Álgebra Lineal
Tarea-Exámen1

González Montiel Luis Fernando

17 de marzo de 2020

1. Para los siguientes ejercicios considere V un espacio vectorial.
   (a) Sean W_1 , $W_2 \leq$ V de dimensiones m y n, respectivamente, tales que m $\geq$ n.
   Demuestre que dim($W_1 \cap W_2$) $\leq$ n y dim(W_1 + W_2) $\leq$ m + n

   Demostración:
   Como W_1 tiene dimensión m por la definición, esto implica que existe una base para W_1, es decir, sea una β_1 = { u_1,...,u_m }, tomando de igual forma a W_2, una base β_2 = { v_1,...,v_n }, por la definición principal, tenemos que ($W_1 \cap W_2$) = { $u_1 \in \beta_1$ y $v_1 \in \beta_2$ tal que $u_1 = v_1$ }.
   Dado ésto, tenemos dos casos que tenemos que revisar.
   Primero el caso donde ($W_1 \cap W_2$) = $\emptyset \leq$ n.
   Y en el caso donde ($W_1 \cap W_2$) $\neq \emptyset$, donde podemos suponer que para todo $u_i \in \beta_1$ y para todo $v_i \in \beta_2$, $u_i = v_i$, con 1$\leq$i$\leq$n, es decir que cada elemento que esta en β_1, están también en β_2 y como ya sabemos que que | β_1 | = dim(W_1) = n con eso podemos estar seguros que a lo más los n elementos que estan β_1, van a estar en β_2.
   $\therefore$ ($W_1 \cap W_2$) $\leq$ n.

2. Sean V un espacio vectorial

3. (a) Demuestre que W_1 y W_2 son subespacios vectoriales de $\Im(\Re \rightarrow \Re)$
   Demostración:
   Tenemos que checar tres cosas para demostrar que es subespacio vectorial, es decir, ver si contiene al cero y si la suma y el producto por escalar son cerrados.
   Primero probaremos W_1. Tomamos una f_0 = { f(x) = 0 | x $\in \Re$ } está en W_1.
   Y sabemos que por la definición f_0(x) = 0 = f(-x), entonces f_0 está en W_1.
   Probaremos que ahora que la suma es cerrada, sea f,g $\in W_1$
   Entonces (f+g)(x) = f(x)+g(x) = f(-x)+g(-x) = (f+g)(-x),por lo tanto la suma es cerrada en W_1.
   Ahora checaremos que la multiplicación por escalar es cerrada en W_1.
   Tomamos f$\in W_1$ y $\lambda \in$ F.
   Entonces (λf)(x) = λf(x) = λf(-x) = (λf)(-x).
   Asi sabemos que la multiplicación por escalar es cerrada en W_1.
   $\therefore W_1$ es subesacio vectorial.
   Tomamos una f_0 = { f(x) = 0 | x $\in \Re$ } está en W_2.
   Y sabemos que por la definición f_0(-x) = 0 =-(0)= -f(x), entonces f_0 está en W_2.
   Probaremos que ahora que la suma es cerrada, sea f,g $\in W_2$
   Entonces (f+g)(-x) = f(-x)+g(-x) = -f(x)+(-g(x)) = (-1)(f+g)(x),por lo tanto la suma es cerrada en W_2.
   Ahora checaremos que la multiplicación por escalar es cerrada en W_1.
   Tomamos f$\in W_2$ y $\lambda \in$ F.
   Entonces (λf)(-x) = λf(-x) = λ(-f(x)) = λ((-1)f(x))= (-1)λf(x)= -(λf)(x).
   Asi sabemos que la multiplicación por escalar es cerrada en W_2.
   $\therefore W_2$ es subesacio vectorial.