

Gradyen Operatörü

Gradyen işlemi için Nabla operatörü kullanılır. Bu operatör aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial u_1} \mathbf{a}_{u1} + \frac{\partial}{\partial u_2} \mathbf{a}_{u2} + \frac{\partial}{\partial u_3} \mathbf{a}_{u3}$$

Gradyen işlemi genel olarak aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\nabla = \frac{1}{h_{u1}} \frac{\partial}{\partial u_1} \mathbf{a}_{u1} + \frac{1}{h_{u2}} \frac{\partial}{\partial u_2} \mathbf{a}_{u2} + \frac{1}{h_{u3}} \frac{\partial}{\partial u_3} \mathbf{a}_{u3}$$

Bu işlem sonucunda bir vektör elde edilir. Bu vektör, skaler fonksiyonun en hızlı arttığı yöne işaret eder. Bu nedenle gradyen vektörü, skaler fonksiyonun yön türevi olarak da düşünülebilir. Koordinat sistemlerindeki birim vektörlerle çarpıldığında, gradyen vektörü skaler fonksiyonun yön türevini verir ve aşağıdaki gibi daha genel bir şekilde yazılabilir:

Bu durumda Kartezyen koordinat sisteminde gradyen operatörü aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{a}_z$$

Silindirik koordinat sisteminde birinci bağımsız değişken olan silindirin yarıçapını ρ ile, ikinci bağımsız değişken olan açıyı θ ile ve üçüncü bağımsız değişken olan yüksekliği z ile gösteririz. Bu durumda gradyen operatörü aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \mathbf{a}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{a}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{a}_z$$

Küresel koordinat sisteminde birinci bağımsız değişken olan kürenin yarıçapını r ile, ikinci bağımsız değişken olan açıları θ ve ϕ ile gösteririz. Bu durumda gradyen operatörü aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{a}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \mathbf{a}_\phi$$

Gradyen operatörü, skaler bir fonksiyonun yön türevini verir. Bu nedenle gradyen operatörü, skaler bir fonksiyonun vektörleştirilmiş halidir. Gradyen operatörü, skaler bir fonksiyonun yön türevini verirken, Laplace operatörü ise skaler bir fonksiyonun ikinci türevini verir. Laplace operatörü, gradyen operatörünün gradyen operatörü olarak da düşünülebilir. Laplace operatörü, kartezyen koordinat sisteminde aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Silindirik koordinat sisteminde Laplace operatörü aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Küresel koordinat sisteminde Laplace operatörü aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$$

Gradyen İşlemi Uygulamaları

Kartezyen Koordinat Sisteminde Gradyen İşlemine Örnek

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{a}_z$$

$$\nabla f = 2x \mathbf{a}_x + 2y \mathbf{a}_y + 2z \mathbf{a}_z$$

Silindirik Koordinat Sisteminde Gradyen İşlemine Örnek

$$f(\rho, \theta, z) = \rho^2 + z^2$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \mathbf{a}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{a}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{a}_z$$

$$\nabla f = 2\rho \mathbf{a}_\rho + 0 \mathbf{a}_\theta + 2z \mathbf{a}_z$$

Küresel Koordinat Sisteminde Gradyen İşlemine Örnek

$$f(r, \theta, \phi) = r^2 + 2 \sin \theta$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{a}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \mathbf{a}_\phi$$

$$\nabla f = 2r \mathbf{a}_r + 0 \mathbf{a}_\theta + 2 \cos \theta \mathbf{a}_\phi$$

Laplace İşlemi Uygulamaları

Kartezyen Koordinat Sisteminde Laplace İşlemine Örnek

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2 f = 2 + 2 + 2 = 6$$

Silindirik Koordinat Sisteminde Laplace İşlemine Örnek

$$f(\rho, \theta, z) = \rho^2 + z^2$$

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2 f = 2 + 0 + 2 = 4$$

Küresel Koordinat Sisteminde Laplace İşlemine Örnek

$$f(r, \theta, \phi) = r^2 + 2 \sin \theta$$

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$$

$$\nabla^2 f = 2 + 0 + 0 = 2$$

Elektrostatik Alan Teorisinde Gradyen ve Laplace İşlemi

Elektrostatik alan teorisinde, elektrik alanı skaler bir fonksiyon olarak ifade edilir. Bu durumda elektrik alanının gradyen operatörü, elektrik alanının yön türevini verir. Bu değer de elektrostatik potansiyel ile ilişkilendirilir. Bu ilişki aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\mathbf{E} = -\nabla V$$

Bir örnek verelim:

$$V(x, y, z) = x + y^2 + z^3 \text{ (V)}$$

ile tanımlı bir elektrostatik potansiyel dağılımı düşünelim. Bu durumda elektrik alanı aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a}_z\right)$$

$$\mathbf{E} = -(\mathbf{a}_x + 2y\mathbf{a}_y + 3z^2\mathbf{a}_z) \text{ (V/m)}$$

Elektrik alanın gradyen operatörü, elektrik alanının yön türevini verirken, Laplace operatörü ise elektrik alanının ikinci türevini verir. Bu durumda Laplace operatörü aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\nabla^2 V = \nabla \cdot \nabla V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2 V = 0 + 2 + 6z$$

olarak hesaplanır.

Sonuç

Gradyen operatörü, skaler bir fonksiyonun yön türevini verirken, Laplace operatörü ise skaler bir fonksiyonun ikinci türevini verir. Gradyen operatörü, skaler bir fonksiyonun vektörleştirilmiş halidir ve skaler bir fonksiyonun en hızlı arttığı yöne işaret eder. Laplace operatörü ise gradyen operatörünün gradyen operatörü olarak da düşünülebilir ve skaler bir fonksiyonun ikinci türevini verir. Bu nedenle gradyen operatörü ve Laplace operatörü, vektör analizinde önemli bir yere sahiptir.