# A sztochasztikus idősormodellezési filozófia, és alapelemei: a fehérzaj-, az AR-, az MA- és ARMA-folyamatok

Ferenci Tamás
tamas.ferenci@medstat.hu

Utoljára frissítve: 2023. május 9.

**Tartalom**

## Tartalomjegyzék



## 1. Matematikai emlékeztető

### 1.1. Valószínűségszámítás emlékeztető

#### Várható érték

Ki fogjuk használni a következőket:

- A várható érték lineáris: $\mathbb{E}\left(\sum_i X_i\right) = \sum_i \mathbb{E}X_i$
- A várható érték lineáris: $\mathbb{E}\left(cX\right) = c\mathbb{E}X$
- Konstans várható értéke saját maga: $\mathbb{E}c = c$

### Szórásnégyzet

Ki fogjuk használni a következőket:

- A szórásnégyzet nem lineáris: $\mathbb{D}^2\left(\sum_i X_i\right) = \sum_i \mathbb{D}^2 X_i$ *ha* $X_i$-k (páronként) korrelálatlanok (szemben a várható értékkel, ez *nem* mindig igaz!); ne feledjük, a függetlenség implikálja a korrelálatlanságot
- A szórásnégyzet nem lineáris: $\mathbb{D}^2(cX) = c^2\mathbb{D}^2 X$
- Konstans szórásnégyzete nulla: $\mathbb{D}^2 c = 0$

### Kovariancia és korreláció

Ki fogjuk használni a következőket:

- A kovariancia/korreláció bilineáris: $\operatorname{cov}\left(\sum_i X_i, \sum_j Y_j\right) = \sum_i \sum_j \operatorname{cov}(X_i, Y_j)$
- A kovariancia/korreláció bilineáris: $\operatorname{cov}(aX, bY) = ab \operatorname{cov}(X, Y)$
- Konstans mindennel korrelálatlan: $\operatorname{cov}(c, X) = 0$
- Az önkovariancia a variancia: $\operatorname{cov}(X, X) = \mathbb{D}^2 X$

## 2. A sztochasztikus idősorelemzési iskola

### Filozófiai alapok

- Determinisztikus (például dekompozíciós idősormodellek) vs. sztochasztikus idősorelemzés
- A determinisztikus iskolában is van – természetesen – véletlen, csak a szerepe más: pusztán arra korlátozódik, hogy az *adott időszaki* értéket beállítsa
- A sztochasztikus iskolában ezzel szemben a véletlen az *egész későbbi* lefutást befolyásolja, a véletlennek „folyamatépítő szerepe” van
- Lássunk egy példát, hogy jobban megértsük mit jelentenek ezek a kissé homályos megfogalmazások!

### Példa a két iskolára

- Az egyik idősorunk – sokasági modellel megadva – legyen

  $$Y_t^{(D)} = \alpha t + u_t,$$

  ahol $\alpha$ konstans, $u_t \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right)$ függetlenül

- A másik modell legyen

$$Y_t^{(S)} = Y_{t-1}^{(S)} + \alpha + u_t,$$

ahol $\alpha$ és $u_t$ mint előbb, $Y_0^{(S)}$ pedig legyen 0

- A további elemzésekhez hasznos lesz a következő átalakítás:

$$Y_t^{(S)} = Y_{t-1}^{(S)} + \alpha + u_t = \left(Y_{t-2}^{(S)} + \alpha + u_{t-1}\right) + \alpha + u_t =$$
$$= \left[\left(Y_{t-3}^{(S)} + \alpha + u_{t-2}\right) + \alpha + u_{t-1}\right] + \alpha + u_t = \ldots = \alpha t + \sum_{i=1}^{t} u_i$$

- Hasonlítanak is, meg nem is...

### Hasonlóság

Számítsuk ki a $\mu_t$ várható érték függvényeket:

$$\mu_t^{(D)} = \mathbb{E}\left(\alpha t + u_t\right) = \mathbb{E}\left(\alpha t\right) + \mathbb{E}\left(u_t\right) = \alpha t + 0 = \alpha t$$
$$\mu_t^{(S)} = \mathbb{E}\left(\alpha t + \sum_{i=1}^{t} u_i\right) = \alpha t + \sum_{i=1}^{t} 0 = \alpha t$$

### Különbség

Nézzük most meg a $\sigma_t^2$ szórásnégyzet függvényeket:

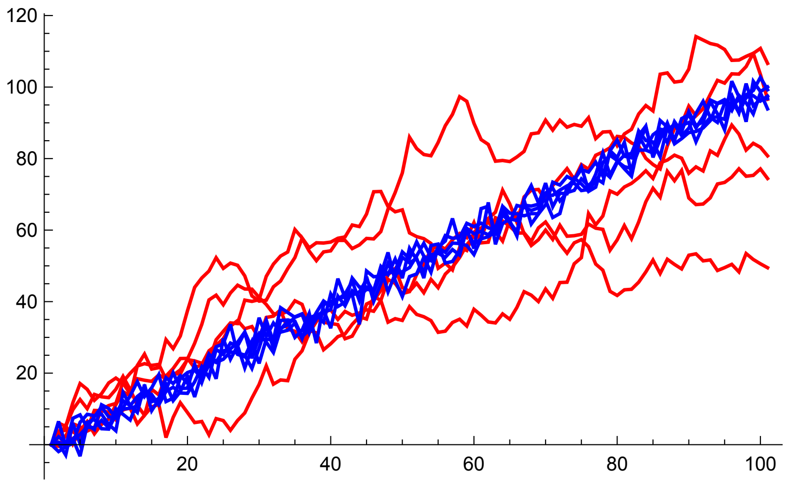
$$\sigma_t^{2(D)} = \mathbb{D}^2\left(\alpha t + u_t\right) = \mathbb{D}^2\left(\alpha t\right) + \mathbb{D}^2\left(u_t\right) = 0 + \sigma^2 = \sigma^2$$
$$\sigma_t^{2(S)} = \mathbb{D}^2\left(\alpha t + \sum_{i=1}^{t} u_i\right) = \mathbb{D}^2\left(\alpha t\right) + \mathbb{D}^2\left(\sum_{i=1}^{t} u_i\right) = 0 + \sum_{i=1}^{t} \sigma^2 =$$
$$= t\sigma^2$$

### Az igazi eltérés a viselkedésben

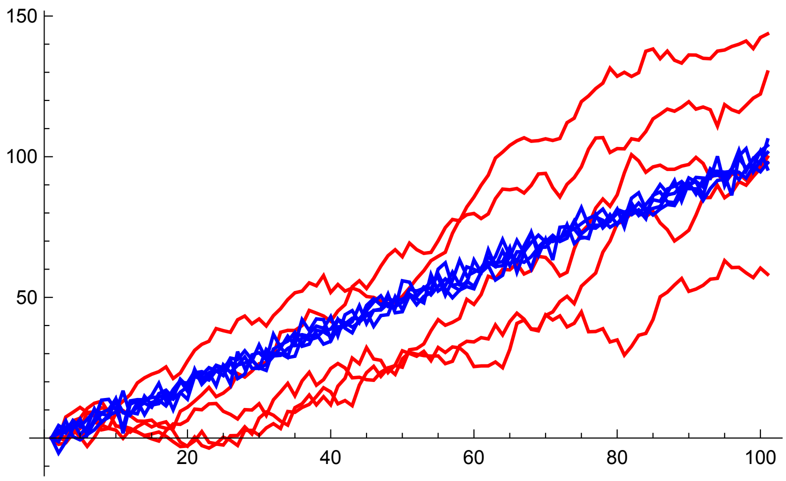
- Ennek sokkal mélyebb magyarázatát kapjuk, ha arra gondolunk, hogy a viselkedésük miben más
- Segítség: kidobunk egy nagyon deviáns $u_t$-t (pl $\sigma^2 = 1$ mellett +5-öt vagy -5-öt), miben tér el a két idősor későbbi viselkedése?
- Ez a két extrém véglet:
  - Az $Y_t^{(D)}$-nél már a *rögtön következő* időpontban sincsen *semmilyen* hatása ennek
  - $Y_t^{(S)}$-nél viszont az idősor *egész későbbi lefutását* befolyásolja, *csorbítatlanul*
- Bizonyos értelemben *ugyanazt* a trendet jelentik – gondoljunk a várható érték függvényre – de mégis teljesen eltérő *viselkedéssel*

- Megtestesítik a két iskolát: $Y_t^{(D)}$ a lineáris trend a determinisztikus szemléletben (véletlen szerepe: csak az adott időszakra korlátozódik), az $Y_t^{(S)}$ a lineáris trend sztochasztikus értelemben (véletlen szerepe: folyamatépítő)

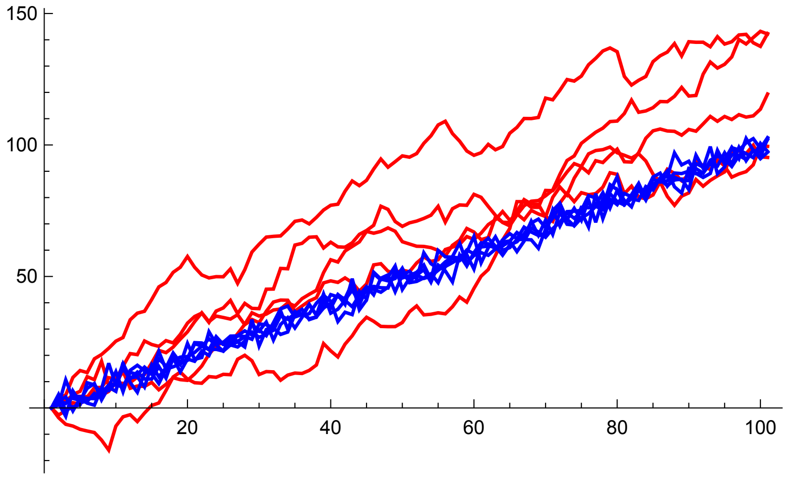
**Hogy néznek ki?**




**Hogy néznek ki?**




**Hogy néznek ki?**




### Más elnevezések

- Főleg sztochasztikus folyamatos kontextusban az $Y_t^{(S)}$-et $\alpha = 0$ esetén **véletlen bolyongásnak** (random walk, RW) is szokás nevezni
- Rárakok egy bábut az origóra a számegyenesen, dobok egy véletlen számot ($u_t$) és annyival odébb rakom, majd ezt ismétlem $\rightarrow$ bolyongani fog a számegyenesen
- (Folytonos határa a Wiener-folyamat)
- Az $\alpha \neq 0$ esetben pedig **eltolásos véletlen bolyongásról** (random walk with drift, RWD) szoktak beszélni
- Amennyiben az RW-t log-skálán vesszük, tehát $\log Y_t = \log Y_{t-1} + u_t'$ a modellünk, $Y_0 \neq 0$ mellett (eredeti skálára visszavetítve: $Y_t = Y_{t-1} \cdot u_t = Y_0 \cdot \prod_{i=1}^t u_i$; nem a növekmények, hanem a hányadosok adott fae változók, nagyobb értékeknél nagyobb ingadozás) akkor **geometriai véletlen bolyongásról** szokás beszélni (pénzügyes szóhasználatban!)

# 3. ARMA-modellek

## 3.1. WN-folyamat

### A fehérzaj (WN) folyamat

- A folyamat
$$u_t,$$
melyre $\mathbb{E}\left(u_t\right) = 0$, $\mathbb{D}^2\left(u_t\right) = \sigma^2$ és $\operatorname{cov}\left(u_t, u_s\right) = 0$ $(t \neq s)$
- Jele: $\mathcal{WN}\left(0, \sigma_u^2\right)$
- Az eloszlásról nem mondtunk semmit

- Néha feltesszük, hogy nem csak korrelálatlan, de független is (általában nem ez az alapértelmezés, külön kell mondani); egyedül normális eloszlás feltevése esetén mindegy
- Zaj: logikus, ez valamilyen teljesen modellezhetetlen, struktúra nélküli folyamat
- De mitől fehér? ...optikai analógia!

A fény is felfogható egy idősornak, hiszen egy elektromágneses rezgés. Itt a spektrális elemzés nagyon jól érthető tartalommal bír, hiszen a fény frekvenciája egész egyszerűen a színe! (Ilyen értelemben a prizma, mely a ráejtett fényt „szétbontja" összetevő színeire, igazából nem más, mint egy spektrális elemzés fizikai implementációja!) Ismert, hogy a fehér fény az, amely azonosan tartalmaz minden színt; a fenti értelemben tehát a fehér fény spektruma egy vízszintes egyenes. A két dolog ott kapcsolódik össze, hogy belátható, hogy a fenti definiált idősor spektruma szintén egy vízszintes egyenes lesz – ilyen értelemben tehát a színek közül a fehér idősoros megfelelője.

## 3.2. MA-modellek

### A mozgóátlagú (MA) modell

A $q$-ad rendű mozgóátlagú modell (modell, mivel most a sokaságban specifikáljuk):

$$Y_t = \alpha + u_t + \theta_1 u_{t-1} + \theta_2 u_{t-2} + \ldots + \theta_q u_{t-q},$$

ahol $u_t$ hiba(folyamat), szokták itt úgy is hívni, hogy innováció, fehérzaj-folyamatnak tételezzük fel: $u_t \sim \mathcal{WN}\left(0, \sigma_u^2\right)$; $\alpha$ és $\theta_i$-k valós, $\sigma_u^2$ pozitív valós konstans paraméterek

### MA(1)-folyamat: várhatóérték-függvény

Közvetlenül a definíció alapján (a várhatóérték-képzést „ráeresztve" a definícióra):

$$\mu_t = \alpha + 0 + \theta_1 \cdot 0 = \alpha,$$

tehát $\mu_t$ időfüggetlen

### MA(1)-folyamat: szórásnégyzet-függvény

Közvetlenül a definíció alapján (a szórásnégyzet-képzést „ráeresztve" a definícióra):

$$\sigma_t^2 = 0 + \sigma_u^2 + \theta_1^2 \sigma_u^2 = \sigma_u^2 \left(1 + \theta_1^2\right)$$

tehát $\sigma_t^2$ időfüggetlen (ez lesz $\gamma_0$)

### MA(1)-folyamat: autokovariancia-függvény

Közvetlenül a definíció alapján (a kovariancia-képzést „ráeresztve" a definícióra):

$$\operatorname{cov}\left(Y_t, Y_{t-1}\right) = \operatorname{cov}\left(\alpha + u_t + \theta_1 u_{t-1}, \alpha + u_{t-1} + \theta_1 u_{t-2}\right) = \ldots$$

összesen 9 tag, ebből azonban csak 1 nem-nulla (a többiben vagy konstans van, vagy különböző időpontokhoz tartozó $u$-k érintkeznek):

$$\ldots = \operatorname{cov}\left(\theta_1 u_{t-1}, u_{t-1}\right) = \theta_1 \sigma_u^2,$$

tehát ez időfüggetlen, jogos a $\gamma_1$ jelölés

### MA(1)-folyamat: autokovariancia-függvény

Közvetlenül a definíció alapján (a kovariancia-képzést „ráeresztve” a definícióra):

$$\operatorname{cov}\left(Y_t, Y_{t-k}\right) = \operatorname{cov}\left(\alpha + u_t + \theta_1 u_{t-1}, \alpha + u_{t-k} + \theta_1 u_{t-k-1}\right),$$

amiben immár – az előbbi logikát követve – mindegyik tag nulla ha $k > 1$.

Összefoglalva:

$$\gamma_k = \begin{cases} \sigma_u^2 \left(1 + \theta_1^2\right) & \text{ha k=0} \\ \theta_1 \sigma_u^2 & \text{ha k=1} \\ 0 & \text{ha k>1} \end{cases}$$

### MA(1)-folyamat: stacionaritás

Az előbbieket összerakva ($\mu_t$ időfüggetlen, $\sigma_t^2$ időfüggetlen, $\gamma_k$ csak késleltetéstől függ) tehát kapjuk, hogy az MA(1) folyamat stacioner.

Mégpedig *mindig* az (értsd: paraméter-választástól függetlenül).

### MA(1)-folyamat: korrelogram

- ACF: $\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$; eltűnik 1 késleltetés után
- PACF: belátható, hogy lecsengő (azaz $\lim_{k\to\infty} \mathrm{PACF}\left(k\right) = 0$)

### MA(q)-folyamatok

- $\mu_t = \alpha$ (ugyanazért)
- $\sigma_t^2 = \sigma_u^2 \left(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \ldots + \theta_q^2\right)$ (ugyanazért)
- ACF $q$ késleltetés után eltűnő (ugyanazért)
- PACF lecsengő (ugyanúgy kiszámolható lenne), adott esetben bonyolultabb mintázat szerint
- Mindig stacioner (paraméter-választástól függetlenül)!

## 3.3. AR-modellek

### Az autoregresszív (AR) modell

A $p$-ed rendű autoregresszív modell (modell, mivel most a sokaságban specifikáljuk):

$$Y_t = \alpha + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \ldots + \phi_p Y_{t-p} + u_t,$$

ahol $u_t$ hiba(folyamat), szokták itt úgy is hívni, hogy innováció, fehérzaj-folyamatnak tételezzük fel: $u_t \sim \mathcal{WN}\left(0, \sigma_u^2\right)$; $\alpha$ és $\phi_i$-k valós, $\sigma_u^2$ pozitív valós konstans paraméterek

**Megjegyzések**

- Speciális esetek: ha $p = 1$ és $\phi_1 = 1$, akkor RWD (ha ráadásul $\alpha = 0$ akkor RW)
- Stacionaritás: ez – szemben az MA-folyamatokkal – nyilván nem lehet *mindig* stacioner, hiszen az RW sem az, de *néha* lehet az is (pl. $p = 1$ és $\phi_1 = 0$), a stacionaritásnak tehát itt valamilyen – paraméterekre vonatkozó – feltétele kell legyen
- Ennek vizsgálatát későbbre halasztjuk, és most azt mondjuk, hogy teljesültek ezek a feltételek

**AR(1) folyamat: várhatóérték-függvény**

Vegyük mindkét oldal várhatóértékét (feltettük a stacionaritást, $\mathbb{E}(Y_t) \equiv \mu$)

$$\mu = \alpha + \phi_1 \mu + 0,$$

mivel a várhatóérték lineáris, innen

$$\mu = \frac{\alpha}{1 - \phi_1}$$

($\phi_1 \neq 1$ kell legyen: látni fogjuk, hogy ez tényleg fennáll, ha stacioner)

**AR(1) folyamat: szórásnégyzet-függvény**

Vegyük mindkét oldal szórásnégyzetét (feltettük a stacionaritást, $\mathbb{D}^2(Y_t) \equiv \sigma^2$)

$$\sigma^2 = \phi_1^2 \sigma^2 + \sigma_u^2,$$

kihasználva, hogy a három tag korrelálatlan, innen

$$\sigma^2 = \frac{\sigma_u^2}{1 - \phi_1^2}$$

($|\phi_1| < 1$ kell legyen: látni fogjuk, hogy ez tényleg fennáll, ha stacioner)

**AR(1) folyamat: autokovariancia-függvény**

Kezdjük az 1 késleltetéssel (természetesen a stacionaritást most is feltételezzük):

$$\operatorname{cov}(Y_t, Y_{t-1}) = \operatorname{cov}(\alpha + \phi_1 Y_{t-1} + u_t, Y_{t-1}) =$$
$$= 0 + \phi_1 \operatorname{cov}(Y_{t-1}, Y_{t-1}) + 0 = \phi_1 \sigma^2 = \phi_1 \frac{\sigma_u^2}{1 - \phi_1^2},$$

időfüggetlen; innen rekurzívan mehetünk tovább:

$$\operatorname{cov}(Y_t, Y_{t-k}) = \operatorname{cov}(\alpha + \phi_1 Y_{t-1} + u_t, Y_{t-k}) = \phi_1 \gamma_{k-1},$$

szintén időfüggetlen, ezekből tehát indukcióval kapjuk, hogy

$$\gamma_k = \phi_1^k \sigma^2 = \frac{\phi_1^k \sigma_u^2}{1 - \phi_1^2}$$

($|\phi_1| < 1$ kell legyen: látni fogjuk, hogy ez tényleg fennáll, ha stacioner)

**AR(1) folyamat: autokorreláció és parciális autokorreláció-függvény**

Definíció alapján az autokovariancia-függvényből (mivel stacioner):

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \phi_1^k,$$

tehát az ACF *geometriailag lecsengő*

Külön kellene igazolni, de a mechanika alapján is elég nyilvánvaló, hogy

$$\mathrm{PACF}\,(k) = \begin{cases} \rho_1 & \text{ha k=1} \\ 0 & \text{ha k>1} \end{cases}$$

Épp az MA(1) „fordítva": a kettő korrelogramja egymás *duálisa*

**AR(1) folyamatok RWD-nél látott rekurzív visszafejtése**

$$\begin{aligned} Y_t &= \alpha + \phi_1 Y_{t-1} + u_t = \alpha + \phi_1 \left(\alpha + \phi_1 Y_{t-2} + u_{t-1}\right) + u_t = \\ &= \alpha + \phi_1 \alpha + \phi_1^2 \left(\alpha + \phi_1 Y_{t-3} + u_{t-2}\right) + \phi_1 u_{t-1} + u_t = \ldots \end{aligned}$$

Ha feltételezzük, hogy „végtelenből jön" a folyamat (ekkor a kezdőérték mindegy lesz), akkor ez

$$\ldots = \alpha \sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^i + \sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^i u_{t-i} = \frac{\alpha}{1-\phi_1} + \sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^i u_{t-i}$$

($|\phi_1| < 1$ kell legyen: látni fogjuk, hogy ez tényleg fennáll, ha stacioner)

Mint egy MA-modell: ez az *AR(1) modell MA($\infty$)-reprezentációja*

**AR(p) folyamatok**

- Stacionaritást egyelőre itt is feltételezzük
- Várhatóérték-függvény: $\mu = \frac{\alpha}{1-\phi_1-\phi_1-\ldots-\phi_p}$
- Szórásnégyzet-függvény bonyolultabb (az autokovarianciák is megjelennek benne)
- Az ACF lecsengő (végtelenben 0-ba tart), de már bonyolultabb mintázat szerint is lehet
- PACF-ből az első $p$ nem-nulla, a többi viszont már nulla
- Tehát az azonos rendű AR és MA folyamatok korrelogramja általánosságban is egymás duálisa
- Van MA($\infty$)-reprezentációja

## 3.4. ARMA-modellek

### Az autoregresszív-mozgóátlagú (ARMA) modell

A $p, q$ rendű autoregresszív-mozgóátlagú modell (modell, mivel most a sokaságban specifikáljuk):

$$Y_t = \alpha + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \ldots + \phi_p Y_{t-p} + \\ + u_t + \theta_1 u_{t-1} + \theta_2 u_{t-2} + \ldots + \theta_q u_{t-q},$$

ahol $u_t$ hiba(folyamat), szokták itt úgy is hívni, hogy innováció, fehérzaj-folyamatnak tételezzük fel: $u_t \sim \mathcal{WN}\left(0, \sigma_u^2\right)$; $\alpha$, $\phi_i$-k és $\theta_i$-k valós, $\sigma_u^2$ pozitív valós konstans paraméterek.

### Tulajdonságok

- Stacionaritásnak feltétele van (ami csak az AR együtthatóktól függ)
- Ha fennáll, akkor mind az ACF, mind a PACF lecsengő (nem eltűnő), lehet, hogy bonyolultabb mintázat szerint
- Van MA($\infty$)-reprezentációja