González Montiel Luis Fernando
García Pérez Isai Uzziel

Tarea 03 Autómatas y Lenguajes Formales

15

Martes 24-03-20

1) En ciertos lenguajes de programación, los comentarios aparecen entre delimitadores tales como /# y #/. Sea C el lenguaje de todos los delimitados de forma válida. Un miembro de C debe empezar con /# y terminar con #/ sin que haya en medio ningún #/. Por simplicidad, consideramos como alfabeto de las cadenas de entrada a $\Sigma = \{a, b, /, \#\}$. Dé una expresión regular que genere a C. Aquí unos ejemplos en el lenguaje de programación C++ (# es reemplazado por *):

Comentarios válidos:

- /##/
- /#/#/
- /#a/#b//##/

Comentarios inválidos:

- /#/
- /#/#/#/
- /#a#/#/

(i) $/\#(a+b+/+\#^{+}(a+b))^{*}\#^{*}\#/$

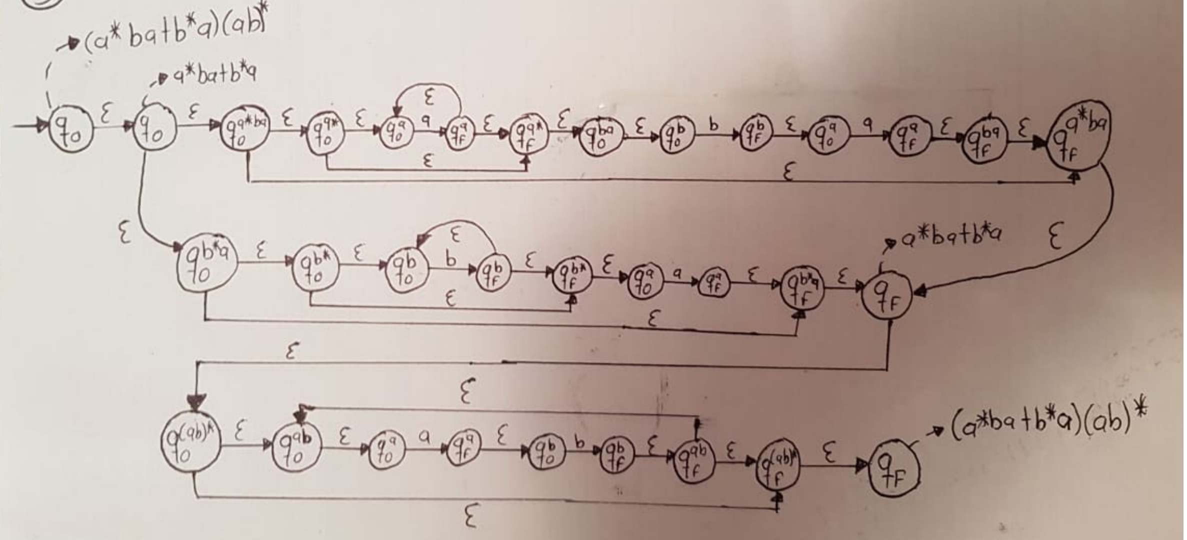
(ii) $/\#/^{*}((\#^{*}a^{+}/^{*})+(\#^{*}b^{+}/^{*}))^{*}\#^{*}\#/$

(iii) $/\#((a+b+/)^{*}(\varepsilon+\#^{+}(a+b)^{+}))^{*}\#^{*}\#/$

2) Una expresión regular generalizada se define del mismo modo que una expresión regular ordinaria, excepto que dos operaciones adicionales, intersección y complemento, son permitidas. Por ejemplo, la expresión regular generalizada $abb\overline{\emptyset} \cap (\overline{\overline{\emptyset}aaa\overline{\emptyset}})$ representa el conjunto de todas las cadenas en $\{a,b\}^{*}$ que comienzan con abb y no contienen a la subcadena aaa. Muestre que el subconjunto $\{aba\}^{*}$ de $\{a,b\}^{*}$ puede ser descrito por una expresión regular generalizada sin presencias del operador $*$.

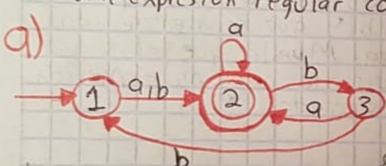
$$\varepsilon + aba + (aba\emptyset aba \cap \overline{\overline{\emptyset}bb\overline{\emptyset}} \cap \overline{\overline{\emptyset}aaa\overline{\emptyset}} \cap \overline{\overline{\emptyset}bab\overline{\emptyset}})$$

③



4) Use el algoritmo basado en el Lema de Arden para encontrar una expresión regular correspondiente a cada uno de los AFD siguientes:

a)



$X_{1,1} = \emptyset$	$X_{2,1} = \emptyset$	$X_{3,1} = \{b\}$
$X_{1,2} = \{a,b\}$	$X_{2,2} = \{a\}$	$X_{3,2} = \{a\}$
$X_{1,3} = \emptyset$	$X_{2,3} = \{b\}$	$X_{3,3} = \emptyset$
$Y_1 = \emptyset$	$Y_2 = \{\varepsilon\}$	$Y_3 = \emptyset$

$L_3 = X_{3,1}L_1 + X_{3,2}L_2 + \overset{\emptyset}{\cancel{X_{3,3}}}L_3 + \overset{\emptyset}{\cancel{Y_3}} = bL_1 + aL_2$ $\therefore L_3 = bL_1 + aL_2$

$L_2 = \cancel{X_{2,1}L_1} + X_{2,2}L_2 + X_{2,3}L_3 + Y_2 = aL_2 + bL_3 + \varepsilon$ $L_2 = aL_2 + bL_3 + \varepsilon$

$L_1 = \cancel{X_{1,1}L_1} + X_{1,2}L_2 + \cancel{X_{1,3}L_3} + \cancel{Y_1} = (a+b)L_2$ $L_1 = (a+b)L_2$

La solución para L_3 es: $\emptyset^*(bL_1 + aL_2) = bL_1 + aL_2$

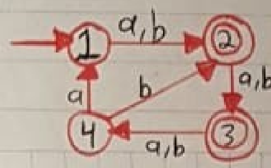
Resolvemos para L_2: $L_2 = aL_2 + bL_3 + \varepsilon$, Sustituimos L_3 en L_2:

$L_2 = aL_2 + b(bL_1 + aL_2) + \varepsilon = aL_2 + bbL_1 + baL_2 + \varepsilon = (a+ba)L_2 + bbL_1 + \varepsilon$

Tenemos que $L_2 = AL_2 + B$ donde $A = (a+ba)$ y $B = bbL_1 + \varepsilon$, Por el Lema de Arden
$L_2 = A^*B = (a+ba)^*(bbL_1 + \varepsilon)$

Resolvemos para L_1: $L_1 = (a+b)L_2 = a+b[(a+ba)^*(bbL_1+\varepsilon)] = (a+b)[(a+ba)^*bbL_1 + (a+ba)^*]$
$= (a+b)(a+ba)^*bbL_1 + (a+b)(a+ba)^*$, Tenemos que: $\underbrace{L_1 = [(a+b)(a+ba)^*bb]^*(a+b)(a+ba)^*}$ → Es la E.R. equivalente al autómata

4) b)



$X_{1,1}=\emptyset$ $\quad X_{2,1}=\emptyset$ $\quad X_{3,1}=\emptyset$ $\quad X_{4,1}=\{a\}$

$X_{1,2}=\{a,b\}$ $\quad X_{2,2}=\emptyset$ $\quad X_{3,2}=\emptyset$ $\quad X_{4,2}=\{b\}$

$X_{1,3}=\emptyset$ $\quad X_{2,3}=\{a,b\}$ $\quad X_{3,3}=\emptyset$ $\quad X_{4,3}=\emptyset$

$X_{1,4}=\emptyset$ $\quad X_{2,4}=\emptyset$ $\quad X_{3,4}=\{a,b\}$ $\quad X_{4,4}=\emptyset$

$Y_1=\emptyset$ $\quad Y_2=\{\varepsilon\}$ $\quad Y_3=\{\varepsilon\}$ $\quad Y_4=\emptyset$

Sabemos que $L_i=\sum_{j=0}^{n} X_{i,j}L_j+Y_i$. De modo que las ecuaciones características son:

$L_4=X_{4,1}L_1+X_{4,2}L_2+\overset{\emptyset}{\cancel{X_{4,3}L_3}}+\overset{\emptyset}{\cancel{X_{4,4}L_4}}+\overset{\emptyset}{\cancel{Y_4}}= aL_1+bL_2 \quad \therefore L_4=aL_1+bL_2$

$L_3=\overset{\emptyset}{\cancel{X_{3,1}L_1}}+\overset{\emptyset}{\cancel{X_{3,2}L_2}}+\overset{\emptyset}{\cancel{X_{3,3}L_3}}+X_{3,4}L_4+Y_3=(a+b)L_4+\varepsilon \quad L_3=(a+b)L_4+\varepsilon$

$L_2=\overset{\emptyset}{\cancel{X_{2,1}L_1}}+\overset{\emptyset}{\cancel{X_{2,2}L_2}}+X_{2,3}L_3+\overset{\emptyset}{\cancel{X_{2,4}L_4}}+Y_2=(a+b)L_3+\varepsilon \quad L_2=(a+b)L_3+\varepsilon$

$L_1=\overset{\emptyset}{\cancel{X_{1,1}L_1}}+X_{1,2}L_2+\overset{\emptyset}{\cancel{X_{1,3}L_3}}+\overset{\emptyset}{\cancel{X_{1,4}L_4}}+\overset{\emptyset}{\cancel{Y_1}}=(a+b)L_2 \quad L_1=(a+b)L_2$

La solución para L_4 es: $\emptyset^*(aL_1+bL_2)=aL_1+bL_2$

Resolvemos para L_3: $L_3=(a+b)L_4+\varepsilon$, Sustituimos L_4 en L_3:

$L_3=((a+b)(aL_1+bL_2))+\varepsilon=(a+b)aL_1+(a+b)bL_2+\varepsilon=(aa+ba)L_1+(ab+bb)L_2+\varepsilon$

Tenemos que $L_3=AL_3+B$, donde $A=\emptyset^*$ y $B=(ab+bb)L_2+(aa+ba)L_1+\varepsilon$.

Por el Lema de Arden: $L_3=A^*B=\emptyset^*((ab+bb)L_2+(aa+ba)L_1+\varepsilon)=(ab+bb)L_2+(aa+ba)L_1+\varepsilon$

Resolvemos para L_2: $L_2=(a+b)L_3+\varepsilon$, Sustituimos L_3 en L_2:

$L_2=(a+b)((ab+bb)L_2+(aa+ba)L_1+\varepsilon)+\varepsilon=((a+b)(ab+bb))L_2+((a+b)(aa+ba))L_1+(a+b)+\varepsilon$

$=(aab+abb+bab+bbb)L_2+(aaa+aba+baa+bba)L_1+(a+b)+\varepsilon$

Tenemos que $L_2=AL_2+B$, donde $A=(aab+abb+bab+bbb)$ y $B=(aaa+aba+baa+bba)L_1+(a+b)+\varepsilon$

Por Lema de Arden: $L_2=A^*B=(aab+abb+bab+bbb)^*((aaa+aba+baa+bba)L_1)+(a+b)+\varepsilon)$

Resolvemos para L_1: $L_1=(a+b)L_2$, Sustituimos L_2 en L_1:

$L_1=(a+b)((aab+abb+bab+bbb)^*((aaa+aba+baa+bba)L_1)+(a+b)+\varepsilon))$

$=(a+b)[(aab+abb+bab+bbb)^*(aaa+aba+baa+bba)L_1+(aab+abb+bab+bbb)^*(a+b)+(aab+abb+bab+bbb)^*]$

Tenemos que:

$L_1=[(a+b)(aab+abb+bab+bbb)^*(aaa+aba+baa+bba]^*+(aab+abb+bab+bb)^*(a+b)+(aab+abb+bab+bbb)^*$

Es la Expresión Regular equivalente al autómata b)

5) Demuestre la siguiente equivalencia entre expresiones regulares:

$(aa^*b + ba^*b + b^*a)^* \equiv (((a+b)a^*b)^*(b^*a)^*)^*$

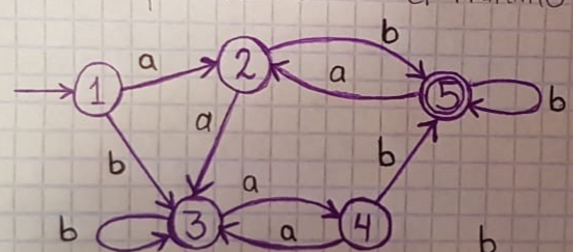
$(((a+b)a^*b)^*(b^*a)^*)^* \equiv$ (Aplicando distributividad a) $\equiv$

$((aa^*b + ba^*b)^*(b^*a)^*)^* \equiv$ (Por la propiedad 7.3 de la cerradura de Kleene) $\equiv$

$(aa^*b + ba^*b + b^*a)^*$ ∎

6) Para cada uno de los siguentes AFD, encuentre su AFD equivalente con el mínimo número de estados:

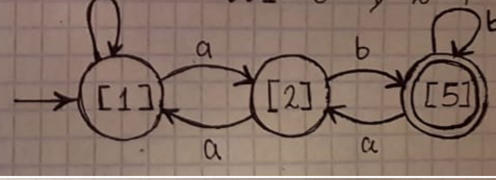
a)



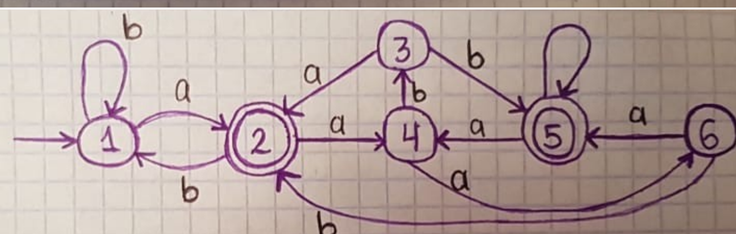
i)
ii)
iii)

	1	2	3	4
2	✓			
3		✓		
4	✓		✓	
5	✓	✓	✓	✓

$\therefore 1 \approx 3$ y $2 \approx 4$



b)



i)
ii)
iii)

	1	2	3	4	5
2	✓				
3	✓	✓			
4	✓	✓	✓		
5	✓	✓	✓	✓	
6	✓	✓	✓	✓	✓