Elektrostatik Potansiyel Hesaplamaları

Elektrik Potansiyel Farkı

Noktasal bir q yükü, haricî bir elektrik alanı içersinde, A noktasından B noktasına hareket ettirilirse, iki nokta rasında bir potansiyel farkı oluşur.

İki nokta arasındaki elektrik potansiyel farkı aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\Delta V = V_B - V_A = -\int_A^B \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l}$$

Bu formülde, $\mathbf{E}$ elektrik alanı, $\mathrm{d}\mathbf{l}$ hareket yönündeki diferansiyel yol elemanıdır.

Uygulama 1

$\mathbf{E} = x^2\mathbf{a}_x + yz\mathbf{a}_y$ elektrik alanı içersinde $2\,(\mathrm{C})$'luk noktasal yük, $(0,0)$ noktasından $(3,4)$ noktasına en kısa yoldan hareket ettirilirse, bu iki nokta arasındaki potansiyel farkı ne olur?

Çözüm:

İlk önce $\mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l}$ çarpımını hesaplayalım:

$$\mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = x^2\,\mathrm{d}x + yz\,\mathrm{d}y$$

İki nokta arasındaki potansiyel farkı hesaplamak için bu ifadeyi integral almalıyız:

$$\Delta V = -\int_0^3 \int_0^4 x^2\,\mathrm{d}x + yz\,\mathrm{d}y$$

$z = 0$ olduğundan, $yz = 0$ olacaktır. Bu nedenle, yz terimi integralde yer almamaktadır. Bu durumda, integrali aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\Delta V = -\int_0^3 x^2\mathrm{d}x = -\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^3 = -9\,(\mathrm{V})$$

Sonuç olarak, iki nokta arasındaki potansiyel farkı $-9\,(\mathrm{V})$ olacaktır.

Uygulama 2

Üzerinde $\lambda = x^2$ (C/m)'lik yük yoğunluğu bulunan çizgisel yük dağılımı, $1 \leq x \leq 3$ aralığında yerleşiktir. (0,3) noktasında oluşan potansiyel değerini hesaplayınız.

Çözüm:

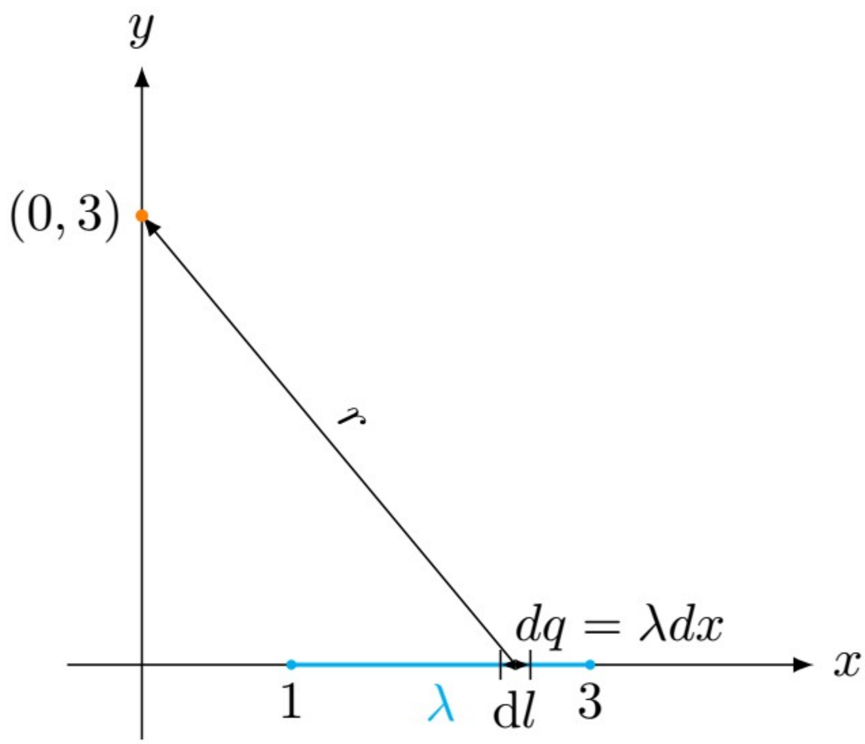

Figure 1: Çizgisel Yük Dağılımı

$(0, 3)$ noktasındaki diferansiyel potansiyel değeri:

$$\mathrm{d}V = \frac{\lambda \, \mathrm{d}x}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+9}}$$

Çizgisel yük dağılımı, $x = 1$ noktasından $x = 3$ noktasına kadar uzanmaktadır. $(0, 3)$ noktasında oluşan diferansiyel potansiyel değerini hesaplamak için çizgisel yük üzerinde $(x, 0)$ noktasında bir diferansiyel uzunluk tanımlayarak, bu uzunluk üzerindeki diferansiyel potansiyel değeri hesaplamalıyız. Bu değer aşağıdaki gibi yazılır:

$$dq = \lambda \, \mathrm{d}x = x^2 \, \mathrm{d}x$$

Bu diferansiyel potansiyel değeri, $(0, 3)$ noktasında oluşan potansiyel değeri hesaplamak için integral almalıyız:

$$V = \int_1^3 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+9}} \, \mathrm{d}x$$

Bu formun genel çözümü için standart bir formülden faydalanabiliriz:

Tabii ki, bu işlemin ara adımlarını daha detaylı açıklayabilirim.

Verilen integral:

$$V = \int_1^3 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+9}} \, \mathrm{d}x$$

Buradaki ara adımları şöyle açıklayabiliriz:

1. Öncelikle, integrali çözmek için bir yöntem belirlemeliyiz. Bu formda bir integralin doğrudan çözümü için pay ve paydayı incelemeliyiz.
2. İlk olarak, pay kısmını $(x^2 + 9) - 9$ şeklinde yazalım:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+9}} \, \mathrm{d}x = \int \frac{(x^2+9) - 9}{\sqrt{x^2+9}} \, \mathrm{d}x$$

3. Bunu açalım:

$$\int \frac{x^2+9}{\sqrt{x^2+9}} \, \mathrm{d}x - \int \frac{9}{\sqrt{x^2+9}} \, \mathrm{d}x$$

4. Birinci terim basitleşir:

$$\int \sqrt{x^2+9} \, \mathrm{d}x - 9 \int \frac{1}{\sqrt{x^2+9}} \, \mathrm{d}x$$

5. Şimdi iki ayrı integral çözüyoruz:

   a) İlk integral için $u = x^2+9$ substitüsyonu yapılabilir: $du = 2x \, dx$, buradan $x \, dx = \frac{du}{2}$

$$\int \sqrt{x^2+9} \, \mathrm{d}x = \int \sqrt{u} \cdot \frac{dx}{du} \cdot du = \int \frac{\sqrt{u}}{2x} \cdot du$$

   Burada $x = \sqrt{u-9}$ olduğu için:

$$\int \frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{u-9}} \cdot du$$

Bu integrali çözmek için kısmi integrasyon veya başka bir substitüsyon yapabiliriz.

b) İkinci integral için bilinen bir formül vardır:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} \, \mathrm{d}x = \ln|x+\sqrt{x^2+a^2}| + C$$

Burada $a^2 = 9$ olduğundan $a = 3$ dir.

6. Bu iki integrali çözdüğümüzde ve birleştirdiğimizde, sonuç olarak başta belirttiğim formülü elde ederiz:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}} \, dx = \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2} - \frac{a^2}{2} \ln|x+\sqrt{x^2+a^2}| + C$$

Şimdi belirli sınırlarda değerlendirelim:

$$V = \left[\frac{x\sqrt{x^2+9}}{2} - \frac{9}{2} \ln|x+\sqrt{x^2+9}|\right]_1^3$$

Alt ve üst sınırları yerleştirelim:

$$V = \left[\frac{3\sqrt{18}}{2} - \frac{9}{2} \ln|3+\sqrt{18}|\right] - \left[\frac{\sqrt{10}}{2} - \frac{9}{2} \ln|1+\sqrt{10}|\right]$$

Basitleştirelim: - $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ - $3+\sqrt{18} = 3+3\sqrt{2} = 3(1+\sqrt{2})$

$$V = \frac{3 \cdot 3\sqrt{2} - \sqrt{10}}{2} - \frac{9}{2} \ln \frac{3(1+\sqrt{2})}{1+\sqrt{10}}$$

$$V = \frac{9\sqrt{2}-\sqrt{10}}{2} - \frac{9}{2} \ln(3) - \frac{9}{2} \ln\left(\frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{10}}\right)$$

Bu, integralin kesin değeridir. Yaklaşık sayısal değer olarak $V \approx 2.291$ bulunur. Python ile çözümü aşağıdaki gibi yapabiliriz:

```python
import sympy as sp

x = sp.symbols('x')
V = sp.integrate(x**2/sp.sqrt(x**2+9), (x, 1, 3))
print(V.evalf())
```

2.29016673507446

Uygulama 3

$0 \leq x \leq 1$ aralığında, 1mm aralıklarla yerleştirilmiş $1\,(\mathrm{nC})$'luk noktasal yüklerin, $(0, 1)$ noktasında oluşturduğu potansiyel değeri hesaplayınız.

Çözüm:

Bir noktasal yükün kendinden d uzaklıktaki noktada oluşturduğu potansiyel değerini aşağıdaki gibi hesaplayabiliriz:

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Herhangi bir yükün $(0, 1)$ noktasına ola uzaklığını hesaplamak için, x ve y koordinatlarını kullanabiliriz. Bu durumda, r uzaklığı aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + 1}$$

Bu durumda, $(0, 1)$ noktasındaki potansiyel değeri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$V = \sum_{i=0}^{1000} \frac{1 \times 10^{-9}}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{i^2 + 1}}$$

Bu toplamı hesaplamak için Python programlama dili kullanabiliriz:

```python
import sympy as sp

epsilon_0=9e9
V = 0
for j in range(1001):
    i = j/1000
    V += 1/(4*sp.pi*epsilon_0*sp.sqrt(i**2+1))
print(V.evalf())
```

7.80060031316406e-9