| | |
|---|---|
| Mata Kuliah | : Matematika Terapan 1 (Teori) |
| Kode Mata Kuliah | : KKTI4153 |
| Waktu | : Kamis (07.00 – 08.40) |
| Jumlah SKS | : 3 SKS |
| Nama Dosen | : Eddy Bambang |
| Minggu ke | : 6 (Enam) |
| Tanggal | : 22-10-2015 |
| Judul Materi | : Limit Fungsi |

**Ketunggalan limit fungsi**

Jika $\lim_{x\to a} f(x) = L$ dan $\lim_{x\to a} f(x) = M$ maka $L = M$

**Operasi pada limit fungsi**

Misalkan $f$ dan $g$ adalah fungsi-fungsi yang terdefinisi pada selang buka *I* yang memuat *a* kecuali mungkin pada *a* sendiri dan misalkan limit *f* dan *g* di *a* ada, jika $\lim_{x\to a} f(x) = M$ dan $\lim_{x\to a} g(x) = N$, maka:

(i) $\lim_{x\to a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = M + N$

(ii) $\lim_{x\to a} (f(x) - g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x) = M - N$

(iii) $\lim_{x\to a} (f(x)g(x)) = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)\left(\lim_{x\to a} g(x)\right) = MN$

(iv) $\lim_{x\to a} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \dfrac{M}{N}$, *asalkan* $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$

(v) $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)} = \sqrt[n]{M}$, dengan *n* bilangan positif dan $\lim_{x\to a} f(x) > 0$

(vi) Teorema akibat $\lim_{x\to a} (kf(x)) = k \lim_{x\to a} f(x) = kM$ $k$ = konstanta.

**TURUNAN SEPIHAK**

Turunan kiri dari fungsi *f* di titik *c*, didefinisikan sebagai :

$$f_-'(c) = \lim_{x\to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

Turunan kanan dari fungsi *f* di titik *c,* didefinisikan sebagai :

$$f_+'(c) = \lim_{x\to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

bila limit ini ada.

Fungsi *f* dikatakan mempunyai turunan(diferensiabel) di *c* atau ada, jika

sebaliknya *f* dikatakan tidak mempunyai turunan di *c*.

$$f'_-(c) = f'_+(c) \quad \text{dan} \quad f'(c) = f'_-(c) = f'_+(c)$$

sebaliknya *f* dikatakan tidak mempunyai turunan di *c*.

Contoh : Diketahui $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 3 & , x < 1 \\ 1 + 2\sqrt{x} & , x \geq 1 \end{cases}$

Selidiki apakah *f*(*x*) diferensiabel di *x*=1 . Jika ya, tentukan $f'(1)$

JAWAB :

a. $$f'_-(1) = \lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - x + 3 - (1 + 2\sqrt{1})}{x - 1}$$
$$= \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - x}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x(x-1)}{x - 1} = 1$$

b. $$f'_+(1) = \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{1 + 2\sqrt{x} - (1 + 2\sqrt{1})}{x - 1}$$
$$= \lim_{x \to 1} \frac{2\sqrt{x} - 2}{x - 1} = 2 \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = 1$$

Jadi, *f* diferensiabel di *x*=1 dan $f'(1) = 1$.

Jika *f* diferensiabel di *c* ➔ *f* kontinu di *c*.

**Bukti :** Yang perlu ditunjukkan adalah $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

Perhatikan bahwa $f(x) = f(c) + \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.(x - c) \quad , \quad x \neq c$

Maka $$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} \left[ f(c) + \frac{f(x) - f(c)}{x - c}(x - c) \right]$$
$$= \lim_{x \to c} f(c) + \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} . \lim_{x \to c}(x - c)$$
$$= f(c) + f'(c).0 = f(c). \quad \text{Terbukti.}$$

Sifat tersebut tidak berlaku sebaliknya. Artinya, Jika *f* kontinu di *c,* maka belum tentu *f* diferensiabel di *c*. Hal ini, ditunjukkan oleh contoh berikut.

**Contoh** Tunjukkan bahwa *f* ( *x* ) = | *x* | kontinu di *x* = 0 tetapi tidak diferensiabel di *x* = 0

JAWAB :

Akan ditunjukkan bahwa f(x)=|x| kontinu di x=0

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x \ , & x \geq 0 \\ -x \ , & x < 0 \end{cases}$$

f(0) = 0

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} x = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} (-x) = 0\end{array}\right\} \lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$$

**f kontinu di x=0**

Selidiki apakah f terdiferensialkan di x=0

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{-x-0}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-x}{x} = -1$$

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x-0}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1.$$

Karena $-1 = f'_-(0) \neq f'_+(0) = 1$

**maka *f* tidak diferensiabel di 0.**

**SOAL LATIHAN**

Tentukan nilai *a* dan *b* agar fungsi berikut diferensiabel di titik yang diberikan.

1. $f(x) = \begin{cases} a\sqrt{x+3} & ;0 \le x < 1 \\ x^2 - bx & ; x \ge 1 \end{cases}$ , $x$ = 1

2. $f(x) = \begin{cases} ax - b & ;\ x < 2 \\ 2x^2 - 1 & ;\ x \ge 2 \end{cases}$ , $x$ = 2