

# Relatório MEF - Prática Computacional

Maria Fernanda Couri Biazollo - 202265505B

Disciplina: Introdução ao Método dos Elementos Finitos (MAC008)  
Trabalho Prático 01: Análise de Pórtico Plano pelo MEF

UFJF

Dezembro 2025

# 1 Introdução e Objetivo

Este trabalho tem como objetivo realizar a análise estrutural estática de um pórtico plano em formato de "L" utilizando o Método dos Elementos Finitos (MEF). O problema proposto consiste em determinar os deslocamentos nodais e a configuração deformada da estrutura sob a ação de cargas concentradas e distribuídas.

A análise foi realizada através da implementação de um código computacional na linguagem **Python**, adaptando as rotinas matriciais clássicas do MEF (cálculo de rigidez local, matriz de rotação e montagem global) para solucionar o sistema de equações de equilíbrio  $[K]\{U\} = \{F\}$ .

Para verificar a convergência da solução numérica, o problema foi modelado com duas discretizações distintas:

- **Malha 1 (Grosseira):** Composta pelo número mínimo de elementos necessários para descrever a geometria (4 elementos).
- **Malha 2 (Refinada):** Refinamento da malha anterior, dividindo cada elemento pela metade (8 elementos).

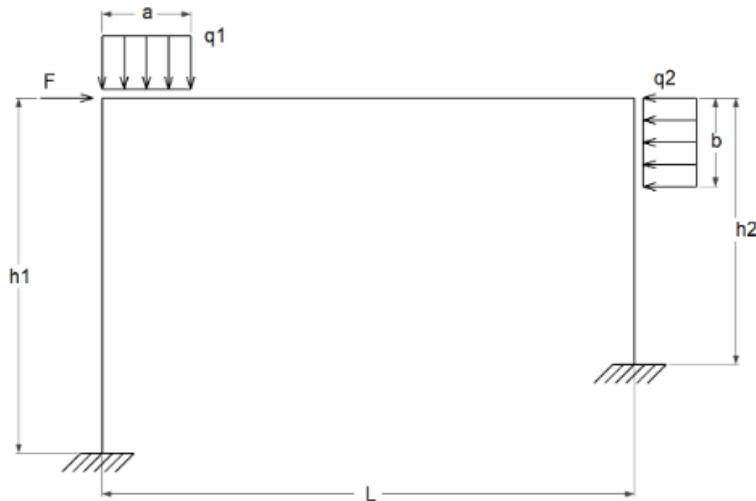


Figura 1: Estrutura do pórtico

## 2 Dados do Problema

Os parâmetros geométricos e de carregamento utilizados foram:

Parâmetro	Símbolo	Valor
Comprimento do Vão	$L$	6,0 m
Altura da Coluna Esquerda	$h_1$	4,0 m
Altura da Coluna Direita	$h_2$	3,0 m
Comprimento Carga $q_1$	$a$	1,0 m
Comprimento Carga $q_2$	$b$	3,0 m
Carga Distribuída Vertical	$q_1$	10,0 kN/m ( $\downarrow$ )
Carga Distribuída Horizontal	$q_2$	10,0 kN/m ( $\leftarrow$ )
Carga Concentrada	$F$	5,0 kN ( $\rightarrow$ )

Tabela 1: Parâmetros Geométricos e de Carregamento

### 2.1 Propriedades do Material e Seção

A estrutura é composta de Aço Estrutural com seção transversal circular maciça.

- **Módulo de Elasticidade ( $E$ ):** 200 GPa ( $200 \times 10^9$  Pa).
- **Raio da Seção ( $r$ ):** 3 cm (0,03 m).
- **Propriedades Calculadas:**

$$A = \pi \cdot r^2 \approx 2,827 \times 10^{-3} \text{ m}^2 \quad (1)$$

$$I = \frac{\pi \cdot r^4}{4} \approx 6,362 \times 10^{-7} \text{ m}^4 \quad (2)$$

## 3 Metodologia Computacional

O código foi desenvolvido em Python utilizando a biblioteca `numpy` para álgebra linear. A implementação seguiu a formulação direta da rigidez para elementos de pórtico plano com 3 graus de liberdade por nó ( $u, v, \theta$ ).

### 3.1 Matriz de Rigidez do Elemento

A matriz de rigidez local [ $k_{local}$ ] foi calculada considerando as contribuições axial ( $EA/L$ ) e de flexão ( $EI/L^3$ , etc.), e posteriormente rotacionada para o sistema global utilizando a matriz de transformação [ $R$ ]:

$$[k_{global}] = [R]^T [k_{local}] [R] \quad (3)$$

## 3.2 Tratamento das Cargas Distribuídas

Como o MEF matricial padrão aplica forças apenas nos nós, as cargas distribuídas  $q_1$  e  $q_2$  foram convertidas em **Forças Nodais Equivalentes**.

- Para a carga  $q_1$  (viga): Foram gerados momentos e forças cortantes verticais.
- Para a carga  $q_2$  (coluna): Foram gerados momentos e forças axiais/cortantes horizontais.

## 3.3 Solução do Sistema

O sistema global foi montado somando as contribuições de cada elemento. As condições de contorno (engastes na base das colunas esquerda e direita) foram aplicadas pelo método da redução de matriz, removendo as linhas e colunas correspondentes aos graus de liberdade restringidos.

# 4 Resultados e Discussão

A seguir, são apresentados os resultados para as duas malhas analisadas.

### 4.1 Malha 1: Discretização Grosseira (4 Elementos)

A primeira malha foi definida com nós apenas nos pontos de descontinuidade geométrica e de carga.

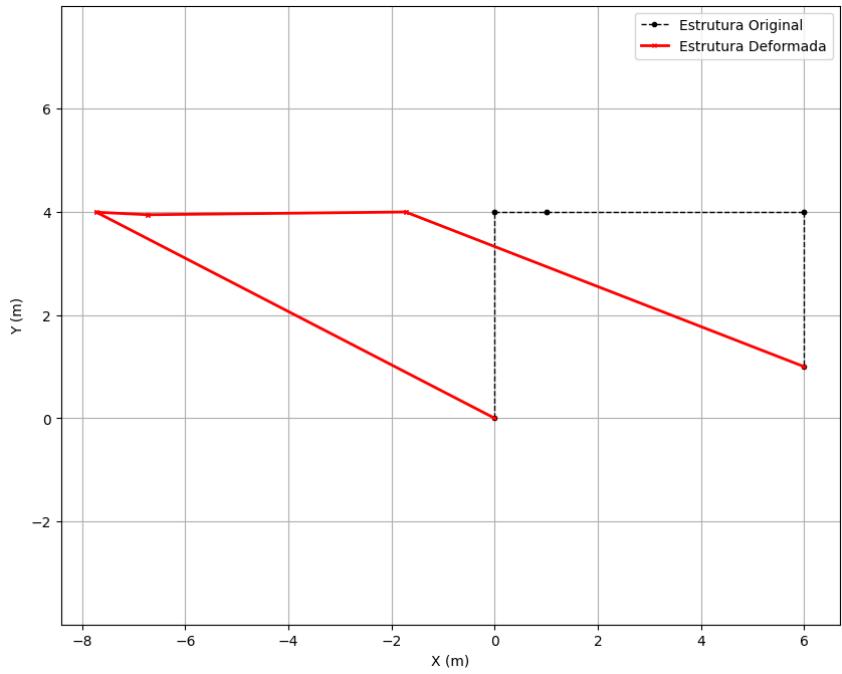


Figura 2: Configuração Original e Deformada - Malha 1.

### 4.2 Malha 2: Discretização Refinada (8 Elementos)

A segunda malha divide cada elemento anterior em dois, introduzindo nós intermediários.

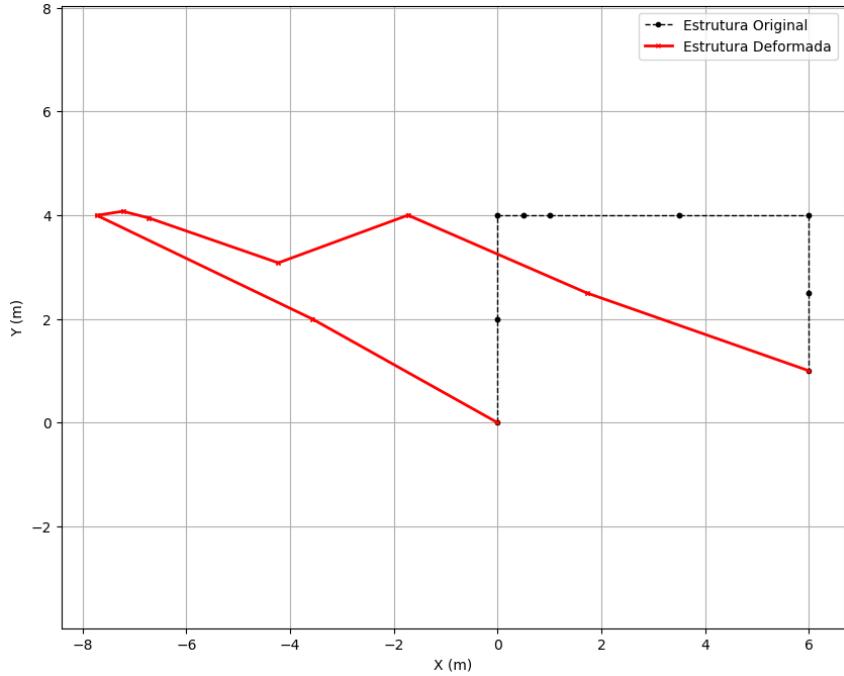


Figura 3: Configuração Original e Deformada - Malha 2.

### 4.3 Discussão dos Resultados

**1. Comportamento Físico:** A estrutura apresentou um deslocamento horizontal predominante para a **esquerda** (sentido negativo de X). Este comportamento é fisicamente consistente com o carregamento aplicado:

- A força concentrada  $F$  atua para a direita com magnitude de 5 kN.
- A carga distribuída  $q_2$  na coluna direita atua para a esquerda, gerando uma força resultante de  $10 \text{ kN/m} \times 3 \text{ m} = 30 \text{ kN}$ .

Como a força resultante para a esquerda (30 kN) é muito superior à força para a direita (5 kN), o pórtico se desloca globalmente para a esquerda, conforme observado nas Figuras 2 e 3.

**2. Comparação entre Malhas:** Ao comparar a Figura 2 (Malha 1) com a Figura 3 (Malha 2), observa-se uma diferença qualitativa importante na representação da deformada:

- Na **Malha 1**, a deformada dos membros sob carga distribuída (especialmente a coluna da direita) é representada por linhas retas conectando os nós. Isso ocorre porque as funções de forma do elemento de pórtico apenas interpolam os deslocamentos nodais, não desenhando a curva elástica exata entre eles na plotagem simples.
- Na **Malha 2**, a introdução de nós intermediários permitiu capturar a **curvatura** das barras. É possível visualizar claramente a flexão na coluna da direita e na viga superior esquerda.

Portanto, embora os deslocamentos nos nós principais tenham convergido rapidamente (apresentando valores numéricos muito próximos nas duas malhas), o refinamento da Malha 2 é essencial para uma representação visual correta da deformada e para a obtenção de esforços internos mais precisos ao longo do vão.

## 5 Conclusão

O trabalho atingiu seus objetivos ao implementar com sucesso a análise de pórtico plano via Python. A adaptação dos algoritmos permitiu resolver o problema específico proposto, demonstrando que a estrutura tende a se deslocar para a esquerda devido à predominância da carga distribuída lateral. A comparação entre as malhas evidenciou a importância do refinamento para a correta representação dos efeitos de flexão local em barras sob carga distribuída.