





Modelo 6 DOF

Dynamics



Modelo no lineal



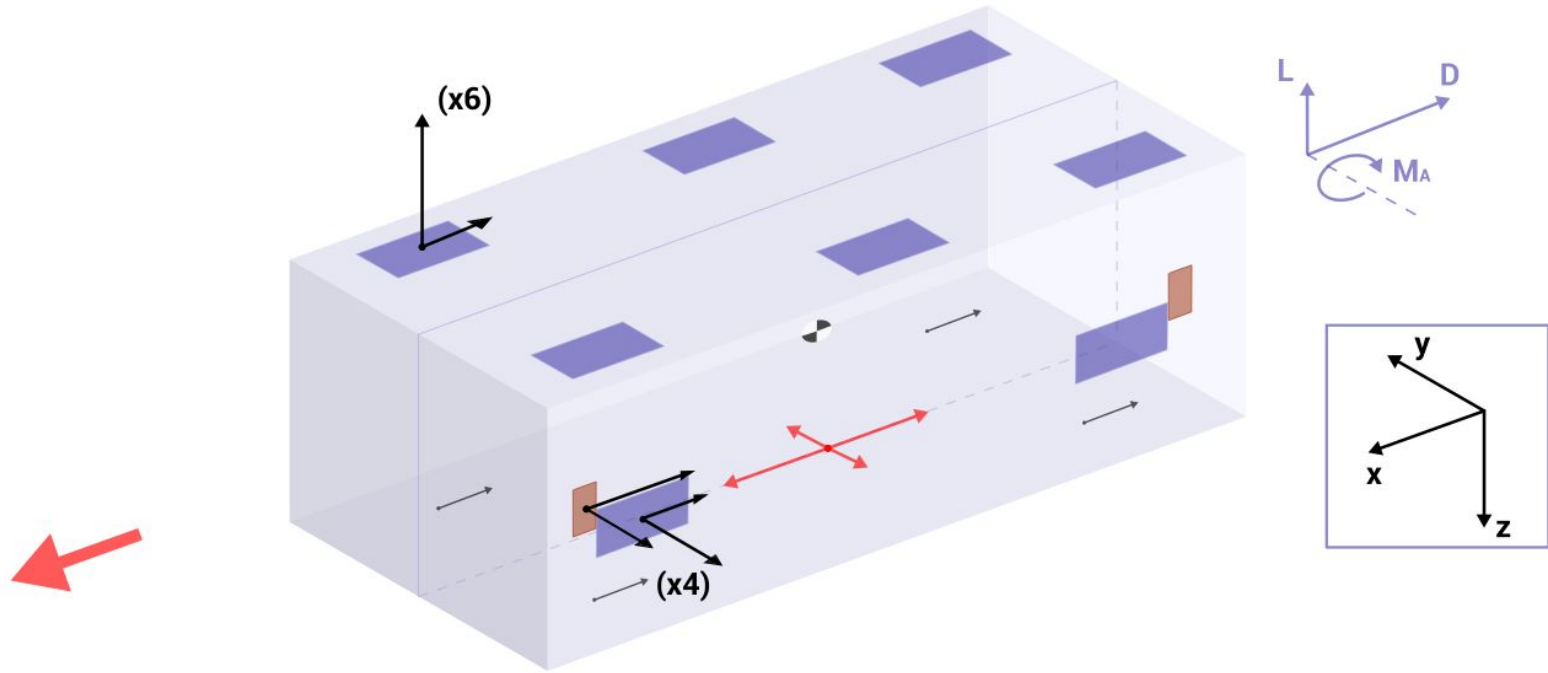
Referencias:

- [1] R. Blasco Giménez. *State Space Fundamentals* (2011). Accesible [here](#).
- [2] M. Carreres Talens. *Flight Mechanics II* (2020). Accesible [here](#).
- [3] V. Mehrmann. *Differential-Algebraic Equations. Analysis and Numerical Solution*. (2006). Accesible [here](#).

Info interesante:

- [1] Stevens, Brian, and Frank Lewis. *Aircraft Control and Simulation*. Hoboken, NJ: Second Edition, John Wiley & Sons (2003).
- [2] Zipfel, Peter H. *Modeling and Simulation of Aerospace Vehicle Dynamics*. Reston, Va: Second Edition, AIAA Education Series (2007).
- [3] Mathworks 6DOF (Euler Angles) block documentation (2006). Accesible [here](#).

1. Modelo simplificado - FBD y análisis de fuerzas





1. Modelo simplificado - FBD y análisis de fuerzas

- Modelado con respecto a **body-fixed axis aeronáuticos** (Para más info, [aquí](#))
 - Body-fixed: simplifica la gestión de fuerzas y momentos (proyecciones)
 - Ejes aeronáuticos: validación sencilla (mucha literatura)
- **Fuerzas** del modelo simplificado
 - x6 Levitación vertical (2 componentes)
 - x4 Levitación horizontal (2 componentes)
 - x4 Frenado neumático (2 componentes)
 - Tracción (\pm en función de acc/fren). (2 componentes)
 - x4 Rozamiento ruedas
 - Aerodinámicas (*lift*, *drag*, momento virtual)
 - Peso considerado aparte?
- **Rango de movimiento** máximo
 - $(x, y, z) = (20.000, 2, 11)$ mm
- **Notación**
 - Fuerzas totales: F_x F_y F_z
 - Momentos totales: M_L M_M M_N
 - Velocidad lineal: u v w
 - Velocidad angular: p q r
 - Posición absoluta: x y z
 - Orientación absoluta: ϕ θ ψ

2. Dinámica 6 DOF (12 eqs - 12 unk)



$$\dot{u} = \frac{F_X}{m} - g s \theta + r s - q w$$

$$\dot{v} = \frac{F_Y}{m} + g s \phi c \theta - r u + p w$$

$$\dot{w} = \frac{F_Z}{m} + g c \phi c \theta + q u - p c$$

$$\dot{p} = [I_{ZZ} M_L + I_{XZ} M_N - (I_{XZ}(I_{YY} - I_{XX} - I_{ZZ})p + (I_{XZ}^2 + I_{ZZ}(I_{ZZ} - I_{YY})r) q] [I_{XX} I_{ZZ} - I_{XZ}^2]^{-1}$$

$$\dot{q} = [M_M - (I_{XX} - I_{YY})pr - I_{XZ}(p^2 - r^2)] [I_{YY}]^{-1}$$

$$\dot{r} = [I_{XZ} M_L + I_{XX} M_N - (I_{XZ}(I_{YY} - I_{XX} - I_{ZZ})r + (I_{XZ}^2 + I_{XX}(I_{XX} - I_{YY})p) q] [I_{XX} I_{ZZ} - I_{XZ}^2]^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta c\varphi & s\phi s\theta c\varphi - c\phi s\varphi & c\phi s\theta c\varphi + s\phi s\varphi & 0 & 0 & 0 \\ c\theta s\varphi & s\phi s\theta s\varphi + c\phi c\varphi & c\phi s\theta s\varphi - s\phi c\varphi & 0 & 0 & 0 \\ -s\theta & s\phi c\theta & c\phi c\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & s\phi t\theta & c\phi t\theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c\phi & -s\phi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s\phi \cdot \sec(\theta) & c\phi \cdot \sec(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ p \\ q \\ r \end{bmatrix}$$

Nota:

$c x = \cos(x)$

$s x = \sin(x)$

2. Dinámica 6 DOF (12 eqs - 12 unk)



$$\begin{aligned}\dot{u} &= \frac{F_X}{m} - gs\theta + rs - qw \\ \dot{v} &= \frac{F_Y}{m} + gs\phi c\theta - ru + pw \\ \dot{w} &= \frac{F_Z}{m} + gc\phi c\theta + qu - pc\end{aligned}$$

Sumatorio de fuerzas

$$\begin{aligned}\dot{p} &= [I_{ZZ}M_L + I_{XZ}M_N - (I_{XZ}(I_{YY} - I_{XX} - I_{ZZ})p + (I_{XZ}^2 + I_{ZZ}(I_{ZZ} - I_{YY})r)q] [I_{XX}I_{ZZ} - I_{XZ}^2]^{-1} \\ \dot{q} &= [M_M - (I_{XX} - I_{YY})pr - I_{XZ}(p^2 - r^2)] [I_{YY}]^{-1} \\ \dot{r} &= [I_{XZ}M_L + I_{XX}M_N - (I_{XZ}(I_{YY} - I_{XX} - I_{ZZ})r + (I_{XZ}^2 + I_{XX}(I_{XX} - I_{YY})p)q] [I_{XX}I_{ZZ} - I_{XZ}^2]^{-1}\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta c\varphi & s\phi s\theta c\varphi - c\phi s\varphi & c\phi s\theta c\varphi + s\phi s\varphi & 0 & 0 & 0 \\ c\theta s\varphi & s\phi s\theta s\varphi + c\phi c\varphi & c\phi s\theta s\varphi - s\phi c\varphi & 0 & 0 & 0 \\ -s\theta & s\phi c\theta & c\phi c\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & s\phi t\theta & c\phi t\theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c\phi & -s\phi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s\phi \cdot \sec(\theta) & c\phi \cdot \sec(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ p \\ q \\ r \end{bmatrix}$$

Nota:

$CX = \cos(x)$

$SX = \sin(x)$

2. Dinámica 6 DOF (12 eqs - 12 unk)



$$\dot{u} = \frac{F_X}{m} - gs\theta + rs - qw$$

$$\dot{v} = \frac{F_Y}{m} + gs\phi c\theta - ru + pw$$

$$\dot{w} = \frac{F_Z}{m} + gc\phi c\theta + qu - pc$$

Sumatorio de momentos

$$\dot{p} = [I_{ZZ}M_L + I_{XZ}M_N - (I_{XZ}(I_{YY} - I_{XX} - I_{ZZ})p + (I_{XZ}^2 + I_{ZZ}(I_{ZZ} - I_{YY})r)q] [I_{XX}I_{ZZ} - I_{XZ}^2]^{-1}$$

$$\dot{q} = [M_M - (I_{XX} - I_{YY})pr - I_{XZ}(p^2 - r^2)] [I_{YY}]^{-1}$$

$$\dot{r} = [I_{XZ}M_L + I_{XX}M_N - (I_{XZ}(I_{YY} - I_{XX} - I_{ZZ})r + (I_{XZ}^2 + I_{XX}(I_{XX} - I_{YY})p)q] [I_{XX}I_{ZZ} - I_{XZ}^2]^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta c\varphi & s\phi s\theta c\varphi - c\phi s\varphi & c\phi s\theta c\varphi + s\phi s\varphi & 0 & 0 & 0 \\ c\theta s\varphi & s\phi s\theta s\varphi + c\phi c\varphi & c\phi s\theta s\varphi - s\phi c\varphi & 0 & 0 & 0 \\ -s\theta & s\phi c\theta & c\phi c\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & s\phi t\theta & c\phi t\theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c\phi & -s\phi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s\phi \cdot \sec(\theta) & c\phi \cdot \sec(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ p \\ q \\ r \end{bmatrix}$$

Nota:

$cx = \cos(x)$

$sx = \sin(x)$

2. Dinámica 6 DOF (12 eqs - 12 unk)



$$\dot{u} = \frac{F_X}{m} - g s \theta + r s - q w$$

$$\dot{v} = \frac{F_Y}{m} + g s \phi c \theta - r u + p w$$

$$\dot{w} = \frac{F_Z}{m} + g c \phi c \theta + q u - p c$$

**Proyección de coordenadas
BF - absolutas**

$$\dot{p} = [I_{ZZ}M_L + I_{XZ}M_N - (I_{XZ}(I_{YY} - I_{XX} - I_{ZZ})p + (I_{XZ}^2 + I_{ZZ}(I_{ZZ} - I_{YY})r)q] [I_{XX}I_{ZZ} - I_{XZ}^2]^{-1}$$

$$\dot{q} = [M_M - (I_{XX} - I_{YY})pr - I_{XZ}(p^2 - r^2)] [I_{YY}]^{-1}$$

$$\dot{r} = [I_{XZ}M_L + I_{XX}M_N - (I_{XZ}(I_{YY} - I_{XX} - I_{ZZ})r + (I_{XZ}^2 + I_{XX}(I_{XX} - I_{YY})p)q] [I_{XX}I_{ZZ} - I_{XZ}^2]^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta c\varphi & s\phi s\theta c\varphi - c\phi s\varphi & c\phi s\theta c\varphi + s\phi s\varphi & 0 & 0 & 0 \\ c\theta s\varphi & s\phi s\theta s\varphi + c\phi c\varphi & c\phi s\theta s\varphi - s\phi c\varphi & 0 & 0 & 0 \\ -s\theta & s\phi c\theta & c\phi c\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & s\phi t\theta & c\phi t\theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c\phi & -s\phi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s\phi \cdot \sec(\theta) & c\phi \cdot \sec(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ p \\ q \\ r \end{bmatrix}$$

Nota:

$c x = \cos(x)$

$s x = \sin(x)$

3. Fuerzas y momentos



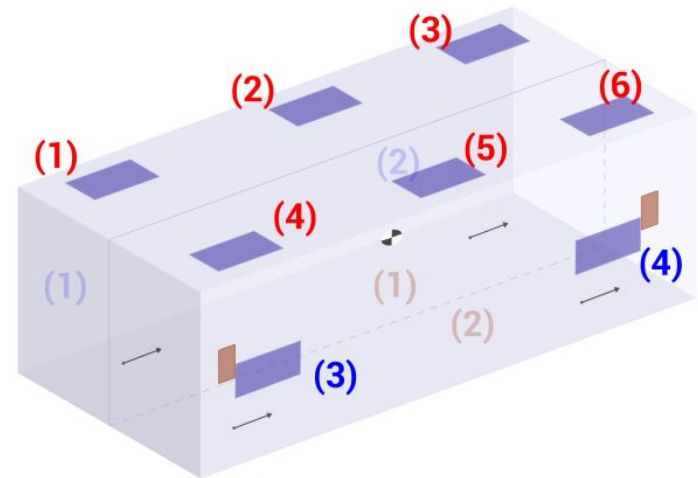
- **Notas previas** (nomenclatura)
 - Levitación: *LEV*
 - Guiado: *G*
 - LIM: *LIM*
 - Ruedas: *CF*
 - Freno neumático: *PN*

$$F_{\text{test}}^{1-N} = \sum_{i=1}^N F_{\text{test}}^i \quad \text{i.e.} \quad F_{L,Z}^{1-6} = F_{L,Z}^1 + F_{L,Z}^2 + \dots + F_{L,Z}^6 \quad (\text{son índices, no potencias})$$

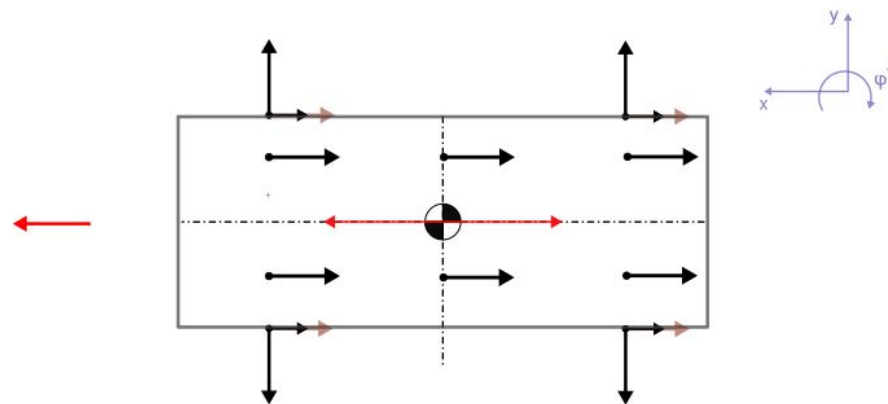
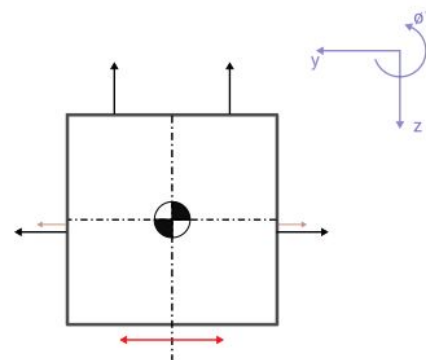
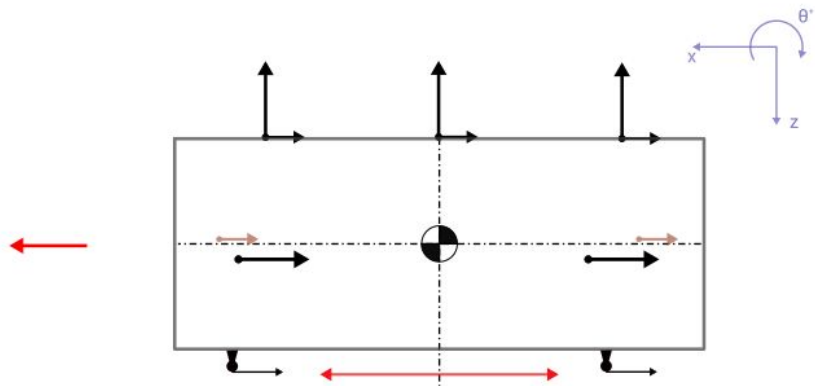
$$F_{\text{test}}^{m\&n} = F_{\text{test}}^m + F_{\text{test}}^n$$

$$\mathbf{F}_{\text{test}} = \begin{bmatrix} F_{\text{test},X} \\ F_{\text{test},Y} \\ F_{\text{test},Z} \end{bmatrix}$$

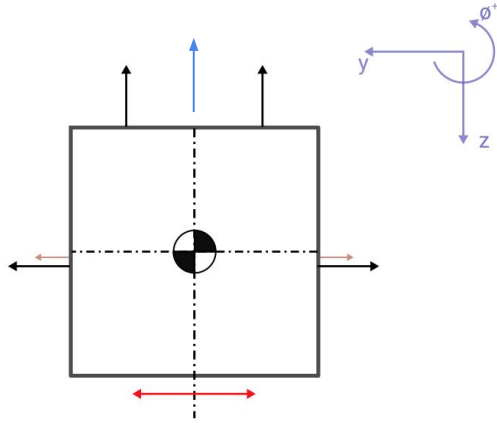
- **Índices:** (ver imagen) →



3. Fuerzas y momentos (hipótesis)



3. Fuerzas y momentos



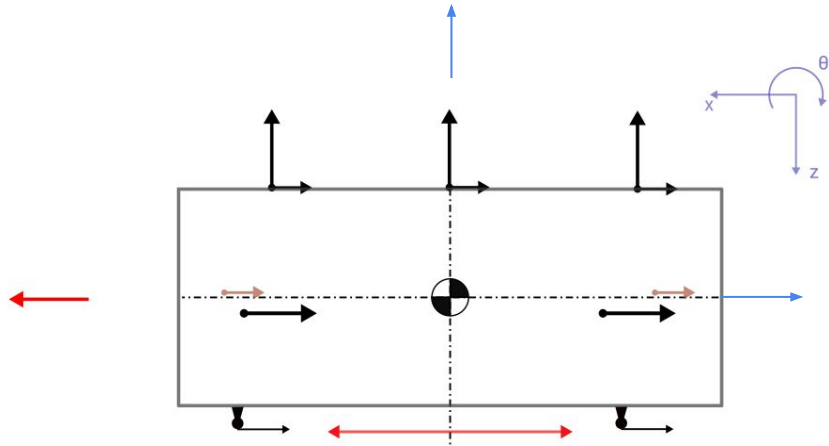
(sentido: hacia fuera de la pantalla)

$$F_Z = -F_{LEV,Z}^{1-6} - L$$

$$F_Y = (F_{G,Y}^{1-2} - F_{G,Y}^{3-4}) + (F_{LIM,Y}^1 - F_{LIM,Y}^2) + (F_{PN,Y}^{1-2} - F_{PN,Y}^{3-4})$$

$$M_L = y_{LEV}(F_{LEV,Z}^{1-3} - F_{LEV,Z}^{4-6}) + z_G(F_{G,Y}^{1-2} - F_{G,Y}^{3-4}) + z_{PN}(F_{PN,Y}^{1-2} - F_{PN,Y}^{3-4}) + z_{LIM}(F_{LIM,Y}^1 - F_{LIM,Y}^2)$$

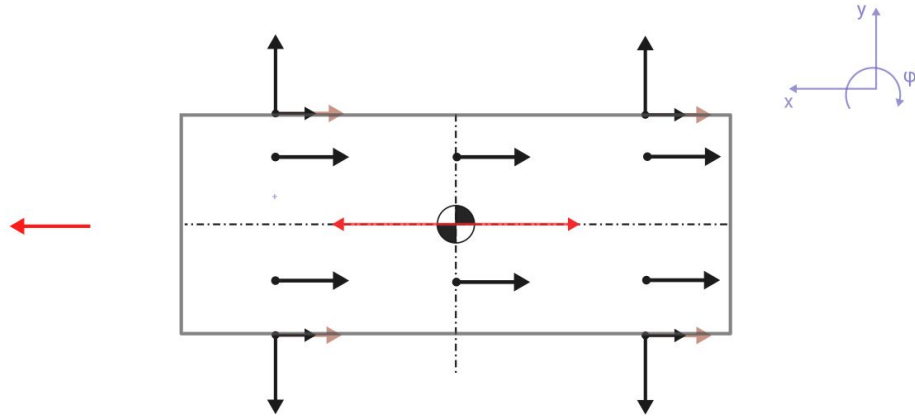
3. Fuerzas y momentos



$$F_X = \pm F_{LIM,X} - (F_{LEV,X}^{1-6} + F_{G,X}^{1-4} + F_{PN,X}^{1-4} + F_{CF}^{1-4} + D)$$

$$M_M = z_{LIM}(\pm F_{LIM,X}) - z_{CF}(F_{CF}^{1-4}) - z_G(F_{G,X}^{1-4}) + z_{PN}(F_{PN,X}^{1-4}) + x_{LEV,1}(F_{LEV,Z}^{1&4}) - x_{LEV,3}(F_{LEV,Z}^{3&6}) + z_{LEV}(F_{LEV,X}^{1-6}) + M_A$$

3. Fuerzas y momentos



$$M_N = y_G(F_{G,X}^{1-2} - F_{G,X}^{3-4}) + y_{PN}(F_{PN,X}^{1-2} - F_{PN,X}^{3-4}) + x_G(F_{G,Y}^{1\&4} - F_{G,Y}^{2\&3}) + y_{LEV}(F_{LEV,X}^{1-3} - F_{LEV,X}^{4-6})$$

3. Fuerzas y momentos



$$\dot{u} = \frac{F_X}{m} - g s \theta + r s - q w$$

Input del bloque 6DOF (Euler)

$$\dot{v} = \frac{F_Y}{m} + g s \phi c \theta - r u + p w$$

$$\dot{w} = \frac{F_Z}{m} + g c \phi c \theta + q u - p c$$

$$\dot{p} = [I_{ZZ} M_L + I_{XZ} M_N - (I_{XZ}(I_{YY} - I_{XX} - I_{ZZ})p + (I_{XZ}^2 + I_{ZZ}(I_{ZZ} - I_{YY})r) q] [I_{XX} I_{ZZ} - I_{XZ}^2]^{-1}$$

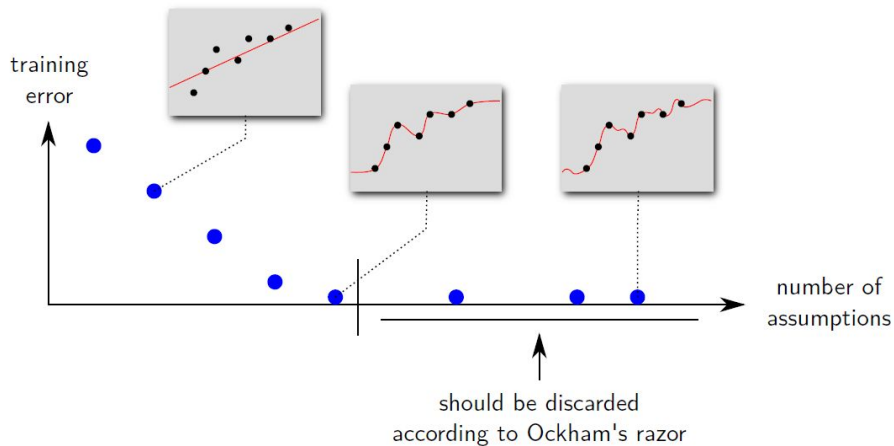
$$\dot{q} = [M_M - (I_{XX} - I_{YY})pr - I_{XZ}(p^2 - r^2)] [I_{YY}]^{-1}$$

$$\dot{r} = [I_{XZ} M_L + I_{XX} M_N - (I_{XZ}(I_{YY} - I_{XX} - I_{ZZ})r + (I_{XZ}^2 + I_{XX}(I_{XX} - I_{YY})p) q] [I_{XX} I_{ZZ} - I_{XZ}^2]^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta c\varphi & s\phi s\theta c\varphi - c\phi s\varphi & c\phi s\theta c\varphi + s\phi s\varphi & 0 & 0 & 0 \\ c\theta s\varphi & s\phi s\theta s\varphi + c\phi c\varphi & c\phi s\theta s\varphi - s\phi c\varphi & 0 & 0 & 0 \\ -s\theta & s\phi c\theta & c\phi c\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & s\phi t\theta & c\phi t\theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c\phi & -s\phi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s\phi \cdot \sec(\theta) & c\phi \cdot \sec(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ p \\ q \\ r \end{bmatrix}$$

4. Modelado de las fuerzas

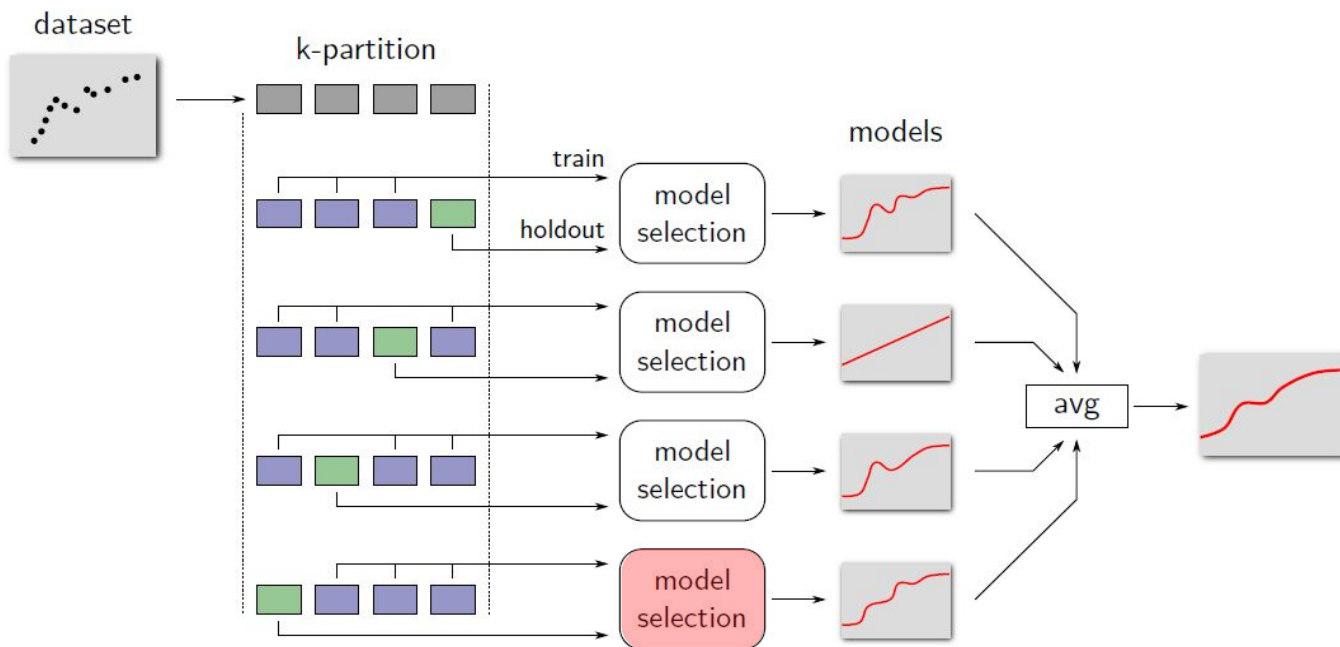
- Estrategia de modelado basada en la [Navaja de Ockham](#) (1287 - 1347):
 - «*Entia non sunt multiplicanda praeter necessitatem*»
 - Interpretación: Si dos modelos predicen correctamente los datos, el que asume menos hipótesis debe preferirse, ya que es más probable que tenga menos error de generalización (y, además, la simplicidad es deseable en sí misma).



- Por ello, se preferirán ajustes polinómicos a otros más complejos como *splines*, cuantificando la *complejidad* como el número de parámetros a estimar (asumir) en el modelo.

4. Modelado de las fuerzas

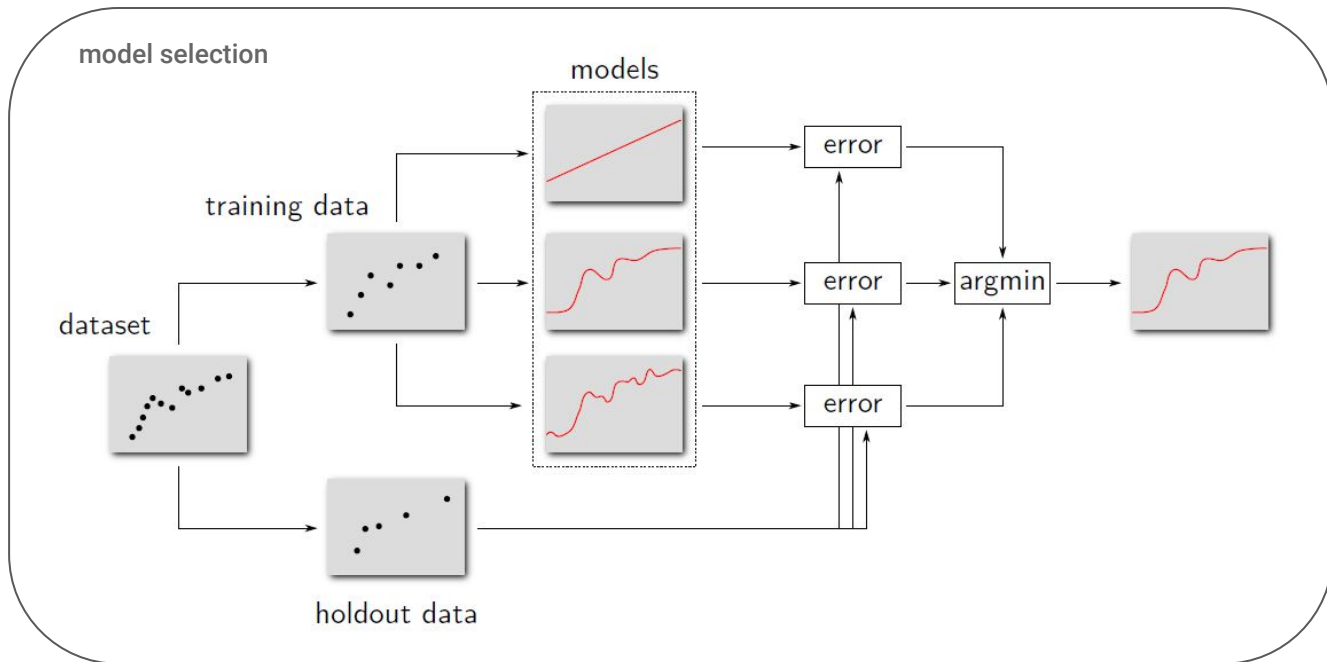
- En primera aproximación, y con los datos actuales a 15.12.2021, se aplicará directamente una regresión polinómica de grado 3, mientras que en el futuro se mejorarán estos modelos mediante **validación cruzada (k-fold)**:



(ver siguiente diapo)

4. Modelado de las fuerzas

- En primera aproximación, y con los datos actuales, se aplicará directamente una regresión polinómica de grado 3, mientras que en el futuro se mejorarán estos modelos mediante **validación cruzada (k-fold)**.



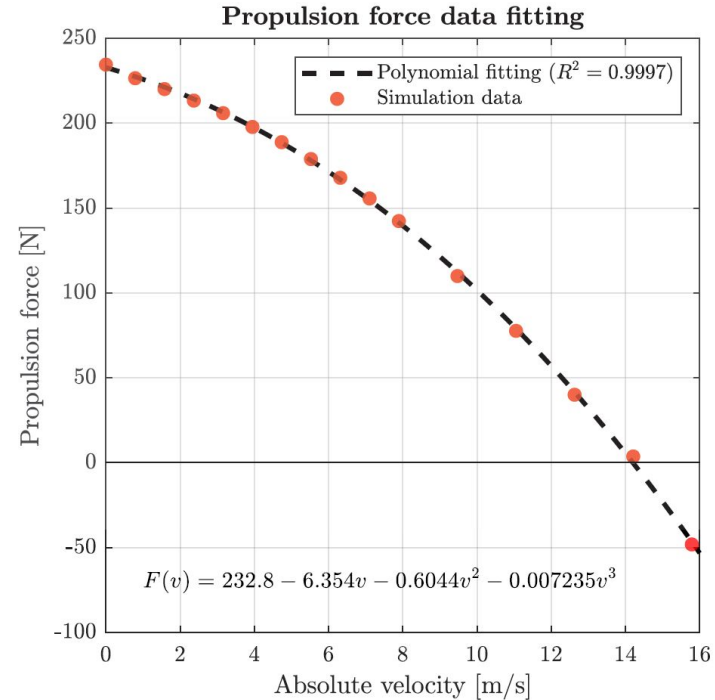
4. Modelado de las fuerzas - primera aproximación (polinomio #3)



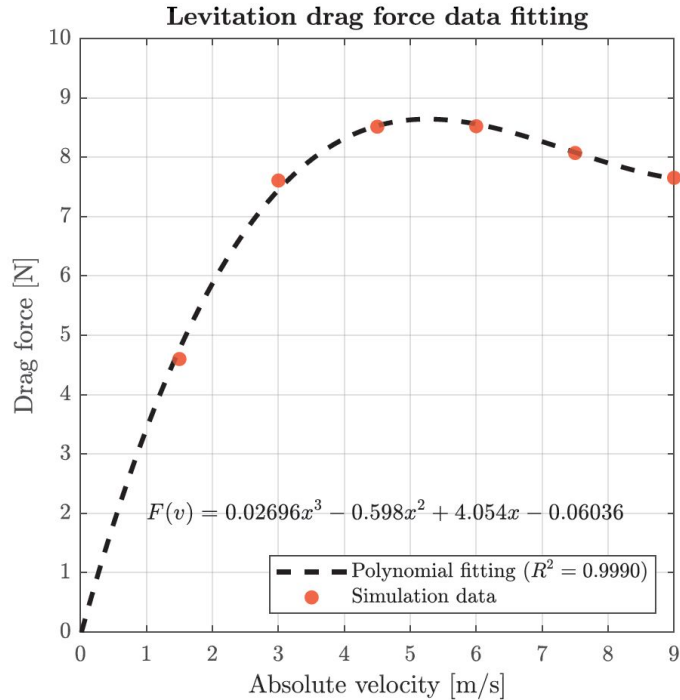
- **Propulsión** (aceleración y frenado)
 - Función de la velocidad.
 - Su bloque requerirá realimentación de la velocidad, tal que

$$F_{LIM}^{i+1} = f(v(t_i))$$

- **Propulsión** (transversales)
 - Sin datos (@Javi ayuda)



4. Modelado de las fuerzas - primera aproximación (polinomio #3)



- **Levitación HEMS** (*drag*)
 - Función de la velocidad. En la figura, se representa el *drag* por unidad.
 - Su bloque requerirá realimentación de la velocidad, tal que

$$F_{LIM}^{i+1} = f(v(t_i))$$

- **Levitación EMS** (*drag*)
 - Sin datos (@Javi ayuda)



4. Modelado de las fuerzas - primera aproximación (polinomio #3)

- **Levitación (HEMS)**

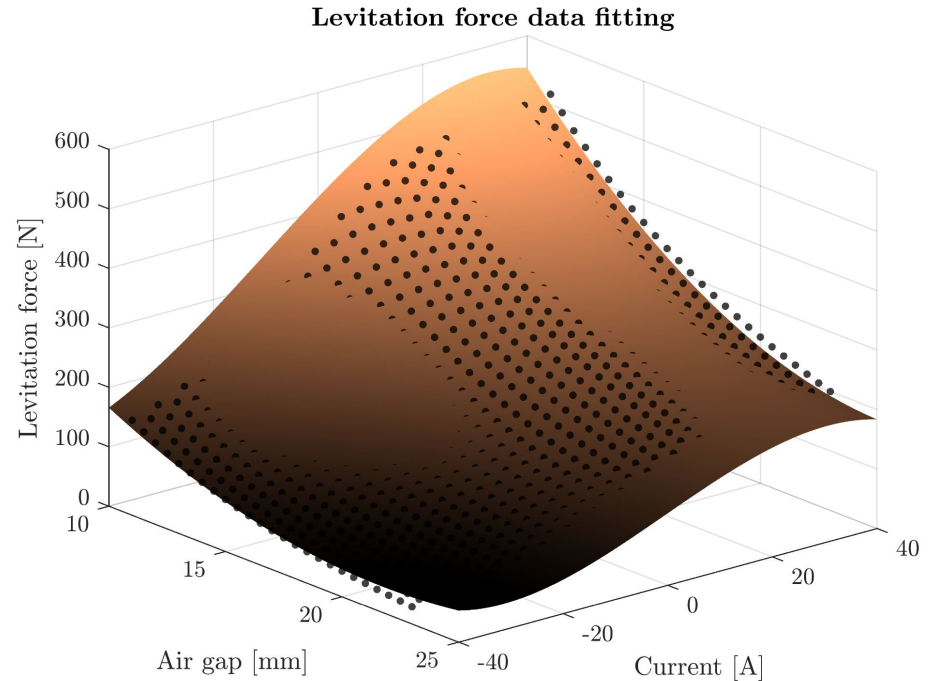
- Mapa completo en función de las variables observables/controlables (*air gap*) y las variables de control (*corriente*)
- Su bloque requerirá realimentación del *air gap*.

$$F(x, y) = p_{00} + p_{10}x + p_{01}y + p_{20}x^2 + p_{11}xy + p_{02}y^2 + p_{21}x^2y + p_{12}xy^2 + p_{03}y^3,$$

donde

$$\begin{aligned} p_{00} &= 926.8 & (917.4, 936.1) \\ p_{10} &= -62.3 & (-63.41, -61.19) \\ p_{01} &= 10.82 & (10.44, 11.21) \\ p_{20} &= 1.203 & (1.17, 1.235) \\ p_{11} &= -0.4806 & (-0.527, -0.4341) \\ p_{02} &= -0.06986 & (-0.07337, -0.06635) \\ p_{21} &= 0.007783 & (0.006423, 0.009144) \\ p_{12} &= 0.002722 & (0.002519, 0.002924) \\ p_{03} &= -0.001275 & (-0.00131, -0.001241) \end{aligned}$$

Los valores entre paréntesis indican el intervalo de confianza del 95%,
x = air gap, y = corriente





4. Modelado de las fuerzas - primera aproximación (polinomio #3)

- **Levitación (EMS)**

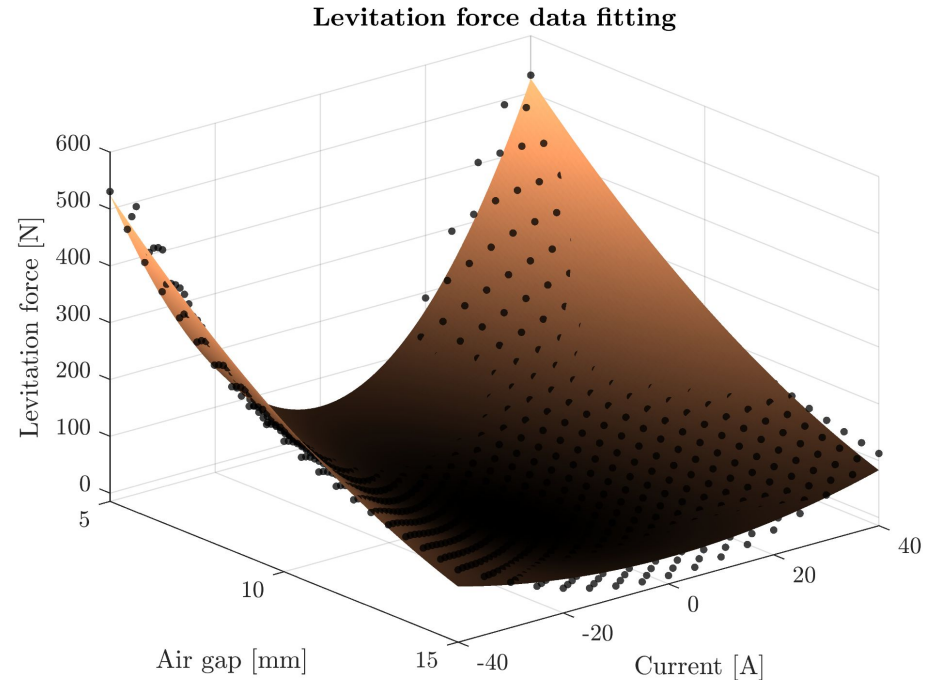
- Mapa completo en función de las variables observables/controlables (*air gap*) y las variables de control (*corriente*)
- Su bloque requerirá realimentación del *air gap*.

$$F(x, y) = p_{00} + p_{10}x + p_{01}y + p_{20}x^2 + p_{11}xy + p_{02}y^2 + p_{21}x^2y + p_{12}xy^2 + p_{03}y^3,$$

donde

$$\begin{aligned} p_{00} &= 225.1 \quad (213.1, 237.1) \\ p_{10} &= -46.06 \quad (-48.5, -43.62) \\ p_{01} &= 0 \\ p_{20} &= 2.212 \quad (2.092, 2.332) \\ p_{11} &= 0 \\ p_{02} &= 0.4289 \quad (0.4224, 0.4354) \\ p_{21} &= 0 \\ p_{12} &= -0.02646 \quad (-0.02709, -0.02584) \\ p_{03} &= 0 \end{aligned}$$

Los valores entre paréntesis indican el intervalo de confianza del 95%,
x = air gap, y = corriente

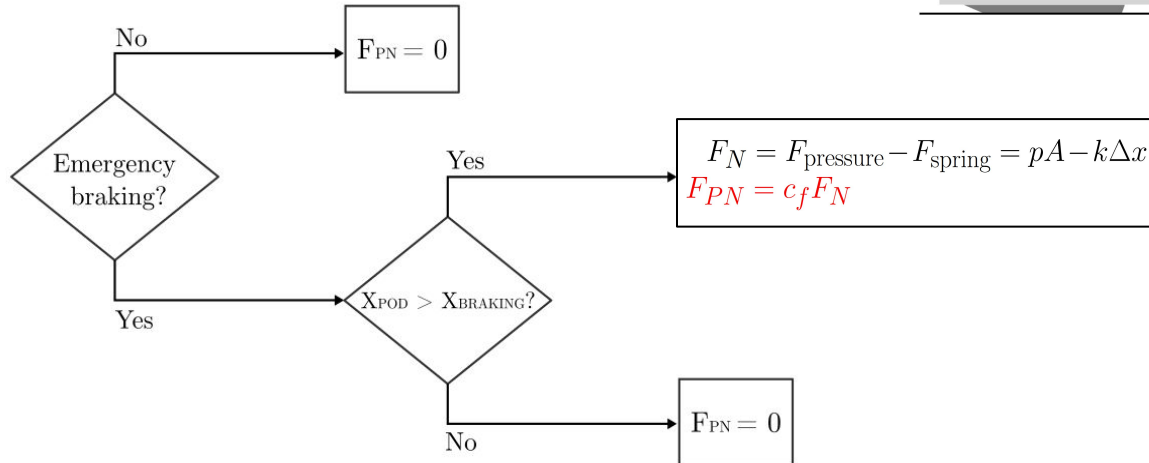
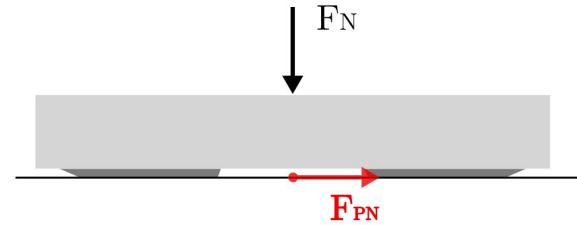


4. Modelado de las fuerzas



- **Brakes (Pneumatics)**

- Hipótesis del modelo (en primera aproximación):
 - i. Fuerza constante
 - ii. Actuación instantánea (tiempo de actuación nulo) → Ergo todos los actuadores funcionales actúan a la vez
 - iii. Duda: ¿frenamos siempre con pneumatics o es solo un freno de emergencia?



4. Modelado de las fuerzas

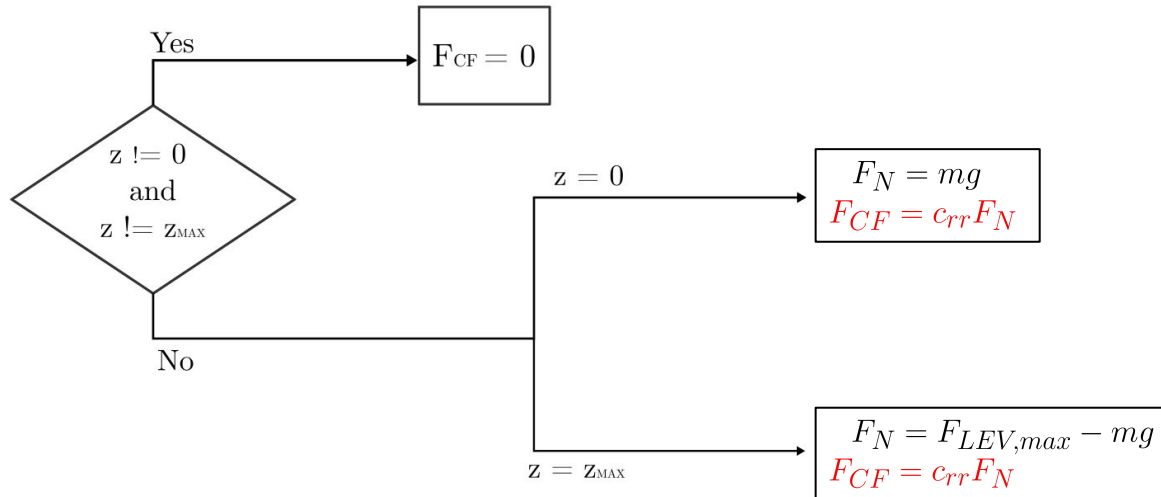
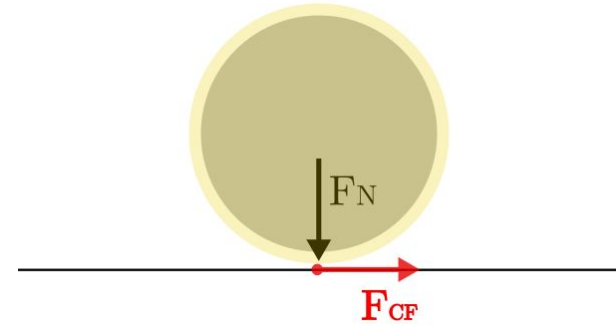


- **Ruedas (Rolling friction)**

- Hipótesis del modelo (en primera aproximación):

- i. Fuerza constante

- $F_{LEV,MAX}$ - Peso (superiores)
 - Peso (inferiores)





4. Modelado de las fuerzas

- **Aerodinámicas**

- Lift ≈ 0

- Drag $\rightarrow D = \frac{1}{2}\rho S v^2 C_D$
necesario CFD

- Moment $\rightarrow M_A = D(z_{\text{COG}} - z_{\text{AC}})$

- Hasta que se desarrolle el CFD, se asumen como **nulas**

5. Parte algebraica: posiciones y ángulos en función de los *air gaps*



6. Approaches



- Bloque 6DOF (Euler angles) de Simulink
 - Se aplicará por escalabilidad dentro del equipo y porque es una solución barata (en cuanto a tiempo)
 - Report [aquí](#).
 - Literatura [aquí](#).
 - Importante:

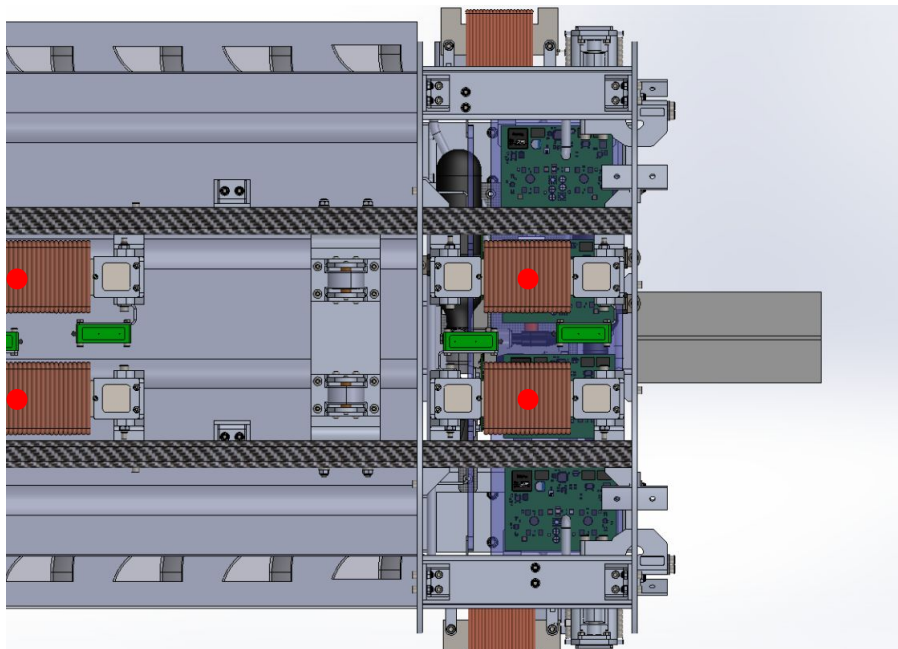
Limitations

The block assumes that the applied forces act at the center of gravity of the body, and that the mass and inertia are constant.

- Resolución directa de la Ecuación Diferencial Algebraica (DAE)
 - Referencia: [V. Mehrmann. Differential-Algebraic Equations. Analysis and Numerical Solution. \(2006\).](#)
 - Aunque se incluirá en el futuro un estudio de pros y contras más detallado, este approach permitirá una mejor solución (ya que podremos implementar métodos numéricos más avanzados), más controlada (ya que la resolución de la parte algebraica se incluirá en el método numérico y no en el modelo) y computacionalmente más eficiente.

Z. Cosas que no quiero que se me olviden

Punto de aplicación F_{LEV}



Puntos de aplicación F_G y F_{PN}

