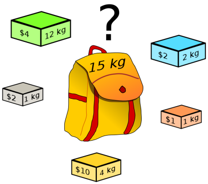
Problema da Mochila Binária

Fernando Gomes, Leonardo Holtz

Universidade Federal do Rio Grande do Sul



Sumário

Definição intuitiva

Dado um conjunto de itens, com cada item tendo um peso e um custo, qual a escolha de itens tal que a soma de seus pesos é menor que a capacidade de uma mochila a soma de seus custos é a maior possível?

Definição matemática: problema de otimização

Dados uma mochila com capacidade máxima W, um conjunto de n itens $x_1, x_2, ..., x_n$, cada um com um peso w_i e um valor v_i:

$$\text{maximizar} \sum_{i=1}^{n} v_i x_i$$

$$\text{sujeito a} \ \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \leq W \text{ e } x_i \in \{0, 1\}$$

Neste caso, x_i representa o número de instâncias do item i dentro da mochila.

Definição matemática: problema de decisão

Dados uma mochila com capacidade máxima W, um valor mínimo V, um conjunto de n itens $x_1, x_2, ..., x_n$, cada um com um peso w_i e um valor v_i:

$$\text{maximizar} \sum_{i=1}^{n} v_i x_i \text{ t.q.}$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i x_i \leq W \text{ e } x_i \in \{0,1\}$$

$$\sum_{i=1}^{n} v_i x_i \geq V \text{ e } x_i \in \{0,1\} \text{ ?}$$

O problema de decisão se torna: "Existe um seleção de x_i que satisfaça essa definição?"

Aplicações

Aplicações e blabalblablabla

Algoritmo de verificação

Para provar que PM[1] $\in$ NP, precisamos mostrar que existe um algoritmo capaz de verificar se um certificado do PM é correto em tempo polinomial.

[1] PM = Problema da mochila binária

Algoritmo em pseudocódigo

P: conjunto de pesos p_i
V: conjunto de valores v_i
VMIN: valor minímo para o problema de decisão
W: carga máxima da mochila
n: tamanho do problema CERTIFICADO: seleção
$x_1, ..., x_n$ $t.q.$ $x \in \{0, 1\}$

Pré-algoritmo

```
VerificaPM(P, V, VMIN, W, n, CERTIFICADO)
    ...
    returns SIM or NÃO
```

Algoritmo completo

```
VerificaPM(P, V, VMIN, W, n, CERTIFICADO)
   PesoTotal = 0
   ValorTotal = 0
   for i in 1:n
       PesoTotal += P[i] * W[i]
       ValorTotal += V[i] * V[i]
   endfor
   if PesoTotal <= W && ValorTotal > VMIN
       return True
   else
       return false
```

Análise de complexidade

- As atribuições das linhas 2 e 3 tem complexidade $\mathcal{O}(1)$.
- O laço *for* executa n vezes, e a complexidade das atribuições e multiplicações são constantes. A complexidade total do laço é $\mathcal{O}(n)$
- A complexidade total do algoritmo é, portanto, $\mathcal{O}(n)$.
- O problema da mochila (como problema de decisão) pode, então, ser verificado em tempo polinomial. Com isso concluímos que pertence ao conjunto NP.

Soma de subconjuntos

- Para demonstrar que PM $\in$ NP-difícil, utilizaremos uma redução do problema da soma de subconjuntos para o problema da mochila.
- Note que estamos utilizando problemas de decisão, mas se demonstrarmos que eles pertencem a NP-difícil, é evidente que o problema de otimização associado também será NP-difícil (o problema de decisão é mais "fácil").

Redução inst A para inst B

Algoritmo de redução

Análise da complexidade

Referências