UNIVERSITAS SULTAN AGENG TIRTAYASA

UNTIRTA Jawara

Jujur Adil Wibawa Amanah Religius Akuntabel

Analisis Deret Waktu

#10 Meeting

Autoregressive

Ferdian Bangkit Wijaya, S.Stat., M.Si
NIP. 199005202024061001

Proses Autoregressive

Ide Dasar

- Sesuai dengan namanya, proses ini merupakan regresi dengan data time series itu sendiri sebagai peubah X.
- Secara umum, bila $\{Z_t\}$ adalah proses autoregresi ordo p $(AR(p))$ maka

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \cdots + a_t$$

Proses AR(1)

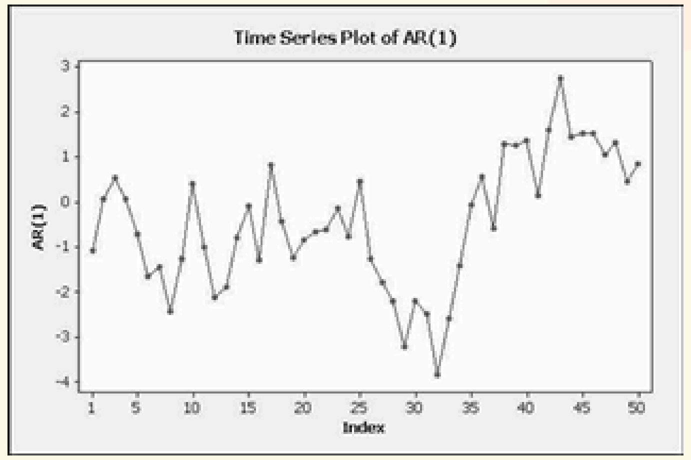
Proses AR(1)

- Karena stasioner, diasumsikan $E(Z_t) = 0$
- Karena $\gamma_0 = \phi^2\gamma_0 + \sigma_a^2$, maka $\gamma_0 = \frac{\sigma_a^2}{1-\phi^2}$
  di mana $|\phi| < 1$ (*stationary condition*)
- Bila model AR(1) kedua sisi dikalikan dengan Z_{t-k} $(k = 1, 2, \ldots)$ maka

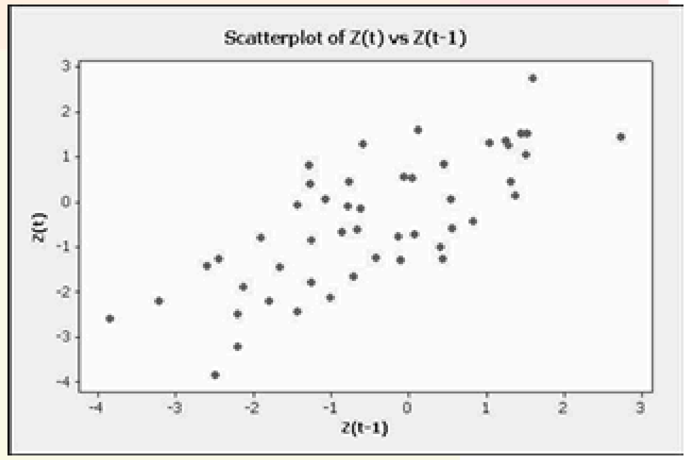
$$E(Z_t Z_{t-k}) = \phi E(Z_{t-1} Z_{t-k}) + E(a_t Z_{t-k})$$
$$\gamma_k = \phi \gamma_{k-1} \quad \text{untuk } k = 1, 2, \ldots$$

  - untuk $k = 1 \rightarrow \gamma_1 = \phi\gamma_0 = \phi\sigma_a^2/(1-\phi^2)$
  - untuk $k = 2 \rightarrow \gamma_2 = \phi\gamma_1 = \phi^2\sigma_a^2/(1-\phi^2)$
  - secara umum: $\gamma_k = \frac{\phi^k \sigma_a^2}{1-\phi^2}$ untuk $k = 0, 1, 2, \ldots$
- Dengan demikian $\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \phi^k$ untuk $k = 0, 1, 2, \ldots$

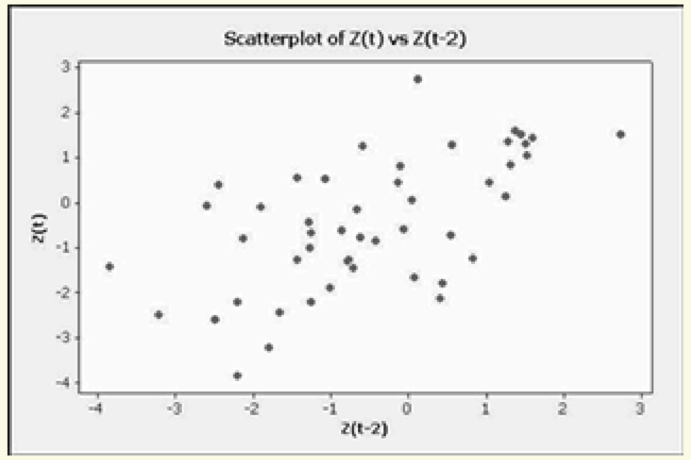
Contoh Pola Data AR(1)



Plot AR(1): $\phi = 0.7$



Plot Z_t vs Z_{t-1}

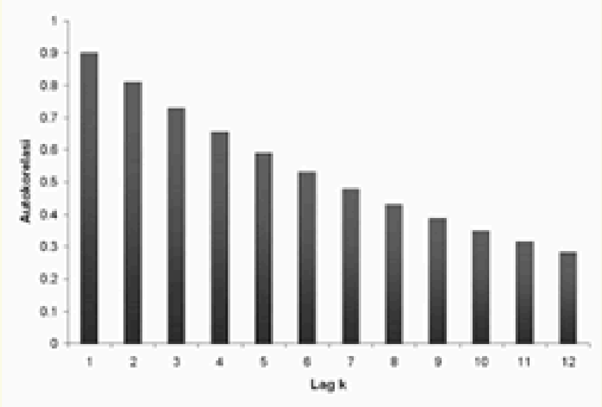


Plot Z_t vs Z_{t-2}

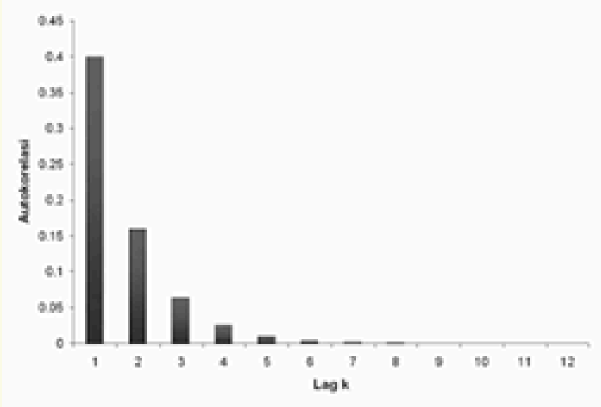
Proses AR(1)

Pola Autokorelasi AR(1)

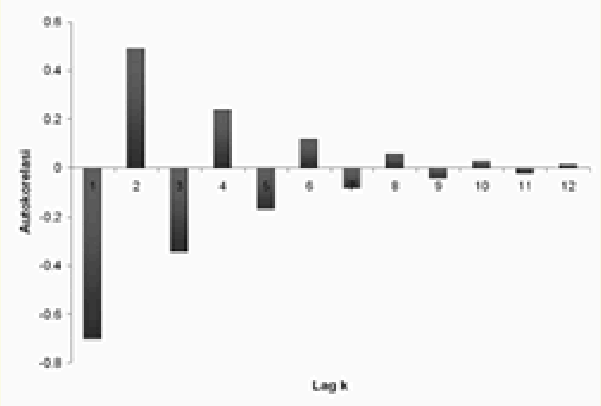
Struktur autokorelasi AR(1) menurun ekponensial (*tail off*)



$\phi = 0.9$



$\phi = 0.4$



$\phi = -0.7$

Ragam dan Koragam (Autocovarians) AR (1)

$$Z_t = \phi Z_{t-1} + a_t$$

a_t **(Error) adalah White Noise:**

- $E[a_t] = 0$
- $Var(a_t) = E[a_t^2] = \sigma_a^2$
- $Cov(a_t, a_s) = 0$ (jika $t \neq s$)
- a_t tidak berkorelasi dengan Z di masa lalu ($Z_{t-1}, Z_{t-2}, \ldots$).

$$Var(Z_t) = Var(\phi Z_{t-1} + a_t)$$

$$Var(A + B) = Var(A) + Var(B) + 2Cov(A, B)$$

$$Cov(\phi Z_{t-1}, a_t) = 0.$$

$$Var(Z_t) = Var(\phi Z_{t-1}) + Var(a_t)$$

$Var(Z_t)$ adalah γ_0.

$Var(\phi Z_{t-1})$ adalah $\phi^2 Var(Z_{t-1})$. Karena stasioner, $Var(Z_{t-1}) = \gamma_0$, menjadi $\phi^2\gamma_0$.

$Var(a_t)$ adalah σ_a^2.

$$\gamma_0 = \phi^2\gamma_0 + \sigma_a^2$$

$$Z_t = \phi Z_{t-1} + a_t$$

$$(Z_t) \times Z_{t-k} = (\phi Z_{t-1} + a_t) \times Z_{t-k}$$

$$Z_t Z_{t-k} = \phi Z_{t-1} Z_{t-k} + a_t Z_{t-k}$$

$$E[Z_t Z_{t-k}] = E[\phi Z_{t-1} Z_{t-k} + a_t Z_{t-k}]$$

$$E[Z_t Z_{t-k}] = \phi E[Z_{t-1} Z_{t-k}] + E[a_t Z_{t-k}]$$

$$\underbrace{E[Z_t Z_{t-k}]}_{\gamma_k} = \underbrace{\phi E[Z_{t-1} Z_{t-k}]}_{\phi\gamma_{k-1}} + \underbrace{E[a_t Z_{t-k}]}_{0}$$

ACF (Autocorrelation Function) AR(1)

Penurunan rumus ini didasarkan pada Persamaan Yule-Walker yang telah kita temukan sebelumnya ($\gamma_k = \phi\gamma_{k-1}$).

1. Untuk lag 1 (ρ_1):

- Dari $\gamma_k = \phi\gamma_{k-1}$, kita set $k = 1$. Kita dapat $\gamma_1 = \phi\gamma_0$.
- Kita bagi kedua sisi dengan γ_0: $\frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \phi$
- Karena $\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$, maka: $\rho_1 = \phi$

2. Untuk lag 2 (ρ_2):

- Kita set $k = 2$. Kita dapat $\gamma_2 = \phi\gamma_1$.
- Kita bagi kedua sisi dengan γ_0: $\frac{\gamma_2}{\gamma_0} = \phi\frac{\gamma_1}{\gamma_0}$
- Substitusikan ρ_k: $\rho_2 = \phi\rho_1$
- Karena kita tahu $\rho_1 = \phi$, maka: $\rho_2 = \phi(\phi) = \phi^2$

3. Untuk lag k (ρ_k):

- Jika kita teruskan pola ini, kita akan mendapatkan: $\rho_k = \phi\rho_{k-1} = \phi(\phi\rho_{k-2}) = \cdots = \phi^k$

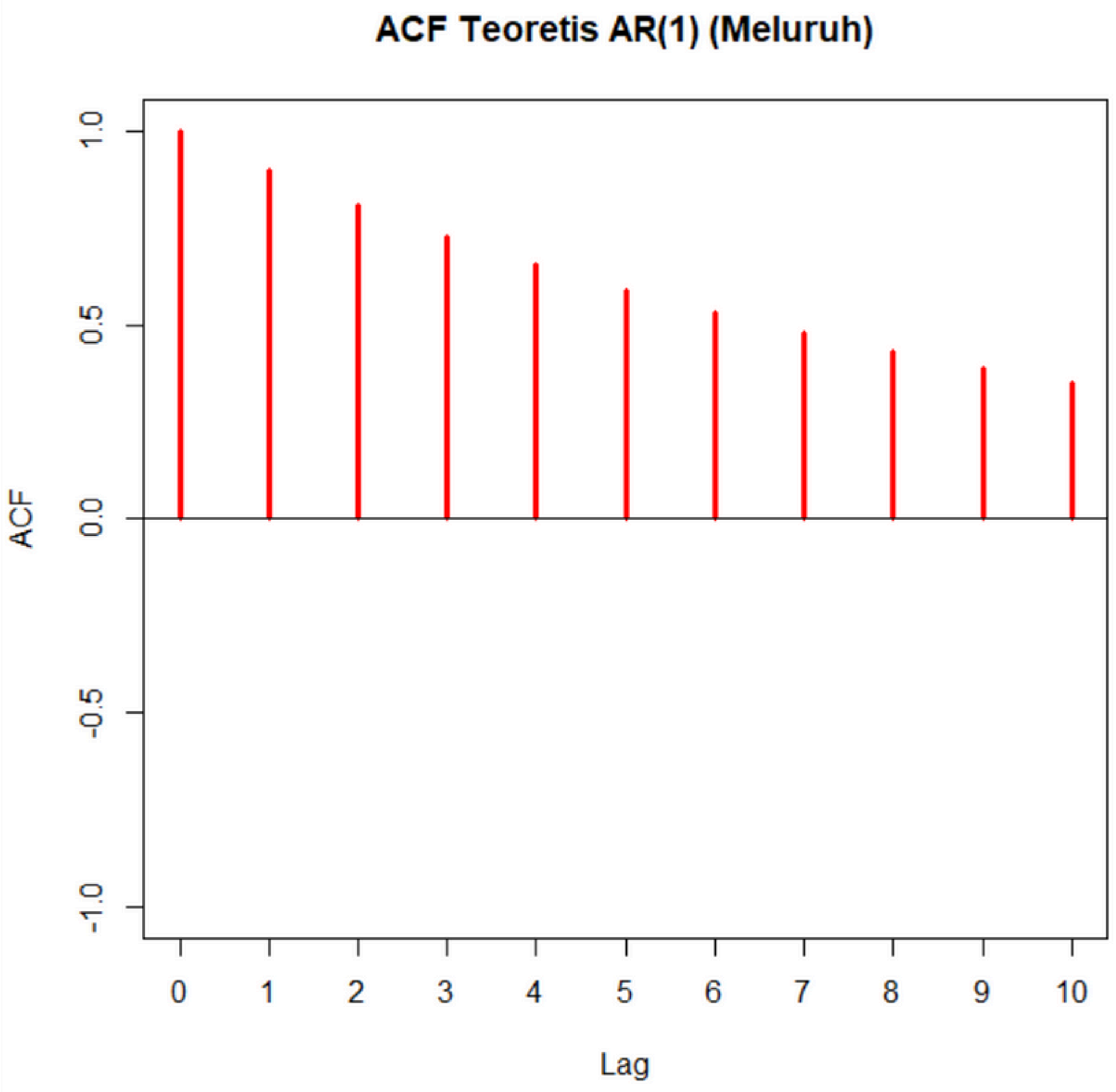
Karena syarat stasioneritas adalah $|\phi| < 1$, nilai $\rho_k = \phi^k$ akan semakin mengecil (meluruh) secara eksponensial menuju nol saat k bertambah besar, tetapi tidak pernah menjadi nol persis. Inilah yang kita sebut **meluruh (tails off)**.

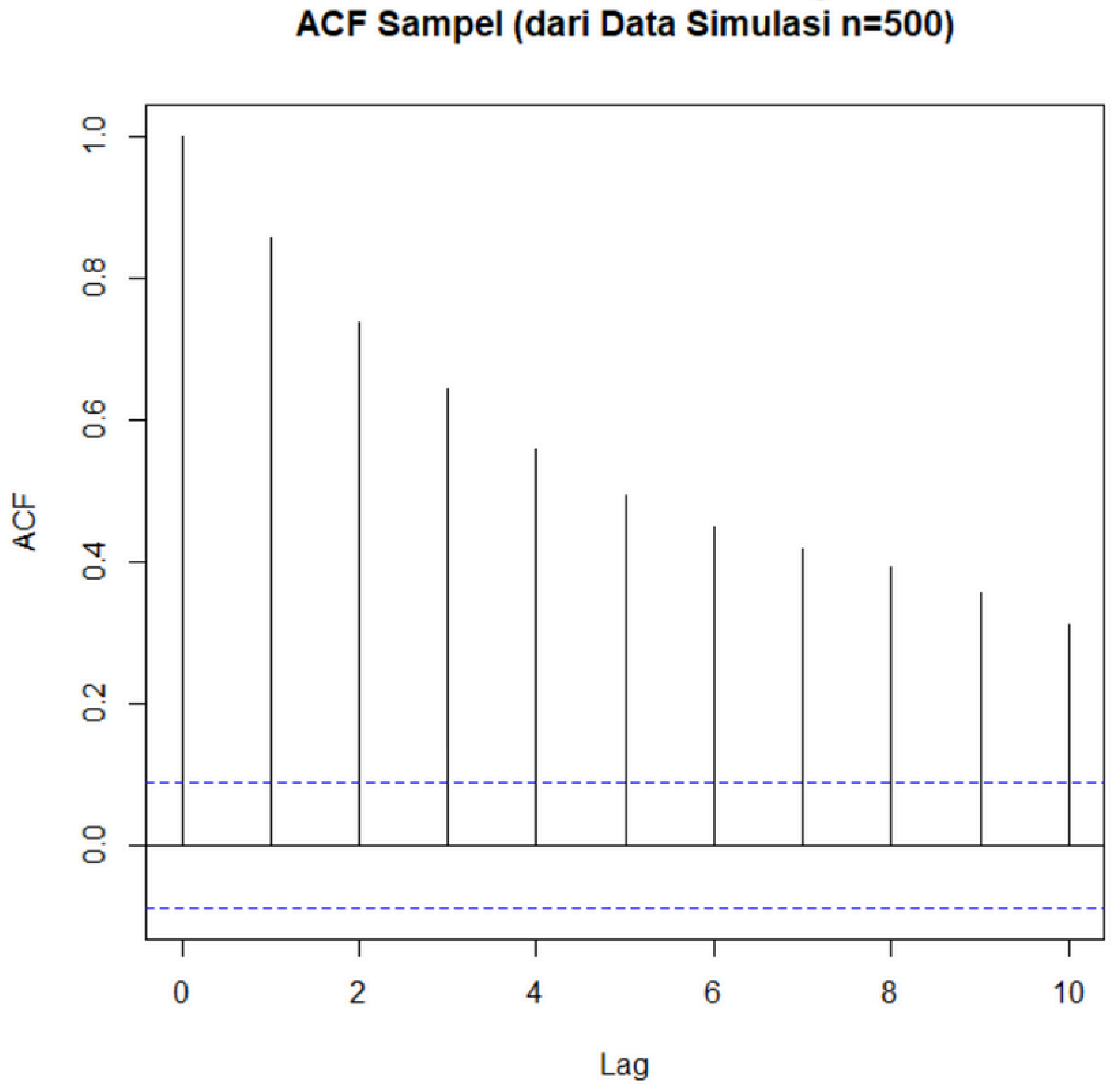
Plot ACF (Autocorrelation Function) AR(1)

```
# Model AR(1): Y_t = 0.9 * Y_{t-1} + e_t
# (Parameter R: ar = 0.9)
dev.new()
par(mfrow = c(1, 2))
# PLOT KIRI (TEORITIS)
acf_teori_vector <- ARMAacf(ar = 0.9, lag.max = 10, pacf =
FALSE)
# Kita buat vektor lag-nya, mulai dari 0
lags <- 0:10
plot(lags, acf_teori_vector, type = "h",
     main = "ACF Teoretis AR(1) (Meluruh)",
     xlab = "Lag", ylab = "ACF",
     ylim = c(-1, 1),
     lwd = 3, col = "red",
     xaxt = "n") # Matikan sumbu x default
axis(1, at = seq(0, 10, by = 1)) # Buat sumbu x manual 0, 1,
2...
abline(h = 0)
```

```
# PLOT KANAN (SAMPEL)
set.seed(123)

# Simulasi data dari model AR(1)
data_sim <- arima.sim(model = list(ar = 0.9), n = 500)

# Gunakan fungsi acf() bawaan R
# Fungsi ini sudah benar (mulai dari Lag 0)
# dan otomatis menampilkan batas signifikansi
acf(data_sim, lag.max = 10,
 main = "ACF Sampel (dari Data Simulasi n=500)")

# Kembalikan layout ke normal
par(mfrow = c(1, 1))
```

Plot ACF (Autocorrelation Function) AR(1)





PACF (Partial Autocorrelation Function) AR(1)

Untuk model AR(1) yang didefinisikan sebagai:

$$Z_t = \phi Z_{t-1} + a_t$$

Perhitungan PACF (ϕ_{kk}) didasarkan pada penyelesaian Persamaan Yule-Walker. Kita sudah tahu dari penurunan sebelumnya bahwa ACF (autokorelasi) untuk model ini adalah $\rho_k = \phi^k$.

1. PACF lag 1 (ϕ_{11}): PACF pada lag 1 selalu sama dengan ACF pada lag 1.

$$\phi_{11} = \rho_1 = \phi^1 = \phi$$

(Ini jelas **tidak nol**).

3. PACF lag k (ϕ_{kk} untuk $k \geq 2$): Jika kita teruskan perhitungan ini (misalnya menyelesaikan sistem Yule-Walker 3x3 untuk ϕ_{33}), kita akan menemukan bahwa semua solusi untuk ϕ_k (dengan $k \geq 2$) akan selalu **nol**.

2. PACF lag 2 (ϕ_{22}): Rumus untuk PACF lag 2 adalah:

$$\phi_{22} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2}$$

Sekarang, kita substitusikan nilai $\rho_k = \phi^k$ (yaitu $\rho_1 = \phi$ dan $\rho_2 = \phi^2$):

$$\phi_{22} = \frac{(\phi^2) - (\phi)^2}{1 - (\phi)^2} = \frac{\phi^2 - \phi^2}{1 - \phi^2}$$

$$\phi_{22} = \frac{0}{1 - \phi^2} = \mathbf{0}$$

Fungsi Autokorelasi Parsial (PACF) teoretisnya, ϕ_{kk}, untuk **lag** k (di mana $k \geq 1$) adalah:

$$\phi_{kk} = \begin{cases} \phi & \text{jika } k = 1 \\ 0 & \text{jika } k \geq 2 \end{cases}$$

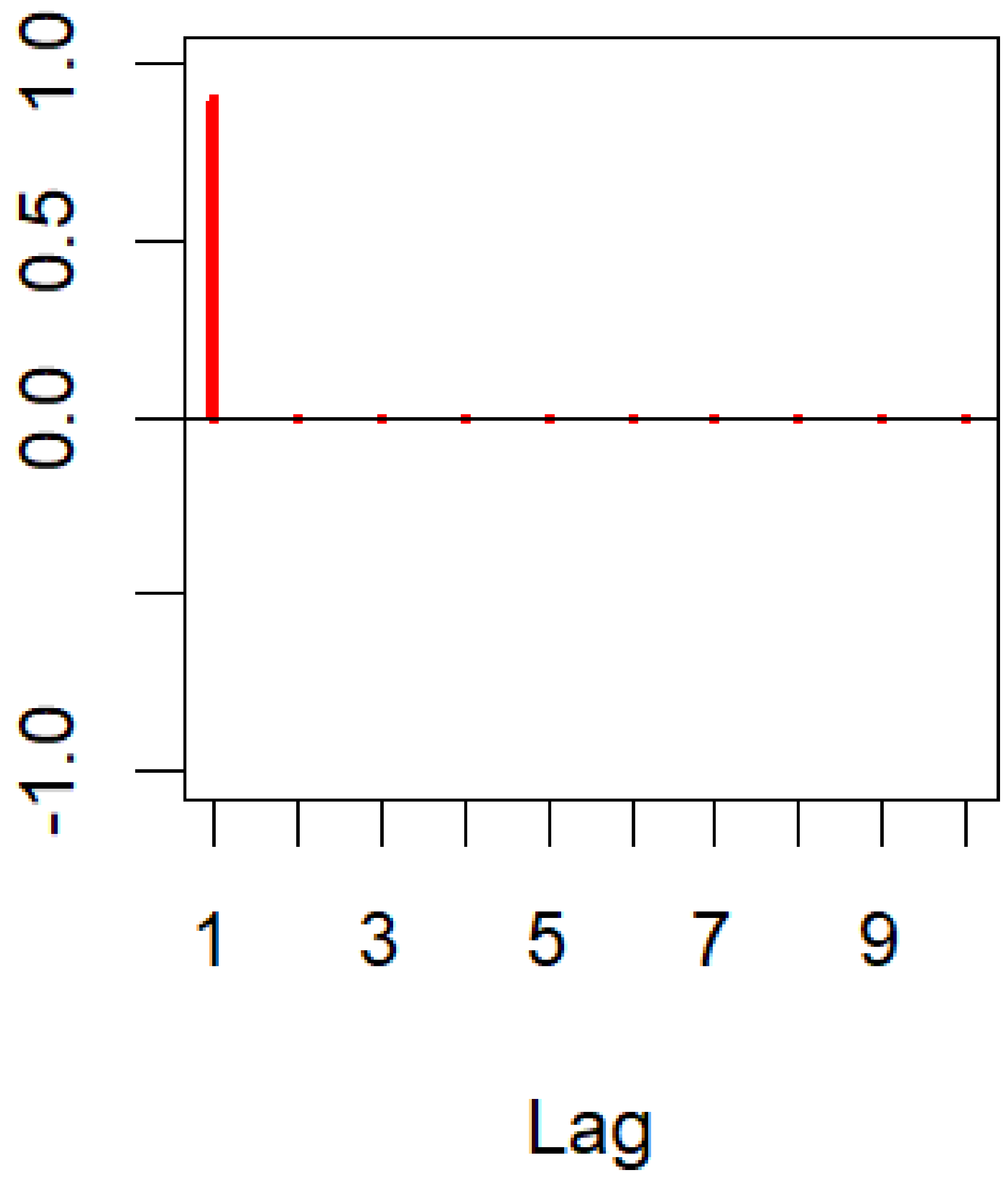
Ini adalah bukti matematis bahwa PACF untuk model AR(1) murni bersifat **cuts off (terputus)** tepat setelah lag 1.

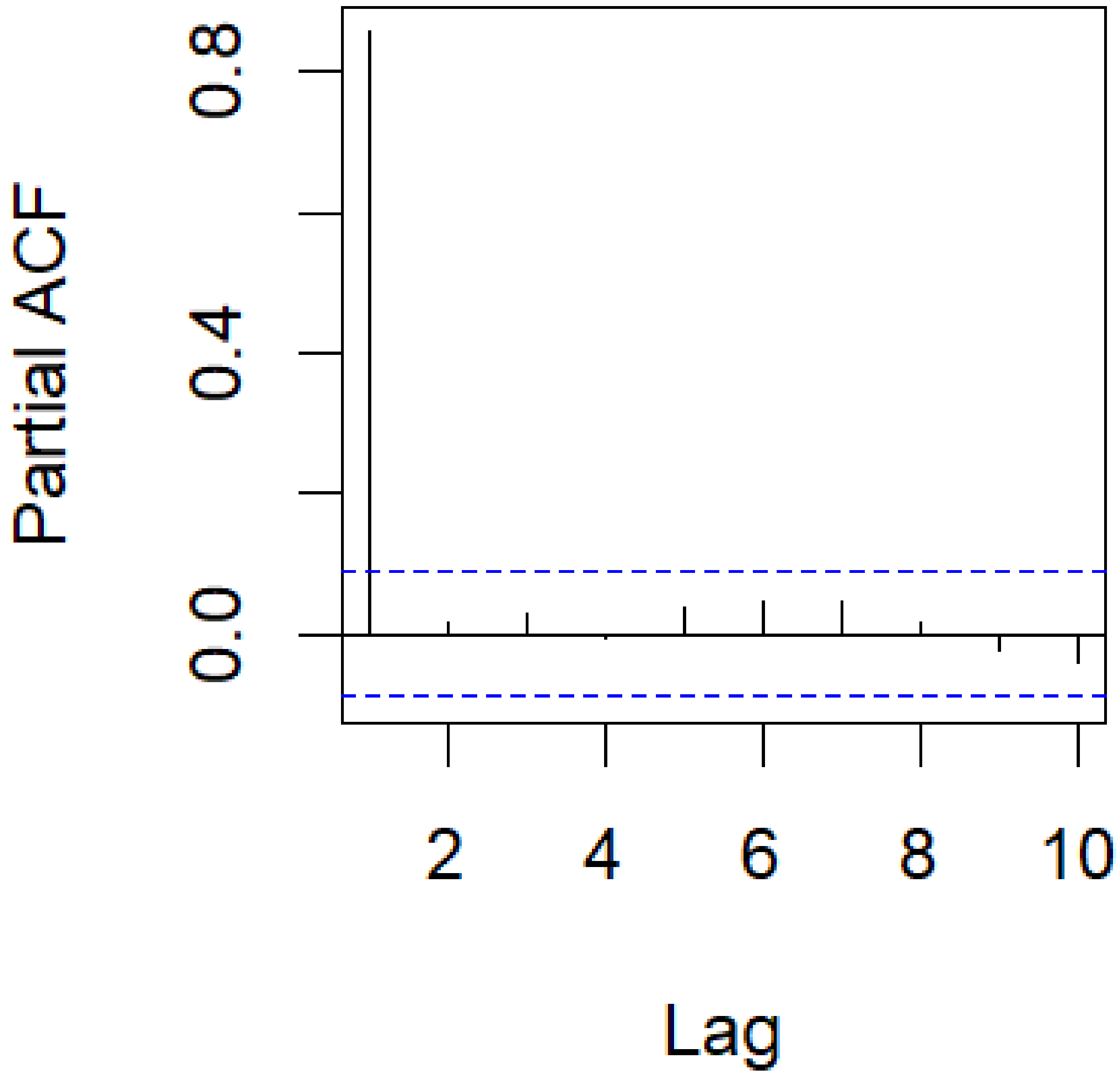
Plot PACF (Partial Autocorrelation Function) AR(1)

```
# Model AR(1): Y_t = 0.9 * Y_{t-1} + e_t
# (Parameter R: ar = 0.9)
dev.new()
par(mfrow = c(1, 2))
# PLOT KIRI (TEORETIS)
pacf_teori_vector <- ARMAacf(ar = 0.9, lag.max = 10, pacf =
TRUE)
# Plot nilai teoretis vs lag
plot(pacf_teori_vector, type = "h",
     main = "PACF Teoretis (Model AR(1))",
     xlab = "Lag", ylab = "PACF",
     ylim = c(-1, 1),
     lwd = 3, col = "red",
     xaxt = "n") # Matikan sumbu x default
axis(1, at = seq(1, 10, by = 1)) # Buat sumbu x manual 1, 2,
3...
abline(h = 0)
```

```
# PLOT KANAN (SAMPEL)
set.seed(123)

# Simulasi data dari model AR(1)
data_sim <- arima.sim(model = list(ar = 0.9), n = 500)

# Gunakan fungsi pacf() bawaan R
# Fungsi ini sudah benar (mulai dari Lag 1)
# dan otomatis menampilkan batas signifikansi
pacf(data_sim, lag.max = 10,
 main = "PACF Sampel (dari Data Simulasi n=500)")

# Kembalikan layout ke normal
par(mfrow = c(1, 1))
```

Plot PACF (Partial Autocorrelation Function) AR(1)





Proses AR (2)

Proses AR(2)

- Bila $p = 2$ didapatkan

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + a_t$$

- *Stationarity conditions* bagi AR(2) adalah

$$\phi_1 + \phi_2 < 1, \quad \phi_2 - \phi_1 < 1, \quad |\phi_2| < 1$$

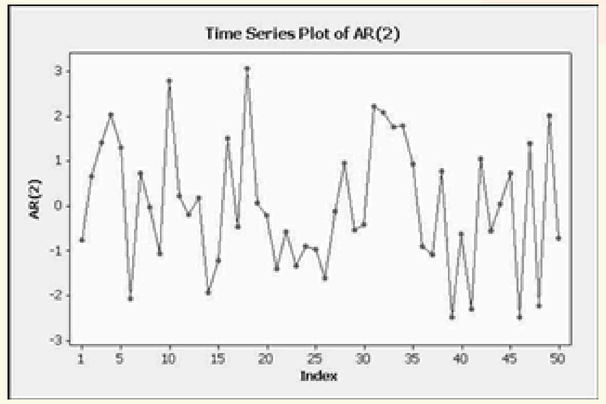
- Struktur koragam

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

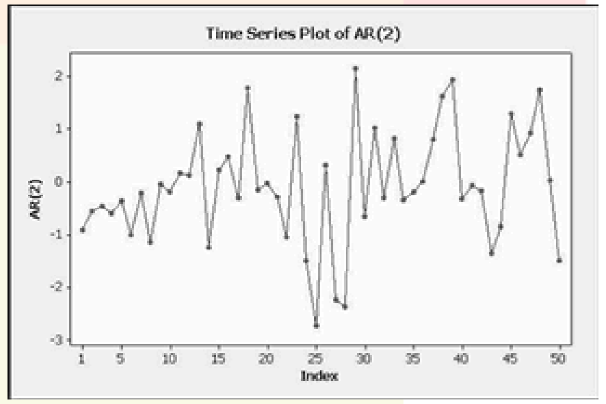
- Struktur autokorelasi

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Contoh Pola Data AR(2)



$\phi_1 = 1.5; \phi_2 = -0.75$

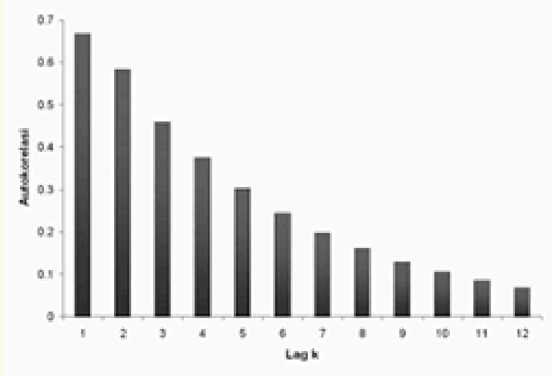


$\phi_1 = 0.5; \phi_2 = 0.25$

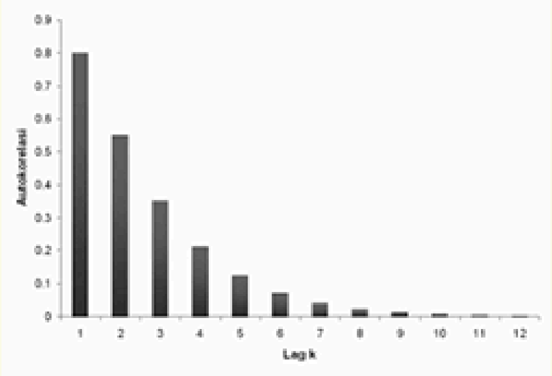
Proses AR (2)

Pola Autokorelasi AR(2)

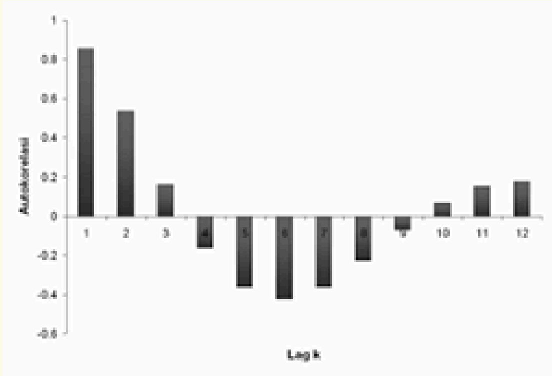
Struktur autokorelasi AR(2) **juga** menurun ekponensial (*tail off*)



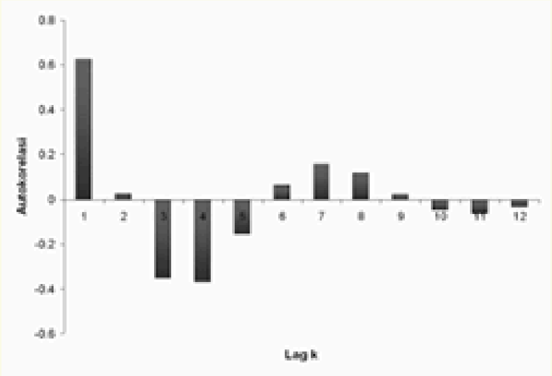
$\phi_1 = 0.5, \phi_2 = 0.25$



$\phi_1 = 1.0, \phi_2 = -0.25$



$\phi_1 = 1.5, \phi_2 = -0.75$



$\phi_1 = 1.0, \phi_2 = -0.6$

PACF AR (2)

Untuk model AR(2) yang didefinisikan sebagai:

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + a_t$$

Fungsi Autokorelasi Parsial (PACF) teoretisnya, ϕ_{kk}, untuk **lag** k (di mana $k \geq 1$) adalah:

$$\phi_{kk} = \begin{cases} \rho_1 = \frac{\phi_1}{1-\phi_2} & \text{jika } k = 1 \\ \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1-\rho_1^2} & \text{jika } k = 2 \\ 0 & \text{jika } k \geq 3 \end{cases}$$

- ϕ_{11} **(Lag 1):** Mengukur korelasi parsial antara Z_t dan Z_{t-1}. Nilainya **tidak nol**.
- ϕ_{22} **(Lag 2):** Mengukur korelasi parsial antara Z_t dan Z_{t-2}, setelah memperhitungkan Z_{t-1}. Karena Z_{t-2} ada di model, nilainya **tidak nol**.
- ϕ_{33} **(Lag 3):** Mengukur korelasi parsial antara Z_t dan Z_{t-3}, setelah memperhitungkan Z_{t-1} dan Z_{t-2}. Karena Z_{t-3} **tidak ada** di model AR(2), korelasi parsialnya (setelah Z_{t-1} dan Z_{t-2} dikontrol) adalah **nol**.

Kesimpulan

Model AR(1)

Model: $Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + a_t$

1. ACF (Meluruh)

Nilai "tidak nol" yang meluruh ini mengikuti formula:

$$\rho_k = \phi_1^k$$

- Jadi, $\rho_1 = \phi_1$
- $\rho_2 = \phi_1^2$
- $\rho_3 = \phi_1^3$
- ...dan seterusnya.

2. PACF (Terputus)

Nilai "tidak nol" satu-satunya adalah pada lag 1:

$$\phi_{11} = \rho_1 = \phi_1$$

Model AR(2)

Model: $Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + a_t$

1. ACF (Meluruh)

Nilai "tidak nol" yang meluruh ini mengikuti **formula rekursif** (Persamaan Yule-Walker):

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} \quad (\text{untuk } k \geq 1)$$

- $\rho_1 = \frac{\phi_1}{1-\phi_2}$
- $\rho_2 = \phi_1 \rho_1 + \phi_2 = \frac{\phi_1^2}{1-\phi_2} + \phi_2$

2. PACF (Terputus)

Nilai "tidak nol" ada dua, yaitu pada lag 1 dan lag 2:

1. ϕ_{11} **(Lag 1):**

$$\phi_{11} = \rho_1 = \frac{\phi_1}{1-\phi_2}$$

2. ϕ_{22} **(Lag 2):**

$$\phi_{22} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2}$$

Model AR(3)

Model: $Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \phi_3 Z_{t-3} + a_t$

1. ACF (Meluruh)

Nilai "tidak nol" yang meluruh ini mengikuti **formula rekursif**:

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} + \phi_3 \rho_{k-3} \quad (\text{untuk } k \geq 1)$$

- **Untuk ρ_1 dan ρ_2:** Keduanya harus diselesaikan dari sistem 2 persamaan ini:
  1. $(1-\phi_2)\rho_1 - \phi_3 \rho_2 = \phi_1$
  2. $-(\phi_1 + \phi_3)\rho_1 + \rho_2 = \phi_2$
- **Untuk ρ_3 dan seterusnya:** Setelah ρ_1 dan ρ_2 ditemukan, sisanya bisa dihitung secara rekursif:
- $\rho_3 = \phi_1 \rho_2 + \phi_2 \rho_1 + \phi_3$
- ...
- $\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} + \phi_3 \rho_{k-3} \quad (\text{untuk } k \geq 4)$

2. PACF (Terputus)

Nilai "tidak nol" ada tiga, yaitu pada lag 1, 2, dan 3. Rumusnya adalah solusi dari sistem Yule-Walker:

1. ϕ_{11} **(Lag 1):**

$$\phi_{11} = \rho_1$$

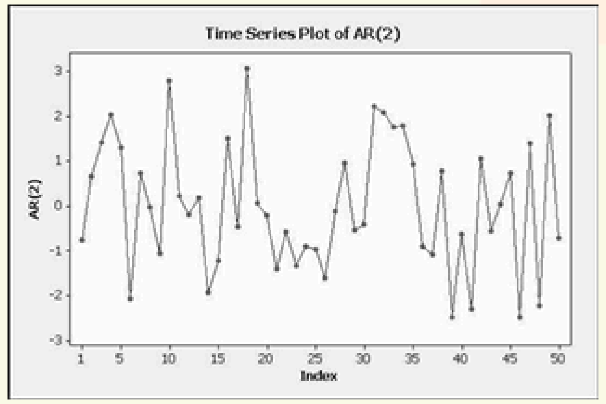
2. ϕ_{22} **(Lag 2):**

$$\phi_{22} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2}$$

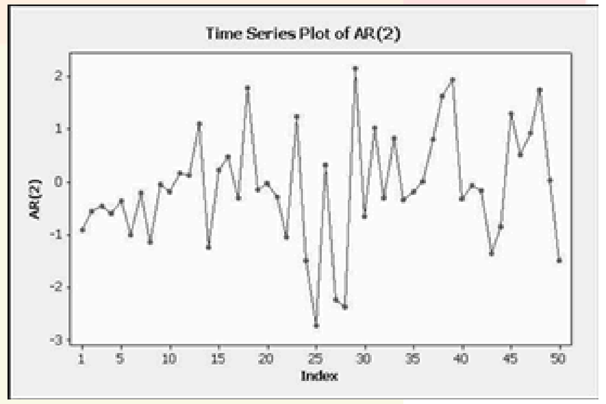
3. ϕ_{33} **(Lag 3):** Ini adalah solusi $\phi_{3,3}$ dari matriks Yule-Walker 3x3. Rumusnya sangat panjang dan rumit, tetapi intinya nilainya **tidak nol**.

PACF AR (2)

Contoh Pola Data AR(2)



$\phi_1 = 1.5; \phi_2 = -0.75$



$\phi_1 = 0.5; \phi_2 = 0.25$

Tugas : Buatkan Plot ACF dan PACF untuk Model AR (2) ini di program R !

SEE YOU NEXT WEEK !

Ferdian Bangkit Wijaya, S.Stat., M.Si
NIP. 199005202024061001
ferdian.bangkit@untirta.ac.id