Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Monterrey

Campus Puebla

Fundamentación de Robótica (Gpo 101)

Examen Final: Torque y Fuerzas

Alumno

Fernando Estrada Silva A01736094

Fecha de entrega
Martes 13 de Marzo 2024

Examen Final:Torque y Fuerzas

Objetivo: Obtener el modelo del torque de cada articulación, la matriz de inercia, el modelo de las fuerzas centrípetas y de Coriolis y el modelo del par gravitacional para cada una de las siguientes configuraciones de robots manipuladores:

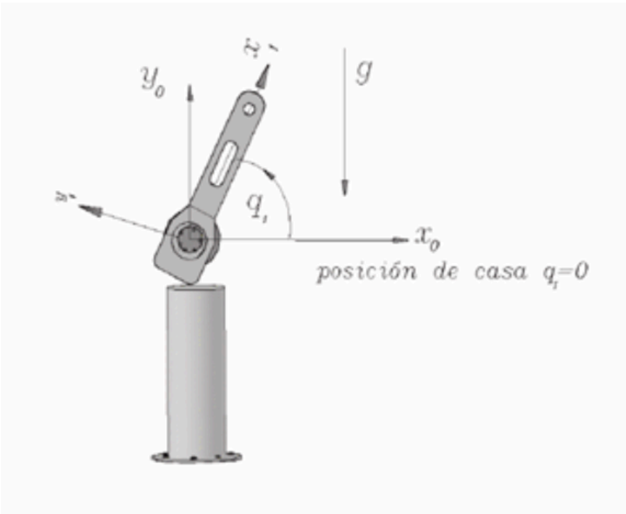


Figura 4.10 Péndulo robot.

Se tiene un robot rotacional de 1 grado de libertad (péndulo) con un sistema de referencia que ubica la altura en y0, por lo tanto la rotación se encuentra en base al eje z, siendo perpendicular a la pantalla.

Como en ejemplos anteriores, se tienen las variables simbólicas del sistemas.

```
%Declaración de variables simbólicas
syms th1(t)  t  %Angulos de cada articulación
syms th1p(t)
syms th1pp(t)
syms m1 m2 Ixx1 Iyy1 Izz1    %Masas y matrices de Inercia
 syms l1 lc1    %l=longitud de eslabones y lc=distancia al centro de masa de cada eslabón
syms pi g a cero
RP=[0];
```

Considerando la matriz de transformación homogénea, siendo una rotación sobre Z para un solo eslabón, se tiene:

```
%Articulación 1
%Posición de la articulación 1 respecto a 0
P(:,:,1)= [l1*cos(th1); l1*sin(th1);0];
%Matriz de rotación de la junta 1 respecto a 0....
R(:,:,1)= [cos(th1) -sin(th1)  0;
           sin(th1)  cos(th1)  0;
           0         0         1];
```

Posteriormente a obtener los jacobianos, se tiene un solo valor para energía cinética para el único grado de libertad.

```
%Eslabon1
V1_Total= V1+cross(W1,P01);
K1= (1/2*m1*(V1_Total))'*((V1_Total)) + (1/2*W1)'*(I1*W1);
disp('Energía Cinética en el Eslabón 1');
K1= simplify (K1);
pretty (K1)
```

La energía cinética considerando la altura paralela al eje y0 del sistema de referencia:

```
%Obtenemos las alturas respecto a la gravedad
 h1= P01(2); %Tomo la altura paralela al eje z
 U1=m1*g*h1;
```

Posteriormente, se obtienen las ecuaciones de movimiento para modelar la dinámica del robot. Por una parte, se obtiene el lagrangiano derivado con respecto a la primera coordenada generalizada de velocidad. Se agrega un vector con velocidades y aceleraciones en el vector Qd. Además, se obtienen las derivadas de la velocidad en la primera coordenada generalizada en un vector dQ.

```
 Qd=[th1p(t); th1pp(t)];

 %Obtenemos las derivadas de la velocidad en la primera coordenada
 %generalizada
  dQ1=[diff(diff(Lagrangiano,th1p), th1),... %Derivamos con respecto a la
primera velocidad generalizada th1p para las 3 posiciones articulaciones
           diff(diff(Lagrangiano,th1p), th1p)];%Derivamos con respecto a la
primera velocidad generalizada th1p para las 3 velocidades articulaciones

 %Definimos el torque 1
 t1= dQ1*Qd- diff(Lagrangiano, th1);
```

Por último, se obtiene el torque para el eslabón 1. Se calcula mediante el producto de dQ1 por Qd, restando la derivada del lagrangiano con respecto a la posición.

```
    %Definimos el torque 1
    t1= dQ1*Qd- diff(Lagrangiano, th1);
```

Del otro lado, se obtienen las fuerzas centrípetas y de coriolis del sistema.

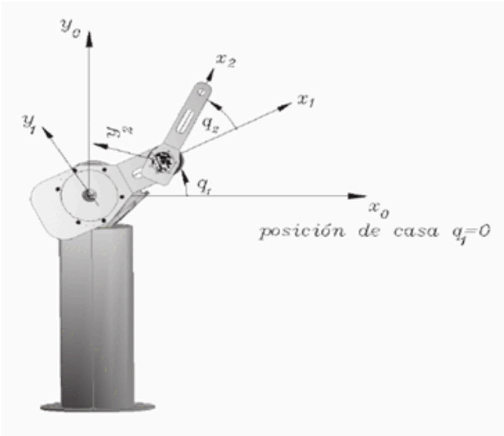
```
Mp=[diff(M(1,1),th1)]*Qp;%Se deriva parcialmente en el tiempo respecto a todas las variables
%Definimos la energía cinética en su forma matricial
k=1/2*transpose(Qp)*M*Qp;
%Definimos dk
dk=[diff(k, th1)];
%Fuerzas centrípetas y de Coriolis
C= Mp*Qp-dk;
```

Finalmente se obtiene el par gravitacional para el eslabón.

```
%Par Gravitacional
    %se sustituyen las velocidades y acele raciones por 0
    r=cero;
    a1=subs(t1, th1p, r);

    %Torque gravitacional en el motor 1
    G1=a1;

   % Vector de par gravitacional

   G=[G1];
```

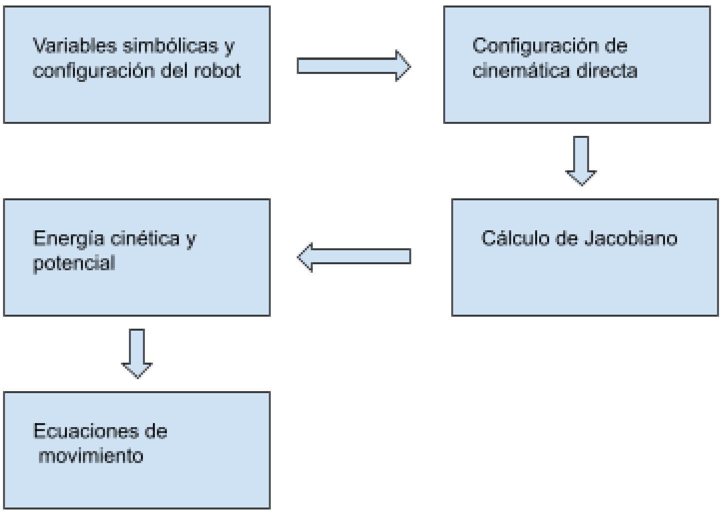
El proceso detallado para obtener cada uno de los componentes anteriores se describe dentro del segundo ejemplo (Robot rotacional de 2 grados de libertad).

Análisis para Robot de 2 grados de libertad



Como se ha estado analizando, se trata de un robot rotacional de 2 grados de libertad. Se ha planteado un sistema de referencia como el presente en el diagrama, el cual significa que la altura del robot se encuentra posicionada sobre el eje *Y0*. Dada esta configuración, será más sencillo obtener el modelo de energía del sistema y posteriormente las ecuaciones de movimiento.

Con el fin de simplificar el proceso obtenido hasta este punto, en el siguiente diagrama se ilustra lo obtenido:



Variables simbólicas y configuración del robot: Se implementan variables simbólicas que se emplean dentro del programa, siendo ángulos para cada articulación los cuales varían en el tiempo, su primera y segunda derivada respectivamente, la masa del eslabón y su matriz de inercia, longitud de eslabones y la distancia al centro de masa de cada eslabón. Dado que es un robot rotacional, se setea la configuración en RP = [0 0].

```
syms th1(t) th2(t) t  %Angulos de cada articulación
syms th1p(t) th2p(t)
syms th1pp(t) th2pp(t)
syms m1 m2 Ixx1 Iyy1 Izz1 Ixx2 Iyy2 Izz2  %Masas y matrices de Inercia
syms l1 lc1 l2 lc2  %l=longitud de eslabones y lc=distancia al centro de masa
de cada eslabón
syms pi g a cero

RP=[0 0];
```

Configuración de Cinemática Directa: En esta sección se calculan las matrices de transformación homogénea dependiendo de cada articulación. Considerando el marco de referencia planteado, se tiene que la rotación de las articulaciones se encuentra sobre el ejeZ, por lo que se incluye su matriz de rotación.

```
%Articulación 1
%Posición de la articulación 1 respecto a 0
P(:,:,1)= [l1*cos(th1); l1*sin(th1);0];
%Matriz de rotación de la junta 1 respecto a 0....
R(:,:,1)= [cos(th1) -sin(th1)  0;
          sin(th1)  cos(th1)  0;
          0         0         1];
%Articulación 2
%Posición de la articulación 1 respecto a 0
P(:,:,2)= [l2*cos(th2); l2*sin(th2);0];
%Matriz de rotación de la junta 1 respecto a 0....
R(:,:,2)= [cos(th2) -sin(th2)  0;
          sin(th2)  cos(th2)  0;
          0         0         1];
```

Cálculo del Jacobiano lineal y angular: Una vez que se obtienen las matrices de transformación homogénea, mediante los jacobianos se obtienen los cambios en las variables de las articulaciones y como es que afectan a las velocidades lineales y angulares en el movimiento del robot. En este caso, el jacobiano representa una relación entre 2 sistemas de referencia.

```
%Calculamos el jacobiano lineal de forma analítica
Jv_a(:,GDL)=PO(:,:,GDL);
Jw_a(:,GDL)=PO(:,:,GDL);
```

```
%Obtenemos SubMatrices de Jacobianos
Jv_a= simplify (Jv_a);
Jw_a= simplify (Jw_a);

Jac= [Jv_a;
     Jw_a];
Jacobiano= simplify(Jac);
```

Energía cinética: Para este sistema, la energía cinética se obtiene sumando cada energía cinética para cada eslabón del robot. Utilizando la definición estándar de la energía cinética, se tiene que esta dependerá de la velocidad lineal del centro de masa de un eslabón, su velocidad angular y la matriz de inercia. La matriz de inercia representa la forma en que se distribuye la masa alrededor de los ejes de rotación. En términos generales, la energía cinética se obtiene sumando la velocidad lineal del centro de masa con la velocidad debida a la rotación de cada eslabón.

```
%Eslabon1
V1_Total= V1+cross(W1,P01);
K1= (1/2*m1*(V1_Total))'*((V1_Total)) + (1/2*W1)'*(I1*W1);
disp('Energía Cinética en el Eslabón 1');
K1= simplify (K1);
pretty (K1)
%Eslabon 2
V2_Total= V+cross(W,P12);
K2= (1/2*m2*(V2_Total))'*((V2_Total)) + (1/2*W)'*(I2*W);
disp('Energía Cinética en el Eslabón 2');
K2= simplify (K2);
pretty (K2)
```

La energía cinética del sistema se obtiene sumando ambas energías de los eslabones:

```
K_Total= simplify (K1+K2)
```

Energía Potencial: Siendo similar al proceso anterior, la energía potencial se obtiene a partir del producto de la altura, gravedad y masa del eslabón. Como se mencionó anteriormente, el eje *y0* representa la altura del sistema, por lo que se obtiene la siguiente configuración:

```
%Obtenemos las alturas respecto a la gravedad
```

```
h1= P01(2); %Tomo la altura paralela al eje y
h2= P12(2); %Tomo la altura paralela al eje y
```

Calculando la energía potencial para cada eslabón:

```
U1=m1*g*h1; %Eslabon 1
U2=m2*g*h2; %Eslabon 2
%Calculamos la energía potencial total
U_Total= U1 + U2
```

Lagrangiano: El lagrangiano se obtiene a partir de la resta de la energía cinética total menos la energía potencial total del sistema. Esta variable permite modelar la dinámica del robot, dando como resultado un modelo en que se muestra como los ángulos de las articulaciones evolucionan conforme pasa el tiempo.

```
Lagrangiano= simplify (K_Total-U_Total)
pretty (Lagrangiano)
```

Ecuaciones de movimiento: Obteniendo la derivada de cada ángulo con respecto al tiempo (velocidad y aceleración) y la derivada de la velocidad en la primera coordenada generalizada, se obtiene el torque encontrado en el primer eslabón.

```
Qd=[th1p(t); th2p(t); th1pp(t); th2pp(t)];
%Obtenemos las derivadas de la velocidad en la primera coordenada
%generalizada
dQ1=[diff(diff(Lagrangiano,th1p),th1),diff(diff(Lagrangiano,th1p),   th2),...
diff(diff(Lagrangiano,th1p),th1p),diff(diff(Lagrangiano,th1p), th2p)];

t1= dQ1*Qd- diff(Lagrangiano, th1);
```

El proceso se repite para el segundo eslabón.

Una vez que se han obtenido los toques para ambos eslabones, se genera el modelo dinámico en forma matricial.

```
%Matriz de Inercia
%Extraemos coeficientes de aceleraciones
M=[diff(t1, th1pp), diff(t1, th2pp);...
  diff(t2, th1pp), diff(t2, th2pp)];
```

```
rank (M);
M=M(t);
```

Para representar los efectos de la aceleración centrípeta y de coriolis en las articulaciones del robot se considera:

$$C(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}} \;=\; \dot{M}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}} - \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{q}}\left[\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^T M(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}\right]$$

Esta ecuación representa en términos generales el producto de la matriz de inercia con la matriz de velocidades articulares menos la derivada con respecto al tiempo de la energía cinética del sistema. Se obtiene como resultado las fuerzas centrípetas y de Coriolis. La fuerza de Coriolis es aquella que se observa en un sistema de referencia en rotación cuando un cuerpo se encuentra en movimiento respecto de dicho sistema de referencia.

```
%Definimos la energía cinética en su forma matricial
k=1/2*transpose(Qp)*M*Qp;
%Definimos dk
dk=[diff(k, th1); diff(k, th2)];
%Fuerzas centrípetas y de Coriolis
disp('Fuerzas centrípetas y de Coriolis =');
C= Mp*Qp-dk;
```

Finalmente, el par gravitacional representa el toque que ejerce la fuerza de gravedad sobre las masas del sistema.

```
%Par Gravitacional
%se sustituyen las velocidades y aceleraciones por 0
r=cero;
a1=subs(t1, th1p, r);
a2=subs(a1, th2p, r);
a3=subs(a2, th1pp,r);
a4=subs(a3, th2pp,r);
%Torque gravitacional en el motor 1
G1=a4;
b1=subs(t2, th1p, r);
b2=subs(b1, th2p, r);
b3=subs(b2, th1pp,r);
b4=subs(b3, th2pp,r);
%Torque gravitacional en el motor 2
```

```
G2=b4;
% Vector de par gravitacional
disp('Modelo de par gravitacional =');
G=[G1;G2];
```

Resultados

Energía cinética

```
Energía Cinética en el Eslabón 1
               2            2             ______           __           2            2
Izz1 |th1p(t)|     |th1p(t)|  cos(th1(t) - th1(t)) m1 (l1 |lc1|  + 2 lc1 |l1| ) (2 l1 + lc1)
--------------- + -----------------------------------------------------------------------
       2                                        8 l1 lc1
```

```
Energía Cinética en el Eslabón 2
/
| __ /                                                         lc2 sin(th2(t)) #1 \
| m2 | th1p(t) (l1 sin(th1(t)) + l2 sin(#4)) + l2 sin(#4) th2p(t) + ------------------ |
\    \                                                                  2          /

   /                                                        ______  ___    \ \              /  _______   _______ \
   |  _______           __            ______  __   _______           __  sin(th2(t)) lc2 #2 | |              | th1p(t)   th2p(t) |
   | th1p(t) (sin(#3) l2 + sin(th1(t)) l1) + th2p(t) sin(#3) l2 + ------------------ | |/2 + Izz2 #1 | ------- + ------- |
   \                                                                  2          / /              \    2         2    /

     /
     | __ /                                                          lc2 cos(th2(t)) #1 \
   + | m2 | th1p(t) (l1 cos(th1(t)) + l2 cos(#4)) + l2 cos(#4) th2p(t) + ------------------ |
     \    \                                                                  2          /
```

Energía potencial total del sistema

```
U_Total =

(g*lc1*m1*sin(th1(t)))/2 + (g*lc2*m2*sin(th2(t)))/2
```

Modelo de energía del sistema

```
H =

(Izz1*abs(th1p(t))^2)/2 + (conj(m2)*(th1p(t)*(l1*sin(th1(t)) + l2*sin(th1(t) + th2(t))) + l2*sin(th1(t) + th2(t))*th2p(t) +

           /
Izz1 #5    | __ /                                                         lc2 sin(th2(t)) #1 \
------- + | m2 | th1p(t) (l1 sin(th1(t)) + l2 sin(#4)) + l2 sin(#4) th2p(t) + ------------------ |
   2       \    \                                                                  2          /

   /                                                        ______  ___    \ \              /  _______   _______ \
   |  _______           __            ______  __   _______           __  sin(th2(t)) lc2 #2 | |              | th1p(t)   th2p(t) |
   | th1p(t) (sin(#3) l2 + sin(th1(t)) l1) + th2p(t) sin(#3) l2 + ------------------ | |/2 + Izz2 #1 | ------- + ------- |
   \                                                                  2          / /              \    2         2    /

     /
     | __ /                                                          lc2 cos(th2(t)) #1 \
   + | m2 | th1p(t) (l1 cos(th1(t)) + l2 cos(#4)) + l2 cos(#4) th2p(t) + ------------------ |
     \    \                                                                  2          /
```

Fuerza centrípeta y de Coriolis

```
Fuerzas centrípetas y de Coriolis =

C(t) =

th2p(t)*(th1p(t)*((conj(m2)*(cos(conj(th1(t)) + conj(th2(t)))*conj(l2) + cos(conj(th1(t)))*conj(l1))*((lc2*sin(th2(t)))/2 + l2*sin(th1(t) +


/                     / th2p(t) #4   #2 \           / th1p(t) #4   th2p(t) #3 \                                                \
| th2p(t) #1 - th1p(t) | ---------- - -- | - th2p(t) | ---------- - ---------- | - th1p(t) (#2 + th2p(t) (#10 - #11 + #9 - #8)) |
|                     \     2         2 /           \     2            2      /                                                |
|                                                                                                                               |
|                              / th1p(t) (#10 - #11 + #9 - #8)  th2p(t) #5 \                        th1p(t) th2p(t) #5         |
|         th1p(t) #1 + th1p(t) | ---------------------------- + ---------- | - th1p(t) th2p(t) #3 + ------------------         |
\                              \               2                     2     /                                 2                 /
```

Modelo de par gravitacional

```
Modelo de par gravitacional =
-- --           / __                   __                          __                   __
|  |            | m2 (#31 + #32) #25   m2 #41 (#18 + #17 + #16)   m2 (#28 + #29) #27   m2 #37 (#22 + #21 + #20)
|  |  #5 - cero | ------------------ + ------------------------ - ------------------ - ------------------------
|  |            \         2                       2                       2                      2
-- --

     __                                      __                                      __                   __                    \
     m2 (cero #37 + #36) (#31 + #32 + #24)   m2 (cero #41 + #40) (#28 + #29 + #26)   m2 (#18 + #17) #14   m2 (#22 + #21) #15 |
   - ------------------------------------- + ------------------------------------- - ------------------ + ------------------ |
                       2                                       2                            2                    2          /

          /                         __          __                        __          __                        \
          |                         m2 #6 #15   m2 #8 (#28 + #29 + #26)   m2 #7 #14   m2 #9 (#31 + #32 + #24) |
   - cero | #12 + #10 - #13 - #11 + --------- + ----------------------- - --------- - ----------------------- |
          \                             2                  2                  2                  2             /
```