Idősorelemzés

Ferenci Tamás
tamas.ferenci@medstat.hu

Utoljára frissítve: 2023. május 6.

Tartalom

Tartalomjegyzék

1 Az idősorelemzés alapjai

1.1. Az idősor fogalma, jelentősége, idősorelemzés

1.1.1. Az idősor fogalma

Idősor sokaságban és mintában I.

- Mi a sokaság és a minta? – ismétlés stat 2-ből
- („Sokaságban valszám kell, mintánál statisztika”)
- **Idősor** minta értelemben: időben rendezett megfigyelések

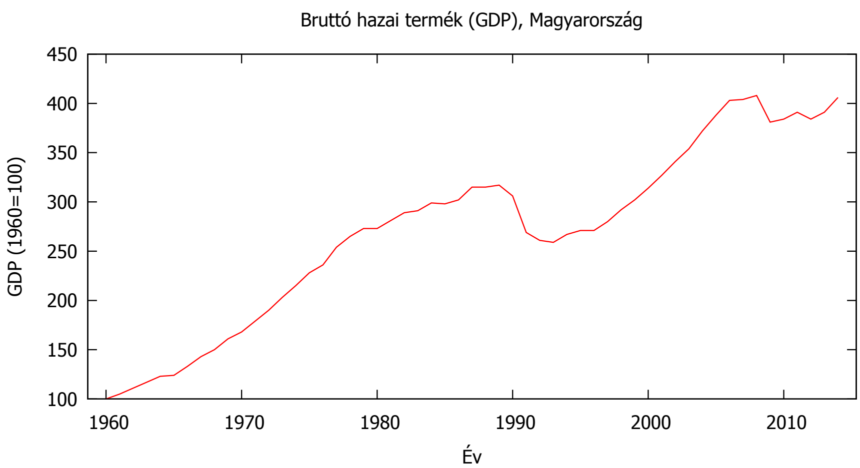
$$\{5492, 5640, \ldots, 7317\},$$

  általános jelöléssel

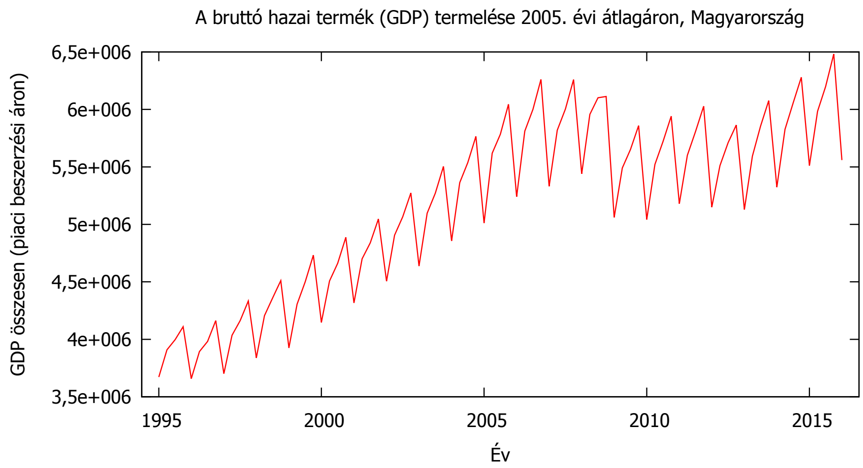
$$\{y_1, y_2, \ldots, y_T\}$$

- Az egyetlen eltérés a keresztmetszethez képest: *sorrendjük* van (hatalmas jelentősége lesz majd)

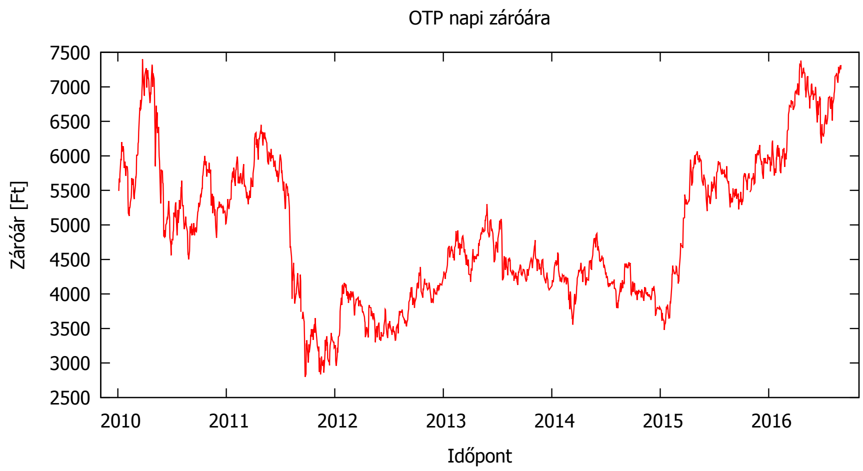
Példa: magyar GDP (hosszú éves)



Példa: magyar GDP (negyedéves)



Példa: OTP napi záróár



Idősor sokaságban és mintában II.

- Sokasági definíció: valószínűségi változók indexelt halmaza (ahol az indexet „idő”-nek hívjuk):
$$\{Y_t, t \in N\}$$
- Az idősor egy időpontban tehát egy valószínűségi változó
- Itt az N tehát egy *rendezett* halmaz
- Valszámos szó: **sztochasztikus folyamat**

- Közgázban jellemzően N diszkrét, sőt véges: $N = \{1, 2, \ldots, T\}$
- A minta tehát ennek egy realizációja (természetesen), itt a neve: **trajektória**

Mivel a valószínűségi változó pedig egy függvény ($X : \omega \to \mathbb{R}$), ezért a sztochasztikus folyamat igazából egy *kétváltozós* függvény: $Y : \omega \times N \to \mathbb{R}$. Ennek megfelelően két metszete van – úgy értve, hogy melyik paramétert rögzítjük – az egyik a trajektória, a másik egy adott időpillanathoz tartozó valószínűségi változó.

Egyetlen realizáció (reprodukálhatatlanság) problémája I.

- Mi a különbség 1406 lakás ára és az OTP 1406 napi záróárfolyama között?
- Mi van emögött?
- A függetlenség feltevés (tarthatósága)!

Egyetlen realizáció (reprodukálhatatlanság) problémája II.

- Elég, ha ismerjük az *egyes időpontok* eloszlásait? (F_{Y_1}, F_{Y_2} stb.)
- Ami teljes mértékben leírja az idősort: az *összes* időpont *együttes* eloszlása:

$$F_{Y_1, Y_2, \ldots, Y_T}$$

- (Igazából keresztmetszetnél is ez volt, csak a függetlenségi feltevés miatt esett szét egyváltozósokra)

Egyetlen realizáció (reprodukálhatatlanság) problémája III.

- Azaz: 1 dimenziós adatra vett 100 megfigyelés vs. 100 dimenziósra vett 1 megfigyelés!
- (Ezért nem segít az sem, ha hosszabbítjuk az idősorunkat!)
- Hogyan lehet egyáltalán így bármi becsülni…?
- 1 megfigyelésből? Az érdekes lesz… $\to$ további feltevésekre lesz majd szükség!

1.1.2. Az idősorelemzés közgazdasági jelentősége, története

Az idősorelemzés közgazdasági jelentősége

- A legtöbb közgazdasági adat *igazából* idősorként érhető el!
- Számos feladatnál időbeli a fókusz, gondoljunk a – szó szoros értelmében vett – előrejelzési kérdésekre

Idősorelemzés a közgazdaságtanban

- Eleinte: egyszerű determinisztikus módszerek (pl. dekompozíciós modellek már a XIX. században)
- Később regresszió is, de még tekintet nélkül az idősoros jellegre
- Cochrane és Orcutt mutatott rá először 1949-ben, hogy ez nem jó ötlet
- Megindult a kutatás ennek figyelembevételére
- Box és Jenkins könyve 1970-ben fordulópont: sztochasztikus módszerek
- Korszerű eljárások és aktuális kérdések (nemstacionaritás, nemlinearitás, többváltozós módszerek, ARCH, ...)

1.1.3. Idősorelemzési iskolák, a módszerek felosztása

Az idősorelemzési módszerek csoportosítása

- Időtartomány vs. frekvenciatartomány (csak az előbbivel fogunk most foglalkozni)
- Determinisztikus vs. sztochasztikus (definíciós kavarodások, most: a véletlennek van-e *folyamatépítő* szerepe; ld. később részletesen)
- Egyváltozós vs. többváltozós (+panel)

1.2. Idősorok jellemzői a sokaságban

Várhatóérték- és szórásnégyzet-függvény

Emlékezzünk rá, hogy egy adott időpontban az idősor egyszerűen egy valószínűségi változó, így definiálható várható értéke, szórásnégyzete, két ilyennek a kovarianciája; ez alapján:

- Várhatóérték-függvény ($\mu : N \to \mathbb{R}$):

$$\mu_t := \mathbb{E}Y_t$$

- Szórásnégyzet-függvény ($\sigma^2 : N \to \mathbb{R}_+$):

$$\sigma_t^2 := \mathbb{D}^2 Y_t = \mathbb{E}(Y_t - \mathbb{E}Y_t)^2 = \mathbb{E}(Y_t - \mu_t)^2 = \mathbb{E}Y_t^2 - \mu_t^2$$

Autokovariancia- és autokorreláció-függvény

- Autokovariancia-függvény (ACVF, $\gamma : N \times N \to \mathbb{R}$):

$$\gamma_{t,s} := \operatorname{cov}(Y_t, Y_s) = \mathbb{E}\left[(Y_t - \mathbb{E}Y_t)(Y_s - \mathbb{E}Y_s)\right] = \\ \mathbb{E}\left[(Y_t - \mu_t)(Y_s - \mu_s)\right] = \mathbb{E}(Y_t Y_s) - \mu_t \mu_s$$

- Nyilván $\gamma_{t,t} = \sigma_t^2$
- Autokorrelációs függvény (ACF, $\rho : N \times N \to [-1, 1]$):

$$\rho_{t,s} := \operatorname{corr}(Y_t, Y_s) = \frac{\gamma_{t,s}}{\sigma_t \sigma_s}$$

Ne feledjük: mindezekben semmi sztochasztikus nincs, teljesen közönséges – determinisztikus – függvények!

Parciális autokorrelációs függvény (PACF)

- Úgy viszonyul az ACF-hez mint a sima (keresztmetszeti) parciális korreláció a korrelációhoz: bizonyos változókon keresztül terjedő hatásokat szűrjük (lineárisan)
- De melyikeket?
- Ami közbeesik: t és s közti korreláció ($s > t$), szűrve a $t+1, t+2, \ldots, s-2, s-1$ időpontokon keresztül terjedő hatásokat
- Kiszámítható az ACF-ek ismeretében egyszerű mátrixműveletekkel
- (Avagy: a korreláció kijön egy olyan regresszióból, aminek egyetlen magyarázó változója van, a parciális korrelációhoz pedig hozzá kell adni a közbenső időpontokat is)

Korrelogram

- Korrelogram: ACF és PACF együtt ábrázolva
- (Egyelőre úgy tűnik, hogy ez egy kétdimenziós függvény, ezt majd később árnyalni fogjuk – és ezért nem is ábrázoljuk most még ténylegesen)
- Jelentősége: ha ismerjük nevezetes folyamatok – elméleti – korrelogramját, akkor egy minta mögötti, azt adó folyamatra következtethetünk az alapján, hogy a minta – empirikus – korrelogramja hogyan néz ki
- (Sajnos a gyakorlatban sokszor csak hozzávetőleges lehet)

2 Determinisztikus idősorelemzés, dekompozíciós idősormodellek: trend, szezonalitás és ciklus

2.1. Determinisztikus idősorelemzés

2.1.1. Alapgondolat

A determinisztikus idősorelemzés

- Az idősor alakulása *elvileg* függvényszerűen felírható bizonyos tényezők alapján
- Csak azért nem tudjuk tökéletesen megtenni, mert nem ismerjük e tényezőket, nem tudjuk milyen függvényformával hatnak, nem tudjuk pontosan mérni stb. ezért fogunk hibázni
- De pont: a hibának *csak* ennyi szerepe van…
- …beállítja az aktuális időszaki értéket, *és kész*

Dekompozíciós idősormodellek

- Minderre a legtipikusabb – és egyben legklasszikusabb – példát a **dekompozíciós idősormodellek** jelentik
- A legismertebb additív modell:

$$Y_t = R_t + C_t + S_t + u_t,$$

  ahol R_t, C_t és S_t a trend, a ciklus és a szezonalitás t-edik időszakbeli értéke rendre, u_t pedig a már említett eltérésváltozó
- Becslés?

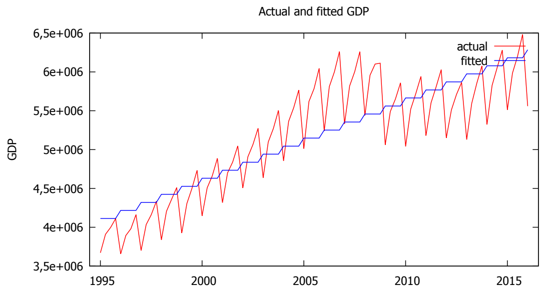
2.1.2. Determinisztikus idősormodellezés regresszióval

Regresszió alkalmazása

- Az előbbi modell teljesen természetesen becsülhető regresszióval, ha R_t, C_t és S_t helyébe beírjuk a feltételezett – paraméteres – függvényformákat

- (Most tehát mindvégig paraméteres regressziót fogunk használni)
- Legegyszerűbb eset: $R_t = \alpha + \beta t$, $C_t = 0$ és $S_t = 0$ (egyszerű lineáris trend)
- Az így kapott modell OLS-sel becsülhető

Negyedéves GDP (éves) lineáris trenddel I.

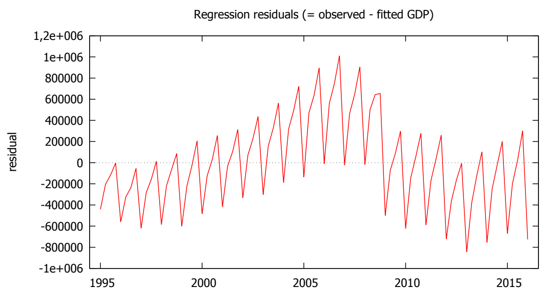


	Coefficient	Std. Error	t-ratio	p-value
const	−2,02165e+008	1,50629e+007	−13,4214	0,0000
EV	103398,	7512,17	13,7641	0,0000

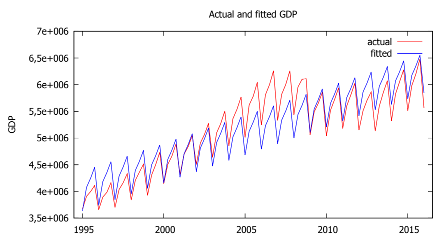
Mean dependent var	5161052	S.D. dependent var	765270,3
Sum squared resid	1,50e+13	S.E. of regression	424924,3
R^2	0,695356	Adjusted R^2	0,691686
$F(1, 83)$	189,4494	P-value(F)	3,94e–23
Log-likelihood	−1221,169	Akaike criterion	2446,339
Schwarz criterion	2451,224	Hannan–Quinn	2448,304
$\hat{\rho}$	0,315141	Durbin–Watson	1,343686

Negyedéves GDP (éves) lineáris trenddel II.

Mi ezzel a baj? Hibatag jól specifikált? Aligha!



Negyedéves GDP (éves) lineáris trenddel és szezonalitással I.

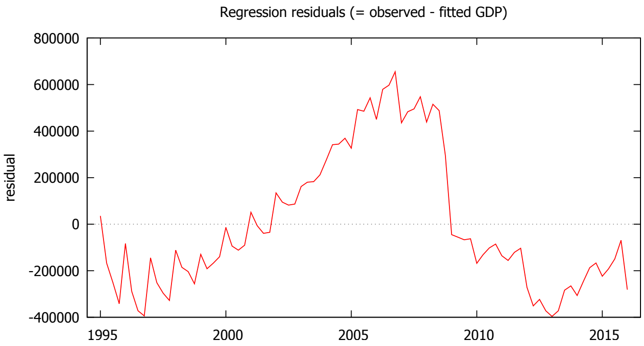


	Coefficient	Std. Error	t-ratio	p-value
const	−2,04994e+008	1,06300e+007	−19,2845	0,0000
EV	104985,	5301,64	19,8024	0,0000
DNEGYEDEV_1	−815807,	91469,3	−8,9189	0,0000
DNEGYEDEV_2	−375072,	92487,9	−4,0554	0,0001
DNEGYEDEV_3	−203380,	92487,9	−2,1990	0,0308

Mean dependent var	5161052	S.D. dependent var	765270,3
Sum squared resid	7,19e+12	S.E. of regression	299695,1
R^2	0,853937	Adjusted R^2	0,846634
$F(4, 80)$	116,9271	P-value(F)	1,34e–32
Log-likelihood	−1189,928	Akaike criterion	2389,855
Schwarz criterion	2402,068	Hannan–Quinn	2394,768
$\hat{\rho}$	0,946516	Durbin–Watson	0,116617

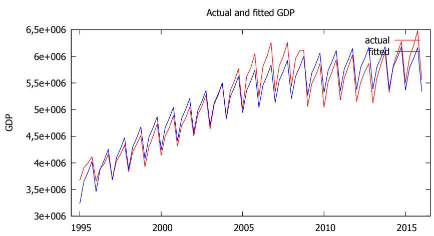
Negyedéves GDP (éves) lineáris trenddel és szezonalitással II.

A szezonalitás jónak tűnik, de az alaptrendet még mindig nem sikerült megragadni:



A szezonalitás azért tűnik jónak, mert nincs interakció az év és a szezon között, azaz minden évben hasonló a szezonalitás mintázata.

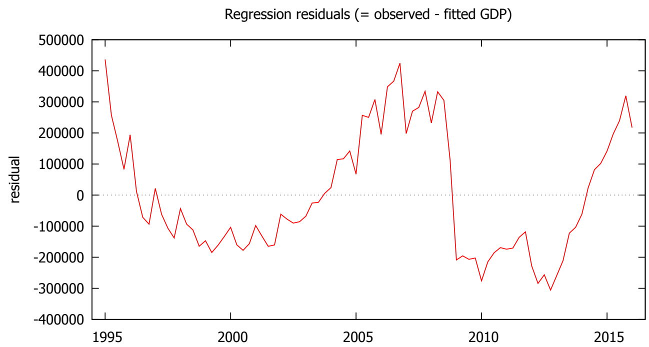
Negyedéves GDP (éves) kvadratikus trenddel és szezonalitással I.



	Coefficient	Std. Error	t-ratio	p-value
const	−2,60273e+010	2,61365e+009	−9,9582	0,0000
EV	2,58613e+007	2,60697e+006	9,9201	0,0000
DNEGYEDEV_1	−792077,	61608,7	−12,8566	0,0000
DNEGYEDEV_2	−375072,	62247,4	−6,0255	0,0000
DNEGYEDEV_3	−203380,	62247,4	−3,2673	0,0016
sq_EV	−6422,59	650,072	−9,8798	0,0000

Mean dependent var	5161052	S.D. dependent var	765270,3
Sum squared resid	3,21e+12	S.E. of regression	201704,8
R^2	0,934664	Adjusted R^2	0,930529
$F(5, 79)$	226,0280	P-value(F)	2,80e–45
Log-likelihood	−1155,736	Akaike criterion	2323,473
Schwarz criterion	2338,128	Hannan–Quinn	2329,368
$\hat{\rho}$	0,889365	Durbin–Watson	0,173391

Negyedéves GDP (éves) kvadratikus trenddel és szezonalitással II.
Reziduumok kicsit jobbak:



Mindezek limitációi

- *Egyrészt* el kell találni a függvényformát
- Persze modelldiagnosztika (az előbb látott grafikus módszerek és tesztek is) ott van
- (Ez igazából már keresztmetszetnél is így volt)
- Pl. a kvadratikus nyilván csak erre az időszakra jó, az általánosítóképessége botrányos lenne
- *Másrészt* a hibatag diagnosztikája bonyolultabbá válik, egy új szempont is megjelenik (autokorreláció) → később még nagyon sokat fogunk róla beszélni

2.1.3. Trend és szezonalitás

A trend megadása

- **Trend**: „hosszú távú alapirányzat”
- A mostani trend (determinisztikus trend) bármi lehet, amit paraméteres függvényformában megadunk; például:
  - Lineáris trend: $a + bt$
  - Kvadratikus trend: $a + b_1 t + b_2 t^2$
  - Polinomiális trend: $a + b_1 t + b_2 t^2 + \ldots + b_k t^k$
  - Exponenciális trend: ae^{bt}
  - Aszimptotikus trend: $c + \frac{1}{a+bt}$
  - Logisztikus trend: $\frac{1}{c+e^{a+bt}}$
  - stb. stb.

- (Persze amelyik nem lineáris, ott vagy linearizálni kell vagy – ha ez nem lehetséges – akkor nem OLS-sel becsülni)
- Ezek mind paraméteres trendek voltak, elképzelhető nem-paraméteres trend is, a legismertebb a spline-ok használata (de ne feledjük, annak a becslése kevésbé hatásos, nem kapunk egyetlen vagy néhány számba sűrített – és jó esetben tárgyterületileg értelmezhető – eredményt, valamint az előrejelzés is problémásabb)

Szezonalitás megadása

- **Szezonalitás**: „éven belüli mintázat”, exogén módon rögzített hosszúságú, periodikus (vs. **ciklus**: „éven túli”, nem feltétlenül exogén módon adott, ismert hosszúságú)
- A szezonalitásnál viszont tipikusabb a nem-paraméteres megadás: minden negyedévnek (hónapnak, félévnek stb.) saját paramétere van
- (Dummy-kkal, ld. később, regressziós keretbe szintén szépen illeszkednek!)
- Persze itt is elképzelhető paraméteres megadás, a legismertebb a trigonometrikus (harmonikus) függvények használata

Dummy-kódolás szezonalitáshoz: referenciakódolás

- Az egyik szezon indikátorát elhagyjuk: **referenciakódolás**

	D_{Q1}	D_{Q2}	D_{Q3}
Q1	1	0	0
Q2	0	1	0
Q3	0	0	1
Q4	0	0	0

- Értelmezés: eltérés a referenciacsoporthoz képest (ami az elhagyott indikátorú csoport)

Dummy-kódolás szezonalitáshoz: kontrasztkódolás I.

- Egy másik népszerű megoldás a **kontrasztkódolás**: viszonyítsunk az *átlaghoz*!
- Ehhez hogyan kell kódolni…?

	C_{Q1}	C_{Q2}	C_{Q3}
Q1	1	0	0
Q2	0	1	0
Q3	0	0	1
Q4	-1	-1	-1

Dummy-kódolás szezonalitáshoz: kontrasztkódolás II.

Mert:

$$\alpha + \beta_{C_{Q1}} + 0 + 0 = \overline{y}_{Q1} \tag{2.1}$$

$$\alpha + 0 + \beta_{C_{Q2}} + 0 = \overline{y}_{Q2} \tag{2.2}$$

$$\alpha + 0 + 0 + \beta_{C_{Q3}} = \overline{y}_{Q3} \tag{2.3}$$

$$\alpha - \beta_{C_{Q1}} - \beta_{C_{Q2}} - \beta_{C_{Q3}} = \overline{y}_{Q4} \tag{2.4}$$

És így:

- (1)+(2)+(3)+(4) $\Rightarrow 4\alpha = \overline{y}_{Q1} + \overline{y}_{Q2} + \overline{y}_{Q3} + \overline{y}_{Q4} \Rightarrow \alpha$ tényleg a főátlag (mert azonosak voltak a csoportok elemszámai, különben ún. súlyozott kontraszt kellene)
- (2)+(3)+(4) $\Rightarrow 3\alpha - \beta_{C_{Q1}} = \overline{y}_{Q2} + \overline{y}_{Q3} + \overline{y}_{Q4} \Rightarrow \beta_{C_{Q1}} = 3\alpha - \left(\overline{y}_{Q2} + \overline{y}_{Q3} + \overline{y}_{Q4}\right) = 3\alpha - \left(4\alpha - \overline{y}_{Q1}\right) \Rightarrow \beta_{C_{Q1}} = \overline{y}_{Q1} - \alpha \Rightarrow$ tényleg az átlagtól való eltérés (és hasonlóan a másik kettő)

Dummy-kódolás szezonalitáshoz: egyebek

- Az angol irodalomban az általunk kontrasztkódolásnak nevezett módszert nagyon gyakran „effect coding”-nak nevezik…
- … a kontraszt pedig az, amikor a csoportok tetszőleges – általunk meghatározott – lineáris kombinációját teszteljük

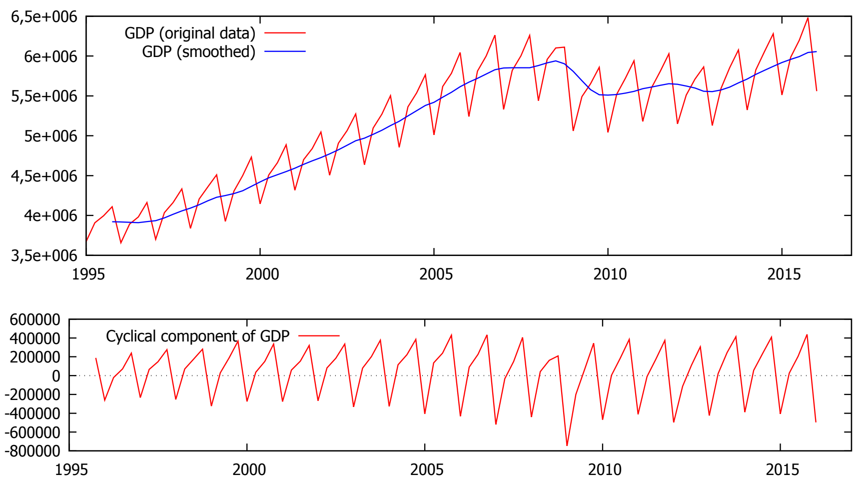
3 Idősorok szűrése

3.1. Idősorok szűrése

Célunk

- Szeretnénk elkülöníteni a trendet és a ciklikus komponenseket (szezon + ciklus); ez számos közgazdasági kérdésnél fontos feladat
- Egy lehetséges megoldás: „paraméteres szűrés”, azaz előírjuk a függvényformát és regresszióval megbecsüljük
- Igazából ezt megtettük az előbb is: megadtuk a trendet (lineáris vagy kvadratikus), megadtuk a szezonalitást (ezt nem-paraméteresen), és a látott reziduum a kiszűrt ciklus (+zaj) volt, ha van ilyen
- De ez függ a függvényforma-választás helyességén; nem lehetne ilyen feltevések nélkül is megtenni?
- Hogyne, például átlagoljunk ki évenként!
- Nem a legjobb, abrupt ugrások év végén, átlagoljunk inkább folyamatosan, mintegy csúszóablakot végigtolva (így is mindig négy különböző szezon lesz benne!)

Motiváló példa



Mozgóátlagolás

- Ez volt az (egyszerű) **mozgóátlag**:

$$y'_t = \frac{y_t + y_{t-1} + y_{t-2} + \ldots + y_{t-p}}{p+1}$$

- (Néha nem visszafelé átlagolnak, hanem az eredmény az átlagolt ablak közepén van („centrált" mozgóátlag), a dolognak nincs nagy jelentősége: ez talán kicsit jobban néz ki, viszont jövőbeli megfigyeléseket is igényel)
- Ez azt jelenti, hogy minden megfigyelés ugyanolyan súlyú; kézenfekvő gondolat, hogy a régebbiek kevésbé számítsanak
- Például:

$$y'_t = \frac{py_t + (p-1)\,y_{t-1} + (p-2)\,y_{t-2} + \ldots + y_{t-(p-1)}}{p + (p-1) + (p-2) + \ldots + 1}$$

- Ez az ún. súlyozott mozgóátlag

Exponenciális mozgóátlag

- Ökonometriában gyakoribb az exponenciális súlyozás:

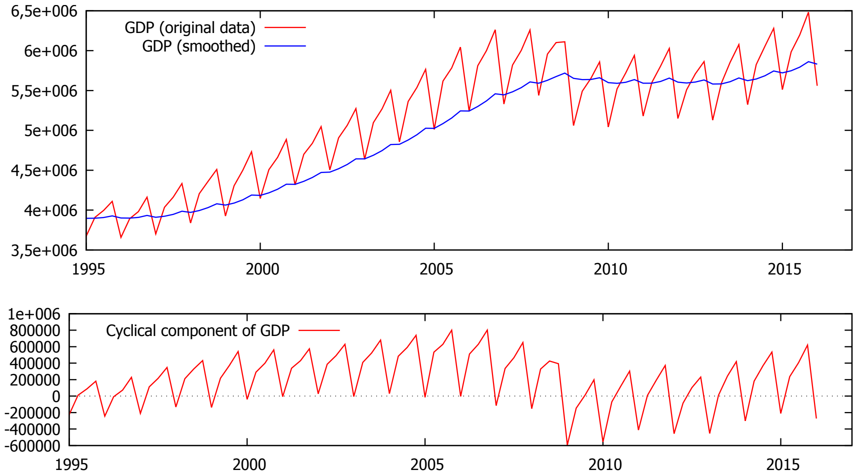
$$y'_t = \alpha y_t + (1-\alpha)\,y'_{t-1},$$

  hiszen ez nyilván annak felel meg, hogy

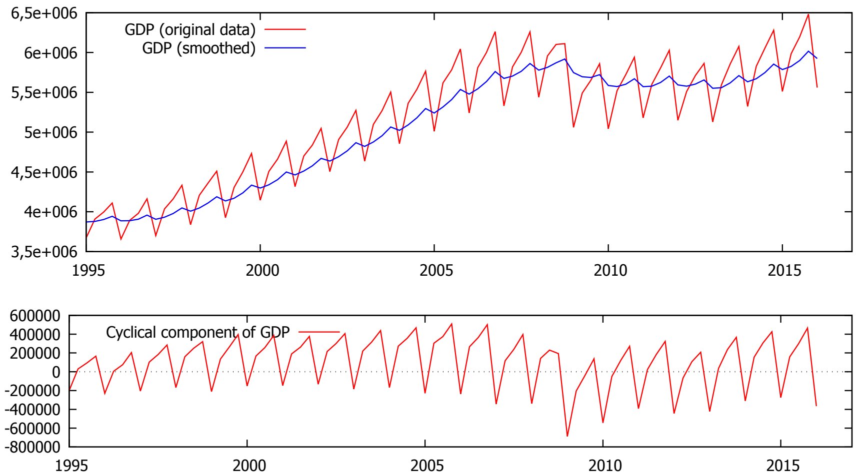
$$y'_t = \alpha y_t + (1-\alpha)\,\alpha y_{t-1} + (1-\alpha)^2\,\alpha y_{t-2} + \ldots + \\ + (1-\alpha)^{t-2}\,\alpha y_2 + (1-\alpha)^{t-1}\,\alpha y_1 + (1-\alpha)^t\,\alpha y_0$$

- (Az y_0 kezdőértéket nekünk kell megadni, a tipikus választások: y_1, az első néhány megfigyelés átlaga, az egész idősor átlaga; a következő példákban az első 4 megfigyelés átlaga került alkalmazásra)
- Tehát az ablak egyre nyúlik (végig az egész tartomány), és a súlyok exponenciálisan csengenek le

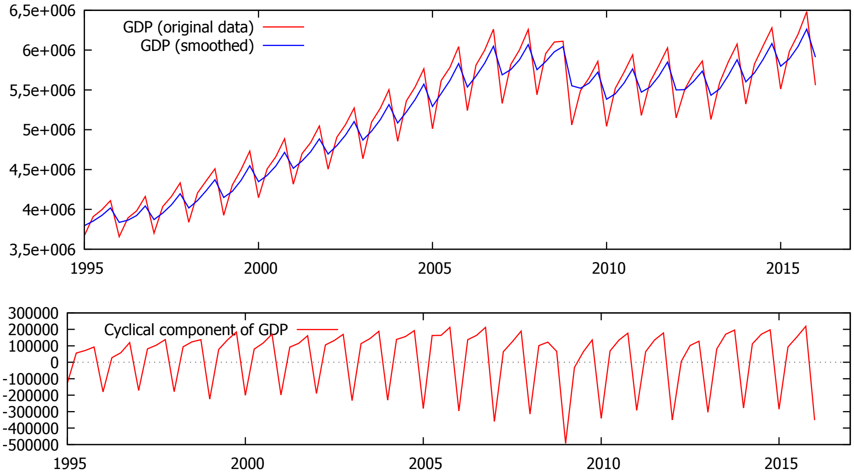
Negyedéves GDP exponenciális mozgóátlagolása, $\alpha = 0{,}1$



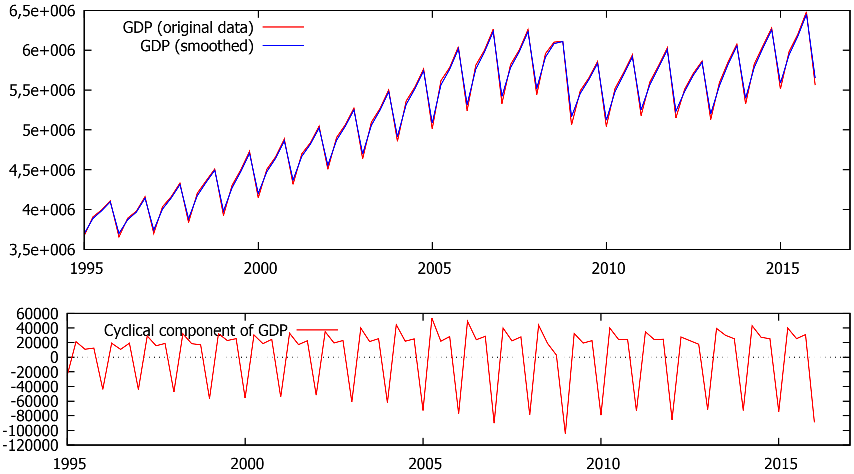
Negyedéves GDP exponenciális mozgóátlagolása, $\alpha = 0{,}2$



Negyedéves GDP exponenciális mozgóátlagolása, $\alpha = 0{,}5$



Negyedéves GDP exponenciális mozgóátlagolása, $\alpha = 0{,}9$



Lineáris szűrő

- Az egyszerű és a súlyozott mozgóátlag speciális esete annak, hogy

$$y'_t = a_0 y_t + a_1 y_{t-1} + \ldots + a_p y_{t-p} = \sum_{i=0}^{p} a_i y_{t-i}$$

- Például egyszerű mozgóátlagra $a_i = 1/\left(p+1\right)$
- Lényegében diszkrét konvolúció
- Ezt hívjuk lineáris szűrőnek, a tulajdonságait értelemszerűen teljes mértékben meghatározzák az $a_0, a_1, \ldots, a_p$ szűrőegyütthatók

- Roppant érdekes kérdés, hogy a szűrt idősor hogyan néz ki az eredetihez képest a szűrőegyütthatók függvényében, lehet otthon kísérletezgetni...

Hodrick–Prescott-szűrő

- Különösen makroökonómiában népszerű
- Alapgondolat: a trend (g_t) követi az idősort (azaz az $y_t - g_t$ kicsi), de nem nagyon ugrándozva (azaz g_t sima)
- A megoldandó feladat:

$$\min_{\{g_t\}_{t=1}^T} \sum_{t=1}^{T} (y_t - g_t)^2 + \lambda \sum_{t=2}^{T-1} \left[(g_{t+1} - g_t) - (g_t - g_{t-1})\right]^2$$

- Első tag: mennyire követi jól az idősort a trend, második tag: mennyire „rángatózik" a trend
- A λ együttható határozza meg a két szempont egymáshoz viszonyított fontosságát ($\lambda = 0$: a trend nem kell, hogy sima legyen $\rightarrow$ pontosan az idősor lesz; $\lambda \rightarrow \infty$: trend legyen tökéletesen sima, nem érdekes, hogy mennyire követi az idősort $\rightarrow$ egyenes lesz)
- Negyedéves adatokra a tipikus választás $\lambda = 1600$

A második tagra azt írtuk, hogy „mennyire rángatózik a trend"; később majd pontosabban is fogjuk látni, hogy ez micsoda, mert van eg nagyon konkrét tartalma.

A HP-szűrő matematikája I.

- Az érdekes az, hogy a fenti minimalizációs feladatnak van zárt alakú megoldása!
- Legyen $\mathbf{y}$ az y_t-k, $\mathbf{g}$ a g_t-k vektora és legyen

$$\mathbf{Q}_{(T-2)\times T} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

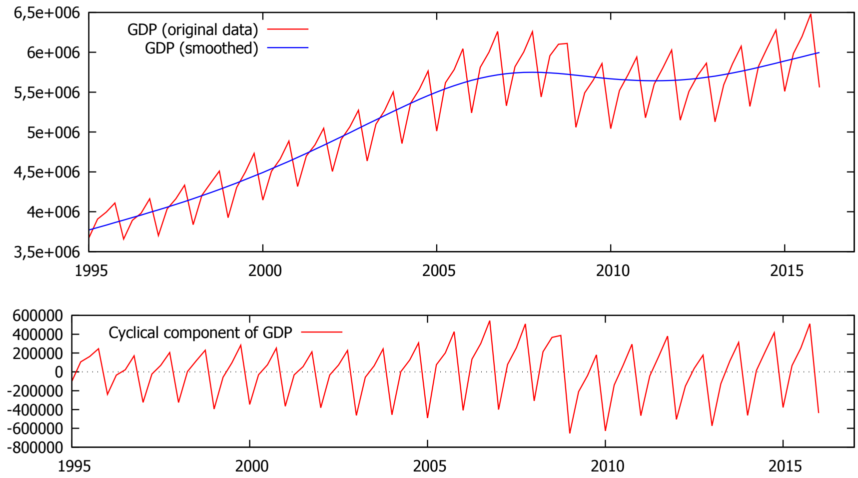
  ekkor a megoldandó feladat

$$\min_{\mathbf{g}} \left(\mathbf{y} - \mathbf{g}\right)^T \left(\mathbf{y} - \mathbf{g}\right) + \lambda \left(\mathbf{Q}\mathbf{g}\right)^T \left(\mathbf{Q}\mathbf{g}\right)$$

A HP-szűrő matematikája II.

- Deriválva $\mathbf{g}$ szerint:
$$-2\mathbf{y} + 2\mathbf{g} + 2\lambda \mathbf{Q}^T \mathbf{Q}\mathbf{g}$$
- Egyenlővé téve nullával és megoldva (a másodrendű feltételek teljesülnek ahhoz, hogy ez tényleg minimum legyen):
$$-2\mathbf{y} + 2\mathbf{g} + 2\lambda \mathbf{Q}^T \mathbf{Q}\mathbf{g} = 0 \Rightarrow \widehat{\mathbf{g}} = \left(\mathbf{I} + \lambda \mathbf{Q}^T \mathbf{Q}\right)^{-1} \mathbf{y}$$
- (A megoldás mindegyik megfigyeléstől függ)

Negyedéves GDP HP-szűrése, $\lambda = 1600$



A HP-szűrő kritikája

Érdekes olvasmány: Hamilton, James D. „Why You Should Never Use the Hodrick-Prescott Filter.” (2016). `http://econweb.ucsd.edu/~jhamilto/hp.pdf`.

Egyéb szűrők

- Több szűrő viselkedése alapvetően frekvencia-tartományon érthető meg
- Trend/ciklus szétválasztás: aluláteresztő szűrés (mert a trend az, ami lassan változik, a ciklus az, ami gyorsabban, persze kérdés, hogy hol a határ)
- Igazából már az egyszerű mozgóátlag is egy aluláteresztő szűrő volt!
- Vagy: LOESS-használata (STL-dekompozíció)

4 A stacionaritás és az ergodicitás fogalma

4.1. A stacionaritás fogalma, szükségessége

Az alapprobléma

- Egyetlen realizáció problémája
- Hogyan lehet egyetlen mintából bármit megbecsülni? Nyilván sehogy...
- És ezen ráadásul – ugyebár – a hosszabb megfigyelés sem segít
- A megoldás: valamilyen plusz-feltevés kell!

Jön a jótündér

- Mondjuk egy jótündér megsúgja nekünk, hogy minden időpontban (ami ugye egy valószínűségi változó) ugyanaz a várható érték:

$$\mu_t \equiv \mu$$

- (A $\equiv$ természetesen azt jelenti, hogy $\forall t$-re)
- Ez tehát egyfajta *eltolásinvariancia*; írhattuk volna, teljesen egyenértékűen azt is, hogy $\mu_t = \mu_s$, vagy azt is, hogy $\mu_t = \mu_{t+h}$ (most elég nyakatekert, de később ez lesz a jobb)
- Ekkor már ezt az – immár létező – *közös* várható értéket, igaz *csak ezt*, de ezt meg tudjuk becsülni mintából!
- Ehhez – de csak ehhez! – „összeönthetőek” a különböző időponthoz tartozó megfigyelések (igazából ehhez még valami további dolog is kell, de erről majd később, most fogadjuk el, hogy megvalósítható)
- Hiszen:

$$\widehat{\mu} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_t$$

- Menjünk tovább...

További jótündérek

- Ha $\sigma_t^2 \equiv \sigma^2$ akkor létezik közös szórásnégyzet, és becsülhető: $\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(y_t - \widehat{\mu}\right)^2$ (torzított, de aszimptotikusan torzítatlan, továbbá konzisztens)
- Menjünk tovább...
- Ha létezik az $F_{Y_i} \equiv F$ közös eloszlás, akkor $\widehat{F}$ becsülhető (pl. hisztogrammal)
- Menjünk tovább...
- Két változónál is az eltolásinvarianciát akarjuk megtartani: $\gamma_{t,s}$ legyen ugyanaz mint $\gamma_{t+h,s+h}$
- De gondoljuk végig, ez magyarul azt jelenti, hogy $\gamma_{t,s}$ csak a $t-s$-től függ!
- Ez esetben becsülhető: $\widehat{\gamma_k} = \frac{1}{T-k}\sum_{t=1}^{T-k}\left(y_t - \widehat{\mu}\right)\left(y_{t+k} - \widehat{\mu}\right)$
- Menjünk tovább...
- $F_{Y_t,Y_s} = F_{Y_{t+h},Y_{s+h}}$, minden s,t,h-ra, akkor a kétváltozós eloszlás komplettül becsülhető

És végül...

- Az utolsó, immár tényleg mindent lefedő szint: $F_{Y_{t_1},Y_{t_2},\ldots,Y_{t_k}} = F_{Y_{t_1+h},Y_{t_2+h},\ldots,Y_{t_k+h}}$ minden értelmes k-ra, $t_1,t_2,\ldots,t_k$-ra és h-ra
- Ennek a neve: **erős stacionaritás**
- Ez az a feltevés, ami a keresztmetszethez hasonló becsülhetőséget tesz lehetővé annak ellenére is, hogy idősorban vagyunk
- A keresztmetszet azért volt egyszerűbb, mert a függetlenséget feltettük, de itt most erről szó nincs: pont az a lényeg, hogy úgy teremtettük meg a keresztmetszethez hasonló becsülhetőséget, hogy semmilyen függetlenséget nem kellett feltételeznünk – szerencsére, mert annak ugye nem lenne értelme (persze a függetlenség implikálja az erős stacionaritást)
- Viszont: rengeteget követel, elméleti kezeléshez jó, de gyakorlatban nagyon nehét ellenőrizni a teljesülését
- Éppen ezért gyengítsük kicsit...

A gyenge stacionaritás

- Mint az erős stacionaritás, de
  - csak $k = 1, 2$-re
  - teljes eloszlás-egyezőség helyett csak első két momentumban egyezőséget követelünk meg
- Mi adódik ebből?
  1. $\mu_t \equiv \mu$
  2. $\sigma_t^2 \equiv \sigma^2$
  3. $\gamma_{t,s} \equiv \gamma_{t-s}$
- (Valójában a 2. feltétel redundáns, hiszen $\gamma_{t,t} = \sigma_t^2$)
- A továbbiakban, ha mást nem mondunk, stacionaritás alatt mindig ezt a **gyenge (vagy kovariancia-) stacionaritást** értjük

A stacionaritás tesztelése

- A fentiek már adnak egy – teljesen szubjektív – módszert a stacionaritás tesztelésére: nézzünk rá az idősorra, az 1. és 2. feltétel megítélhető
- Ez a „grafikus tesztelés” persze abszolút szubjektív
- Később látni fogunk objektív módszert (statisztikai próbát) is

4.2. Idősor-jellemzők mintából becslése

Egy gondolat a mintából történő becslésekről

- A már látott mintából történő becsléseknél ($\widehat{\mu}$, $\widehat{\sigma^2}$, $\widehat{\gamma}_k$ stb.) ne feledjük el, hogy mindezeket mind terheli a mintavételi ingadozás, az abból fakadó mintavételi hiba
  - ...konfidenciaintervallum szerkeszthető a valódi értékre
  - ...tesztelhető nevezetes értékre vonatkozó hipotézis
- Ez utóbbi tipikus példája az autokorrelálatlanság ($H_0 : \rho_k = 0$ vs. $H_1 : \rho_k \neq 0$)
- Nem túl kis mintaméretnél már jó a normális approximáció: $\widehat{\rho}_k \sim \mathcal{N}(\rho_k, 1/T)$, így

$$\frac{\widehat{\rho}_k}{1/\sqrt{T}} \overset{H_0}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$$

Autokorrelálatlanság tesztelése: Ljung–Box-teszt

- Nagyon sok esetben grafikusan is feltüntetik a korrelogramon az autokorrelációra vonatkozó $\pm z_{1-\alpha/2}\frac{1}{\sqrt{T}}$ kritikus értékeket
- De vigyázat: ez a *teljes* autokorrelálatlanság ($H_0 : \rho_1 = \rho_2 = \ldots = \rho_M = 0$) tesztelésére nem alkalmas!
- (Többszörös összehasonlítások helyzete, α-infláció)
- Legnépszerűbb teszt erre: Ljung–Box-teszt:

$$Q = T\left(T+2\right)\sum_{k=1}^{M}\frac{\widehat{\rho_k}^2}{T-k}\overset{H_0}{\sim}\chi^2_M$$

- M megválasztása kérdés (ha túl kicsi, elnézhetünk egy magasabbrendű autokorrelációt, ha túl nagy, eltérhetünk a χ^2 eloszlástól)!
- Tipikus alkalmazás majd: modelldiagnosztikában

Autokorrelálatlanság tesztelése: LM-tesztek

- A Ljung–Box-teszttel komoly elméleti agályok vannak (ld. Maddala, 13.5 vagy Hayashi 2.10)
- Ennek ellenére teljesen általánosan használják...
- Lehetséges alternatíva: LM-elvű tesztek, például a Breusch–Godfrey-teszt a már említett modelldiagnosztikai helyzetben

5 A sztochasztikus idősormodellezési filozófia, és alapelemei: a fehérzaj-, az AR-, az MA- és ARMA-folyamatok

5.1. Matematikai emlékeztető

5.1.1. Valószínűségszámítás emlékeztető

Várható érték

Ki fogjuk használni a következőket:

- A várható érték lineáris: $\mathbb{E}\left(\sum_i X_i\right) = \sum_i \mathbb{E}X_i$
- A várható érték lineáris: $\mathbb{E}\left(cX\right) = c\mathbb{E}X$
- Konstans várható értéke saját maga: $\mathbb{E}c = c$

Szórásnégyzet

Ki fogjuk használni a következőket:

- A szórásnégyzet nem lineáris: $\mathbb{D}^2\left(\sum_i X_i\right) = \sum_i \mathbb{D}^2 X_i$ *ha* X_i-k (páronként) korrelálatlanok (szemben a várható értékkel, ez *nem* mindig igaz!); ne feledjük, a függetlenség implikálja a korrelálatlanságot
- A szórásnégyzet nem lineáris: $\mathbb{D}^2\left(cX\right) = c^2\mathbb{D}^2 X$
- Konstans szórásnégyzete nulla: $\mathbb{D}^2 c = 0$

Kovariancia és korreláció

Ki fogjuk használni a következőket:

- A kovariancia/korreláció bilineáris: $\operatorname{cov}\left(\sum_i X_i, \sum_j Y_j\right) = \sum_i \sum_j \operatorname{cov}\left(X_i, Y_j\right)$
- A kovariancia/korreláció bilineáris: $\operatorname{cov}\left(aX, bY\right) = ab\operatorname{cov}\left(X, Y\right)$
- Konstans mindennel korrelálatlan: $\operatorname{cov}\left(c, X\right) = 0$
- Az önkovariancia a variancia: $\operatorname{cov}\left(X, X\right) = \mathbb{D}^2 X$

5.2. A sztochasztikus idősorelemzési iskola

Filozófiai alapok

- Determinisztikus (például dekompozíciós idősormodellek) vs. sztochasztikus idősorelemzés
- A determinisztikus iskolában is van – természetesen – véletlen, csak a szerepe más: pusztán arra korlátozódik, hogy az *adott időszaki* értéket beállítsa
- A sztochasztikus iskolában ezzel szemben a véletlen az *egész későbbi* lefutást befolyásolja, a véletlennek „folyamatépítő szerepe” van
- Lássunk egy példát, hogy jobban megértsük mit jelentenek ezek a kissé homályos megfogalmazások!

Példa a két iskolára

- Az egyik idősorunk – sokasági modellel megadva – legyen
$$Y_t^{(D)} = \alpha t + u_t,$$
ahol α konstans, $u_t \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right)$ függetlenül
- A másik modell legyen
$$Y_t^{(S)} = Y_{t-1}^{(S)} + \alpha + u_t,$$
ahol α és u_t mint előbb, $Y_0^{(S)}$ pedig legyen 0
- A további elemzésekhez hasznos lesz a következő átalakítás:
$$\begin{aligned} Y_t^{(S)} &= Y_{t-1}^{(S)} + \alpha + u_t = \left(Y_{t-2}^{(S)} + \alpha + u_{t-1}\right) + \alpha + u_t = \\ &= \left[\left(Y_{t-3}^{(S)} + \alpha + u_{t-2}\right) + \alpha + u_{t-1}\right] + \alpha + u_t = \ldots = \alpha t + \sum_{i=1}^{t} u_i \end{aligned}$$
- Hasonlítanak is, meg nem is...

Hasonlóság

Számítsuk ki a μ_t várható érték függvényeket:

$$\begin{aligned} \mu_t^{(D)} &= \mathbb{E}\left(\alpha t + u_t\right) = \mathbb{E}\left(\alpha t\right) + \mathbb{E}\left(u_t\right) = \alpha t + 0 = \alpha t \\ \mu_t^{(S)} &= \mathbb{E}\left(\alpha t + \sum_{i=1}^{t} u_i\right) = \alpha t + \sum_{i=1}^{t} 0 = \alpha t \end{aligned}$$

Különbség

Nézzük most meg a σ_t^2 szórásnégyzet függvényeket:

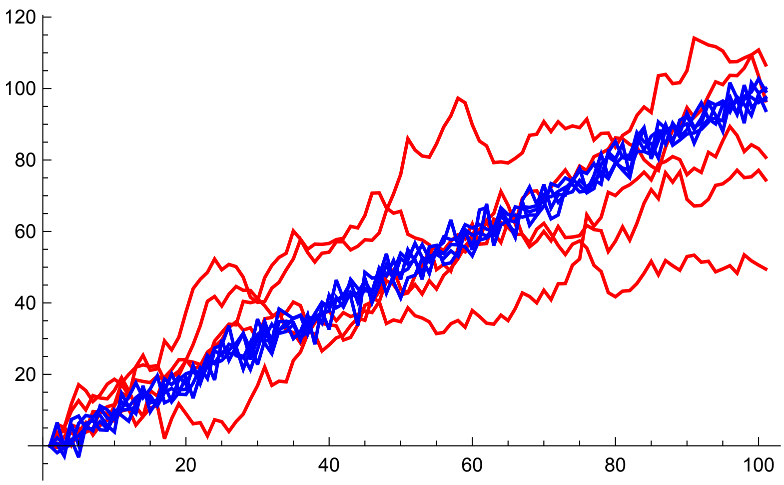
$$\sigma_t^{2(D)} = \mathbb{D}^2\left(\alpha t + u_t\right) = \mathbb{D}^2\left(\alpha t\right) + \mathbb{D}^2\left(u_t\right) = 0 + \sigma^2 = \sigma^2$$

$$\sigma_t^{2(S)} = \mathbb{D}^2\left(\alpha t + \sum_{i=1}^{t} u_i\right) = \mathbb{D}^2\left(\alpha t\right) + \mathbb{D}^2\left(\sum_{i=1}^{t} u_i\right) = 0 + \sum_{i=1}^{t} \sigma^2 = $$
$$= t\sigma^2$$

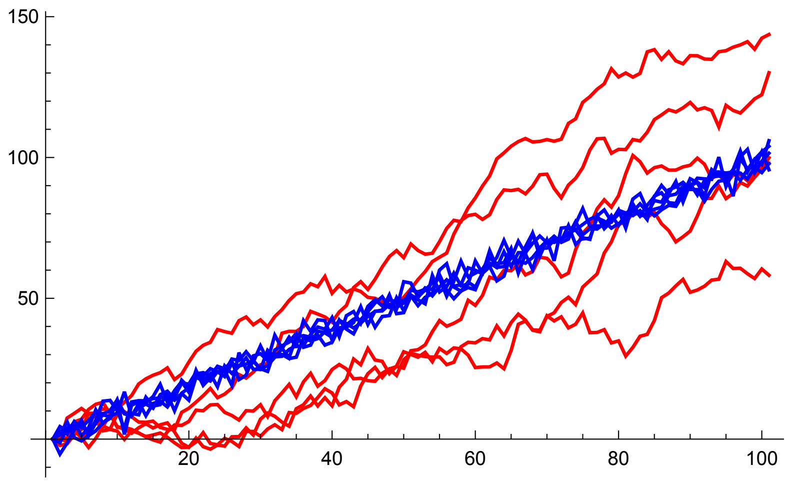
Az igazi eltérés a viselkedésben

- Ennek sokkal mélyebb magyarázatát kapjuk, ha arra gondolunk, hogy a viselkedésük miben más
- Segítség: kidobunk egy nagyon deviáns u_t-t (pl $\sigma^2 = 1$ mellett +5-öt vagy -5-öt), miben tér el a két idősor későbbi viselkedése?
- Ez a két extrém véglet:
  - Az $Y_t^{(D)}$-nél már a *rögtön következő* időpontban sincsen *semmilyen* hatása ennek
  - $Y_t^{(S)}$-nél viszont az idősor *egész későbbi lefutását* befolyásolja, *csorbítatlanul*
- Bizonyos értelemben *ugyanazt* a trendet jelentik – gondoljunk a várható érték függvényre – de mégis teljesen eltérő *viselkedéssel*
- Megtestesítik a két iskolát: $Y_t^{(D)}$ a lineáris trend a determinisztikus szemléletben (véletlen szerepe: csak az adott időszakra korlátozódik), az $Y_t^{(S)}$ a lineáris trend sztochasztikus értelemben (véletlen szerepe: folyamatépítő)

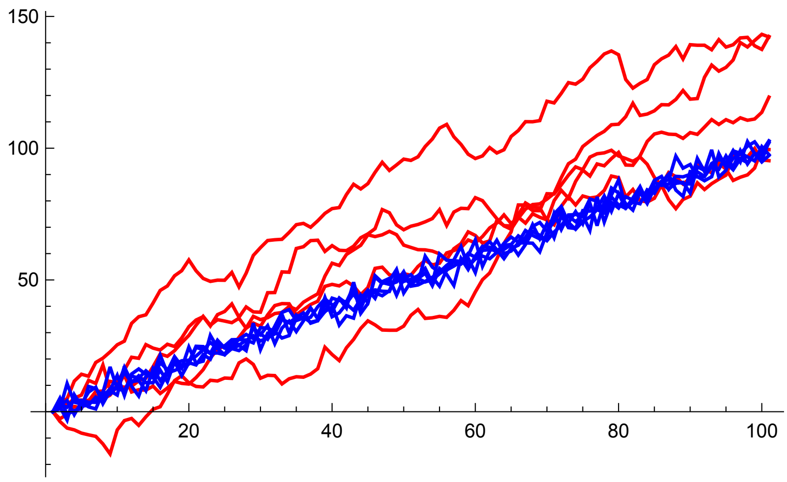
Hogy néznek ki?



Hogy néznek ki?



Hogy néznek ki?



Más elnevezések

- Főleg sztochasztikus folyamatos kontextusban az $Y_t^{(S)}$-et $\alpha = 0$ esetén **véletlen bolyongásnak** (random walk, RW) is szokás nevezni
- Rárakok egy bábut az origóra a számegyenesen, dobok egy véletlen számot (u_t) és annyival odébb rakom, majd ezt ismétlem $\rightarrow$ bolyongani fog a számegyenesen
- (Folytonos határa a Wiener-folyamat)
- Az $\alpha \neq 0$ esetben pedig **eltolásos véletlen bolyongásról** (random walk with drift, RWD) szoktak beszélni

- Amennyiben az RW-t log-skálán vesszük, tehát $\log Y_t = \log Y_{t-1} + u'_t$ a modellünk, $Y_0 \neq 0$ mellett (eredeti skálára visszavetítve: $Y_t = Y_{t-1} \cdot u_t = Y_0 \cdot \prod_{i=1}^{t} u_i$; nem a növekmények, hanem a hányadosok adott fae változók, nagyobb értékeknél nagyobb ingadozás) akkor **geometriai véletlen bolyongásról** szokás beszélni (pénzügyes szóhasználatban!)

5.3. ARMA-modellek

5.3.1. WN-folyamat

A fehérzaj (WN) folyamat

- A folyamat
$$u_t,$$
melyre $\mathbb{E}(u_t) = 0$, $\mathbb{D}^2(u_t) = \sigma^2$ és $\operatorname{cov}(u_t, u_s) = 0$ $(t \neq s)$
- Jele: $\mathcal{WN}\left(0, \sigma_u^2\right)$
- Az eloszlásról nem mondtunk semmit
- Néha feltesszük, hogy nem csak korrelálatlan, de független is (általában nem ez az alapértelmezés, külön kell mondani); egyedül normális eloszlás feltevése esetén mindegy
- Zaj: logikus, ez valamilyen teljesen modellezhetetlen, struktúra nélküli folyamat
- De mitől fehér? ...optikai analógia!

A fény is felfogható egy idősornak, hiszen egy elektromágneses rezgés. Itt a spektrális elemzés nagyon jól érthető tartalommal bír, hiszen a fény frekvenciája egész egyszerűen a színe! (Ilyen értelemben a prizma, mely a ráejtett fényt „szétbontja” összetevő színeire, igazából nem más, mint egy spektrális elemzés fizikai implementációja!) Ismert, hogy a fehér fény az, amely azonosan tartalmaz minden színt; a fenti értelemben tehát a fehér fény spektruma egy vízszintes egyenes. A két dolog ott kapcsolódik össze, hogy belátható, hogy a fenti definiált idősor spektruma szintén egy vízszintes egyenes lesz – ilyen értelemben tehát a színek közül a fehér idősoros megfelelője.

5.3.2. MA-modellek

A mozgóátlagú (MA) modell

A q-ad rendű mozgóátlagú modell (modell, mivel most a sokaságban specifikáljuk):

$$Y_t = \alpha + u_t + \theta_1 u_{t-1} + \theta_2 u_{t-2} + \ldots + \theta_q u_{t-q},$$

ahol u_t hiba(folyamat), szokták itt úgy is hívni, hogy innováció, fehérzaj-folyamatnak tételezzük fel: $u_t \sim \mathcal{WN}\left(0, \sigma_u^2\right)$; α és θ_i-k valós, σ_u^2 pozitív valós konstans paraméterek

MA(1)-folyamat: várhatóérték-függvény

Közvetlenül a definíció alapján (a várhatóérték-képzést „ráeresztve” a definícióra):

$$\mu_t = \alpha + 0 + \theta_1 \cdot 0 = \alpha,$$

tehát μ_t időfüggetlen

MA(1)-folyamat: szórásnégyzet-függvény

Közvetlenül a definíció alapján (a szórásnégyzet-képzést „ráeresztve” a definícióra):

$$\sigma_t^2 = 0 + \sigma_u^2 + \theta_1^2 \sigma_u^2 = \sigma_u^2 \left(1 + \theta_1^2\right)$$

tehát σ_t^2 időfüggetlen (ez lesz γ_0)

MA(1)-folyamat: autokovariancia-függvény

Közvetlenül a definíció alapján (a kovariancia-képzést „ráeresztve” a definícióra):

$$\operatorname{cov}\left(Y_t, Y_{t-1}\right) = \operatorname{cov}\left(\alpha + u_t + \theta_1 u_{t-1}, \alpha + u_{t-1} + \theta_1 u_{t-2}\right) = \ldots$$

összesen 9 tag, ebből azonban csak 1 nem-nulla (a többiben vagy konstans van, vagy különböző időpontokhoz tartozó u-k érintkeznek):

$$\ldots = \operatorname{cov}\left(\theta_1 u_{t-1}, u_{t-1}\right) = \theta_1 \sigma_u^2,$$

tehát ez időfüggetlen, jogos a γ_1 jelölés

MA(1)-folyamat: autokovariancia-függvény

Közvetlenül a definíció alapján (a kovariancia-képzést „ráeresztve” a definícióra):

$$\operatorname{cov}\left(Y_t, Y_{t-k}\right) = \operatorname{cov}\left(\alpha + u_t + \theta_1 u_{t-1}, \alpha + u_{t-k} + \theta_1 u_{t-k-1}\right),$$

amiben immár – az előbbi logikát követve – mindegyik tag nulla ha $k > 1$.

Összefoglalva:

$$\gamma_k = \begin{cases} \sigma_u^2 \left(1 + \theta_1^2\right) & \text{ha k=0} \\ \theta_1 \sigma_u^2 & \text{ha k=1} \\ 0 & \text{ha k>1} \end{cases}$$

MA(1)-folyamat: stacionaritás

Az előbbieket összerakva (μ_t időfüggetlen, σ_t^2 időfüggetlen, γ_k csak késleltetéstől függ) tehát kapjuk, hogy az MA(1) folyamat stacioner.

Mégpedig *mindig* az (értsd: paraméter-választástól függetlenül).

MA(1)-folyamat: korrelogram

- ACF: $\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$; eltűnik 1 késleltetés után
- PACF: belátható, hogy lecsengő (azaz $\lim_{k\to\infty} \operatorname{PACF}(k) = 0$)

MA(q)-folyamatok

- $\mu_t = \alpha$ (ugyanazért)
- $\sigma_t^2 = \sigma_u^2 \left(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \ldots + \theta_q^2\right)$ (ugyanazért)
- ACF q késleltetés után eltűnő (ugyanazért)
- PACF lecsengő (ugyanúgy kiszámolható lenne), adott esetben bonyolultabb mintázat szerint
- Mindig stacioner (paraméter-választástól függetlenül)!

5.3.3. AR-modellek

Az autoregresszív (AR) modell

A p-ed rendű autoregresszív modell (modell, mivel most a sokaságban specifikáljuk):

$$Y_t = \alpha + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \ldots + \phi_p Y_{t-p} + u_t,$$

ahol u_t hiba(folyamat), szokták itt úgy is hívni, hogy innováció, fehérzaj-folyamatnak tételezzük fel: $u_t \sim \mathcal{WN}\left(0, \sigma_u^2\right)$; α és ϕ_i-k valós, σ_u^2 pozitív valós konstans paraméterek

Megjegyzések

- Speciális esetek: ha $p = 1$ és $\phi_1 = 1$, akkor RWD (ha ráadásul $\alpha = 0$ akkor RW)
- Stacionaritás: ez – szemben az MA-folyamatokkal – nyilván nem lehet *mindig* stacioner, hiszen az RW sem az, de *néha* lehet az is (pl. $p = 1$ és $\phi_1 = 0$), a stacionaritásnak tehát itt valamilyen – paraméterekre vonatkozó – feltétele kell legyen
- Ennek vizsgálatát későbbre halasztjuk, és most azt mondjuk, hogy teljesültek ezek a feltételek

AR(1) folyamat: várhatóérték-függvény

Vegyük mindkét oldal várhatóértékét (feltettük a stacionaritást, $\mathbb{E}\left(Y_t\right) \equiv \mu$)

$$\mu = \alpha + \phi_1 \mu + 0,$$

mivel a várhatóérték lineáris, innen

$$\mu = \frac{\alpha}{1 - \phi_1}$$

($\phi_1 \neq 1$ kell legyen: látni fogjuk, hogy ez tényleg fennáll, ha stacioner)

AR(1) folyamat: szórásnégyzet-függvény

Vegyük mindkét oldal szórásnégyzetét (feltettük a stacionaritást, $\mathbb{D}^2(Y_t) \equiv \sigma^2$)

$$\sigma^2 = \phi_1^2 \sigma^2 + \sigma_u^2,$$

kihasználva, hogy a három tag korrelálatlan, innen

$$\sigma^2 = \frac{\sigma_u^2}{1-\phi_1^2}$$

($|\phi_1| < 1$ kell legyen: látni fogjuk, hogy ez tényleg fennáll, ha stacioner)

AR(1) folyamat: autokovariancia-függvény

Kezdjük az 1 késleltetéssel (természetesen a stacionaritást most is feltételezzük):

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(Y_t, Y_{t-1}) &= \operatorname{cov}(\alpha + \phi_1 Y_{t-1} + u_t, Y_{t-1}) = \\ &= 0 + \phi_1 \operatorname{cov}(Y_{t-1}, Y_{t-1}) + 0 = \phi_1 \sigma^2 = \phi_1 \frac{\sigma_u^2}{1-\phi_1^2},\end{aligned}$$

időfüggetlen; innen rekurzívan mehetünk tovább:

$$\operatorname{cov}(Y_t, Y_{t-k}) = \operatorname{cov}(\alpha + \phi_1 Y_{t-1} + u_t, Y_{t-k}) = \phi_1 \gamma_{k-1},$$

szintén időfüggetlen, ezekből tehát indukcióval kapjuk, hogy

$$\gamma_k = \phi_1^k \sigma^2 = \frac{\phi_1^k \sigma_u^2}{1-\phi_1^2}$$

($|\phi_1| < 1$ kell legyen: látni fogjuk, hogy ez tényleg fennáll, ha stacioner)

AR(1) folyamat: autokorreláció és parciális autokorreláció-függvény

Definíció alapján az autokovariancia-függvényből (mivel stacioner):

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \phi_1^k,$$

tehát az ACF *geometriailag lecsengő*

Külön kellene igazolni, de a mechanika alapján is elég nyilvánvaló, hogy

$$\operatorname{PACF}(k) = \begin{cases} \rho_1 & \text{ha k=1} \\ 0 & \text{ha k>1} \end{cases}$$

Épp az MA(1) „fordítva”: a kettő korrelogramja egymás *duálisa*

AR(1) folyamatok RWD-nél látott rekurzív visszafejtése

$$\begin{aligned}Y_t &= \alpha + \phi_1 Y_{t-1} + u_t = \alpha + \phi_1 \left(\alpha + \phi_1 Y_{t-2} + u_{t-1}\right) + u_t = \\ &= \alpha + \phi_1 \alpha + \phi_1^2 \left(\alpha + \phi_1 Y_{t-3} + u_{t-2}\right) + \phi_1 u_{t-1} + u_t = \ldots\end{aligned}$$

Ha feltételezzük, hogy „végtelenből jön” a folyamat (ekkor a kezdőérték mindegy lesz), akkor ez

$$\ldots = \alpha \sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^i + \sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^i u_{t-i} = \frac{\alpha}{1-\phi_1} + \sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^i u_{t-i}$$

($|\phi_1| < 1$ kell legyen: látni fogjuk, hogy ez tényleg fennáll, ha stacioner)

Mint egy MA-modell: ez az *AR(1) modell MA(∞)-reprezentációja*

AR(p) folyamatok

- Stacionaritást egyelőre itt is feltételezzük
- Várhatóérték-függvény: $\mu = \frac{\alpha}{1-\phi_1-\phi_1-\ldots-\phi_p}$
- Szórásnégyzet-függvény bonyolultabb (az autokovarianciák is megjelennek benne)
- Az ACF lecsengő (végtelenben 0-ba tart), de már bonyolultabb mintázat szerint is lehet
- PACF-ből az első p nem-nulla, a többi viszont már nulla
- Tehát az azonos rendű AR és MA folyamatok korrelogramja általánosságban is egymás duálisa
- Van MA(∞)-reprezentációja

5.3.4. ARMA-modellek

Az autoregresszív-mozgóátlagú (ARMA) modell

A p, q rendű autoregresszív-mozgóátlagú modell (modell, mivel most a sokaságban specifikáljuk):

$$\begin{aligned}Y_t = \alpha + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \ldots + \phi_p Y_{t-p} + \\ + u_t + \theta_1 u_{t-1} + \theta_2 u_{t-2} + \ldots + \theta_q u_{t-q},\end{aligned}$$

ahol u_t hiba(folyamat), szokták itt úgy is hívni, hogy innováció, fehérzaj-folyamatnak tételezzük fel: $u_t \sim \mathcal{WN}\left(0, \sigma_u^2\right)$; α, ϕ_i-k és θ_i-k valós, σ_u^2 pozitív valós konstans paraméterek.

Tulajdonságok

- Stacionaritásnak feltétele van (ami csak az AR együtthatóktól függ)
- Ha fennáll, akkor mind az ACF, mind a PACF lecsengő (nem eltűnő), lehet, hogy bonyolultabb mintázat szerint
- Van MA(∞)-reprezentációja

6 Késleltetési operátor és polinom, ARMA-folyamatok felírása késleltetési polinommal, az ARMA-folyamatok stacionaritása

6.1. Matematikai emlékeztető

6.1.1. Algebra emlékeztető

Változó, hatvány, polinom, polinom gyöke és inverze

- Legyen x egy változó, x^k egy hatványa, ekkor $\omega_0 + \omega_1 x + \omega_2 x^2 + \ldots + \omega_k x^k = \omega(x)$ egy – k-ad fokú, egyváltozós – polinom, $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k$ együtthatókkal
- (Az együtthatók és a változó értéke legegyszerűbb esetben valós számok, de ez nem szükségszerű)
- Megengedjük, hogy a fokszám végtelen is lehessen: $\omega(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \omega_i x^i$
- Polinom inverze: $\omega^{-1}(x)$ olyan, hogy $\omega^{-1}(x)\,\omega(x) = 1$
- Polinom gyöke: az $\omega(x) = 0$ egyenlet megoldása
- Az algebra alaptétele: egy k-ad fokú valós polinomnak k darab – nem feltétlenül különböző – gyöke van, melyek vagy valósak, vagy ha komplexek, akkor konjugált párokban jönnek
- Az előbbi miatt egy polinom mindig felírható úgy – gyöktényezős alak – mint $\omega(x) = \left(1 - \frac{1}{r_1}x\right)\left(1 - \frac{1}{r_2}x\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{r_k}x\right)$, ahol r_i az i-edik gyök

Polinom invertálása

- Például $1 - ax$ inverze $1 + ax + (ax)^2 + (ax)^3 + \ldots$ (egyesével egyeztetve az együtthatókat)
- Ez egy hatványsor, konvergál, ha $|ax| < 1$

- Általános esethez induljunk ki a gyöktényezős alakból:

$$
\begin{aligned}
\omega^{-1}(x) &= \left[\left(1-\frac{1}{r_1}x\right)\left(1-\frac{1}{r_2}x\right)\cdots\left(1-\frac{1}{r_k}x\right)\right]^{-1} = \\
&= \left(1-\frac{1}{r_1}x\right)^{-1}\left(1-\frac{1}{r_2}x\right)^{-1}\cdots\left(1-\frac{1}{r_k}x\right)^{-1} = \\
&= \prod_{i=1}^{k}\left[1+\frac{1}{r_i}x+\left(\frac{1}{r_i}x\right)^2+\left(\frac{1}{r_i}x\right)^3+\ldots\right]
\end{aligned}
$$

- Ami konvergál, ha minden i-re $\left|\frac{1}{r_i}x\right| < 1$
  - Ha $|x| = 1$, akkor a feltétel, hogy $|r_i| > 1$, azaz, hogy mindegyik gyök 1-nél nagyobb abszolútértékű legyen, más szóval, hogy a komplex egységkörön kívül legyen (ugye a gyökök komplexek is lehetnek)

6.2. Az ARMA-folyamatok mélyebb matematikája

6.2.1. A késleltetési operátor és a késleltetési polinom

A késleltetési operátor

- Legyen L valami, ami idősorból egy másik idősort csinál (ha y az eredeti idősor, akkor Ly jelöli az újat)
- ...mégpedig úgy, hogy $(Ly)_t = y_{t-1}$
- Az egyszerűség kedvéért most fókuszáljunk a minta (realizálódott) idősorra, ne a sokasági szemléletre
- Fogjuk fel úgy, mint egy függvényt, ami az időkhöz értékeket rendel: $y : \{1, 2, \ldots, T\} \to \mathbb{R}$ és $y : t \mapsto y_t$
- Az L tehát függvényből egy másik függvényt csinál: *operátor*

A késleltetési operátor (precízebben)

- A „függvény” itt igazából egy vektor ($\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_T \end{pmatrix}^T$)
- (Ez rendben is van: egy n dimenziós valós vektor felfogható egy $\{1, 2, \ldots, n\} \to \mathbb{R}$ függvényként!)
- Ezek a függvények egy vektorteret alkotnak (függvény: a vektortér eleme, skalárral szorzás: pontonként szorzás, összeadás: pontonkénti összeadás), ezt szokás függvénytérnek nevezni

- A fenti esetben ez megfelel az n-dimenziós valós vektorokkal végzett szokásos műveleteknek
- Az operátor – úgy általában – igazából két vektortér közti leképezés
- A függvényteres értelmezés miatt mondhattuk azt, hogy az „operátor az, ami függvényből másik függvényt csinál”!

A késleltetési operátor (precízebben)

- Ha a vektoros felfogást, és azon belül is az n-dimenziós valós vektoroknak való megfeleltetést vesszük, akkor minden operátor reprezentálható mátrixszal (hiszen a mátrix az, ami vektorból vektort csinál!)
- Ez alól a késleltetési operátor sem kivétel, például:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{L}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}}_{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} 0 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix},$$

- (Azért, hogy ne változzon az idősor hossza, az új első eleme legyen fixen 0)

A késleltetési operátor hatványai

- Micsoda L^2?
- Könnyen értelmezhető: $L\left(Ly_t\right) = Ly_{t-1} = y_{t-2}$
- Röviden: $L^2 y_t = y_{t-2}$
- Megfeleltethető a mátrixoknak? Igen! Az $\mathbf{L}$ mátrix négyzete épp a kettővel késleltetést valósítsa meg, azaz $\mathbf{L}^2 = L^2$
- Szorozzuk össze, és ellenőrizzük le, hogy ez csakugyan teljesül!
- Hasonlóan $L^k y_t = y_{t-k}$, tehát ez a k-val késleltető operátor lesz
- (Ideértve azt is, hogy például $L^{-1} y_t = y_{t+1}$, „siettető operátor”)

A késleltetési polinom

- A késleltetett idősorokat kombinálhatjuk is, például $2y_t + 3y_{t-1} - 4y_{t-2} = 2y_t + 3Ly_t - 4L^2 y_t = \ldots$
- Most jön az érdekes rész: ez átírható mint

$$\ldots = \left(2 + 3L - 4L^2\right) y_t$$

- Ami fontos, hogy ez nem „szintaktikai manipuláció”, az előbbi mátrixok nagyon is mutatják ennek a realitását: $2\mathbf{I} + 3\mathbf{L} - 4\mathbf{L}^2$ *épp* az a mátrix, amivel rászorozva az idősorra *pont* $2y_t + 3y_{t_1} - 4y_{t-2}$-t kapjuk!
- Ennek általánosítása a késleltetési polinom:

$$\omega(L) = \omega_0 + \omega_1 L + \omega_2 L^2 + \ldots + \omega_k L^k,$$

azaz az operátorokból is ugyanúgy gyárhatunk polinomot – az előbb definiált hatványaik segítségével – mint mondjuk valós ismeretlenekből

- Ezzel $\omega(L)\, y_t = \omega_0 y_t + \omega_1 y_{t-1} + \omega_2 y_{t-2} + \ldots + \omega_k y_{t-k}$
- Természetesen $\omega(L)$ maga is egy operátor

A késleltetési polinom használatának előnye

Számos – egyébként bonyolult – művelet elvégezhető, mint (jól ismert) manipuláció polinomokkal: összeszorozhatóak, invertálhatóak stb.!

6.2.2. ARMA-folyamatok reprezentációja késleltetési polinomokkal

ARMA-folyamatok felírása késleltetési polinomokkal

- Emlékezetőül:

$$\begin{gathered} Y_t = \alpha + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \ldots + \phi_p Y_{t-p} + \\ + u_t + \theta_1 u_{t-1} + \theta_2 u_{t-2} + \ldots + \theta_q u_{t-q} \end{gathered}$$

- Kicsit átrendezve:

$$\begin{gathered} Y_t - \phi_1 Y_{t-1} - \phi_2 Y_{t-2} - \ldots - \phi_p Y_{t-p} = \\ \alpha + u_t + \theta_1 u_{t-1} + \theta_2 u_{t-2} + \ldots + \theta_q u_{t-q} \end{gathered}$$

ARMA-folyamatok felírása késleltetési polinomokkal

- Az előbbiek alapján ez átírható mint

$$\begin{gathered} Y_t - \phi_1 L Y_t - \phi_2 L^2 Y_t - \ldots - \phi_p L^p Y_t = \\ = \alpha + u_t + \theta_1 L u_t + \theta_2 L^2 u_t + \ldots + \theta_q L^q u_t \end{gathered}$$

- Azaz:

$$\begin{gathered} \left(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \ldots - \phi_p L^p\right) Y_t = \\ = \alpha + \left(1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \ldots + \theta_q L^q\right) u_t \end{gathered}$$

- Vezessünk be két késleltetési polinomot: $\phi(x) = 1 - \phi_1 x - \phi_2 x^2 - \ldots - \phi_p x^p$ és $\theta(x) = 1 + \theta_1 x + \theta_2 x^2 + \ldots + \theta_q x^q$
- Ezekkel az előbbi egész egyszerűen

$$\phi(L)\, Y_t = \alpha + \theta(L)\, u_t$$

ARMA-folyamatok vizsgálata polinomiális reprezentációval: stacionaritás

- Az előbbi egyenletet átalakítva:

$$Y_t = \phi^{-1}(L)\,\alpha + \phi^{-1}(L)\,\theta(L)\,u_t$$

- Legalábbis, ha $\phi(L)$ invertálható!
- Ehhez az kell, hogy a gyökei a polinomnak az egységkörön kívül legyenek
  - Mert az L úgy viselkedik, mint az 1 abszolútértékű szám (1 az operátornormája)
- Lényegében azt jelenti, hogy létezik MA(∞)-reprezentáció
- És most jön a lényeg: ez épp a *stacionaritás* feltétele!
- (Persze ez bizonyítást igényel)

ARMA-folyamatok vizsgálata polinomiális reprezentációval: invertálhatóság

- Ha viszont $\theta(L)$ gyökei vannak az egységkörön kívül, akkor az egész AR(∞)-folyamatként reprezentálható
- Ilyenkor azt mondjuk, hogy a folyamat *invertálható*
- Lényegében azt jelenti, hogy az u_t is felírható Y aktuális és múltbeli értékeivel (nem csak fordítva)

7 A stacionaritás tesztelése

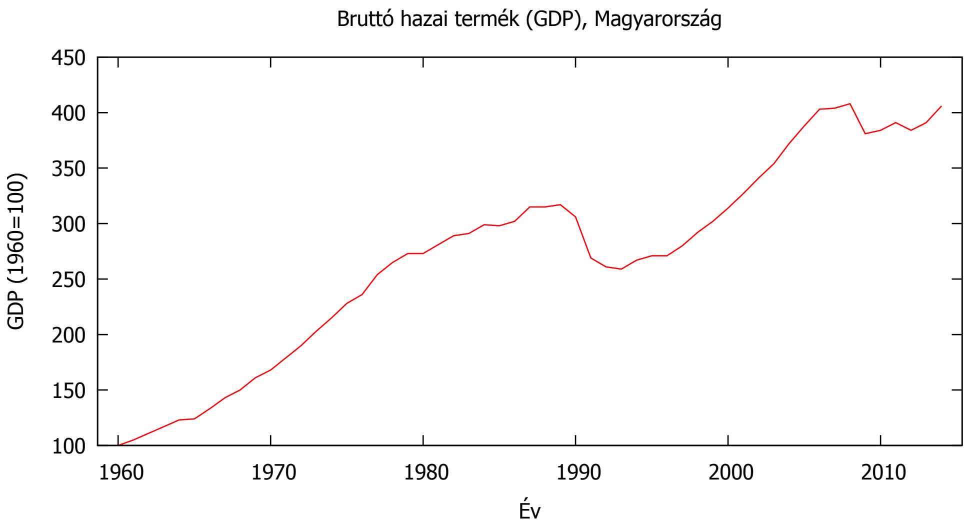
7.1. A stacionaritás tesztelése

7.1.1. A stacionaritás teszteléséről általában

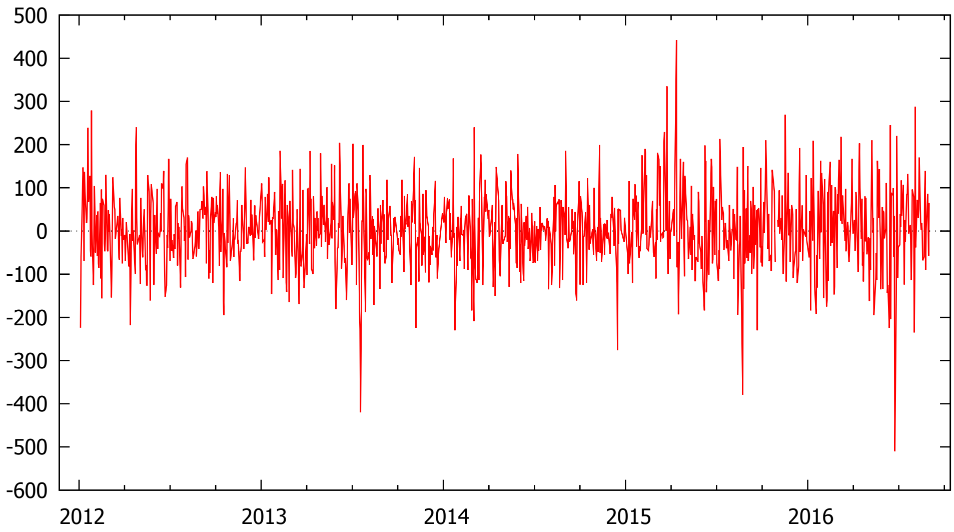
A tesztelés lehetőségei

- Egy módszerről már volt szó (grafikus eljárás), de ez igen szubjektív
- Most kiegészítjük két újjal, a második, a korrelogram szemrevételezése még mindig inkább csak heurisztikus...
- ...de a harmadik, a statisztikai próbák alkalmazása már objektív (noha ez nem azt jelenti, hogy tökéletes!)

Grafikus módszer



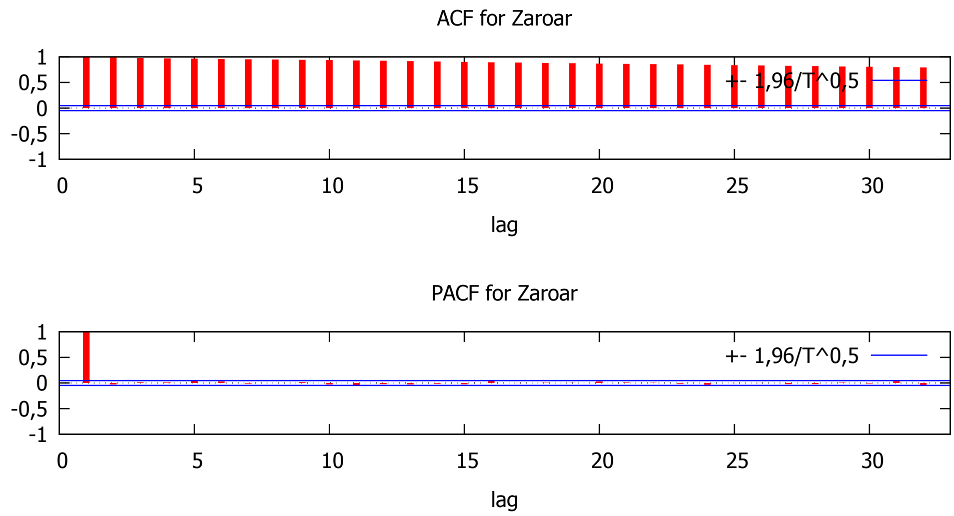
Grafikus módszer



A grafikus módszer határai

- A (gyenge) stacionaritás három feltételéből igazából csak kettő vizsgálható egyáltalán „ránézésre”
- Nem állandó várható érték, nem állandó szórás (akár csak átmenetileg is!)
- A mintavételi ingadozás figyelembevételére nincsen formális módszer, nehéz megítélni (különösen ha nem túl nagy a mintanagyság)
- Szubjektív

Korrelogram szemrevételezése



Korrelogram szemrevételezése – miért működik?

- Azt kell nézni, hogy az ACF nagyon nem lecsengő-e
- (Figyelem: a „nagyon nem lecsengő” nem azt jelenti, hogy nem igaz az, hogy nullába tart, hanem azt, hogy az 1-től is alig szakad el!)
- Miért van ez így?
- Intuitív indoklás, gondoljunk arra, ha trendje van az idősornak
- (A végigtolt ablaknak mindkét vége vagy az átlag alatt, vagy az átlag felett lesz az esetek nagy részében; ez csak lassan oldódik az ablak szélességének növekedtével)

Statisztikai tesztek

- Ez az igazán objektív módszer, kapunk egy p-értéket, ebben nincsen szubjektív tényező
- A gyakorlatban legelterjedtebb módszerek valójában inkább azt ellenőrzik, hogy van-e ún. egységgyök a folyamat (nem általában azt, hogy „nem stacioner”), ld. mindjárt
- Például Dickey-Fuller teszt (DF), kiterjesztett Dickey-Fuller teszt (ADF, augmented DF)
- Lásd kicsit később

7.1.2. Egységgyök

Az egységgyök fogalma

- Láttuk, hogy egy ARMA-folyamat akkor stacioner, ha az AR-rész polinomjának, $\phi(L)$-nek az összes gyöke az egységkörön kívül van
- Pontosítsuk ezt az állítást:
  1. Ha az összes gyök az egységkörön kívül van, akkor a folyamat stacioner (eltolásinvariánsak a momentumok, egyedi impulzusok hatása lecsengő)
  2. Ha akár csak egyetlen gyök is az egységkörön belül van, akkor a folyamat **explozív** (momentumok elmennek a végtelenbe – esetleg oszcillálva –, az egyedi impulzusok hatása felerősödő)
  3. Ha egységkörön *belül* nincs gyök, de az egységkör*ön* van – egy vagy több – akkor ugyan nem stacioner, de egy furcsa helyzet áll elő
- (Gondoljunk mindezeket végig az $Y_t = \alpha + \phi_1 Y_{t-1} + u_t$ példáján!)

- Az említett 3. helyzet határeset: az egyedi impulzusok hatása sem nem lecsengő, sem nem felerősödő, a momentumok felemásan viselkednek (pl. variancia elszáll, de várható érték állandó)
- Ezt hívjuk **egységgyök-folyamatnak** (azt is mondjuk, hogy a folyamatban egységgyök van)

Az egységgyök és a differenciastacionaritás kapcsolata

- Ha $\phi(x)$-nek egy darab 1 értékű gyöke van (a többi nagyobb), akkor úgy is írható mint $\phi(x) = \widetilde{\phi}(x)(1-x)$, ahol $\widetilde{\phi}(x)$-nek már minden gyöke 1-nél nagyobb
- Igen ám, de ezzel a $\phi(L) Y_t = \alpha + \theta(L) u_t$ úgy is írható, mint
$$\widetilde{\phi}(L)(1-L) Y_t = \alpha + \theta(L) u_t,$$
azaz
$$\widetilde{\phi}(L) \Delta Y_t = \alpha + \theta(L) u_t$$
- Vagyis ilyenkor az idősor differenciázottjára adtunk egy ARMA-modellt!
- Egész pontosan ARMA(p-1,q)-t, hiszen az AR-polinomja ($\widetilde{\phi}(L)$) eggyel kisebb fokszámú

Az egységgyök és a differenciastacionaritás kapcsolata

- Azaz: ha – egyszeres – egységgyök van egy ARMA folyamatban, az épp azt jelenti, hogy differenciastacioner, mégpedig $I(1)$ lesz, mert a differenciázottja stacioner ARMA lesz
- Ez egy fontos magyarázat arra, hogy miért találjuk azt, hogy a differenciázás sokszor segít: épp az egységgyököt tünteti el!
- Hasonlóan, ha az 1 d-szeres gyök, akkor a d-szer differenciázott folyamat lesz stacioner, tehát az eredeti folyamat $I(d)$ volt

Egységgyök-tesztelés: DF-teszt

- Tekintsünk először egy AR(1)-modellt: $Y_t = \alpha + \phi_1 Y_{t-1} + u_t$ a szokásos feltevésekkel
- Az egyértelmű, hogy $H_0 : \phi_1 = 1$, klasszikusan legtöbbször a $H_1 : \phi_1 < 1$ alternatívával szemben vizsgálódunk
- (Mert: az explozív idősorokat teljesen kizárjuk a vizsgálódásunk köréből)
- Rögtön érthetővé válik, amit arról mondtunk, hogy ez nem „stacionaritási teszt”, hanem egységgyök teszt (bár ebben az esetben a kettő *majdnem* ugyanaz, az egyetlen különbség az explozivitás kizárása)

- A teszteléshez térjünk át a differenciákra:

$$\Delta Y_t = \alpha + \delta_1 Y_{t-1} + u_t,$$

  ahol $\delta_1 = \phi_1 - 1$

- Ennek megfelelően itt a tesztünk: $H_0 : \delta_1 = 0$ vs $H_1 : \delta_1 < 0$

Egységgyök-tesztelés: DF-teszt

- Egyszerűen eresszünk rá egy t-próbát?
- Nem jó ötlet, mert δ_1 t-hányadosának nem t-eloszlása lesz
  - Klasszikusan azzal indokoljuk a t-eloszlást, hogy ha nagy a mintánk, akkor ez (aszimptotikusan) eloszlási feltevésektől függetlenül teljesül, a centrális határeloszlás tétel miatt
  - Csakhogy itt a CLT nem fog érvényesülni, mert Y_{t-1} integrált idősor (gondoljunk bele, a varianciája minden határon túl nőni fog, ha a mintanagyság egyre nagyobb!)
- David Dickey és Wayne Fuller 1979-ben nagy számú szimulációval tisztázta, hogy – legalábbis aszimptotikusan – milyen eloszlása van akkor ennek, ha nem t, ezt hívjuk DF-eloszlásnak
- Ez alapján (vagy legalábbis a kitáblázott kritikus értékek alapján) már végezhető teszt: DF-teszt

Egységgyök-tesztelés: DF-teszt

- A gyakorlatban három módon szoktuk alkalmazni (más a DF-eloszlás mindegyikhez):
  1. $\alpha = 0$ (konstans és trend nélkül): sztochasztikusan sem lehet benne trend (nulla körül kell ingadozzon a differenciázott)
  2. α-ra nincs megkötés (konstanssal, de trend nélkül): sztochasztikusan lehet benne trend (ez a tipikusabb)
  3. Determinisztikus – lineáris – trend kiszűrése után az előbbi (konstanssal és trenddel): a trendszűrt idősort teszteljük, azaz itt a trend-stacionaritást, és nem a stacionaritást tudjuk vizsgálni (azzal ekvivalens, hogy az $Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + \phi_1 Y_{t-1} + u_t$-ből indulunk ki)
- (Esetleg másféle trend, vagy szezonális dummy-k is használhatóak)
- Hátrányok: sajnos kicsi lehet ez ereje ha a ϕ_1 kisebb mint 1, de csak kevéssel
- Hátrányok: csak akkor valid, ha az eredeti idősorra *tényleg* igaz volt az AR(1)-specifikáció (dinamikailag helyesen specifikált a modell, tehát tényleg ilyen alakú, és tényleg elég 1 késleltetés)

Egységgyök-tesztelés: ADF-teszt

- Próbáljuk kijavítani az előbbi hátrányt!
- Belátható, hogy ez úgy érhető el, ha áttérünk a

$$\Delta Y_t = \alpha + \delta_1 Y_{t-1} + \gamma_1 \Delta Y_{t-1} + \gamma_2 \Delta Y_{t-2} + \ldots + \gamma_p \Delta Y_{t-p} + u_t$$

  modellre, ami akkor is működni fog, ha az eredeti folyamat magasabb – de p-nél nem nagyobb – rendű AR-folyamatot követ
- A rend megválasztása külön kérdés; általában információs kritériummal, vagy γ-k tesztelésével végzik (azoknak szerencsére szokásos, azaz t és – együttesen – F eloszlásaik vannak, legalábbis aszimptotikusan)

8 A nemstacionaritás kezelése: stacionarizálás, trend- és differenciastacioner idősorok, differenciázás, ARIMA-folyamat

8.1. Stacionarizálás

A stacionarizálás szükségessége

- Mi alapvetően stacioner idősorokat szeretnénk majd modellezni (például olyan ARMA-val akarunk idősort modellezni, ami stacioner)
- De: a legtöbb közgazdasági idősor *nem* stacioner!
- Mit csináljunk most?
- Olyan „visszacsinálható” (invertálható) transzformációt alkalmazunk, ami a nemstacioner idősorból stacionert csinál
- Azon elvégezzük a modellezést (és ha kell, a transzformáció inverzével visszatérünk az eredeti idősor nagyságrendjébe)
- Két módszert fogunk látni
- Ez nem univerzális: nem arról van szó, hogy valamelyiknek matematikai szükségszerűség, hogy stacionarizálnia kell minden idősort, egész egyszerűen azért nézzük meg ezeket, mert a gyakorlatban sokszor beváltak

Determinisztikus trend szűrése

- Az első módszer a determinisztikus trend szűrése: az idősorra ráillesztünk egy analitikus trendet majd kivonjuk belőle, ezt jelenti a „szűrés”
- Például (lineáris trend szűrése):

  $$Y_t = \alpha + \beta t + u_t$$

  modell alapján megbecsüljük α és β értékét (OLS- vagy ML-elven), majd áttérünk a – reményeink szerint stacioner –

  $$Y_t' = Y_t - \left(\widehat{\alpha} + \widehat{\beta} t\right)$$

időssorra

- Ilyen értelemben mondjuk, hogy kiszűrtünk belőle egy determinisztikus trendet
- (Lényegében az egyenes illesztése utáni reziduumokra tértünk át)
- Visszatérés: a trend hozzáadása

Determinisztikus trend szűrése

- Ha ezzel a transzformációval az idősor stacionarizálható (tehát Y_t' már stacioner), akkor azt mondjuk, hogy az eredeti Y_t idősor **trendstacioner folyamat** (TSP, trend stationary process) volt
- Természetesen nem muszáj egyszerű lineáris trendet szűrni, illeszthetünk kvadratikus trendet ($\alpha + \beta t + \gamma t^2$), exponenciális trendet ($\alpha e^{\beta t}$), szezonalitást, bármit, a lényeg, hogy egy előre megadott determinisztikus függvényforma legyen
- (A dolog ugyanis azért fog működni, mert amit illesztünk, annak a paraméterei szigorúan exogének)
- Vegyük észre, hogy ez filozófiájában a korábban látott „determinisztikus trend" fogalmához illeszkedik: ha egy idősorban trend van, de az determinisztikus ($Y_t^{(D)} = \alpha t + u_t$), akkor épp ez a módszer fogja stacionarizálni

Differenciázás

- Ha az idősorban viszont sztochasztikus trend van ($Y_t^{(S)} = Y_{t-1}^{(S)} + \alpha + u_t$), akkor egy másik, de pofonegyszerű transzformációval stacionarizálhatjuk:
$$Y_t' = Y_t - Y_{t-1}$$
- Hiszen ha az idősor valóban az előbbi modell követi, akkor a fenti transzformáció eredménye
$$Y_t' = \alpha + u_t$$
lesz, ami feltevéseink szerint tényleg stacioner
- Ezt a transzformációt úgy hívjuk, hogy az idősor **differenciázása**, jele Δ, ez is egy *operátor*:
$$\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1} = Y_t - LY_t = (1 - L)\, Y_t,$$
tehát $\Delta = 1 - L$

Differenciázás

- Ha ezzel a transzformációval az idősor stacionarizálható (tehát Y'_t már stacioner), akkor azt mondjuk, hogy az eredeti Y_t idősor **differenciastacioner folyamat** (DSP, difference stationary process) volt
- Visszatérés: felkumulálás (kezdőértékre szükség lesz):

$$Y_t = Y_0 + \sum_{i=1}^{t} \Delta Y_i$$

- (Itt már ráismerhetünk, hogy a differenciázás igazából nem más, mint a *diszkrét deriválás*: ha diszkrét halmazon vagyunk, akkor a $\lim_{\Delta t \to 0}$ azt jelenti, hogy $\Delta t = 1$, azaz, hogy két egymást követő időpont különbségét nézzük, és ilyenkor persze le sem kell osztani Δt-vel)
- Emiatt azt is mondjuk, hogy a folyamat elsőrendben integrált, jelben $I\left(1\right)$

Differenciázás

- A differenciázás lineáris trendet tüntet el (ha az sztochasztikus értelmű)
- Mi van, ha kvadratikus trendet kell eltüntetnünk?
- Ugyanúgy, ahogy az $ax+b$ függvényt a deriválás teszi konstanssá, az ax^2+bx+c-t pedig a kétszeri deriválás, ilyenkor a *kétszeri differenciázás* (*másodrendű differenciázás*) lesz a megoldás:

$$\begin{aligned}\Delta\left(\Delta Y_t\right) &= \Delta\left(Y_t - Y_{t-1}\right) = \left(Y_t - Y_{t-1}\right) - \left(Y_{t-1} - Y_{t-2}\right) = \\ &= \left(Y_t - 2Y_{t-1} + Y_{t-2}\right)\end{aligned}$$

- A jele Δ^2
- Az előbbi eredmény nem meglepő, hiszen

$$\Delta^2 = (1-L)^2 = 1 - 2L + L^2$$

- Ha egy folyamat így stacionarizálható, akkor azt mondjuk, hogy másodrendben integrált, jelben $I\left(2\right)$

Differenciázás

- Természetesen a dolog általánosítható: Δ^d a d-ed rendbeli (d-szeri) differenciázás, $\Delta^d = (1-L)^d$

- Ha egy idősor nem stacioner, az első differenciázottja sem az, a második differenciázottja sem az, ..., de a d-szeri differenciázottja már igen (tehát d a legkisebb egész szám, hogy az annyiszoros differenciázott már stacioner), akkor azt mondjuk, hogy az idősor d-ed rendben integrált, jelben $I(d)$
- (Ennek megfelelően a stacioner idősor nulladrendben integrált, jelben $I(0)$)
- Ez a tipikusabb a közgazdasági gyakorlatban
- Olyannyira, hogy ennek ARMA-val való kombinációjára külön elnevezés van: ha egy d-ed rendben integrált idősor d-szeres differenciázottját modellezzük ARMA(p,q)-val, akkor azt is mondhatjuk, hogy az eredeti idősort **ARIMA(p,d,q)**-val modelleztük

9 Box-Jenkins eljárás, előrejelzés készítése

9.1. Box-Jenkins eljárás

A Box-Jenkins eljárás lényege

- Az alapgondolat: az idősorokat – stacioner – ARIMA(p,d,q)-modellel írjuk le...
- ...a paramétereket úgy megválasztva, hogy a modellfeltevések teljesüljenek
- A nevét két fő proponenséről – George Box és Gwilym Jenkins – kapta, akiknek az 1970-es könyve (Time Series Analysis: Forecasting and Control) nagyon sokat tett a módszer széles körben történő megismertetéséért és elterjesztéséért

A Box-Jenkins eljárás lépései

1. A d meghatározása: már láttuk a módszereit (lényegében stacionarizálás/stacionaritás tesztelése)
2. A p és q rendek behatárolása: azért nem „meghatározása”, mert jellemzően nem egyértelmű, többféle lehetőséggel is próbálkozni kell (de általában igyekszünk kicsin tartani ezeket), egyedül a korrelogram segíthet, ha szemrevételezzük és összevetjük azzal, hogy az elméleti korrelogramok hogyan néznek ki (de ez általában csak tiszta AR vagy MA modelleknél működőképes)
3. Modell becslése: technikai lépés, most nem foglalkozunk vele
4. Modelldiagnosztika: reziduumok vizsgálata, minimum autokorrelálatlanságra (korrelogram, Ljung-Box teszt, Breusch-Godfrey teszt), esetleg normalitásra
5. Modellminősítés: jellemzően információs kritériumokat (AIC, BIC (SBC), HQC) használunk

A Box-Jenkins eljárás lépései

- A p és q behatárolásához tehát lényegében egy kétlépcsős megoldást alkalmazunk:
  - Szűrés: ami diagnosztikailag nem megfelelő, azok a modellek szóba sem jöhetnek, kidobjuk őket a jelöltek listájáról (ez tehát a modelldiagnosztika alapján megy)

  - Sorbarakás: ha nem egyetlen modell marad fenn, akkor azokat sorbarakjuk, és a – valamely metrika szerinti – legjobbat választjuk (ez tehát a modellminősítés alapján megy)

- Az így kapott modellt pedig felhasználjuk
- Itt jellemzően a felhasználás nem elemzést, hanem előrejelzést jelent

9.2. Előrejelzés készítése

Az előrejelzés alapelve

- Természetesen itt is feltételes várható értékkel predikálunk, azaz az előrejelzéshez behelyettesítünk minden ismert változót (ARMA-modellnél ez a folyamat múltbeli értékeit, és a múltbeli hibákat jelenti), és a tárgyidőszaki hibatagot nullának vesszük
- Ilyen módon ARMA-modellben csak egyetlen időszakra tudunk előrejelezni; ennek neve **statikus előrejelzés**
- Statikus előrejelzésben csak realizálódott értékre támaszkodunk (a tárgyidőszaki hibától eltekintve, természetesen)
- Ha több időszakra kell előrejeleznünk, akkor
  - a későbbi hibákat mind nullának kell vennünk (nem csak a tárgyidőszakit)
  - a múltbeli értékek sem lesznek mind realizálódottak – ilyenkor a korábbi előrejelzésre támaszkodunk
- Ezt hívjuk **dinamikus előrejelzésnek**

Előrejelzések készítése

- Mindez összefoglalva azt jelenti, hogy
  - a hibatag helyébe a reziduumot írjuk, ha mintán belül vagyunk, 0-t, ha azon kívül
  - a múltbeli érték helyébe a realizálódott értékét írjuk, ha mintán belül vagyunk, a becsült értéket, ha azon kívül
- Az ARMA-folyamat tulajdonságaiból adódik, hogy nagyon messzire előremenve az előrejelzéssel a folyamat várható értékéhez fogunk konvergálni
- ARIMA-modellezésnél utolsó lépésben még vissza kell csinálni a differenciázást (kumulálni kell)

Az előrejelzés pontosságának a mérése

A két legtipikusabb mutató:

- Átlagos négyzetes hiba: $MSE = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} (y_t - \widehat{y}_t)^2$
- Átlagos abszolút relatív hiba: $MAPE = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \frac{|y_t - \widehat{y}_t|}{y_t}$

10 Idősorok regressziója

10.1. Exogén változós idősormodellek

10.1.1. Alapgondolatok, statikus regresszió

Idősorok regressziójának alapgondolata

- Az idősorunkat *más* idősor(ok)kal akarjuk magyarázni
- Lényegében tehát *ki akarjuk regresszálni* az idősorunkat (mint eredményváltozót), más idősorokkal (mint magyarázó változókkal)
- Bizonyos értelemben az eddigi AR-modellek is ilyenek voltak, csak a „más idősor” ugyanannak a késleltetettjeit jelentette
- Most viszont megengedjük, hogy tényleg eltérő idősorok (vagy azok késleltetettjei!) is belépjenek magyarázó változóként
- A fő kérdésünk az lesz, hogy e modelleknek milyen feltételeket kell teljesíteniük, hogy jó tulajdonsággal becsülhetőek legyenek a paramétereik
- És persze szokásosan az ökonometriai modellek két felhasználása: elemzés és előrejelzés

Statikus regresszió

- A legegyszerűbb idősoros regressziós modell:
  $$y_t = \beta_0 + \beta_1 z_t + u_t,$$
  ahol y_t és z_t tehát két idősor *ugyanazon* időpontbeli megfigyelései
- Például: statikus Phillips-görbe (infláció vs. munkanélküliség)
- Az u_t hibatag és tulajdonságai lesznek majd vizsgálódásunk fókuszában, ami a modellfeltevéseket illeti
- Legegyszerűbb eset, ha z_t valami „teljesen más”, u_t-től külső információ (ezt majd pontosítjuk), úgy fogjuk mondani, hogy **exogén változó**
- Természetesen lehet több exogén változó is:
  $$y_t = \alpha + \beta_1 z_{t1} + \beta_2 z_{t2} + \ldots + \beta_k z_{tk} + u_t$$

Statikus regresszió

- β_i jelentése: ha az i-edig idősor értéke egy adott időszakban egy egységgel megnő (minden mást változatlanul tartva), akkor modellünk szerint várhatóan hány egységgel lesz nagyobb az eredményváltozó *ugyanazon* időszakban
- Azért hívjuk statikusnak, mert ugyanazon időszaki változásokat kapcsol össze, tehát nincs időszakok közötti hatás
- (A dinamika szó általában is időben kiterjedten lezajlódó dolgokra utal)

10.1.2. Dinamikus regressziók

A dinamika szükségessége

- Rengeteg helyzetben a statikusság irreális
- Nem várható, hogy egy beruházás rögtön *ugyanabban* az időpontban befolyásolja a kibocsátást, hogy egy felvilágosítókampány *azonnal* lecsökkenti a megbetegedések számát, hogy egy szociálpolitikai intézkedés *rögtön* megváltoztatja a jövedelmi viszonyokat stb.
- A legtöbb társadalmi-gazdasági jelenség csak időben elnyújtva, késleltetéssel hat, több időszakon keresztül fejti ki a hatását
- Ezért szükséges a dinamika beépítése is a regressziós modelljeinkbe

Osztott késleltetésű modellek

- A legegyszerűbb dinamikus modell: legyen most csak egyetlen magyarázó változónk, csak épp

$$y_t = \beta_0 + \delta_0 z_t + \delta_1 z_{t-1} + \delta_2 z_{t-2} + \ldots + \delta_p z_{t-p} + u_t$$

- Az idősor tárgyidőszaki értékére a korábbi z-k is hatást gyakorolnak…
- … avagy – fordítva elmondva ugyanazt – a z mostani változásai a jövőben fognak kihatni y-ra
- β_i: ha z most megváltozik, akkor i időszakkal később ez hogyan hat y-ra
- Amennyiben véges sok korábbi z hat y-ra (később fogjuk látni hogyan hathat végtelen sok korábbi), akkor **véges osztott késleltetésű** modellről (FDL, finite distributed lag) beszélünk

Az FDL-modell

- Ha z konstans, majd egy időszakra felugrik eggyel nagyobbra, majd után visszaáll a konstans szintre, akkor a tárgyidőszaki y β_0-lal lesz nagyobb mint az állandósult szintje, az eggyel később y β_1-gyel, ..., a p-vel későbbi időszakban β_p-val, és a p utáni időszakokra már nem hat ez a módosulás
- Ezeket hívjuk **rövid távú hatásmultiplikátornak**, értéke tehát az i-edik időszakra épp β_i
- Éppen ezért szokás kiplottolni β_i-t a i-vel szemben
- A másik tipikus értelmezési keret, hogy z egy adott időszakban felugrik eggyel *és úgy is marad*, kérdés, hogy hosszú távon mi történik y-nal
- Ugyanabban az időszakban β_0-lal nő meg, a következőben $\beta_0+\beta_1$-gyel és így tovább
- Ezt hívjuk **hosszú távú hatásmultiplikátornak**, értéke tehát $\sum_{i=0}^{p} \beta_i$

FDL-modell strukturálatlan becslése

- Ha a fenti módon egyszerűen megbecsüljük β-kat, akkor **strukturálatlan becslésről** beszélünk (mert semmit nem tettünk fel a β-k értékeiről)
- A probléma ezzel, hogy nagyon sok esetben egy idősor egymást követő értékei nagyon korreláltak $\rightarrow$ a fenti modellben rendkívül erős multikollinearitás lesz, a β-kat csak nagyon bizonytalanul (hatalmas CI-vel) tudjuk csak becsülni
- (*Együttesen* vizsgálhatóak, például F-teszttel, vagy a hosszú távú hatásmultiplikátort is jól meg tudjuk becsülni, csak külön-külön nem)

FDL-modell struktrált becslése, Almon-lag

- Éppen ezért gyakori, hogy nem teljesen szabadon becsüljük β_i-ket, hanem feltételezünk valamilyen struktúrát
- Lényegében: átcseréljük az eredeti paramétereket kisebb számú, kevésbé multikollineáris paraméterekre
- (Persze ennek az az ára, hogy a struktúrát el kell találnunk, az ugyanis nem az adatokból jön, hanem mi mondjuk meg kívülről)
- Az egyik népszerű választás az **Almon késleltetési struktúra**, amikoris azt tételezzük fel, hogy a β_i-k az i-ben polinomiálisak:

  $$\beta_i = \sum_{j=0}^{n} w_j i^j,$$

  ahol n tipikusan kicsi (pl. 2-3)

- Akármennyi is p, nekünk csak n darab – általában már nem túl multikollineáris – paramétert kell becsülnük
- De még egyszer: fontos, hogy β_i tényleg kvadratikus (/köbös/stb.) legyen i-ben

FDL-modell strukturált becslése, Koyck-lag (GDL)

- Egy másik népszerű választás, hogy β_i geometriailag lecsengő i-ben:
$$\beta_i = \beta_0 \rho^i,$$
ahol természetesen $|\rho| < 1$
- (Azt is mondhattuk volna, hogy $\beta_i = \rho\beta_{i-1}$)
- Ezt hívják **Koyck késleltetési struktúrának**
- Ami nagyon érdekes, hogy ehhez igazából az sem kell, hogy csak véges sok késleltetés lépjen be a modellbe!
- Nyugodtan lehet az a modellünk, hogy
$$y_t = \beta_0 + \delta_0 z_t + \delta_1 z_{t-1} + \delta_2 z_{t-2} + \ldots + u_t,$$
nem lesz végtelen sok becsülendő paraméterünk, hiszen a DL részhez tartozó paraméterek száma *mindenképp* 2 (β_0 és ρ)
- Tehát értelmesen megbecsülhető a fenti specifikáció is, mintegy végtelen osztott késleltetésű modellként, a neve **geometriai osztott késleltetű** modell (GDL, geometric distributed lag)

A GDL-modell értelmezése

- A rövid távú hatásmultiplikátor tehát $\beta_i = \beta_0 \rho^i$
- A hosszú távú hatásmultiplikátor izgalmasabb:
$$\sum_{i=0}^{\infty} \beta_i = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_0 \rho_i = \beta_0 \sum_{i=0}^{\infty} \rho_i = \frac{\beta_0}{1-\rho}$$

10.1.3. Idősoros regressziók általános modellje

Az eddigiek kombinációja

- Az eddigiek természetesen kombinálhatóak is: lehet benne *több z* is, akár késleltetve
- Természetesen lehet vegyesen is (bizonyosak késleltetés nélkül, mások késleltetéssel, a rend sem kell, hogy azonos legyen)
- A jobb oldalra berakhatjuk az eredményváltozó késleltettjeit is (itt nyilván egyidejű tagot nem rakhatunk be…), ezzel AR-hatást is létrehozhatunk

Egy általános modell felé

- Láttuk tehát, hogy a magyarázó változó lehet:
  - Exogén z (mint a statikus regresszióban)
  - Exogén z késleltetettje (mint a DL-ben)
  - Az eredményváltozó késleltetettje (mint az AR-ben)
- Külön-külön mindegyiket néztük már – lásd a zárójeles megjegyzéseket – de semmi akadálya, hogy többet (vagy akár az összeset egyszerre) berakjuk egy modellbe!

Az általános modell

- Mindent összetéve:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{t1} + \beta_2 x_{t2} + \ldots + \beta_k x_{tk} + u_t = \beta_0 + \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{x}_t + u_t,$$

  ahol $x_{t,i}$ egyaránt *lehet* exogén változó, késleltett exogén változó vagy késleltetett eredményváltozó
- Formailag teljesen olyan, mint a regresszió keresztmetszetben, van eredményváltozó és vannak magyarázóváltozók
- Egyszerűen behúzzuk őket egy modellbe – történetesen nem keresztmetszeti adatok, hanem idősorok, de hát az OLS-nek mindegy, számok vannak így is, úgy is – és simán megbecsüljük OLS-sel... jó ötlet ez?
- A következőkben ezzel fogunk foglalkozni: mi történik akkor, ha a β-kat egyszerűen megbecsüljük OLS-sel, milyen feltételek mellett milyen tulajdonságúak lesznek az így kapott becslések?

10.2. Idősoros regresszió becslése OLS-sel

10.2.1. Standard modellfeltevések

A modellfeltevések és szerepük

- A helyzet, és a kérdés teljesen analóg a keresztmetszetnél látottakkal: milyen modellfeltevések mellett garantálhatóak, hogy az OLS szolgáltatta becsléseknek jó tulajdonságaik legyenek?
- Úgy fogjuk végignézni, hogy mindenhol a keresztmetszetivel rakjuk párhuzamba
- Ugyanúgy 5 (+1) modellfeltevés lesz

Linearitás

- Keresztmetszetnél ez volt:
$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \ldots + \beta_k X_k + u$$
és ez igaz mindegyik megfigyelési egységre, és így az egész mintára is:
$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \ldots + \beta_k X_{ik} + u_i$$
- Idősornál *pontosan ugyanez* a feltétel (legfeljebb i helyett t-t szokás írni)

Nincs egzakt multikollinearitás

- Keresztmetszetnél ez volt:
$$\mathbb{P}\left(\operatorname{rank} \underline{\underline{X}} = k\right) = 1$$
- Idősornál *pontosan ugyanez* a feltétel

Szigorú exogenitás

- Keresztmetszetnél, ha trehányak voltunk, ez volt:
$$\mathbb{E}\left(u_i \mid \underline{X}_i\right) = 0,$$
ha precízek, akkor ez:
$$\mathbb{E}\left(u_i \mid \underline{\underline{X}}\right) = 0$$
- Idősornál, ha precízek voltunk, *pontosan ugyanez* a feltétel
- Tehát: *minden* időszaki hiba várható érték független *minden* (akár más időszaki!) magyarázó változótól

Szigorú és egyidejű exogenitás

- A trehányság azért volt megengedhető, mert ha fae a mintavétel – ami keresztmetszetnél egy elfogadható feltevés lehet – akkor a precíz tényleg a trehányra egyszerűsödik
- Ez teljesen logikus: ha a különböző mintaelemek függetlenek, akkor egy adott időszaki hiba az összes többi időszaki magyarázó változótól nyilván várható érték független lesz, tehát csak az ugyanazon időszakiktől való függetlenséget kell megkövetelni
- Idősornál, mivel a fae mintavétel itt már nem elfogadható általánosságban, ez a trehányság nem lesz megengedhető
- A továbbiakban a $\mathbb{E}\left(u_i \mid \underline{X}_i\right) = 0$ feltételt **egyidejű exogenitásnak**, az – erősebb – $\mathbb{E}\left(u_i \mid \underline{\underline{X}}\right) = 0$ feltételt **szigorú (vagy erős) exogenitásnak** nevezzük
- (Most válik érthetővé, hogy a szigorú exogenitás elnevezésben mit jelent a szigorú!)
- A standard modellfeltevésben tehát a szigorú exogenitás szerepel

A szigorú exogenitás sérülései

- Természetesen minden, amit keresztmetszetnél is láttunk (pl. kihagyott változó, mérési hiba)
- Itt azonban más okok is lehetnek a háttérben:
  - Rosszul megragadott dinamika: például statikus regressziót becslünk, miközben FDL lenne a helyes
  - Az u-beli változás nem befolyásolhatja a későbbi x-et (ez meg hogy lehetne? úgy, ha y értékei visszahatnak a későbbi x-kre, például bűnözés regresszálása a rendőri erők létszámával)

Homoszkedaszticitás

- Keresztmetszetnél ez volt:
$$\sigma_i^2 := \mathbb{D}^2\left(u_i \mid \underline{\underline{X}}\right) = \sigma^2$$
- Idősornál *pontosan ugyanez* a feltétel

Autokorrelálatlanság

- Keresztmetszetnél ez volt: ha fae a mintavétel, akkor automatikusan teljesül, különben
$$\mathrm{cov}\left(u_i, u_j \mid \underline{\underline{X}}\right) = 0$$
minden $i, j = 1, 2, \ldots, n$, $i \neq j$
- Idősornál *pontosan ugyanez* (az utóbbi) a feltétel

Hibanormalitás

- Keresztmetszetnél ez volt:
$$\underline{u} \mid \underline{\underline{X}} \sim \mathcal{N}\left(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}\right)$$
- Idősornál *pontosan ugyanez* a feltétel

Összefoglalva

- Ha precízen fogalmaztunk, akkor igazából a keresztmetszetnél látott feltételek egy-az-egyben ugyanazok, mint amire itt is szükség van
- Most már elárulható, hogy ez nem véletlen: a precíz fogalmazás *épp* azért kellett, hogy az ott látott dolgok valójában *univerzálisak* legyenek, tehát ne csak keresztmetszetre vonatkozzanak, hanem ugyanúgy idősorra is
- ...ami tulajdonképpen jól érthető is: a tiszta elmélet egységes kell legyen, hiszen a változóknak „mindegy”, hogy ők most idősorok, vagy keresztmetszeti adatok, vagy micsodák

10.2.2. Az OLS véges mintás tulajdonságai idősorokra

Az OLS véges mintás tulajdonságai idősorokra

- Az első három feltétel teljesülése esetén az OLS szolgáltatta becslések torzítatlanok
- Ha mind az öt feltétel teljesül, akkor az OLS szolgáltatta becslések ezen felül hatásosak is (azaz BLUE-k is)
- Ha mind az öt feltétel teljesül, akkor a σ^2 és a hibák kovarianciamátrixának OLS szolgáltatta becslése torzítatlan
- Ha még a hibanormalitás is teljesül, akkor az OLS szolgáltatta becslések eloszlása normális, a t (F) statisztikák nulleloszlásai tényleg t-k (F-ek), a szokásos tesztek és a konfidenciaintervallumok validak

A keresztmetszeti esethez való viszony

- Mindez lényegében azt jelenti, hogy ezen feltevések teljesülése esetén az idősoros adatokkal *pontosan ugyanúgy* hajthatunk végre regressziót, mintha keresztmetszetiek lennének!
- Persze látni kell, hogy ezek rettentő erős feltevések voltak, a gyakorlatban ritkán teljesülnek

Véges (vagy kis-) mintás tulajdonság mivolt

- A tulajdonságoknál nem mondtuk semmit a mintanagyságról: ez azt jelenti, hogy mintanagyságtól függetlenül – azaz minden mintanagyságra – igazak
- Ilyenkor azt szokták mondani, hogy ezek „kis” mintás (véges mintás) tulajdonságok voltak
- (A kismintás elég szerencsétlen elnevezés, hiszen természetesen nagy mintára is igazak, gyakorlati szempontból persze érthető a kifejezés oka)

10.2.3. Az OLS nagymintás tulajdonságai idősorokra

A nagymintás tulajdonság értelme és szükségessége

- Nagymintás: nem minden n-re igaz, hanem csak $\lim_{n\to\infty}$ értelemben (szokás még aszimptotikus tulajdonságnak is nevezni)
- Fontos, mert a gyakorlatban a véges mintás tulajdonságokhoz tartozó feltételek sokszor nem teljesülnek, de nagy mintát néha van módunk venni, így nagyon lényeges annak vizsgálata, hogy ezzel mit tudunk „kiváltani”
- Igazából már keresztmetszetnél is láttunk egy nagymintás tulajdonságot: amikor azt mondtuk, hogy az első három tulajdonság fennállása esetén az OLS szolgáltatta becslések konzisztensek

Kitérő: idősorok ergodicitása

- Egy idősort **ergodikusnak** nevezünk, ha az időben távoli tagjai – bármely időpontból indulva – függetlenbe tartanak az időbeni távolságuk növekedtével (aszimptotikusan függetlenek)
- Egy ergodikus idősorra, ha még stacioner is (és így létezik μ) teljesül, hogy

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{T} Y_i \xrightarrow[\text{m.b.}]{} \mu$$

- Néha ezzel definiálják az ergodicitást (pontosabban szólva a várható értékben ergodicitást) – ilyenkor a stacionaritást meg kell követelni, vagy legalábbis óvatosan eljárni
- (Természetesen mindig definiálhatjuk az $I_{\{Y_t\in A\}}$ idősort, ilyenkor a várható érték valószínűség lesz)

Az ergodicitás – egy lehetséges! – pontos definíciója: minden korlátos $f : \mathbb{R}^{k+1} \to \mathbb{R}$ és $f : \mathbb{R}^{l+1} \to \mathbb{R}$ függvényre és minden i-re igaz, hogy

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty} \left|\mathbb{E}\left[f\left(y_i, y_{i+1}, \ldots, y_{i+k}\right) g\left(y_{i+n}, y_{i+n+1}, \ldots, y_{i+n+l}\right)\right]\right| = \\ &= \left|\mathbb{E}\left[f\left(y_i, y_{i+1}, \ldots, y_{i+k}\right)\right]\right| \left|\mathbb{E}\left[g\left(y_{i+n}, y_{i+n+1}, \ldots, y_{i+n+l}\right)\right]\right|.\end{aligned}$$

Az ergodicitás tartalma

- Lényegében azt mondja ki, hogy időátlag tart a sokasági – összességi – átlaghoz:
  - Azért fontos, mert azt mondja, hogy elég sok elemet megfigyelve (az időben – ugye mi csak ezt tudjuk megtenni!) *tényleg* tudunk következtetni a várható értékekre/valószínűségekre (ami igazából érdekel minket!)
  - A nagy számok törvényének megfelelője, illetve általánosítása (nem kellett a teljes függetlenséget feltenni)
- Néha szokás ezt gyenge függőségnek is nevezni

Ergodicitás és az autokovarianciák

- Érezhető, hogy ha egyszer az ergodicitás olyasmit követel meg, hogy az egyre távolabbi értékek egyre függetlenebbek legyenek (a teljes függetlenséghez tartva), akkor összefügg az autokovarianciákkal – hiszen azok is valami függetlenséggel kapcsolatban lévő dolgot mérnek
- Csakugyan, belátható, hogy egy idősor ergodikus (a várható értékre), ha a kovarianciái nullába tartanak, mégpedig olyan gyorsan, hogy abszolút összegezhetőek is:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\gamma_i| < \infty$$

Stacionaritás és ergodicitás

- Egy stacioner idősor nem feltétlenül ergodikus: $Y_t = X$ (ahol X egy valószínűségi változó), azaz az idősor konstans
- Egy ergodikus idősor nem feltétlenül stacioner: $Y_t = \alpha t + u_t$, ahol $\alpha \neq 0$ és $u_t \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma_u^2\right)$ függetlenül
- Nagyon sok esetben azonban a kettő ugyanaz (néhol keveredés is van emiatt a szóhasználatban)

Az új modellfeltevések

- Pluszban megköveteljük a linearitásnál, hogy az idősorok legyenek stacionerek és ergodikusak is
- Cserében viszont
  - Szigorú (erős) exogenitás helyett elég lesz az egyidejű exogenitás: $\mathbb{E}\left(u_i \mid \underline{X}_i\right) = 0$
  - Szigorú (erős) homoszkedaszticitás helyett elég lesz az egyidejű homoszkedaszticitás: $\mathbb{D}^2\left(u_i \mid \underline{X}_i\right) = \sigma^2$
  - Szigorú (erős) autokorrelálatlanság helyett elég lesz az egyidejű autokorrelálatlanság: $\operatorname{cov}\left(u_i, u_j \mid \underline{X}_i, \underline{X}_j\right) = 0$
- (A hibanormalitásról nem tettünk fel semmit: nem kellett, mert úgyis aszimptotikus eredményeink lesznek, ahol a centrális határeloszlás tétel kihasználható – ugyanis a fenti feltételek mellett az is működni fog, nem csak a nagy számok törvénye)

Az OLS nagymintás tulajdonságai

- Az előbb vázolt modellfeltevések közül az első három teljesülése esetén az OLS szolgáltatta becslések konzisztensek
- Ha mind az öt teljesül, akkor az OLS szolgáltatta becslések aszimptotikusan normálisak, a t (F) statisztikák nulleloszlásai tényleg t-k (F-ek) aszimptotikusan, a szokásos tesztek és a konfidenciaintervallumok aszimptotikusan validak