UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

Estructuras Discretas
Grupo 6

Ing. Orlando Zaldívar Zamorategui

Proyecto
Tutorial: Conjuntos, relaciones y pruebas matemáticas. Probabilidad discreta. Probabilidad condicional, independencia y teorema de Bayes

Equipo 2
Serrano Cuevas Ingrid Jazmín
Enriquez Esparza Ketzalxihuitl Niktetla'
Hernández Rubio Dana Valeria
Lee Obando Ileana Veronica

Fecha de asignación:
12/10/2023

Fecha de entrega:
15/01/2024

Fecha entregada:
15/01/2024

Índice

Probabilidad discreta. Probabilidad condicional, independencia y teorema de Bayes

1. Objetivo

El objetivo de este tutorial es ofrecer material didáctico a la comunidad estudiantil de la Facultad de Ingeniería para un mejor estudio y fortalecer la comprensión en temas de probabilidad y matemáticas. Al completar el tutorial, los participantes serán capaces de comprender y resolver problemas de probabilidad discreta, analizar situaciones de probabilidad condicional, identificar independencia de eventos y utilizar el Teorema de Bayes para realizar inferencias. Estos objetivos se lograrán a través de la interacción con un software especializado, en el cual funciona mediante la resolución de problemas prácticos y la participación en un cuestionario interactivo.

Todo ello con el fin de capacitar a los estudiantes para abordar desafíos matemáticos y situaciones del mundo real que requieran la aplicación de una metodología.

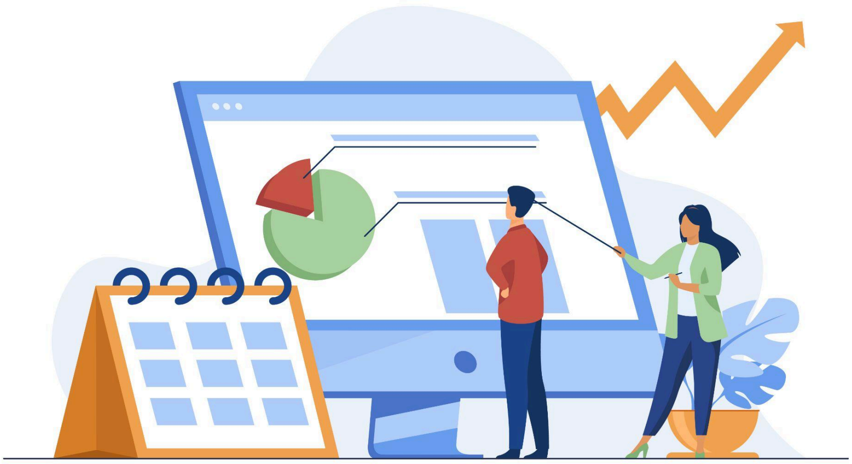
2. Introducción

A lo largo de la historia, la humanidad siempre ha debido soportar la incertidumbre acerca del clima, de su abastecimiento de alimentos y de otros aspectos de su medio ambiente, y ha tenido que esforzarse por reducir esta incertidumbre y sus efectos.

Hoy, la teoría de la probabilidad es una herramienta importante en la mayoría de las áreas de ingeniería, ciencias y administración. Muchos investigadores se dedican activamente al descubrimiento y puesta en práctica de nuevas aplicaciones de la probabilidad en campos como medicina, meteorología, fotografía desde nuevas naves espaciales, mercadotecnia, predicciones de terremotos, comportamiento humano, diseño de sistemas de computadores y derecho.

A menudo oímos y usamos expresiones tales como: “Probablemente lloverá mañana por la tarde”, “es muy probable que el avión llegue tarde”, o “hay muchas posibilidades de que pueda reunirse con nosotros para cenar esta noche ”. Cada una de estas expresiones está basada en el concepto de la probabilidad, o la verosimilitud, de la ocurrencia de algún suceso.

El concepto de probabilidad aparece ligado en sus orígenes a los juegos de azar, razón por la cual se tiene constancia del mismo desde tiempos remotos. En Probabilidad la pregunta se formula del siguiente modo: ¿qué posibilidad hay de que tenga lugar cada uno de los sucesos? La respuesta exige un tercer elemento que nos proporcione esa información: Una función de conjunto P, es decir, una función definida sobre la σ-álgebra de conjuntos de sucesos, que a cada uno de ellos le asocia un valor numérico que expresa la mayor o menor probabilidad o posibilidad o certidumbre de producirse cuando se realiza el experimento. Esta función de conjunto se conoce como medida de probabilidad o simplemente probabilidad.



3. Desarrollo

3.1 Probabilidad discreta

La probabilidad discreta se refiere a un enfoque de la teoría de la probabilidad que se utiliza cuando estamos tratando con un conjunto finito o numerable de resultados posibles en un experimento. En este contexto, cada resultado en el conjunto se asocia con una probabilidad específica, y estas probabilidades deben cumplir ciertos principios fundamentales:

- Axioma 1 (No negatividad): Para cualquier resultado individual, la probabilidad asociada denotada como P(wi) debe ser igual o mayor que cero (pi ≥ 0).
- Axioma 2 (Probabilidad total): La suma de las probabilidades de todos los resultados en el conjunto de resultados posibles debe ser igual a 1 (Σpi = 1). Esto significa que al considerar todos los resultados posibles, la probabilidad de que uno de ellos ocurra es 100%.
- Axioma 3 (Propiedad de aditividad): Si tenemos eventos mutuamente excluyentes (eventos que no pueden ocurrir simultáneamente), la probabilidad de que al menos uno de ellos ocurra es igual a la suma de las probabilidades individuales de esos eventos. En otras palabras, si A1, A2, ... son eventos disjuntos, entonces P(A1 ∪ A2 ∪ ...) = P(A1) + P(A2) + ...

Tomemos como ejemplo el lanzamiento de una moneda. En este caso, el espacio muestral discreto Ω se compone de dos resultados posibles: cara (w1) y cruz (w2). Asociamos una probabilidad a cada resultado:

P(w1) = p1: Probabilidad de obtener cara.
P(w2) = p2: Probabilidad de obtener cruz.

Si la moneda es regular y simétrica, es razonable suponer que la probabilidad de obtener cara (p1) es igual a la probabilidad de obtener cruz (p2). Por lo tanto, p1 = p2. Además, debido al Axioma 2, la suma de estas probabilidades debe ser igual a 1: p1 + p2 = 1.

Resolviendo esta ecuación, encontramos que p1 = p2 = 1/2. Esto significa que en un lanzamiento de una moneda justa y simétrica, la probabilidad de obtener cara o cruz es del 50% cada una, lo que cumple con los axiomas de la probabilidad. [14]

3.1.1 Ensayos de Bernoulli

Los ensayos repetidos e independientes se llaman de Bernoulli cuando, en cada ensayo sólo hay dos resultados posibles y sus probabilidades son las mismas en todos los ensayos. Se acostumbra denotar las dos probabilidades por p y q, y referirse al resultado con probabilidad p como “éxito”, E, y al otro como “fracaso”, F. Es evidente que p y q no deben ser negativos. [2]

3.1.2 Distribución Binomial

La distribución binomial tiene dos parámetros n y p. La fórmula binomial indica que la probabilidad para cualquier número dado de éxitos varía con dos factores: el número de ensayos n, y la probabilidad de éxito en cualquier ensayo p. Cada combinación diferente de n y p produce entonces una distribución de probabilidad binomial diferente, aún cuando se aplique la misma fórmula para derivar la distribución.

3.1.3 Fórmula de distribución Probabilística Binomial

La distribución se deriva de un procedimiento conocido como ensayo de Bernoulli.

Al llevar a cabo un experimento aleatorio, siempre estamos interesados en que suceda uno de los dos resultados, si el resultado que esperábamos efectivamente sucede, diremos que hubo ÉXITO. Si el resultado que esperábamos no sucede, entonces diremos que hubo FRACASO. Estos dos resultados, se designan en términos de probabilidad, como $p\ y$ 1 − p.

$$P\left(X = \frac{x}{n}\right) = \left(\frac{n}{x}\right)p^{x}(1\ -\ p)^{n-x}$$

donde:
n = Número de ensayos o tamaño de muestra
x = Número de éxitos
p = Probabilidad de éxito en cada ensayo
1 − p = Probabilidad de fracaso en cada ensayo
$\left(\frac{n}{x}\right)$ es el coeficiente binomial, que se calcula como $\frac{n!}{x!(n-x)!}$

3.1.4 Notación factorial

Se utiliza para representar las operaciones de multiplicación secuencial. Su desarrollo significa el producto ordenado de los números enteros positivos, desde el que indica el signo factorial, hasta llegar a 1.

n factorial n! = (n) (n-1)… (3) (2) (1)

Por definición: 0! = 1

<u>Supongamos:</u> Tres factorial 3! = (3) (2) (1) = 6. Cinco factorial 5! = (5) (4) (3) (2) (1) = 120

3.1.5 Combinación

Es un método que nos permite agrupar un conjunto de elementos en diferentes formas sin considerar el orden de colocación.

Combinación de x a n: $\left(\frac{n}{x}\right) = \frac{n!}{x!(n-x)!}$

donde:
n = Total de elementos.
x = Cantidad de elementos a combinar.

<u>Supongamos:</u> De un equipo multidisciplinario, formado por 1 economista, 1 sociólogo, 1 antropólogo. ¿Cuántos comités de dos profesionales pueden formarse?

n = 3 , x = 2

Luego la cantidad de comités a formarse, serán:

Combinación de 2 a 3

$$\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{3\times2\times1}{2\times1} = 3$$

Respuesta: Se pueden formar 3 comités, que serían:

- Primer comité : Economista, Sociólogo.
- Segundo comité : Sociólogo, Antropólogo.
- Tercer comité : Economista, Antropólogo.

3.2 Probabilidad condicional

Definición:

Cuando tenemos dos eventos, A y B, que están relacionados en un conjunto de posibles resultados, siempre y cuando la probabilidad de que ocurra el evento B no sea igual a cero, podemos calcular la probabilidad condicional de que el evento A ocurra dado que el evento B ya ha ocurrido. Esta probabilidad condicional se denota como P(A | B) y se calcula dividiendo la probabilidad de que ambos eventos A y B ocurran juntos por la probabilidad de que ocurra el evento: [13]

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

Donde:
$P(A \mid B)$ es la probabilidad condicional de A dado B.
$P(A \cap B)$ es la probabilidad de la intersección de A y B.
$P(B)$ es la probabilidad de B.

En palabras simples, la probabilidad condicional es la probabilidad de que ocurra A dado que ya sabemos que B ha ocurrido. Se utiliza para entender cómo la ocurrencia de un evento afecta la probabilidad de otro evento. Por ejemplo, $P(lluvia \mid cielo\ nublado)$ sería la probabilidad de lluvia dado que el cielo ya está nublado.

Teorema:

La probabilidad condicional del complemento de A es igual a 1 menos la probabilidad condicional de A. [13]

$$p(A'|B) = 1 - p(A|B)$$

Para una mejor comprensión de la definición de probabilidad condicional, consideremos el siguiente escenario: imaginemos que ha tenido lugar un evento A y nos preguntamos cuál es la probabilidad de que otro evento B ocurra en las mismas circunstancias. Por ejemplo, si hemos extraído un naipe rojo de una baraja estándar de 52 cartas, ¿cuál es la probabilidad de que la carta seleccionada sea el as de corazones?

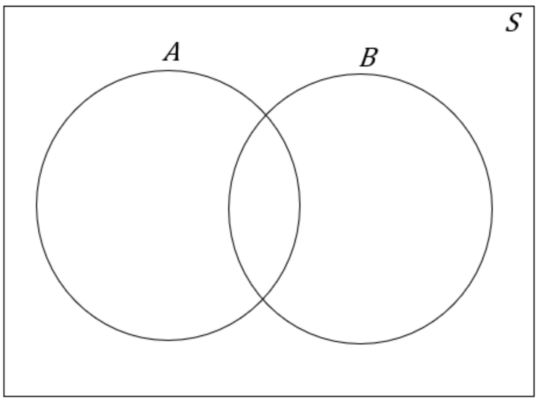
“Si afirmamos que el evento A ya ha tenido lugar, podemos considerar que A se convierte en nuestro espacio muestral, ya que sabemos que no ha ocurrido ningún elemento $x \in \bar{A}$.” [12]

En este contexto, resulta lógico evaluar la probabilidad de que el evento B ocurra también, basándonos en la proporción del tiempo en el que A y B se producen simultáneamente. De hecho, esto es a lo que se refiere la probabilidad condicional de que B ocurra dado que A ya ha ocurrido.

Un diagrama de Venn es una herramienta que se emplea para representar visualmente las relaciones entre conjuntos. En el contexto de la probabilidad condicional, se utiliza para ilustrar la intersección entre dos eventos. Para entender su utilidad, consideremos lo siguiente: tenemos dos eventos, A y B, relacionados con un experimento E, y estamos interesados en la probabilidad condicional de que el evento B ocurra dado que ya ha ocurrido el evento A, lo cual denotamos como P(B | A).

“Cuando calculamos P(B | A) estamos calculando la probabilidad de que ocurra B dentro del subconjunto A del espacio muestral original S. En contraste, cuando calculamos P(B), estamos evaluando cuán probable es que ocurra B en el contexto de todo el espacio muestral S. Al calcular P(B | A), nos enfocamos en la probabilidad de que B ocurra, sabiendo que estamos en A.” [11]

En otras palabras, el espacio muestral se ha reducido de S a A.



Por lo tanto, la probabilidad condicional se utiliza para verificar conjuntos de suposiciones o hipótesis. Además, es importante destacar que una de sus aplicaciones más significativas consiste en simplificar el cálculo de las intersecciones de eventos en ciertos experimentos.
Considerando que:

La ecuación

$$P(B \mid A) \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

implica que

$$P(B \cap A) = P(A \cap B) = P(A)\, P(B \mid A)$$

La ecuación

$$P(A \mid B) \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

implica que

$$P(A \cap B) = P(B)\, P(A \mid B)$$

3.2.1 Fórmula de probabilidad

Para el cálculo de la probabilidad es necesario dividir el número de sucesos favorables entre el número total de sucesos posibles. Esto genera una muestra y, a partir de los datos obtenidos, se puede realizar el cálculo.

$$P(A) = \frac{Número\ de\ casos\ favorables\ a\ A}{Número\ total\ de\ casos\ posibles\ en\ el\ espacio\ muestral}$$

3.2.2 Complemento

En teoría de probabilidad, el complemento de un evento A, denotado como A', A^c o $\overline{A}$, es el conjunto de todos los resultados posibles que no están en A. En otras palabras, el complemento de A consiste en todos los elementos del espacio muestral que no cumplen con la condición dada por A.

La probabilidad del complemento de un evento A se calcula como:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

donde:
$P(\overline{A})$ es la probabilidad del complemento de A.
$P(A)$ es la probabilidad del evento A.

Esta fórmula se basa en el hecho de que la probabilidad total del espacio muestral es siempre 1.

3.2.3 Probabilidad marginal

Se refiere a la probabilidad de un evento particular sin tener en cuenta el valor de otro evento. Es la probabilidad de que ocurra un evento específico sin considerar la ocurrencia o no ocurrencia de otros eventos. Osea, la probabilidad de que ocurra un subconjunto del conjunto total. Formalmente, si tenemos dos eventos A y B, la probabilidad marginal de A se denota como P(A) y se calcula como la suma de las probabilidades conjuntas de A y B, y A′ y B (el complemento de A y B):

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A' \cap B)$$

3.2.4 Intersección de eventos

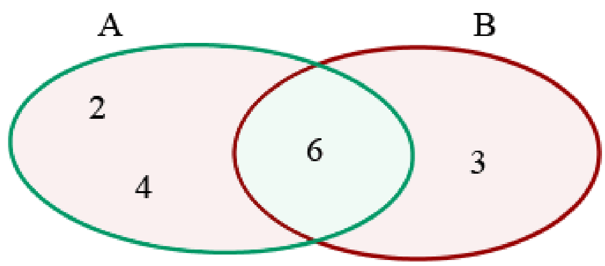
La intersección de sucesos es el suceso $A \cap B$ formado por todos los elementos que son, a la vez, de A y B. El suceso $A \cap B$ se verifica cuando ocurren simultáneamente A y B.

Sucesos independientes: Dos sucesos A y B son independientes cuando la probabilidad de que suceda B no se ve afectada porque haya sucedido, o no, A.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

<u>*Supongamos:*</u> Consideramos el experimento que consiste en lanzar un dado, si A=sacar par y B=sacar múltiplo de 3. Calcular $A \cap B$.

$A = \{2, 4, 6\}$
$B = \{3, 6\}$
$A \cap B = \{6\}$



3.3 Independencia

Definición:

Decimos que dos eventos, A y B, son independientes cuando la probabilidad de que ocurra el evento A no cambia, independientemente de si el evento B ocurre o no. En otras palabras, A y B son eventos independientes si la probabilidad condicional de que ocurra A dado que ocurrió B es igual a la probabilidad original de que ocurra A. Esto se expresa matemáticamente como:

$$p(A|B) = p(A)$$

O de manera equivalente, cuando la probabilidad de que ambos eventos A y B ocurran juntos es igual al producto de las probabilidades individuales de A y B es decir:

$$p(A\cap B) = p(A) * p(B)$$

- Independencia de más de dos sucesos:

Sean $A_1, A_2 \ldots A_n$, sucesos de cierto espacio muestral; diremos que ellos son mutuamente independientes (o simplemente, independientes) cuando para cualquier grupo de sucesos diferentes $A_i, A_j \ldots A_m$ se cumple que:

$$p(A_i, A_j \ldots A_m) = p(A_i)p(A_j) \ldots p(A_m)$$

Para que n sucesos sean independientes no es suficiente que sean independientes dos a dos, es decir, que dos cualesquiera de ellos sean independientes. [13]

En muchos problemas prácticos, nos encontramos con pruebas que son mutuamente independientes, lo que significa que el resultado de una prueba no afecta el resultado de otra. Para comprender mejor este concepto, consideremos un experimento que consiste en n pruebas independientes. “Esto se cumple si y sólo si: el espacio muestral S es el producto Cartesiano de n conjuntos S_1, S_2, ..., S_n y la probabilidad de que ocurra un evento de un solo elemento A⊂S es el producto de las probabilidades de ocurrencia de los eventos correspondientes de un solo elemento, $A_i \subset S_i$, i = 1, 2, ..., n. En otras palabras, $p(A) = p_1(A_1)p_2(A_2)...p_n(A_n)$, donde A⊂S, $A_i \subset S_i$, y A, A_i, ..., A_n son eventos de un solo elemento.” [10]

De acuerdo con lo anterior, el espacio muestral de un experimento que consiste en n pruebas independientes se compone de n factores. Por lo tanto, las probabilidades de los eventos de un solo elemento se asignan de una manera particular, lo que facilita el cálculo de diversas posibilidades. Aunque en la mayor parte de las aplicaciones no necesitamos verificar todas las condiciones, puesto que generalmente suponemos la independencia con base en lo que sabemos acerca del experimento.

Es importante destacar que si A y B son eventos independientes, se cumple la siguiente relación:

$$p(A|B) = \frac{p(A\cap B)}{p(B)} = \frac{p(A)p(B)}{p(B)} = p(A),\ supuesto\ que\ p(B)\neq 0$$

En otras palabras, cuando A y B son independientes, la probabilidad de que ocurra A no se ve afectada por la ocurrencia de B. “Saber que B ha ocurrido no modifica la probabilidad de que A ocurra. De manera equivalente, podemos afirmar que p(A|B) = p(B) si y sólo si A y B son independientes.” [10]

Comúnmente las definiciones de independencia y mutua exclusividad se confunden, en gran parte debido a que en la comunicación cotidiana, la palabra "independiente" a menudo se interpreta como que dos eventos no pueden ocurrir simultáneamente. Esto nos lleva a la conclusión de que dos eventos son mutuamente excluyentes cuando no pueden suceder al mismo tiempo, tal como se establece en la siguiente definición: "A y B son mutuamente excluyentes si y sólo si A∩B=∅" [10].

Al comparar esta definición con la de independencia, resulta evidente que son conceptos completamente diferentes.

También existe la independencia de tres eventos, la cual señala que A,B,C son independientes, si sólo si:

1. $p(A\cap B) = p(A)p(B)$
2. $p(A\cap C) = p(A)p(C)$
3. $p(B\cap C) = p(B)p(C)$
4. $p(A\cap B\cap C) = p(A)p(B)p(C)$

Para este caso en el que se presentan tres eventos, cabe la posibilidad de que las tres primeras condiciones anteriores no lleguen a implicar a la cuarta y viceversa.

¿Por qué están muy relacionadas la probabilidad condicional e independencia?

La relación entre probabilidad condicional e independencia está estrechamente relacionada a través de la definición misma de independencia. Vamos a explorar cómo estos dos conceptos se conectan.

Dos eventos, A y B, son considerados independientes si la ocurrencia (o no ocurrencia) de uno de ellos no afecta la probabilidad de que el otro ocurra. Matemáticamente, esto se expresa como:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Y a su vez, esta expresión también representa la intersección de dos eventos.

La probabilidad condicional de A dado B se define como:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Si A y B son eventos independientes, podemos usar la definición de independencia para simplificar la probabilidad conjunta:

$$P(A|B) = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)}$$

Aquí observamos que P(B) se simplifica, y queda simplemente:

$$P(A|B) = P(A)$$

Esto significa que la probabilidad condicional de A dado B es simplemente la probabilidad marginal de A, lo cual sugiere que conocer la ocurrencia de B no proporciona ninguna información adicional sobre la probabilidad de A. En otras palabras, la ocurrencia de B no afecta la probabilidad condicional de A, y viceversa.

3.4 Teorema de Bayes

Quizás el teorema más importante de la Teoría de la Probabilidad es el denominado Teorema de Bayes, ya que él constituye la base de toda una ciencia: la Inferencia Estadística.

Sea A un suceso y B_1, B_2, … B_n una serie de sucesos disyuntos tales la ocurrencia de A va necesariamente acompañada por la ocurrencia de uno de ellos.

Se conocen las probabilidades de los B_i como también las probabilidades condicionales de A dado cada uno de los B_i .Sabiendo ahora que A ocurrió, se desea calcular la probabilidad de cada B_i dada esta información. [13]

Tenemos que:

$$p(B_i|A) = \frac{p(B_i A)}{p(A)}$$

Lo que resulta en:

$$p(B_i|A) = \frac{p(A|B_i)p(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} p(A|B_j)P(B_j)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Este resultado se conoce como teorema de Bayes. También se le llama fórmula para la probabilidad de las “causas”.

Puesto que las B_i son una partición del espacio muestral, uno y sólo uno de los eventos B_i ocurre. (Esto es, uno de lo eventos B_i debe ocurrir y solamente uno). Por lo tanto, la fórmula anterior nos da la probabilidad de un B_i particular (esto es, una “causa”), dado que el evento A ha ocurrido. Para aplicar este teorema debemos conocer los valores de las $P\left(B_i\right)$.

Este teorema expone la reformulación de un conjunto de probabilidades previas (probabilidades a priori) como consecuencia de contar con información adicional acerca de los eventos del fenómeno estudiado, dando origen a nuevas probabilidades denominadas probabilidades a posteriori.

Supongamos que el Sr. K se somete a una prueba médica para determinar si tiene una enfermedad en particular. Esta prueba tiene limitaciones y no es perfecta. Antes de la prueba, tenemos ciertas creencias iniciales sobre si el Sr. K tiene la enfermedad o no. Estas creencias se expresan como probabilidades a priori, es decir, la probabilidad inicial de que el Sr. K tenga la enfermedad (P(B1)) y la probabilidad inicial de que no la tenga (P(B2)).

Luego, el Sr. K se somete a la prueba, y el resultado de la prueba es positivo (A = la prueba es positiva). Queremos calcular la probabilidad de que realmente tenga la enfermedad, dada esta nueva evidencia, es decir, P(B1|A).

El Teorema de Bayes nos permite hacerlo. Para calcular P(B1|A), utilizamos la siguiente fórmula:

$$P(B1|A) = \frac{P(A|B1)P(B1)}{P(A|B1)P(B1)+P(A|B2)P(B2)}$$

P(A|B1): Probabilidad de que la prueba sea positiva si el Sr. K tiene la enfermedad.
P(B1): Probabilidad a priori de que el Sr. K tenga la enfermedad.
P(A|B2): Probabilidad de que la prueba sea positiva si el Sr. K no tiene la enfermedad.
P(B2): Probabilidad a priori de que el Sr. K no tenga la enfermedad.

El resultado P(B1|A) nos da la probabilidad de que el Sr. K realmente tenga la enfermedad, dado que la prueba fue positiva. Esto nos permite ajustar nuestras creencias iniciales en función de la nueva evidencia.

De esta forma el teorema de Bayes establece cómo calcular la probabilidad de un evento, dada la probabilidad condicional de ese evento en relación con otros eventos. El teorema se utiliza para invertir el orden de causa y efecto al calcular la probabilidad de un evento dado su efecto observado. [14]

4. Ejemplos

En esta sección, presentaremos ejemplos explicativos de cada uno de los siguientes temas:

- 2 ejemplos de Probabilidad discreta.
- 2 ejemplos de Probabilidad condicional.
- 3 ejemplos de Independencia.
- 3 ejemplos de Teorema de Bayes.

4.1 Probabilidad discreta

4.1.1 Ejemplo 1

El 65 % de los hogares de una zona urbana hay alguien en casa en una noche terminada. Un investigador que está haciendo una encuesta por teléfono selecciona al azar 15 hogares. Hallar las probabilidades siguientes:

a) Exactamente 8 hogares hay alguien en casa.
b) En ningún hogar hay alguien en casa.
c) En todos los hogares hay alguien en casa.

Solución

Paso 1. **Recordemos que la fórmula de distribución binomial para este problema es:**

$$P\left(X = \frac{x}{n}\right) = \binom{n}{x} p^{x} (1 - p)^{n-x}$$

donde:
n = Número de ensayos o tamaño de muestra
x = Número de éxitos
p = Probabilidad de éxito en cada ensayo
1 − p = Probabilidad de fracaso en cada ensayo
$\binom{n}{x}$ es el coeficiente binomial, que se calcula como $\frac{n!}{x!(n-x)!}$

Paso 2. Ahora vamos a identificar los datos de acuerdo a las especificaciones del problema.

a) Exactamente 8 hogares hay alguien en casa.

n = 15 total de experimentos.
x = 8 total de éxitos.
p = 65% = 0.65
$1 - p$ = 1 - 0.65 = 0.35

b) En ningún hogar hay alguien en casa.

n = 15 total de experimentos.
x = 0 total de éxitos.
p = 65% = 0.65
$1 - p$ = 1 - 0.65 = 0.35

c) En todos los hogares hay alguien en casa.

n = 15 total de experimentos.
x = 15 total de éxitos.
p = 65% = 0.65
$1 - p$ = 1 - 0.65 = 0.35

Paso 3. Sustituyendo los valores en la fórmula y resolviendo:

a) Exactamente 8 hogares hay alguien en casa.

$$P\left(X = \frac{8}{15}\right) = \left(\frac{15}{8}\right)(0.65)^{8}(0.35)^{15-8}$$

$$\rightarrow P\left(X = \frac{8}{15}\right) = (0.65)^{8}(0.35)^{7} = (0.03186)(0.0006433) = 0.00002049$$

Desarrollando el coeficiente binomial (sacando el factorial):

$$\rightarrow \left(\frac{15}{8}\right) = \frac{15!}{8!(15-8)!}$$

$$\rightarrow \frac{(15\times14\times13\times12\times11\times10\times9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1)}{(8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1)(7\times6\times5\times4\times3\times2\times1)}$$; Factorizando: $8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1$

$$\rightarrow \left(\frac{15}{8}\right) = \frac{(15\times14\times13\times12\times11\times10\times9)}{(7\times6\times5\times4\times3\times2\times1)} = 6435$$

Multiplicado:

$$\rightarrow P\left(X = \frac{8}{15}\right) = (6435)(0.00002049) = 0.13185$$

Sacando el porcentaje:

$$0.13185 \times 100\% = 13.185\%$$

Resultado. La probabilidad de que exactamente 8 de los 15 hogares seleccionados al azar tengan a alguien en casa en una noche determinada es aproximadamente 0.1319, o alrededor del 13.19%.

b) En ningún hogar hay alguien en casa.

$$P\left(X = \frac{0}{15}\right) = \left(\frac{15}{0}\right)(0.65)^{0}(0.35)^{15-0}$$

***Nota: No podemos dividir un número entre cero, por lo tanto el coeficiente binomial no se puede calcular. Cualquier número elevado a la 0, es 1.**

$$\rightarrow P\left(X = \frac{0}{15}\right) = (1)(0.35)^{15} = 0.00000014488$$

Sacando el porcentaje:

$$0.00000014488 \times 100\% = 0.000014488\%$$

Resultado. La probabilidad de que ningún hogar de los 15 seleccionados tenga a alguien en casa en una noche determinada es aproximadamente 0.00000014488, o alrededor de 0.000014488% Esto indica que es extremadamente poco probable que ningún hogar tenga a alguien presente.

c) En todos los hogares hay alguien en casa.

$$P\left(X = \frac{15}{15}\right) = \left(\frac{15}{15}\right)(0.65)^{15}(0.35)^{15-15}$$

Desarrollando el coeficiente binomial (sacando el factorial):

$$\rightarrow \left(\frac{15}{15}\right) = 1$$

***Nota: Cualquier número elevado a la 0, es 1.**

$$\rightarrow P\left(X = \frac{15}{15}\right) = (1)(0.65)^{15}(1) = 0.0015620$$

Sacando el porcentaje:

$$0.0015620 \times 100\% = 0.1562\%$$

Resultado. La probabilidad de que todos los 15 hogares seleccionados tengan a alguien en casa en una noche determinada es aproximadamente 0.0015620, o alrededor de 0.1562%. Esto sugiere que hay una posibilidad limitada de que todos los hogares tengan a alguien presente.

4.1.2 Ejemplo 2

Un comerciante de verduras tiene conocimiento de que el 10 % de las cajas están descompuestas, si un comprador elige 4 verduras al azar, encuentre la probabilidad de que:

a) Todas están descompuestas.
b) De 1 a 3 estén descompuestas.

Solución

a) Todas están descompuestas.

Paso 1. **Recordemos que la fórmula de distribución binomial para este problema es:**

$$P\left(X = \frac{x}{n}\right) = \left(\frac{n}{x}\right)p^{x}(1 - p)^{n-x}$$

donde:
n = Número de ensayos o tamaño de muestra
x = Número de éxitos
p = Probabilidad de éxito en cada ensayo
$1 - p$ = Probabilidad de fracaso en cada ensayo
$\left(\frac{n}{x}\right)$ es el coeficiente binomial, que se calcula como $\frac{n!}{x!(n-x)!}$

Paso 2. **Ahora vamos a poner los datos de acuerdo a las especificaciones del problema.**

n = 4 total de experimentos.
x = 4 total de éxitos.
p = 10% = 0.10
$1 - p$ = 1 - 0.10 = 0.9

Paso 3. **Sustituyendo los valores en la fórmula y resolviendo:**

$$P\left(X = \frac{4}{4}\right) = \left(\frac{4}{4}\right)(0.10)^{4}(0.9)^{4-4}$$

Desarrollando el coeficiente binomial (sacando el factorial):

$$\rightarrow \left(\frac{4}{4}\right) = 1$$

***Nota: Cualquier número elevado a la 0, es 1.**

$$\rightarrow P\left(X = \frac{4}{4}\right) = (1)(0.10)^4(1) = 0.0001$$

Sacando el porcentaje:

$$0.0001 \times 100\% = 0.01\%$$

Resultado. La probabilidad de que las cuatro cajas elegidas al azar estén todas descompuestas es de 0.0001, o 0.01%. Esto sugiere que es una ocurrencia extremadamente rara, dada la probabilidad relativamente baja de que una caja esté descompuesta.

---

b) De 1 a 3 estén descompuestas.

Paso 1. **Si analizamos bien el problema, estamos hablando de una acumulación de probabilidades, esto se puede expresar de la siguiente manera:**

$$P(1 \leq X \leq 3) = P\left(X = \frac{1}{4}\right) + P\left(X = \frac{2}{4}\right) + P\left(X = \frac{3}{4}\right)$$

*Se refiere a la suma de las probabilidades. Esto implica que estás sumando las probabilidades de tres eventos específicos para obtener la probabilidad acumulada entre 1 y 3 cajas.

Paso 2. **Ahora vamos a poner los datos de acuerdo a las especificaciones del problema. En este caso calcularemos 3 probabilidades de cajas.**

Caja 1

n = 4 total de experimentos.
x = 1 total de éxitos.
p = 10% = 0.10
$1 - p$ = 1 - 0.10 = 0.9

Caja 2

n = 4 total de experimentos.
x = 2 total de éxitos.
p = 10% = 0.10
$1 - p$ = 1 - 0.10 = 0.9

Caja 3

n = 4 total de experimentos.
x = 3 total de éxitos.
p = 10% = 0.10
1 − p = 1 - 0.10 = 0.9

Paso 3. **Sustituyendo los valores en la fórmula y resolviendo para cada probabilidad:**

Caja 1:

$$P\left(X = \frac{1}{4}\right) = \left(\frac{4}{1}\right)(0.10)^{1}(0.9)^{4-1}$$

Desarrollando el coeficiente binomial (sacando el factorial):

$$\rightarrow \left(\frac{4}{1}\right) = \frac{4!}{1!(4-1)!} \rightarrow \frac{4\times3\times2\times1}{(1)(3\times2\times1)}; \text{ Factorizando: } 3\times2\times1$$

$$\rightarrow \left(\frac{4}{1}\right) = \frac{4}{1} = 4$$

Multiplicado:

$$\rightarrow P\left(X = \frac{1}{4}\right) = (4)(0.10)(0.9)^{3} = 0.2916$$

Sacando el porcentaje:

$$0.2916 \times 100\% = 29.16\%$$

Caja 2:

$$P\left(X = \frac{2}{4}\right) = \left(\frac{4}{2}\right)(0.10)^{2}(0.9)^{4-2}$$

Desarrollando el coeficiente binomial (sacando el factorial):

$$\rightarrow \left(\frac{4}{2}\right) = \frac{4!}{2!(4-2)!} \rightarrow \frac{4\times3\times2\times1}{(2\times1)(2\times1)}; \text{ Factorizando: } 2\times1$$

$$\rightarrow \left(\frac{4}{2}\right) = \frac{4\times3}{2\times1} = \frac{12}{2} = 6$$

Multiplicado:

$$\rightarrow P\left(X = \frac{2}{4}\right) = (6)(0.01)(0.9)^2 = (6)(0.01)(0.81) = 0.0486$$

Sacando el porcentaje:

$$0.0486 \times 100\% = 4.86\%$$

Caja 3:

$$P\left(X = \frac{3}{4}\right) = \left(\frac{4}{3}\right)(0.10)^3(0.9)^{4-3}$$

Desarrollando el coeficiente binomial (sacando el factorial):

$$\rightarrow (\frac{4}{3}) = \frac{4!}{3!(4-3)!} \rightarrow \frac{4\times3\times2\times1}{(3\times2\times1)(1)};$$ Factorizando: $3\times2\times1$

$$\rightarrow (\frac{4}{3}) = \frac{4}{1} = 4$$

Multiplicado:

$$\rightarrow P\left(X = \frac{3}{4}\right) = (4)(0.001)(0.9) = 0.0036$$

Sacando el porcentaje:

$$0.0036 \times 100\% = 0.36\%$$

Paso 4. Sumando todas las probabilidades de las 3 cajas.

$$P(1 \leq X \leq 3) = P_1(0.2916) + P_2(0.0486) + P_3(0.0036)$$
$$P(1 \leq X \leq 3) = 0.3438$$

Sacando el porcentaje:

$$0.3438 \times 100\% = 34.38\%$$

Resultado. La probabilidad de que entre 1 y 3 cajas estén descompuestas es 0.3438, o 34.38%. Esto indica que hay una probabilidad significativamente alta de que al menos una de las cajas esté descompuesta, lo que sugiere una posibilidad considerable de que haya productos en mal estado entre las cajas seleccionadas.

4.2 Probabilidad condicional

4.2.1 Ejemplo 3

Se lanza un par de dados no cargados una vez, y queremos calcular la probabilidad de que la suma de los números en ambos dados sea 7 o que la suma sea 4 o que la suma sea 12. con la condición de que los dos números que aparecen deben ser diferentes.

Solución

Paso 1. **Definimos los siguientes eventos con los datos especificados en el problema:**

$$A\text{: } Los\ dos\ números\ que\ ocurren\ son\ diferentes$$

Entonces se dice que ocurrió A.

También se definen los eventos:

$$B\text{: } La\ suma\ es\ 4$$
$$C\text{: } La\ suma\ es\ 7$$
$$D\text{: } La\ suma\ es\ 12$$

Paso 2. **Se enumeran todas las posibles combinaciones de lanzamientos de dados.**

Cada dado tiene 6 caras y si estamos lanzando dos dados, hay un total de 6x6=36 posibles resultados. Representado en una tabla:

Combinaciones	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Paso 3. **De acuerdo con el evento A, que es "los dos números que ocurren son diferentes". Calculamos el número de resultados que cumplen con el evento A.**

En este caso, hay 6×5=30 combinaciones diferentes que cumplen con el evento A.

Si nos fijamos en la tabla de combinaciones, las que no cumplen son: **(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6).** Formando una diagonal en estas combinaciones.

Paso 4. **Buscamos combinaciones que cumplan las condiciones de acuerdo a la suma de cada evento:**

EVENTOS	COMBINACIONES DISPONIBLES
$B: La\ suma\ es\ 4.$	**(1,3), (2,2), (3,1)**
$C: La\ suma\ es\ 7.$	**(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1).**
$D: La\ suma\ es\ 12.$	**(6,6)**

Paso 5. **Usaremos la fórmula de probabilidad.**

Calculando para cada evento y factorizando:

$$P(A) = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$$

$$P(B) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

$$P(C) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P(D) = \frac{1}{36}$$

Paso 6. **Calculando la intersección de cada evento independiente.**

Evento B

Los pares posibles para B que cumplen con A son **(1,3)** y **(3,1)**, hay dos de ellos (puesto que los pares deben de ser diferentes por el evento A).

$$P(A \cap B) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

Evento C

Los pares posibles para C que cumplen con A son **(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1).** y hay seis de ellos (puesto que los pares deben de ser diferentes por el evento A).

$$P(A \cap C) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Evento D

No hay pares que cumplan con ambos A y D, ya que la suma 12 implica tener dos dados iguales, y A requiere que sean diferentes. Por lo tanto:

$$P(A \cap D) = 0$$

Paso 7. **Calculando la intersección de cada evento independiente con la fórmula de probabilidad condicional.**

Evento B

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{18}}{\frac{5}{6}} = \frac{1}{15} = 0.0666 \times 100 = 6.66\%$$

Resultado. La probabilidad de que la suma sea 4 dado que los dos números son diferentes es de 1/15, lo que implica que hay una probabilidad del 6.66% de obtener una suma de 4 en los dados bajo esta condición.

Evento C

$$P(C|A) = \frac{P(C \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{5}{6}} = \frac{1}{5} = 0.2 \times 100 = 20\%$$

Resultado. La probabilidad de que la suma sea 7 dado que los dos números son diferentes es de 1/5, lo que significa que hay una probabilidad del 20% de obtener una suma de 7 en los dados bajo esta condición.

Evento D

$$P(D|A) = \frac{P(D \cap A)}{P(A)} = \frac{0}{\frac{5}{6}} = 0$$

Resultado. **Dado que los dos números son diferentes, la probabilidad de obtener una suma de 12 en los dados es 0, lo que indica que es imposible obtener una suma de 12 en los dados bajo esta condición.**

4.2.2 Ejemplo 4

Con base en su experiencia un médico ha recabado la siguiente información, relativa a las enfermedades de sus pacientes: 5% creen tener cáncer y lo tienen, 45% creen tener cáncer y no lo tienen, 10% no creen tener cáncer pero si lo tienen; y finalmente 40% creen no tenerlo, lo cual es cierto. De entre los pacientes del doctor estas cifras de porcentaje implican las siguientes probabilidades para un paciente seleccionado al azar. Calcula:

a) Tenga cáncer si no cree tenerlo.
b) Cree tener cáncer cuando no lo tiene.
c) Crea tener cáncer cuando sí lo tiene.

Solución

Paso 1. **Definimos los siguientes eventos con los datos especificados en el problema:**

$$A: El\ paciente\ cree\ tener\ cáncer$$
$$B: El\ paciente\ tiene\ cáncer$$

Paso 2. **Vamos a definir el complemento para cada situación del paciente.**

$$A: El\ paciente\ cree\ tener\ cáncer$$
$$\overline{A}: El\ paciente\ no\ cree\ tener\ cáncer$$
$$B: El\ paciente\ tiene\ cáncer$$
$$\overline{B}: El\ paciente\ no\ tiene\ cáncer$$

***Nota:**

Recordemos que, en el contexto de teoría de conjuntos y probabilidad, el complemento de un evento se refiere a todos los resultados posibles que no están en ese evento. Podemos interpretarlo como "lo contrario" del evento original. Si A es un evento, entonces A′ representa el conjunto de resultados que no están en A. Por lo tanto, podemos decir que el complemento de A es "lo contrario" de A en el sentido de que incluye todos los resultados que no cumplen con la condición especificada por A.

Paso 3. **Haciendo la intersección de cada evento.**

$P(A \cap B) = 0.05$

**Esto indica que la probabilidad de que un paciente crea tener cáncer y realmente lo tenga es del 5%.*

$P(A \cap \overline{B}) = 0.45$

**Esto significa que la probabilidad de que un paciente crea tener cáncer pero no lo tenga es del 45%.*

$P(\overline{A} \cap B) = 0.10$

**Indica que la probabilidad de que un paciente no crea tener cáncer pero en realidad sí lo tenga es del 10%.*

$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0.40$

**Esto indica que la probabilidad de que un paciente no crea tener cáncer y tampoco lo tenga es del 40%.*

Observaciones:
Estos cálculos permiten entender las relaciones entre la creencia del paciente y la presencia o ausencia real de cáncer. Luego, al calcular las probabilidades condicionales, se profundiza en cómo la ocurrencia o no ocurrencia de un evento afecta la probabilidad del otro.En resumen, se calcula la intersección de eventos primero para analizar la relación conjunta de los eventos, y luego se aplican las fórmulas de probabilidad condicional para obtener una comprensión más detallada de estas relaciones.

Paso 4. **Calcularemos las probabilidades marginales, en este caso será:**

$P(\overline{A})$ - Probabilidad de que un paciente no crea tener cáncer.
$P(B)$ - Probabilidad de que un paciente tenga cáncer.
$P(\overline{B})$ - Probabilidad de que un paciente no tenga cáncer.

Caso $P(\overline{A})$

$$P(\overline{A}) = P(\overline{A} \cap B) + P(\overline{A} \cap \overline{B})$$
$$P(\overline{A}) = 0.1 + 0.4$$
$$P(\overline{A}) = 0.5$$

Caso $P(B)$

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$$
$$P(B) = 0.05 + 0.10$$
$$P(B) = 0.15$$

Caso $P(\overline{B})$

$$P(\overline{B}) = P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap \overline{B})$$
$$P(\overline{B}) = 0.45 + 0.40$$
$$P(\overline{B}) = 0.85$$

Paso 5. **Usaremos la fórmula de probabilidad condicional.**

a) Tenga cáncer si no cree tenerlo.

$$P(B|\overline{A}) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(\overline{A})} = \frac{0.10}{0.5} = 0.2 \times 100\% = 20\%$$

Resultado. La probabilidad de que un paciente tenga cáncer dado que no cree tenerlo es de 0.2 o 20%. Esto sugiere que incluso si un paciente no cree tener cáncer, todavía hay una probabilidad no despreciable de tener la enfermedad.

b) Cree tener cáncer cuando no lo tiene.

$$P(A|\overline{B}) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{0.45}{0.85} = 0.5294 \times 100\% = 52.94\%$$

Resultado. La probabilidad de que un paciente crea tener cáncer cuando en realidad no lo tiene es aproximadamente de 0.5294 o del 52.94%. Esto sugiere que la creencia de tener cáncer podría no ser muy indicativa de la presencia real de la enfermedad.

c) Crea tener cáncer cuando sí lo tiene.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.05}{0.15} = 0.3333 \times 100\% = 33.33\%$$

Resultado. La probabilidad de que un paciente crea tener cáncer cuando realmente lo tiene es de 0.3333, aproximadamente 33%. Esto indica que la creencia de tener cáncer no siempre coincide con la presencia real de la enfermedad.

4.3 Independencia

4.3.1 Ejemplo 5

Consideremos un lote grande de artículos, digamos 10000. Supongamos que el 10% de estos artículos es defectuoso y el 90% no. Se escogen dos artículos. ¿Cuál es la probabilidad de que ambos no sean defectuosos?

Solución

Paso 1. **Primero definimos los eventos.**

$$A\text{: } El\ primer\ artículo\ no\ es\ defectuoso.$$
$$B\text{: } El\ segundo\ artículo\ no\ es\ defectuoso.$$

Paso 2. **Usando la fórmula de intersección de dos eventos independientes.**

Si suponemos que el primer artículo se sustituye antes de elegir el segundo, entonces se puede suponer que los eventos A y B son independientes y, por lo tanto tenemos la probabilidad de seleccionar dos artículos no defectuosos:

$$P(A \cap B) = (0.9)(0.9) = 0.81 \times 100 = 81\%$$

Resultado. Podemos concluir que la probabilidad de seleccionar dos artículos no defectuosos de un lote grande, donde el 10% de los artículos son defectuosos y el 90% son no defectuosos, es del 81%. Esto significa que hay una alta probabilidad de que ambos artículos seleccionados al azar no sean defectuosos.

La independencia de los eventos es crucial en este caso. Dado que se asume que los eventos (la no defectuosidad de los artículos) son independientes, la probabilidad conjunta de que ambos eventos ocurran es simplemente el producto de las probabilidades individuales. Este resultado refleja la intuición de que si la selección de un artículo no afecta la selección del siguiente, entonces la probabilidad de ambas ocurrencias es simplemente el producto de las probabilidades individuales.

4.3.2 Ejemplo 6

Supongamos que un dado normal se lanza dos veces. Calcula para:

a) El primer dado muestra un número par.
b) El segundo dado muestra un 5 o un 6.

Solución

Paso 1. **Vamos a definir los siguientes eventos:**

$$A:\ El\, primer\, dado\, muestra\, un\, número\, par$$
$$B:\ El\, segundo\, dado\, muestra\, un\, 5\, o\, un\, 6$$

***Nota:**
Por intuición sabemos que los eventos A y B no están relacionados. Saber que B ocurre no proporciona información acerca de la ocurrencia de A. De hecho el siguiente cálculo lo pone de manifiesto.

Paso 2. **Analizando el problema...**

Hay un total de 36 resultados posibles al lanzar dos dados, ya que hay 6 posibilidades para el primer dado y 6 posibilidades para el segundo dado, lo que resulta en 6×6=36 resultados posibles en total.

***Para el evento A*:** "el primer dado muestra un número par", hay 18 resultados favorables, ya que hay 3 números pares (2, 4 y 6) en un dado de 6 caras, y 3 posibilidades para el segundo dado.

Para el evento B: "el segundo dado muestra un 5 o un 6", hay 12 resultados favorables, ya que hay 2 posibilidades (5 y 6) en un dado de 6 caras, y 6 posibilidades para el primer dado.

La siguiente tabla muestra las combinaciones posibles:

Combinaciones	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Paso 3. **Usando la fórmula de probabilidad.**

$$P(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2} = 0.5 \times 100 = 50\%$$

$$P(B) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3} = 0.3333 \times 100 = 33.33\%$$

Paso 4. **Usaremos la fórmula de intersección de dos eventos.**

$$P(A \cap B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Paso 5. **Usaremos la fórmula de probabilidad condicional.**

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

Así encontramos, como era de suponer, que la probabilidad no condicional es igual a la probabilidad condicional P(A/B). De modo semejante:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

Por lo tanto, podríamos inclinarnos a decir que A y B son independientes si y sólo si $P(B|A) = P(A)$ y $P(A|B) = P(B)$. Aunque esto sería esencialmente apropiado, hay otro método que evita la dificultad encontrada aquí, a saber, que ambos P(A) y P(B), deben ser diferentes de cero antes de que las igualdades anteriores sean significativas.

Paso 6. **Aplicando la fórmula de independencia de dos eventos.**

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$P(B \cap A) = P(B) \cdot P(A)$$

Sustituyendo valores en esta fórmula:

$$\frac{1}{6} = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6}$$

$$\frac{1}{6} = \frac{6}{36}$$

Simplificando:

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

Así encontramos que, como ni P(A) ni P(B) son iguales a cero, las probabilidades no condicionales son iguales a las probabilidades condicionales si y sólo si $P(A \cap B)=P(A)P(B)$.

Resultado. En estos eventos A y B definidos como "el primer dado muestra un número par" y "el segundo dado muestra un 5 o un 6" respectivamente, hemos demostrado que estos eventos son independientes. Esto se evidencia en los cálculos de las probabilidades condicionales y no condicionales, así como en la verificación de la igualdad de independencia. Además, hemos establecido que la independencia de dos eventos implica que la probabilidad de la intersección de ambos eventos es igual al producto de sus probabilidades individuales, siempre y cuando ambas probabilidades no sean cero.

4.3.3 Ejemplo 7

La probabilidad de Carlos de aprobar en la materia de Estructuras Discretas es del 40%, y la probabilidad de Ana de aprobar el mismo curso es de 70%. Si los eventos son independientes, encuentra las siguientes probabilidades:

a) La probabilidad de que ambos aprueben el curso.
b) La probabilidad de que ninguno apruebe el curso.
c) La probabilidad de que al menos uno apruebe el curso.

Solución

Paso 1. **Primero definimos los eventos.**

$$A:\ Carlos\ aprueba$$
$$B:\ Ana\ aprueba$$

Paso 2. **Vamos a definir el complemento para cada situación.**

$$A:\ Carlos\ aprueba$$
$$\overline{A}:Carlos\ no\ aprueba$$
$$B:\ Ana\ aprueba$$
$$\overline{B}:Ana\ no\ aprueba$$

Paso 3. **Haciendo la intersección de cada evento y aplicando la fórmula de independencia. Resolvemos para cada inciso:**

a) Ambos aprueben.

$$P(A\ \cap\ B)\ =\ P(A)\ \cdot\ P(B)$$
$$\rightarrow =\ (0.40)\ \times\ (0.70)\ =\ 0.28\ \times\ 100\%\ \ =\ 28\%$$
$$P(Carlos\ y\ Ana\ aprueben)\ =\ 28\%$$

Resultado. La probabilidad de que ambos aprueben el curso es del 28%. Esta es la multiplicación de las probabilidades individuales de que Carlos y Ana aprueben.

b) Ninguno apruebe.

Usaremos la propiedad del complemento:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$
$$P(\overline{B}) = 1 - P(B)$$

Ahora aplicaremos fórmula de independencia:

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = (1 - P(A)) \cdot (1 - P(B))$$
$$\rightarrow = (1 - P(0.40)) \cdot (1 - P(0.70)) = (0.60) \cdot (0.30) = 0.18 \times 100 = 18\%$$
$$P(Carlos\ y\ Ana\ no\ aprueban) = 18\%$$

Resultado. La probabilidad de que ninguno de ellos apruebe el curso es del 18%. Esto se obtiene utilizando la independencia de los eventos.

c) Al menos uno apruebe.

Con los cálculos del inciso anterior:

$$P(Al\ Menos\ uno\ aprueba) = 1 - P(Ninguno\ aprueba)$$
$$P(Al\ Menos\ uno\ aprueba) = 1 - 0.18 = 0.82 \times 100$$
$$P(Al\ Menos\ uno\ aprueba) = 82\%$$

Resultado. La probabilidad de que al menos uno de ellos apruebe el curso es del 82%. Esto se obtiene utilizando la propiedad complementaria de la probabilidad.

4.4 Teorema de Bayes

4.4.1 Ejemplo 8

Una planta productora de gelatinas cuenta con tres máquinas empacadoras. Así, la distribución del volumen de empaque se realiza de la siguiente manera:

- Máquina 1: 38%
- Máquina 2: 32%
- Máquina 3: 30%

De esta manera, la probabilidad de que el empaque salga defectuoso es de 11%, 15% y 14%, respectivamente por cada máquina.

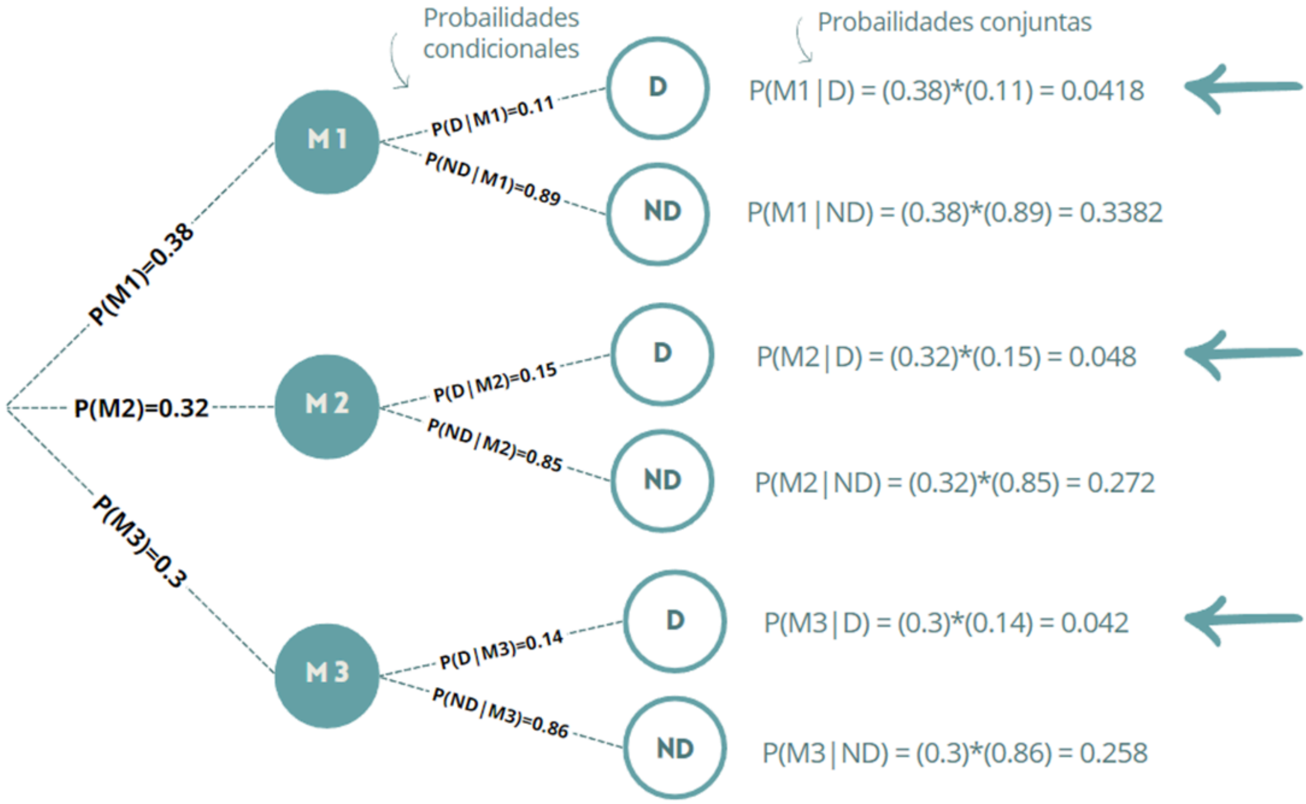
La gerencia de producción de la planta está interesada en conocer cuál es la probabilidad de que, si se selecciona una unidad al azar y es defectuosa, esta se haya empacado en la máquina 2.

Solución

Paso 1. **Primero se precisa definir los eventos.**

$$M1:\ Unidad\ de\ máquina\ 1:\ P(M1) = 38\%$$
$$M2:\ Unidad\ de\ máquina\ 2:\ P(M2) = 32\%$$
$$M3:\ Unidad\ de\ máquina\ 3:\ P(M3) = 30\%$$

Paso 2. **Para ejemplificar de manera gráfica lo anterior, se sugiere desarrollar el diagrama de árbol correspondiente.**



Paso 3. **Luego, debe considerarse que las unidades defectuosas pueden provenir de M1, M2 o M3, por lo que a estas se les considera eventos mutuamente exclusivos; esto es que el que una unidad haya sido producida en una máquina en específico no afecta el hecho de que provenga de otras máquinas. Entonces:**

$D\text{: } Unidad\ defectuosa$

$$\begin{aligned} P(D) &= P(PM1) * P(D \mid M1) + P(PM2) * P(D \mid M2) + P(PM3) * P(D \mid M3) \\ &= \quad 0.0418 \quad + \quad 0.048 \quad + \quad 0.042 \\ &= \quad 0.1318 \end{aligned}$$

Paso 4. **Aplicando el teorema de Bayes:**

$$P(M2 \mid D) = \frac{P(PM2)*P(D \mid M2)}{P(D)} = \frac{(0.32)(0.15)}{0.1318} = 0.3642 \times 100$$

$$P(M2 \mid D) = 36.42\%$$

Resultado. Por lo tanto, la probabilidad de que si se selecciona una unidad al azar y es defectuosa, esta se haya empacado en la máquina 2 es de 36.42%.

4.4.2 Ejemplo 9

Se tiene tres urnas con el siguiente contenido: la primera contiene 3 bolas blancas y 1 negra, la segunda 2 blancas y 2 negras y la tercera 3 blancas. Se escoge una de las tres urnas al azar y se extrae de ella, también al azar, una bola que resulta ser blanca. Dada esta información ¿cuál es la probabilidad de que la urna escogida haya sido la primera? ¿La tercera?

Solución

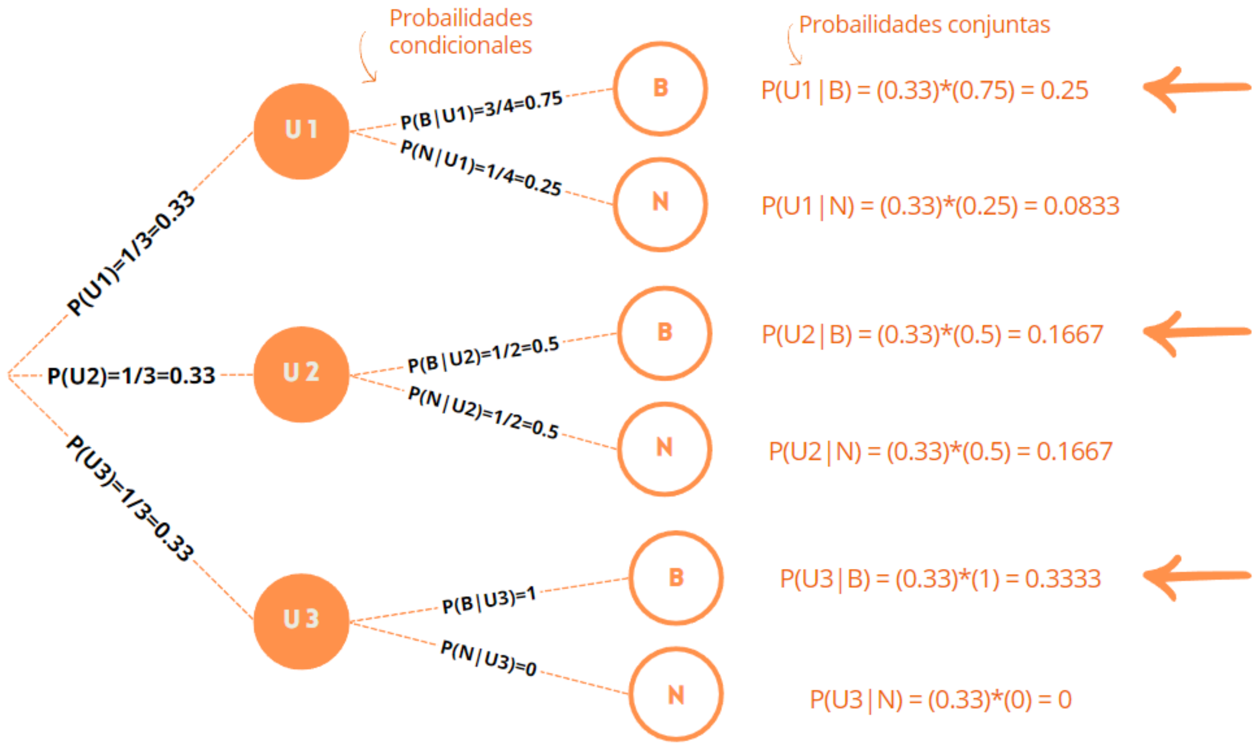
Paso 1. **Primero se precisa definir los eventos.**

$$U1: \ Urna\ 1: \ P(U1) = \frac{1}{3}$$

$$U2: \ Urna\ 2: \ P(U2) = \frac{1}{3}$$

$$U3: \ Urna\ 3: \ P(U3) = \frac{1}{3}$$

Paso 2. **Para ejemplificar de manera gráfica lo anterior, se sugiere desarrollar el diagrama de árbol correspondiente.**



Paso 3. **Luego, debe considerarse que las bolas blancas pueden provenir de U1, U2 o U3, por lo que a estas se les considera eventos mutuamente exclusivos. Entonces:**

$B\text{: } Bola\ Blanca$

$$
\begin{aligned}
P(B) &= P(PU1) * P(B \mid U1) + P(PU2) * P(B \mid U2) + P(PU3) * P(B \mid U3) \\
&= 0.25 + 0.1667 + 0.3333 \\
&= 0.75
\end{aligned}
$$

Paso 4. **Aplicando el teorema de Bayes:**

Para la probabilidad de que se haya escogido de la urna 1.

$$P(U1 \mid B) = \frac{P(PU1)*P(B \mid U1)}{P(B)} = \frac{(0.33)(0.75)}{0.75} = 0.3333 \times 100$$
$$P(U1 \mid B) = 33.33\%$$

Por último, la probabilidad de que se haya escogido de la urna 3.

$$P(U3 \mid B) = \frac{P(PU3)*P(B \mid U3)}{P(B)} = \frac{(0.33)(1)}{0.75} = 0.4444 \times 100$$
$$P(U3 \mid B) = 44.44\%$$

Resultado. Por lo tanto, la probabilidad de que la bola blanca se haya elegido de la urna 1 es de 33.33%. Y, de que se haya elegido de la urna 3 es de 44.44%.

4.4.3 Ejemplo 10

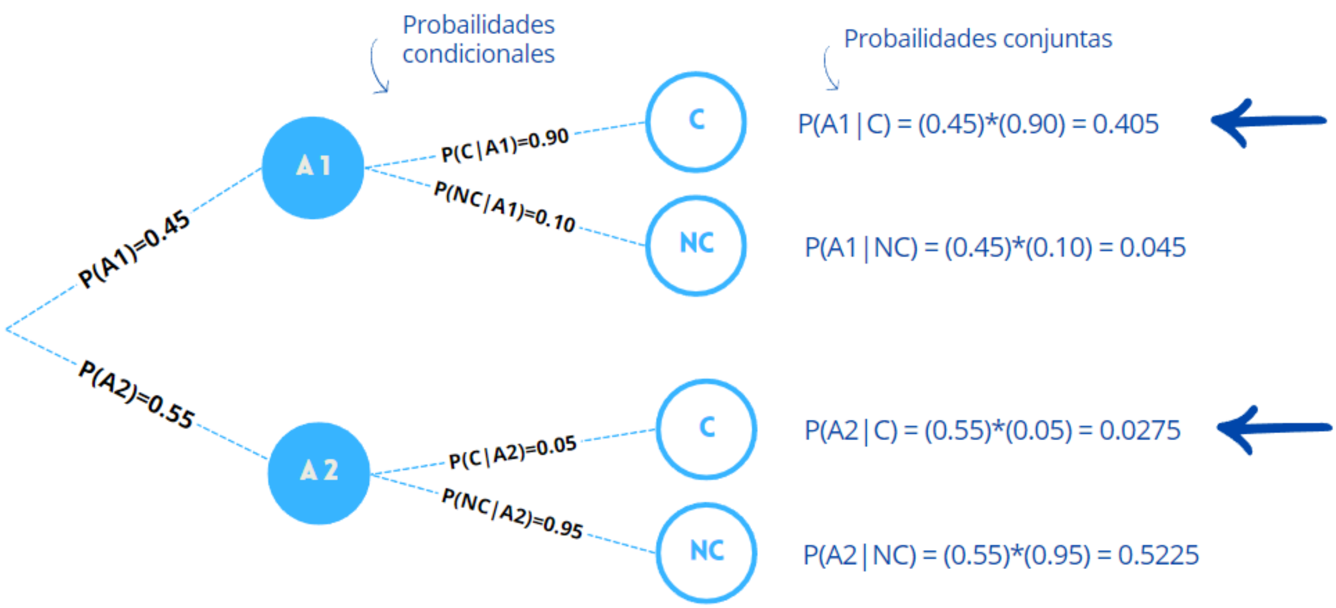
Durante los últimos años se ha escrito mucho sobre la posible relación entre el fumar y el cáncer pulmonar. Supóngase que en un centro médico, de todos los fumadores de quienes se sospecha que tenían cáncer pulmonar, el 90% lo tenía mientras que únicamente el 5% de los no fumadores lo padecía. Si la proporción de fumadores es de 0.45, ¿cuál es la probabilidad de que un paciente con cáncer pulmonar, seleccionado al azar, sea fumador?

Solución

Paso 1. **Primero se precisa definir los eventos.**

$$A1: \ Paciente \ fumador: \ P(A1) = \ 0.45$$
$$A2: \ Paciente \ no \ fumador: \ P(A2) = \ 0.55$$

Paso 2. **Para ejemplificar de manera gráfica lo anterior, se sugiere desarrollar el diagrama de árbol correspondiente.**



Paso 3. **Luego, debe considerarse que un paciente con cáncer pulmonar puede provenir de A1 o A2, por lo que a estas se les considera eventos mutuamente exclusivos. Entonces:**

$C\text{: } Cáncer\ pulmonar$

$$\begin{aligned} P(C) &= P(PA1) * P(C \mid A1) + P(PA2) * P(C \mid A2) \\ &= 0.405 + 0.0275 \\ &= 0.4325 \end{aligned}$$

Paso 4. **Aplicando el teorema de Bayes:**

$$P(A1 \mid C) = \frac{P(PA1)*P(C \mid A1)}{P(C)} = \frac{(0.45)(0.90)}{0.4325} = 0.9364 \times 100$$
$$P(A1 \mid C) = 93.64\%$$

Resultado. Por lo tanto, la probabilidad de que un paciente fumador tenga cáncer pulmonar es de 93.64%.

5. Conclusión

En este proyecto de Estructuras Discretas, se ha abordado en detalle el tema de la probabilidad discreta, la probabilidad condicional, la independencia de eventos y el Teorema de Bayes. Se ha subrayado la importancia de comprender y aplicar estos conceptos en una variedad de campos, incluidos la ingeniería, las ciencias, la administración y otros ámbitos de la vida real. Se ha destacado cómo la probabilidad ha evolucionado desde su asociación inicial con los juegos de azar hasta convertirse en una herramienta crucial en la comprensión y el manejo de la incertidumbre en diversos campos.

Al comprender la probabilidad y sus aplicaciones, pudimos resolver problemas complejos y situaciones del mundo real con una metodología sólida y fundamentada. El aprendizaje de estos conceptos permite tomar decisiones informadas y lógicas en una variedad de contextos.

Los puntos clave de este proyecto incluyen la comprensión de los axiomas fundamentales de la probabilidad discreta, la importancia de la probabilidad condicional en la evaluación de eventos relacionados y la definición clara de la independencia de eventos. Además, se ha demostrado cómo el Teorema de Bayes proporciona un marco para calcular la probabilidad de un evento dada la evidencia de otros eventos relacionados. Esta comprensión de la probabilidad permite que nosotros como estudiantes abordemos de manera más efectiva los desafíos y problemas del mundo real que involucran incertidumbre y riesgo.

En última instancia, este proyecto destaca cómo el estudio y la comprensión de la probabilidad y sus aplicaciones no solo contribuyen un avance del conocimiento científico y tecnológico, sino que también tienen un impacto significativo en la toma de decisiones informada en diversas áreas de la vida. Al comprender la incertidumbre y las probabilidades asociadas con eventos y resultados, las personas pueden enfrentar desafíos complejos de manera más efectiva y tomar decisiones racionales basadas en datos y evidencia.

6. Bibliografía

1. Alvarado Verdin, V. M. (2012). *Probabilidad y estadística.* México: Grupo Editorial Patria.
2. Anderson, D. R., Dennis, J. S, Thomas, A. W. (2012). *Estadística para negocios y economía.* (11a. Edición). Cengage Learning. http://archivos.diputados.gob.mx/Centros_Estudio/UEC/Site-1/documentos/mat2consultaG2/Libros/Estadistica%20para%20negocios%20y%20economia.pdf
3. Ayala, G., Montes, F. (2020). *Probabilidad básica.* Sam Hocevar. https://www.uv.es/ayala/docencia/probabilidad/prob.pdf
4. Canavos, G. C. (1998). *Probabilidad y estadística. Aplicaciones y métodos.* México, D.F. McGraw-Hill/Interamericana.
5. DeGroot, M. H. (1988). *Probabilidad y estadística.* México: Addison-Wesley.
6. Dixon, R. J. (1970). *Introducción a la probabilidad.* México. Limusa-Wiley.
7. Feller, W. (1978). *Introducción a la teoría de probabilidades y sus aplicaciones*. México, D.F. Limusa Noriega.
8. Frontana, C. B. (2014). *Probabilidad y estadística. Tomo I. El contexto y los antecedentes*. México, D.F. Facultad de Ingeniería.
9. Frontana, C. B. (2014). *Probabilidad y estadística. Tomo II. La Teoría de probabilidad.* México, D.F. Facultad de Ingeniería.
10. Larson, J. H. (1992). *Introducción a la teoría de probabilidades e inferencias estadísticas*. México, D.F. Limusa Noriega.
11. Meyer, L. P. (1986). *Probabilidad y aplicaciones estadísticas.* U.S.A, Massachusetts. Addison-wesley iberoamericana.
12. Mendenhall, W. Robert J. B., Barbara M. B. (2006). *Introducción a la probabilidad y estadística.* (13a. Edición). Cengage Learning. https://www.fcfm.buap.mx/jzacarias/cursos/estad2/libros/book5e2.pdf
13. Obregón, S. I. (1980). *Teoría de probabilidad.* México, D.F. Limusa Noriega.
14. Rotar, V. I. (2012). *Probability and Stochastic Modeling.* U.S.A, New York. Chapman & Hall.
15. Trejo, L. M., Castañeda, C. Y., Valverde, F. C. (2012). *Distribuciones Probabilísticas Discretas.* Perú, Huacho. https://repositorio.unjfsc.edu.pe/bitstream/handle/20.500.14067/2039/TEXTO%20DIST.%20PROBABILISTICAS%202012_.pdf?sequence=1&isAllowed=y