A stacionaritás és az ergodicitás fogalma

Ferenci Tamás
tamas.ferenci@medstat.hu

Utoljára frissítve: 2023. május 9.

Tartalom

Tartalomjegyzék

1. A stacionaritás fogalma, szükségessége

Az alapprobléma

- Egyetlen realizáció problémája
- Hogyan lehet egyetlen mintából bármit megbecsülni? Nyilván sehogy…
- És ezen ráadásul – ugyebár – a hosszabb megfigyelés sem segít
- A megoldás: valamilyen plusz-feltevés kell!

Jön a jótündér

- Mondjuk egy jótündér megsúgja nekünk, hogy minden időpontban (ami ugye egy valószínűségi változó) ugyanaz a várható érték:

$$\mu_t \equiv \mu$$

- (A $\equiv$ természetesen azt jelenti, hogy $\forall t$-re)
- Ez tehát egyfajta *eltolásinvariancia*; írhattuk volna, teljesen egyenértékűen azt is, hogy $\mu_t = \mu_s$, vagy azt is, hogy $\mu_t = \mu_{t+h}$ (most elég nyakatekert, de később ez lesz a jobb)

- Ekkor már ezt az – immár létező – *közös* várható értéket, igaz *csak ezt*, de ezt meg tudjuk becsülni mintából!
- Ehhez – de csak ehhez! – „összeönthetőek” a különböző időponthoz tartozó megfigyelések (igazából ehhez még valami további dolog is kell, de erről majd később, most fogadjuk el, hogy megvalósítható)
- Hiszen:

$$\widehat{\mu} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} y_t$$

- Menjünk tovább...

További jótündérek

- Ha $\sigma_t^2 \equiv \sigma^2$ akkor létezik közös szórásnégyzet, és becsülhető: $\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \left(y_t - \widehat{\mu}\right)^2$ (torzított, de aszimptotikusan torzítatlan, továbbá konzisztens)
- Menjünk tovább...
- Ha létezik az $F_{Y_i} \equiv F$ közös eloszlás, akkor $\widehat{F}$ becsülhető (pl. hisztogrammal)
- Menjünk tovább...
- Két változónál is az eltolásinvarianciát akarjuk megtartani: $\gamma_{t,s}$ legyen ugyanaz mint $\gamma_{t+h,s+h}$
- De gondoljuk végig, ez magyarul azt jelenti, hogy $\gamma_{t,s}$ csak a $t-s$-től függ!
- Ez esetben becsülhető: $\widehat{\gamma}_k = \frac{1}{T-k} \sum_{t=1}^{T-k} \left(y_t - \widehat{\mu}\right)\left(y_{t+k} - \widehat{\mu}\right)$
- Menjünk tovább...
- $F_{Y_t,Y_s} = F_{Y_{t+h},Y_{s+h}}$, minden s,t,h-ra, akkor a kétváltozós eloszlás komplettül becsülhető

És végül...

- Az utolsó, immár tényleg mindent lefedő szint: $F_{Y_{t_1},Y_{t_2},\ldots,Y_{t_k}} = F_{Y_{t_1+h},Y_{t_2+h},\ldots,Y_{t_k+h}}$ minden értelmes k-ra, $t_1,t_2,\ldots,t_k$-ra és h-ra
- Ennek a neve: **erős stacionaritás**
- Ez az a feltevés, ami a keresztmetszethez hasonló becsülhetőséget tesz lehetővé annak ellenére is, hogy idősorban vagyunk

- A keresztmetszet azért volt egyszerűbb, mert a függetlenséget feltettük, de itt most erről szó nincs: pont az a lényeg, hogy úgy teremtettük meg a keresztmetszethez hasonló becsülhetőséget, hogy semmilyen függetlenséget nem kellett feltételeznünk – szerencsére, mert annak ugye nem lenne értelme (persze a függetlenség implikálja az erős stacionaritást)
- Viszont: rengeteget követel, elméleti kezeléshez jó, de gyakorlatban nagyon nehét ellenőrizni a teljesülését
- Éppen ezért gyengítsük kicsit…

A gyenge stacionaritás

- Mint az erős stacionaritás, de
  - csak $k = 1, 2$-re
  - teljes eloszlás-egyezőség helyett csak első két momentumban egyezőséget követelünk meg
- Mi adódik ebből?
  1. $\mu_t \equiv \mu$
  2. $\sigma_t^2 \equiv \sigma^2$
  3. $\gamma_{t,s} \equiv \gamma_{t-s}$
- (Valójában a 2. feltétel redundáns, hiszen $\gamma_{t,t} = \sigma_t^2$)
- A továbbiakban, ha mást nem mondunk, stacionaritás alatt mindig ezt a **gyenge (vagy kovariancia-) stacionaritást** értjük

A stacionaritás tesztelése

- A fentiek már adnak egy – teljesen szubjektív – módszert a stacionaritás tesztelésére: nézzünk rá az idősorra, az 1. és 2. feltétel megítélhető
- Ez a „grafikus tesztelés” persze abszolút szubjektív
- Később látni fogunk objektív módszert (statisztikai próbát) is

2. Idősor-jellemzők mintából becslése

Egy gondolat a mintából történő becslésekről

- A már látott mintából történő becsléseknél ($\widehat{\mu}$, $\widehat{\sigma^2}$, $\widehat{\gamma_k}$ stb.) ne feledjük el, hogy mindezeket mind terheli a mintavételi ingadozás, az abból fakadó mintavételi hiba
  - …konfidenciaintervallum szerkeszthető a valódi értékre

– …tesztelhető nevezetes értékre vonatkozó hipotézis

- Ez utóbbi tipikus példája az autokorrelálatlanság ($H_0 : \rho_k = 0$ vs. $H_1 : \rho_k \neq 0$)
- Nem túl kis mintaméretnél már jó a normális approximáció: $\widehat{\rho_k} \sim \mathcal{N}(\rho_k, 1/T)$, így

$$\frac{\widehat{\rho_k}}{1/\sqrt{T}} \overset{H_0}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$$

Autokorrelálatlanság tesztelése: Ljung–Box-teszt

- Nagyon sok esetben grafikusan is feltüntetik a korrelogramon az autokorrelációra vonatkozó $\pm z_{1-\alpha/2}\frac{1}{\sqrt{T}}$ kritikus értékeket
- De vigyázat: ez a *teljes* autokorrelálatlanság ($H_0 : \rho_1 = \rho_2 = \ldots = \rho_M = 0$) tesztelésére nem alkalmas!
- (Többszörös összehasonlítások helyzete, α-infláció)
- Legnépszerűbb teszt erre: Ljung–Box-teszt:

$$Q = T(T+2)\sum_{k=1}^{M}\frac{\widehat{\rho_k}^2}{T-k} \overset{H_0}{\sim} \chi^2_M$$

- M megválasztása kérdés (ha túl kicsi, elnézhetünk egy magasabbrendű autokorrelációt, ha túl nagy, eltérhetünk a χ^2 eloszlástól)!
- Tipikus alkalmazás majd: modelldiagnosztikában

Autokorrelálatlanság tesztelése: LM-tesztek

- A Ljung–Box-teszttel komoly elméleti agályok vannak (ld. Maddala, 13.5 vagy Hayashi 2.10)
- Ennek ellenére teljesen általánosan használják…
- Lehetséges alternatíva: LM-elvű tesztek, például a Breusch–Godfrey-teszt a már említett modelldiagnosztikai helyzetben