Álgebra Lineal I

Tarea-Examen 03

Profesor: Rivera Torres Francisco de Jesús
Ayudante: Samayoa Donado Víctor Augusto
Ayudante: Vargas Martínez Mario Raúl

Mayo 29, 2020

1. Considere matrices A, B y C de $n \times n$. Demuestre lo siguiente:

   (a) El $\det(A) = \det\left(A^T\right)$

   (b) Si C se obtuvo de A al cambiar el i-ésimo renglón (columna) por lo j-ésimo renglón (culmna). Muestre que $\det(C) = -\det(A)$.

   (c) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

   (d) Sea C una matriz obtenida a partir de A al multiplicar por $c \in F$ un renglón. Muestre que $\det(C) = c \cdot \det(A)$.

2. Demuestre que un sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$ tiene solución si y sólo si $b \in R(L_A)$.

3. Calcule el rango y la inversa (en caso de que exista) de la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

4. Sea $T : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ dada por $T(f(x)) = f(x) + f'(x) + f''(x)$:

   (a) Usando el concepto del rango de una matriz demuestre que la transformación T es invertible.

   (b) Usando la matriz inversa obtenga la transformación inversa de T.

(c) Verifique que la transformación obtenida en el paso anterior es efectivamente la transformación inversa.

5. Para cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones encuentre la base y la dimensión del subespacio de soluciones para el sistema homogéneo y luego encuentre todas las soluciones para el sistema de ecuaciones no homogéneo:

   (a)

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &= 0 \\ 2x_1 + 6x_2 &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1 + 3x_2 &= 5 \\ 2x_1 + 6x_2 &= 10 \end{aligned}$$

   (b)

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 5 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$