Cauchy, $\pi\circ\alpha$ interseca una vez a Σ $\Rightarrow$ α interseca una vez a $\pi^{-1}(\Sigma)$, de manera que $\pi^{-1}(\Sigma)$ es hip de Cauchy en M. ■

Obs:- Consideremos $M = B \times_f S^2$, ~~est~~ una hipersuperficie en B es ~~una~~ una curva, podemos usar corolario 54 para saber si B (y por tanto M) tiene una hip de Cauchy. Por ejemplo, en el plano de Kruskal (Fig B.10), la diagonal $\Delta : u = v$ es una hip de Cauchy, por tanto $\pi^{-1}(\Delta) = \Delta \times_f S^2$ es una hip de Cauchy en el espacio-tiempo de Kruskal $Q \times_f S^2$.



Lema 54:- La condición fuerte de causalidad se cumple en cualquier superficie lorentziana simplemente conexa.

Dem: Ya que B es simplemente conexa $\rightarrow$ B es orientable, así hay vectores nulos al futuro $U, V \in \mathfrak{X}(B)$ t.q. $V-U$ es un vector field espacial en B que no se anula.

1) La condición de causalidad se cumple, sea α una curva causal cerrada, podemos suponer que α es una curva simple (tomando su primer lazo), ya que B es simplemente conexo, B es homeomorfo a $\mathbb{R}^2$ ó bien S^2. Así que el teorema de la curva de Jordan aplica: α parametriza la frontera de una 2-celda E en B. Ya que $V-U$ nunca es tangente a α, $V-U$ (o $U-V$) siempre apunta a E: las curvas integrales que empiezan en α están inicialmente en E. Para t suficientemente pequeño, el flujo ψ_t está definido en (compacto) E y lleva E en sí mismo. Por el teorema del punto fijo de Brouwer, cada $\psi_{\frac{1}{n}}$ tiene un punto fijo en E, pero en el punto límite de tales puntos fijos, $V-U$ tiene que ser cero, lo cual es una contradicción.

2) La condición fuerte de causalidad se cumple. Si no se cumple, podemos encontrar una curva causal α con con puntos finales $\alpha(0)$ y $\alpha(1)$ unidos por un segmento σ de una curva integral de $V-U$, entonces por lo anterior la curva $\alpha + \sigma$ es temporal cerrada lleva a que $V-U$ se anula en algún punto, lo cual es absurdo. ∴ La condición fuerte de causalidad se cumple. ∎

o dominio de dependencia.

Def 3.5.- Si A es no cronológico en M, el desarrollo de Cauchy futuro de A es el conjunto $D^+(A)$ de todos los puntos $p\in M$ t.q cada curva causal pasado inextendible que pasa por p interseca A. (en particular $A \subseteq D^+(A)$.)

Relativisticamente hablando, $D^+(A)$ ~~es~~ es la parte del futuro causal de A que previsible de A: ninguna partícula pasado inextendible o rayo de luz puede alcanzar un evento q en $D^+(A)$ si ~~haber~~ antes haber ido a través de A.

También se define $D^-(A)$ y $D(A)=D^-(A)\cup D^+(A)$.

Ejemplos 3.6.-

1). Si A es una hipersuperficie $t=c$ en $\mathbb{R}^n_1$, ent $D^+(A)=J^+(A)$ $=\{(t,x): t\geq c\}$

2) Tomemos la hoja inferior de $\mathbb{H}^n$ en $\mathbb{R}^{n+1}_1$, ~~la unión de $\mathbb{H}^n$~~ pero

$D^+(\mathbb{H}^n) = J^+(\mathbb{H}^n)\cap I^-(0)$,

$D^-(\mathbb{H}^n) = J^-(\mathbb{H}^n)$.

Obs.- $\mathbb{H}^n$ es no cronológico.

3) Sea $M=\mathbb{R}^1_1\times S^1$ sin un punto, tomemos $S=\{(t,x): (t,x)\in M\}$, tal conjunto es no cronológico $D^+(S)=S\cup A$, donde A es la región entre S y las geodésicas nulas α y β. ~~De~~ Nuevamente $D^-(S)=J^-(S)$.

Obs.- • Por el lema 29, un conjunto no cronológico $A\subseteq M$ es una hip de Cauchy si y sólo si $D(A)=M$.

• Podemos pensar $D(A)$ como el conjunto más grande para el cuál A juega el rol de hip de Cauchy.

Para cualquier $A\subseteq M$, $D^+(A)\subseteq A\cup I^+(A)\subseteq J^+(A)$, ya que si asumimos que A es no cronológico $D^+(A)\cap I^-(A)=\emptyset \Rightarrow D^+(A)\cap D^-(A)=A$ y $D^+(A)\setminus A = D(A)\cap I^+(A)$.

Para futura ocasiones, llamaremos a lo siguiente "regresión": una curva causal al pasado α que empieza en $D^+(A)$ no puede dejar $D^+(A)$ sin primero intersecar A.

Dem: Si $\alpha(s) \notin D^+(A)$, ent hay una curva causal pasado-inextendible β que empieza en $\alpha(s)$ y no interseca A, pero $\gamma = \alpha|_{[0,s]} + \beta$ es una curva causal que pasa por $\alpha(0) \in D^+(A)$, ent γ debe intersecar a A pero no lo hace en el tramo β ni en $\alpha(s)$, así γ debe intersecar a A en $\gamma|_{[0,s)} = \alpha|_{[0,s)}$, como se quería. ∎

Lema 37.- Si A es no cronológico y $p \in \operatorname{int} D(A)$, ent cada curva causal inextendible que pasa por p intersea $I^-(A)$ y $I^+(A)$.

22/Jul/2020.

Dem: Como $D^+(A) \subseteq A \cup I^+(A) \Rightarrow$ podemos suponer que $p \in A \cup I^+(A)$. Sea α una curva causal pasado-inextendible que empieza en p. Como vimos en la prueba del lema 30(1) con C vacío, muestra que hay una curva causal pasado-inextendible β que empieza en $D(A) \cap I^+(A) \subseteq D^+(A)$ t.q cada $\beta(s)$ tiene un punto de α en $I^-(\beta(s))$.
Ya que β interseca A, pues empieza en $D(A)$ se sigue que α interseca $I^-(A)$.
Sea γ una curva futuro-inextendible causal que empieza en p. Si $p \in I^+(A)$ $\Rightarrow \gamma$ interseca a $I^+(A)$ en p. Si $p \in A^-$, podemos proceder de manera similar en el caso anterior y ver que γ interseca a $I^+(A)$. ∎

Teorema 38.- Si A es un conjunto no cronológico, ent $\operatorname{int} D(A)$ (no vacío) es globalmente hiperbólico.

Dem:
1) La condición de causalidad se cumple en $D(A)$, supongamos que existe curva cerrada simple causal en $p \in D(A)$. atravezando repetidamente γ obtenemos una curva causal cerrada inextendible $\tilde{\gamma} \Rightarrow \tilde{\gamma}$ tiene que intersecar A. Pero $\tilde{\gamma}$ interseca A repetidamente, lo que contradice no cronología. Δ.

2) La condición fuerte de causalidad se cumple en $p \in \operatorname{int} D(A)$. Supongamos que no, ent existe un segmento de curva causal al futuro α_n definida en $[0,1]$ t.q $\{\alpha_n(0)\}$ y $\{\alpha_n(1)\}$ que convergen a p, pero cada α_n deja una vecindad fija de p.

Así, $\{\alpha_n\}$ tiene una sucesión límite $\{p_i\}$ dirigida al futuro que empieza en p. Si $\{p_i\}$ es finita, esta termina en $\lim \alpha(1) = p$. $\Rightarrow p < p$ lo que contradice no cronología. Así $\{p_i\}$ es infinita, por lo tanto el correspondiente cuasi-límite λ es futuro-inextendible. Por el lema 37, λ entra a $I^+(A)$ y por tanto permanece ahí, así algún vértice $p_i \in I^+(A)$. Así hay alguna subsucesión $\{\alpha_m\}$ y (por reparametrización) un número $s \in [0,1]$ t.q $\lim \alpha_m(s) = p_i$. De manera que podemos suponer que $\alpha_m(s) \in I^+(A)$.

Así $\{\bar{p}_i\}$ es infinita, por lo que el cuasi-límite $\bar{\lambda}$ es pasado-inextendible causal que empieza en p. Por el lema anterior $\bar{\lambda}$ interseca $I^-(A)$. Por lo tanto alguna $\alpha_m|_{[s,1]}$ tiene que intersecar $I^-(A)$. Ya que α_m es futura y tiene $\alpha_m(s) \in I^+(A)$, se contradice la no cronología de A.

$\therefore$ La condición fuerte de causalidad se cumple.

3) Si $p \leq q$, $p,q \in \text{int } D(A)$, ent $J(p,q)$ es compacto: Si $p = q$, ent por 1) $J(p,q) = \{p\}$ el cual es compacto. Sup $p < q$, sea $\{x_n\}$ una sucesión en $J(p,q)$, p.d $x_n \to x \in J(p,q)$. Sea $\{\alpha_n\}$ el segmento de curva causal ~~de~~ al futuro de p a q a través de x_n. Sea $\mathcal{R}$ una cubierta abta convexa de M t.q si $\mathcal{C} \in \mathcal{R} \Rightarrow \bar{\mathcal{C}}$ es compacta contenida en un convexo abto. de manera que todas las sucesiones límite serán relativas a $\mathcal{R}$, por prop 8 hay una sucesión que empieza en p. Sup que tal sucesión es finita, i.e., termina en $p_K = q$. Sea $\{\alpha_m\}$ una subsucesión que cumple L1) para la sucesión $\{p_K\}$ finita. Así hay un $i < K$ t.q para infinitos m's, el punto x_m está en el i-ésimo segmento $\alpha_m|[s_{mi}, s_{mi+1}]$ de α_m, tomamos esa subsucesión. Por L1) los segmentos (y por tantos los x_m's) están en un convexo $\mathcal{C} \in \mathcal{R}$. Las propiedades de $\mathcal{C}$ implican que $\{x_m\} \to x$, de manera que por el lema 2 y dado que tenemos $p_i \leq x \leq p_{i+1} \Rightarrow p \leq x \leq q$, i.e., $x \in J(p,q)$.

$\therefore J(p,q)$ es compacto.

Por lo tanto int $D(A)$ es globalmente hiperbólico, solo bastaría probar que no puede pasar que alguna ~~las~~ sucesión $\{p_K\}$ sea ~~es~~ infinita.

~~$\{p_K\}$ no es infinita.~~

Sup que todas las sucesiones límite para $\{\alpha_n\}$ relativas a $\mathcal{R}$ y que empiezan en p son infinitas. Sea λ un cuasi-límite. Ya que λ es una curva causal futura-inextendible en p, podemos encontrar como antes, una subsucesión $\{\alpha_m\}$ y (reparametrizando) un solo s t.q $\{\alpha_m(s)\}$ converge a un vertice $p_i \in I^+(A)$. Ya que $p_i \neq q$, podemos aplicar la prop 8 dualmente a $\{\alpha_m|_{[s,1]}\}$ para obtener una sucesión límite dirigida al pasado $\{q_i\}$ que empieza en q. Si $\{q_i\}$ es finita, esta tiene que terminar en $\lim \alpha_m(s) = p_i$, i.e,

$p < p_1 < \dots < p_i < \dots < q_i < q$ es una sucesión límite para $\{\alpha_n\}$

que empieza en p, lo cual es absurdo, (por suposición). Así $\{q_i\}$ es infinita, ent el correspondiente cuasi-límite μ es una curva causal pasado-inextendible que empieza en q. Como antes μ alcanza $I^-(A)$, por lo tanto algún $\alpha_m|_{[s,1]} \in I^+(A)$. Ya que $\alpha_m(s) \in I^+(A)$, ent esto contradice la cronología de A.

4) Si $p \leq q$, $p,q \in \operatorname{int} D(A)$, ent $J(p,q) \subseteq \operatorname{int} D(A)$, ~~como antes podemos~~ nuevamente si $p = q \Rightarrow J(p,q) = \{p\} \subseteq \operatorname{int} D(A)$. Sup $p < q$, ~~para~~ por dualidad solo dos casos deben ser considerados.

Caso 1.- $p, q \in I^+(A)$, sea $q^+ \in I^+(q) \cap D(A) \subseteq D^+(A)$, ent $N = I^+(A) \cap I^-(q^+)$ es un abierto que contiene a ~~[illegible]~~ $J(p,q)$, Pd $N \subseteq D^+(A)$. Sea σ una curva temporal al pasado de q^+ a $y \in N$. Ya que A es no cronológico $y \in I^+(A)$, i.e, σ no interseca a A, por regresión $y \in D^+(A)$.

Caso 2.- $p \in J^-(A)$ y $q \in J^+(A)$, el argumento es similar; ya que $p, q \in \operatorname{int} D(A)$, existen puntos $p^- \in I^-(p) \cap D^-(A)$ y $q^+ \in I^+(q) \cap D^+(A)$. Afirmamos que $N = I^+(p^-) \cap I^-(q^+) \supseteq J(p,q)$ estaren $J(p,q)$. Si $x \in N$ sea σ y τ unas curvas temporales de q^+ a x y x a p^- respect. Ya que $A \subseteq D(A)$ podemos suponer que $x \notin A$, por la condición de no cronología, alguna de las dos curvas no debe intersecar a A, si tal curva es σ, por regresión $x \in D^+(A)$, si τ, ent $x \in D^-(A)$. $\therefore$ $J(p,q) \subseteq D(A)$ es compacto y como se cumple 2) $\operatorname{int} D(A)$ es globalmente hiperbólico. $\blacksquare$

Corolario 39.- Si M tiene una hip de Cauchy, ent M es globalmente hiperbólico.

Dem: Si S es una hip de Cauchy, ent $D(S) = M = \text{int}\, D(S)$ por ser M abto. $\therefore$ $\text{int}\, D(S) = M$ es globalmente hiperbólico. ∎

Lema 40.- Sea A ~~no~~ cronológico. Si $p \in \text{int}\, D(A) \setminus I^-(A)$, ent $J^-(p) \cap D^+(A)$ es compacto.

Dem: Si $p \in A$, ent $J^-(p) \cap D^+(A) = \{p\}$ el cual es compacto, ~~así~~ de manera que suponemos que $p \in I^+(A) \cap \text{int}\, D(A)$.

Sea $\{x_n\} \subseteq J^-(p) \cap \text{int}\, D(A)$. Y sea cada α_n un segmento de curva causal ~~al~~ pasado de p a x_n. ~~No hay nada que probar si cualquier subsucesión de $\{x_n\}$ converge a p.~~ Por prop 8, en caso contrario hay una sucesión límite dirigida al pasado $\{p_i\}$ de $\{\alpha_n\}$ que empieza en p. Si $\{p_i\}$ es infinita, ent "como de costumbre" algún $x_n \in I^-(A)$, lo que conduce a una contradicción con la no cronología.

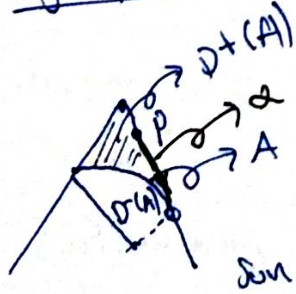
Si $\{p_i\}$ es finita, alguna subsucesión $\{x_m\}$ converge algún punto $x \in J^-(p)$. Sea σ curva temporal de $p^+ \in D^+(A) \cap I^+(p)$ a x. Si σ interseca A, ent ya sea $x \in A \subseteq D^+(A)$, ó bien $x \in I^+(A)$, lo ultimo implica que algún $x_m \in I^-(A)$ derivando nuevamente contradicción con no cronología.

Si σ no cruza A, ent por regresión, $x \in D^+(A)$. $\therefore$ $x \in D^+(A) \cap J^+(p)$.

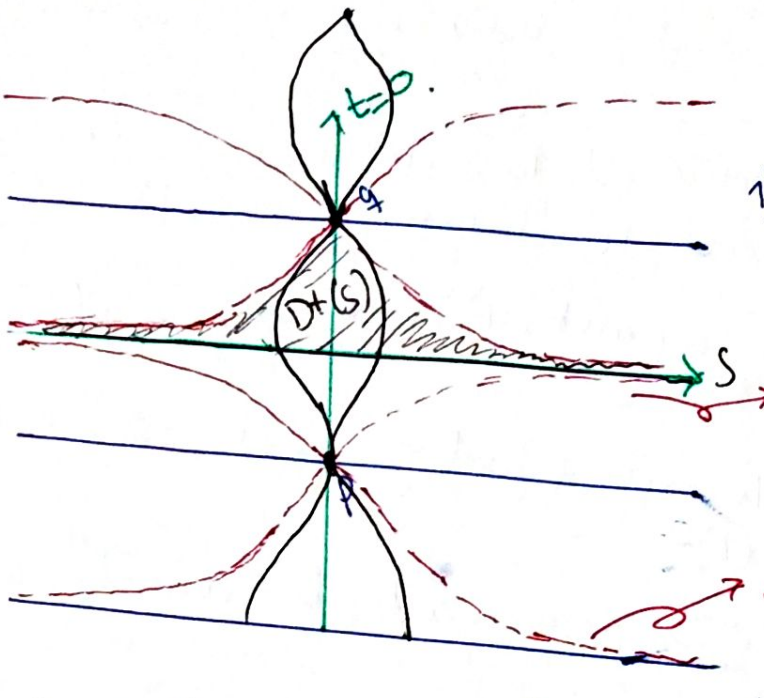
$\therefore$ $\{x_n\}$ tiene subsucesion convergente en $J^-(p) \cap D^+(A)$, ~~A~~ como $\{x_n\}$ es arbitraria se sigue que $D^+(A) \cap J^-(p)$ es compacta. ∎

Ejemplo: Lemas 37 y 40 fallan si $p \notin \text{int}\, D(A)$.

α no cruza hacia $I^-(A)$.



Ejemplo 41.- (Causalidad en $\mathbb{H}^n_1$) a pesar de que $\mathbb{H}^n_1$ es completo y difeomorfo a $\mathbb{R}^n$ con $K \equiv -1$, su causalidad no es trivial. Vimos que las rebanadas $t = \text{const}$ son hipersuperficies totalmente geodésicas e isométricas al espacio $n-1$-hiperbólico. El eje t es geodésica temporal y ∂_t es también es temporal al futuro. Los puntos p y q simétricamente tomados respecto a la rebanada $S: t=0$, proyectamos a los puntos antipodales en $\mathbb{H}^n_1$. ~~Mapeamos~~



Los mapeos $(t,x) \mapsto (\pm t + c, x)$ son isometrías

1) Las geodésicas nulas al futuro que empiezan en p de una ~~curva~~ cono $\Lambda^+(p)$ que se

$\Lambda^+(p)$ aproximan a S pero no lo alcanzan.

2) $J^+(p)$ es el semiplano cerrado

$\Lambda^-(p)$ superior en el lado futuro $\Lambda^+(p) = bd\, J^+(p)$. (líneas verticales en la figura son temporales, pensando solamente en el eje t, son geodésicas)

3) La condición fuerte de causalidad se cumple (curvas causales empezando cerca de p no pueden regresar cerca de p).

4) $J(p,q)$ es cerrado y acotado por $\Lambda^-(q) \cup \Lambda^+(p)$. Ya que este no es compacto, $\mathbb{H}^n_1$ no es globalmente hiperbólico

5) Geodésicas temporales en $\mathbb{H}^n_1$ se proyectan sobre geodésicas cerradas en $\mathbb{H}^n_1$; así geodésicas temporales al futuro que empiezan en p todas intersectan un punto conjugado q (después de una distancia πr) y consecuentemente lo hacen periódicamente. Estas geodésicas son geodésicas normales a S, así p y q son los puntos focales más cercanos a S. Evidentemente, muchos puntos de $J^+(p)$ no pueden ser alcanzados por geodésicas de p.

6) $D^+(S) = S \cup (\text{región abierta entre } S \text{ y } \Lambda^-(q)) = J^+(S) \cap I^-(q)$. Así

$D(S) = I^+(p) \cap I^-(q)$.

§ Hipersuperficies espaciales (conjuntos no cronológicos son hipersuperficies suaves espaciales).

Lema 42.- Una hipersuperficie espacial no cronológica S es no causal.

Dem: Sup que existe una curva causal al futuro α con $\alpha(0)$ y $\alpha(1)$ en S. Si α no es una geodésica nula (el teorema 10.51) garantiza que existe una deformación a una curva temporal con los mismos puntos extremos, lo que contradice no cronología. Si α es una geodésica nula, ent

Como S es espacial, ent $\alpha'(0)$ no puede ser normal a S, de manera que por el Lema 10.50, α se puede nuevamente deformar en una curva temporal con extremos fijos, lo cual contradice no cronología.

$\therefore S$ es no causal. $\blacksquare$

<u>Lema 43.-</u> Si S es no causal hipersuperficie topológica en M, ent $D(S)$ es abto y por lo tanto globalmente hiperbólico.

<u>Dem:</u>

1) Primero mostraremos que $S \subseteq \text{int}\, D(S)$, supongamos que $p \in S \setminus \text{int}\, D(S)$,

~~observemos que $S \setminus \text{int}\, D(S)$ es cerrada y es hipersuperficie topológica no causal y por tanto no cronológica, por Corolario 26~~

Observemos que $S \setminus \text{int}\, D(S)$ es cerrada hipersuperficie topológica no causal y por tanto no cronológica, por el corolario 26, no tiene puntos borde de manera que $I(S) = I^+(S) \cup S \cup I^-(S)$, ~~además~~

Como $p \in S \setminus \text{int}\, D(S)$ hay una sucesión $\{\alpha_n\}$ t.q $\alpha_n(0) \to p$ y cada α_n es curva causal inextendible y no interseca S. Sea N una vecindad de p t.q $\bar{N}$ es compacta, contenida en un conjunto convexo y contenida en ~~int~~ $I(S)$. Sin pérdida de generalidad suponemos que $\alpha_n(0) \in N \cup I^+(S)$, sea en el primer punto después de $\alpha_n(0)$ en el cual α_n interseca $\text{bd}\, N$. Para una sucesión $e_m \to e$ convergente tenemos que ~~existe~~ Lema 14 nos dice que existe curva causal a trozos de p a e, i.e., $e \in J^-(p)$. $\therefore e \notin I^+(S)$. Además S es no causal $\Rightarrow e \notin S$. Finalmente, e no puede estar en $I^-(S)$, ya que, en $I(S)$ ninguna α_n puede alcanzar $I^-(S)$ sin intersecar S. Ent esto contradice que $e \in \text{bd}\, N \subseteq I(S)$.

$\therefore$ Por lo tanto no puede suceder que $p \in S \setminus \text{int}\, D(S)$, ~~i.e.~~, $S \subseteq \text{int}\, D(S)$.

2) Sup S es cerrada en M, Por dualidad es suficiente que el conjunto $D^+(S) \setminus S = I^+(S) \cap D(S)$ es abto en M. Sup $p \in D^+(S) - S$ no es un punto interior, así $\exists \{\alpha_n\}$ sucesión de curvas causales pasado-inextendibles t.q $\alpha_n(0) \to p$ y cada α_n <u>no</u> interseca S. Por 1) $S \subseteq \text{int}\, D(S)$ y como S es cerrada, ent hay una cubierta convexa R cuyos miembros están contenidos en $\text{int}\, D(S)$ o disjuntos de S. Sea λ un cuasi-límite de $\{\alpha_n\}$ relativo a R. Ya que λ empieza en p y es una curva pasado inextendible

~~es~~ λ intersecta S en un único punto ~~s~~ $\lambda(s)$. Sea p_i el vertice de λ t.q $p_i > \lambda(s) \geq p_{i+1}$. El miembro de R que contiene a este segmento interseca a S, así por construcción está contenido en $\operatorname{int} D(S)$. Ya que S es no causal, $p_i \notin S$ y por regresión $p_i \in D^+(S)$. Así $p_i \in I^+(S)$. Consecuentemente $I^+(S) \cap \operatorname{int} D(S) \subseteq D^+(S)$ es una vecindad de p_i. Algún α_n tiene que intersectando y por lo tanto intersectar a S, lo cual es absurdo, ya que ningún α_n interseca S. $\therefore$ p es punto interior de $D^+(S) \setminus S$ $\therefore$ $D^+(S) \setminus S$ es abto

3) Para S arbitrario, asumimos que S ~~es~~ es conexo, ya que los desarrollos de Cauchy de diferentes componentes serian dijuntos. Claramente S es cerrada en $I(S)$, así por 2) ~~D(S) en I(S)~~ ~~es~~ $D(S)$ es abto en $I(S)$, como el desarrollo de Cauchy en M es el mismo que en $I(S)$, ent $D(S)$ es abto en M. ∎

Este lema falla si la condición no causal es debilitada a no cronológica (fig 7, extenden A a una hiperficie cerrada no cronológica).

Teorema 44.- Sea $S \subseteq M$ una hipersuperficie espacial cerrada no cronológica. Si $q \in D^+(S)$, ent hay una geodésica de S a q de longitud $\tau(S,q)$. Por lo tanto γ es normal y no tiene puntos focales de S antes de q. (γ es temporal excepto en el caso trivial $q \in S$).

Dem: Como S es hipersuperficie espacial no cronológica, Lema 42 nos dice que S es no causal y Lema 43 que $D(S)$ es abto $\Rightarrow$ $D(S) = \operatorname{int} D(S)$ el cual es globalmente hiperbólico por teorema 38. Como $q \in D^+(S) = \operatorname{int} D(S)$ y además claramente $q \notin I^-(A)$ i.e., $q \in \operatorname{int} D(S) \setminus I^-(A)$, así el lema 40 implica que $J^-(q) \cap D^+(S)$ es compacto $\therefore$ $J^-(q) \cap D^+(S) \cap S$ es cerrada y por tanto compacta. Por el lema 21, la función $x \to \tau(x,q)$ es continua en $J^-(q) \cap S$, por lo tanto toma un máximo digamos p. Evidentemente el máximo es precisamente $\tau(S,q)$. Ahora como $D(S)$ es globalmente hiperbólico $\Rightarrow$ $D(S)$ cumple la condición fuerte de causalidad, así por el ~~lema~~ prop 29 existe una

geodésica causal γ de p a q de longitud $\tau(p,q)=\tau(S,q)$.
Si $q\notin S$, ent $p\ll q$ ~~[illegible]~~ (por teorema 10.51, por lo tanto $\tau(p,q)>0$. $\Rightarrow$ γ es temporal. Ent el corolario 10.26 implica que γ es normal a S, y teorema 10.37 prohibe los puntos focales. ∎

Este resultado es válido para todo el desarrollo de Cauchy.

(*) Resultado necesario: una curva cerrada que interseca S exactamente una vez y transversalmente, es no homotópicamente no libre a una curva cerrada que no interseca a S.

Ya que M es orientada temporalmente una hipersuperficie S en M tiene dos lados. Si $\mathcal{N}$ es vecindad normal de S, ent $\mathcal{N}-S$ es la unión disjunta de dos abtos $\mathcal{N}^-=\mathcal{N}\cap I^-(S)$ y $\mathcal{N}^+=\mathcal{N}\cap I^+(S)$.

Lema 45.- Sea S una hipersuperficie espacial cerrada S conexa en M.

1) Si el homeomorfismo $j_\#:\pi_1(S)\to\pi_1(M)$ inducido por la inclusión $j:S\hookrightarrow M$ es sobre, ent S separa M (esto es, $M\setminus S$ no es conexo).

2) Si S separa M, ent S es no cronológico.

Dem: 1) La hipótesis significa que tomando un punto base $p\in S$ cada lazo en M en p es homotópico con punto-fijo a un lazo en S.

Sea $\sigma:[-1,1]\to\mathcal{N}$ una curva temporal de $\mathcal{N}^-$ a $\mathcal{N}^+$ que interseca a S solamente en $p=\sigma(0)$. Ahora supongamos que S no separa a M. Ya $M\setminus S$ es conexo hay una curva α de $\sigma(1)$ a $\sigma(-1)$ que no cruza S. Ent, $\gamma=\sigma|_{[0,1]}+\alpha+\sigma|_{[-1,0]}$ es una curva cerrada que interseca S únicamente en $\sigma(0)$ y es transversal a S ya que S es espacial y σ va de $\mathcal{N}^-$ a $\mathcal{N}^+$. Por hipótesis, γ es homotópica con punto fijo ~~[illegible] es libremente homo~~ y por tanto libremente homotópica a una curva cerrada en S. Una pequeña deformación de γ en la dirección futura la mueve dentro de $\mathcal{N}^+$, de manera γ es homotópica a una curva cerrada disjunta de S, lo cual contradice (*).

$\therefore S$ separa a $M\setminus S$.

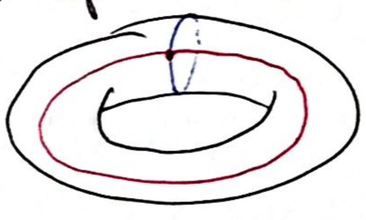
2) Ya que S es cronológico, ent hay un segmento α de curva temporal al futuro con $\alpha(1)$ y $\alpha(0) \in S$, por lo que $\exists a, b \in (0,1)$ con $a < b$ y $\alpha(a) \in N^+$ y $\alpha(b) \in N^-$. N^+ y N^- son conexos, pues S lo es, ~~porque~~ así que $\alpha(a)$ y $\alpha(b)$ están contenidos en la misma componente de $M \setminus S$.

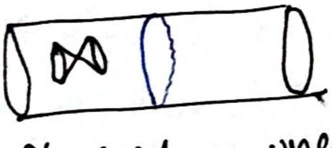
Como M es conexa, cada punto de $M \setminus S$ puede ser unido a $N \setminus S = N^- \cup N^+$ por una curva en $M \setminus S$. Por lo tanto $M \setminus S$ es conexa, i.e., S no separa a M, lo cual contradice 1). $\therefore$ S es no cronológica.

Corolario 46.- Si M es simplemente conexa, ent cada hipersuperficie espacial cerrada en M es no cronológica. (por lo tanto no causal).

Dada una hipersuperficie espacial S en un M arbitrario, no será suficiente pasar al cubriente simplemente conexo de M, ya que puede no haber una copia de S en $\tilde{M}$.

Ejemplo 46.- Se el toro lorentziano $M = S^1_1 \times S^1$, el círculo $S = p \times S^1$ es espacial y compacto pero cronológico. La variedad cubriente $\tilde{M}$ simplemente conexa es $\mathbb{R}^2_1$, la cual no contiene círculos ~~cerrados~~ espaciales. Sin embargo, también el cilindro lorentziano $\tilde{M} = \mathbb{R}^1_1 \times S^1$ cubre a M, con el mapeo $k = \exp \times id$. Cada componente de $k^{-1}(S)$ es una hipersuperficie cerrada espacial en $\tilde{M}$ que es no cronológica e isométrica a S.





Prop 48.- Sea S una hipersuperficie cerrada y conexa en M. Ent hay un cubriente lorentziano $\tilde{k}: \tilde{M} \to M$ y una hipersuperficie cerrada $\tilde{S}$ en $\tilde{M}$ que es no cronológica e isométrica bajo $\tilde{k}$ a S.

Dem: Para cualquier cubriente lorentziano arbitrario $k: \tilde{M} \to M$, $k^{-1}(S)$ es una hipersuperficie espacial cerrada. Y cualquier componente conexa $\tilde{S}$ de $k^{-1}(S)$ también es hipersuperficie cerrada espacial.

Además, $k|\tilde{S}: \tilde{S} \to S$ es un cubriente e isometría local, i.e., $k|\tilde{S}$ es un cubriente semirriemanniano.

Por corolario A.13 hay un cubriente conexo $k: \tilde{M} \to M$ t.q. imagen $k_\# =$ imagen $j_\#$ donde $j: S \hookrightarrow M$. Asignamos $\tilde{M}$ la métrica inducida lorentziana y la orientación temporal.

1) ~~k~~$|\tilde{S}$ es isometría. Solo basta ver que $k|\tilde{S}$ es uno-uno, ¿(para que fuese inmersión)?

Podemos asumir que $\tilde{S}$ contiene un punto base $\tilde{p}$ del grupo fundamental $\tilde{M}$. Ent, ya que $k|\tilde{S}$ es un mapeo cubriente, basta ver que $\tilde{p}$ es el único punto de $\tilde{S}$ t.q. $p = k(\tilde{p}) \in S$.

Si $q \in S$ y $k(q) = p$, sea α una curva en $\tilde{S}$ de $\tilde{p}$ a q, ent $k \circ \alpha$ es un lazo en S en p, ~~ent~~ así que $[k \circ \alpha] \in \pi_1(M, p)$ está en la imagen de $k_\#$, ent hay un lazo β en $\tilde{M}$ ~~en~~ p t.q. $k \circ \alpha = k \circ \beta$, pero por el corolario A.10 α y β terminan en el mismo punto, ent $q = \tilde{p}$. $\therefore k|\tilde{S}$ es uno-uno $\therefore k$ es isometría.

2) $\tilde{S}$ es no cronológico. Por el lema anterior basta ver que el homomorfismo $i_\#$ inducido por $i: \tilde{S} \hookrightarrow M$ es sobre. Sea $x \in \pi_1(\tilde{M}, \tilde{p})$

Por construcción $\exists y \in \pi_1(S, p)$ t.q. $k_\#(x) = j_\#(y)$. Por 1) $k|\tilde{S}$ es homeomorfismo, ent $\exists z \in \pi_1(\tilde{S}, \tilde{p})$ t.q. $(k|\tilde{S})_\# z = y$, pues $k \circ i = j \circ k|\tilde{S}$, por lo tanto $k_\# \circ i_\#(z) = j_\# \circ k_\#(z) = j_\#(y) = k_\#(x)$,

~~$\therefore x \in \operatorname{im} k_\# \therefore$ ...~~ ya que $k_\#$ es siempre uno-uno

$i_\#(z) = x$. $\therefore x \in \operatorname{im} i_\#$ $\therefore$ $\operatorname{im} i_\# = \pi_1(\tilde{M}, \tilde{p})$ ~~es~~ $\therefore i_\#$ es sobre.

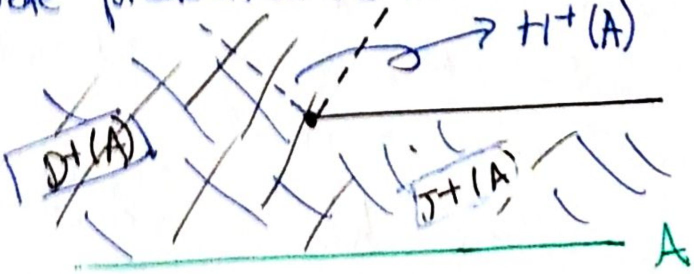
$\therefore$ Por 1) $\tilde{S}$ es no cronológico. ■

§ Horizontes de Cauchy

Def 49: Si $A \subseteq M$ es no cronológico, su horizonte de Cauchy futuro $H^+(A)$ es $\overline{D}^+(A) \setminus I^-(D^+A) = \{p \in \overline{D}^+A : I^+(p) \text{ no interseca } D^+(A)\}$.

Similarmente definimos $H^-(A)$ y $H(A) = H^+(A) \cup H^-(A)$.

Relativisticamente $H^+(A)$ marca el límite de la región del espacio-tiempo controlada por A; Si H^+A es <u>no vacía</u>, el futuro entero de A no puede predecirse de A.



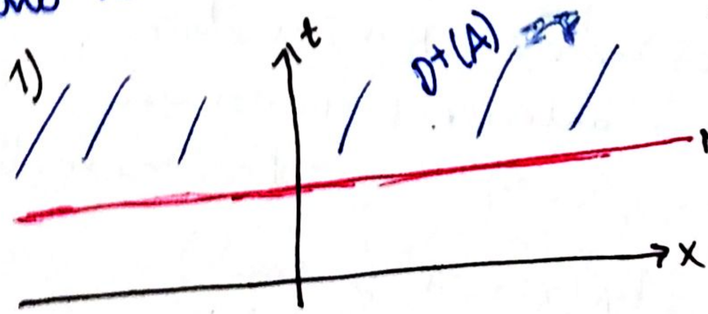
<u>Nota:</u> $H^+(A)$ separa $D^+(A)$ del resto de $J^+(A)$.

<u>Ejemplos 50.-</u> (Horizontes de Cauchy).

1) En $\mathbb{R}^n_1$, para $t=\text{const}$ la hipersuperficie espacial $t=\text{const}$ es t.q. $H^+=H^-=\phi$.

2) Para el encaje inferior del espacio hiperbólico en $\mathbb{R}^n_1$, H^+ es el cono nulo $\Lambda^-(0)$ y H^- es vacío.

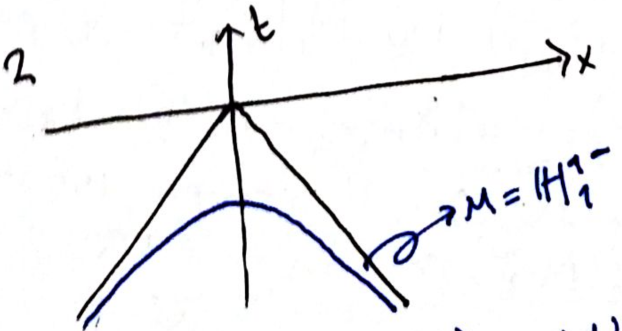
1)



$\overline{D^+(A)} = M \cup D^+(A) = I^-(D^+A)$

$M \Rightarrow \overline{D^+(A)} \setminus I^-(A) = \phi.$

2

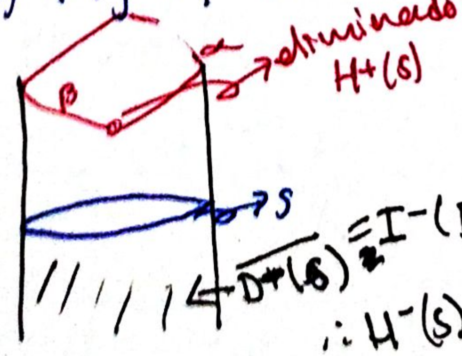


$\overline{D^+(A)} = \Lambda^-(0) \cup I^-(0)$

$I^-(D^+(A)) = I^-(0)$

$\Rightarrow H^+(A) = \overline{D^+(A)} \cup I^-(D^+(A)) = \Lambda^-(0).$

3) Fig 6, $H^+(S) = \alpha \cup \beta$, mientras que $H^-(S)$ es vacío



$= I^-(D^-(A))$

$\therefore H^-(S) = \phi$

<u>Obs.-</u> De la def de H^+A se sigue que H^+A es cerrado, ya que

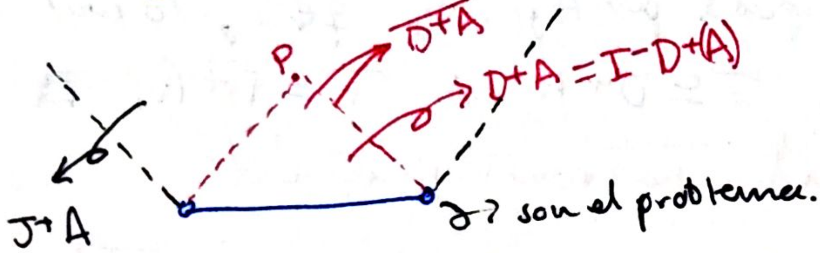
$(H^+A)^c = I^-(D^+A) \cup (M \setminus \overline{D^+A}).$

Además, H^+A es no cronológico, ya que es disjunto de $\overline{D^+(A)}$ y $I^+(H^+A)$ es disjunto de $\overline{D^+(A)}$ y por tanto de $\overline{D^+A}$

∴ $I^+(H^+A)$ es disjunto de H^+A, i.e., H^+A es no cronológico

Obs.- Si A no es cerrado, H^+A puede no estar contenido en J^+A. Ejemplo.-

$H^+A = A^-(p)$



Obs.- Para A cerrado, H^+A puede intersectar A a lo largo de geodésicas nulas o en puntos borde. (Fig 7.)

La siguiente proposición nos dice que si A es cerrado espacial no cronológica hipersuperficie, ent $H^+A \subseteq I^+A$, de manera que ya que A es no cronológico H^+A no interseca a A.

Lema 51.- Sea $A \subseteq M$ cerrada no cronológica, $\overline{D^+A}$ es el conjunto T de puntos p t.q. cada curva pasado inextendible temporal que pasa por p interseca a A.

Dem: 1) $\overline{D^+A} \subseteq T$, sea $p \in \overline{D^+A} \setminus T$, ent $\exists \alpha$ curva temporal pasado inextendible que empieza en p y que no interseca A. Así $p \notin A$, ent p tiene una vecindad convexa $\mathcal{C}$ disjunta de A. Si nos movemos de en la dirección pasada de α a un punto $r \in \mathcal{C}$. Ent $I^+(r, \mathcal{C})$ contiene a p, como $I^+(r, \mathcal{C})$ es vecindad de p y $p \in \overline{D^+A}$, ent $I^+(r, \mathcal{C})$ contiene un punto $q \in D^+A$. La geodésica de q a r en $\mathcal{C}$ seguida por la parte de α pasa por r es de hecho una curva temporal pasado inextendible que pasa por q y que no cruza a A, lo que contradice que $q \in D^+A$, ~~lo cual es absurdo~~. ∴ $\overline{D^+A} \setminus T = \emptyset$, i.e.

∴ $\overline{D^+A} \subseteq T$.

2) $\longrightarrow$

2) $T \subseteq \overline{D^+A}$. Si $q \notin \overline{D^+A}$ ($q \in T$), sea $r \in I^-(q, M \setminus \overline{D^+A})$, ent hay una curva temporal que pasado-inextendible empieza en r que no cruza A. Por el lema 30, hay una curva temporal pasado inextendible por q que no pasa por A, i.e., $q \notin T$, lo cual es absurdo. ∴ $q \in \overline{D^+A}$ ∴ $T \subseteq \overline{D^+A}$ ∴ $T = \overline{D^+A}$. ∎

Lema 52: Si A es cerrada no cronológica, ent $\mathrm{bd}\, D^+A = A \cup H^+A$.

Dem: $A \cup H^+A \subseteq \mathrm{bd}\, D^+A$: Sea $p \in A \cup H^+A$, ~~si $p \in H^+A \subseteq \overline{D^+A}$, por definición de H^+A, ent dada U vecindad de p y α curva temporal que va de $I^+(p,U)$ a $I^-(p,U)$, α cruza $\overline{D^+A}$~~

Si $p \in \overline{D^+A}$ y $p \notin \mathrm{bd}\, D^+A$, ent $\exists U$ vecindad de p t.q cada curva temporal de $I^-(p,U)$ a $I^+(p,U)$ cruza a D^+A.

$\Rightarrow$ ~~$I^+(p,U) \not\subseteq D^+A$~~, $I^+(p,U)$ interseca D^+A, i.e., $p \notin H^+A$. ∴ Si $p \in H^+A \Rightarrow p \in \mathrm{bd}\, D^+A$.

Si ~~$p \in A$, como $p \in D^+A = T$ por lema 51, tomamos α curva temp~~ Si $p \in D^+A$ y $p \notin \mathrm{bd}\, D^+A$, ent tomamos α curva temporal de $I^+(p,U)$ a $I^-(p,U)$ que cruza D^+A, digamos en $q \in D^+A$. Sea β una curva temporal pasado inextendible que empieza en q debe intersecar a A en $p' \in A$, ent tomando $\alpha + \beta$ es curva temporal que conecta p con q, i.e., $p \ll q$ en A, lo cual contradice que A es no cronológico.

$\mathrm{bd}\, D^+A \subseteq A \cup H^+A$: Sup $p \in \mathrm{bd}\, D^+A$ y que $p \notin A \cup H^+A$, ent $p \in \overline{D^+A} \setminus A$, como $\overline{D^+A} = T$, se tiene que $p \in I^+A$. Tenemos también que $p \in \overline{D^+A} \setminus H^+A$ de manera que $\exists q \in I^+(p) \cap D^+A$, así ~~$q \in I^+$~~ $p \in I^+A \cap I^-(q)$ la cual es una vecindad de p, ent por regresión tal vecindad está contenida en D^+A, lo cual contradice la def de que $p \in bd\, D^+A$ ~~se sigue que $p \in bd\, D^+A$~~ $\therefore bd\, D^+A \subseteq A \cup H^+A$.

$\therefore bd\, D^+A = A \cup H^+A$. $\blacksquare$

Prop 53: Sea S una hipersuperficie topológica cerrada no causal. Ent

1) $H^+(S) = I^+(S) \cap bd\, D^+S = \overline{D^+S} \setminus D^+S$. En particular, H^+S y S son disjuntos.

2) H^+S, si no es vacío, es una hipersuperficie topológica cerrada no cronológica.

3) Empezando en cada punto de H^+S hay una geodésica nula sin puntos conjugados que está totalmente contenida en H^+S. (extendidas al futuro tan lejos como sea posible en H^+S, tales geodésicas son llamadas generadores de H^+S). En particular es no cronológica

Dem: 1) a) Como S es no causal, en particular por definición además es cerrada, así por el lema 51 $\overline{D^+S} = T$ y $H^+S \subseteq \overline{D^+S} \subseteq S \cup I^+S$, por el lema 51.

b) D^+S no interseca H^+S, pues $D^+S \subseteq \overline{D^+S} \subseteq T$ por el lema 51. De hecho por el lema 43, $D(S)$ es abierto, ent si $p \in D^+S \subseteq D(S)$, ent $I^+(p) \cap D(S) \neq \phi$ y $I^+(p) \cap D^-(S) = \phi$ pues de no ser así contradice no causalidad. Ent $I^+(p) \cap D^+(S) \neq \phi$, de manera que por definición $p \notin H^+S$.

c) Como $S \subseteq D(S)$, por a) $H^+S \subseteq S \cup I^+S$, pero por b) si $p \in H^+(S)$ ent $p \notin D^+S$ $\therefore p \notin S$ $\therefore H^+S \subseteq I^+S$.

d) $I^+S \cap bd\, D^+S = I^+S \cap (S \cup H^+S) = \underbrace{(I^+S \cap S)}_{\phi} \cup (I^+S \cap H^+S) = H^+S$.

e) por b) tenemos que $H^+S \subseteq \overline{D^+S} \setminus D(S)$. Sup $p \in \overline{D^+S} \setminus D(S)$. Si $q \in I^+(p)$ ent hay una curva al pasado temporal de q a p, tal curva no pasa por S ya que $p \notin D(S) \supseteq S$ y $p \notin I^-(S)$. ~~Como $p \notin D^+S$ hay una curva temporal inextendible que empieza en p y no cruza por S. Por lo tanto. Por lo tanto hay una curva~~ Como $p \notin D^+S$ hay una curva temporal inextendible que empieza en p y no cruza S, de manera que ya que $q \in I^+(p)$ hay una curva causal inextendible al pasado que empieza en q y no cruza S, ent $q \notin D^+S$ $\therefore I^+(p)$ no interseca D^+S $\therefore p \in H^+S$.

∴ $\overline{D^+S}\setminus D^+S \subseteq H^+S$ ∴ $\overline{D^+S}\setminus D^+S = H^+S$.

2) $P = D^+S \cup I^-S$ es un conjunto pasado por regresión, pues por la regresión

$I^-P = I^-(D^+S) \cup I^-I^-S \subseteq D^+S \cup I^-S = P$. Por el corolario 27

bd P es una hipersuperficie topológica, por 1) $H^+S = I^+S \cap \text{bd}\, D^+S$.

Ya que I^-S e I^+S son abtos disjuntos, se sigue que

$$I^+S \cap \text{bd}\, P = I^+S \cap \text{bd}(D^+S \cup I^-S)$$

$$= (I^+S \cap \text{bd}\, D^+S) \cup (I^+S \cap \text{bd}\, I^-S) = I^+S \cap \text{bd}\, D^+S = H^+S$$

por 1). Como $H^+S \subseteq \text{bd}\, P$ y bd P es hipersuperficie topológica se sigue que H^+S es hipersuperficie topológica y ya habíamos visto antes que H^+S era cerrado y no cronológico.

3) Si $p \in H^+S$, por 1) hay una curva causal pasado inextendible γ que empieza en p, por el lema 51 γ no puede ser temporal, puesto que $H^+S \subseteq \overline{D^+S} = T$. Así por el lema 30 2) γ es una geodésica nula libre de puntos conjugados. Solo resta probar que $\gamma \subseteq H^+S$. γ no puede intersectar D^+S pues de ser así tendría que intersecar a S. Si $\gamma(s) \notin \overline{D^+S}$ para algún $s>0$, ent hay una curva β temporal pasado inextendible que empieza en $\gamma(s)$ y no cruza S. Si aplicamos el lema 30 2) a $\gamma|[0,s] + \beta$ es una curva temporal pasado inextendible que empieza en $\gamma(0)$ y no cruza S, ent $\gamma(0) = p \notin \overline{D^+S} = T$ ∴ $p \notin H^+S$, lo cual es absurdo. ∴ $\gamma \subseteq \overline{D^+S}\setminus D^+S = H^+S$ como se quería. ■

Corolario 54.- Sea S una hipersuperficie no causal topológica. Si cada geodésica nula inextendible S interseca S, ent S es una hipersuperficie de Cauchy.

Dem: (A) S es hipersuperficie de Cauchy si y solo si $H(S)$ es vacía:

$\text{bd}\, D(S) \subseteq \text{bd}(D^+S \cup D^-S) \subseteq \text{bd}\, D^+S \cup \text{bd}\, D^-S \underset{\text{lema 52}}{=} S \cup H^+S \cup \text{bd}\, D^-S$

$\underset{\text{lema 52}}{=} S \cup H^+S \cup H^-S = S \cup H(S)$. Pero $D(S)$ es abto y contiene a S, por prop 53 1) $\text{bd}\, D(S) \subseteq H(S)$. ~~Por prop 53 1)~~ Por definición $H(S) \subseteq \text{bd}\, D(S)$. ~~$H^+S \subseteq \text{bd}\, D^+S$ y $H^-(S) \subseteq \text{bd}\, D^-S$.~~ Por consiguiente se sigue (A).

∴ $\text{bd}\, D(S) = H(S)$. Ahora ya que M es conexa, $H(S)$ es vacía si y sólo si $D(S) = M$ (esto que S sea hipersuperficie de Cauchy).

Ahora veremos que efectivamente $H(S)=\emptyset$. Si $p\in H^+S$. ent hay una geodésica γ nula pasado-inextendible que empieza en p y está contenida en H^+S, en particular γ no cruza S. La extensión inextendible de γ no puede cruzar S en el futuro ya que S es no cronológico y $p\in I^+S$ pues $p\in H^+S\subseteq I^+S$, lo cual deriva que S es cronológico, lo cual es absurdo. $\therefore$ H^+S es vacío $\therefore$ $H(S)$ es vacío.

$\therefore D(S)=M$, i.e., S es una hipersuperficie de Cauchy. $\boxtimes$

Obs: Por el lema 42, los últimos dos resultados aplican si S solo es no cronológico cerrado hipersuperficie espacial.

Teorema de singularidad de Hawking