(1) b) T es invertible si y solo si T es inyectiva y suprayectiva.

~~Sea $f: A \to B$ una función~~

$r(T) + nul(T) = n$ → Fórmula

suponemos que T es invertible $\Longleftrightarrow$ T es inyectiva $\wedge$ T es suprayectiva
por lo tanto si T es invertible ent. T es inyectiva
y si T es invertible ent. T es suprayectiva
mostraremos que T es inyectiva implica T es suprayectiva
supongamos que $ker(T) = \{0\}$. Entonces $nul(T) = 0$
y por la fórmula obtenemos que $r(T) = n$, esto es
$dim(im(T)) = dim(W)$. Pero $im(T) \subseteq W$. Asi que $im(T) = W$
Ahora mostraremos que T es suprayectiva implica que T es inyectiva
Supongamos que $im(T) = W$. Entonces $r(T) = n$ y por la fórmula obtenemos que $nul(T) = 0$, esto es $ker(T) = \{0\}$
$\therefore$ es verdadera

1

c) $(A^{-1})^{-1} = A$, Por def de matriz inversa...

Se tiene que $(A^{-1})^{-1} \cdot A^{-1} = I$

por otro lado $A \cdot A^{-1} = I$

y por lo que A y $(A^{-1})^{-1}$ son inversas de A^{-1} por la unicidad de la matriz inversa debe ocurrir que

$$(A^{-1})^{-1} = A \quad \blacksquare$$

$\therefore$ es verdadera

① e)

Por definición se le llama matriz inversa de una matriz cuadrada A, y se expresa como A^{-1} a la única matriz que cumple que

$$A \cdot A^{-1} = I = A^{-1} \cdot A$$

esto se cumple si y solo si $|A| \neq 0$

$\therefore$ es verdadera

② Sean A y B matrices invertibles de $n \times n$.
Demostrar que AB es invertible y que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

<u>Dem</u>: Por la propiedad asociativa tenemos que

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = BB^{-1} = 1$$

y

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = 1$$

Por lo que podemos decir que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

③

a) Demuestre que $T(V_0)$ es un subespacio de W

Se sabe que V_0 es un subespacio vectorial y T lineal.
entonces $0_V \in V_0$, con ésto que $T(0_{V_0}) = T(0_V) = 0_W \in W$
ent. $T(0_{V_0}) = 0_W \in T(V_0) \in W$
también tomamos una $X_{V_0}, y_{V_0} \in V_0$ como estan V
los vemos como $T(X_{V_0}) \in T(V_0)$ y $T(y_{V_0}) \in T(V_0)$
entonces por ser espacio vectorial se ve como $X_{V_0} + y_{V_0} \in V_0$
por ende, como $T(X_{V_0} + y_{V_0}) = T(X_{V_0}) + T(y_{V_0}) \in T(V_0) \in W$.
También tomamos una $c \in F$ y $X_{V_0} \in V_0$ y $V_0 \in V$
ent. $T(X_{V_0}) \in T(V_0)$, además como T es lineal podemos verlo como $T(c \cdot X_{V_0}) = c \cdot T(X_{V_0}) \in T(V_0) \in W$, con $c \cdot X_{V_0} \in V_0$
Por lo tanto podemos concluir que $T(V_0)$ es subespacio de W. ∎

b) Demuestre que $\dim(V_0) = \dim(T(V_0))$

como se sabe que T es lineal y también invertible
como $T: V_0 \to T(V_0)$, entonces T es uno-a-uno
con ésto se sabe que $N(T) = \{0\}$, ent. nulidad$(T) = 0$
y por def nulidad(T) + rank(T) = $\dim(V_0)$
es decir $0 +$ rank$(T) = \dim(V_0)$ y como sabemos que
T es sobreyectiva , tenemos que rank$(T) = \dim(R(T)) = \dim(T(V_0))$
así nos queda que

$$\dim(V_0) = \dim(T(V_0)) \; ∎$$

(4) Consideremos a n como la dim de V
y $\beta = \{V_1, \dots, V_n\}$ entonces $A = \phi_\beta$, ya que
F^n son agrupaciones de n elementos entonces
combinación lineal de una base F^n con n elementos.
por lo tanto F^n y V tienen la misma dimensión
ya que A es cuadrada
y [illegible] ϕ es [illegible], cada elemento de β va a F^n
y existe una $i = (1, \dots, n)$ ent. $T(W_i) = F_i$,
$\forall$ i, F_i e $T(V_i)$, con una base F^n ya que ϕ_β es
sobreyectiva, entonces para cada F^n que es combinación
lineal $T(V_i) \Rightarrow \phi_\beta$ es inyectiva
Entonces es sobreyectiva e inyectiva
También ya sabemos que su matriz es ~~[illegible]~~ cuadrada y ϕ_β invertible
Por lo tanto concluimos que ϕ_β es isomorfo ∎

(5) a) $\text{rank}(T) = \text{rank}(L_A)$ y b) $\text{nulidad}(T) = \text{nulidad}(L_A)$

Si $S: V^m \to W^n$ es isomorfo y $T: W^m \to Z^n$ es lineal entonces $\text{rank}(TS) = \text{rank}(T)$ y $\text{nulidad}(TS) = \text{nulidad}(T)$

Sea $\{z_1, \dots, z_k\}$ una base de $R(T)$ entonces existe $\{w_1, \dots, w_k\} \subseteq W$ tal que $T(w_i) = z_i$,
y sea $\{w_{k+1}, \dots, w_m\}$ una base de $N(T)$
entonces $\{w_1, \dots, w_m\}$ es una base para W
como S es un isomorfismo entre V y W, ent. es inyectiva y sobreyectiva, por lo tanto existe $\{v_1, \dots, v_m\} \subseteq V$ tal que $S(v_i) = w_i$. Además $\{v_{k+1}, \dots, v_m\}$ es una base para $N(TS)$. Por lo tanto $R(TS) = \text{span}\{TS(v_1), \dots, TS(v_k)\}$
$= \text{span}\{T(w_1), \dots, T(w_k)\} = \text{span}\{z_1, \dots, z_k\} = R(T)$, (siendo span el conjunto generador), y todos estos conjuntos de vectores para bases para sus respectivos espacios vectoriales...
Si le aplicamos la dimensión a ambos lados obtenemos $\text{rank}(TS) = \text{rank}(T)$ y usando la fórmula de la dimensión también obtenemos $\text{nulidad}(T) = \text{nulidad}(TS)$.
Podemos ver que $L_A = \phi_\gamma \circ T \circ \phi_\beta^{-1}$, como ϕ_γ es isomorfo
y por lo anterior $\text{rank}(\phi_\gamma \circ T \circ \phi_\beta^{-1}) = \text{rank}(T \circ \phi_\beta^{-1})$
Ya que ϕ_β^{-1} es isomorfo, $\text{rank}(T \circ \phi_\beta^{-1}) = \text{rank}(T)$
y poniendo todo junto tenemos que

$$\text{rank}(L_A) = \text{rank}(\phi_\gamma \circ T \circ \phi_\beta^{-1}) = \text{rank}(T)$$

Y con la nulidad es exactamente lo mismo quedando como

$$\text{nulidad}(L_A) = \text{nulidad}(\phi_\gamma \circ T \circ \phi_\beta^{-1}) = \text{nulidad}(T)$$

■

⑥ a) Si $x \neq 0$ entonces podemos tomar una base ordenada $\beta = \{x_1, \cdots, x_n\}$ para V tal que $x_1 = x$

Sea $\{f_1, \cdots, f_n\}$ la base dual de β. Ent. se tiene que $f_1(x_1) = 1 \neq 0$ lo que es una contradicción. ■

b) Ψ es lineal: Sea $x, y \in V$ y $a \in F$. Para $f \in V^*$ tenemos que $\Psi(x+ay)(f) = f(x+ay)$

$= f(x) + af(y) = \hat{x}(f) + a\hat{y}(f) = (\hat{x} + a\hat{y})(f)$

por lo tanto

$\Psi(x+ay) = \hat{x} + a\hat{y} = \Psi(x) + a\Psi(y)$

Ψ es uno-a-uno: Supóngase que $\Psi(x)$ es la funcional cero en V^* para alguna $x \in V$. Entonces $\hat{x}(f) = 0$ para toda $f \in V^*$. Por el inciso a) anterior, concluimos que $x = 0$

Ψ es isomorfismo: esto se sabe porque Ψ es uno-a-uno y del hecho que $\dim(V) = \dim(V^{**})$ ■