A stacionaritás tesztelése

Ferenci Tamás
tamas.ferenci@medstat.hu

Utoljára frissítve: 2023. május 9.

Tartalom

Tartalomjegyzék

1 A stacionaritás tesztelése **1**
1.1 A stacionaritás teszteléséről általában 1
1.2 Egységgyök 4

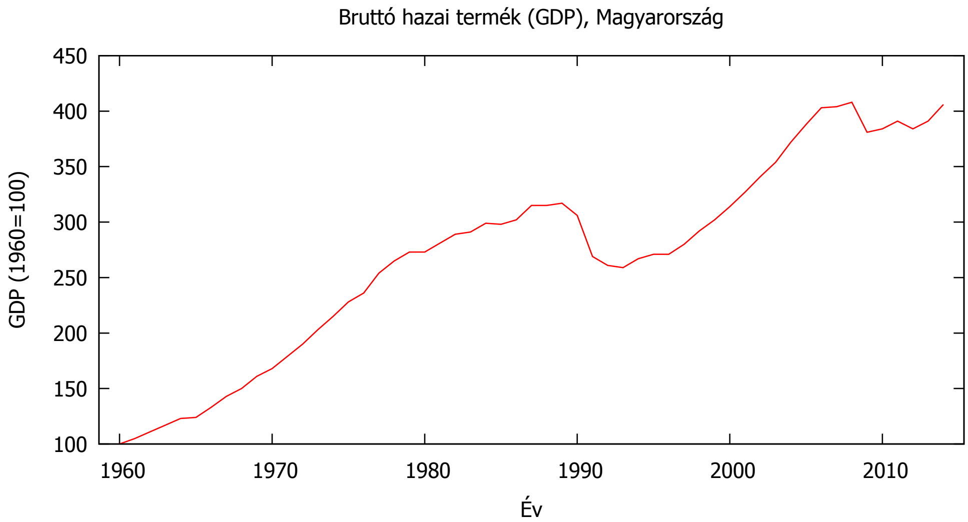
1. A stacionaritás tesztelése

1.1. A stacionaritás teszteléséről általában

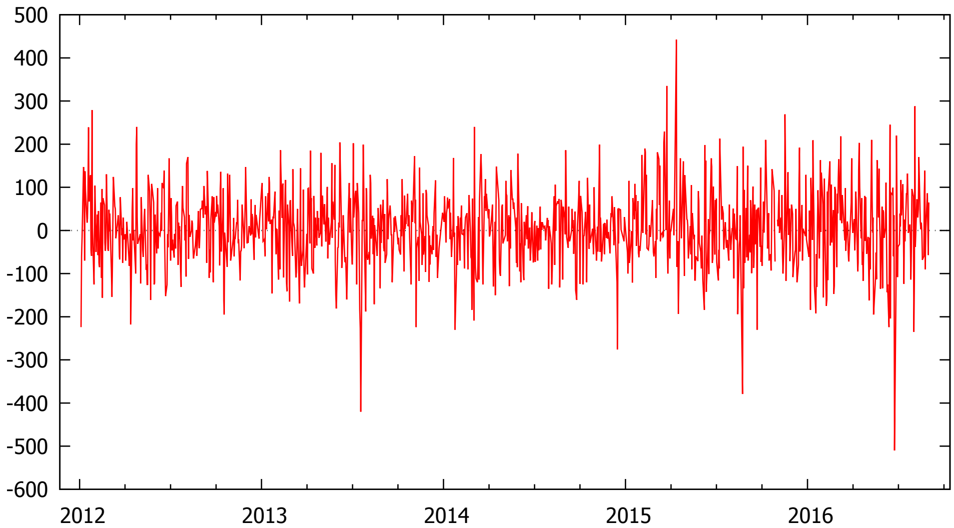
A tesztelés lehetőségei

- Egy módszerről már volt szó (grafikus eljárás), de ez igen szubjektív
- Most kiegészítjük két újjal, a második, a korrelogram szemrevételezése még mindig inkább csak heurisztikus…
- …de a harmadik, a statisztikai próbák alkalmazása már objektív (noha ez nem azt jelenti, hogy tökéletes!)

Grafikus módszer



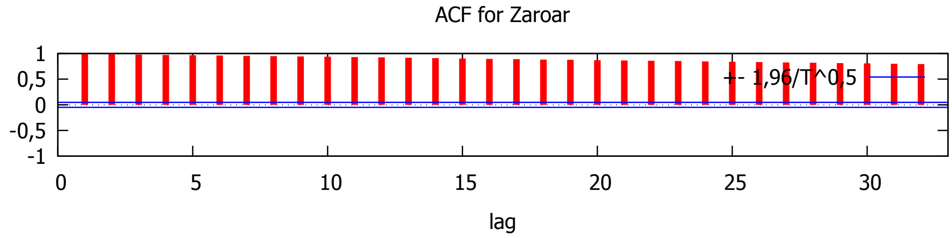
Grafikus módszer

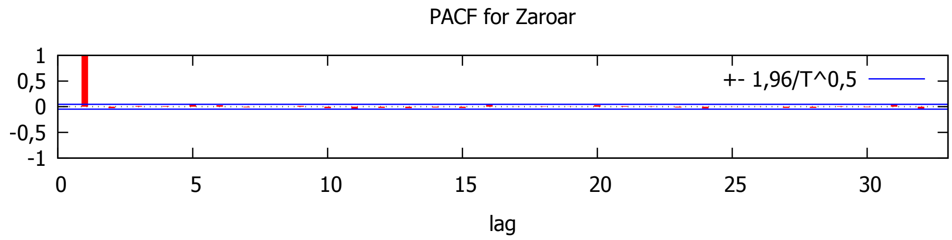


A grafikus módszer határai

- A (gyenge) stacionaritás három feltételéből igazából csak kettő vizsgálható egyáltalán „ránézésre”
- Nem állandó várható érték, nem állandó szórás (akár csak átmenetileg is!)
- A mintavételi ingadozás figyelembevételére nincsen formális módszer, nehéz megítélni (különösen ha nem túl nagy a mintanagyság)
- Szubjektív

Korrelogram szemrevételezése





Korrelogram szemrevételezése – miért működik?

- Azt kell nézni, hogy az ACF nagyon nem lecsengő-e
- (Figyelem: a „nagyon nem lecsengő” nem azt jelenti, hogy nem igaz az, hogy nullába tart, hanem azt, hogy az 1-től is alig szakad el!)
- Miért van ez így?
- Intuitív indoklás, gondoljunk arra, ha trendje van az idősornak
- (A végigtolt ablaknak mindkét vége vagy az átlag alatt, vagy az átlag felett lesz az esetek nagy részében; ez csak lassan oldódik az ablak szélességének növekedtével)

Statisztikai tesztek

- Ez az igazán objektív módszer, kapunk egy p-értéket, ebben nincsen szubjektív tényező
- A gyakorlatban legelterjedtebb módszerek valójában inkább azt ellenőrzik, hogy van-e ún. egységgyök a folyamat (nem általában azt, hogy „nem stacioner”), ld. mindjárt
- Például Dickey-Fuller teszt (DF), kiterjesztett Dickey-Fuller teszt (ADF, augmented DF)
- Lásd kicsit később

1.2. Egységgyök

Az egységgyök fogalma

- Láttuk, hogy egy ARMA-folyamat akkor stacioner, ha az AR-rész polinomjának, $\phi(L)$-nek az összes gyöke az egységkörön kívül van
- Pontosítsuk ezt az állítást:
  1. Ha az összes gyök az egységkörön kívül van, akkor a folyamat stacioner (eltolásinvariánsak a momentumok, egyedi impulzusok hatása lecsengő)
  2. Ha akár csak egyetlen gyök is az egységkörön belül van, akkor a folyamat **explozív** (momentumok elmennek a végtelenbe – esetleg oszcillálva –, az egyedi impulzusok hatása felerősödő)
  3. Ha egységkörön *belül* nincs gyök, de az egységkör*ön* van – egy vagy több – akkor ugyan nem stacioner, de egy furcsa helyzet áll elő
- (Gondoljunk mindezeket végig az $Y_t = \alpha + \phi_1 Y_{t-1} + u_t$ példáján!)
- Az említett 3. helyzet határeset: az egyedi impulzusok hatása sem nem lecsengő, sem nem felerősödő, a momentumok felemásan viselkednek (pl. variancia elszáll, de várható érték állandó)
- Ezt hívjuk **egységgyök-folyamatnak** (azt is mondjuk, hogy a folyamatban egységgyök van)

Az egységgyök és a differenciastacionaritás kapcsolata

- Ha $\phi(x)$-nek egy darab 1 értékű gyöke van (a többi nagyobb), akkor úgy is írható mint $\phi(x) = \widetilde{\phi}(x)(1-x)$, ahol $\widetilde{\phi}(x)$-nek már minden gyöke 1-nél nagyobb
- Igen ám, de ezzel a $\phi(L) Y_t = \alpha + \theta(L) u_t$ úgy is írható, mint
$$\widetilde{\phi}(L)(1-L) Y_t = \alpha + \theta(L) u_t,$$
azaz
$$\widetilde{\phi}(L) \Delta Y_t = \alpha + \theta(L) u_t$$
- Vagyis ilyenkor az idősor differenciázottjára adtunk egy ARMA-modellt!
- Egész pontosan ARMA(p-1,q)-t, hiszen az AR-polinomja ($\widetilde{\phi}(L)$) eggyel kisebb fokszámú

Az egységgyök és a differenciastacionaritás kapcsolata

- Azaz: ha – egyszeres – egységgyök van egy ARMA folyamatban, az épp azt jelenti, hogy differenciastacioner, mégpedig $I(1)$ lesz, mert a differenciázottja stacioner ARMA lesz
- Ez egy fontos magyarázat arra, hogy miért találjuk azt, hogy a differenciázás sokszor segít: épp az egységgyököt tünteti el!
- Hasonlóan, ha az 1 d-szeres gyök, akkor a d-szer differenciázott folyamat lesz stacioner, tehát az eredeti folyamat $I(d)$ volt

Egységgyök-tesztelés: DF-teszt

- Tekintsünk először egy AR(1)-modellt: $Y_t = \alpha + \phi_1 Y_{t-1} + u_t$ a szokásos feltevésekkel
- Az egyértelmű, hogy $H_0 : \phi_1 = 1$, klasszikusan legtöbbször a $H_1 : \phi_1 < 1$ alternatívával szemben vizsgálódunk
- (Mert: az explozív idősorokat teljesen kizárjuk a vizsgálódásunk köréből)
- Rögtön érthetővé válik, amit arról mondtunk, hogy ez nem „stacionaritási teszt", hanem egységgyök teszt (bár ebben az esetben a kettő *majdnem* ugyanaz, az egyetlen különbség az explozivitás kizárása)
- A teszteléshez térjünk át a differenciákra:
$$\Delta Y_t = \alpha + \delta_1 Y_{t-1} + u_t,$$
ahol $\delta_1 = \phi_1 - 1$
- Ennek megfelelően itt a tesztünk: $H_0 : \delta_1 = 0$ vs $H_1 : \delta_1 < 0$

Egységgyök-tesztelés: DF-teszt

- Egyszerűen eresszünk rá egy t-próbát?
- Nem jó ötlet, mert δ_1 t-hányadosának nem t-eloszlása lesz
  - Klasszikusan azzal indokoljuk a t-eloszlást, hogy ha nagy a mintánk, akkor ez (aszimptotikusan) eloszlási feltevésektől függetlenül teljesül, a centrális határeloszlás tétel miatt
  - Csakhogy itt a CLT nem fog érvényesülni, mert Y_{t-1} integrált idősor (gondoljunk bele, a varianciája minden határon túl nőni fog, ha a mintanagyság egyre nagyobb!)
- David Dickey és Wayne Fuller 1979-ben nagy számú szimulációval tisztázta, hogy – legalábbis aszimptotikusan – milyen eloszlása van akkor ennek, ha nem t, ezt hívjuk DF-eloszlásnak
- Ez alapján (vagy legalábbis a kitáblázott kritikus értékek alapján) már végezhető teszt: DF-teszt

Egységgyök-tesztelés: DF-teszt

- A gyakorlatban három módon szoktuk alkalmazni (más a DF-eloszlás mindegyikhez):
  1. $\alpha = 0$ (konstans és trend nélkül): sztochasztikusan sem lehet benne trend (nulla körül kell ingadozzon a differenciázott)
  2. α-ra nincs megkötés (konstanssal, de trend nélkül): sztochasztikusan lehet benne trend (ez a tipikusabb)
  3. Determinisztikus – lineáris – trend kiszűrése után az előbbi (konstanssal és trenddel): a trendszűrt idősort teszteljük, azaz itt a trend-stacionaritást, és nem a stacionaritást tudjuk vizsgálni (azzal ekvivalens, hogy az $Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + \phi_1 Y_{t-1} + u_t$-ből indulunk ki)
- (Esetleg másféle trend, vagy szezonális dummy-k is használhatóak)
- Hátrányok: sajnos kicsi lehet ez ereje ha a ϕ_1 kisebb mint 1, de csak kevéssel
- Hátrányok: csak akkor valid, ha az eredeti idősorra *tényleg* igaz volt az AR(1)-specifikáció (dinamikailag helyesen specifikált a modell, tehát tényleg ilyen alakú, és tényleg elég 1 késleltetés)

Egységgyök-tesztelés: ADF-teszt

- Próbáljuk kijavítani az előbbi hátrányt!
- Belátható, hogy ez úgy érhető el, ha áttérünk a

  $$\Delta Y_t = \alpha + \delta_1 Y_{t-1} + \gamma_1 \Delta Y_{t-1} + \gamma_2 \Delta Y_{t-2} + \ldots + \gamma_p \Delta Y_{t-p} + u_t$$

  modellre, ami akkor is működni fog, ha az eredeti folyamat magasabb – de p-nél nem nagyobb – rendű AR-folyamatot követ
- A rend megválasztása külön kérdés; általában információs kritériummal, vagy γ-k tesztelésével végzik (azoknak szerencsére szokásos, azaz t és – együttesen – F eloszlásaik vannak, legalábbis aszimptotikusan)