(3)

b) Demuestre que $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = W_1 \oplus W_2$

Sea $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ y definimos a $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ y $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $h(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$

Se ve como $f = g+h$ y aparte $g \in W_1$ ya que

$g(-x) = \frac{f(-x)+f(x)}{2} = \frac{f(x)+f(-x)}{2} = g(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ y $h \in W_2$

ya que $h(-x) = \frac{f(-x)-f(x)}{2} = \frac{f(x)-f(-x)}{2} = -h(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ //

El regreso esta dado ya que sabemos que $W_1, W_2 \subseteq \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

Aparte si $f \in W_1 \cap W_2$ se tiene que $f \in W_1$ y $f \in W_2$
luego $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) = f(-x)$ por $f \in W_1$ y $f(x) = -f(-x)$ ya que $f \in W_2$.

$$\Rightarrow f(x) = f(-x) = -f(x)$$
$$\Rightarrow 2f(x) = 0$$
$$\Rightarrow f(x) = 0$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = W_1 \oplus W_2$$ //

(4)

(a) $\beta_1 \cap \beta_2 = \emptyset$

como $V = W_1 \oplus W_2$ entonces $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ por Teorema que dice La suma $V = W_1 \oplus W_2$ es una suma directa si y solo si $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

entonces sea $\beta_1 = \{u_1, \cdots, u_m\}$ y $\beta_2 = \{w_1, \cdots, w_n\}$. Notemos que $u_1, \cdots, u_m \in W_1$ y $w_1, \cdots, w_n \in W_2$ son todos vectores diferentes de cero ya que son lin. ind, por def de base.

Por lo tanto, $\beta_1 \cap \beta_2 = \emptyset$

con β_1 base de W_1 y β_2 base de W_2

~~(a) $\beta_1 \cap \beta_2$~~

(4)

(b) $\beta_1 \cup \beta_2$ es base de V

Suponemos que $\beta_1 = \{u_1, \cdots, u_m\}$ y $\beta_2 = \{w_1, \cdots, w_n\}$ ent $\forall v \in V = W_1 \oplus W_2$, se tiene que

$$v = u + w = (\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_m u_m) + (\gamma_1 w_1 + \cdots + \gamma_n w_n)$$

Por lo tanto $\beta_1 \cup \beta_2 = \{u_1, \cdots, u_m, w_1, \cdots, w_n\}$ es un conjunto generador de V. //

Para probar que es lin. ind., tomamos una comb. lineal de este conjunto $\beta_1 \cup \beta_2$

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_m u_m + \gamma_1 w_1 + \cdots + \gamma_n w_n = \vec{0}$$

$$(\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_m u_m) + (\gamma_1 w_1 + \cdots + \gamma_n w_n) = 0$$

que se puede escribir de la forma

$$(\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_m u_m) = -(\gamma_1 w_1 + \cdots + \gamma_n w_n)$$

puesto que la suma es directa $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ por lo tanto

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_m u_m = 0 \quad , \quad \gamma_1 w_1 + \cdots + \gamma_n w_n = 0$$

y como $\beta_1 = \{u_1, \cdots, u_m\}$ es base de W_1 y $\beta_2 = \{w_1, \cdots, w_n\}$ base W_2 se tiene que ambos son lin. ind. y única sol. es que

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0 \quad y \quad \gamma_1 = \cdots = \gamma_n = 0$$

$\therefore$ $\beta_1 \cup \beta_2 = \{u_1 \cdots u_m w_1, \cdots w_n\}$ es un conjunto lin. ind. y genera y por lo tanto es una base ■

(2) $S_1, S_2 \subseteq V$. Demuestre que $\langle S_1 \cup S_2 \rangle = \langle S_1 \rangle + \langle S_2 \rangle$

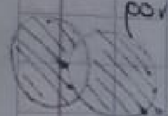
Sea $S_1 = \{v_1, \dots, v_n\}$ y $S_2 = \{u_1, \dots, u_m\}$
siendo su unión

$S_1 \cup S_2 = \{v_1, \dots, v_n, u_1, \dots, u_m\}$

sabemos que $\langle S_1 \rangle = \{\alpha_1 v_1, \dots, \alpha_n v_n\}$

y $\langle S_2 \rangle = \{\gamma_1 u_1, \dots, \gamma_m u_m\}$

por la definición de suma $S_1 + S_2 = \{x + y \mid x \in S_1, y \in S_2\}$



podemos ver a $\langle S_1 \rangle + \langle S_2 \rangle$, como

$\{\alpha_1 v_1 + \gamma_1 u_1 + \dots + \alpha_n v_n + \gamma_m u_m\}$

Si queremos el conjunto generador de $\langle S_1 \cup S_2 \rangle$, entonces tendremos la comb. lineal de la unión $S_1 \cup S_2$
es decir

$\langle S_1 \cup S_2 \rangle = \{\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n + \alpha_{n+1} u_1 + \gamma_{n+2} u_2 + \dots + \alpha_{n+m} u_m\}$

conmutando ya que son subconjuntos

$\langle S_1 \cup S_2 \rangle = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n + \gamma_1 u_1 + \dots + \gamma_m u_m\}$

y organizamos

$\langle S_1 \cup S_2 \rangle = \{\alpha_1 v_1 + \gamma_1 u_1 + \dots + \alpha_n v_n + \gamma_m u_m\}$

que es igual a $\langle S_1 \rangle + \langle S_2 \rangle$

$\therefore \langle S_1 \cup S_2 \rangle = \langle S_1 \rangle + \langle S_2 \rangle$