Diverjans

Bir vektör alanın açık veya kapalı yüzeylerden geçen kuvvet çizgilerinin net değeri aşağıdaki integral ile hesaplanır:

$$\psi = \int_S \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s}$$

Bir vektör alanın birim yüzeydeki net akı miktarı için diverjans işlemi kullanılır:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \int_S \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s}$$

Yukarıdaki ifade vektörel calculus ile kartezyen koordinat sisteminde aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

Silindirik koordinat sisteminde:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho F_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

Küresel koordinat sisteminde:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 F_r) + \frac{1}{r \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta F_\theta) + \frac{1}{r \sin\theta}\frac{\partial F_\phi}{\partial \phi}$$

olarak yazılır.

Kartezyen Koordinat Sisteminde Diverjans Uygulamaları

Uygulama 1

$$\mathbf{F} = x\mathbf{a}_x + xy^2\mathbf{a}_y + xy^2z^3\mathbf{a}_k$$

vektör alanı tanımlansın. Bu vektör alanının diverjansını hesaplayınız.

Çözüm:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

olarak tanımlanan diverjans işlemi ile:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(xy^2) + \frac{\partial}{\partial z}(xy^2 z^3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = 1 + 2xy + 3xy^2 z^2$$

olarak hesaplanır.

```
from sympy import symbols, diff

x, y, z = symbols('x y z')
F_x = x
F_y = x*y**2
F_z = x*y**2*z**3

print(diff(F_x, x))
print(diff(F_y, y))
print(diff(F_z, z))
```

$1 + 2xy + 3xy^2z^2$

Uygulama 2

$$\mathbf{F} = \frac{x^2}{y}\mathbf{a}_x + e^{xy}\mathbf{a}_y + z^2\mathbf{a}_z$$

vektör alanı tanımlansın. Bu vektör alanının diverjansını hesaplayınız.

Çözüm:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

olarak tanımlanan diverjans işlemi ile:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2}{y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{xy}\right) + \frac{\partial}{\partial z}(z^2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{2x}{y} + xe^{xy} + 2z$$

olarak hesaplanır.

```
from sympy import symbols, diff, exp

x, y, z = symbols('x y z')
F_x = x**2/y
F_y = exp(x*y)
F_z = z**2

print(diff(F_x, x))
print(diff(F_y, y))
print(diff(F_z, z))
```

$\frac{2x}{y} + xe^{xy} + 2z$

Silindirik Koordinat Sisteminde Diverjans Uygulamaları

Uygulama 1

$$\mathbf{F} = \rho \mathbf{a}_\rho + \rho^2 \mathbf{a}_\phi + z \mathbf{a}_z$$

vektör alanı tanımlansın. Bu vektör alanının diverjansını hesaplayınız.

Çözüm:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho F_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

olarak tanımlanan diverjans işlemi ile:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho \rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho^2) + \frac{\partial}{\partial z}(z)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = 3$$

```python
from sympy import symbols, diff

rho, theta, z = symbols('rho theta z')
F_rho = rho
F_theta = rho**2
F_z = z

print(1/rho * diff(rho*rho, rho) + 1/rho * diff(rho**2, theta) + diff(z, z))
```

3 ### Uygulama 2

$$\mathbf{F} = \rho^2 \sin\phi\, \mathbf{a}_\rho + \sin\phi\, \mathbf{a}_\phi + z^2 \mathbf{a}_z$$

vektör alanı tanımlansın. Bu vektör alanının diverjansını hesaplayınız.

Çözüm:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho F_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

olarak tanımlanan diverjans işlemi ile:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho \cdot \rho^2 \sin\phi) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \phi}(\sin\phi) + \frac{\partial}{\partial z}(z^2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{\rho}(3\rho^2 \sin\phi) + \frac{1}{\rho}(\cos\phi) + 2z$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = 3\rho \sin\phi + \frac{\cos\phi}{\rho} + 2z$$

```python
from sympy import symbols, diff, sin, cos

rho, phi, z = symbols('rho phi z')
F_rho = rho**2*sin(phi)
F_phi = sin(phi)
F_z = z**2

print(1/rho * diff(rho*rho*sin(phi), rho) + 1/rho * diff(sin(phi), phi) + diff(z**2, z))
```

$3\rho \sin\phi + \frac{\cos\phi}{\rho} + 2z$

Küresel Koordinat Sisteminde Diverjans Uygulamaları

Uygulama 1

$$\mathbf{F} = r^2\mathbf{a}_r + r\sin\theta\mathbf{a}_\theta + r\sin\theta\cos\phi\mathbf{a}_\phi$$

vektör alanı tanımlansın. Bu vektör alanının diverjansını hesaplayınız.

Çözüm:

$$\nabla\cdot\mathbf{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2F_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta F_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_\phi}{\partial\phi}$$

olarak tanımlanan diverjans işlemi ile:

$$\nabla\cdot\mathbf{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2r^2) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(r\sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}(r\sin\theta\cos\phi)$$

$$\nabla\cdot\mathbf{F} = \frac{1}{r^2}(4r^3) + \frac{1}{r\sin\theta}(r\cos\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}(-r\sin\theta\sin\phi)$$

$$\nabla\cdot\mathbf{F} = 4r + \cot\theta - \sin\phi$$

```
from sympy import symbols, diff, sin, cos, cot

r, theta, phi = symbols('r theta phi')
F_r = r**2
F_theta = r*sin(theta)
F_phi = r*sin(theta)*cos(phi)

print(1/r**2 * diff(r**2*r**2, r) + 1/(r*sin(theta)) * diff(sin(theta)*r, theta) + 1/(r*sin(
```

$4r$ + $\cot\theta$ - $\sin\phi$

Uygulama 2

$$\mathbf{F} = r^2 \sin\theta \cos\phi \, \mathbf{a}_r + r \sin\theta \sin\phi \, \mathbf{a}_\theta + r \sin\theta \mathbf{a}_\phi$$

vektör alanı tanımlansın. Bu vektör alanının diverjansını hesaplayınız.

Çözüm:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 F_r) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta F_\theta) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi}$$

olarak tanımlanan diverjans işlemi ile:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 r^2 \sin\theta \cos\phi) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(r \sin\theta \sin\phi) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \phi}(r \sin\theta)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r^2}(4r^3 \sin\theta \cos\phi) + \frac{1}{r \sin\theta}(r \cos\theta \sin\phi) + \frac{1}{r \sin\theta}(0)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = 4r \sin\theta \cos\phi + \cot\theta \sin\phi + 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = 4r \sin\theta \cos\phi + \cot\theta \sin\phi$$

```python
from sympy import symbols, diff, sin, cos

r, theta, phi = symbols('r theta phi')
F_r = r**2 * sin(theta) * cos(phi)
F_theta = r * sin(theta) * sin(phi)
F_phi = r * sin(theta)

div_F = (1/r**2 * diff(r**2 * F_r, r) +
         1/(r * sin(theta)) * diff(sin(theta) * F_theta, theta) +
         1/(r * sin(theta)) * diff(F_phi, phi))

print(div_F)
```

$4r \sin\theta \cos\phi + \cot\theta \sin\phi$