1 a)

$\det A = \det A^T$

Tenemos dos casos posibles
En caso de que A no es invertible, entonces el rango $(A) < n$.
Pero como el rango $(A^T) =$ rango (A) justo por un corolario que enuncia eso, entonces tenemos que (A^T) no es invertible y entonces, en este caso, $\det(A) = 0 = \det(A^T)$

Por otro lado, si A es invertible, entonces $A = E_m \dots E_1$, donde $E_1, \dots, E_m$ son matrices elementales. y sabemos que $\det(E_i^t) = \det(E_i)$, para cada i., entonces lo usamos y tenemos que

$$\det(A^T) = \det(E_1^t \cdots E_m^t) = \det(E_1^t) \cdots \det(E_m^t)$$
$$= \det(E_1) \cdots \det(E_m) = \det(E_m) \cdots \det(E_1)$$
$$= \det(E_m \cdots E_1) = \det(A) \quad ✓$$
$$\blacksquare$$

① b) Si C se obtuvo de A al cambiar el i-ésimo renglón (columna) por lo j-ésimo renglón (columna)
Muestre que $\det(C) = -\det(A)$

Supongase que: si, C se obtiene al intercambiar los renglones i e $i+1$ de A

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ A_{i+1} \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} \quad \text{entonces} \quad C = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{i+1} \\ A_i \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}$$

Ahora bien

$$0 = \det\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i + A_{i+1} \\ A_i + A_{i+1} \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ A_i + A_{i+1} \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{i+1} \\ A_i + A_{i+1} \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ A_i \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ A_{i+1} \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{i+1} \\ A_i \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{i+1} \\ A_{i+1} \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = 0 + \det(A) + \det(C) + 0$$

ya que det. es una función n-lineal alternante.
entonces $\det(C) = -\det(A)$

Ahora supongase que C se obtiene de A, intercambiando los renglones i y j donde $i<j$. Comenzando con los renglones i e $i+1$, intercambiamos sucesivamente los renglones de A hasta que éstos tienen el orden siguiente:

$A_1, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_j, A_i, A_{j+1}, \ldots, A_n$

En total se requieren $j-i$ intercambios para producir este orden. Ahora intercambiamos sucesivamente A_j con el renglon anterior hasta que los renglones tengan el orden siguiente:

$A_1, \ldots, A_{i-1}, A_j, A_{i+1}, \ldots, A_{j-1}, A_i, A_{j+1}, \ldots, A_n$

Éste proceso requiere de $j-i-1$ intercambios de renglones adyacentes y produce la matriz C. De aquí, en virtud de lo dicho en el inicio, vemos que

$$\det(C) = (-1)^{j-i}(-1)^{j-i-1}\det(A) = (-1)^{2(j-i)-1}\det(A) = -\det(A)$$

∎

① c) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

Caso 1) A es una matriz no invertible

Supongamos que AB es una matriz inversible

En tal caso, existiría una matriz C tal que $(AB)C = I_n$

Pero esta última expresión nos dice que A es inversible pues $A^{-1} = BC$, lo cual es una contradicción.

Si $\det A = 0$ entonces $\det(AB) = 0$ y por tanto

$$\det(AB) = 0 = 0 \cdot (\det B) = (\det A) \cdot (\det B)$$

Caso 2) A es una matriz invertible

Tenemos entonces que la matriz A se puede escribir como el producto de matrices elementales

$$A = E_1 E_2 \cdots E_k$$

entonces

$$\det(AB) = \det(E_1 E_2 \cdots E_k B) = (\det E_1)\det(E_2 \cdots E_k B) = \cdots$$

por el lema que dice $\det(EA) = (\det E)(\det A)$ con A una matriz y E una matriz elemental

$$\cdots = (\det E_1)(\det E_2)(\det E_3 \cdots E_k B) = (\det E_1)(\det E_2)\cdots(\det E_k)(\det B)$$

y usando que

$$(\det E_1)(\det E_2)\cdots(\det E_k) = \det A$$

se tiene que

$$(\det E_1)(\det E_2)\cdots(\det E_k)(\det B) = (\det A)(\det B) \blacksquare$$

① d) Sea C una matriz obtenida a partir de A al multiplicar por $c \in F$ un renglón.
Muestre que $\det(C) = c \cdot \det(A)$

Ésta propiedad es una consecuencia del hecho de que el determinante es una función n-lineal

③ Calcule rango e inversa

$$A=\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & +1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad f_1(-1)+f_2$$

$$=\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad f_1(-2)+f_3$$

$$=\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad f_2(1)+f_4$$

$$=\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad f_3(-1)$$

$$=\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad f_3(-1)+f_1$$

$$=\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad f_3(2)+f_2$$

$$=\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad f_3(1)+f_4$$

$$=\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Como toda la fila 4 dió ceros, entonces es de rango 3 y no tiene inversa.

④ Sea $T: \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ dada por $T(f(x)) = f(x) + f'(x) + f''(x)$:

a) Usando el concepto de rango de una matriz, demuestre que la transformación T es invertible.

Primero necesitaremos una base de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ así que usaremos una $\beta = \{1, x, x^2\}$.

Con la base, ahora generamos la matriz A

$T(1) = 1 + 0 + 0$, $T(x) = 1 + x + 0$, $T(x^2) = 2 + 2x + x^2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora diagonalizamos a A para sacar la matriz identidad

$f_1 - (2)f_2$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} f_2 + (2)f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y como ningún renglón completo dio ceros entonces es de rango 3 y tiene inversa, entonces T es invertible.

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) f_2(-1) + f_1$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) f_3(-2) + f_2 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = A^{-1}$$

4

b) Usando la matriz inversa, obtenga la transformación ~~lineal~~ inversa de T

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tomamos como base $\beta = \{1, x, x^2\}$

$\Rightarrow T^{-1}(1) = 1+0+0$, $T^{-1}(x) = -1 + x + 0$, $T^{-1}(x^2) = 0 - 2x + x^2$

Aquí se podría saber que $T^{-1}(f(x)) = f(x) - f'(x)$

4

c) Verifique que la transformación obtenida en el paso anterior es efectivamente la transformación inversa.

Esto se puede verificar fácilmente empezando por tomar...

$$T^{-1}(T(f(x))) = T^{-1}(f(x) + f'(x) + f''(x))$$

y por el inciso b) tenemos que $T^{-1}(f(x)) = f(x) - f'(x)$ entonces

$$= (f(x) + f'(x) + f''(x)) - (f(x) + f'(x) + f''(x))'$$

$$= f(x) + f'(x) + f''(x) - f'(x) - f''(x) - f'''(x)$$

y cancelando factores nos queda $= f(x)$

$$\therefore (T^{-1} \circ T)(f(x)) = f(x) \quad \checkmark$$

⑤ Para cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones encuentre la base y la dimensión del subespacio de soluciones para el sistema homogéneo y luego encuentre todas las soluciones para el sistema de ecuaciones no homogéneo:

a) $\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &= 0 \\ 2x_1 + 6x_2 &= 0 \end{aligned}$ $\qquad$ $\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &= 5 \\ 2x_1 + 6x_2 &= 10 \end{aligned}$

Para la homogenea tenemos la siguiente matriz

$\rightarrow \left(\begin{array}{cc:c} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \end{array}\right)$ sacamos su rango diagonalizando aplicando $f_1(-2)+f_2$ $\Rightarrow$ $\left(\begin{array}{cc:c} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$ es de rango 1

y su dimensión $\dim(K) = 2-1 = 1$ y podemos sacar la solución $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es una base de K, donde K es el conjunto de todas las soluciones

Para la no homogénea tenemos la siguiente matriz

$\left(\begin{array}{cc:c} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 10 \end{array}\right)$ sacamos su rango diagonalizando aplicando $f_1(-2)+f_2$ $\Rightarrow$ $\left(\begin{array}{cc:c} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$ es de rango 1

y su dimension $= 2-1 = 1$ y podemos sacar la solución $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ tal que } t \in \mathbb{R} \right\}$ es el conjunto de todas las soluciones.

b) $\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}$ $\qquad$ $\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 5 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 4 \end{aligned}$

Para la homogenea tenemos la siguiente matriz

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & +2 & -2 & 0 \end{array}\right) \text{ intercambiamos } f_1 \text{ con } f_2 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & +2 & -2 & 0 \end{array}\right) f_1(-2)+f_2 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 1 & +2 & -2 & 0 \end{array}\right) f_1(-1)+f_3$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right) f_2/3 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right) f_1+f_2 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right) f_2(-3)+f_3$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$ es rango 2, entonces su $\dim(K) = 3-2 = 1$

y podemos sacar la solución $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

entonces $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es una base de K, donde K es el conjunto de todas las soluciones

Para la no homogénea, tenemos la siguiente matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \text{ intercambiamos } f_1 \text{ con } f_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} f_1(-2)+f_2$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} f_1(-1)+f_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} = f_2/3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} f_2(1)+f_1$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} f_2(-3)+f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

esto por la fila 3 la matriz es de rango 2, entonces su $\dim(R) = 3-2 = 1$

y sacamos el $x_1 = 2$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$ $\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ como solución y base

entonces $K = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R} \right\}$ como conjunto de todas las soluciones ✓ ■