# Regresszió a sokaságban: a feladat megfogalmazása, megoldása és modellminősítés

Ferenci Tamás
tamas.ferenci@medstat.hu

Utoljára frissítve: 2023. május 9.

**Tartalom**

## Tartalomjegyzék



## 1. Út a regressziós modellekhez

### Jelölésrendszer

- Az eddigi példákból is látható, hogy van egy változó, aminek az alakulását le kívánjuk írni, amit modellezni akarunk, ennek neve **eredményváltozó** (vagy függő változó, angolul response), jele $Y$
- És vannak változók, amikkel le akarjuk az eredményváltozót írni, amikkel modellezünk, ezek nevei **magyarázó változók** (vagy független változók, angolul predictor), jelük $X_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$
- Az eredményváltozó a vizsgált kimenet, a magyarázó változók az azt – potenciálisan – befolyásoló tényezők (tehát a fontos, vizsgált változók és a – potenciális – confounderek egyaránt)

### Kitérő: szimultaneitás

- Látszik, hogy eredményváltozóból csak egyet engedünk meg
- Ha több lenne, akkor legfeljebb külön-külön foglalkozunk mindegyikkel – mondhatjuk első ránézésre
- Ez nem igaz azonban akkor, ha változók *kölcsönösen* hatnak egymásra
- Például nem csak a rendőri erők létszáma hat a bűnözésre (jó esetben...), hanem fordítva is, hiszen a múltbeli bűnözési adatok számítanak a rendőri vezetésnek akkor, amikor határoz a rendőri erők telepítéséről
- Ez a **szimultaneitás** problémája
- Most nem foglalkozunk vele (többegyenletes ökonometria, szimultán modellek fedőnevek alatt lehet vele találkozni)

Ha módunkban állna a városokba *véletlenszerű* mennyiségű rendőri állományt telepíteni, majd lemérni a bűnözési rátákat, akkor könnyen meg tudnánk határozni, hogy az előbbi hogyan hat az utóbbira. A valóságban ilyet nem tehetünk, hiszen ezt a rendőrség központilag határozza meg, ráadásul úgy – és most ez lesz a lényeg –, hogy az nem független a bűnözéstől: ahol magasabb, oda inkább vezényel több rendőrt. A kettő tehát *kölcsönösen* hat egymásra.

### Útban a regressziós modellek felé

- Az $X$-ek hatnak az $Y$-ra... ezt kellene megragadni matematikailag!
- De hát erre ismerünk egy jó matematikai objektumot, ami pont ezt írja le:

$$Y = f\left(X_1, X_2, \ldots, X_k\right)$$

- A későbbiekben erre azt fogjuk mondani, hogy ez egy statisztikai modell
- Nehéz lenne vitatkozni ennek az általánosságával, csak épp...

### Sztochasztikusság

- A fő probléma, hogy a modell azt feltételezi, hogy az $Y$ és az $X$-ek kapcsolata *determinisztikus*
- Szinte teljesen mindegy is, hogy mi az $Y$ és mik az $X$-ek, hogy mi a vizsgált probléma, a társadalmi-gazdasági jelenségek vizsgálata kapcsán lényegében általánosan kijelenthető, hogy ez irreális

- Egy középiskolai fizika-kísérletben ez lehet jó közelítés (megj.: igazából ott sem, mert vannak mérési hibák – legfeljebb elhanyagoljuk őket), de itt szinte kizárt, hogy *függvényszerű* módon meghatározzák a magyarázó változók az eredményváltozót
- A valódi modell **sztochasztikus** kell legyen:

$$Y = f\left(X_1, X_2, \ldots, X_k\right) + \varepsilon$$

- Rövid jelölésként az $X$-eket gyakran egy vektorba vonjuk össze: $Y = f\left(\underline{X}\right) + \varepsilon$
- Az ilyen $f$-et hívjuk (sokasági) **regressziófüggvénynek**
- $\varepsilon$ neve: hiba

# 2. Regresszió a sokaságban

### Sokaság és minta

- Ez az egyenlet egy *sokasági* modell: azt írja le, hogy a valóság hogyan működik
- Ezt persze mi nem tudhatjuk, majd mintából kell kitalálnunk (megbecsülnünk)
- Egyelőre ezzel ne törődjünk, és vizsgálódjunk tovább a sokaságban
- A nem-kísérleti jelleg miatt az az értelmes modell, ha mind az eredményváltozót, mind a magyarázó változókat – és így persze $\varepsilon$-t is – valószínűségi változónak vesszük, melyeknek eloszlása van (ezért használtunk eddig is nagy betűket!)

### A sokaság leírása

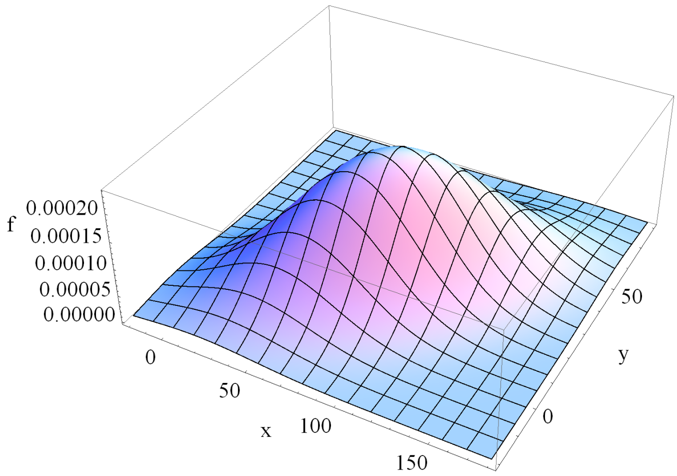
- Most valszámos emberek leszünk: úgy vesszük mintha ismernénk a sokaságot
- (Valójában persze csak a mintán keresztül tudunk rá következtetni, de a valszámos nézőpont épp azt jelenti, hogy ezzel nem törődünk: úgy vesszük, hogy nálunk van a bölcsek köve, azaz valahonnan tudjuk, hogy mi „az” eloszlás, egyelőre nem törődve azzal, hogy ezt igazából honnan is tudhatjuk)
- Mit kell ismernünk? Nem egyszerűen $Y$ és $X_1, X_2, \ldots, X_k$ eloszlásait (külön-külön), hanem az együttes eloszlásukat

### A sokaság értelme

- Ezt úgy kell elképzelnünk mint egy $k+1$ dimenziós teret: minden pont egy adott magyarázó- *és* eredményváltozó-kombináció (ami adott eloszlás szerint előállhat: van ami gyakrabban, van ami ritkábban)

- (Ha az $X$-eket rögzítjük, akkor egy olyan egydimenziós eloszlást kapunk, ahol a becsült érték mindenhol ugyanaz, miközben persze a – valódi – $Y$ nem: épp ez a hiba oka)
- A tér minden pontjában valamekkora a hiba (becsült és tényleges különbsége), ennek persze az eloszlását épp az határozza meg, hogy milyen a $k+1$ dimenziós téren a sűrűségfüggvény: ha valahol kicsi, akkor az ottani hiba kis hozzájárulást fog adni az $\varepsilon$ eloszlásához

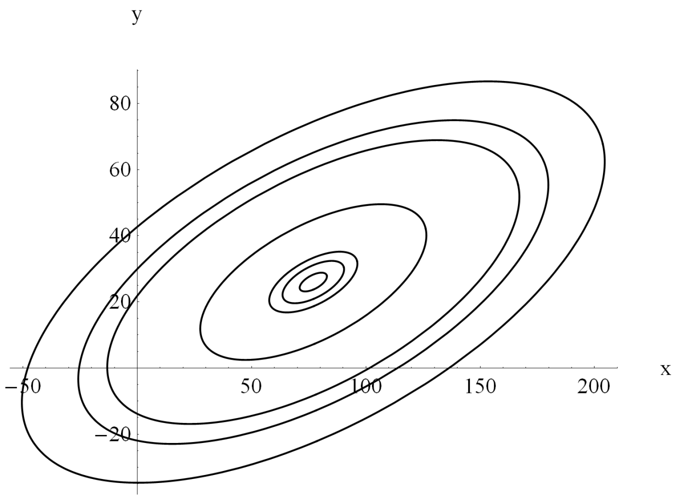
**Példa a sokaság valószínűségi leírására**




Ez egy kétváltozós eloszlás együttes sűrűségfüggvénye; itt az egyik változó játssza a magyarázó-, a másik az eredményváltozó szerepét. Mint sűrűségfüggvény, igaz rá, hogy tetszőleges terület felett kiszámolva a görbe alatti térfogatot (azaz kiintegrálva a függvényt), megkapjuk annak a valószínűségét, hogy a valószínűségi változó a kérdéses területre esik.

Eláruljuk, hogy a fenti eloszlás többváltozós normális (később ennek majd jelentősége lesz), $\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} 77 \\ 26 \end{pmatrix}$ várhatóérték-vektorral és $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 42^2 & 0{,}6 \cdot 20 \cdot 42 \\ 0{,}6 \cdot 20 \cdot 42 & 20^2 \end{pmatrix}$ kovariancia-mátrixszal.

**Példa a sokaság valószínűségi leírására**




Ez ugyanaz mint a fenti sűrűségfüggvény, de „szintvonalakkal” leírva (azaz különböző $z$ magasságokban elmetszettük a sűrűségfüggvényt és a kapott metszeteket ábrázoltuk). Belátható, hogy többváltozós normális esetén ezek mindig ellipszisek. (Úgy, hogy az ellipszis középpontját a várhatóérték-vektor adja meg, a tengelyek a kovariancia-mátrix sajátvektorainak irányába mutatnak, féltengelyeik hossza pedig a kovariancia-mátrix megfelelő sajátértékeivel arányos.) A fenti ábrát ráadásul úgy képeztük, hogy a metszetek adott valószínűségű területet határoljanak; a legnagyobb területű ellipszisről például az mondható el, hogy területére épp 95% valószínűség esik a fenti eloszlásból. Ez tehát lényegében a 0,95-ös „kvantilis-ellipszis”. (A fentiek miatt az ilyen értelmű régiók többváltozós normális eloszlás esetén jól meghatározottak.) A fenti ábra ezt a 0,01, 0,05, 0,1, 0,5, 0,9, 0,95 és 0,99 valószínűségekhez tartozó ellipsziseket adja meg.

Ezt az ábrázolást szokás ’contour plot’-nak nevezni, előnye, hogy – a háromdimenziós érzékeltetéssel szemben – nem érzékeny a nézőpont megválasztására, részek nem takarnak ki másokat stb. (Ám cserében nyilván információ-vesztéssel jár, ami azzal arányos, hogy milyen sűrűn képezzük a metszeteket.)

### Az optimális regressziófüggvény definiálása

- Mit nevezünk „legjobb” $f$-nek? Ehhez nyilván definiálni kell, hogy mit értünk jóság alatt...
- Természetes elvárás, hogy a tényleges érték ($Y$) és a modell szerinti érték ($f(X_1, X_2, \ldots, X_k)$, más szóval becsült vagy predikált érték) minél közelebb legyen egymáshoz, azaz, hogy $\varepsilon$ kicsi legyen
- Az már döntés kérdése, hogy mit értünk „kicsi” alatt; tipikus választás:
  - mivel $\varepsilon$ is egy val. változó, így a várható értékét vesszük (az már egyetlen szám, amit lehet minimalizálni)
  - és használjuk a négyzetét (hogy – egy matematikailag kényelmesen kezelhető függvénnyel – megszabaduljunk az előjelétől)

- A várható érték azért is fontos, mert jól kifejezi, hogy „ott kevésbé számít a hibázás, ami kevésbé gyakran fordul elő”

**Az optimális regressziófüggvény meghatározása**

- Így tehát a feladat:
$$\arg\min_f \mathbb{E}\left[Y - f\left(\underline{X}\right)\right]^2$$
- Egészen abszurdan hangzik (az összes létező függvény körében keressünk optimumot?), de megoldható!
- A megoldás a feltételes várható érték:
$$f_{\mathrm{opt}}\left(\mathbf{x}\right) = \mathbb{E}\left(Y \mid \underline{X} = \mathbf{x}\right)$$
- Ez az eredmény *teljesen univerzális*, semmit nem tételeztünk fel $f$-ről!
- (Emlékeztetünk rá, hogy ha $\mathbb{E}\left(Y \mid \underline{X} = \mathbf{x}\right)$ egy $f\left(\mathbf{x}\right)$ transzformációt definiál, akkor $\mathbb{E}\left(Y \mid \underline{X}\right)$ alatt $f\left(\underline{X}\right)$-et értjük – ez tehát egy valószínűségi változó)

Bármilyen meglepő, de nem is olyan rettentő nehéz megoldani ezt az optimalizációs problémát. Legyen $f_{\mathrm{opt}}$ a feltételes várható érték, $f$ pedig egy tetszőleges $k$-változós függvényt. Alakítsuk át a kritériumfüggvényt:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[Y - f\left(\underline{X}\right)\right]^2 &= \mathbb{E}\left[Y - f_{\mathrm{opt}}\left(\underline{X}\right) + f_{\mathrm{opt}}\left(\underline{X}\right) - f\left(\underline{X}\right)\right]^2 = \\ &= \mathbb{E}\left[Y - f_{\mathrm{opt}}\left(\underline{X}\right)\right]^2 + \mathbb{E}\left\{\left[Y - f_{\mathrm{opt}}\left(\underline{X}\right)\right]\left[f_{\mathrm{opt}}\left(\underline{X}\right) - f\left(\underline{X}\right)\right]\right\} + \\ &+ \mathbb{E}\left[f_{\mathrm{opt}}\left(\underline{X}\right) - f\left(\underline{X}\right)\right]^2 .\end{aligned}$$

A középső tag szerencsére nulla, ezt toronyszabállyal láthatjuk be:

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left\{\left[Y - f_{\mathrm{opt}}\left(\underline{X}\right)\right]\left[f_{\mathrm{opt}}\left(\underline{X}\right) - f\left(\underline{X}\right)\right]\right\} = \\ &= \mathbb{E}\left\{\mathbb{E}\left\{\left[Y - f_{\mathrm{opt}}\left(\underline{X}\right)\right]\left[f_{\mathrm{opt}}\left(\underline{X}\right) - f\left(\underline{X}\right)\right]\right\} \mid \underline{X}\right\} = \\ &= \mathbb{E}\left\{\left[f_{\mathrm{opt}}\left(\underline{X}\right) - f_{\mathrm{opt}}\left(\underline{X}\right)\right]\mathbb{E}\left[f_{\mathrm{opt}}\left(\underline{X}\right) - f\left(\underline{X}\right)\right] \mid \underline{X}\right\} = 0,\end{aligned}$$

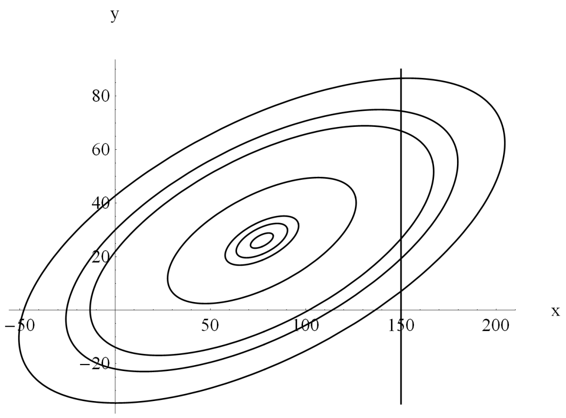
így azt kaptuk, hogy

$$\mathbb{E}\left[Y - f\left(\underline{X}\right)\right]^2 = \mathbb{E}\left[Y - f_{\mathrm{opt}}\left(\underline{X}\right)\right]^2 + \mathbb{E}\left[f_{\mathrm{opt}}\left(\underline{X}\right) - f\left(\underline{X}\right)\right]^2 ,$$

amiből már csakugyan látható, hogy $f_{\mathrm{opt}}$ a legjobb választás, hiszen az első tagra nincsen ráhatásunk (mi ugye $f$-et állítjuk), a második tag pedig egy négyzet várható értéke, így 0-nál kisebb nem lehet, de az csakugyan elérhető, ha $f$-nek $f_{\mathrm{opt}}$-ot választjuk.

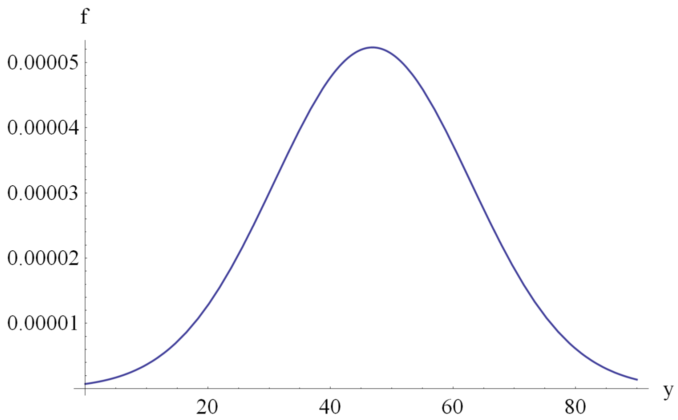
## A feltételes várhatóérték – emlékeztető

Az együttes eloszlást „elmetsszük” a feltétel (például $x = 150$) pontjában:



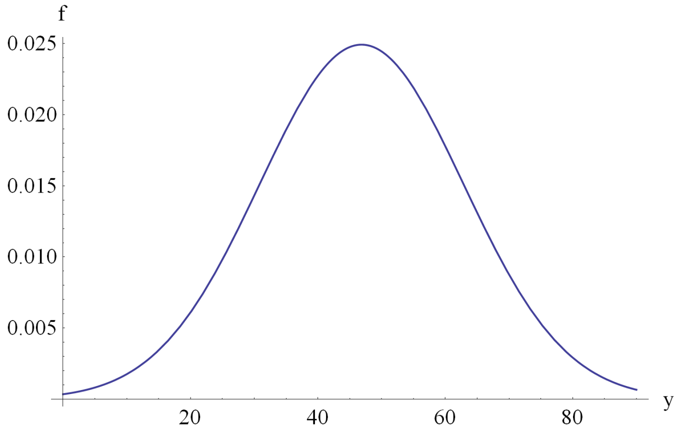

## A feltételes várhatóérték – emlékeztető

Az így „kimetszett” eloszlás még nem eloszlás, mert nem 1-re normált...



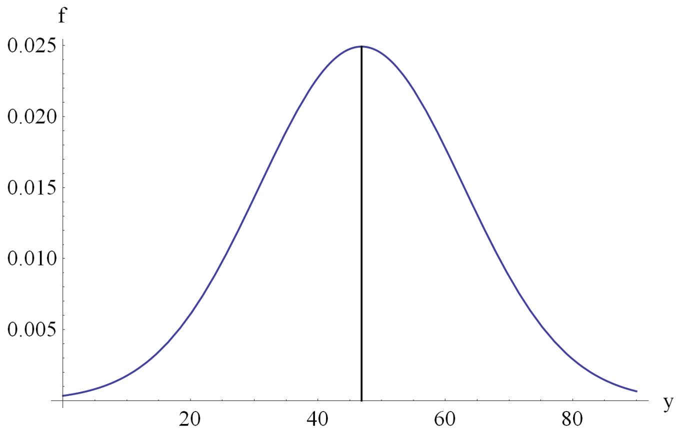

## A feltételes várhatóérték – emlékeztető

... de osztva a tényleges integráljával (ami persze a peremeloszlás értéke a feltétel pontjában) kapjuk az igazi feltételes eloszlást:




**A feltételes várhatóérték – emlékeztető**

Ennek a várhatóértéke az adott feltétel melletti feltételes várhatóérték ($\mathbb{E}\left(Y \mid X = 150\right) = 46{,}9$)



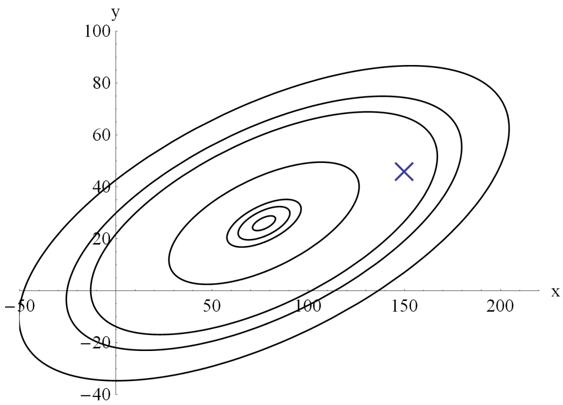

# 3. Az optimális sokasági regresszió

**Optimális sokasági regresszió számítása**

- Ez tehát – legalábbis elvileg – *pusztán* a sokasági eloszlás ismerete alapján kiszámítható, csak némi integrálást igényel
- Csakhogy: az integrál gyakorlati kiszámítása még egyszerű eloszlásokra sem feltétlenül egyszerű
- Egy nevezetes kivétel lesz, a többváltozós normális elszolás

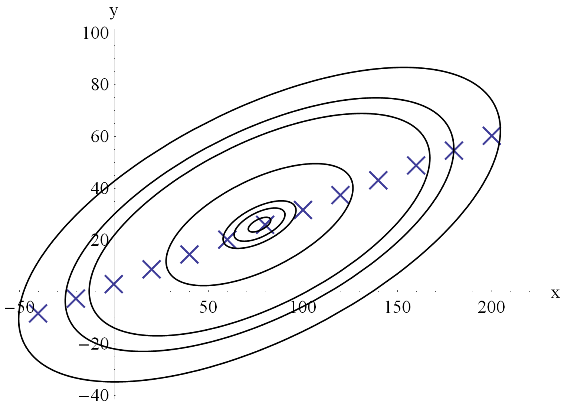
**Optimális sokasági regresszió normális eloszlásnál**

Az optimális becslés egy pontnál:




**Optimális sokasági regresszió normális eloszlásnál**

Számítsuk ki több pontra is:




**Optimális sokasági regresszió normális eloszlásnál**

Amit látunk, az nem véletlen:

Ha $Y$ és $\underline{X}$ együttes eloszlása normális, akkor

$$\mathbb{E}\left(Y \mid \underline{X}\right) = \mathbb{E}Y + \mathbf{C}_{Y\underline{X}}\mathbf{C}_{\underline{X}\underline{X}}^{-1}\left(\underline{X} - \mathbb{E}\underline{X}\right).$$

Azaz írhatjuk, hogy

$$\mathbb{E}\left(Y \mid \underline{X}\right) = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \ldots + \beta_k X_k.$$

ha bevezetjük a

$$\beta_0 = \mathbb{E}Y - \mathbf{C}_{Y\underline{X}}\mathbf{C}_{\underline{X}\underline{X}}^{-1}\mathbb{E}\underline{X}$$

és a

$$\begin{pmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_k\end{pmatrix}^T = \mathbf{C}_{Y\underline{X}}\mathbf{C}_{\underline{X}\underline{X}}^{-1}\underline{X}$$

jelöléseket.

Többváltozós normális eloszlásnál tehát speciálisan a regressziófüggvény lineáris lesz.

Érdemes megfigyelni (ez kétváltozós esetben jól érzékelhető vizuálisan is), hogy a regressziófüggvény *nem* a kvantilis-ellipszis nagytengelye (tehát a korrelációs mátrix megfelelő sajátvektora) irányába mutat! (Hanem az ellipszis „vízszintesen szélső” pontjain megy át.)

Kétváltozós $(X, Y)$ esetre: $\mathbb{E}\left(Y \mid X\right) = \mathbb{E}Y + \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\mathbb{D}^2 X} \cdot (X - \mathbb{E}X)$. Két észrevétel ennek kapcsán:

- Korreláció megjelenése: $\mathbb{E}\left(Y \mid X\right) = \mathbb{E}Y + \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\mathbb{D}^2 X}(X - \mathbb{E}X) = \mathbb{E}Y + \frac{\mathbb{D}Y}{\mathbb{D}X} \cdot \operatorname{corr}(X, Y) \cdot (X - \mathbb{E}X)$.
- A linearitás megjelenése itt: $\mathbb{E}\left(Y \mid X\right) = \mathbb{E}Y + \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\mathbb{D}^2 X}(X - \mathbb{E}X) = \left(\mathbb{E}Y - \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\mathbb{D}^2 X} \cdot \mathbb{E}X\right) + X \cdot \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\mathbb{D}^2 X}$ azaz $\mathbb{E}\left(Y \mid X\right) = \beta_0 + \beta_1 X$, ha $\beta_0 = \left(\mathbb{E}Y - \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\mathbb{D}^2 X} \cdot \mathbb{E}X\right)$ és $\beta_1 = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\mathbb{D}^2 X}$.

### A hibaalak

- Általában is értelmes tehát a következő dekompozíció (a modell „error form”-ja):
$$Y = \mathbb{E}\left(Y \mid \underline{X}\right) + \varepsilon$$
- Y *mindig* felírható így! Csak majd $\mathbb{E}\left(Y \mid \underline{X}\right)$ helyébe írjuk be a mi konkért függvényformánkat, például azt, hogy $\beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \ldots + \beta_k X_k$
- Megjegyzés: amikor ilyet használunk, azaz a függvény struktúráját megadjuk, csak egy vagy több – valós szám – paramétert hagyunk ismeretlenül, akkor **paraméteres modellről** (paraméteres regresszióról) beszélünk
- Lehetne az $\mathbb{E}\left(Y \mid \underline{X}\right)$ anélkül próbálni közelíteni, hogy bármilyen konkrét függvényforma mellett elköteleződnék (nem-paraméteres modell), de ezekkel most nem fogunk foglalkozni

Lényegében arról van szó, hogy szétbontjuk az eredményváltozó alakulását egy 'magyarázóváltozókkal elérhető legjobb becslés' (már láttuk: a feltételes várhatóérték) és egy 'maradék hiba' részre (ami marad). A regresszióanalízis a *feltételes* eloszlásra koncentrál! Ezért elvileg olyasmit kéne írnunk, hogy „$\left(Y \mid X\right) = \mathbb{E}\left(Y \mid \underline{X}\right) + \varepsilon$”, de ezt nem tesszük (az $\left(Y \mid \underline{X}\right)$ objektumot nem szokás definiálni), ehelyett a bal oldalra simán $Y$-t írunk (de ne feledjük, hogy ez *feltételes*).

### A hiba egy fontos tulajdonsága

- Az előbbiekből következik, hogy $\mathbb{E}\left(\varepsilon \mid \underline{X}\right) = 0$ (hiszen $\mathbb{E}\left(\varepsilon \mid \underline{X}\right) = \mathbb{E}\left(Y - \mathbb{E}\left(Y \mid \underline{X}\right) \mid \underline{X}\right) = \mathbb{E}\left(Y \mid \underline{X}\right) - \mathbb{E}\left(Y \mid \underline{X}\right)$, a kétszeres várható érték-vétel nyilván ugyanaz, mint az egyszeres)
- Később fontos lesz, ha mindezt így fogalmazzuk meg: ha *tényleg* a jó $\mathbb{E}\left(Y \mid \underline{X}\right)$-t használjuk becslésre, *akkor* a hiba az előbbi tulajdonságú kell legyen

# 4. Modellminősítés a sokasági regresszióban

### Modellminősítés

- Mivel $\mathbb{E}\left(\varepsilon \mid \underline{X}\right) = 0$, így $\operatorname{cov}(\varepsilon, X_i) = 0$ és emiatt $\operatorname{cov}(\varepsilon, \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \ldots + \beta_k X_k) = 0$ is
- Így igaz, hogy $\mathbb{D}^2 Y = \mathbb{D}^2(\beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \ldots + \beta_k X_k) + \mathbb{D}^2 \varepsilon$ (varianciafelbontás)

### Magyarázott variancia szemlélet

- Képzeljük el, hogy látjuk az embereket, de csak a fizetésüket: az elsőnek 100 egység, a másodiknak 123, a harmadiknak 500, a negyediknek 83, és így tovább
- Nem értjük, hogy miért van ez a szóródás, ez a *variancia* ($\mathbb{D}^2 Y$)
- Megismerjük az oktatottságukat – ez *megmagyarázza* a variancia egy részét (pl. kiderül, hogy az elsőnek csak 8 általánosa van, de a másodiknak érettségije)
- Persze ez sem magyaráz mindent: lehet, hogy a negyediknek szintén 8 általánosa van, és mégsem keres 100 egységet
- Ha újabb magyarázó változókat ismerünk meg, akkor még tovább csökkenhet ez a meg nem magyarázott variancia ($\mathbb{D}^2 \varepsilon$)...

Az előbb látott felbontás tehát nem csak „statisztikai átalakítás”, hanem kézzelfogható tartalom van mögötte!

### Modellminősítés „magyarázott variancia hányad” elven

- Értelmes tehát azt mondani, hogy a $\mathbb{D}^2 Y$ varianciából $\mathbb{D}^2(\beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \ldots + \beta_k X_k)$ az, amit „megmagyarázott” a modellünk, $\mathbb{D}^2 \varepsilon$ az, amit nem
- Ezért az
$$R^2 = \frac{\mathbb{D}^2 Y - \mathbb{D}^2 \varepsilon}{\mathbb{D}^2 Y} = 1 - \frac{\mathbb{D}^2 \varepsilon}{\mathbb{D}^2 Y}$$
a modell jóságának mutatója lesz ($0 \leq R^2 \leq 1$), a fenti „megmagyarázott variancia” értelemben, neve: **többszörös determinációs együttható**

Érdemes észrevenni, hogy

$$\begin{aligned}
&\operatorname{cov}(\beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \ldots + \beta_k X_k, Y) = \operatorname{cov}(Y - \varepsilon, Y) = \mathbb{D}^2 Y - \operatorname{cov}(\varepsilon, Y) = \\
&= \mathbb{D}^2 Y - \operatorname{cov}(\varepsilon, \varepsilon + \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \ldots + \beta_k X_k) = \mathbb{D}^2 Y - \mathbb{D}^2 \varepsilon = \\
&= \mathbb{D}^2(\beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \ldots + \beta_k X_k)
\end{aligned}$$

azaz a fent definiált $R^2$ nem más, mint

$$
\begin{aligned}
R^2 &= \frac{\operatorname{cov}\left(\beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \ldots + \beta_k X_k, Y\right)}{\mathbb{D}^2 Y} = \\
&= \frac{\left[\operatorname{cov}\left(\beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \ldots + \beta_k X_k, Y\right)\right]^2}{\mathbb{D}^2 Y \cdot \mathbb{D}^2\left(\beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \ldots + \beta_k X_k\right)}
\end{aligned}
$$

tehát $Y$ és $\beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \ldots + \beta_k X_k$ közti korreláció négyzete. Ennél azonban több is igaz: bebizonyítható, hogy az $X_1, X_2, \ldots, X_k$ változók *bármely* lineáris kombinációja közül szükségképp a $\beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \ldots + \beta_k X_k$-nek lesz a legnagyobb a korrelációnégyzete az $Y$-nal. A lineáris regresszió tehát úgy is megfogalmazható, mint ami a magyarázó változók azon lineáris kombinációját keresi meg, melyek a legjobban korreláltak az eredményváltozóval!