

Az OLS becslő modellfeltevései és az OLS szolgáltatotta becslések statisztikai tulajdonságai

Ferenci Tamás
tamas.ferenci@medstat.hu

Utoljára frissítve: 2023. május 9.

Tartalom

- 1 Mintavételi helyzet
- 2 A mintavétel tulajdonságok szemléltetése szimulációval
- 3 A mintavétel tulajdonságok matematikai levezetése
- 4 Az OLS modellfeltevései

Tartalom

- 1 Mintavételi helyzet
- 2 A mintavétel tulajdonságok szemléltetése szimulációval
- 3 A mintavétel tulajdonságok matematikai levezetése
- 4 Az OLS modellfeltevései

Deskriptív és következtető statisztika

- Az előbbi tárgyalás pusztán deskriptív volt: egy darab mintát tekintett, amire meghatározott egy darab regressziós függvényt és kész
- Mintha a feladat csak annyi lenne, hogy pontokra húzzunk egy rájuk jól illeszkedő görbét
- Ez a „görbeillesztési” szemlélet első ránézésre könnyen megérthető, és látszólag egyszerűsíti a helyzetet, valójában azonban rendkívül hátráltató a valódi megértésre nézve
- Nem teszi lehetővé ugyanis annak megértését, hogy a háttérben van egy sokaság, és a görbe nem univerzálisan jellemzi azt, hanem csak az adott, konkrét mintára illeszkedik legjobban, és *másik mintából másik görbét kaptunk volna*
- Azaz: figyelmen kívül hagyja a mintavételi helyzetet

Deskriptív és következtető statisztika

- Az előbbi tárgyalás pusztán deskriptív volt: egy darab mintát tekintett, amire meghatározott egy darab regressziós függvényt és kész
- Mintha a feladat csak annyi lenne, hogy pontokra húzzunk egy rájuk jól illeszkedő görbét
- Ez a „görbeillesztési” szemlélet első ránézésre könnyen megérthető, és látszólag egyszerűsíti a helyzetet, valójában azonban rendkívül hátráltató a valódi megértésre nézve
- Nem teszi lehetővé ugyanis annak megértését, hogy a háttérben van egy sokaság, és a görbe nem univerzálisan jellemzi azt, hanem csak az adott, konkrét mintára illeszkedik legjobban, és *másik mintából másik görbét kaptunk volna*
- Azaz: figyelmen kívül hagyja a mintavételi helyzetet

Deskriptív és következtető statisztika

- Az előbbi tárgyalás pusztán deskriptív volt: egy darab mintát tekintett, amire meghatározott egy darab regressziós függvényt és kész
- Mintha a feladat csak annyi lenne, hogy pontokra húzzunk egy rájuk jól illeszkedő görbét
- Ez a „görbeillesztési” szemlélet első ránézésre könnyen megérthető, és látszólag egyszerűsíti a helyzetet, valójában azonban rendkívül hátráltató a valódi megértésre nézve
- Nem teszi lehetővé ugyanis annak megértését, hogy a háttérben van egy sokaság, és a görbe nem univerzálisan jellemzi azt, hanem csak az adott, konkrét mintára illeszkedik legjobban, és *másik mintából másik görbét kaptunk volna*
- Azaz: figyelmen kívül hagyja a mintavételi helyzetet

Deskriptív és következtető statisztika

- Az előbbi tárgyalás pusztán deskriptív volt: egy darab mintát tekintett, amire meghatározott egy darab regressziós függvényt és kész
- Mintha a feladat csak annyi lenne, hogy pontokra húzzunk egy rájuk jól illeszkedő görbét
- Ez a „görbeillesztési” szemlélet első ránézésre könnyen megérthető, és látszólag egyszerűsíti a helyzetet, valójában azonban rendkívül hátráltató a valódi megértésre nézve
- Nem teszi lehetővé ugyanis annak megértését, hogy a háttérben van egy sokaság, és a görbe nem univerzálisan jellemzi azt, hanem csak az adott, konkrét mintára illeszkedik legjobban, és *másik mintából másik görbét kaptunk volna*
- Azaz: figyelmen kívül hagyja a mintavételi helyzetet

Deskriptív és következtető statisztika

- Az előbbi tárgyalás pusztán deskriptív volt: egy darab mintát tekintett, amire meghatározott egy darab regressziós függvényt és kész
- Mintha a feladat csak annyi lenne, hogy pontokra húzzunk egy rájuk jól illeszkedő görbét
- Ez a „görbeillesztési” szemlélet első ránézésre könnyen megérthető, és látszólag egyszerűsíti a helyzetet, valójában azonban rendkívül hátráltató a valódi megértésre nézve
- Nem teszi lehetővé ugyanis annak megértését, hogy a háttérben van egy sokaság, és a görbe nem univerzálisan jellemzi azt, hanem csak az adott, konkrét mintára illeszkedik legjobban, és *másik mintából másik görbét kaptunk volna*
- Azaz: figyelmen kívül hagyja a mintavételi helyzetet

A mintavételi helyzet hatásai

- Van egy elméleti regresszió a **sokaságban** (β)
- Az adatbázisunk alapján megkaptuk a regressziós egyenest ($\hat{\beta}$)
- Az adatbázis azonban csak egy **minta** a sokaságából, így a $\hat{\beta}_i$ paraméterek annak hatását *is* tükrözik, hogy konkrétan milyen mintát választottunk
- *Mintavételi ingadozás* lép fel (még akkor is, ha tökéletesen véletlen a mintavétel, ennek tehát semmi köze pl. a reprezentativitáshoz)
- Tehát: az egyes $\hat{\beta}_i$ paraméterek „mintáról-mintára ingadoznak”: minden mintából más paramétereket kapnánk
- (Természetesen reméljük, hogy az ingadozás „kellemes” tulajdonságokkal bír, például a valós érték körül történik, szorosan körülötte stb., erről később)
- Ez tehát egy becslési feladat; az OLS-nek, mint becslőfüggvénynek vizsgálhatóak a tulajdonságai

A mintavételi helyzet hatásai

- Van egy elméleti regresszió a **sokaságban** (β)
- Az adatbázisunk alapján megkaptuk a regressziós egyenest ($\hat{\beta}$)
- Az adatbázis azonban csak egy **minta** a sokaságából, így a $\hat{\beta}_i$ paraméterek annak hatását *is* tükrözik, hogy konkrétan milyen mintát választottunk
- *Mintavételi ingadozás* lép fel (még akkor is, ha tökéletesen véletlen a mintavétel, ennek tehát semmi köze pl. a reprezentativitáshoz)
- Tehát: az egyes $\hat{\beta}_i$ paraméterek „mintáról-mintára ingadoznak”: minden mintából más paramétereket kapnánk
- (Természetesen reméljük, hogy az ingadozás „kellemes” tulajdonságokkal bír, például a valós érték körül történik, szorosan körülötte stb., erről később)
- Ez tehát egy becslési feladat; az OLS-nek, mint becslőfüggvénynek vizsgálhatóak a tulajdonságai

A mintavételi helyzet hatásai

- Van egy elméleti regresszió a **sokaságban** (β)
- Az adatbázisunk alapján megkaptuk a regressziós egyenest ($\hat{\beta}$)
- Az adatbázis azonban csak egy **minta** a sokaságából, így a $\hat{\beta}_i$ paraméterek annak hatását *is* tükrözik, hogy konkrétan milyen mintát választottunk
- *Mintavételi ingadozás lép fel (még akkor is, ha tökéletesen véletlen a mintavétel, ennek tehát semmi köze pl. a reprezentativitáshoz)*
- Tehát: az egyes $\hat{\beta}_i$ paraméterek „mintáról-mintára ingadoznak”: minden mintából más paramétereket kapnánk
- (Természetesen reméljük, hogy az ingadozás „kellemes” tulajdonságokkal bír, például a valós érték körül történik, szorosan körülötte stb., erről később)
- Ez tehát egy becslési feladat; az OLS-nek, mint becslőfüggvénynek vizsgálhatóak a tulajdonságai

A mintavételi helyzet hatásai

- Van egy elméleti regresszió a **sokaságban** (β)
- Az adatbázisunk alapján megkaptuk a regressziós egyenest ($\hat{\beta}$)
- Az adatbázis azonban csak egy **minta** a sokaságából, így a $\hat{\beta}_i$ paraméterek annak hatását *is* tükrözik, hogy konkrétan milyen mintát választottunk
- *Mintavételi ingadozás* lép fel (még akkor is, ha tökéletesen véletlen a mintavétel, ennek tehát semmi köze pl. a reprezentativitáshoz)
- Tehát: az egyes $\hat{\beta}_i$ paraméterek „mintáról-mintára ingadoznak”: minden mintából más paramétereket kapnánk
- (Természetesen reméljük, hogy az ingadozás „kellemes” tulajdonságokkal bír, például a valós érték körül történik, szorosan körülötte stb., erről később)
- Ez tehát egy becslési feladat; az OLS-nek, mint becslőfüggvénynek vizsgálhatóak a tulajdonságai

A mintavételi helyzet hatásai

- Van egy elméleti regresszió a **sokaságban** (β)
- Az adatbázisunk alapján megkaptuk a regressziós egyenest ($\hat{\beta}$)
- Az adatbázis azonban csak egy **minta** a sokaságából, így a $\hat{\beta}_i$ paraméterek annak hatását *is* tükrözik, hogy konkrétan milyen mintát választottunk
- *Mintavételi ingadozás* lép fel (még akkor is, ha tökéletesen véletlen a mintavétel, ennek tehát semmi köze pl. a reprezentativitáshoz)
- Tehát: az egyes $\hat{\beta}_i$ paraméterek „mintáról-mintára ingadoznak”: minden mintából más paramétereket kapnánk
- (Természetesen reméljük, hogy az ingadozás „kellemes” tulajdonságokkal bír, például a valós érték körül történik, szorosan körülötte stb., erről később)
- Ez tehát egy becslési feladat; az OLS-nek, mint becslőfüggvénynek vizsgálhatóak a tulajdonságai

A mintavételi helyzet hatásai

- Van egy elméleti regresszió a **sokaságban** (β)
- Az adatbázisunk alapján megkaptuk a regressziós egyenest ($\hat{\beta}$)
- Az adatbázis azonban csak egy **minta** a sokaságából, így a $\hat{\beta}_i$ paraméterek annak hatását *is* tükrözik, hogy konkrétan milyen mintát választottunk
- *Mintavételi ingadozás* lép fel (még akkor is, ha tökéletesen véletlen a mintavétel, ennek tehát semmi köze pl. a reprezentativitáshoz)
- Tehát: az egyes $\hat{\beta}_i$ paraméterek „mintáról-mintára ingadoznak”: minden mintából más paramétereket kapnánk
- (Természetesen reméljük, hogy az ingadozás „kellemes” tulajdonságokkal bír, például a valós érték körül történik, szorosan körülötte stb., erről később)
- Ez tehát egy becslési feladat; az OLS-nek, mint becslőfüggvénynek vizsgálhatóak a tulajdonságai

A mintavételi helyzet hatásai

- Van egy elméleti regresszió a **sokaságban** (β)
- Az adatbázisunk alapján megkaptuk a regressziós egyenest ($\hat{\beta}$)
- Az adatbázis azonban csak egy **minta** a sokaságából, így a $\hat{\beta}_i$ paraméterek annak hatását *is* tükrözik, hogy konkrétan milyen mintát választottunk
- *Mintavételi ingadozás* lép fel (még akkor is, ha tökéletesen véletlen a mintavétel, ennek tehát semmi köze pl. a reprezentativitáshoz)
- Tehát: az egyes $\hat{\beta}_i$ paraméterek „mintáról-mintára ingadoznak”: minden mintából más paramétereket kapnánk
- (Természetesen reméljük, hogy az ingadozás „kellemes” tulajdonságokkal bír, például a valós érték körül történik, szorosan körülötte stb., erről később)
- Ez tehát egy becslési feladat; az OLS-nek, mint becslőfüggvénynek vizsgálhatóak a tulajdonságai

Még egy fontos megjegyzés

- Nem elég annyit mondani, hogy „jó, hát akkor a háttérben van egy sokaság is”, mintha ezzel el lenne intézve ez a kérdés
- Azt is világosan látni kell, hogy az egész tárgyalás *kiindulópontja*, hogy erre *feltételezünk* egy modellt (pl. azt, hogy $Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \dots + \beta_k X_k + \varepsilon$)
- Ez egy feltételezés, mivel a sokaságot nem ismerjük, így biztosan nem tudhatjuk, hogy igaz-e (csak következtethetünk rá)
- De minden további levezetés mögött ott lesz, hogy mi mit gondoltunk, hogyan viselkedik a sokaság, mi a *sokasági modell*

Még egy fontos megjegyzés

- Nem elég annyit mondani, hogy „jó, hát akkor a háttérben van egy sokaság is”, mintha ezzel el lenne intézve ez a kérdés
- Azt is világosan látni kell, hogy az egész tárgyalás *kiindulópontja*, hogy erre *feltételezünk* egy modellt (pl. azt, hogy $Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \dots + \beta_k X_k + \varepsilon$)
- Ez egy feltételezés, mivel a sokaságot nem ismerjük, így biztosan nem tudhatjuk, hogy igaz-e (csak következtethetünk rá)
- De minden további levezetés mögött ott lesz, hogy mi mit gondoltunk, hogyan viselkedik a sokaság, mi a *sokasági modell*

Még egy fontos megjegyzés

- Nem elég annyit mondani, hogy „jó, hát akkor a háttérben van egy sokaság is”, mintha ezzel el lenne intézve ez a kérdés
- Azt is világosan látni kell, hogy az egész tárgyalás *kiindulópontja*, hogy erre *feltételezünk* egy modellt (pl. azt, hogy $Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \dots + \beta_k X_k + \varepsilon$)
- Ez egy feltételezés, mivel a sokaságot nem ismerjük, így biztosan nem tudhatjuk, hogy igaz-e (csak következtethetünk rá)
- De minden további levezetés mögött ott lesz, hogy mi mit gondoltunk, hogyan viselkedik a sokaság, mi a *sokasági modell*

Még egy fontos megjegyzés

- Nem elég annyit mondani, hogy „jó, hát akkor a háttérben van egy sokaság is”, mintha ezzel el lenne intézve ez a kérdés
- Azt is világosan látni kell, hogy az egész tárgyalás *kiindulópontja*, hogy erre *feltételezünk* egy modellt (pl. azt, hogy $Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \dots + \beta_k X_k + \varepsilon$)
- Ez egy feltételezés, mivel a sokaságot nem ismerjük, így biztosan nem tudhatjuk, hogy igaz-e (csak következtethetünk rá)
- De minden további levezetés mögött ott lesz, hogy mi mit gondoltunk, hogyan viselkedik a sokaság, mi a *sokasági modell*

Előkészület a mintavétel vizsgálatához

- Ahhoz, hogy a mintavétel hatását matematikailag tudjuk vizsgálni, az OLS-becslőt val. változókra kell ráeresztelni (szemben az eddigi képlettel – $\widehat{\beta}_{OLS} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y}$ – ahol konkrét számokra futtattuk)
- Pontosan ugyanúgy, ahogy az $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ -t sem tudjuk következtető statisztikailag vizsgálni (az egy szám), hanem az $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ -t nézzük
- Minket tehát $\widehat{\beta}_{OLS} = \left(\underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{X}} \right)^{-1} \underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{Y}}$ fog érdekelni!
- Ahogy az előbbi átlagos példában, így itt is igaz lesz, hogy ekkor a $\widehat{\beta}_{OLS}$ már nem egy konkrét érték (vektor), hanem egy – vektor értékű – val. változó, tehát eloszlása van!
- Ez a mintavételi eloszlás, mi erre, ennek tulajdonságaira, a jó tulajdonságok feltételeire stb. leszünk kíváncsiak
- Előbb szimulációval nyerünk képet, aztán matematikailag is levezetjük

Előkészület a mintavétel vizsgálatához

- Ahhoz, hogy a mintavétel hatását matematikailag tudjuk vizsgálni, az OLS-becslőt val. változókra kell ráereszteni (szemben az eddigi képlettel – $\widehat{\beta}_{OLS} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y}$ – ahol konkrét számokra futtattuk)
- Pontosan ugyanúgy, ahogy az $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ -t sem tudjuk következtető statisztikailag vizsgálni (az egy szám), hanem az $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ -t nézzük
- Minket tehát $\widehat{\beta}_{OLS} = \left(\underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{X}} \right)^{-1} \underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{Y}}$ fog érdekelni!
- Ahogy az előbbi átlagos példában, így itt is igaz lesz, hogy ekkor a $\widehat{\beta}_{OLS}$ már nem egy konkrét érték (vektor), hanem egy – vektor értékű – val. változó, tehát eloszlása van!
- Ez a mintavételi eloszlás, mi erre, ennek tulajdonságaira, a jó tulajdonságok feltételeire stb. leszünk kíváncsiak
- Előbb szimulációval nyerünk képet, aztán matematikailag is levezetjük

Előkészület a mintavétel vizsgálatához

- Ahhoz, hogy a mintavétel hatását matematikailag tudjuk vizsgálni, az OLS-becslőt val. változókra kell ráeresztelni (szemben az eddigi képlettel – $\widehat{\beta}_{OLS} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y}$ – ahol konkrét számokra futtattuk)
- Pontosan ugyanúgy, ahogy az $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ -t sem tudjuk következtető statisztikailag vizsgálni (az egy szám), hanem az $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ -t nézzük
- Minket tehát $\widehat{\beta}_{OLS} = (\underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{X}})^{-1} \underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{Y}}$ fog érdekelni!
- Ahogy az előbbi átlagos példában, így itt is igaz lesz, hogy ekkor a $\widehat{\beta}_{OLS}$ már nem egy konkrét érték (vektor), hanem egy – vektor értékű – val. változó, tehát eloszlása van!
- Ez a mintavételi eloszlás, mi erre, ennek tulajdonságaira, a jó tulajdonságok feltételeire stb. leszünk kíváncsiak
- Előbb szimulációval nyerünk képet, aztán matematikailag is levezetjük

Előkészület a mintavétel vizsgálatához

- Ahhoz, hogy a mintavétel hatását matematikailag tudjuk vizsgálni, az OLS-becslőt val. változókra kell ráeresztelni (szemben az eddigi képlettel – $\widehat{\beta}_{OLS} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y}$ – ahol konkrét számokra futtattuk)
- Pontosan ugyanúgy, ahogy az $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ -t sem tudjuk következtető statisztikailag vizsgálni (az egy szám), hanem az $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ -t nézzük
- Minket tehát $\widehat{\beta}_{OLS} = \left(\underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{X}} \right)^{-1} \underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{Y}}$ fog érdekelni!
- Ahogy az előbbi átlagos példában, így itt is igaz lesz, hogy ekkor a $\widehat{\beta}_{OLS}$ már nem egy konkrét érték (vektor), hanem egy – vektor értékű – val. változó, tehát eloszlása van!
- Ez a mintavételi eloszlás, mi erre, ennek tulajdonságaira, a jó tulajdonságok feltételeire stb. leszünk kíváncsiak
- Előbb szimulációval nyerünk képet, aztán matematikailag is levezetjük

Előkészület a mintavétel vizsgálatához

- Ahhoz, hogy a mintavétel hatását matematikailag tudjuk vizsgálni, az OLS-becslőt val. változókra kell ráereszteni (szemben az eddigi képlettel – $\widehat{\beta}_{OLS} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y}$ – ahol konkrét számokra futtattuk)
- Pontosan ugyanúgy, ahogy az $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ -t sem tudjuk következtető statisztikailag vizsgálni (az egy szám), hanem az $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ -t nézzük
- Minket tehát $\widehat{\beta}_{OLS} = \left(\underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{X}} \right)^{-1} \underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{Y}}$ fog érdekelni!
- Ahogy az előbbi átlagos példában, így itt is igaz lesz, hogy ekkor a $\widehat{\beta}_{OLS}$ már nem egy konkrét érték (vektor), hanem egy – vektor értékű – val. változó, tehát eloszlása van!
- Ez a mintavételi eloszlás, mi erre, ennek tulajdonságaira, a jó tulajdonságok feltételeire stb. leszünk kíváncsiak
- Előbb szimulációval nyerünk képet, aztán matematikailag is levezetjük

Előkészület a mintavétel vizsgálatához

- Ahhoz, hogy a mintavétel hatását matematikailag tudjuk vizsgálni, az OLS-becslőt val. változókra kell ráeresztelni (szemben az eddigi képlettel – $\widehat{\beta}_{OLS} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y}$ – ahol konkrét számokra futtattuk)
- Pontosan ugyanúgy, ahogy az $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ -t sem tudjuk következtető statisztikailag vizsgálni (az egy szám), hanem az $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ -t nézzük
- Minket tehát $\widehat{\beta}_{OLS} = \left(\underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{X}} \right)^{-1} \underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{Y}}$ fog érdekelni!
- Ahogy az előbbi átlagos példában, így itt is igaz lesz, hogy ekkor a $\widehat{\beta}_{OLS}$ már nem egy konkrét érték (vektor), hanem egy – vektor értékű – val. változó, tehát eloszlása van!
- Ez a mintavételi eloszlás, mi erre, ennek tulajdonságaira, a jó tulajdonságok feltételeire stb. leszünk kíváncsiak
- Előbb szimulációval nyerünk képet, aztán matematikailag is levezetjük

Tartalom

- 1 Mintavételi helyzet
- 2 A mintavétel tulajdonságok szemléltetése szimulációval
- 3 A mintavétel tulajdonságok matematikai levezetése
- 4 Az OLS modellfeltevései

Monte Carlo szimuláció használata

- Számos konkrét véletlen mintát veszünk egy előre specifikált populációból (véletlenszám-generátort használunk)
- Lényegében: empirikusan vizsgálunk egy elméleti kérdést
- Valszámos embert játszunk: ugye azt mondtuk, hogy a valszámosok úgy dolgoznak mintha valahonnan ismernék a sokasági eloszlást – hát most tényleg ismerjük!
- Példának okáért, legyen a valódi sokasági eloszlás

$$(X, Y) \sim \mathcal{N} \left(\begin{pmatrix} 77 \\ 26 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 42^2 & 0,6 \cdot 20 \cdot 42 \\ 0,6 \cdot 20 \cdot 42 & 20^2 \end{pmatrix} \right)$$

- Ezért a *valódi* regressziós egyenes, a már látottak szerint:

$$\mathbb{E}(Y | X) = 4 + \frac{12}{42}X \approx 4 + 0,2857X$$

- Szimulációs paraméterek: $n = 100$ elemű minta a fenti sokaságból, 1000 ismétlés

Monte Carlo szimuláció használata

- Számos konkrét véletlen mintát veszünk egy előre specifikált populációból (véletlenszám-generátort használunk)
- Lényegében: empirikusan vizsgálunk egy elméleti kérdést
- Valszámos embert játszunk: ugye azt mondtuk, hogy a valszámosok úgy dolgoznak mintha valahonnan ismernék a sokasági eloszlást – hát most tényleg ismerjük!
- Példának okáért, legyen a valódi sokasági eloszlás

$$(X, Y) \sim \mathcal{N} \left(\begin{pmatrix} 77 \\ 26 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 42^2 & 0,6 \cdot 20 \cdot 42 \\ 0,6 \cdot 20 \cdot 42 & 20^2 \end{pmatrix} \right)$$

- Ezért a *valódi* regressziós egyenes, a már látottak szerint:

$$\mathbb{E}(Y | X) = 4 + \frac{12}{42}X \approx 4 + 0,2857X$$

- Szimulációs paraméterek: $n = 100$ elemű minta a fenti sokaságból, 1000 ismétlés

Monte Carlo szimuláció használata

- Számos konkrét véletlen mintát veszünk egy előre specifikált populációból (véletlenszám-generátort használunk)
- Lényegében: empirikusan vizsgálunk egy elméleti kérdést
- Valszámos embert játszunk: ugye azt mondtuk, hogy a valszámosok úgy dolgoznak mintha valahonnan ismernék a sokasági eloszlást – hát most tényleg ismerjük!
- Példának okáért, legyen a valódi sokasági eloszlás

$$(X, Y) \sim \mathcal{N} \left(\begin{pmatrix} 77 \\ 26 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 42^2 & 0,6 \cdot 20 \cdot 42 \\ 0,6 \cdot 20 \cdot 42 & 20^2 \end{pmatrix} \right)$$

- Ezért a *valódi* regressziós egyenes, a már látottak szerint:

$$\mathbb{E}(Y | X) = 4 + \frac{12}{42}X \approx 4 + 0,2857X$$

- Szimulációs paraméterek: $n = 100$ elemű minta a fenti sokaságból, 1000 ismétlés

Monte Carlo szimuláció használata

- Számos konkrét véletlen mintát veszünk egy előre specifikált populációból (véletlenszám-generátort használunk)
- Lényegében: empirikusan vizsgálunk egy elméleti kérdést
- Valszámos embert játszunk: ugye azt mondtuk, hogy a valszámosok úgy dolgoznak mintha valahonnan ismernék a sokasági eloszlást – hát most tényleg ismerjük!
- Példának okáért, legyen a valódi sokasági eloszlás

$$(X, Y) \sim \mathcal{N} \left(\begin{pmatrix} 77 \\ 26 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 42^2 & 0,6 \cdot 20 \cdot 42 \\ 0,6 \cdot 20 \cdot 42 & 20^2 \end{pmatrix} \right)$$

- Ezért a *valódi* regressziós egyenes, a már látottak szerint:

$$\mathbb{E}(Y | X) = 4 + \frac{12}{42}X \approx 4 + 0,2857X$$

- Szimulációs paraméterek: $n = 100$ elemű minta a fenti sokaságból, 1000 ismétlés

Monte Carlo szimuláció használata

- Számos konkrét véletlen mintát veszünk egy előre specifikált populációból (véletlenszám-generátort használunk)
- Lényegében: empirikusan vizsgálunk egy elméleti kérdést
- Valszámos embert játszunk: ugye azt mondtuk, hogy a valszámosok úgy dolgoznak mintha valahonnan ismernék a sokasági eloszlást – hát most tényleg ismerjük!
- Példának okáért, legyen a valódi sokasági eloszlás

$$(X, Y) \sim \mathcal{N} \left(\begin{pmatrix} 77 \\ 26 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 42^2 & 0,6 \cdot 20 \cdot 42 \\ 0,6 \cdot 20 \cdot 42 & 20^2 \end{pmatrix} \right)$$

- Ezért a *valódi* regressziós egyenes, a már látottak szerint:

$$\mathbb{E}(Y | X) = 4 + \frac{12}{42}X \approx 4 + 0,2857X$$

- Szimulációs paraméterek: $n = 100$ elemű minta a fenti sokaságból, 1000 ismétlés

Monte Carlo szimuláció használata

- Számos konkrét véletlen mintát veszünk egy előre specifikált populációból (véletlenszám-generátort használunk)
- Lényegében: empirikusan vizsgálunk egy elméleti kérdést
- Valszámos embert játszunk: ugye azt mondtuk, hogy a valszámosok úgy dolgoznak mintha valahonnan ismernék a sokasági eloszlást – hát most tényleg ismerjük!
- Példának okáért, legyen a valódi sokasági eloszlás

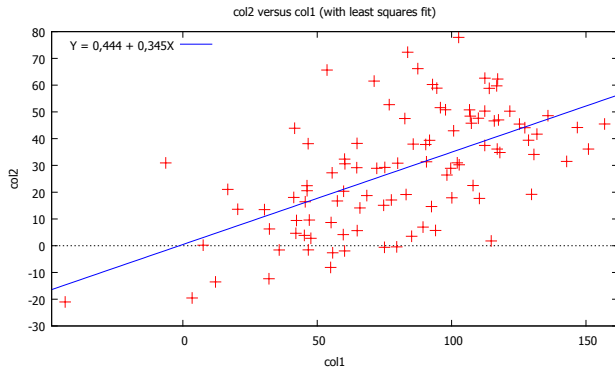
$$(X, Y) \sim \mathcal{N} \left(\begin{pmatrix} 77 \\ 26 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 42^2 & 0,6 \cdot 20 \cdot 42 \\ 0,6 \cdot 20 \cdot 42 & 20^2 \end{pmatrix} \right)$$

- Ezért a *valódi* regressziós egyenes, a már látottak szerint:

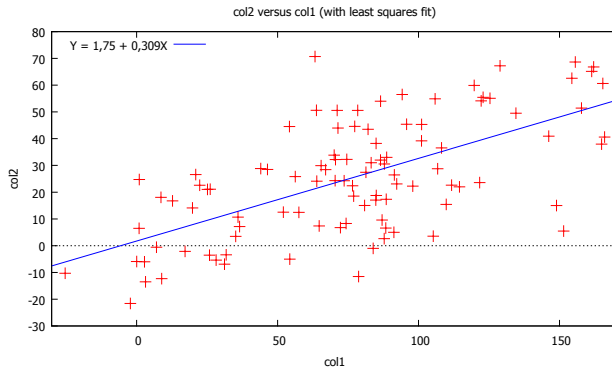
$$\mathbb{E}(Y | X) = 4 + \frac{12}{42}X \approx 4 + 0,2857X$$

- Szimulációs paraméterek: $n = 100$ elemű minta a fenti sokaságból, 1000 ismétlés

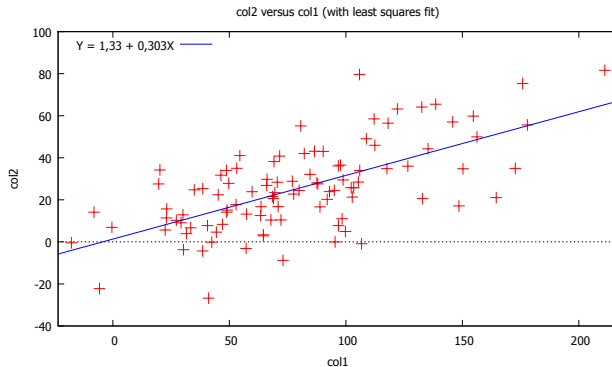
A szimuláció eredményei: 1. futtatás



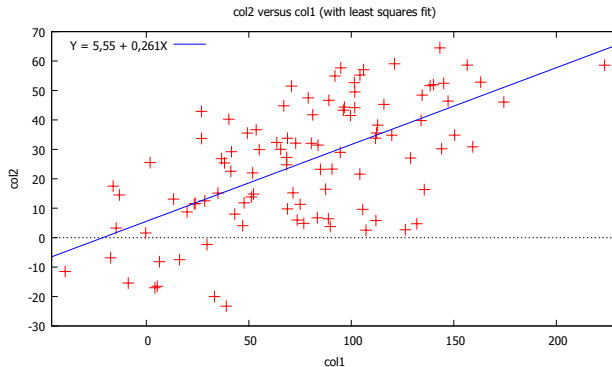
A szimuláció eredményei: 2. futtatás



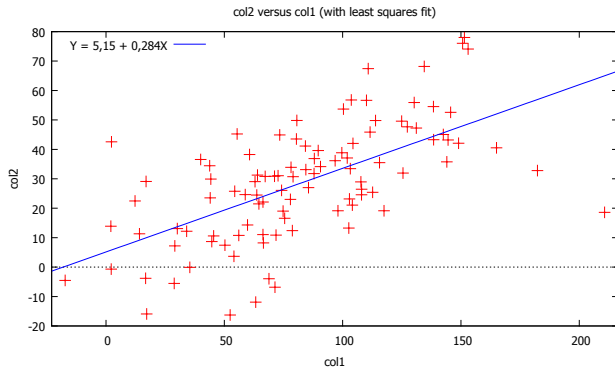
A szimuláció eredményei: 3. futtatás



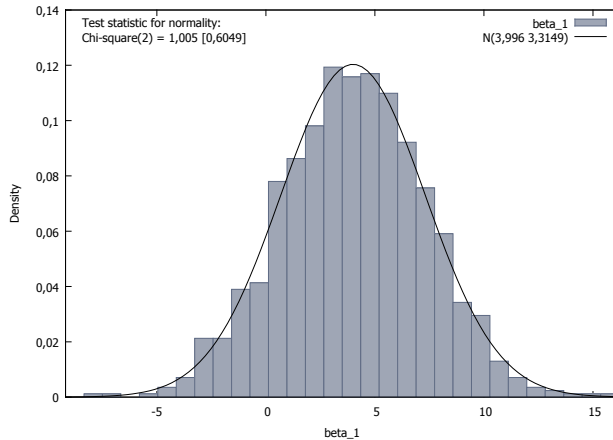
A szimuláció eredményei: 4. futtatás



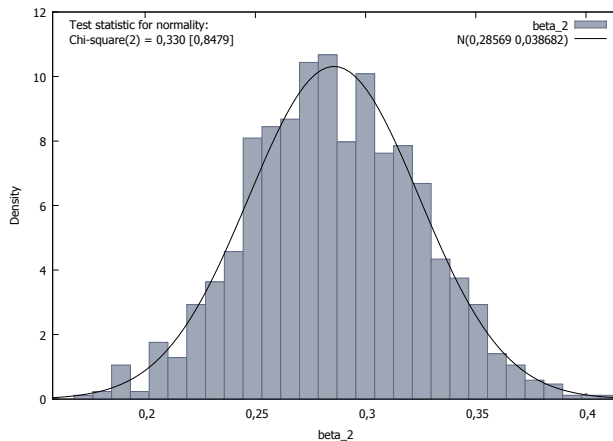
A szimuláció eredményei: 5. futtatás



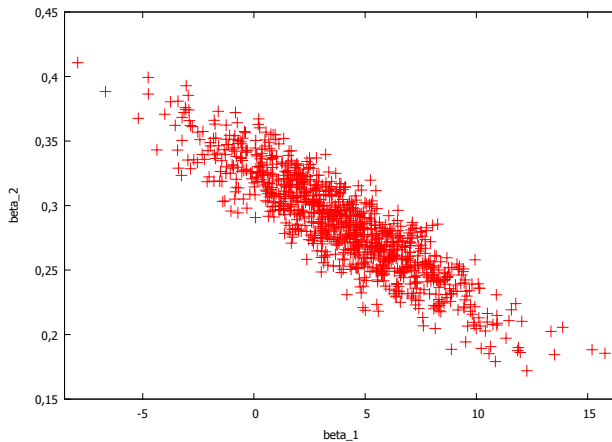
A szimuláció eredményei: konstans



A szimuláció eredményei: meredekség



A szimuláció eredményei: mindkét paraméter együtt



Tartalom

- 1 Mintavételi helyzet
- 2 A mintavétel tulajdonságok szemléltetése szimulációval
- 3 A mintavétel tulajdonságok matematikai levezetése
- 4 Az OLS modellfeltevései

Az OLS-becsülő mintavételi eloszlása

- Tudjuk, hogy $\widehat{\beta}_{\text{OLS}} = (\underline{X}^T \underline{X})^{-1} \underline{X}^T \underline{Y}$
- Valamint elfogadtuk feltételezésként, hogy a sokasági modell
 $Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \dots + \beta_k X_k + \varepsilon = \underline{X}^T \beta + \varepsilon$
 - És ez van mindegyik megfigyelési egység mögött is, tehát a mintavétel elemzéséhez ezt is írhatjuk:
$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \dots + \beta_k X_{ik} + \varepsilon_i$$
 - Röviden, a sokasági modell felírható: $Y = \underline{X}^T \beta + \varepsilon$ ahol ε az egy-egy megfigyelés hibatérme, $\underline{X} = \underline{X}^T \beta + \varepsilon$
- Na de rakjuk csak össze a kettőt:

$$\begin{aligned}\widehat{\beta}_{\text{OLS}} &= (\underline{X}^T \underline{X})^{-1} \underline{X}^T \underline{Y} = (\underline{X}^T \underline{X})^{-1} \underline{X}^T (\underline{X} \beta + \varepsilon) = \\ &= (\underline{X}^T \underline{X})^{-1} \underline{X}^T \underline{X} \beta + (\underline{X}^T \underline{X})^{-1} \underline{X}^T \varepsilon = \beta + (\underline{X}^T \underline{X})^{-1} \underline{X}^T \varepsilon\end{aligned}$$

Az OLS-becsülő mintavételi eloszlása

- Tudjuk, hogy $\widehat{\beta}_{\text{OLS}} = (\underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{X}})^{-1} \underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{Y}}$
- Valamint elfogadtuk feltételezésként, hogy a sokasági modell

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \dots + \beta_k X_k + \varepsilon = \underline{\underline{X}}^T \beta + \varepsilon$$

- És ez van mindegyik megfigyelési egység mögött is, tehát a mintavétel elemzéséhez ezt is írhatjuk:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \dots + \beta_k X_{ik} + \varepsilon_i$$

- Röviden, értelemszerű vektorokba/mátrixokba fogással: $Y_i = \underline{\underline{X}}_i^T \beta + \varepsilon$ avagy az egész adatbázisra: $\underline{\underline{Y}} = \underline{\underline{X}} \beta + \underline{\underline{\varepsilon}}$

- Na de rakjuk csak össze a kettőt:

$$\begin{aligned} \widehat{\beta}_{\text{OLS}} &= (\underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{X}})^{-1} \underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{Y}} = (\underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{X}})^{-1} \underline{\underline{X}}^T (\underline{\underline{X}} \beta + \underline{\underline{\varepsilon}}) = \\ &= (\underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{X}})^{-1} \underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{X}} \beta + (\underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{X}})^{-1} \underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{\varepsilon}} = \beta + (\underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{X}})^{-1} \underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{\varepsilon}} \end{aligned}$$

Az OLS-becsülő mintavételi eloszlása

- Tudjuk, hogy $\widehat{\beta}_{OLS} = (\underline{X}^T \underline{X})^{-1} \underline{X}^T \underline{Y}$
- Valamint elfogadtuk feltételezésként, hogy a sokasági modell
$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \dots + \beta_k X_k + \varepsilon = \underline{X}^T \beta + \varepsilon$$
 - És ez van mindegyik megfigyelési egység mögött is, tehát a mintavétel elemzéséhez ezt is írhatjuk:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \dots + \beta_k X_{ik} + \varepsilon_i$$

- Röviden, értelemszerű vektorokba/mátrixokba fogással: $Y_i = \underline{X}_i^T \beta + \varepsilon$ avagy az egész adatbázisra: $\underline{Y} = \underline{X} \beta + \underline{\varepsilon}$
- Na de rakjuk csak össze a kettőt:

$$\begin{aligned}\widehat{\beta}_{OLS} &= (\underline{X}^T \underline{X})^{-1} \underline{X}^T \underline{Y} = (\underline{X}^T \underline{X})^{-1} \underline{X}^T (\underline{X} \beta + \underline{\varepsilon}) = \\ &= (\underline{X}^T \underline{X})^{-1} \underline{X}^T \underline{X} \beta + (\underline{X}^T \underline{X})^{-1} \underline{X}^T \underline{\varepsilon} = \beta + (\underline{X}^T \underline{X})^{-1} \underline{X}^T \underline{\varepsilon}\end{aligned}$$

Az OLS-becsülő mintavételi eloszlása

- Tudjuk, hogy $\widehat{\beta}_{OLS} = (\underline{X}^T \underline{X})^{-1} \underline{X}^T \underline{Y}$
- Valamint elfogadtuk feltételezésként, hogy a sokasági modell
$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \dots + \beta_k X_k + \varepsilon = \underline{X}^T \beta + \varepsilon$$
 - És ez van mindegyik megfigyelési egység mögött is, tehát a mintavétel elemzéséhez ezt is írhatjuk:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \dots + \beta_k X_{ik} + \varepsilon_i$$

- Röviden, értelemszerű vektorokba/mátrixokba fogással: $Y_i = \underline{X}_i^T \beta + \varepsilon$ avagy az egész adatbázisra: $\underline{Y} = \underline{X} \beta + \underline{\varepsilon}$
- Na de rakjuk csak össze a kettőt:

$$\begin{aligned}\widehat{\beta}_{OLS} &= (\underline{X}^T \underline{X})^{-1} \underline{X}^T \underline{Y} = (\underline{X}^T \underline{X})^{-1} \underline{X}^T (\underline{X} \beta + \underline{\varepsilon}) = \\ &= (\underline{X}^T \underline{X})^{-1} \underline{X}^T \underline{X} \beta + (\underline{X}^T \underline{X})^{-1} \underline{X}^T \underline{\varepsilon} = \beta + (\underline{X}^T \underline{X})^{-1} \underline{X}^T \underline{\varepsilon}\end{aligned}$$

Az OLS-becsülő mintavételi eloszlása

- Tudjuk, hogy $\widehat{\beta}_{OLS} = (\underline{X}^T \underline{X})^{-1} \underline{X}^T \underline{Y}$
- Valamint elfogadtuk feltételezésként, hogy a sokasági modell
$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \dots + \beta_k X_k + \varepsilon = \underline{X}^T \beta + \varepsilon$$
 - És ez van mindegyik megfigyelési egység mögött is, tehát a mintavétel elemzéséhez ezt is írhatjuk:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \dots + \beta_k X_{ik} + \varepsilon_i$$

- Röviden, értelemszerű vektorokba/mátrixokba fogással: $Y_i = \underline{X}_i^T \beta + \varepsilon$ avagy az egész adatbázisra: $\underline{Y} = \underline{X} \beta + \underline{\varepsilon}$
- Na de rakjuk csak össze a kettőt:

$$\begin{aligned}\widehat{\beta}_{OLS} &= (\underline{X}^T \underline{X})^{-1} \underline{X}^T \underline{Y} = (\underline{X}^T \underline{X})^{-1} \underline{X}^T (\underline{X} \beta + \underline{\varepsilon}) = \\ &= (\underline{X}^T \underline{X})^{-1} \underline{X}^T \underline{X} \beta + (\underline{X}^T \underline{X})^{-1} \underline{X}^T \underline{\varepsilon} = \beta + (\underline{X}^T \underline{X})^{-1} \underline{X}^T \underline{\varepsilon}\end{aligned}$$

Tartalom

- 1 Mintavételi helyzet
- 2 A mintavétel tulajdonságok szemléltetése szimulációval
- 3 A mintavétel tulajdonságok matematikai levezetése
- 4 Az OLS modellfeltevései

Az OLS standard modellfeltevései

Ahhoz, hogy az OLS-nek fennálljanak bizonyos előnyös tulajdonságai, meghatározott feltevéseknek teljesülniük kell. Az ún. standard lineáris modell feltevései:

- 1 Linearitás
- 2 Nincs egzakt multikollinearitás
- 3 Erős (vagy szigorú) exogenitás
- 4 Homoszkedaszticitás
- 5 Autokorrelálatlanság

Linearitás

A sokaságot *valójában* leíró modell tényleg a feltételezett, azaz fennáll, hogy

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_k X_k + \varepsilon$$

és ez igaz mindegyik megfigyelési egységre, és így az egész mintára is:

$$\underline{Y} = \underline{X}\beta + \underline{\varepsilon}$$

Nincs egzakt multikollinearitás

- Egzakt multikollinearitásnak nevezzük, ha az adatmátrix nem teljes oszloprangú
- Tehát: az oszlopok között lineáris kapcsolat van
- Azaz valamelyik változó előállítható a többi lineáris kombinációjaként
- Érezhető, hogy nem túl szerencsés: minek használjuk egyáltalán azt a változót...? (Úgyis lineáris kombinációt képezünk a többiből is!) → a hatások nem lesznek szétválaszthatóak
- Sőt: az OLS becslőfüggvényéből az is látszik, hogy ilyenkor teljesen elakadunk: $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$ szinguláris ($\underline{\underline{\mathbf{X}^T \mathbf{X}}}$ 1 valószínűséggel szinguláris)
- Ennek feltétele: \mathbf{X} ($\underline{\underline{\mathbf{X}}}$) nem teljes oszloprangú

Nincs egzakt multikollinearitás

- Egzakt multikollinearitásnak nevezzük, ha az adatmátrix nem teljes oszloprangú
- Tehát: az oszlopok között lineáris kapcsolat van
- Azaz valamelyik változó előállítható a többi lineáris kombinációjaként
- Érezhető, hogy nem túl szerencsés: minek használjuk egyáltalán azt a változót...? (Úgyis lineáris kombinációt képezünk a többiből is!) → a hatások nem lesznek szétválaszthatóak
- Sőt: az OLS becslőfüggvényéből az is látszik, hogy ilyenkor teljesen elakadunk: $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$ szinguláris ($\underline{\underline{\mathbf{X}^T \mathbf{X}}}$ 1 valószínűséggel szinguláris)
- Ennek feltétele: \mathbf{X} ($\underline{\underline{\mathbf{X}}}$) nem teljes oszloprangú

Nincs egzakt multikollinearitás

- Egzakt multikollinearitásnak nevezzük, ha az adatmátrix nem teljes oszloprangú
- Tehát: az oszlopok között lineáris kapcsolat van
- Azaz valamelyik változó előállítható a többi lineáris kombinációjaként
- Érezhető, hogy nem túl szerencsés: minek használjuk egyáltalán azt a változót...? (Úgyis lineáris kombinációt képezünk a többiből is!) → a hatások nem lesznek szétválaszthatóak
- Sőt: az OLS becslőfüggvényéből az is látszik, hogy ilyenkor teljesen elakadunk: $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$ szinguláris ($\underline{\underline{\mathbf{X}^T \mathbf{X}}}$ 1 valószínűséggel szinguláris)
- Ennek feltétele: \mathbf{X} ($\underline{\underline{\mathbf{X}}}$) nem teljes oszloprangú

Nincs egzakt multikollinearitás

- Egzakt multikollinearitásnak nevezzük, ha az adatmátrix nem teljes oszloprangú
- Tehát: az oszlopok között lineáris kapcsolat van
- Azaz valamelyik változó előállítható a többi lineáris kombinációjaként
- Érezhető, hogy nem túl szerencsés: minek használjuk egyáltalán azt a változót...? (Úgyis lineáris kombinációt képezünk a többiből is!) → a hatások nem lesznek szétválaszthatóak
- Sőt: az OLS becslőfüggvényéből az is látszik, hogy ilyenkor teljesen elakadunk: $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$ szinguláris ($\underline{\underline{\mathbf{X}^T \mathbf{X}}}$ 1 valószínűséggel szinguláris)
- Ennek feltétele: \mathbf{X} ($\underline{\underline{\mathbf{X}}}$) nem teljes oszloprangú

Nincs egzakt multikollinearitás

- Egzakt multikollinearitásnak nevezzük, ha az adatmátrix nem teljes oszloprangú
- Tehát: az oszlopok között lineáris kapcsolat van
- Azaz valamelyik változó előállítható a többi lineáris kombinációjaként
- Érezhető, hogy nem túl szerencsés: minek használjuk egyáltalán azt a változót...? (Úgyis lineáris kombinációt képezünk a többiből is!) → a hatások nem lesznek szétválaszthatóak
- Sőt: az OLS becslőfüggvényéből az is látszik, hogy ilyenkor teljesen elakadunk: $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$ szinguláris ($\underline{\underline{\mathbf{X}^T \mathbf{X}}}$ 1 valószínűséggel szinguláris)
- Ennek feltétele: \mathbf{X} ($\underline{\underline{\mathbf{X}}}$) nem teljes oszloprangú

Nincs egzakt multikollinearitás

- Egzakt multikollinearitásnak nevezzük, ha az adatmátrix nem teljes oszloprangú
- Tehát: az oszlopok között lineáris kapcsolat van
- Azaz valamelyik változó előállítható a többi lineáris kombinációjaként
- Érezhető, hogy nem túl szerencsés: minek használjuk egyáltalán azt a változót...? (Úgyis lineáris kombinációt képezünk a többiből is!) → a hatások nem lesznek szétválaszthatóak
- Sőt: az OLS becslőfüggvényéből az is látszik, hogy ilyenkor teljesen elakadunk: $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$ szinguláris ($\underline{\underline{\mathbf{X}^T \mathbf{X}}}$ 1 valószínűséggel szinguláris)
- Ennek feltétele: \mathbf{X} ($\underline{\underline{\mathbf{X}}}$) nem teljes oszloprangú

Nincs egzakt multikollinearitás

- A feltétel tehát: az adatmátrix 1 valószínűséggel legyen teljes oszloprangú:

$$\mathbb{P}(\text{rank } \underline{\underline{X}} = k + 1) = 1$$

- Ez implikálja, hogy $n \geq k + 1$ (kevesebb mint $k + 1$ -dimenziós vektorból nincs $k + 1$ független)

Nincs egzakt multikollinearitás

- A feltétel tehát: az adatmátrix 1 valószínűséggel legyen teljes oszloprangú:

$$\mathbb{P}(\text{rank } \underline{\underline{X}} = k + 1) = 1$$

- Ez implikálja, hogy $n \geq k + 1$ (kevesebb mint $k + 1$ -dimenziós vektorból nincs $k + 1$ független)

Erős exogenitás

- Minden $i = 1, 2, \dots, n$ -re

$$\mathbb{E}(\varepsilon_i \mid \underline{X}_i) = 0$$

- Tartalma: a hibák – az ún. várható érték függetlenség értelemben – függetlenek a magyarázó változóktól

Erős exogenitás

- Minden $i = 1, 2, \dots, n$ -re

$$\mathbb{E}(\varepsilon_i \mid \underline{X}_i) = 0$$

- Tartalma: a hibák – az ún. várható érték függetlenség értelemben – függetlenek a magyarázó változóktól

Az erős exogenitás következményei

- Toronyszabály miatt a feltétel *nélküli* várható érték is nulla:

$$\mathbb{E} \left[\mathbb{E} (\varepsilon_i \mid \underline{X}_i) \right] = \mathbb{E} \varepsilon_i = \mathbb{E} (0) = 0$$

- A várható érték függetlenség implikálja a korrelálatlanságot: $\text{cov} (X_{ik}, \varepsilon_j) = 0$ avagy – ezzel egyenértékűen, hiszen $\mathbb{E} \varepsilon_i = 0$ – $\mathbb{E} (X_{ik} \varepsilon_j) = 0$
- Szokás a korrelálatlanság helyett azt is mondani, hogy a hibák ortogonálisak a magyarázóváltozókra

Az erős exogenitás következményei

- Toronyszabály miatt a feltétel *nélküli* várható érték is nulla:

$$\mathbb{E} \left[\mathbb{E} (\varepsilon_i \mid \underline{X}_i) \right] = \mathbb{E} \varepsilon_i = \mathbb{E} (0) = 0$$

- A várható érték függetlenség implikálja a korrelálatlanságot: $\text{cov} (X_{ik}, \varepsilon_j) = 0$ avagy – ezzel egyenértékűen, hiszen $\mathbb{E} \varepsilon_i = 0$ – $\mathbb{E} (X_{ik} \varepsilon_j) = 0$
- Szokás a korrelálatlanság helyett azt is mondani, hogy a hibák ortogonálisak a magyarázóváltozókra

Az erős exogenitás következményei

- Toronyszabály miatt a feltétel *nélküli* várható érték is nulla:

$$\mathbb{E} \left[\mathbb{E} (\varepsilon_i \mid \underline{X}_i) \right] = \mathbb{E} \varepsilon_i = \mathbb{E} (0) = 0$$

- A várható érték függetlenség implikálja a korrelálatlanságot: $\text{cov} (X_{ik}, \varepsilon_j) = 0$ avagy – ezzel egyenértékűen, hiszen $\mathbb{E} \varepsilon_i = 0$ – $\mathbb{E} (X_{ik} \varepsilon_j) = 0$
- Szokás a korrelálatlanság helyett azt is mondani, hogy a hibák ortogonálisak a magyarázóváltozókra

Az erős exogenitás sérülésének tipikus esetei

- Van olyan változó, ami lényeges magyarázó változó lenne (tehát valódi – sokasági – β -ja nem nulla), de mégsem szerepel a modellben, miközben legalább egy magyarázó változóval korrelál (kihagyott változó esete, „omitted variable bias”) – ez épp a confounding!
- Mérési hiba magyarázó változónál (tehát a mérési változók valódi értékét nem, csak valamilyen zajjal terhelve tudjuk mérni)
- Szimultaneitás (többegyenletes modelleknél)

Az erős exogenitás sérülésének tipikus esetei

- Van olyan változó, ami lényeges magyarázó változó lenne (tehát valódi – sokasági – β -ja nem nulla), de mégsem szerepel a modellben, miközben legalább egy magyarázó változóval korrelál (kihagyott változó esete, „omitted variable bias”) – ez épp a confounding!
- Mérési hiba magyarázó változónál (tehát a mérési változók valódi értékét nem, csak valamilyen zajjal terhelve tudjuk mérni)
- Szimultaneitás (többegyenletes modelleknél)

Az erős exogenitás sérülésének tipikus esetei

- Van olyan változó, ami lényeges magyarázó változó lenne (tehát valódi – sokasági – β -ja nem nulla), de mégsem szerepel a modellben, miközben legalább egy magyarázó változóval korrelál (kihagyott változó esete, „omitted variable bias”) – ez épp a confounding!
- Mérési hiba magyarázó változónál (tehát a mérési változók valódi értékét nem, csak valamilyen zajjal terhelve tudjuk mérni)
- Szimultaneitás (többegyenletes modelleknél)

Az erős exogenitás sérülésének kezelése

- A problémát orvosolhatjuk a megfelelő(bb) modellspecifikációval, függően attól, hogy pontosan mi a baj oka...
- ...illetve bizonyos statisztikai eszközök is a rendelkezésünkre állnak, ilyen az instrumentális változós (IV) becslés, a kétfázisú legkisebb négyzetek módszere (TSLS) stb.

Az erős exogenitás sérülésének kezelése

- A problémát orvosolhatjuk a megfelelő(bb) modellspecifikációval, függően attól, hogy pontosan mi a baj oka...
- ...illetve bizonyos statisztikai eszközök is a rendelkezésünkre állnak, ilyen az instrumentális változós (IV) becslés, a kétfázisú legkisebb négyzetek módszere (TSLS) stb.

Homoszkedaszticitás

- A feltétel azt köti ki, hogy $\sigma_i^2 := \mathbb{D}^2(\varepsilon_i \mid \underline{X}) = \sigma^2$ i -től függetlenül minden $i = 1, 2, \dots, n$ -re
- Tartalma: a hibák különböző megfigyelésekhez tartozó szórása állandó (nem függ attól, hogy melyik megfigyelésről van szó) avagy – másként megfogalmazva ugyanez – a becsült értékek szóródása a tényleges körül állandó
- Jellemzően keresztmetszeti adatoknál felmerülő kérdés (hamarosan foglalkozunk is vele bővebben)

Homoszkedaszticitás

- A feltétel azt köti ki, hogy $\sigma_i^2 := \mathbb{D}^2 \left(\varepsilon_i \mid \underline{X} \right) = \sigma^2$ i -től függetlenül minden $i = 1, 2, \dots, n$ -re
- Tartalma: a hibák különböző megfigyelésekhez tartozó szórása állandó (nem függ attól, hogy melyik megfigyelésről van szó) avagy – másként megfogalmazva ugyanez – a becsült értékek szóródása a tényleges körül állandó
- Jellemzően keresztmetszeti adatoknál felmerülő kérdés (hamarosan foglalkozunk is vele bővebben)

Homoszkedaszticitás

- A feltétel azt köti ki, hogy $\sigma_i^2 := \mathbb{D}^2 \left(\varepsilon_i \mid \underline{X} \right) = \sigma^2$ i -től függetlenül minden $i = 1, 2, \dots, n$ -re
- Tartalma: a hibák különböző megfigyelésekhez tartozó szórása állandó (nem függ attól, hogy melyik megfigyelésről van szó) avagy – másként megfogalmazva ugyanez – a becsült értékek szóródása a tényleges körül állandó
- Jellemzően keresztmetszeti adatoknál felmerülő kérdés (hamarosan foglalkozunk is vele bővebben)

Autokorrelálatlanság

- Tartalma: a különböző megfigyelésekhez tartozó hibák korrelálatlanok egymással
- Fae mintavételezésnél ez tehát *automatikusan* teljesül!
- Nem fae esetben a feltétel azt köti ki, hogy $\text{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j \mid \underline{\underline{X}}) = 0$ minden $i, j = 1, 2, \dots, n$, $i \neq j$ -re
- Ezzel egyenértékű $\mathbb{E}(\varepsilon_i \varepsilon_j \mid \underline{\underline{X}}) = 0$ (hiszen $\mathbb{E}\varepsilon_i = 0$, így a kovariancia a két változó szorzatának várható értéke)
- Elsősorban idősoros adatok kérdésköre, most nem is foglalkozunk vele bővebben

Autokorrelálatlanság

- Tartalma: a különböző megfigyelésekhez tartozó hibák korrelálatlanok egymással
- Fae mintavételezésnél ez tehát *automatikusan* teljesül!
- Nem fae esetben a feltétel azt köti ki, hogy $\text{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j \mid \underline{\underline{X}}) = 0$ minden $i, j = 1, 2, \dots, n$, $i \neq j$ -re
- Ezzel egyenértékű $\mathbb{E}(\varepsilon_i \varepsilon_j \mid \underline{\underline{X}}) = 0$ (hiszen $\mathbb{E}\varepsilon_i = 0$, így a kovariancia a két változó szorzatának várható értéke)
- Elsősorban idősoros adatok kérdésköre, most nem is foglalkozunk vele bővebben

Autokorrelálatlanság

- Tartalma: a különböző megfigyelésekhez tartozó hibák korrelálatlanok egymással
- Fae mintavételezésnél ez tehát *automatikus*an teljesül!
- Nem fae esetben a feltétel azt köti ki, hogy $\text{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j \mid \underline{\underline{X}}) = 0$ minden $i, j = 1, 2, \dots, n$, $i \neq j$ -re
- Ezzel egyenértékű $\mathbb{E}(\varepsilon_i \varepsilon_j \mid \underline{\underline{X}}) = 0$ (hiszen $\mathbb{E}\varepsilon_i = 0$, így a kovariancia a két változó szorzatának várható értéke)
- Elsősorban idősoros adatok kérdésköre, most nem is foglalkozunk vele bővebben

Autokorrelálatlanság

- Tartalma: a különböző megfigyelésekhez tartozó hibák korrelálatlanok egymással
- Fae mintavételezésnél ez tehát *automatikus*an teljesül!
- Nem fae esetben a feltétel azt köti ki, hogy $\text{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j \mid \underline{\underline{X}}) = 0$ minden $i, j = 1, 2, \dots, n$, $i \neq j$ -re
- Ezzel egyenértékű $\mathbb{E}(\varepsilon_i \varepsilon_j \mid \underline{\underline{X}}) = 0$ (hiszen $\mathbb{E}\varepsilon_i = 0$, így a kovariancia a két változó szorzatának várható értéke)
- Elsősorban idősoros adatok kérdésköre, most nem is foglalkozunk vele bővebben

Autokorrelálatlanság

- Tartalma: a különböző megfigyelésekhez tartozó hibák korrelálatlanok egymással
- Fae mintavételezésnél ez tehát *automatikus*an teljesül!
- Nem fae esetben a feltétel azt köti ki, hogy $\text{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j \mid \underline{\underline{X}}) = 0$ minden $i, j = 1, 2, \dots, n$, $i \neq j$ -re
- Ezzel egyenértékű $\mathbb{E}(\varepsilon_i \varepsilon_j \mid \underline{\underline{X}}) = 0$ (hiszen $\mathbb{E}\varepsilon_i = 0$, így a kovariancia a két változó szorzatának várható értéke)
- Elsősorban idősoros adatok kérdésköre, most nem is foglalkozunk vele bővebben

A homoszkedaszticitás és az autokorrelálatlanság együtt

- Mindkettő felfogható úgy, mint az ε_i hibák (feltételes) kovarianciamátrixára vonatkozó megkötés
 - Homoszkedaszticitás: a kovarianciamátrix főátlójában ugyanazok az elemek (σ^2) vannak (ugye itt vannak a szórásnégyzetek)
 - Autokorrelálatlanság: a kovarianciamátrix főátlóján kívüli elemek nullák (a mátrix diagonális)
- A kettő *együtt*: a kovarianciamátrix $\sigma^2 \mathbf{I}$ alakú (szokás az ilyet skalármátrixnak is nevezni)

A homoszkedaszticitás és az autokorrelálatlanság együtt

- Mindkettő felfogható úgy, mint az ε_i hibák (feltételes) kovarianciamátrixára vonatkozó megkötés
 - Homoszkedaszticitás: a kovarianciamátrix főátlójában ugyanazok az elemek (σ^2) vannak (ugye itt vannak a szórásnégyzetek)
 - Autokorrelálatlanság: a kovarianciamátrix főátlóján kívüli elemek nullák (a mátrix diagonális)
- A kettő *együtt*: a kovarianciamátrix $\sigma^2 \mathbf{I}$ alakú (szokás az ilyet skalármátrixnak is nevezni)

A homoszkedaszticitás és az autokorrelálatlanság együtt

- Mindkettő felfogható úgy, mint az ε_i hibák (feltételes) kovarianciamátrixára vonatkozó megkötés
 - Homoszkedaszticitás: a kovarianciamátrix főátlójában ugyanazok az elemek (σ^2) vannak (ugye itt vannak a szórásnégyzetek)
 - Autokorrelálatlanság: a kovarianciamátrix főátlóján kívüli elemek nullák (a mátrix diagonális)
- A kettő *együtt*: a kovarianciamátrix $\sigma^2 \mathbf{I}$ alakú (szokás az ilyet skalármátrixnak is nevezni)

A homoszkedaszticitás és az autokorrelálatlanság együtt

- Mindkettő felfogható úgy, mint az ε_i hibák (feltételes) kovarianciamátrixára vonatkozó megkötés
 - Homoszkedaszticitás: a kovarianciamátrix főátlójában ugyanazok az elemek (σ^2) vannak (ugye itt vannak a szórásnégyzetek)
 - Autokorrelálatlanság: a kovarianciamátrix főátlóján kívüli elemek nullák (a mátrix diagonális)
- A kettő *együtt*: a kovarianciamátrix $\sigma^2 \mathbf{I}$ alakú (szokás az ilyet skalármátrixnak is nevezni)

σ^2 becslése

Nem részletezzük, de belátható, hogy ez esetben a σ^2 -re adható OLS-becslés:

$$\widehat{\sigma^2} = \frac{ESS}{n - (k + 1)} = \frac{\widehat{\mathbf{e}}^T \widehat{\mathbf{e}}}{n - (k + 1)}$$

Mintavételileg rögzített magyarázó változók

- Egyszerűbb tárgyalások azt feltételezik, hogy a magyarázó változók mintavételileg rögzítettek (mintha determinisztikusan megszabhatnánk az értéküket: X_i igazából x_i)
- Ennek sok baja van:
 - Nem annyira szép és elegáns (nyilván ez speciális eseté a mi tárgyalásunknak!)
 - Nem mindig igaz, hogy a mintavételileg rögzített magyarázó változók tulajdonságai függetlenek a mintavétel helyétől
- Az előnye, hogy egyszerűsít: ekkor a hiba feltételes és feltétel nélküli eloszlása ugyanaz lesz, a ' X_i ' jellegű feltételek elhagyhatóak...
- ...emiatt a modellfeltevések a következőkre egyszerűsödnek:
 - A hiba eloszlása nem függ a magyarázó változók értékétől
 - A hiba eloszlása nem függ a mintavétel helyétől
 - A hiba eloszlása nem függ a mintavétel méretétől
 - A hiba eloszlása nem függ a mintavétel módjától

Mintavételileg rögzített magyarázó változók

- Egyszerűbb tárgyalások azt feltételezik, hogy a magyarázó változók mintavételileg rögzítettek (mintha determinisztikusan megszabhatnánk az értéküket: X_i igazából x_i)
- Ennek sok baja van:
 - 1 Nem annyira szép és elegáns (nyilván ez speciális esete a mi tárgyalásunknak!)
 - 2 Nem teszi lehetővé egy sor kérdés mélyebb tárgyalását
 - 3 Alapjában megkérdőjelezhető az alkalmazása nem-experimentális tudományokban (mint a közgazdaságtan...)
- Az előnye, hogy egyszerűsít: ekkor a hiba feltételes és feltétel nélküli eloszlása ugyanaz lesz, a ' X_i ' jellegű feltételek elhagyhatóak...
- ...emiatt a modellfeltevések a következőkre egyszerűsödnek:

Egyes esetekben még egyszerűsödhet a hiba eloszlása is, ha a hiba eloszlása feltétel nélküli eloszlása is normális, akkor a hiba eloszlása feltételes eloszlása is normális lesz.

Mintavételileg rögzített magyarázó változók

- Egyszerűbb tárgyalások azt feltételezik, hogy a magyarázó változók mintavételileg rögzítettek (mintha determinisztikusan megszabhatnánk az értéküket: X_i igazából x_i)
- Ennek sok baja van:
 - 1 Nem annyira szép és elegáns (nyilván ez speciális esete a mi tárgyalásunknak!)
 - 2 Nem teszi lehetővé egy sor kérdés mélyebb tárgyalását
 - 3 Alapjában megkérdőjelezhető az alkalmazása nem-experimentális tudományokban (mint a közgazdaságtan...)
- Az előnye, hogy egyszerűsít: ekkor a hiba feltételes és feltétel nélküli eloszlása ugyanaz lesz, a ' X_i ' jellegű feltételek elhagyhatóak...
- ...emiatt a modellfeltevések a következőkre egyszerűsödnek:

Mintavételileg rögzített magyarázó változók

- Egyszerűbb tárgyalások azt feltételezik, hogy a magyarázó változók mintavételileg rögzítettek (mintha determinisztikusan megszabhatnánk az értéküket: X_i igazából x_i)
- Ennek sok baja van:
 - 1 Nem annyira szép és elegáns (nyilván ez speciális esete a mi tárgyalásunknak!)
 - 2 Nem teszi lehetővé egy sor kérdés mélyebb tárgyalását
 - 3 Alapjában megkérdőjelezhető az alkalmazása nem-experimentális tudományokban (mint a közgazdaságtan...)
- Az előnye, hogy egyszerűsít: ekkor a hiba feltételes és feltétel nélküli eloszlása ugyanaz lesz, a ' X_i ' jellegű feltételek elhagyhatóak...
- ...emiatt a modellfeltevések a következőkre egyszerűsödnek:

Mintavételileg rögzített magyarázó változók

- Egyszerűbb tárgyalások azt feltételezik, hogy a magyarázó változók mintavételileg rögzítettek (mintha determinisztikusan megszabhatnánk az értéküket: \underline{X}_i igazából x_i)
- Ennek sok baja van:
 - 1 Nem annyira szép és elegáns (nyilván ez speciális esete a mi tárgyalásunknak!)
 - 2 Nem teszi lehetővé egy sor kérdés mélyebb tárgyalását
 - 3 Alapjában megkérdőjelezhető az alkalmazása nem-experimentális tudományokban (mint a közgazdaságtan...)
- Az előnye, hogy egyszerűsít: ekkor a hiba feltételes és feltétel nélküli eloszlása ugyanaz lesz, a ' \underline{X}_i ' jellegű feltételek elhagyhatóak...
- ...emiatt a modellfeltevések a következőkre egyszerűsödnek:

Mintavételileg rögzített magyarázó változók

- Egyszerűbb tárgyalások azt feltételezik, hogy a magyarázó változók mintavételileg rögzítettek (mintha determinisztikusan megszabhatnánk az értéküket: \underline{X}_i igazából \mathbf{x}_i)
- Ennek sok baja van:
 - 1 Nem annyira szép és elegáns (nyilván ez speciális esete a mi tárgyalásunknak!)
 - 2 Nem teszi lehetővé egy sor kérdés mélyebb tárgyalását
 - 3 Alapjában megkérdőjelezhető az alkalmazása nem-experimentális tudományokban (mint a közgazdaságtan...)
- Az előnye, hogy egyszerűsít: ekkor a hiba feltételes és feltétel nélküli eloszlása ugyanaz lesz, a ' \underline{X}_i ' jellegű feltételek elhagyhatóak...
- ...emiatt a modellfeltevések a következőkre egyszerűsödnek:
 - Erős exogenitást: $E\epsilon_i = 0$ minden $i = 1, 2, \dots, n$ -re

Mintavételileg rögzített magyarázó változók

- Egyszerűbb tárgyalások azt feltételezik, hogy a magyarázó változók mintavételileg rögzítettek (mintha determinisztikusan megszabhatnánk az értéküket: \underline{X}_i igazából \mathbf{x}_i)
- Ennek sok baja van:
 - 1 Nem annyira szép és elegáns (nyilván ez speciális esete a mi tárgyalásunknak!)
 - 2 Nem teszi lehetővé egy sor kérdés mélyebb tárgyalását
 - 3 Alapjában megkérdőjelezhető az alkalmazása nem-experimentális tudományokban (mint a közgazdaságtan...)
- Az előnye, hogy egyszerűsít: ekkor a hiba feltételes és feltétel nélküli eloszlása ugyanaz lesz, a ' \underline{X}_i ' jellegű feltételek elhagyhatóak...
- ...emiatt a modellfeltevések a következőkre egyszerűsödnek:
 - Erős exogenitás: $\mathbb{E}\varepsilon_i = 0$ minden $i = 1, 2, \dots, n$ -re
 - Homoszkedaszticitás: $\mathbb{D}^2\varepsilon_i = \sigma^2$ minden $i = 1, 2, \dots, n$ -re
 - Autokorrelálatlanság: $\mathbb{E}(\varepsilon_i\varepsilon_j) = 0$ minden $i \neq j = 1, 2, \dots, n$

Mintavételileg rögzített magyarázó változók

- Egyszerűbb tárgyalások azt feltételezik, hogy a magyarázó változók mintavételileg rögzítettek (mintha determinisztikusan megszabhatnánk az értéküket: \underline{X}_i igazából \mathbf{x}_i)
- Ennek sok baja van:
 - 1 Nem annyira szép és elegáns (nyilván ez speciális esete a mi tárgyalásunknak!)
 - 2 Nem teszi lehetővé egy sor kérdés mélyebb tárgyalását
 - 3 Alapjában megkérdőjelezhető az alkalmazása nem-experimentális tudományokban (mint a közgazdaságtan...)
- Az előnye, hogy egyszerűsít: ekkor a hiba feltételes és feltétel nélküli eloszlása ugyanaz lesz, a ' \underline{X}_i ' jellegű feltételek elhagyhatóak...
- ...emiatt a modellfeltevések a következőkre egyszerűsödnek:
 - Erős exogenitás: $\mathbb{E}\varepsilon_i = 0$ minden $i = 1, 2, \dots, n$ -re
 - Homoszkedaszticitás: $\mathbb{D}^2\varepsilon_i = \sigma^2$ minden $i = 1, 2, \dots, n$ -re
 - Autokorrelálatlanság: $\mathbb{E}(\varepsilon_i\varepsilon_j) = 0$ minden $i \neq j = 1, 2, \dots, n$

Mintavételileg rögzített magyarázó változók

- Egyszerűbb tárgyalások azt feltételezik, hogy a magyarázó változók mintavételileg rögzítettek (mintha determinisztikusan megszabhatnánk az értéküket: \underline{X}_i igazából \mathbf{x}_i)
- Ennek sok baja van:
 - 1 Nem annyira szép és elegáns (nyilván ez speciális esete a mi tárgyalásunknak!)
 - 2 Nem teszi lehetővé egy sor kérdés mélyebb tárgyalását
 - 3 Alapjában megkérdőjelezhető az alkalmazása nem-experimentális tudományokban (mint a közgazdaságtan...)
- Az előnye, hogy egyszerűsít: ekkor a hiba feltételes és feltétel nélküli eloszlása ugyanaz lesz, a ' \underline{X}_i ' jellegű feltételek elhagyhatóak...
- ...emiatt a modellfeltevések a következőkre egyszerűsödnek:
 - Erős exogenitás: $\mathbb{E}\varepsilon_i = 0$ minden $i = 1, 2, \dots, n$ -re
 - Homoszkedaszticitás: $\mathbb{D}^2\varepsilon_i = \sigma^2$ minden $i = 1, 2, \dots, n$ -re
 - Autokorrelálatlanság: $\mathbb{E}(\varepsilon_i\varepsilon_j) = 0$ minden $i \neq j = 1, 2, \dots, n$

Mintavételileg rögzített magyarázó változók

- Egyszerűbb tárgyalások azt feltételezik, hogy a magyarázó változók mintavételileg rögzítettek (mintha determinisztikusan megszabhatnánk az értéküket: \underline{X}_i igazából \mathbf{x}_i)
- Ennek sok baja van:
 - 1 Nem annyira szép és elegáns (nyilván ez speciális esete a mi tárgyalásunknak!)
 - 2 Nem teszi lehetővé egy sor kérdés mélyebb tárgyalását
 - 3 Alapjában megkérdőjelezhető az alkalmazása nem-experimentális tudományokban (mint a közgazdaságtan...)
- Az előnye, hogy egyszerűsít: ekkor a hiba feltételes és feltétel nélküli eloszlása ugyanaz lesz, a ' \underline{X}_i ' jellegű feltételek elhagyhatóak...
- ...emiatt a modellfeltevések a következőkre egyszerűsödnek:
 - Erős exogenitás: $\mathbb{E}\varepsilon_i = 0$ minden $i = 1, 2, \dots, n$ -re
 - Homoszkedaszticitás: $\mathbb{D}^2\varepsilon_i = \sigma^2$ minden $i = 1, 2, \dots, n$ -re
 - Autokorrelálatlanság: $\mathbb{E}(\varepsilon_i\varepsilon_j) = 0$ minden $i \neq j = 1, 2, \dots, n$

A mintavételi tulajdonságok

- Ezek lesznek a standard modellfeltevések...
- ...most nekiállunk megvizsgálni, hogy a teljesülésük esetén milyen tulajdonságokkal bír az OLS-becslő

A mintavételi tulajdonságok

- Ezek lesznek a standard modellfeltevések...
- ...most nekiállunk megvizsgálni, hogy a teljesülésük esetén milyen tulajdonságokkal bír az OLS-becsrlő

Várható érték

- Tudjuk, hogy

$$\widehat{\beta}_{\text{OLS}} = \beta + \left(\underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{X}} \right)^{-1} \underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{\varepsilon}}$$

- Ez alapján mi $\widehat{\beta}_{\text{OLS}}$ várható értéke (várható érték-vektora)?

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \widehat{\beta}_{\text{OLS}} &= \beta + \mathbb{E} \left[\left(\underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{X}} \right)^{-1} \underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{\varepsilon}} \right] = \\ &= \beta + \mathbb{E} \left\{ \mathbb{E} \left[\left(\underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{X}} \right)^{-1} \underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{\varepsilon}} \mid \underline{\underline{X}} \right] \right\} = \\ &= \beta + \mathbb{E} \left\{ \left(\underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{X}} \right)^{-1} \underline{\underline{X}}^T \mathbb{E} \left[\underline{\underline{\varepsilon}} \mid \underline{\underline{X}} \right] \right\} = \beta \end{aligned}$$

- Az erős exogenitás fennállása esetén tehát az OLS szolgáltatta becslések *torzítatlanok*
- Nem bizonyítjuk, de az is igaz, hogy *konzisztensek*

Várható érték

- Tudjuk, hogy

$$\widehat{\beta}_{\text{OLS}} = \beta + \left(\underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{X}} \right)^{-1} \underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{\varepsilon}}$$

- Ez alapján mi $\widehat{\beta}_{\text{OLS}}$ várható értéke (várható érték-vektora)?

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \widehat{\beta}_{\text{OLS}} &= \beta + \mathbb{E} \left[\left(\underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{X}} \right)^{-1} \underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{\varepsilon}} \right] = \\ &= \beta + \mathbb{E} \left\{ \mathbb{E} \left[\left(\underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{X}} \right)^{-1} \underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{\varepsilon}} \mid \underline{\underline{X}} \right] \right\} = \\ &= \beta + \mathbb{E} \left\{ \left(\underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{X}} \right)^{-1} \underline{\underline{X}}^T \mathbb{E} \left[\underline{\underline{\varepsilon}} \mid \underline{\underline{X}} \right] \right\} = \beta \end{aligned}$$

- Az erős exogenitás fennállása esetén tehát az OLS szolgáltatta becslések *torzítatlanok*
- Nem bizonyítjuk, de az is igaz, hogy *konzisztensek*

Várható érték

- Tudjuk, hogy

$$\widehat{\beta}_{\text{OLS}} = \beta + \left(\underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{X}} \right)^{-1} \underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{\varepsilon}}$$

- Ez alapján mi $\widehat{\beta}_{\text{OLS}}$ várható értéke (várható érték-vektora)?

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \widehat{\beta}_{\text{OLS}} &= \beta + \mathbb{E} \left[\left(\underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{X}} \right)^{-1} \underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{\varepsilon}} \right] = \\ &= \beta + \mathbb{E} \left\{ \mathbb{E} \left[\left(\underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{X}} \right)^{-1} \underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{\varepsilon}} \mid \underline{\underline{X}} \right] \right\} = \\ &= \beta + \mathbb{E} \left\{ \left(\underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{X}} \right)^{-1} \underline{\underline{X}}^T \mathbb{E} [\underline{\underline{\varepsilon}} \mid \underline{\underline{X}}] \right\} = \beta \end{aligned}$$

- Az erős exogenitás fennállása esetén tehát az OLS szolgáltatta becslések *torzítatlanok*
- Nem bizonyítjuk, de az is igaz, hogy *konzisztensek*

Várható érték

- Tudjuk, hogy

$$\widehat{\beta}_{\text{OLS}} = \beta + \left(\underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{X}} \right)^{-1} \underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{\varepsilon}}$$

- Ez alapján mi $\widehat{\beta}_{\text{OLS}}$ várható értéke (várható érték-vektora)?

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \widehat{\beta}_{\text{OLS}} &= \beta + \mathbb{E} \left[\left(\underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{X}} \right)^{-1} \underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{\varepsilon}} \right] = \\ &= \beta + \mathbb{E} \left\{ \mathbb{E} \left[\left(\underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{X}} \right)^{-1} \underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{\varepsilon}} \mid \underline{\underline{X}} \right] \right\} = \\ &= \beta + \mathbb{E} \left\{ \left(\underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{X}} \right)^{-1} \underline{\underline{X}}^T \mathbb{E} \left[\underline{\underline{\varepsilon}} \mid \underline{\underline{X}} \right] \right\} = \beta \end{aligned}$$

- Az erős exogenitás fennállása esetén tehát az OLS szolgáltatta becslések *torzítatlanok*
- Nem bizonyítjuk, de az is igaz, hogy *konzisztensek*

Kovarianciamátrix

Az előbbi ismeretében:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{D}^2 \widehat{\beta}_{OLS} &= \mathbb{E} \left[\left(\widehat{\beta}_{OLS} - \mathbb{E} \widehat{\beta}_{OLS} \right) \cdot \left(\widehat{\beta}_{OLS} - \mathbb{E} \widehat{\beta}_{OLS} \right)^T \right] = \\
 &= \mathbb{E} \left[\left(\widehat{\beta}_{OLS} - \beta \right) \cdot \left(\widehat{\beta}_{OLS} - \beta \right)^T \right] = \\
 &= \mathbb{E} \left\{ \left[\left(\underline{X}^T \underline{X} \right)^{-1} \underline{X}^T \underline{\varepsilon} \right] \cdot \left[\left(\underline{X}^T \underline{X} \right)^{-1} \underline{X}^T \underline{\varepsilon} \right]^T \right\} = \\
 &= \mathbb{E} \left[\left(\underline{X}^T \underline{X} \right)^{-1} \underline{X}^T \underline{\varepsilon} \underline{\varepsilon}^T \underline{X} \left(\underline{X}^T \underline{X} \right)^{-1} \right] = \\
 &= \left(\underline{X}^T \underline{X} \right)^{-1} \underline{X}^T \mathbb{E} \left(\underline{\varepsilon} \underline{\varepsilon}^T \right) \underline{X} \left(\underline{X}^T \underline{X} \right)^{-1} = \\
 &= \left(\underline{X}^T \underline{X} \right)^{-1} \underline{X}^T \cdot \sigma^2 \mathbf{I} \cdot \underline{X} \left(\underline{X}^T \underline{X} \right)^{-1} = \sigma^2 \left(\underline{X}^T \underline{X} \right)^{-1}
 \end{aligned}$$

A Gauss–Markov tétel

- Ha mindegyik feltevés teljesül, akkor lineáris torzítatlan becslők körében az OLS-becslő minimális varianciájú (azaz hatásos)
- Tehát: $\mathbb{D}^2 \left(\widehat{\beta}_{\text{OLS}} \right) \leq \mathbb{D}^2 \left(\widehat{\beta}' \right)$ bármely más $\widehat{\beta}'$ lineáris becslőre, amire $\mathbb{E} \left(\widehat{\beta}' \right) = \beta$ (azaz torzítatlan)

A Gauss–Markov tétel

- Ha mindegyik feltevés teljesül, akkor lineáris torzítatlan becslők körében az OLS-becslő minimális varianciájú (azaz hatásos)
- Tehát: $\mathbb{D}^2(\widehat{\beta}_{\text{OLS}}) \leq \mathbb{D}^2(\widehat{\beta}')$ bármely más $\widehat{\beta}'$ lineáris becslőre, amire $\mathbb{E}(\widehat{\beta}') = \beta$ (azaz torzítatlan)

Összefoglalva

- Amennyiben a standard modellfeltevések közül teljesül a:

- Linearitás
- Nincs egzakt multikollinearitás
- Erős exogenitás

akkor az OLS szolgáltatotta becslések *torzítatlanok és konzisztensek*

- Ha ezen felül teljesül az:

- Homoszkaszticitás, akkor az OLS szolgáltatotta becslések *hatékonyak* (minimális varianciájúak)

Összefoglalva

- Amennyiben a standard modellfeltevések közül teljesül a:

- Linearitás
- Nincs egzakt multikollinearitás
- Erős exogenitás

akkor az OLS szolgáltatotta becslések *torzítatlanok és konzisztensek*

Ha ezen kívül teljesül az:

homoszkasztas, akkor az OLS szolgáltatotta becslések *effektívek* (minimális varianciájúak)

Ha ezen kívül teljesül az: normális eloszlás, akkor az OLS szolgáltatotta becslések *maximálisan valószínűek*

Összefoglalva

- Amennyiben a standard modellfeltevések közül teljesül a:

- Linearitás
- Nincs egzakt multikollinearitás
- Erős exogenitás

akkor az OLS szolgáltatotta becslések *torzítatlanok és konzisztensek*

Ha ezen kívül teljesül az

homoszkaszticitás feltétele is, akkor az OLS szolgáltatotta becslések *effektívek* (minimális varianciájúak)

Összefoglalva

- Amennyiben a standard modellfeltevések közül teljesül a:

- Linearitás
- Nincs egzakt multikollinearitás
- Erős exogenitás

akkor az OLS szolgáltatotta becslések *torzítatlanok* és *konzisztensek*

- Ha ezen felül teljesül a:

akkor az OLS szolgáltatott becslések *effektív* (minimális varianssal) lesznek

Összefoglalva

- Amennyiben a standard modellfeltevések közül teljesül a:

- Linearitás
- Nincs egzakt multikollinearitás
- Erős exogenitás

akkor az OLS szolgáltatotta becslések *torzítatlanok* és *konzisztensek*

- Ha ezen felül teljesül a:

akkor az OLS szolgáltatott becslések *effektív* (minimális varianssal) lesznek

Összefoglalva

- Amennyiben a standard modellfeltevések közül teljesül a:

- Linearitás
- Nincs egzakt multikollinearitás
- Erős exogenitás

akkor az OLS szolgáltatatta becslések *torzítatlanok* és *konzisztensek*

- Ha ezen felül teljesül a:

- Homoszkedaszticitás
- Autokorrelálatlanság

akkor az OLS szolgáltatatta becslések *hatásosak* (minimális varianciájuk) is

Összefoglalva

- Amennyiben a standard modellfeltevések közül teljesül a:

- Linearitás
- Nincs egzakt multikollinearitás
- Erős exogenitás

akkor az OLS szolgáltatatta becslések *torzítatlanok* és *konzisztensek*

- Ha ezen felül teljesül a:

- Homoszkedaszticitás
- Autokorrelálatlanság

akkor az OLS szolgáltatatta becslések *hatásosak* (minimális varianciájuk) is

Összefoglalva

- Amennyiben a standard modellfeltevések közül teljesül a:

- Linearitás
- Nincs egzakt multikollinearitás
- Erős exogenitás

akkor az OLS szolgáltatatta becslések *torzítatlanok* és *konzisztensek*

- Ha ezen felül teljesül a:

- Homoszkedaszticitás
- Autokorrelálatlanság

akkor az OLS szolgáltatatta becslések *hatásosak* (minimális varianciájuk) is

Összefoglalva

- Amennyiben a standard modellfeltevések közül teljesül a:

- Linearitás
- Nincs egzakt multikollinearitás
- Erős exogenitás

akkor az OLS szolgáltatatta becslések *torzítatlanok* és *konzisztensek*

- Ha ezen felül teljesül a:

- Homoszkedaszticitás
- Autokorrelálatlanság

akkor az OLS szolgáltatatta becslések *hatásosak* (minimális varianciájuk) is

Összefoglalva

- Amennyiben a standard modellfeltevések közül teljesül a:

- Linearitás
- Nincs egzakt multikollinearitás
- Erős exogenitás

akkor az OLS szolgáltatatta becslések *torzítatlanok* és *konzisztensek*

- Ha ezen felül teljesül a:

- Homoszkedaszticitás
- Autokorrelálatlanság

akkor az OLS szolgáltatatta becslések *hatásosak* (minimális varianciájuk) is

BLUE-tulajdonság

Ezt röviden úgy szokták megfogalmazni, hogy ha valamennyi standard modellfeltétel teljesül, akkor az OLS szolgáltatja becslések BLUE-k:

- Best (minimális varianciájú)
- Linear (lineáris a mintaelemekben)
- Unbiased (torzítatlan)

A σ^2 és a koefficiensek kovarianciamátrixának becslői

- A σ^2 -nek a $\widehat{\sigma^2} = \frac{ESS}{n-(k+1)}$ becslője torzítatlan, ha mindegyik feltétel fennáll
- A β_i koefficiensek kovarianciamátrixának $\widehat{\sigma^2} \left(\underline{\underline{X^T X}} \right)^{-1}$ becslője szintén
- Tehát vigyázat: itt *már* a torzítatlansághoz *is* kell mindegyik feltétel (a homoszkedaszticitás és az autokorrelálatlanság is)!

A σ^2 és a koefficiensek kovarianciamátrixának becslői

- A σ^2 -nek a $\widehat{\sigma^2} = \frac{ESS}{n-(k+1)}$ becslője torzítatlan, ha mindegyik feltétel fennáll
- A β_i koefficiensek kovarianciamátrixának $\widehat{\sigma^2} \left(\underline{\underline{X^T X}} \right)^{-1}$ becslője szintén
- Tehát vigyázat: itt *már* a torzítatlansághoz *is* kell mindegyik feltétel (a homoszkedaszticitás és az autokorrelálatlanság is)!

A σ^2 és a koefficiensek kovarianciamátrixának becslői

- A σ^2 -nek a $\widehat{\sigma^2} = \frac{ESS}{n-(k+1)}$ becslője torzítatlan, ha mindegyik feltétel fennáll
- A β_i koefficiensek kovarianciamátrixának $\widehat{\sigma^2} \left(\underline{\underline{X^T X}} \right)^{-1}$ becslője szintén
- Tehát vigyázat: itt *már* a torzítatlansághoz *is* kell mindegyik feltétel (a homoszkedaszticitás és az autokorrelálatlanság is)!

A $\hat{\beta}_i$ koeficiensek eloszlása

- Az eddigi eredmények ugyan nagyon biztatóak, de még mindig nem mondanak semmit arról, hogy konkrétan mi a becsült koeficiensek (mintavételi) eloszlása
- A $\widehat{\beta}_{OLS} = \beta + \left(\underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{X}}\right)^{-1} \underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{\varepsilon}}$ nem sok jót sejtet: ebből úgy tűnik, hogy ez $\underline{\underline{X}}$ -től és $\underline{\underline{\varepsilon}}$ -tól is függ, ráadásul egy elég komplexnek kinéző módon...
- Szerencsére nem ennyire rossz a helyzet!
- Van egy nevezetes speciális eset, amikor a becsült koeficiensek eloszlása egyszerű alakú, és *nem is függ* $\underline{\underline{X}}$ eloszlásától, ez pedig az, ha a hibák feltételes eloszlása normális
- Vigyázat: a hibák normalitása *nem* része a standard modellfeltevéseknek, azaz a BLUE-ság akkor is megvalósul, ha a hibák eloszlása nem normális!
- Ráadásul, még ha nem is tudjuk, hogy a normalitás teljesül, de nagy a mintánk, akkor a centrális határeloszlás-tétel miatt aszimptotikus közelítésként akkor is használhatjuk az így nyert eredményeket

A $\hat{\beta}_i$ koeficiensek eloszlása

- Az eddigi eredmények ugyan nagyon biztatóak, de még mindig nem mondanak semmit arról, hogy konkrétan mi a becsült koeficiensek (mintavételi) eloszlása
- A $\widehat{\beta}_{OLS} = \beta + (\underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{X}})^{-1} \underline{\underline{X}}^T \underline{\varepsilon}$ nem sok jót sejtet: ebből úgy tűnik, hogy ez $\underline{\underline{X}}$ -től és ε -tól is függ, ráadásul egy elég komplexnek kinéző módon...
- Szerencsére nem ennyire rossz a helyzet!
- Van egy nevezetes speciális eset, amikor a becsült koeficiensek eloszlása egyszerű alakú, és *nem is függ* $\underline{\underline{X}}$ eloszlásától, ez pedig az, ha a hibák feltételes eloszlása normális
- Vigyázat: a hibák normalitása *nem* része a standard modellfeltevéseknek, azaz a BLUE-ság akkor is megvalósul, ha a hibák eloszlása nem normális!
- Ráadásul, még ha nem is tudjuk, hogy a normalitás teljesül, de nagy a mintánk, akkor a centrális határeloszlás-tétel miatt aszimptotikus közelítésként akkor is használhatjuk az így nyert eredményeket

A $\hat{\beta}_i$ koeficiensek eloszlása

- Az eddigi eredmények ugyan nagyon biztatóak, de még mindig nem mondanak semmit arról, hogy konkrétan mi a becsült koeficiensek (mintavételi) eloszlása
- A $\widehat{\beta}_{OLS} = \beta + (\underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{X}})^{-1} \underline{\underline{X}}^T \underline{\varepsilon}$ nem sok jót sejtet: ebből úgy tűnik, hogy ez $\underline{\underline{X}}$ -től és ε -tól is függ, ráadásul egy elég komplexnek kinéző módon...
- Szerencsére nem ennyire rossz a helyzet!
- Van egy nevezetes speciális eset, amikor a becsült koeficiensek eloszlása egyszerű alakú, és *nem is függ* $\underline{\underline{X}}$ eloszlásától, ez pedig az, ha a hibák feltételes eloszlása normális
- Vigyázat: a hibák normalitása *nem* része a standard modellfeltevéseknek, azaz a BLUE-ság akkor is megvalósul, ha a hibák eloszlása nem normális!
- Ráadásul, még ha nem is tudjuk, hogy a normalitás teljesül, de nagy a mintánk, akkor a centrális határeloszlás-tétel miatt aszimptotikus közelítésként akkor is használhatjuk az így nyert eredményeket

A $\widehat{\beta}_i$ koeficiensek eloszlása

- Az eddigi eredmények ugyan nagyon biztatóak, de még mindig nem mondanak semmit arról, hogy konkrétan mi a becsült koeficiensek (mintavételi) eloszlása
- A $\widehat{\beta}_{OLS} = \beta + (\underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{X}})^{-1} \underline{\underline{X}}^T \underline{\varepsilon}$ nem sok jót sejtet: ebből úgy tűnik, hogy ez $\underline{\underline{X}}$ -től és ε -tól is függ, ráadásul egy elég komplexnek kinéző módon...
- Szerencsére nem ennyire rossz a helyzet!
- Van egy nevezetes speciális eset, amikor a becsült koeficiensek eloszlása egyszerű alakú, és *nem is függ* $\underline{\underline{X}}$ eloszlásától, ez pedig az, ha a hibák feltételes eloszlása normális
- Vigyázat: a hibák normalitása *nem* része a standard modellfeltevéseknek, azaz a BLUE-ság akkor is megvalósul, ha a hibák eloszlása nem normális!
- Ráadásul, még ha nem is tudjuk, hogy a normalitás teljesül, de nagy a mintánk, akkor a centrális határeloszlás-tétel miatt aszimptotikus közelítésként akkor is használhatjuk az így nyert eredményeket

A $\widehat{\beta}_i$ koeficiensek eloszlása

- Az eddigi eredmények ugyan nagyon biztatóak, de még mindig nem mondanak semmit arról, hogy konkrétan mi a becsült koeficiensek (mintavételi) eloszlása
- A $\widehat{\beta}_{OLS} = \beta + (\underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{X}})^{-1} \underline{\underline{X}}^T \underline{\varepsilon}$ nem sok jót sejtet: ebből úgy tűnik, hogy ez $\underline{\underline{X}}$ -től és ε -tól is függ, ráadásul egy elég komplexnek kinéző módon...
- Szerencsére nem ennyire rossz a helyzet!
- Van egy nevezetes speciális eset, amikor a becsült koeficiensek eloszlása egyszerű alakú, és *nem is függ* $\underline{\underline{X}}$ eloszlásától, ez pedig az, ha a hibák feltételes eloszlása normális
- Vigyázat: a hibák normalitása *nem* része a standard modellfeltevéseknek, azaz a BLUE-ság akkor is megvalósul, ha a hibák eloszlása nem normális!
- Ráadásul, még ha nem is tudjuk, hogy a normalitás teljesül, de nagy a mintánk, akkor a centrális határeloszlás-tétel miatt aszimptotikus közelítésként akkor is használhatjuk az így nyert eredményeket

A $\widehat{\beta}_i$ koeficiensek eloszlása

- Az eddigi eredmények ugyan nagyon biztatóak, de még mindig nem mondanak semmit arról, hogy konkrétan mi a becsült koeficiensek (mintavételi) eloszlása
- A $\widehat{\beta}_{OLS} = \beta + (\underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{X}})^{-1} \underline{\underline{X}}^T \underline{\varepsilon}$ nem sok jót sejtet: ebből úgy tűnik, hogy ez $\underline{\underline{X}}$ -től és ε -tól is függ, ráadásul egy elég komplexnek kinéző módon...
- Szerencsére nem ennyire rossz a helyzet!
- Van egy nevezetes speciális eset, amikor a becsült koeficiensek eloszlása egyszerű alakú, és *nem is függ* $\underline{\underline{X}}$ eloszlásától, ez pedig az, ha a hibák feltételes eloszlása normális
- Vigyázat: a hibák normalitása *nem* része a standard modellfeltevéseknek, azaz a BLUE-ság akkor is megvalósul, ha a hibák eloszlása nem normális!
- Ráadásul, még ha nem is tudjuk, hogy a normalitás teljesül, de nagy a mintánk, akkor a centrális határeloszlás-tétel miatt aszimptotikus közelítésként akkor is használhatjuk az így nyert eredményeket

Hibák normalitása

- $\underline{\varepsilon}$ feltételes eloszlása feltéve \underline{X} -et többváltozós normális
- A standard modellfeltevéseket is felhasználva ez azt jelenti, hogy

$$\underline{\varepsilon} \mid \underline{X} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I})$$

- Ez láthatóan nem függ \underline{X} -től, így persze a hibák feltétel nélküli eloszlása is $\mathcal{N}(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I})$

Hibák normalitása

- $\underline{\varepsilon}$ feltételes eloszlása feltéve \underline{X} -et többváltozós normális
- A standard modellfeltevéseket is felhasználva ez azt jelenti, hogy

$$\underline{\varepsilon} \mid \underline{X} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I})$$

- Ez láthatóan nem függ \underline{X} -től, így persze a hibák feltétel nélküli eloszlása is $\mathcal{N}(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I})$

Hibák normalitása

- $\underline{\varepsilon}$ feltételes eloszlása feltéve \underline{X} -et többváltozós normális
- A standard modellfeltevéseket is felhasználva ez azt jelenti, hogy

$$\underline{\varepsilon} \mid \underline{X} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I})$$

- Ez láthatóan nem függ \underline{X} -től, így persze a hibák feltétel nélküli eloszlása is $\mathcal{N}(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I})$

Hibanormalitás és a becsült koefficiensek eloszlása

- Ha $\underline{\varepsilon}$ eloszlása normális, akkor $\left(\underline{X}^T \underline{X}\right)^{-1} \underline{X}^T \underline{\varepsilon}$ -é is az
- Ez azért nagyon jó hír, mert a normális eloszláshoz csak két dolgot kell tudnunk: várható érték-vektort és kovarianciamátrixot!
- Az viszont könnyen meghatározható (az egyszerűség kedvéért a $|\underline{X}|$ feltételt nem írjuk ki a következőkben)
- Várható érték: $\mathbb{E} \left[\left(\underline{X}^T \underline{X}\right)^{-1} \underline{X}^T \underline{\varepsilon} \right] = \left(\underline{X}^T \underline{X}\right)^{-1} \underline{X}^T \mathbb{E} \underline{\varepsilon} = \left(\underline{X}^T \underline{X}\right)^{-1} \underline{X}^T \mathbf{0} = \mathbf{0}$
- Kovarianciamátrix: $\mathbb{D}^2 \left[\left(\underline{X}^T \underline{X}\right)^{-1} \underline{X}^T \underline{\varepsilon} \right] = \left(\underline{X}^T \underline{X}\right)^{-1} \underline{X}^T \cdot \mathbb{D}^2 \underline{\varepsilon} \cdot \underline{X} \left(\underline{X}^T \underline{X}\right)^{-1} =$
 $\left(\underline{X}^T \underline{X}\right)^{-1} \underline{X}^T \cdot \sigma^2 \mathbf{I} \cdot \underline{X} \left(\underline{X}^T \underline{X}\right)^{-1} = \sigma^2 \left(\underline{X}^T \underline{X}\right)^{-1}$
- Összefoglalva: $\widehat{\beta}_{OLS} \sim \mathcal{N} \left(\beta, \sigma^2 \left(\underline{X}^T \underline{X}\right)^{-1} \right)$

Hibanormalitás és a becsült koefficiensek eloszlása

- Ha $\underline{\varepsilon}$ eloszlása normális, akkor $\left(\underline{X}^T \underline{X}\right)^{-1} \underline{X}^T \underline{\varepsilon}$ -é is az
- Ez azért nagyon jó hír, mert a normális eloszláshoz csak két dolgot kell tudnunk: várható érték-vektort és kovarianciamátrixot!
- Az viszont könnyen meghatározható (az egyszerűség kedvéért a $|\underline{X}|$ feltételt nem írjuk ki a következőkben)
- Várható érték: $\mathbb{E} \left[\left(\underline{X}^T \underline{X}\right)^{-1} \underline{X}^T \underline{\varepsilon} \right] = \left(\underline{X}^T \underline{X}\right)^{-1} \underline{X}^T \mathbb{E} \underline{\varepsilon} = \left(\underline{X}^T \underline{X}\right)^{-1} \underline{X}^T \mathbf{0} = \mathbf{0}$
- Kovarianciamátrix: $\mathbb{D}^2 \left[\left(\underline{X}^T \underline{X}\right)^{-1} \underline{X}^T \underline{\varepsilon} \right] = \left(\underline{X}^T \underline{X}\right)^{-1} \underline{X}^T \cdot \mathbb{D}^2 \underline{\varepsilon} \cdot \underline{X} \left(\underline{X}^T \underline{X}\right)^{-1} =$
 $\left(\underline{X}^T \underline{X}\right)^{-1} \underline{X}^T \cdot \sigma^2 \mathbf{I} \cdot \underline{X} \left(\underline{X}^T \underline{X}\right)^{-1} = \sigma^2 \left(\underline{X}^T \underline{X}\right)^{-1}$
- Összefoglalva: $\widehat{\beta}_{OLS} \sim \mathcal{N} \left(\beta, \sigma^2 \left(\underline{X}^T \underline{X}\right)^{-1} \right)$

Hibanormalitás és a becsült koefficiensek eloszlása

- Ha $\underline{\varepsilon}$ eloszlása normális, akkor $\left(\underline{X}^T \underline{X}\right)^{-1} \underline{X}^T \underline{\varepsilon}$ -é is az
- Ez azért nagyon jó hír, mert a normális eloszláshoz csak két dolgot kell tudnunk: várható érték-vektort és kovarianciamátrixot!
- Az viszont könnyen meghatározható (az egyszerűség kedvéért a $|\underline{X}|$ feltételt nem írjuk ki a következőkben)
- Várható érték: $\mathbb{E} \left[\left(\underline{X}^T \underline{X}\right)^{-1} \underline{X}^T \underline{\varepsilon} \right] = \left(\underline{X}^T \underline{X}\right)^{-1} \underline{X}^T \mathbb{E} \underline{\varepsilon} = \left(\underline{X}^T \underline{X}\right)^{-1} \underline{X}^T \mathbf{0} = \mathbf{0}$
- Kovarianciamátrix: $\mathbb{D}^2 \left[\left(\underline{X}^T \underline{X}\right)^{-1} \underline{X}^T \underline{\varepsilon} \right] = \left(\underline{X}^T \underline{X}\right)^{-1} \underline{X}^T \cdot \mathbb{D}^2 \underline{\varepsilon} \cdot \underline{X} \left(\underline{X}^T \underline{X}\right)^{-1} =$
 $\left(\underline{X}^T \underline{X}\right)^{-1} \underline{X}^T \cdot \sigma^2 \mathbf{I} \cdot \underline{X} \left(\underline{X}^T \underline{X}\right)^{-1} = \sigma^2 \left(\underline{X}^T \underline{X}\right)^{-1}$
- Összefoglalva: $\widehat{\beta}_{OLS} \sim \mathcal{N} \left(\beta, \sigma^2 \left(\underline{X}^T \underline{X}\right)^{-1} \right)$

Hibanormalitás és a becsült koeficiensek eloszlása

- Ha $\underline{\varepsilon}$ eloszlása normális, akkor $\left(\underline{X}^T \underline{X}\right)^{-1} \underline{X}^T \underline{\varepsilon}$ -é is az
- Ez azért nagyon jó hír, mert a normális eloszláshoz csak két dolgot kell tudnunk: várható érték-vektort és kovarianciamátrixot!
- Az viszont könnyen meghatározható (az egyszerűség kedvéért a $|\underline{X}$ feltételt nem írjuk ki a következőkben)
- Várható érték: $\mathbb{E} \left[\left(\underline{X}^T \underline{X}\right)^{-1} \underline{X}^T \underline{\varepsilon} \right] = \left(\underline{X}^T \underline{X}\right)^{-1} \underline{X}^T \mathbb{E} \underline{\varepsilon} = \left(\underline{X}^T \underline{X}\right)^{-1} \underline{X}^T \mathbf{0} = \mathbf{0}$
- Kovarianciamátrix: $\mathbb{D}^2 \left[\left(\underline{X}^T \underline{X}\right)^{-1} \underline{X}^T \underline{\varepsilon} \right] = \left(\underline{X}^T \underline{X}\right)^{-1} \underline{X}^T \cdot \mathbb{D}^2 \underline{\varepsilon} \cdot \underline{X} \left(\underline{X}^T \underline{X}\right)^{-1} =$
 $\left(\underline{X}^T \underline{X}\right)^{-1} \underline{X}^T \cdot \sigma^2 \mathbf{I} \cdot \underline{X} \left(\underline{X}^T \underline{X}\right)^{-1} = \sigma^2 \left(\underline{X}^T \underline{X}\right)^{-1}$
- Összefoglalva: $\widehat{\beta}_{\text{OLS}} \sim \mathcal{N} \left(\beta, \sigma^2 \left(\underline{X}^T \underline{X}\right)^{-1} \right)$

Hibanormalitás és a becsült koefficiensek eloszlása

- Ha $\underline{\varepsilon}$ eloszlása normális, akkor $\left(\underline{X}^T \underline{X}\right)^{-1} \underline{X}^T \underline{\varepsilon}$ -é is az
- Ez azért nagyon jó hír, mert a normális eloszláshoz csak két dolgot kell tudnunk: várható érték-vektort és kovarianciamátrixot!
- Az viszont könnyen meghatározható (az egyszerűség kedvéért a $|\underline{X}$ feltételt nem írjuk ki a következőkben)
- Várható érték: $\mathbb{E} \left[\left(\underline{X}^T \underline{X}\right)^{-1} \underline{X}^T \underline{\varepsilon} \right] = \left(\underline{X}^T \underline{X}\right)^{-1} \underline{X}^T \mathbb{E} \underline{\varepsilon} = \left(\underline{X}^T \underline{X}\right)^{-1} \underline{X}^T \mathbf{0} = \mathbf{0}$
- Kovarianciamátrix: $\mathbb{D}^2 \left[\left(\underline{X}^T \underline{X}\right)^{-1} \underline{X}^T \underline{\varepsilon} \right] = \left(\underline{X}^T \underline{X}\right)^{-1} \underline{X}^T \cdot \mathbb{D}^2 \underline{\varepsilon} \cdot \underline{X} \left(\underline{X}^T \underline{X}\right)^{-1} = \left(\underline{X}^T \underline{X}\right)^{-1} \underline{X}^T \cdot \sigma^2 \mathbf{I} \cdot \underline{X} \left(\underline{X}^T \underline{X}\right)^{-1} = \sigma^2 \left(\underline{X}^T \underline{X}\right)^{-1}$
- Összefoglalva: $\widehat{\beta_{\text{OLS}}} \sim \mathcal{N} \left(\beta, \sigma^2 \left(\underline{X}^T \underline{X}\right)^{-1} \right)$

Hibanormalitás és a becsült koefficiensek eloszlása

- Ha $\underline{\varepsilon}$ eloszlása normális, akkor $\left(\underline{X}^T \underline{X}\right)^{-1} \underline{X}^T \underline{\varepsilon}$ -é is az
- Ez azért nagyon jó hír, mert a normális eloszláshoz csak két dolgot kell tudnunk: várható érték-vektort és kovarianciamátrixot!
- Az viszont könnyen meghatározható (az egyszerűség kedvéért a $|\underline{X}|$ feltételt nem írjuk ki a következőkben)
- Várható érték: $\mathbb{E} \left[\left(\underline{X}^T \underline{X}\right)^{-1} \underline{X}^T \underline{\varepsilon} \right] = \left(\underline{X}^T \underline{X}\right)^{-1} \underline{X}^T \mathbb{E} \underline{\varepsilon} = \left(\underline{X}^T \underline{X}\right)^{-1} \underline{X}^T \mathbf{0} = \mathbf{0}$
- Kovarianciamátrix: $\mathbb{D}^2 \left[\left(\underline{X}^T \underline{X}\right)^{-1} \underline{X}^T \underline{\varepsilon} \right] = \left(\underline{X}^T \underline{X}\right)^{-1} \underline{X}^T \cdot \mathbb{D}^2 \underline{\varepsilon} \cdot \underline{X} \left(\underline{X}^T \underline{X}\right)^{-1} =$
 $\left(\underline{X}^T \underline{X}\right)^{-1} \underline{X}^T \cdot \sigma^2 \mathbf{I} \cdot \underline{X} \left(\underline{X}^T \underline{X}\right)^{-1} = \sigma^2 \left(\underline{X}^T \underline{X}\right)^{-1}$
- Összefoglalva: $\widehat{\beta}_{OLS} \sim \mathcal{N} \left(\beta, \sigma^2 \left(\underline{X}^T \underline{X}\right)^{-1} \right)$

Konfidenciaintervallum a paraméterekre

Hibanormalitás esetén, vagy aszimptotikusan könnyen szerkeszthető konfidenciaintervallum is, $1 - \alpha$ megbízhatósági szinten:

$$\hat{\beta}_i \pm t_{n-(k+1)}^{(1-\alpha/2)} \cdot \text{se}(\hat{\beta}_i)$$