# Álgebra Lineal I

Tarea-Examen 04

Profesor: Rivera Torres Francisco de Jesús
Ayudante: Samayoa Donado Víctor Augusto
Ayudante: Vargas Martínez Mario Raúl

Junio 08, 2020

1. Sea $V$ el espacio vectorial generado por $S = \{sen(t), cos(t), 1, t\}$ con el producto interior definido por:

$$\langle f(t), g(t) \rangle = \int_0^\pi f(t)g(t)dt$$

   Usando el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt construya una base ortonormal.

2. Sea $V$ un espacio con producto interior y sea $T$ un operador lineal sobre $V$. Demuestre que:
   (a) $R(T^*)^\perp = N(T)$
   (b) Si $V$ es dimensionalmente finito, entonces $R(T^*) = N(T)^\perp$.

3. Sea $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ definida mediante $T((fx)) = f(x) + xf'(x)$. Encontrar todos los valores propios de $T$ y encontrar una base $\beta$ para $P_2(\mathbb{R})$ tal que $[T]_\beta$ sea una matriz diagonal.

---

**Definición:** Una matriz escalar es una matriz cuadrada de la forma $\lambda I$ para algún escalar $\lambda$; o sea, una matriz escalar es una matriz diagonal en la cual todos los elementos de la diagonal son iguales.

---

4. Considere una matriz $A$ de $n \times n$. Demostrar lo siguiente:

(a) Si $A$ es similar a una matriz escalar $\lambda I$, entonces:

$$A = \lambda I.$$

(b) Si $A$ es una matriz diagonalizable que sólo tiene un valor propio entonces es una matriz escalar

(c) Concluir que la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

no es diagonalizable.

(d) Considfere la matriz $A$ en $M_{n\times n}(R)$,

$$\begin{pmatrix} 7 & -4 & 0 \\ 8 & -5 & 0 \\ 6 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

justificar si $A$ es diagonalizable o no y, en caso de serlo, encontrar una matriz $Q$, tal que $Q^{-1}AQ$ sea una matriz diagonal.

5. Sea T un operador lineal en un espacio vectorial V dimensionalmente finito para el cual los distintos valores propios de T son $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$. Demostrar que

$$L(\{x \in \vee : x \text{ es un eigenvector de T}\}) = \mathrm{E}_{\lambda_1} \oplus \mathrm{E}_{\lambda_\star} \oplus \ldots \oplus \mathrm{E}_{\lambda_k}$$