Gradyen Operatörü

Herhangi bir koordinat sisteminde tanımlı skaler fonksiyona uygulanan gradyen işlemi aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

Bu işlem sonucunda bir vektör elde edilir. Bu vektör, skaler fonksiyonun en hızlı arttığı yöne işaret eder. Bu nedenle gradyen vektörü, skaler fonksiyonun yön türevi olarak da düşünülebilir. Koordinat sistemlerindeki birim vektörlerle çarpıldığında, gradyen vektörü skaler fonksiyonun yön türevini verir ve aşağıdaki gibi daha genel bir şekilde yazılabilir:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{a}_z$$

Kartezyen, silindirik ve küresel koordinat sistemlerinde gradyen operatörü aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{a}_z$$

Silindirik koordinat sisteminde birinci bağımsız değişken olan silindirin yarıçapını ρ ile, ikinci bağımsız değişken olan açıyı θ ile ve üçüncü bağımsız değişken olan yüksekliği z ile gösteririz. Bu durumda gradyen operatörü aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \rho}\mathbf{a}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \theta}\mathbf{a}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{a}_z$$

Küresel kooordinat sisteminde birinci bağımsız değişken olan kürenin yarıçapını r ile, ikinci bağımsız değişken olan açıları θ ve ϕ ile gösteririz. Bu durumda gradyen operatörü aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\mathbf{a}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\mathbf{a}_\phi$$

Gradyen operatörü, skaler bir fonksiyonun yön türevini verir. Bu nedenle gradyen operatörü, skaler bir fonksiyonun vektörleştirilmiş halidir. Gradyen operatörü, skaler bir fonksiyonun yön türevini verirken, Laplace operatörü ise skaler bir fonksiyonun ikinci türevini verir. Laplace operatörü, gradyen operatörünün gradyen operatörü olarak da düşünülebilir. Laplace operatörü, kartezyen koordinat sisteminde aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Silindirik koordinat sisteminde Laplace operatörü aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Küresel koordinat sisteminde Laplace operatörü aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$$

Gradyen İşlemi Uygulamaları

Kartezyen Koordinat Sisteminde Gradyen İşlemine Örnek

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{a}_z$$

$$\nabla f = 2x\mathbf{a}_x + 2y\mathbf{a}_y + 2z\mathbf{a}_z$$

Silindirik Koordinat Sisteminde Gradyen İşlemine Örnek

$$f(\rho, \theta, z) = \rho^2 + z^2$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \rho}\mathbf{a}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \theta}\mathbf{a}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{a}_z$$

$$\nabla f = 2\rho\mathbf{a}_\rho + 0\mathbf{a}_\theta + 2z\mathbf{a}_z$$

Küresel Koordinat Sisteminde Gradyen İşlemine Örnek

$$f(r,\theta,\phi) = r^2 + 2\sin\theta$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\mathbf{a}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\mathbf{a}_\phi$$

$$\nabla f = 2r\mathbf{a}_r + 0\mathbf{a}_\theta + 2\cos\theta\mathbf{a}_\phi$$

Laplace İşlemi Uygulamaları

Kartezyen Koordinat Sisteminde Laplace İşlemine Örnek

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2 f = 2 + 2 + 2 = 6$$

Silindirik Koordinat Sisteminde Laplace İşlemine Örnek

$$f(\rho,\theta,z) = \rho^2 + z^2$$

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2 f = 2 + 0 + 2 = 4$$

Küresel Koordinat Sisteminde Laplace İşlemine Örnek

$$f(r,\theta,\phi) = r^2 + 2\sin\theta$$

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$$

$$\nabla^2 f = 2 + 0 + 0 = 2$$

Python Kod örnekleri

Kartezyen Koordinat Sisteminde Gradyen İşlemi

```
import sympy as sp

x, y, z = sp.symbols('x y z')
f = x**2 + y**2 + z**2
grad_f = sp.gradient(f, [x, y, z])
grad_f
```