Analisis Deret Waktu

#9 Meeting

Moving Average

Ferdian Bangkit Wijaya, S.Stat., M.Si
NIP. 199005202024061001

Proses Linier Umum

UNIVERSITAS SULTAN AGENG TIRTAYASA

UNTIRTA Jawara
Jujur Adil Wibawa Amanah Religius Akuntabel

Definisi

- Di dalam pembahasan ini, $\{Z_t\}$ adalah data deret waktu dan $\{a_t\}$ adalah *white noise*
- **Proses linier Umum** $\{Z_t\}$ adalah suatu proses yang merupakan kombinasi linier dari white noise sekarang dan sebelumnya

$$Z_t = a_t + \psi_1 a_{t-1} + \psi_2 a_{t-2} + \dots$$

dengan

$$\Sigma_{i=1}^{\infty} \psi_i^2 < \infty$$

Proses Linier Umum

Kasus Khusus

Perhatikan bila $\psi_i = \phi^i$ dengan $-1 < \phi < 1$ maka

$$Z_t = a_t + \phi_1 a_{t-1} + \phi_2 a_{t-2} + \ldots$$

- Nilai harapan

$$\begin{aligned} E(Z_t) &= E(a_t + \phi a_{t-1} + \ldots) \\ &= E(a_t) + \phi E(a_{t-1}) + \ldots \\ &= 0 \end{aligned}$$

- Ragam

$$\begin{aligned} Var(Z_t) &= Var(a_t + \phi a_{t-1} + \phi^2 a_{t-2} + \ldots) \\ &= Var(a_t) + \phi^2 Var(a_{t-1}) + \phi^4 Var(a_{t-2}) + \ldots) \\ &= \sigma_a^2 (1 + \phi^2 + \phi^4 + \ldots) \\ &= \sigma_a^2 \frac{1}{1-\phi^2} \end{aligned}$$

- Koragam

$$\begin{aligned} Cov(Z_t, Z_{t-1}) &= Cov(a_t + \phi a_{t-1} + \phi^2 a_{t-2} + \ldots, a_{t-1} + \phi a_{t-2} + \ldots) \\ &= Cov(\phi a_{t-1}, a_{t-1}) + Cov(\phi^2 a_{t-2}, \phi a_{t-2}) + \ldots \\ &= \phi \sigma_a^2 + \phi^3 \sigma_a^2 + \phi^5 \sigma_a^2 + \ldots \\ &= \phi \sigma_a^2 (1 + \phi^2 + \phi^4 + \ldots) \\ &= \frac{\phi \sigma_a^2}{1-\phi^2} \end{aligned}$$

- sehingga $Corr(Z_t, Z_{t-1}) = \frac{\frac{\phi \sigma_a^2}{1-\phi^2}}{\frac{\sigma_a^2}{1-\phi^2}} = \phi$
- Selain itu, $\gamma_k = Cov(Z_t, Z_{t-k}) = \frac{\phi^k \sigma_a^2}{1-\phi^2}$ dan $Corr(Z_t, Z_{t-k}) = \phi^k$ untuk $k = 0, 1, 2, \ldots$

Proses Moving Average

Ide Dasar

- Merupakan proses linier umum dengan hanya beberapa ψ yang tidak bernilai nol.

$$Z_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \ldots - \theta_q a_{t-q}$$

- Model tersebut dinamakan **Model Moving Average ordo** q atau $MA(q)$

Proses MA(1)

Proses MA(1)

- Nilai harapan: $E(Z_t) = E(a_t - \theta a_{t-1}) = 0$
- Ragam: $\gamma_0 = Var(Z_t) = \sigma_a^2(1+\theta^2)$
- Koragam:
  - lag $k = 1$:

$$Cov(Z_t, Z_{t-1}) = Cov(a_t - \theta a_{t-1}, a_{t-1} - \theta a_{t-2})$$
$$\gamma_1 = Cov(-\theta a_{t-1}, a_{t-1}) = -\theta\sigma_a^2$$

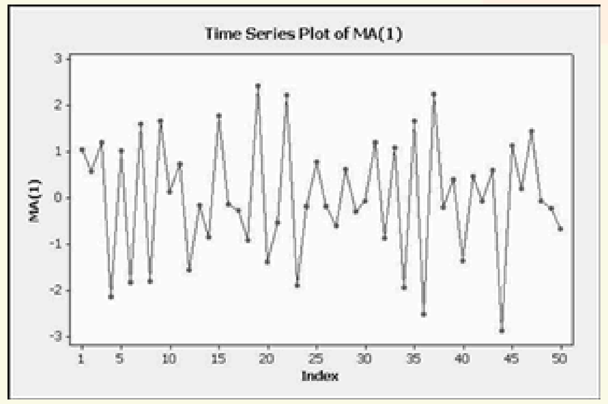
  - lag $k \geq 2$:

$$Cov(Z_t, Z_{t-2}) = Cov(a_t - \theta a_{t-1}, a_{t-2} - \theta a_{t-3})$$
$$\gamma_2 = 0$$

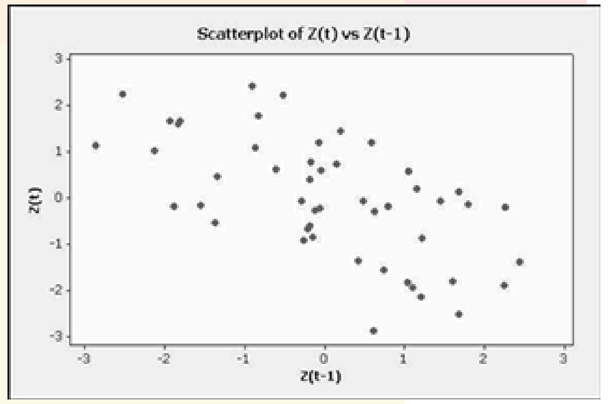
- Korelasi:

$$\rho_k = \begin{cases} \frac{-\theta}{1+\theta^2} & \text{jika} \quad k = 1 \\ 0 & \text{jika} \quad k \geq 2 \end{cases}$$

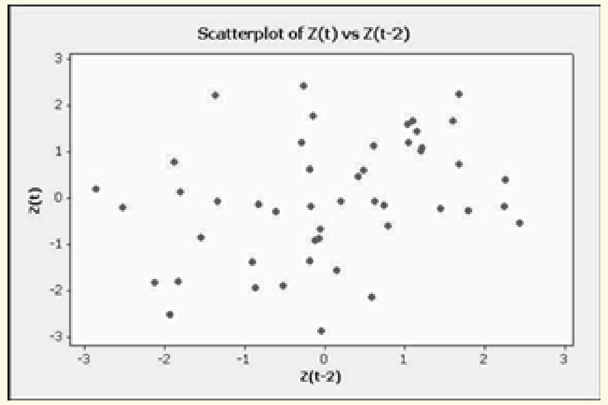
Contoh Pola Data MA(1)



Plot MA(1): $\theta = 0.9$



Plot Z_t vs Z_{t-1}



Plot Z_t vs Z_{t-2}

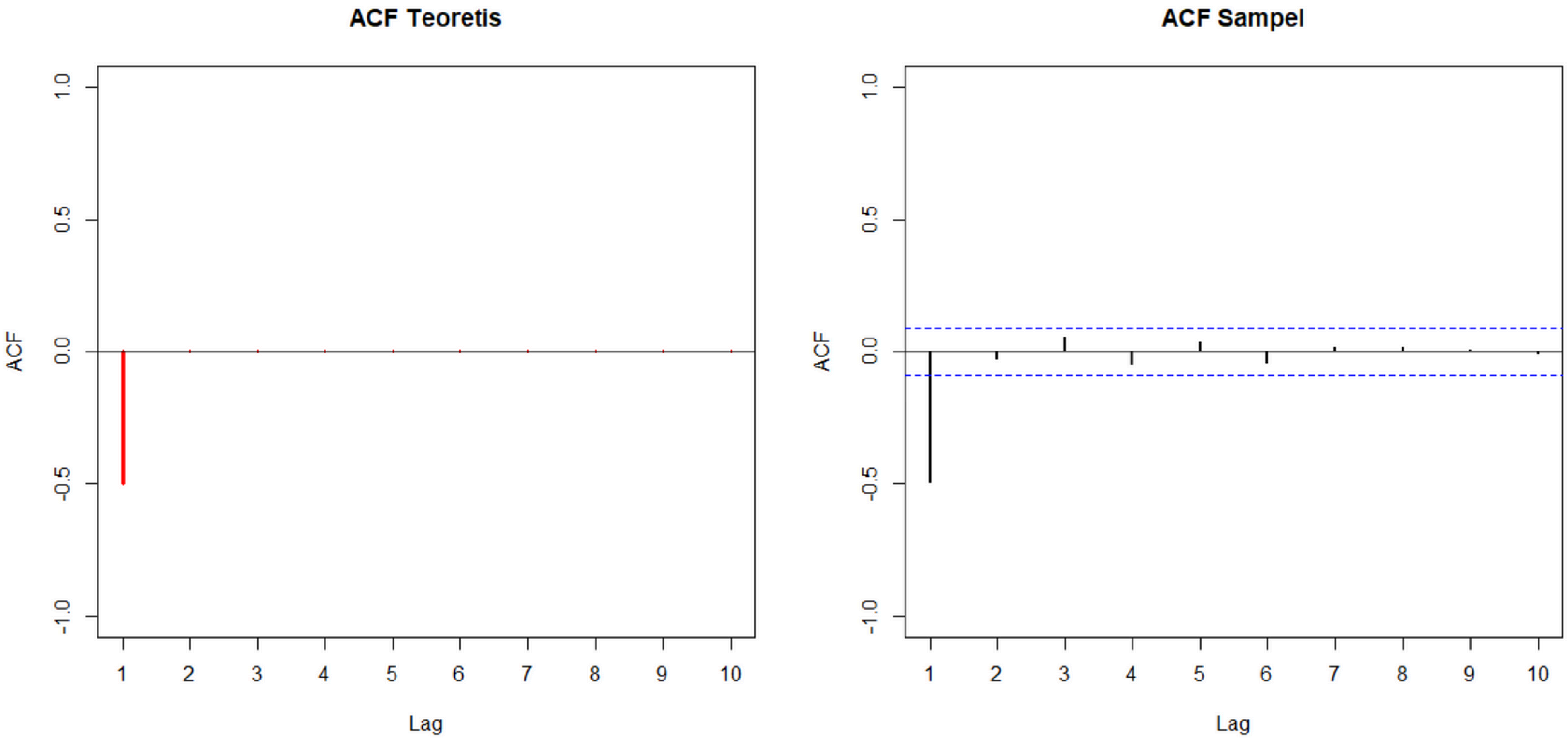
Gambar 1: Contoh MA(1)

Plot ACF (Autocorrelation Function) MA(1)

```
# Model: Y_t = e_t - 0.9 * e_{t-1}
dev.new()
par(mfrow = c(1, 2))

# PLOT KIRI (TEORETIS)
acf_teori_vector <- ARMAacf(ma = -0.9, lag.max = 10)
lags <- 1:10
nilai_acf  <- acf_teori_vector[2:(10 + 1)]
# Plot nilai vs lag yang benar
plot(lags, nilai_acf, type = "h",
     main = "ACF Teoretis",
     xlab = "Lag", ylab = "ACF",
     ylim = c(-1, 1),
     lwd = 3, col = "red",
     xaxt = "n")
axis(1, at = seq(1, 10, by = 1)) .
abline(h = 0)
```

```
# PLOT KANAN (SAMPEL)
set.seed(123)
data_sim <- arima.sim(model = list(ma = -0.9), n = 500)
acf_sampel_obj <- acf(data_sim, lag.max = 10, plot = FALSE)
plot(acf_sampel_obj$lag[-1], acf_sampel_obj$acf[-1], type = "h",
     main = "ACF Sampel (Mulai Lag 1)",
     xlab = "Lag", ylab = "ACF",
     ylim = c(-1, 1),
     lwd = 2,
     xaxt = "n") # Matikan sumbu x default
axis(1, at = seq(1, 10, by = 1)) # Buat sumbu x manual 1, 2, 3...
abline(h = 0)
# Tambahkan garis batas signifikansi (rumus 1.96 / sqrt(n))
n <- 500
batas_signifikan <- 1.96 / sqrt(n)
abline(h = c(batas_signifikan, -batas_signifikan), lty = 2, col = "blue")
par(mfrow = c(1, 1))
```

Plot ACF (Autocorrelation Function) MA(1)



PACF (Partial Autocorrelation Function) MA(1)

Untuk model MA(1) yang didefinisikan dengan notasi Box-Jenkins (tanda negatif):

$$Z_t = a_t - \theta a_{t-1}$$

Fungsi Autokorelasi Parsial (PACF) teoretisnya, ϕ_{kk}, untuk **lag** k (di mana $k \geq 1$) adalah:

$$\phi_{kk} = \frac{-\theta^k(1-\theta^2)}{1-\theta^{2(k+1)}}$$

Nilai ini akan semakin mengecil (meluruh) menuju nol saat k bertambah besar, tetapi tidak pernah menjadi nol persis (kecuali $\theta = 0$). Ini adalah bukti matematis bahwa PACF untuk model MA(1) murni bersifat *tails off* (meluruh).

PACF (Partial Autocorrelation Function) MA(1)

UNTIRTA Jawara
Jujur Adil Wibawa Amanah Religius Akuntabel

Perhitungan PACF (ϕ_{kk}) didasarkan pada Persamaan Yule-Walker.

1. PACF lag 1 (ϕ_{11}): PACF pada lag 1 selalu sama dengan ACF pada lag 1.

$$\phi_{11} = \rho_1 = \frac{-\theta}{1+\theta^2}$$

(Ini jelas tidak nol).

2. PACF lag 2 (ϕ_{22}): Rumus untuk PACF lag 2 adalah:

$$\phi_{22} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1-\rho_1^2}$$

Kita masukkan nilai ρ teoretis kita: $\rho_2 = 0$ dan $\rho_1 = \frac{-\theta}{1+\theta^2}$.

$$\phi_{22} = \frac{0 - \left(\frac{-\theta}{1+\theta^2}\right)^2}{1 - \left(\frac{-\theta}{1+\theta^2}\right)^2} = \frac{-\frac{\theta^2}{(1+\theta^2)^2}}{1 - \frac{\theta^2}{(1+\theta^2)^2}}$$

$$\phi_{22} = \frac{-\theta^2}{(1+\theta^2)^2 - \theta^2} = \frac{-\theta^2}{1+2\theta^2+\theta^4-\theta^2}$$

$$\phi_{22} = \frac{-\theta^2}{1+\theta^2+\theta^4}$$

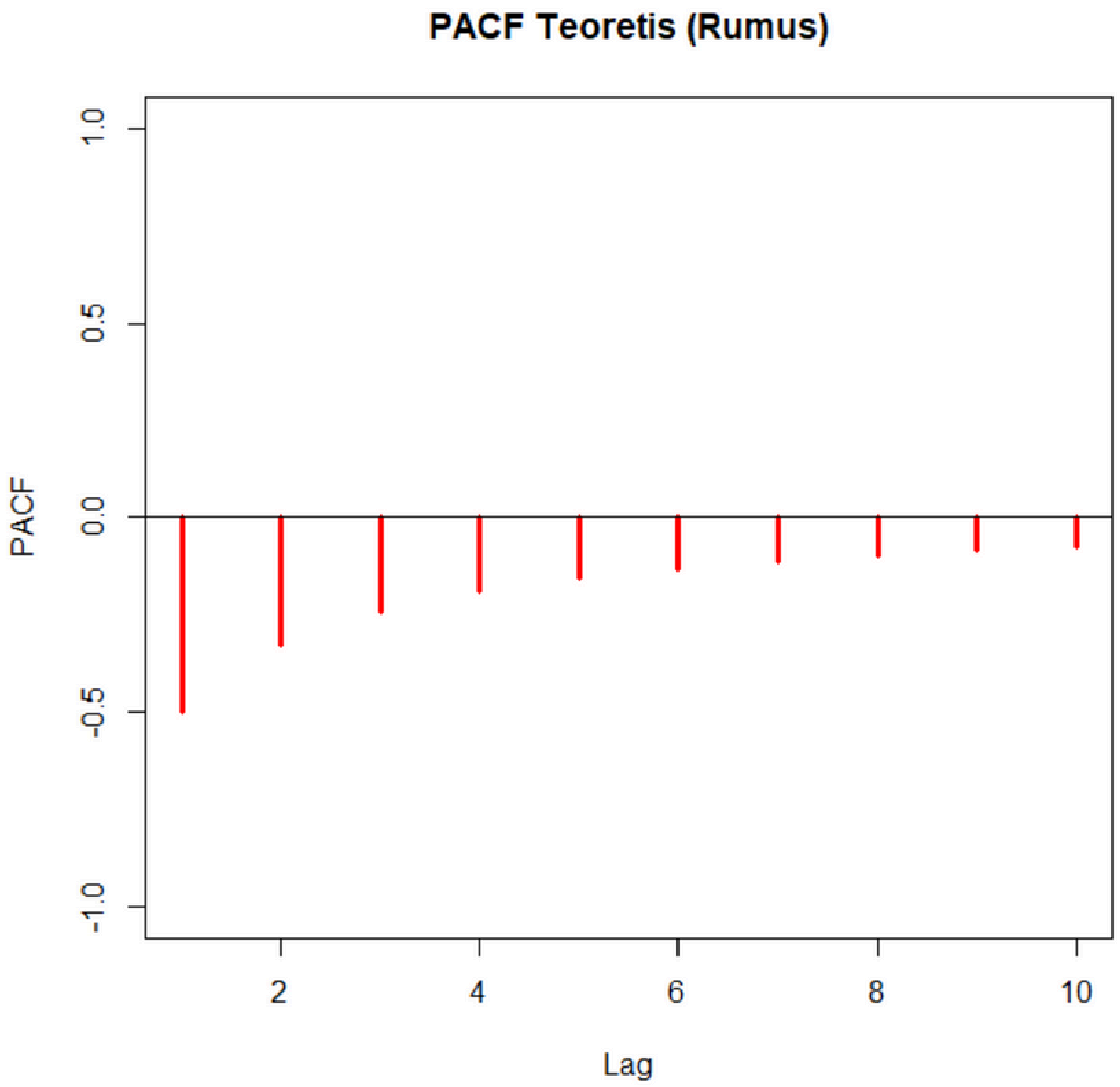
Kesimpulan: Meskipun ACF (ρ_k) menjadi nol di lag 2, PACF (ϕ_{kk}) **tidak** menjadi nol di lag 2. Jika kita teruskan, ϕ_{33}, ϕ_{44}, dst. juga tidak akan nol. Inilah yang kita sebut **meluruh (tails off)**.

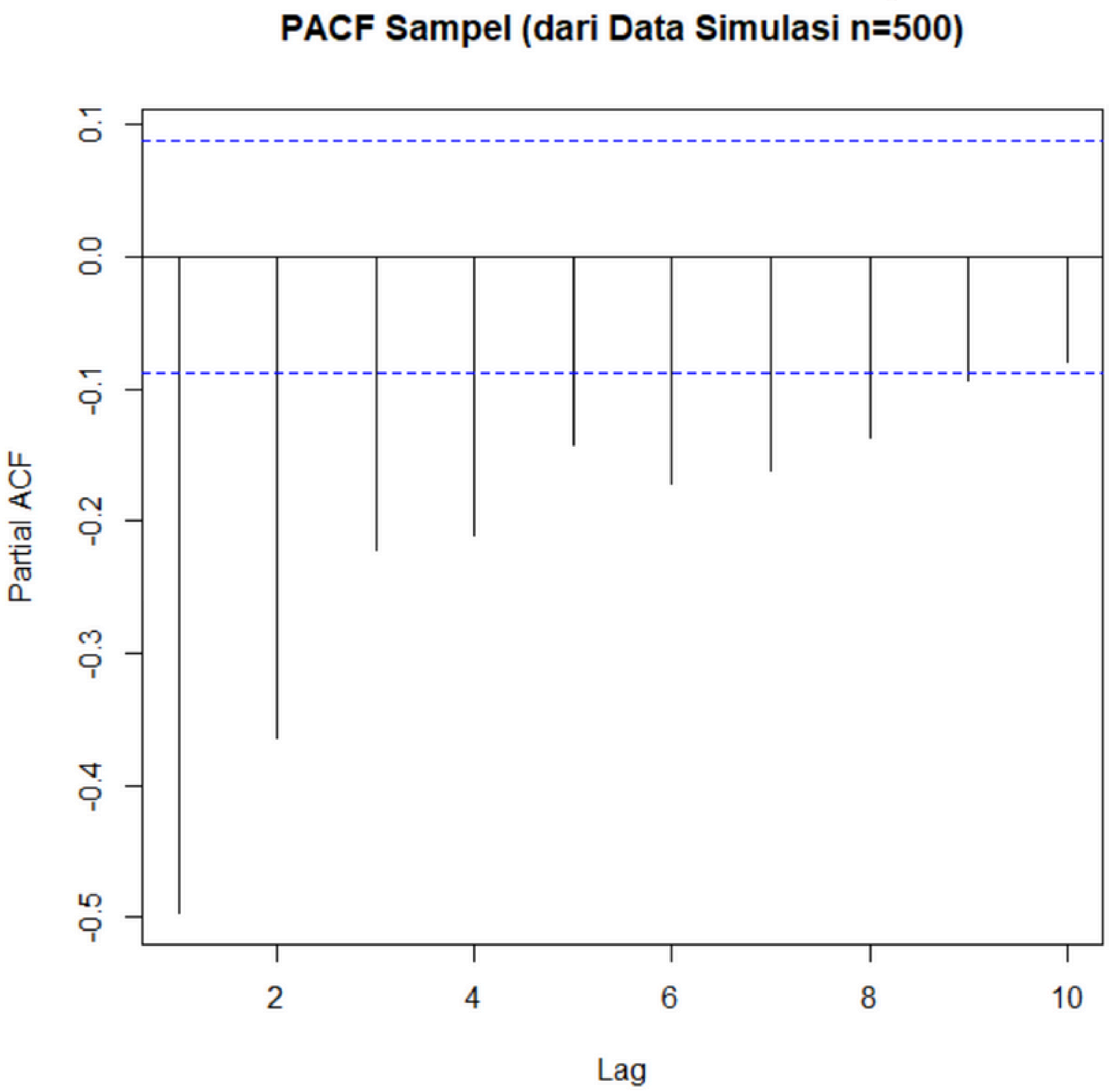
Plot PACF (Partial Autocorrelation Function) MA(1)

```
# Model: Y_t = e_t - 0.9 * e_{t-1}
dev.new()
par(mfrow = c(1, 2))

# --- PLOT KIRI (TEORETIS) ---
pacf_teori <- ARMAacf(ma = -0.9, lag.max = 10, pacf
= TRUE)

# Plot nilai teoretis (dimulai dari Lag 1)
plot(pacf_teori, type = "h",
     main = "PACF Teoretis (Rumus)",
     xlab = "Lag", ylab = "PACF",
     ylim = c(-1, 1),
     lwd = 3, col = "red")
abline(h = 0)
# Hasil: Plot ini meluruh, tidak terputus.
```

```
# --- PLOT KANAN (SAMPEL) ---

# Atur seed
set.seed(123)
# Simulasi data yang sama
data_sim <- arima.sim(model = list(ma = -0.9), n = 500)

# Buat plot PACF dari data sampel
pacf(data_sim,
 main = "PACF Sampel (dari Data Simulasi n=500)",
 lag.max = 10)
# Hasil: Plot ini juga meluruh.

# Kembalikan layout ke normal
par(mfrow = c(1, 1))
```

Plot PACF (Partial Autocorrelation Function) MA(1)





Proses MA (2)

Proses MA(2)

Bila $q = 2$ maka: $Z_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2}$

- Nilai harapan: $E(Z_t) = 0$
- Koragam:

Lag $k = 0$:

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= Var(Z_t) \\ &= Var(a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2}) \\ &= (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)\sigma_a^2 \end{aligned}$$

Lag $k = 1$:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= Cov(Z_t, Z_{t-1}) \\ &= Cov(a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2}, a_{t-1} - \theta_1 a_{t-2} - \theta_2 a_{t-3}) \\ &= Cov(-\theta_1 a_{t-1}, a_{t-1}) + Cov(-\theta_2 a_{t-2}, -\theta_1 a_{t-2}) \\ &= (-\theta_1 + \theta_1\theta_2)\sigma_a^2 \end{aligned}$$

- Koragam (lanjutan)

Lag $k = 2$:

$$\begin{aligned} \gamma_2 &= Cov(Z_t, Z_{t-2}) \\ &= Cov(a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2}, a_{t-1} - \theta_1 a_{t-2} - \theta_2 a_{t-3}) \\ &= -\theta_2 \sigma_a^2 \end{aligned}$$

- Korelasi:

$$\rho_k = \begin{cases} \frac{-\theta_1 + \theta_1\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2} & \text{jika} \quad k = 1 \\ \frac{-\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2} & \text{jika} \quad k = 2 \\ 0 & \text{jika} \quad k \geq 3 \end{cases}$$

PACF MA (2)

Bentuk umum dari PACF (ϕ_{kk}) selalu didefinisikan oleh **solusi dari Persamaan Yule-Walker**.

Untuk model MA(2), kita memiliki nilai ACF teoretis:

- $\rho_1 \neq 0$
- $\rho_2 \neq 0$
- $\rho_k = 0$ untuk semua $k \geq 3$

1. PACF lag 1 (ϕ_{11}):

$$\phi_{11} = \rho_1$$

(Sama seperti MA(1)).

2. PACF lag 2 (ϕ_{22}):

$$\phi_{22} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2}$$

(Ini juga masih sama, tapi ρ_2 sekarang tidak nol).

3. PACF lag 3 (ϕ_{33}): Di sinilah mulai rumit. ϕ_{33} adalah solusi ϕ_3 dari sistem 3x3:

$$\begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \end{pmatrix}$$

Karena ini model MA(2), kita tahu $\rho_3 = 0$. Jadi persamaannya menjadi:

$$\begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Menyelesaikan ini untuk ϕ_3 (yang merupakan ϕ_{33}) akan menghasilkan ekspresi yang sangat rumit yang bergantung pada ρ_1 dan ρ_2. Yang penting, nilainya **tidak nol**.

4. PACF lag k (ϕ_{kk}): Untuk ϕ_{kk} (dengan $k \geq 3$), kita harus menyelesaikan sistem $k \times k$ di mana semua nilai ρ di sisi kanan (dari ρ_3 ke ρ_k) adalah **nol**.

$$\begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Solusi untuk ϕ_k (yaitu ϕ_{kk}) **tidak akan nol**; nilainya akan meluruh perlahan.

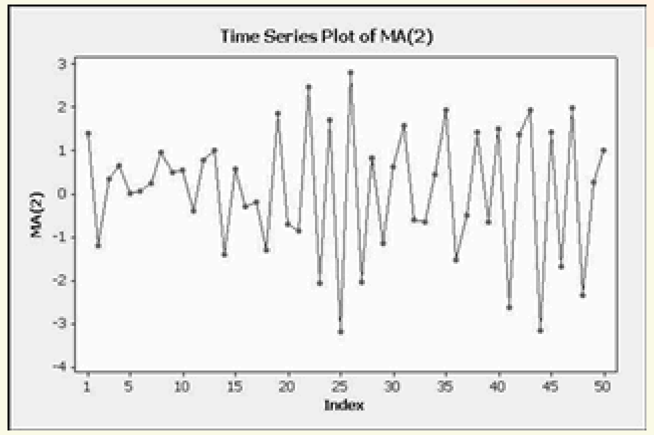
PACF MA (2)

UNIVERSITAS SULTAN AGENG TIRTAYASA

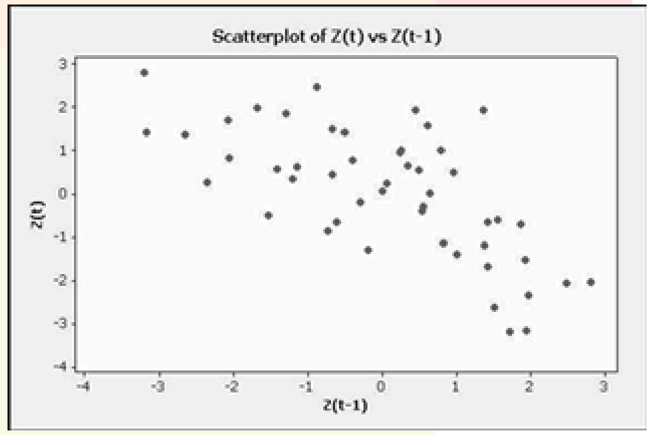
UNTIRTA Jawara

Jujur Adil Wibawa Amanah Religius Akuntabel

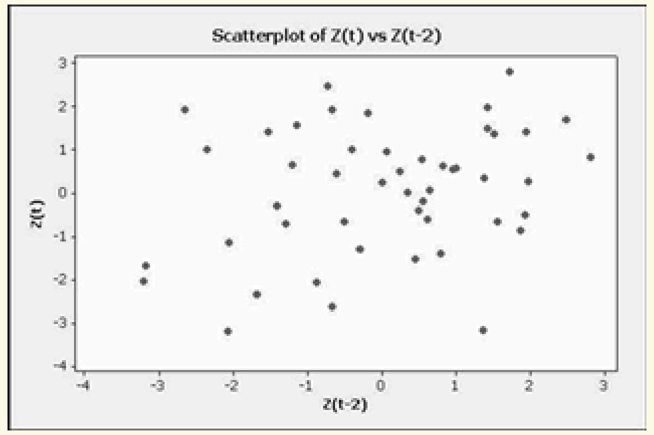
Contoh Pola Data MA(2)



Plot MA(2): $\theta_1 = 1; \theta_2 = -0.6$



Plot Z_t vs Z_{t-1}



Plot Z_t vs Z_{t-2}

Gambar 2: Contoh MA(2)

Tugas :

Buatkan Plot ACF dan PACF untuk Model MA (2) ini di program R !

SEE YOU NEXT WEEK !

Ferdian Bangkit Wijaya, S.Stat., M.Si
NIP. 199005202024061001
ferdian.bangkit@untirta.ac.id