(1) $S = \{ sen(t), cos(t), 1, t \}$ $\quad \langle f(t), g(t) \rangle = \int_0^{\pi} f(t)g(t)\,dt$

Paso 1: $sen(t) = V_1$ ✓

Paso 2: $V_2 = cos(t) - \left(\frac{cos(t) \cdot sen(t)}{\|sen(t)\|^2} \right) \cdot sen(t)$

$= cos(t) - \left(\frac{\int_0^{\pi} cos(t) sen(t)}{\|sen(t)\|^2} \right) \cdot sen(t)$

$= cos(t) - \left(\frac{0}{\cancel{\|sen(t)\|^2}} \right) \cdot sen(t) \xrightarrow{} 0 = cos(t) = V_2$ ✓

Paso 3: $V_3 = 1 - \left(\left(\frac{1 \cdot sen(t)}{\|sen(t)\|^2} \right) \cdot sen(t) + \left(\frac{1 \cdot cos(t)}{\|cos(t)\|^2} \right) \cdot cos(t) \right)$

$= 1 - \left(\left(\frac{\int_0^{\pi} 1 \cdot sen(t)}{\|sen(t)\|^2} \right) \cdot sen(t) + \left(\frac{\int_0^{\pi} 1 \cdot cos(t)}{\|cos(t)\|^2} \right) \cdot cos(t) \right)$

$= 1 - \left(\left(\frac{2}{\pi/2} \right) \cdot sen(t) + \left(\frac{0}{\cancel{\|cos(t)\|^2}} \right) \cdot cos(t) \right) \rightarrow 0$

$= 1 - \left(\frac{4}{\pi} \cdot sen(t) \right) = V_3$ ✓

1

Paso 4: $v_4 = t - \left(\left(\frac{t \cdot sen(t)}{\|sen\|^2}\right) sen(t) + \left(\frac{t \cdot cos(t)}{\|cos(t)\|^2}\right) \cdot cos(t) + \left(\frac{t \cdot \left(\frac{1-4sen(t)}{\pi}\right)}{\left\|\frac{1-4sen(t)}{\pi}\right\|^2}\right) \cdot \left(\frac{1-4sen(t)}{\pi}\right) \right)$

$$= t - \left(\left(\frac{\overbrace{\int_0^{\pi} t \cdot sen(t)}^{\pi}}{\frac{\pi}{2}}\right) sen(t) + \left(\frac{\overbrace{\int_0^{\pi} t \cdot cos(t)}^{-2}}{\frac{\pi}{2}}\right) \cdot cos(t) + \left(\frac{\int_0^{\pi} t \cdot \left(\frac{1-4sen(t)}{\pi}\right)}{\left\|\frac{1-4sen(t)}{\pi}\right\|^2}\right) \cdot \left(\frac{1-4sen(t)}{\pi}\right) \right)$$

$$= t - \left(\frac{\pi}{\pi/2} \cdot sen(t) + \frac{-2}{\pi/2} \cdot cos(t) + \left(\overbrace{\frac{\left(\frac{1}{2}(\pi^2 - 8)\right)}{\left(\pi - \frac{8}{\pi}\right)}}^{\pi/2} \right) \cdot \left(\frac{1-4sen(t)}{\pi}\right) \right)$$

$$= t - \left(2 sen(t) - \frac{4}{\pi} cos(t) + \left(\frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{1-4sen(t)}{\pi}\right) \right) \right)$$

$$= t - \left(2 sen(t) - \frac{4}{\pi} cos(t) + \left(\frac{\pi}{2} - 2 sen(t) \right) \right)$$

$$= t + \frac{4 cos(t)}{\pi} - \frac{\pi}{2} = V_4 \checkmark$$

$$\left\{ \frac{sen(t)}{\|sen(t)\|}, \frac{cos(t)}{\|cos(t)\|}, \frac{1 - \left(\frac{4}{\pi} \cdot sen(t)\right)}{\left\|1 - \left(\frac{4}{\pi} \cdot sen(t)\right)\right\|}, \frac{t + \frac{4 cos(t)}{\pi} - \frac{\pi}{2}}{\left\| t + \frac{4 cos(t)}{\pi} - \frac{\pi}{2} \right\|} \right\}$$

② **a)** $R(T^*)^\perp = N(T)$

Sea $v \in N(T)$. Si $w \in R(T)$, de manera que existe una $u \in V$ tal que $T(u) = w$, entonces
$\langle w, v \rangle = \langle T(u), v \rangle = \langle u, T^*(v) \rangle = 0$
Esto nos dice que $v \in R(T)^{*\perp}$, recíprocamente, si $v \in R(T)^*$, se tiene que para todo $u \in V$ es

$\langle u, T^*(v) \rangle = \langle T(u), v \rangle = 0$, así que $T(u) = 0$

esto es, $v \in N(T)$ ✓ ■

b) Si V es dimensionalmente finito, entonces $R(T^*) = N(T)^\perp$

Sea $v \in (R(T^*)^\perp)$. Si $w \in V$, entonces

$\langle T^*(v), w \rangle = \langle v, T(w) \rangle = 0$, así que $T^*(v) = 0$

Vemos de esta forma que $(R(T^*)^\perp) \subseteq N(T^*)$ y entonces como V tiene dimensión finita y usando ésta proposición que $S \subseteq T \Rightarrow T^\perp \subseteq S^\perp$ con $S, T \subseteq V$ subconjuntos y la proposición que dice que $V = S \oplus S^\perp$, $S = S^{\perp\perp}$ con $S \subseteq V$ subespacio de dimensión finita.
Entonces con esas 2 proposiciones podemos decir que

$$N(T)^\perp \subseteq (R(T^*)^{\perp\perp}) = R(T^*) \blacksquare$$ ✓

③ Sea $T: P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ definida mediante:

$T((f(x))) = f(x) + x f'(x)$

Encontrar todos los valores propios de T y encontrar una base β para $P_2(\mathbb{R})$ tal que $[T]_\beta$ sea una matriz diagonal

Suponemos una base β para $P_2(\mathbb{R})$ como $\{1, x, x^2\}$

Ahora tomamos la ecuación de como esta definida en el inicio y tenemos...

$T(f(1)) = 1 + x(f'(1)) = 1 + x(0) = \boxed{1}$

$T(f(x)) = x + x(f'(x)) = x + x(1) = x + x = \boxed{2x}$

$T(f(x^2)) = x^2 + x(f'(x^2)) = x^2 + x(2x) = x^2 + 2x^2 = \boxed{3x^2}$

Ésto nos quedaría de la forma

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$ y sabemos que ésto es diagonal

entonces podemos concluir que $\beta = \{1, x, x^2\}$

es base para $[T]_\beta$ ✓

③

Ahora para sacar los eigenvalores, sabemos que es de la forma $[T]_\beta - \lambda I$

$$= \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

sacamos el polinomio característico

$(1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)$ entonces

los eigenvalores serían $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$. ✓

(4) Considere una matriz A de $n \times n$. Demostrar lo siguiente

a) Si A es similar a una matriz escalar λI, ent. $A = \lambda I$

Por definición, una matriz escalar es una matriz cuadrada de la forma λI

Ent. supongamos que tenemos una matriz escalar que llamamos
$B = \lambda I$

Ahora sabemos que A es similar a B por la def.
eso significa que $A = P^{-1} B P$
y sabemos que ésta igualdad se cumple $\lambda I = \lambda P^{-1} P = P^{-1} \lambda I P$
Pero ésto tiene la misma forma así que sustituimos

$$\lambda I = P^{-1} \lambda I P = P^{-1} B P = A$$

$$\therefore \lambda I = A \; \blacksquare \checkmark$$

(4) b) Si A es una matriz diagonalizable que solo tiene un valor propio, entonces es una matriz escalar.

Supongamos que tenemos una matriz de $n \times n$ que no es escalar, eso significaría que los valores propios no son iguales todos, pero por la definición, solo tiene un valor propio, es decir, el resto son ceros, pero un teorema dice que el cero no es un valor propio, ésto nos da una contradicción ya que dijimos que no era escalar y obligaría a tener valores propios distintos.
Pero como solo hay uno, entonces esa matriz sí es escalar $\blacksquare \checkmark$

④ c) Concluir que A no es diagonalizable

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(1-\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$

con eigenvalor $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$, con multiplicidad 2

y un eigenvector $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = v_1$

le calculamos el autoespacio asociado al valor $\lambda = 1$

$\begin{pmatrix} 1-1 & 1 \\ 0 & 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ 0 \cdot x + 1y = 0 \right. \Rightarrow$

rango 1

$S_1 = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Pero no coinciden la multiplicidad algebraica de $\lambda = 1$ y su multiplicidad geometrica, nos falta un eigenvector linealmente independiente para armar la matriz

$\therefore$ A no es diagonalizable.

④ d)

Considere la matriz A en $M_{n\times n}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 0 \\ 8 & -5 & 0 \\ 6 & -6 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 7-\lambda & -4 & 0 \\ 8 & -5-\lambda & 0 \\ 6 & -6 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

resolviendo el determinante nos queda el polinomio caract.

$-\lambda^3+5\lambda^2-3\lambda-9$ ✓

y de la diagonalización

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 0 \\ 3/2 & -3/2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$ de la forma QAQ^{-1} ✓

con eigenvalores $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=3$, $\lambda_3=3$ ✓

Por lo tanto si es diagonalizable y la matriz Q es:

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ ∎ ✓

5) Sea T un operador lineal en un espacio vectorial V dimensionalmente finito para el cual los distintos valores propios de T, son $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$. Demostrar que

$$L(\{X \in V : X \text{ es un eigenvector de } T\}) = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_k}$$

Dem: Supongase que T es diagonalizable, con valores propios distintos $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$.
Sea W_i el subespacio de los vectores propios asociados al valor propio λ_i. Como se sabe

$$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$$

Sean $E_1, \dots, E_k$ las proyecciones asociadas con esta descomposición, Ahora tomamos para cada X en V

$$X = E_1X + \cdots + E_kX \quad \text{y así}$$

$$TX = TE_1X + \cdots + TE_kX$$

$$= \lambda_1 E_1 X + \cdots + \lambda_k E_k X$$

En otras palabras, $T = \lambda_1 E_1 + \cdots + \lambda_k E_k$ ✓ ∎