UNIVERSITAS SULTAN AGENG TIRTAYASA

UNTIRTA Jawara

Jujur Adil Wibawa Amanah Religius Akuntabel

Analisis Deret Waktu

#13 Meeting

Pendugaan Parameter

Ferdian Bangkit Wijaya, S.Stat., M.Si
NIP. 199005202024061001

Metode Momen

Metode Momen adalah teknik estimasi parameter dengan prinsip menyamakan momen sampel (statistik yang dihitung dari tabel data) dengan momen teoretis (rumus matematika model).
Tujuan akhir kita adalah mendapatkan persamaan matematis:

$$Y_t = \delta + \phi Y_{t-1} + \cdots + a_t - \theta a_{t-1} \ldots$$

Pendugaan AR(1)

Model Umum:

$$Y_t = \delta + \phi_1 Y_{t-1} + a_t$$

Parameter yang Dicari: ϕ_1 dan δ Konstanta).

Data Sampel

$$Y_t = [10, 12, 11, 13, 14]$$

$$\bar{Y} = \frac{10 + 12 + 11 + 13 + 14}{5} = \mathbf{12}$$

Waktu (t)	Data Asli (Yt)	Deviasi (yt) (Yt−Ybar)	Kuadrat Deviasi (yt2)	Lag 1 Deviasi (yt−1)	Perkalian Lag (yt×yt−1)
1	10	-2	4	-	-
2	12	0	0	-2	0
3	11	-1	1	0	0
4	13	1	1	-1	-1
5	14	2	4	1	2
Total		**0**	**10**		**1**

Pendugaan AR(1)

UNIVERSITAS SULTAN AGENG TIRTAYASA

UNTIRTA Jawara

Jujur Adil Wibawa Amanah Religius Akuntabel

Perhitungan Parameter

Autokorelasi Lag 1 (r_1)

$$r_1 = \frac{\sum(y_t \times y_{t-1})}{\sum y_t^2} = \frac{1}{10} = \mathbf{0.1}$$

Estimasi ϕ_1

$$\hat{\phi}_1 = r_1 = \mathbf{0.1}$$

Estimasi Konstanta (δ)

$$\hat{\delta} = \bar{Y}(1 - \hat{\phi}_1) = 12(1 - 0.1) = 12(0.9) = \mathbf{10.8}$$

Model Akhir

$$Y_t = 10.8 + 0.1Y_{t-1} + a_t$$

AR (2), AR (3) dan seterusnya, lakukan dengan iteratif numerik di software !

Pendugaan MA(1)

Model Umum:

$$Y_t = \mu + a_t - \theta_1 a_{t-1}$$

Parameter yang Dicari: μ dan θ_1

Data Sampel

$$Y_t = [10, 12, 11, 13, 14]$$

$$\bar{Y} = \frac{10 + 12 + 11 + 13 + 14}{5} = \mathbf{12}$$

Waktu (t)	Data Asli (Yt)	Deviasi (yt) (Yt−Ybar)	Kuadrat Deviasi (yt2)	Lag 1 Deviasi (yt−1)	Perkalian Lag (yt×yt−1)
1	10	-2	4	-	-
2	12	0	0	-2	0
3	11	-1	1	0	0
4	13	1	1	-1	-1
5	14	2	4	1	2
Total		**0**	**10**		**1**

Pendugaan MA(1)

Perhitungan Parameter

$$r_1 = \frac{-\hat{\theta}_1}{1+\hat{\theta}_1^2}$$

$$0.1(1+\hat{\theta}_1^2) = -\hat{\theta}_1$$

$$0.1\hat{\theta}_1^2 + \hat{\theta}_1 + 0.1 = 0$$

$$\hat{\theta}_1 = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4(0.1)(0.1)}}{2(0.1)} \approx \frac{-1 \pm 0.98}{0.2}$$

syarat invertibilitas ($|\theta| < 1$)

$$\hat{\theta}_1 \approx \frac{-0.02}{0.2} = \mathbf{-0.1}$$

Estimasi Mean (μ)

$$\hat{\mu} = \bar{Y} = \mathbf{12}$$

Model Akhir

$$Y_t = 12 + a_t - (-0.1)a_{t-1}$$

$$Y_t = 12 + a_t + 0.1a_{t-1}$$

MA (2), MA (3) dan seterusnya, lakukan dengan iteratif numerik di software !

Pendugaan ARIMA(1,1,1)

Model Umum:

$$(1-\phi_1 B)(1-B)Y_t = \delta + (1-\theta_1 B)a_t$$

Data harus distasionerkan dahulu menjadi W(t)

Data Sampel

$Y_t = [10, 12, 15, 17, 20, 22]$ $W_t = Y_t - Y_{t-1}$: $W_t = [2, 3, 2, 3, 2]$ Rata-rata W_t ($\bar{W}$) = **2.4**

t	Wt	Deviasi (wt) (Wt−Wbar)	Kuadrat (wt2)	Lag 1 (wt−1)	Perkalian Lag 1 (wtwt−1)	Lag 2 (wt−2)	Perkalian Lag 2 (wtwt−2)
1	2	-0.4	0.16	-	-	-	-
2	3	0.6	0.36	-0.4	-0.24	-	-
3	2	-0.4	0.16	0.6	-0.24	-0.4	0.16
4	3	0.6	0.36	-0.4	-0.24	0.6	0.36
5	2	-0.4	0.16	0.6	-0.24	-0.4	0.16
Total			**1.2**		**-0.96**		**0.68**

Pendugaan ARIMA(1,1,1)

- **Varians:** 1.2
- r_1: $-0.96/1.2 = \mathbf{-0.8}$
- r_2: $0.68/1.2 \approx \mathbf{0.57}$

Perhitungan Parameter

Estimasi ϕ_1: Pendekatan ARMA(1,1) menggunakan rasio r_2/r_1:

$$\hat{\phi}_1 \approx \frac{r_2}{r_1} = \frac{0.57}{-0.8} \approx \mathbf{-0.7}$$

Estimasi θ_1:

$$r_1 = \frac{(1-\theta\phi)(\phi-\theta)}{1+\theta^2-2\phi\theta}$$

$$-0.8 = \frac{(1-\theta(-0.7))(-0.7-\theta)}{1+\theta^2-2(-0.7)\theta}$$

$$\theta^2 - 3.7\theta + 1 = 0$$

$$\theta_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

syarat invertibilitas ($|\theta| < 1$)

$$\hat{\theta}_1 \approx \mathbf{0.4}$$

Estimasi Konstanta (δ)

$$\hat{\delta} = \bar{W}(1-\hat{\phi}_1) = 2.4(1-(-0.7)) = 2.4(1.7) = \mathbf{4.08}$$

Model Akhir

$$\hat{Y}_t = Y_{t-1} + 4.08 + (-0.7)(Y_{t-1} - Y_{t-2}) - 0.4a_{t-1}$$

$$\hat{Y}_t = 4.08 + 0.3Y_{t-1} + 0.7Y_{t-2} - 0.4a_{t-1}$$

Pendugaan SARIMA$(1,0,0)(1,0,0)_2$

t	Data (Yt)	Deviasi (yt)	Kuadrat (yt2)	Lag 1 (yt−1) (Geser 1)	Kali Lag 1 (yt · yt−1)	Lag 2 (yt−2) (Geser 2)	Kali Lag 2 (yt · yt−2)
1	10	-5	25	-	-	-	-
2	20	5	25	-5	-25	-	-
3	10	-5	25	5	-25	-5	25
4	20	5	25	-5	-25	5	25
5	10	-5	25	5	-25	-5	25
6	20	5	25	-5	-25	5	25
7	10	-5	25	5	-25	-5	25
8	20	5	25	-5	-25	5	25
9	10	-5	25	5	-25	-5	25
10	20	5	25	-5	-25	5	25
SUM		**0**	**250**		**-225**		**200**

Pendugaan SARIMA(1,0,0)(1,0,0)$_2$

$$\bar{Y} = \frac{10+20+10+20+10+20+10+20+10+20}{10} = \frac{150}{10} = \mathbf{15}$$

Autokorelasi Lag 1 (r_1)

$$r_1 = \frac{-225}{250} = \mathbf{-0.9}$$

Autokorelasi Lag 2 (r_2)

$$r_2 = \frac{200}{250} = \mathbf{0.8}$$

Estimasi Parameter

Parameter AR Non-Musiman (ϕ_1): Diestimasi dari r_1.

$$\hat{\phi}_1 \approx r_1 = \mathbf{-0.9}$$

Parameter AR Musiman (Φ_1): Diestimasi dari r_s (dalam hal ini r_2).

$$\hat{\Phi}_1 \approx r_2 = \mathbf{0.8}$$

Estimasi Konstanta (δ): Rumus konstanta SARIMA: $\delta = \mu(1-\phi_1)(1-\Phi_1)$

$$\hat{\delta} = 15(1-(-0.9))(1-0.8)$$

$$\hat{\delta} = \mathbf{5.7}$$

Pembentukan Model Akhir

$$(1-\phi_1 B)(1-\Phi_1 B^2)Y_t = \delta + a_t$$

$$Y_t = \delta + \phi_1 Y_{t-1} + \Phi_1 Y_{t-2} - (\phi_1 \Phi_1)Y_{t-3} + a_t$$

$$Y_t = 5.7 - 0.9Y_{t-1} + 0.8Y_{t-2} - (-0.72)Y_{t-3} + a_t$$

$$Y_t = 5.7 - 0.9Y_{t-1} + 0.8Y_{t-2} + 0.72Y_{t-3} + a_t$$

Metode Pendugaan CSS

Metode ini bekerja persis seperti Regresi Linear Sederhana (OLS). Tujuannya adalah mencari nilai parameter ϕ atau θ yang meminimalkan Jumlah Kuadrat Error (Sum of Squared Errors - SSE).

$$SSE = \sum_{t=1}^{n} (Y_t - \hat{Y}_t)^2$$

Metode ini disebut juga Conditional Sum of Squares (CSS) karena kita harus membuat asumsi (kondisi) nilai awal error (a(0)=0).

Pendugaan AR(1)

$$\hat{\phi}_1 = \frac{\sum(y_t \cdot y_{t-1})}{\sum(y_{t-1})^2}$$

Data Sampel: $Y_t = [10, 12, 11, 13, 14]$ **Rata-rata ($\bar{Y}$):** 12 **Deviasi (y_t):** $[-2, 0, -1, 1, 2]$

t	yt (Target)	yt−1 (Prediktor)	Perkalian (ytyt−1)	Kuadrat Prediktor (yt−ybar)
1	-2	-	-	-
2	0	-2	0	4
3	-1	0	0	0
4	1	-1	-1	1
5	2	1	2	1
$\sum$			**1** (Pembilang)	**6** (Penyebut)

$$\hat{\phi}_1 = \frac{\sum y_t y_{t-1}}{\sum y_{t-1}^2} = \frac{1}{6} \approx \mathbf{0.167}$$

Metode Pendugaan MLE

MLE mencari nilai parameter yang membuat probabilitas (peluang) mendapatkan data yang kita miliki menjadi paling besar.
Jika Metode CSS meminimalkan error, Metode MLE memaksimalkan kecocokan distribusi.

Rumus Peluang (PDF - Probability Density Function) untuk satu data a_t adalah:

$$f(a_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(a_t - 0)^2}{2\sigma^2}}$$

Dalam konteks model AR(1): $Y_t = \phi Y_{t-1} + a_t$, maka $a_t = Y_t - \phi Y_{t-1}$. Kita substitusikan ini ke rumus di atas:

$$f(Y_t | Y_{t-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(Y_t - \phi Y_{t-1})^2}{2\sigma^2}\right)$$

Metode Pendugaan MLE

Kita tidak hanya punya 1 data, tapi n data (Y(1), Y(2), ... , Y(n)). Karena error diasumsikan saling bebas (independent), maka probabilitas gabungan (Joint Probability) adalah hasil kali dari probabilitas masing-masing data.

Fungsi ini disebut **Fungsi Likelihood (L)**:

$$L(\phi, \sigma^2) = f(Y_1) \times f(Y_2) \times \cdots \times f(Y_n)$$

Atau dalam notasi matematika ($\prod$ adalah simbol perkalian beruntun):

$$L(\phi, \sigma^2) = \prod_{t=1}^{n} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(Y_t - \phi Y_{t-1})^2}{2\sigma^2} \right) \right]$$

Mencari nilai ϕ yang membuat hasil perkalian raksasa (L) ini menjadi **MAKSIMUM**.

Metode Pendugaan MLE

Memaksimalkan fungsi perkalian ($\prod$) itu sangat sulit secara kalkulus

Ubah menjadi Logaritma Natural ($\ln$).

$$\ln L = \sum_{t=1}^{n} \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right) + \sum_{t=1}^{n}\left(-\frac{(Y_t - \phi Y_{t-1})^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$\ln L(\phi, \sigma^2) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{t=1}^{n}(Y_t - \phi Y_{t-1})^2$$

Pendugaan MLE ini menggunakan iterasi Numerik

Pendugaan pada R

```
# ESTIMASI PARAMETER AR(1)
# Target Parameter: phi = 0.7

# 1. SIAPKAN DATA (SIMULASI)
set.seed(123)
# Kita bangkitkan 200 data dengan phi = 0.7
data_ar <- arima.sim(n = 200, model = list(ar = 0.7))

# 2. LAKUKAN ESTIMASI (3 METODE)

# A. Metode Momen (Yule-Walker)
# Ini metode klasik/kasar
hasil_mom <- ar(data_ar, method = "yw", order.max = 1)
phi_mom   <- hasil_mom$ar

# B. Metode Least Squares (CSS)
# Ini meminimalkan kuadrat error
hasil_css <- arima(data_ar, order = c(1,0,0), method = "CSS",
include.mean = FALSE)
phi_css   <- hasil_css$coef

# C. Metode Maximum Likelihood (MLE)
# Ini metode standar software (paling presisi)
hasil_mle <- arima(data_ar, order = c(1,0,0), method = "ML",
include.mean = FALSE)
phi_mle <- hasil_mle$coef


# 3. TAMPILKAN HASIL
# Kita gabungkan hasilnya agar mudah dibandingkan
perbandingan <- c(
 Kunci_Jawaban = 0.7,
 Metode_Momen = phi_mom,
 Metode_CSS = phi_css,
 Metode_MLE = phi_mle
)

print(perbandingan)
```

Pendugaan pada R

```
> print(perbandingan)
 Kunci_Jawaban   Metode_Momen Metode_CSS.ar1 Metode_MLE.ar1 
     0.7000000      0.6287670      0.6291564      0.6261131 
```

UNIVERSITAS SULTAN AGENG TIRTAYASA

UNTIRTA Jawara

Jujur Adil Wibawa Amanah Religius Akuntabel

SEE YOU NEXT WEEK !

Ferdian Bangkit Wijaya, S.Stat., M.Si

NIP. 199005202024061001

ferdian.bangkit@untirta.ac.id