A nemstacionaritás kezelése: stacionarizálás, trend- és differenciastacioner idősorok, differenciázás, ARIMA-folyamat

Ferenci Tamás
tamas.ferenci@medstat.hu

Utoljára frissítve: 2023. május 9.

Tartalom

1 Stacionarizálás

A stacionarizálás szükségessége

- Mi alapvetően stacioner idősorokat szeretnénk majd modellezni (például olyan ARMA-val akarunk idősort modellezni, ami stacioner)
- De: a legtöbb közgazdasági idősor *nem* stacioner!
- Mit csináljunk most?
- Olyan „visszacsinálható" (invertálható) transzformációt alkalmazunk, ami a nem-stacioner idősorból stacionert csinál
- Azon elvégezzük a modellezést (és ha kell, a transzformáció inverzével visszatérünk az eredeti idősor nagyságrendjébe)
- Két módszert fogunk látni
- Ez nem univerzális: nem arról van szó, hogy valamelyiknek matematikai szükségszerűség, hogy stacionarizálnia kell minden idősort, egész egyszerűen azért nézzük meg ezeket, mert a gyakorlatban sokszor beváltak

Determinisztikus trend szűrése

- Az első módszer a determinisztikus trend szűrése: az idősorra ráillesztünk egy analitikus trendet majd kivonjuk belőle, ezt jelenti a „szűrés”
- Például (lineáris trend szűrése):

$$Y_t = \alpha + \beta t + u_t$$

  modell alapján megbecsüljük α és β értékét (OLS- vagy ML-elven), majd áttérünk a – reményeink szerint stacioner –

$$Y_t' = Y_t - \left(\widehat{\alpha} + \widehat{\beta} t\right)$$

  idősorra
- Ilyen értelemben mondjuk, hogy kiszűrtünk belőle egy determinisztikus trendet
- (Lényegében az egyenes illesztése utáni reziduumokra tértünk át)
- Visszatérés: a trend hozzáadása

Determinisztikus trend szűrése

- Ha ezzel a transzformációval az idősor stacionarizálható (tehát Y_t' már stacioner), akkor azt mondjuk, hogy az eredeti Y_t idősor **trendstacioner folyamat** (TSP, trend stationary process) volt
- Természetesen nem muszáj egyszerű lineáris trendet szűrni, illeszthetünk kvadratikus trendet ($\alpha + \beta t + \gamma t^2$), exponenciális trendet ($\alpha e^{\beta t}$), szezonalitást, bármit, a lényeg, hogy egy előre megadott determinisztikus függvényforma legyen
- (A dolog ugyanis azért fog működni, mert amit illesztünk, annak a paraméterei szigorúan exogének)
- Vegyük észre, hogy ez filozófiájában a korábban látott „determinisztikus trend" fogalmához illeszkedik: ha egy idősorban trend van, de az determinisztikus ($Y_t^{(D)} = \alpha t + u_t$), akkor épp ez a módszer fogja stacionarizálni

Differenciázás

- Ha az idősorban viszont sztochasztikus trend van ($Y_t^{(S)} = Y_{t-1}^{(S)} + \alpha + u_t$), akkor egy másik, de pofonegyszerű transzformációval stacionarizálhatjuk:

$$Y_t' = Y_t - Y_{t-1}$$

- Hiszen ha az idősor valóban az előbbi modell követi, akkor a fenti transzformáció eredménye

$$Y_t' = \alpha + u_t$$

  lesz, ami feltevéseink szerint tényleg stacioner

- Ezt a transzformációt úgy hívjuk, hogy az idősor **differenciázása**, jele Δ, ez is egy *operátor*:

$$\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1} = Y_t - LY_t = (1 - L)\, Y_t,$$

  tehát $\Delta = 1 - L$

Differenciázás

- Ha ezzel a transzformációval az idősor stacionarizálható (tehát Y'_t már stacioner), akkor azt mondjuk, hogy az eredeti Y_t idősor **differenciastacioner folyamat** (DSP, difference stationary process) volt
- Visszatérés: felkumulálás (kezdőértékre szükség lesz):

$$Y_t = Y_0 + \sum_{i=1}^{t} \Delta Y_i$$

- (Itt már ráismerhetünk, hogy a differenciázás igazából nem más, mint a *diszkrét deriválás*: ha diszkrét halmazon vagyunk, akkor a $\lim_{\Delta t \to 0}$ azt jelenti, hogy $\Delta t = 1$, azaz, hogy két egymást követő időpont különbségét nézzük, és ilyenkor persze le sem kell osztani Δt-vel)
- Emiatt azt is mondjuk, hogy a folyamat elsőrendben integrált, jelben $I(1)$

Differenciázás

- A differenciázás lineáris trendet tüntet el (ha az sztochasztikus értelmű)
- Mi van, ha kvadratikus trendet kell eltüntetnünk?
- Ugyanúgy, ahogy az $ax + b$ függvényt a deriválás teszi konstanssá, az $ax^2 + bx + c$-t pedig a kétszeri deriválás, ilyenkor a *kétszeri differenciázás* (*másodrendű differenciázás*) lesz a megoldás:

$$
\begin{aligned}
\Delta\left(\Delta Y_t\right) = \Delta\left(Y_t - Y_{t-1}\right) = \left(Y_t - Y_{t-1}\right) - \left(Y_{t-1} - Y_{t-2}\right) = \\
= \left(Y_t - 2Y_{t-1} + Y_{t-2}\right)
\end{aligned}
$$

- A jele Δ^2
- Az előbbi eredmény nem meglepő, hiszen

$$
\Delta^2 = (1 - L)^2 = 1 - 2L + L^2
$$

- Ha egy folyamat így stacionarizálható, akkor azt mondjuk, hogy másodrendben integrált, jelben $I(2)$

Differenciázás

- Természetesen a dolog általánosítható: Δ^d a d-ed rendbeli (d-szeri) differenciázás, $\Delta^d = (1 - L)^d$
- Ha egy idősor nem stacioner, az első differenciázottja sem az, a második differenciázottja sem az, ..., de a d-szeri differenciázottja már igen (tehát d a legkisebb egész szám, hogy az annyiszoros differenciázott már stacioner), akkor azt mondjuk, hogy az idősor d-ed rendben integrált, jelben $I(d)$
- (Ennek megfelelően a stacioner idősor nulladrendben integrált, jelben $I(0)$)
- Ez a tipikusabb a közgazdasági gyakorlatban
- Olyannyira, hogy ennek ARMA-val való kombinációjára külön elnevezés van: ha egy d-ed rendben integrált idősor d-szeres differenciázottját modellezzük ARMA(p,q)-val, akkor azt is mondhatjuk, hogy az eredeti idősort **ARIMA(p,d,q)**-val modelleztük