# **Gebze Technical University Computer Engineering**

**CSE 222 - 2018 Spring** 

**HOMEWORK 6 REPORT** 

FERHAT ŞİRİN 161044080

Course Assistant: Fatma Nur Esirci

#### 1 Worst RedBlack Tree

#### 1.1 Problem Solution Approach

```
public class RedBlackTree<E extends Comparable<E>> extends
    BinarySearchTreeWithRotate<E>{
```

RedBlackTree bir binary tree ve aynı zamanda bir search tree olduğu için BinarySearchTreeWithRotate sınıfını extend eder ve bu sınıfı kullanmak için comparable edilebilen bir türde nesne ile kullanmak zorunludur. RedBlackTreede agacın dengeli halde olması için ekleme sırasında gerekli rotate işlemleride BinarySearchTreeWithRotate sınıfından gelen methodlar vardımıyla yapılır.

```
public boolean add(E item) {
  if (root == null) {
    root = new RedBlackNode<E>(item);
    ((RedBlackNode<E>) root).isRed = false; // root is black.
    return true;
} else {
    root = add((RedBlackNode<E>) root, item);
    ((RedBlackNode<E>) root).isRed = false; // root is always black.
    return addReturn;
}
```

Public add methodu ile dışarıdan eklemek istenilen değer eklenilir. RedBlack Tree yapısı binary search tree olduğu için recursive halde ekleme yapmak daha kolaydır. Bu yüzden önce root a bakılır eğer root boş ise ilk ekleme yapılır fakat root dolu ise rootun dallarından birine ekleme yapılması gerektiği için recursive add methodu çağrılır.

```
private Node<E> add(RedBlackNode<E> localRoot, E item) {
 if (item.compareTo(localRoot.data) == 0) {
   // item already in the tree.
   addReturn = false;
   return localRoot;
 } else if (item.compareTo(localRoot.data) < 0) {</pre>
   // item < localRoot.data.</pre>
   if (localRoot.left == null) {
     // Create new left child.
     localRoot.left = new RedBlackNode<E>(item);
     addReturn = true;
     return localRoot:
   } else { // Need to search.
     // Check for two red children, swap colors if found.
     moveBlackDown(localRoot);
     // Recursively add on the left.
     localRoot.left = add((RedBlackNode<E>) localRoot.left, item);
     // See whether the left child is now red
     if (((RedBlackNode<E>) localRoot.left).isRed) {
       if (localRoot.left.left != null && ((RedBlackNode<E>)
localRoot.left.left).isRed) {
```

```
// Left-left grandchild is also red.
         // Single rotation is necessary.
         ((RedBlackNode<E>) localRoot.left).isRed = false;
         localRoot.isRed = true;
         return rotateRight(localRoot);
       } else if (localRoot.left.right != null && ((RedBlackNode<E>)
localRoot.left.right).isRed) {
         // Left-right grandchild is also red.
         // Double rotation is necessary.
         localRoot.left = rotateLeft(localRoot.left);
         ((RedBlackNode<E>) localRoot.left).isRed = false;
         localRoot.isRed = true;
         return rotateRight(localRoot);
       }
     return localRoot;
   }
 } else {
   if (localRoot.right == null) {
     // Create new left child.
     localRoot.right = new RedBlackNode<E>(item);
     addReturn = true;
     return localRoot;
   } else { // Need to search.
     // Check for two red children, swap colors if found.
     moveBlackDown(localRoot);
     // Recursively add on the left.
     localRoot.right = add((RedBlackNode<E>) localRoot.right, item);
     // See whether the left child is now red
     if (((RedBlackNode<E>) localRoot.right).isRed) {
       if (localRoot.right.right != null && ((RedBlackNode<E>)
localRoot.right.right).isRed) {
         // Left-left grandchild is also red.
         // Single rotation is necessary.
         ((RedBlackNode<E>) localRoot.right).isRed = false;
         localRoot.isRed = true;
         return rotateLeft(localRoot);
       } else if (localRoot.right.left != null && ((RedBlackNode<E>)
localRoot.right.left).isRed) {
         // Left-right grandchild is also red.
         // Double rotation is necessary.
         localRoot.right = rotateLeft(localRoot.right);
         ((RedBlackNode<E>) localRoot.right).isRed = false;
         localRoot.isRed = true;
         return rotateRight(localRoot);
       }
     return localRoot;
   }
```

Recursive add methodu ilk olarak normal bir binary search tree gibi elemanının karşılaştırıp büyük ise sağa küçük ise sola eklenmesini sağlar. Eklenilecek yer belirlendikten sonra o bölge boş ise eleman red olarak işaretlenip eklenir. Eğer dolu ise recursive method yeniden çağrılır ve uygun alana gelinceye kadar bu devam eder. Bu süreç içinde eğer iki child nodu red olarak işaretlenmiş tree varsa 2 child node black, root node ise red olarak işaretlenir bu sayede red nodun sadece siyah

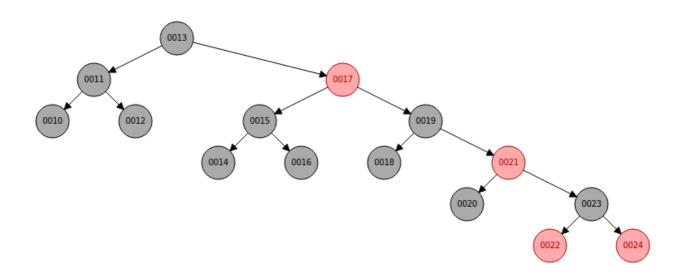
child nodları olması sağlanır ve RedBlack Tree kuralı bozulmamış olur. Eklenilecek alan bulunduğunda ise eleman ilk olarak red olarak işaretlenip eklenir. Ekleme bittikten sonra tekrar geriye dönüşte arka arkaya red node olup olmadığına bakılır eğer var ise rotate yapılarak RedBlack Tree agaç özelliği korunur.

#### 1.2 Test Cases

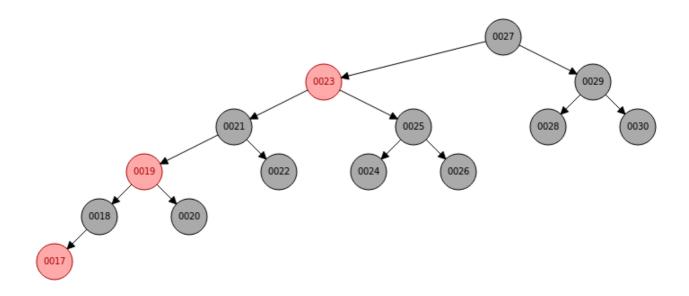
En kötü durum testi için eklenicek olan elemanlar sıralı olarak verilmiştir. Bu sayede olabilecek tüm eklemelerde rotate yaptırılmıştır.

Test durumşarı RedBlackTreeTest classında main metodundadır.

Test 1 Tree:



Test 2 Tree:



# 1.3 Running Commands and Results

Test 1:

Test 2:

# 2 BinarySearch method

#### 2.1 Problem Solution Approach

```
public class BTree<E extends Comparable<E>> implements SearchTree<E>
```

B tree bir search tree olduğu için SearchTree sınıfını implements eder ve bu interface de tanımlı olan add find remove gibi methodları implement eder. B treeyi comparable edilebilen türde bir nesne ile kullanmak zorunludur. B treede amaç büyük bir veriyi diskten tek seferde çekip kullanmaktır. Bu yüzden B tree nodeları birden fazla değer barındırır. B treede oluşturulurken order değeri belirtilir ve her bir node en fazla order değeri kadar child node sahip olabilir ve her bir node order ın bir eksiği kadar elemana sahip olabilir. Bu düzenin sağlanması için B treede split işlemleri vapılır eğer bir node dolduğunda node parçalara ayrılır.

```
public boolean add(E item) {
 if (order == 0) {
   throw new IllegalStateException("Must set order first");
 if (root == null) {
   root = new Node<E>(order);
   root.data[0] = item;
   root.size = 1;
   System.out.println("Adding "+item+" to tree");
   return true;
 newChild = null;
 boolean result = insert(root, item);
 if (newChild != null) {
   Node<E> newRoot = new Node<E>(order);
   newRoot.child[0] = root;
   newRoot.child[1] = newChild;
   newRoot.data[0] = newParent;
   newRoot.size = 1;
   root = newRoot;
 }
 return result;
}
Add methodu ile B tree de ekleme yapılır. İlk olarak root node bakılır
bos ise eklenir. Her node order -1 kadar eleman tutabilir. Eğer root
dolu ise insert methodu çağrılır ve ekleme insert metodunda yapılır.
private boolean insert(Node<E> root, E item) {
 int index = binarySearch(item, root.data, 0, root.size-1);
 if (index != root.size && item.compareTo(root.data[index]) == 0) {
   return false;
 if (root.child[index] == null) {
   System.out.println("Adding "+item+" to tree");
   if (root.size < order - 1) {</pre>
```

insertIntoNode(root, index, item, null);

```
newChild = null;
   } else {
     splitNode(root, index, item, null);
   }
   return true;
 } else {
   boolean result = insert(root.child[index], item);
   if (newChild != null) {
     if (root.size < order - 1) {</pre>
       insertIntoNode(root, index, newParent, newChild);
       newChild = null;
     } else {
       splitNode(root, index, newParent, newChild);
   }
   return result;
 }
}
```

Recursive insert methodu ilk olarak binarySearch methodu çağrılıp bu elemanın eklemek için uygun olan yerin indexi istenir. B tree de nodeların elemanları sıralı olduğu için eklenilecek eleman doğru sırada olmalıdır. Eğer döndürülen index te aynı eleman varsa tekrar ekleme yapılmaz false döndürülür fakat yer boş ise ekleme yapılır. Eğer yer dolu fakat eleman farklı ise bu durumda child nodelara geçilir ve aynı işlem recursive olarak yapılır. Eklemeden önce node tamamı dolu ise node split yapılarak parçalanır ve ekleme öyle yapılır.

```
private int binarySearch(E item,E[] data,int start,int end){
   if(start > end) {
      return start;
   }
   int middle =(start+end)/2;
   if(data[middle] ==null){
      return middle;
   }
   int comp =item.compareTo(data[middle]);
   if(comp < 0){
      return binarySearch(item,data,start,middle-1);
   }
   else if(comp > 0){
      return binarySearch(item,data,middle+1,end);
   }
   else {
      return middle;
   }
}
```

Binary search tree ile elemanın nereye eklenmesi gerektiğine karar verilir. Data arrayı bir nodun içindeki veridir. İlk olarak ortanca eleman ile eklenicek eleman karşılaştırılır eğer küçükse sol tarafa büyükse sağ tarafa recursive olarak gidilir. Eğer ortance değer boş çıkarsa o index döndürülür eğer başlangıç değeri arrayın bitiş değerini geçerse o durumda başlangıç değeri döndürülür bu durum node un child nodelarına geçilmesi gerektiği anlamına gelir. Eğer eleman varsa elemanın olduğu index döndürülür fakat aynı eleman tekrar eklenmez.

```
private void splitNode(Node<E> node, int index, E item, Node<E> child)
 // Create new child
 newChild = new Node<E>(order);
 // Determine number of items to move
 int numToMove = (order - 1) - ((order - 1) / 2);
 // If insertion point is to the right half, move one less item
 if (index > (order - 1) / 2) {
   numToMove - - ;
 // Move items and their children
 System.arraycopy(node.data, order - numToMove - 1,
     newChild.data, 0, numToMove);
 System.arraycopy(node.child, order - numToMove,
     newChild.child, 1, numToMove);
 node.size = order - numToMove - 1;
 newChild.size = numToMove;
 // Insert new item
 if (index == ((order - 1) / 2)) { // Insert into middle
   newParent = item;
   newChild.child[0] = child;
 } else {
   if (index < ((order - 1) / 2)) { // Insert into the left
     insertIntoNode(node, index, item, child);
   } else {
     insertIntoNode(newChild, index - ((order - 1) / 2) - 1,
         item, child);
   }
   // The rightmost item of the node is the new parent
   newParent = node.data[node.size - 1];
   // Its child is the left child of the split-off node
   newChild.child[0] = node.child[node.size];
   node.size--;
 // Remove contents and references to moved items
 for (int i = node.size; i < node.data.length; i++) {</pre>
   node.data[i] = null;
   node.child[i + 1] = null;
}
```

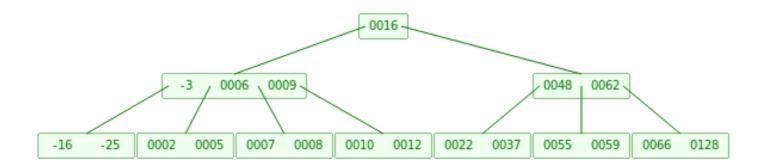
Eğer eklenmek istenen node dolu ise o node split yapılarak parçalara ayrılır. Her bir node en fazla order -1 kadar eleman tutabilir. Node yarısı yeni bir node aktalarılır. Ortadaki eleman oluşan nodun yeni parent nodu olur. Eğer önceden bir parent node var ise orta eleman o parent node eklenir. Ekleme işlemi sıraları olarak yapılır bu sayede her bir node datası sıralı bir şekilde korunur.

# 2.2 Test Cases

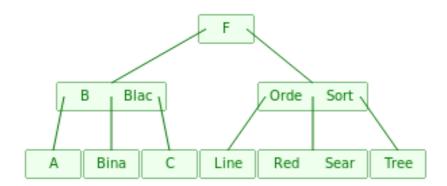
B tree de 2 ayrı test yazılmıştır. Test 1:5 order integer Test 2:3 order string değerleri ile yazılmıştır.

Test durumları BtreeTest sınıfının main methodundadır.

Test 1 sonuç:



#### Test 2 sonuç:



# 2.3 Running Commands and Results

#### Test 1:

#### Test 2:

# 3 Project 9.5 in book

#### 3.1 Problem Solution Approach

```
public class AVLTree<E extends Comparable<E>>
    extends BinarySearchTreeWithRotate<E> {
```

AVL tree bir binary search tree olduğu için BinarySearchTreeWithRotate sınıfını extend eder ve bu sayede hem binary ve search özelliğini korurken aynı zamanda kendini dengeli halde tutabilir. AVL treeyi comparable edilebilen türde bir nesne ile kullanmak zorunludur. AVL treede amaç ekleme sırası ne olursa olsun eklenen elemenlar agaçta dengeli bir şekilde eklenecek. Bu yüzden AVL tree nodeları balance değeri barındırır. AVL tree de balance sağ agacın uzunluğundan sol ağacın uzunluğu çıkarılarak bulunur ve bu sayı 1 değerini geçmemelidir. Balance değeri 2 olduğunda rebalance methodu ile agac dengeli duruma getirilir.

```
private AVLNode<E> add(AVLNode<E> localRoot, E item) {
 if (localRoot == null) {
   addReturn = true;
   increase = true;
   return new AVLNode<E>(item);
 if (item.compareTo(localRoot.data) == 0) {
   // Item is already in the tree.
   increase = false;
   addReturn = false;
   return localRoot;
 else if (item.compareTo(localRoot.data) < 0) {</pre>
   // item < data
   localRoot.left = add((AVLNode<E>) localRoot.left, item);
   if (increase) {
     decrementBalance(localRoot);
     if (localRoot.balance < AVLNode.LEFT HEAVY) {</pre>
       increase = false;
       return rebalanceLeft(localRoot);
     }
   }
   return localRoot; // Rebalance not needed.
 else { // item > data
   localRoot.right =add((AVLNode<E>) localRoot.right, item);
   if (increase) {
     incrementBalance(localRoot);
     if (localRoot.balance > AVLNode.RIGHT HEAVY) {
       increase = false;
       return rebalanceRight(localRoot);
     }
   return localRoot; // Rebalance not needed.
 }
}
```

Add methodu recursive yapıdadır. Eklenmek istenen eleman ilk olarak normal bir binary search treede nasıl ekleniyorsa o şekilde uygun yer bulunarak eklenir. Eğer küçükse sol, büyükse sağ agaca bakılarak uygun yer bulunur ve eğer sol tarafa eklendiyse üsteki nodun balance değeri düşürülür eğer sağ tarafa eklenmişse üsteki nodun balance değeri arttırılır. Sol taraf eğer -2 ve aşağı bir değere ulaşırsa rebalance işlemi yapılır bu değer sağ taraf için 2 ve üstüdür. Agacın bir bölgesinde bozulma varsa direk düzeltilir ve agacın sürekli dengeli olması sağlanır.

```
private AVLNode<E> rebalanceLeft(AVLNode<E> localRoot) {
 System.out.println("Rebalancing left part of node "+localRoot.data);
 // Obtain reference to left child.
 AVLNode<E> leftChild = (AVLNode<E>) localRoot.left;
 // See whether left-right heavy.
 if (leftChild.balance > AVLNode.BALANCED) {
   // Obtain reference to left-right child.
   AVLNode<E> leftRightChild = (AVLNode<E>) leftChild.right;
   // Adjust the balances to be their new values after
   // the rotations are performed.
   if (leftRightChild.balance < AVLNode.BALANCED) {</pre>
     leftChild.balance = AVLNode.LEFT HEAVY;
     leftRightChild.balance = AVLNode.BALANCED;
     localRoot.balance = AVLNode.BALANCED;
   } else if (leftRightChild.balance > AVLNode.BALANCED) {
     leftChild.balance = AVLNode.BALANCED;
     leftRightChild.balance = AVLNode.BALANCED;
     localRoot.balance = AVLNode.RIGHT HEAVY;
   } else {
     leftChild.balance = AVLNode.BALANCED;
     localRoot.balance = AVLNode.BALANCED;
   }
   // Perform left rotation.
   localRoot.left = rotateLeft(leftChild);
 } else { //Left-Left case
   // In this case the leftChild (the new root)
   // and the root (new right child) will both be balanced
   // after the rotation.
   leftChild.balance = AVLNode.BALANCED;
   localRoot.balance = AVLNode.BALANCED;
 // Now rotate the local root right.
 return (AVLNode<E>) rotateRight(localRoot);
}
```

RebalanceLeft ve RebalanceRight methodları ile agacın sol ve sağ tarıfının daha fazla gelmesi durumu düzeltilir. Eğer agacın sol tarafında sağa göre 2 veya daha fazla eleman varsa agaç sağa döndürülür ve balance değerinin sıfırlanması sağlanır. Agaç sağa döndürülmeden önce agacın sağ child nodunun balance değerine bakılır eğer o bölgede bir bozukluk var ise (Left-Right durumu ) önce sağ agaç sola döndürülür sonra parent node sağa döndürülür ve agacın dengesi sağlanır.

```
private AVLNode<E> remove(AVLNode<E> localRoot, E item) {
 if (localRoot == null) {
   // item is not in the tree.
   deleteReturn = null;
   return localRoot;
 }
 // Search for item to delete.
 int compResult = item.compareTo(localRoot.data);
 if (compResult < 0) {</pre>
   // item is smaller than localRoot.data.
   localRoot.left = remove((AVLNode<E>)localRoot.left, item);
   if (decrease) {
     findBalance(localRoot);
     if(localRoot.balance != AVLNode.BALANCED){
       decrease =false;
     if (localRoot.balance > AVLNode.RIGHT HEAVY) {
       localRoot =rebalanceRight(localRoot);
       findBalance(localRoot);
       return localRoot;
     }
   return localRoot;
 } else if (compResult > 0) {
   // item is larger than localRoot.data.
   localRoot.right = remove((AVLNode<E>)localRoot.right, item);
   if (decrease) {
     findBalance(localRoot);
     if(localRoot.balance != AVLNode.BALANCED){
       decrease =false;
     if (localRoot.balance < AVLNode.LEFT HEAVY) {
       localRoot =rebalanceLeft(localRoot);
       findBalance(localRoot):
       return localRoot;
     }
   }
   return localRoot;
 } else {
   // item is at local root.
   decrease =true;
   deleteReturn = localRoot.data;
   if (localRoot.left == null) {
     // If there is no left child, return right child
     // which can also be null.
     return (AVLNode<E>)localRoot.right;
   } else if (localRoot.right == null) {
     // If there is no right child, return left child.
     return (AVLNode<E>)localRoot.left;
   } else {
     // Node being deleted has 2 children, replace the data
     // with inorder predecessor.
     if (localRoot.left.right == null) {
       // The left child has no right child.
```

```
// Replace the data with the data in the
       // left child.
       localRoot.data = localRoot.left.data;
       // Replace the left child with its left child.
       localRoot.left = localRoot.left.left;
     } else {
       // Search for the inorder predecessor (ip) and
       // replace deleted node's data with ip.
       localRoot.data =findLargestChild((AVLNode<E>)localRoot.left);
     findBalance(localRoot);
     if(localRoot.left !=null && ((AVLNode<E>)localRoot.left).balance
< AVLNode. LEFT HEAVY)
       localRoot.left =rebalanceLeft((AVLNode<E>)localRoot.left);
     return localRoot;
   }
 }
```

Remove methodu binary search tree için yapılan methoda benzer bir yapıdadır. Çıkarılması istenen eleman önce recursive olarak aranır ve eğer var ise çıkarılır. Elemanın çıkarılması durumunda yerine gelmesi gereken eleman belirlenir. Eğer sağ nodu yok ise sol node direk gelir veya sol node yok ise sağ node gelir eğer her ikisi var ise sol nodun en büyük elemanı bulunarak çıkarılan yere koyulur. Çıkarma işlemi tamamdanlıktan sonra en önemli kısım ağacın dengeli yapısı bozulmamalıdır. Bunun için çıkarılan node eğer dengeyi değiştirmiş ise parent nodun balance değeri bir arttılır veya azaltılır. Bu değişiklik sonucu balance değerleri tekrar kontrol edilir eğer 2 değerine ulaşılmışsa rebalance işlemi yapılarak agacın dengesi korunur.

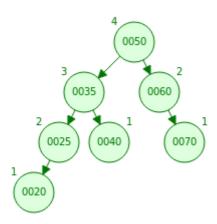
```
private void isAVL(AVLNode<E> node){
  if(node !=null) {
    if(node.balance <=-2 || node.balance >=2){
       isAVL =false;
    }
    findBalance((AVLNode<E>)node.right);
    findBalance((AVLNode<E>)node.left);
  }
}
```

isAvl ile binary treeden aldığımız agacın avl tree'ye uygun olup olmadığına bakarız. Eğer nodeların balancı 2 veya 2 den büyükse bu agaç avl agaç değildir.

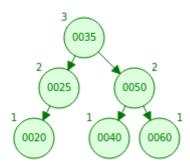
### 3.2 Test Cases

AVL tree için 2 ayrı test yazılmıştır. Test sırasında add remove ve bu methodlar dolayısıyla rebalance ve rotate işlemleri test edilmiş ve detaylı çıktı yazdırılmıştır. Test methodu AVLTreeTest sınıfının main methodundadır.

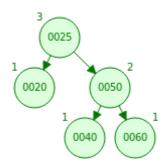
Test 1:



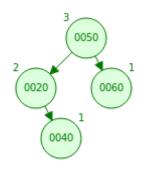
70 değeri çıkarıldıktan sonra:



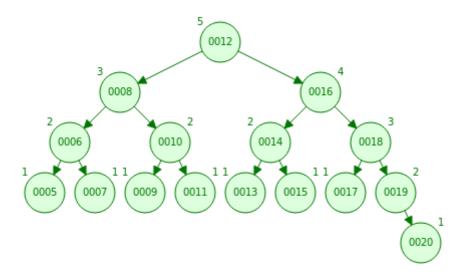
35 çıkarıldıktan sonra:



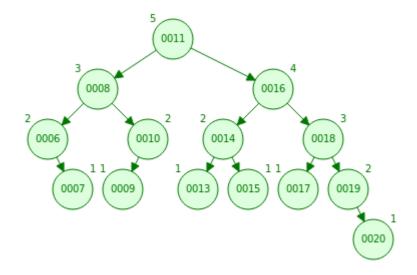
# 25 çıkarıldıktan sonra :



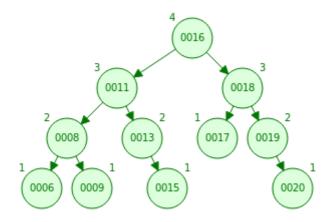
Test 2:



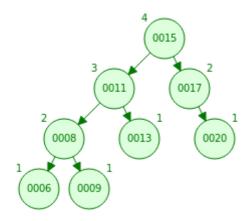
# 5 ve 12 çıkarıldıktan sonra :



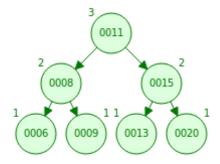
# 10, 14 ve 7 çıkarıldıktan sonra :



# 18, 19 ve 16 çıkarıldıktan sonra :



### 17 çıkarıldıktan sonra:



# 3.3 Running Commands and Results

Test 1:

```
## AVLTree str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTree | Str. © AVLTr
```

#### Test 2:

```
# AVLTree | Sirc | AVLTreeTest | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O + | O +
```