Bir Vektör Alanın Rotasyoneli

Bir vektör alanın kapalı bir yolun gösterdiği açık yüzeydeki rotasyonel değeri aşağıdaki integral ile hesaplanır:

$$C = \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l}$$

Vektör alanın birim yüzeydeki net dönme miktarı için rotasyonel işlemi kullanılır:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \lim_{A \to 0} \frac{1}{A} \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l}$$

Yukarıdaki ifade vektörel calculus ile kartezyen koordinat sisteminde aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

Determinant işlemlerini yaparak:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \mathbf{a}_x + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \mathbf{a}_y + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \mathbf{a}_z$$

eşitliği elde edilir.

Kartezyen Koordinat Sisteminde Rotasyonel Uygulamaları

Uygulama 1

$$\mathbf{F} = x^2 \mathbf{a}_x + xy \mathbf{a}_y + xz^2 \mathbf{a}_z$$

vektör alanı tanımlansın. Bu vektör alanının rotasyonelini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \mathbf{a}_x + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \mathbf{a}_y + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \mathbf{a}_z$$

olarak tanımlanan rotasyonel işlemi ile:

$$\nabla \times \mathbf{F} = -x\mathbf{a}_x - z^2\mathbf{a}_y + y\mathbf{a}_z$$

```
from sympy import symbols, diff

x, y, z = symbols('x y z')
F_x = x**2
F_y = x*y
F_z = x*z**2

print(diff(F_z, y) - diff(F_y, y))
print(diff(F_x, y) - diff(F_z, x))
print(diff(F_y, x) - diff(F_x, y))
```

$-x$ - z^2 + y

Uygulama 2

$$\mathbf{F} = \sin x\, \mathbf{a}_x + x \sin y\, \mathbf{a}_y + z^2\, \mathbf{a}_z$$

vektör alanı tanımlansın. Bu vektör alanının rotasyonelini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\mathbf{a}_x + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\mathbf{a}_y + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\mathbf{a}_z$$

olarak tanımlanan rotasyonel işlemi ile:

$$\nabla \times \mathbf{F} = 0\mathbf{a}_x + 0\mathbf{a}_y + \sin y\mathbf{a}_z$$

```
from sympy import symbols, diff, sin, cos

x, y, z = symbols('x y z')
F_x = sin(x)
F_y = x*sin(y)
F_z = z**2

print(diff(F_z, y) - diff(F_y, z))
print(diff(F_x, z) - diff(F_z, x))
print(diff(F_y, x) - diff(F_x, y))
```

0 0 $\sin y$

Uygulama 3

$$\mathbf{F} = z^2\mathbf{a}_x + x^2\mathbf{a}_y + y^2\mathbf{a}_z$$

vektör alanı tanımlansın. Bu vektör alanının rotasyonelini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\mathbf{a}_x + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\mathbf{a}_y + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\mathbf{a}_z$$

olarak tanımlanan rotasyonel işlemi ile:

$$\nabla \times \mathbf{F} = 2y\mathbf{a}_x + 2z\mathbf{a}_y + 2x\mathbf{a}_z$$

```python
from sympy import symbols, diff

x, y, z = symbols('x y z')
F_x = z**2
F_y = x**2
F_z = y**2

print(diff(F_z, y) - diff(F_y, z))
print(diff(F_x, z) - diff(F_z, x))
print(diff(F_y, x) - diff(F_x, y))
```

$2y$ $2z$ $2x$