Idősorok szűrése

Ferenci Tamás
tamas.ferenci@medstat.hu

Utoljára frissítve: 2023. május 9.

Tartalom

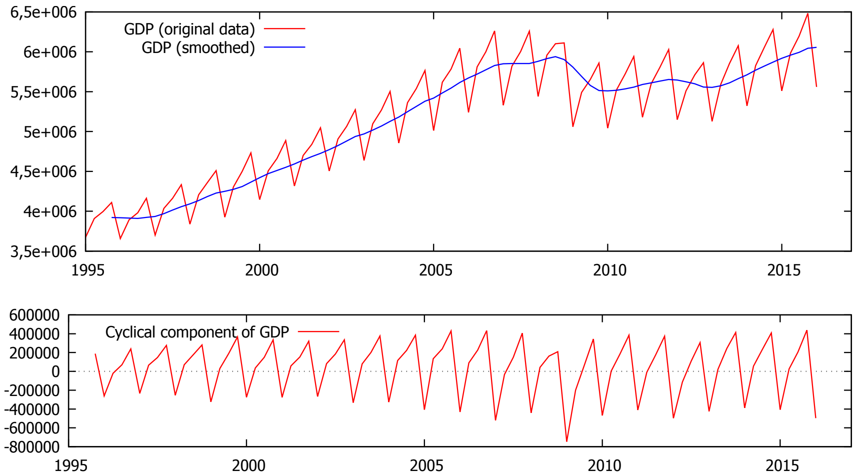
Tartalomjegyzék

1. Idősorok szűrése

Célunk

- Szeretnénk elkülöníteni a trendet és a ciklikus komponenseket (szezon + ciklus); ez számos közgazdasági kérdésnél fontos feladat
- Egy lehetséges megoldás: „paraméteres szűrés”, azaz előírjuk a függvényformát és regresszióval megbecsüljük
- Igazából ezt megtettük az előbb is: megadtuk a trendet (lineáris vagy kvadratikus), megadtuk a szezonalitást (ezt nem-paraméteresen), és a látott reziduum a kiszűrt ciklus (+zaj) volt, ha van ilyen
- De ez függ a függvényforma-választás helyességén; nem lehetne ilyen feltevések nélkül is megtenni?
- Hogyne, például átlagoljunk ki évenként!
- Nem a legjobb, abrupt ugrások év végén, átlagoljunk inkább folyamatosan, mintegy csúszóablakot végigtolva (így is mindig négy különböző szezon lesz benne!)

Motiváló példa



Mozgóátlagolás

- Ez volt az (egyszerű) **mozgóátlag**:

$$y'_t = \frac{y_t + y_{t-1} + y_{t-2} + \ldots + y_{t-p}}{p+1}$$

- (Néha nem visszafelé átlagolnak, hanem az eredmény az átlagolt ablak közepén van („centrált" mozgóátlag), a dolognak nincs nagy jelentősége: ez talán kicsit jobban néz ki, viszont jövőbeli megfigyeléseket is igényel)
- Ez azt jelenti, hogy minden megfigyelés ugyanolyan súlyú; kézenfekvő gondolat, hogy a régebbiek kevésbé számítsanak
- Például:

$$y'_t = \frac{p y_t + (p-1)\, y_{t-1} + (p-2)\, y_{t-2} + \ldots + y_{t-(p-1)}}{p + (p-1) + (p-2) + \ldots + 1}$$

- Ez az ún. súlyozott mozgóátlag

Exponenciális mozgóátlag

- Ökonometriában gyakoribb az exponenciális súlyozás:

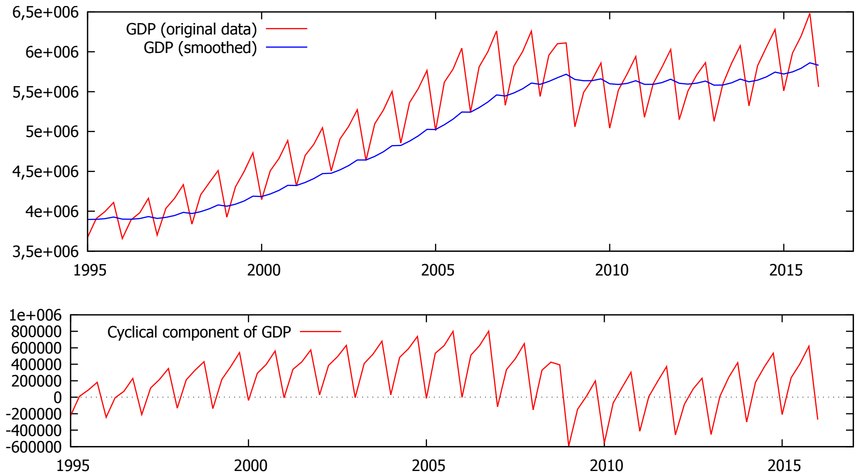
$$y'_t = \alpha y_t + (1-\alpha)\, y'_{t-1},$$

hiszen ez nyilván annak felel meg, hogy

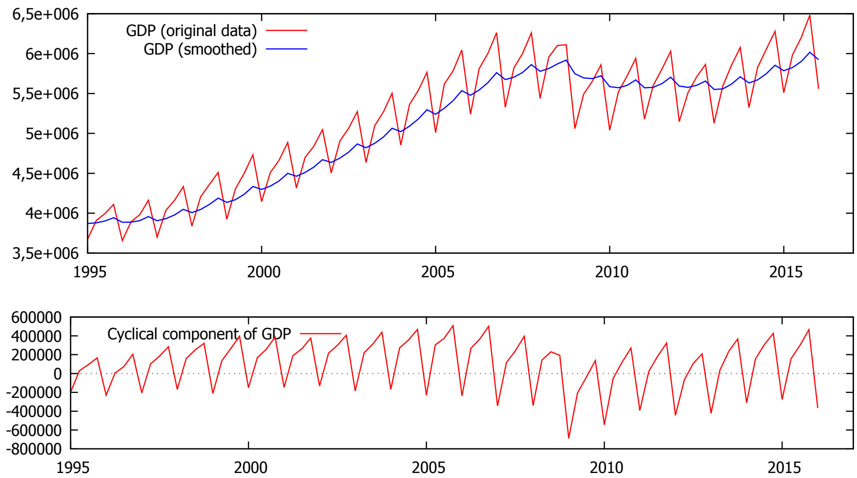
$$y'_t = \alpha y_t + (1-\alpha)\, \alpha y_{t-1} + (1-\alpha)^2\, \alpha y_{t-2} + \ldots + \\ + (1-\alpha)^{t-2}\, \alpha y_2 + (1-\alpha)^{t-1}\, \alpha y_1 + (1-\alpha)^t\, \alpha y_0$$

- (Az y_0 kezdőértéket nekünk kell megadni, a tipikus választások: y_1, az első néhány megfigyelés átlaga, az egész idősor átlaga; a következő példákban az első 4 megfigyelés átlaga került alkalmazásra)
- Tehát az ablak egyre nyúlik (végig az egész tartomány), és a súlyok exponenciálisan csengenek le

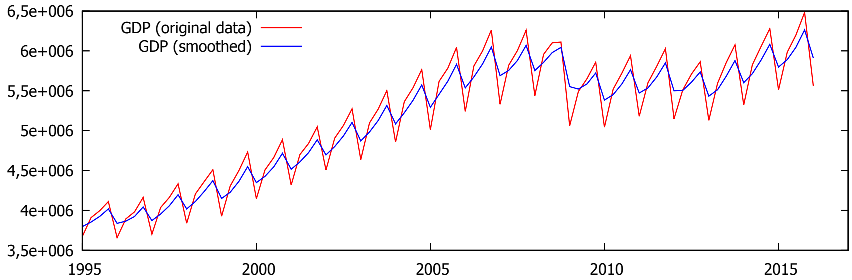
Negyedéves GDP exponenciális mozgóátlagolása, $\alpha = 0{,}1$

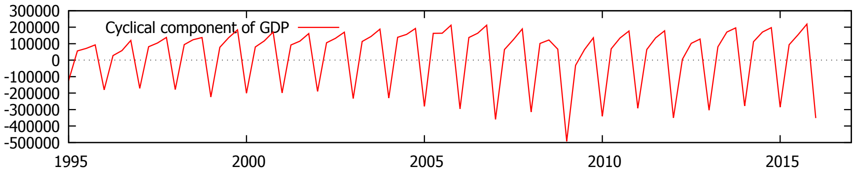


Negyedéves GDP exponenciális mozgóátlagolása, $\alpha = 0{,}2$

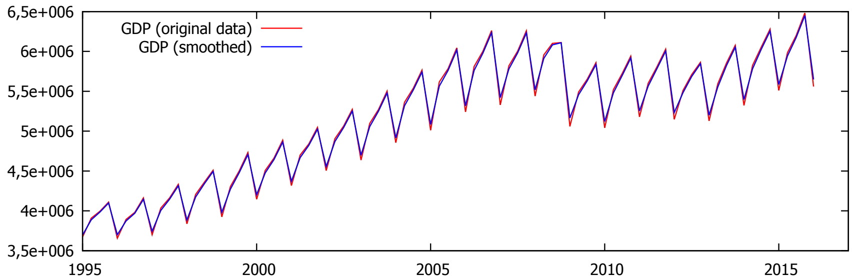


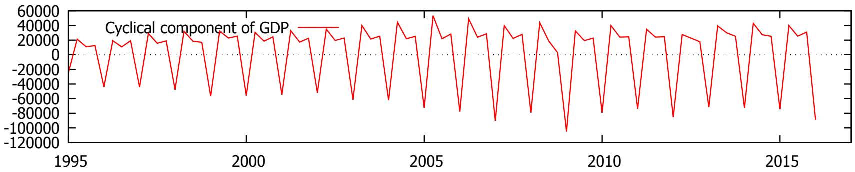
Negyedéves GDP exponenciális mozgóátlagolása, $\alpha = 0{,}5$





Negyedéves GDP exponenciális mozgóátlagolása, $\alpha = 0{,}9$





Lineáris szűrő

- Az egyszerű és a súlyozott mozgóátlag speciális esete annak, hogy

$$y'_t = a_0 y_t + a_1 y_{t-1} + \ldots + a_p y_{t-p} = \sum_{i=0}^{p} a_i y_{t-i}$$

- Például egyszerű mozgóátlagra $a_i = 1/(p+1)$
- Lényegében diszkrét konvolúció
- Ezt hívjuk lineáris szűrőnek, a tulajdonságait értelemszerűen teljes mértékben meghatározzák az $a_0, a_1, \ldots, a_p$ szűrőegyütthatók

- Roppant érdekes kérdés, hogy a szűrt idősor hogyan néz ki az eredetihez képest a szűrőegyütthatók függvényében, lehet otthon kísérletezgetni...

Hodrick–Prescott-szűrő

- Különösen makroökonómiában népszerű
- Alapgondolat: a trend (g_t) követi az idősort (azaz az $y_t - g_t$ kicsi), de nem nagyon ugrándozva (azaz g_t sima)
- A megoldandó feladat:

$$\min_{\{g_t\}_{t=1}^T} \sum_{t=1}^{T} (y_t - g_t)^2 + \lambda \sum_{t=2}^{T-1} \left[(g_{t+1} - g_t) - (g_t - g_{t-1})\right]^2$$

- Első tag: mennyire követi jól az idősort a trend, második tag: mennyire „rángatózik” a trend
- A λ együttható határozza meg a két szempont egymáshoz viszonyított fontosságát ($\lambda = 0$: a trend nem kell, hogy sima legyen $\to$ pontosan az idősor lesz; $\lambda \to \infty$: trend legyen tökéletesen sima, nem érdekes, hogy mennyire követi az idősort $\to$ egyenes lesz)
- Negyedéves adatokra a tipikus választás $\lambda = 1600$

A második tagra azt írtuk, hogy „mennyire rángatózik a trend”; később majd pontosabban is fogjuk látni, hogy ez micsoda, mert van eg nagyon konkrét tartalma.

A HP-szűrő matematikája I.

- Az érdekes az, hogy a fenti minimalizációs feladatnak van zárt alakú megoldása!
- Legyen $\mathbf{y}$ az y_t-k, $\mathbf{g}$ a g_t-k vektora és legyen

$$\mathbf{Q}_{(T-2)\times T} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

  ekkor a megoldandó feladat

$$\min_{\mathbf{g}} \left(\mathbf{y} - \mathbf{g}\right)^T \left(\mathbf{y} - \mathbf{g}\right) + \lambda \left(\mathbf{Q}\mathbf{g}\right)^T \left(\mathbf{Q}\mathbf{g}\right)$$

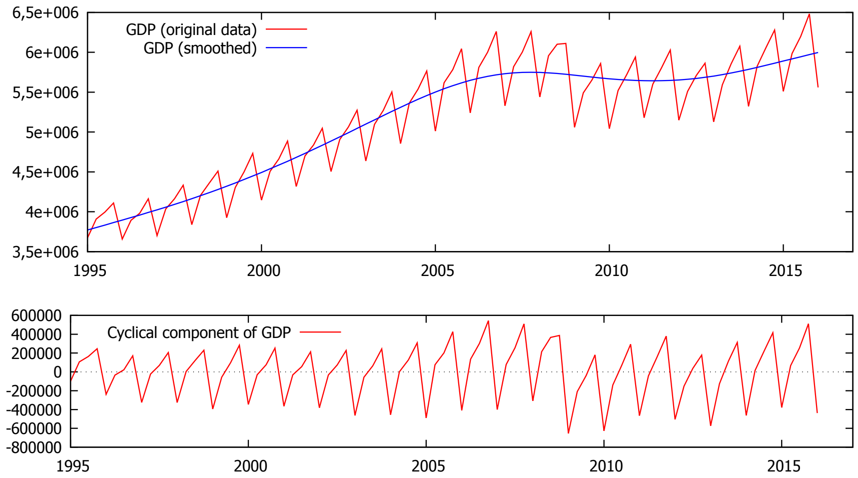
A HP-szűrő matematikája II.

- Deriválva $\mathbf{g}$ szerint:
$$-2\mathbf{y} + 2\mathbf{g} + 2\lambda\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}\mathbf{g}$$

- Egyenlővé téve nullával és megoldva (a másodrendű feltételek teljesülnek ahhoz, hogy ez tényleg minimum legyen):
$$-2\mathbf{y} + 2\mathbf{g} + 2\lambda\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}\mathbf{g} = 0 \Rightarrow \widehat{\mathbf{g}} = \left(\mathbf{I} + \lambda\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}\right)^{-1}\mathbf{y}$$

- (A megoldás mindegyik megfigyeléstől függ)

Negyedéves GDP HP-szűrése, $\lambda = 1600$



A HP-szűrő kritikája

Érdekes olvasmány: Hamilton, James D. „Why You Should Never Use the Hodrick-Prescott Filter.” (2016). `http://econweb.ucsd.edu/~jhamilto/hp.pdf`.

Egyéb szűrők

- Több szűrő viselkedése alapvetően frekvencia-tartományon érthető meg
- Trend/ciklus szétválasztás: aluláteresztő szűrés (mert a trend az, ami lassan változik, a ciklus az, ami gyorsabban, persze kérdés, hogy hol a határ)
- Igazából már az egyszerű mozgóátlag is egy aluláteresztő szűrő volt!
- Vagy: LOESS-használata (STL-dekompozíció)