Álgebra Linear

conceitos importantes a estudar

- Matrizes
  - Transporta
  - Simétrica
  - Antissimétrica
  - Inversa
- Operações com Matrizes
  - Soma
  - Multiplicação
- Determinantes
  - Propriedades
  - Método de Gauss
  - Teorema de Laplace
  - Matriz Inventível
  - Cálculo da Inversa
  - Sistemas de Cramer
- Sistemas de equações Lineares
  - Método de Gauss
  - Resolução de sistemas

Matrizes

Uma matriz é uma tabela que dispõe os elementos em linhas e colunas

$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}_{2\times2}$; $B = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 1 & -2 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}_{3\times2}$; sempre representadas por maiúscula.

Ordem (ou tipo): A ordem de uma matriz com n colunas e m linhas é $m \times n$

matriz unitária $A = [3]$

matriz linha $A = [0 \ 5 \ 7]$

matriz coluna $A = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$

matriz retangular $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 10 \\ 0 & -5 & 7 \end{bmatrix}_{2\times3}$

matriz quadrada $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}_{2\times2}$

Matriz Quadrada e Diagonais

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

secundária principal

obs. A característica de uma matriz quadrada é a soma dos elementos da diagonal principal.

característica de $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ é $2+3=5$.

Lei de Formação de Matrizes

I) Escrever a matriz $A = (a_{ij})_{2\times3}$ em que $a_{ij} = 2i + 3j$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 11 \\ 7 & 10 & 13 \end{bmatrix}$$

$a_{11} = 2\times\overset{i}{1} + 3\times\overset{j}{1} = 5$

$a_{12} = 2\times1 + 3\times2 = 8$

$a_{13} = 2\times1 + 3\times3 = 11$

$a_{21} = 2\times2 + 3\times1 = 7$

$a_{22} = 2\times2 + 3\times2 = 10$

$a_{23} = 2\times2 + 3\times3 = 13$

II) Escrever a matriz $B = (b_{ij})_{3\times3}$ em que $b_{ij} = \begin{cases} i+j, & \text{se } i = j \\ i^j, & \text{se } i \neq j \end{cases}$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 9 & 6 \end{bmatrix}$$

$b_{11} = \overset{i}{1} + \overset{j}{1} = 2$

$b_{12} = 1^2 = 1$

$b_{13} = 1^3 = 1$

$b_{21} = 2^1 = 2$

$b_{22} = 2+2 = 4$

$b_{23} = 2^3 = 8$

$b_{31} = 3^1 = 3$

$b_{32} = 3^2 = 9$

$b_{33} = 3+3 = 6$

Matriz Transposta

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 7 \end{bmatrix}$; $A^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -5 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$; Inverte-se linhas e colunas

Matriz Simétrica

$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$; $A^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$; Matriz quadrada que é igual à sua transposta

$A = A^T$

Matriz antissimétrica

$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$; $A^T = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$; $-A = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$; A é antissimétrica quando $A^T = -A$.

Obs. Numa matriz antissimétrica os elementos da diagonal principal da matriz serão sempre $\emptyset$.

Igualdade de Matrizes

→ Duas matrizes da mesma ordem são iguais quando os elementos correspondentes forem iguais.

Exemplo: $\begin{bmatrix} 2 & 1 & a \\ 3 & b+2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 7 & 4 \end{bmatrix}$; Logo $a=5$ e $b=5$.

Multiplicação por escalar

→ Usamos a propriedade distributiva.

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$; $3A = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 0 & -9 \\ 15 & 0 \end{bmatrix}$

Adição (ou subtração)

→ Só podemos somar (ou subtrair) matrizes da mesma ordem.

- somamos (ou subtraímos) os elementos correspondentes.

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

I) $A+B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

II) $2A-B = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -6 \end{bmatrix}$

Multiplicação de Matrizes

I) Para multiplicar duas matrizes o nº de colunas da 1ª deve ser igual ao nº de linhas da 2ª.

II) O resultado será uma matriz com nº de linhas igual ao da 1ª e nº de colunas igual ao da 2ª.

$$\Rightarrow A_{m\times n} \cdot B_{n\times p} = C_{m\times p}$$

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{2\times3}$; $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}_{3\times2}$; $AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

$$AB = \begin{bmatrix} 2.2 + 3.1 + 1.3 & 2.0 + 3.(-1) + 1.5 \\ 0.2 + 1.1 + 2.3 & 0.0 + 1.(-1) + 2.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$$

ou

$C = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}_{2\times1}$; $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}_{1\times3}$; $CD = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.1 & 2.2 & 2.0 \\ 3.1 & 3.2 & 3.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{bmatrix}$

Matriz Identidade

Identidade de ordem 2 : $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

A matriz identidade é a matriz quadrada cujos elementos da diagonal principal são todos iguais a 1. Os elementos que não estão nesta diagonal são todos iguais a $\emptyset$.

Matriz Inversa

Seja A uma matriz quadrada. Sua inversa, caso exista, será A^{-1}, da mesma ordem, tal que:

$$A^{-1} . A = A . A^{-1} = I$$

Exemplo:

Determinar, caso exista, a inversa de A.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} ; \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2.a + 0.c & 2.b + 0.d \\ 4.a + (-3).c & 4.b + (-3).d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

sistema de equações

$$\begin{cases} 2a = 1 \\ 2b = 0 \\ 4a - 3c = 0 \\ 4b - 3d = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1/2 \\ b = \emptyset \\ c = 2/3 \\ d = -1/3 \end{cases}$$

C.A.

$2a = 1 \Leftrightarrow a = 1/2$

$2b = 0 \Leftrightarrow b = \emptyset$

$4 . 1/2 - 3c = 0 \Leftrightarrow 3c = 2 \Leftrightarrow c = 2/3$

$-3d = 1 \Leftrightarrow d = -1/3$

Determinantes

→ É um nº real associado a uma matriz quadrada, que será calculado mediante as seguintes regras.

Ordem 1

$$A=[3] \Rightarrow \det(A) \text{ ou } |3| = 3, \text{ o próprio elemento.}$$

Ordem 2

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = (3\times -4)-(1\times 2) = -12-2 = -14$$

I multiplico os elementos da diagonal principal e secundária.
II subtrai-se o valor da secundária ao da principal.

Ordem 3 (Regra de Sarrus)

$$A=\begin{bmatrix} 4 & 5 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \left|\begin{matrix} 4 & 5 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{matrix} = 10-1 = 9$$

$$\underbrace{-9 \quad 0 \quad 10}_{1} \qquad \underbrace{4 \quad 0 \quad 6}_{10}$$

I adiciono as primeiras duas colunas ao lado da matriz principal.
II traço e multiplico as diagonais com três elementos.
III somo as multiplicações de todas as diagonais principais e secundárias.
IV subtrai-se o valor da secundária ao da principal.

Exercício: Resolva a equação

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ -1 & x & x+1 \\ 3 & 2 & x \end{vmatrix} = 6$$

$$\left|\begin{matrix} 1 & 2 & x \\ -1 & x & x+1 \\ 3 & 2 & x \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 2 \\ -1 & x \\ 3 & 2 \end{matrix}$$

$$\underbrace{3x^2 \quad 2x+2 \quad -2x}_{3x^2+2} \qquad \underbrace{x^2 \quad 6x+6 \quad -2x}_{x^2+4x+6}$$

$$\Leftrightarrow (x^2+4x+6)-(3x^2+2) = 6$$
$$\Leftrightarrow -2x^2+4x-2 = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2-2x+1 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 1$$

C.a.

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2-4\times1\times1}}{2\times1}$$

$$x = 1$$

Teorema de Laplace

Menor Complementar (D_{ij})

O menor complementar de um elemento de uma matriz quadrada é o determinante dela, eliminando-se a linha e a coluna as quais o elemento pertence.

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -5 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$, $D_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (1 \times 0) - (3 \times 1) = 0 - 3 = -3$

Complemento Algébrico (C_{ij})

Define-se:

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot D_{ij}$$

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

a) $C_{33} = \underbrace{(-1)^{\overset{6}{3+3}}}_{1} \cdot D_{33} = D_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = (2 \times 3) - (-2 \times 1) = 6 + 2 = 8$

Escolhe-se uma fila (linha ou coluna) qualquer. O Determinante será a soma entre cada elemento multiplicado pelo seu complemento algébrico.

Exemplo:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \underbrace{0 \cdot C_{13}}_{\varnothing} + 3 \cdot C_{23} + \underbrace{0 \cdot C_{33}}_{\varnothing} + 1 \cdot C_{43} = 3 \cdot 7 + 1 \cdot 13 = 21 + 13 = 34$$

C.A.

$C_{23} = \overset{-1}{(-1)^{2+3}} \cdot D_{23} = -D_{23} = -(-7) = 7 \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix} = -2 - 5 = -7$

$\underbrace{0 \ \ 6 \ \ -1}_{5} \quad \underbrace{-3 \ \ 0 \ \ 1}_{-2}$

$C_{43} = (-1)^{4+3} \cdot D_{43} = -D_{43} = -(-13) = 13 \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}\begin{matrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{matrix} = -2 - 11 = -13$

$\underbrace{-1 \ \ 12 \ \ 0}_{11} \quad \underbrace{-6 \ \ 4 \ \ 0}_{-2}$

Propriedades do Determinantes

I) Fila Nula ($det = \emptyset$)

• Sempre que uma matriz tiver uma fila (linha ou coluna) nula, o determinante vai ser $\emptyset$.

Exemplo: $\begin{vmatrix} 1 & -5 & 7 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \emptyset$; $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 6 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & 0 & 5 \\ 4 & -1 & 0 & 8 \end{vmatrix} = \emptyset$

II) Troca de Filas Paralelas

$A = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = (3 \times 4) - (-2 \times 1) = 12 + 2 = 14$ $A' = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-2 \times 1) - (3 \times 4) = -2 - 12 = -14$

$$det(A') = -\ det(A)$$

III) Multiplicação de uma fila por um número Real

• Quando uma fila de uma matriz A é multiplicada por um nº $K \neq 0$, obtém-se uma matriz A', então:

$$det(A') = K \cdot det(A)$$

Exemplo:

$A = \begin{array}{c} \times 3 \\ \\ \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (1 \times 4) - (2 \times 3) = 4 - 6 = -2$ $A' = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (3 \times 4) - (6 \times 3) = 12 - 18 = -6$

$$-2 = 3(-6)$$

IV) Filas paralelas iguais (proporcionais) $det = \emptyset$

• Sempre que uma matriz tiver filas iguais ou proporcionais, o determinante vai ser $\emptyset$.

Exemplo: $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 7 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \emptyset$ $\begin{array}{c} \times 2 \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} = \emptyset$ ($\times 5$)

V) Matriz Transposta

$A \begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ 2 & 3 & y \\ 0 & 1 & z \end{vmatrix} = 8$ $A^T \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 8$

$$det(A) = det(A^T)$$

VI Teorema de Binet

$$\det(A.B) = \det(A).\det(B)$$

Exemplo:

Dadas $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ calcule $\det(A.B)$.

$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = (1 \times -1) - (3 \times 2) = -1 - 6 = -7$

$\det(B) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (0 \times 3) - (2 \times 1) = 0 - 2 = -2$

$\det(A.B) = \det(A).\det(B) = -7 . -2 = 14$

Matriz Inversa de ordem 2 $(A.A^{-1} = I)$

I Dividir os termos pelo determinante

II Trocar de posição os termos da diagonal principal e inverter o sinal dos termos da diagonal secundária.

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$; $A^{-1} = ?$

1 $\det(A) = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (4 \times 1) - (2 \times 1) = 4 - 2 = 2$

2 $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ dividir por 2 $\rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$

3 trocar a posição $\rightarrow \begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ 1/2 & 2 \end{bmatrix}$

4 inverter os sinais $\rightarrow \begin{bmatrix} 1/2 & -1 \\ -1/2 & 2 \end{bmatrix}$

$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1 \\ -1/2 & 2 \end{bmatrix}$

Matriz Inversa de ordem 3

$$A^{-1} = \frac{\text{adj } A}{|A|}$$

I calcular o determinante da matriz

II calcular a matriz do complemento algébrico

III calcular a transposta da matriz do ponto II $\rightarrow$ adj A

IV dividir a matriz do ponto III pelo determinante $\Rightarrow$ temos a matriz inversa

Exemplo:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$

1 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 5 & 6 \end{matrix} = 40 - 39 = 1$

$\underbrace{15 \; 24 \; 0}_{39} \quad \underbrace{0 \; 40 \; 0}_{40}$

2 $C_{11} = (-1)^{1+1} . D_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = -24$

$C_{12} = (-1)^{1+2} . D_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = +20$

$C_{13} = (-1)^{1+3} . D_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -5$

$C_{21} = (-1)^{2+1} . D_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = 18$

$C_{22} = (-1)^{2+2} . D_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -15$

$C_{23} = (-1)^{2+3} . D_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 4$

$C_{31} = (-1)^{3+1} . D_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 5$

$C_{32} = (-1)^{3+2} . D_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -4$

$C_{33} = (-1)^{3+3} . D_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

3 $\begin{bmatrix} -24 & 20 & -5 \\ 18 & -15 & 4 \\ 5 & -4 & 1 \end{bmatrix}$

4 $\begin{bmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

5

Inversa = como $\det(A) = 1 \Rightarrow \begin{bmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

Sistemas Lineares

• É um conjunto de equações lineares. A solução de um sistema é a solução comum a todas as equações.

Exemplo:

$$(2,1)$$

$$\begin{cases} 2x-y=3 \\ -x+y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4-1=3 \\ -2+1=-1 \end{cases} \Rightarrow (2,1) \text{ é solução}$$

Sistemas 2x2 (2 equações, 2 variáveis)

I Método substituição

$$\begin{cases} 3x+2y=12 \\ x-3y=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(3y-7)+2y=12 \\ x=3y-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9y-21+2y=12 \\ x=3.3-7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 11y=33 \\ x=9-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3 \\ x=2 \end{cases} \qquad S=\{(2,3)\}$$

II Método adição

$$\begin{cases} 3x+2y=12 \\ x-3y=-7 \quad \times 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2y=12 \\ +-3x+9y=21 \end{cases}$$

$$0 \quad +11y=33$$

$$y=3$$

$$x-3.3=-7$$

$$\Leftrightarrow x=9-7$$

$$\Leftrightarrow x=2$$

$$S=\{(2,3)\}$$

Sistemas Lineares – escalonamento

Exemplo:

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\begin{cases} x+2y-z=3 \\ 3x-y+z=1 & -3L_1 \\ 2x+2y+3z=-4 & -2L_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y-z=3 \\ -7y+4z=-8 \\ -2y+5z=-10 & L_2 \times L_3 - L_3 \times L_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y-z=3 \\ -7y+4z=-8 \\ -27z=54 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ z=-2 \end{cases}$$

Sistemas Lineares – Regra de Cramer

$$x = \frac{D_x}{D}, \quad y = \frac{D_y}{D}, \quad z = \frac{D_z}{D}$$

D é o determinante

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x - y + z = 1 \\ -x + 3y + z = -2 \end{cases}$$

$D = -5 \quad D_x = -5 \quad D_y = 0 \quad D_z = 5$

$$D = \left|\begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{matrix} = 3 - 8 = -5$$

$$\underbrace{1 \; 3 \; 4}_{8} \quad \underbrace{-1 \; -2 \; 6}_{3}$$

$$x = \frac{-5}{-5} = 1 \; ; \; y = \frac{0}{-5} = 0 \; ; \; z = \frac{5}{-5} = -1$$

$$S = \{(1, 0, -1)\}$$

$$D_x = \left|\begin{matrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{matrix} = -1 - 4 = -5$$

$$\underbrace{+2 \; 0 \; 2}_{4} \quad \underbrace{0 \; -4 \; 3}_{-1}$$

substituímos a linha do x na matriz pelos termos independentes

$$D_y = \left|\begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{matrix} = -3 + 3 = 0$$

$$\underbrace{-1 \; -2 \; 0}_{-3} \quad \underbrace{1 \; 0 \; -4}_{-3}$$

$$D_z = \left|\begin{matrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{matrix} = 0 - (-5) = 5$$

$$\underbrace{0 \; 3 \; -8}_{-5} \quad \underbrace{2 \; -2 \; 0}_{0}$$

Álgebra Linear

Ficha 1

1)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 3/2 & -1 \\ 2 & \sqrt{2} & 0 & 8 & 4 \\ 3 & 0 & 5 & 1/2 & 7 \\ 1 & \pi & -1/3 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

a) O tipo de A é 4x5.

b) $a_{34} = 1/2$

$L_2 = \{2, \sqrt{2}, 0, 8, 4\}$

$C_5 = \{-1, 4, 7, 6\}$

c) Diagonal da matriz A é $\{0, \sqrt{2}, 5, 6\}$

2)

a)

b) $A = [2i \times (j-2)]_{3\times 2}$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -4 & 0 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}$$

c.a. $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$

$a_{11} = 2.1 \times (1-2) = 2.(-1) = \cancel{-4}\ -2$

$a_{12} = 2.1 \times (2-2) = 2.0 = 0$

$a_{21} = 2.2.(1-2) = 4.(-1) = -4$

$a_{22} = 2.2.(2-2) = 4.0 = 0$

$a_{31} = 2.3.(1-2) = 6.(-1) = -6$

$a_{32} = 2.3.(2-2) = 6.0 = 0$

c) $B = [b_{ij}]_{3\times 2}$, onde $b_{ij} = |1+j-i|$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

c.a. $\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$

$b_{11} = |1+1-1| = |1| = 1$

$b_{12} = |1+2-1| = |2| = 2$

$b_{21} = |1+1-2| = |0| = 0$

$b_{22} = |1+2-2| = |1| = 1$

$b_{31} = |1+1-3| = |-1| = 1$

$b_{32} = |1+2-3| = |0| = 0$

d) $A+2B$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -4 & 0 \\ -6 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 2 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$$

c.a

$$2B = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

②

③

a) $A = [a_{ij}]_{n \times n}$

$n=3$ e $a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ se } i+j \text{ é par} \\ 0 \text{ caso contrário} \end{cases}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c.a

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$a_{11} = 1$ $a_{31} = 1$

$a_{12} = 0$ $a_{32} = 0$

$a_{13} = 1$ $a_{33} = 1$

$a_{21} = 0$

$a_{22} = 1$

$a_{23} = 0$

b) $A = [a_{ij}]_{n \times n}$

$n=3$ e $a_{ij} = \begin{cases} 2i \text{ se } i > j \\ 0 \text{ se } i = j \\ 2j \text{ se } j > i \end{cases}$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 6 \\ 4 & 0 & 6 \\ 6 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

c.a

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$a_{11} = 0$ $a_{31} = 2.3 = 6$

$a_{12} = 2.2 = 4$ $a_{32} = 2.3 = 6$

$a_{13} = 2.3 = 6$ $a_{33} = 0$

$a_{21} = 2.2 = 4$

$a_{22} = 0$

$a_{23} = 2.3 = 6$

④

a) $AC = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{4\times3} \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}_{3\times1}$ $AC_{4\times1}$ $= \begin{bmatrix} 2.-3+1.-2+2.1 \\ -1.-3+-2.-2+3.1 \\ 1.-3+-1.-2+2.1 \\ 4.-3+1.-2+0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6-2+2 \\ 3+4+3 \\ -3+2+2 \\ -12-2+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 10 \\ 1 \\ -14 \end{bmatrix}$

b) $BC = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{3\times3} \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}_{3\times1}$ $BC_{3\times1}$ $= \begin{bmatrix} 0.-3+1.-2+2.1 \\ 3.-3+-2.-2+0.1 \\ 0.-3+1.-2+0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-2+2 \\ -9+4+0 \\ 0-2+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ -2 \end{bmatrix}$

c) $LA = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}_{1\times4} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{4\times3}$ $LA_{1\times3}$ $=$

$= \begin{bmatrix} 21 & 8 & 4 \end{bmatrix}$

c.a. $a_{11} = 3.2+0.-1+-1.1+4.4$
$= 6+0-1+16 = 21$

$a_{12} = 3.1+0.-2+-1.-1+4.1$
$= 3+0+1+4 = 8$

$a_{13} = 3.2+0.3+-1.2+4.0$
$= 6+0-2+0 = 4$

d) $LD = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}_{1\times4} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{4\times4}$ $LD_{1\times4}$

$= \begin{bmatrix} 8 & 7 & 10 & 4 \end{bmatrix}$

c.a.
$a_{11} = 3.0+0.3+-1.0+4.2$
$= 0+0+0+8 = 8$

$a_{12} = 3.1+0.-2+-1.0+4.1$
$= 3+0+0+4 = 7$

$a_{13} = 3.2+0.0+-1.0+4.1$
$= 6+0+0+4 = 10$

$a_{14} = 4.0+0.0+-1.0+4.1$
$= 0+0+0+4 = 4$

e) $[AB]_{32}$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{4\times3} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{3\times3} \quad AB_{4\times3}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -6 & 6 & -2 \\ -3 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 8 \end{bmatrix}_{4\times3}$$

$\therefore [AB]_{32} = 5 //$

c.a
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix}$$

$a_{11} = 2.0 + 1.3 + 2.0 = 0+3+0 = 3/$

$a_{21} = -1.0 + -2.3 + 3.0 = 0-6+0 = -6/$

$a_{12} = 2.1 + 1.-2 + 2.1 = 2-2+2 = 2/$

$a_{22} = -1.1 + -2.-2 + 3.1 = -1+4+3 = 6/$

$a_{13} = 2.2 + 1.0 + 2.0 = 4+0+0 = 4/$

$a_{23} = -1.2 + -2.0 + 3.0 = -2+0+0 = -2/$

$a_{31} = 1.0 + -1.3 + 2.0 = 0-3+0 = -3/$

$a_{41} = 4.0 + 1.3 + 0.0 = 0+3+0 = 3/$

$a_{32} = 1.1 + -1.-2 + 2.1 = 1+2+2 = 5/$

$a_{42} = 4.1 + 1.-2 + 0.1 = 4-2+0 = +2/$

$a_{33} = 1.2 + -1.0 + 2.0 = 2+0+0 = 2/$

$a_{43} = 4.2 + 1.0 + 0.0 = 8+0+0 = 8/$

f) $[DA]_{32}$

$$DA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{4\times4} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{4\times3} \quad DA_{4\times3}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 8 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 9 \end{bmatrix}_{4\times3}$$

$\therefore [DA]_{32} = 0 //$

c.a.

$a_{11} = 0.2 + 1.-1 + 2.1 + 0.4 = 0-1+2+0 = 1/$

$a_{21} = 3.2 + -2.-1 + 0.1 + 0.4 = 6+2+0+0 = 8/$

$a_{12} = 0.1 + 1.-2 + 2.-1 + 0.0 = 0-2-2+0 = -4/$

$a_{22} = 3.1 + -2.-2 + 0.-1 + 0.1 = 3+4+0+0 = 7/$

$a_{13} = 0.2 + 1.3 + 2.2 + 0.0 = 0+3+4+0 = 7/$

$a_{23} = 3.2 + -2.3 + 0.2 + 0.0 = 6-6+0+0 = 0/$

$a_{31} = 0$

$a_{32} = 0$

$a_{33} = 0$

$a_{41} = 2.2 + 1.-1 + 1.1 + 1.4 = 4-1+1+4 = 8/$

$a_{42} = 2.1 + 1.-2 + 1.-1 + 1.1 = 2-2-1+1 = 0/$

$a_{43} = 2.2 + 1.3 + 1.2 + 0.1 = 4+3+2+0 = 9/$

g) $B^2 = B \cdot B \quad B^2_{3\times3}$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -6 & 7 & 6 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

c.a

$a_{11} = 0.0 + 1.3 + 2.0 = 0+3+0 = 3/$

$a_{21} = 3.0 + -2.3 + 0.0 = 0-6+0 = -6/$

$a_{12} = 0.1 + 1.-2 + 2.1 = 0-2+2 = 0/$

$a_{22} = 3.1 + -2.-2 + 0.1 = 3+4+0 = 7/$

$a_{13} = 0.2 + 1.0 + 2.0 = 0+0+0 = 0/$

$a_{23} = 3.2 + -2.0 + 0.0 = 6+0+0 = 6/$

$a_{31} = 0.2 + 1.0 + 0.0 = 0+0+0 = 0/$

$a_{32} = 0.1 + 1.-2 + 0.1 = 0-2+0 = -2/$

$a_{33} = 0.2 + 1.0 + 0.0 = 0+0+0 = 0/$

(4)

(5) a) $A=\begin{bmatrix}1&8\\3&-1\\0&2\\4&-2\end{bmatrix}_{4\times2}$; $A^T=\begin{bmatrix}1&3&0&4\\8&-1&2&-2\end{bmatrix}_{2\times4}$

c) $A=\begin{bmatrix}1&3&1/3\end{bmatrix}_{1\times3}$; $A^T=\begin{bmatrix}1\\3\\1/3\end{bmatrix}_{3\times1}$

b)

$A=\begin{bmatrix}1&-4&1\\0&0&0\\-3&1&-1\end{bmatrix}_{3\times3}$; $A^T=\begin{bmatrix}1&0&-3\\-4&0&1\\1&0&-1\end{bmatrix}_{3\times3}$

(6)

a) $2B-D$

como $B_{3\times2}$ e $D_{3\times2}$, podemos realizar a operação.

$2B-D=\begin{bmatrix}10&2\\6&0\\4&-4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&0\\2&-1\\0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10&2\\4&1\\4&-6\end{bmatrix}$

c.a.

$2B=2\cdot\begin{bmatrix}5&1\\3&0\\2&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10&2\\6&0\\4&-4\end{bmatrix}$

$2C+3D$

como $C_{2\times2}$ e $D_{3\times2}$, não podemos realizar a soma.

AB

$AB_{1\times2}$

$AB=\begin{bmatrix}2&1&3\end{bmatrix}_{1\times3}\cdot\begin{bmatrix}5&1\\3&0\\2&-2\end{bmatrix}_{3\times2}$

$=\begin{bmatrix}19&-4\end{bmatrix}$

c.a.

$a_{11}=2.5+1.3+3.2$
$=10+3+6=19$

$a_{12}=2.1+1.0+3.-2$
$=2+0-6=-4$

b) $B+X=D$ X_{32}

$\Leftrightarrow X=D-B$

$X=\begin{bmatrix}-5&-1\\-1&-1\\-2&4\end{bmatrix}$ //

c.a.

$D-B=\begin{bmatrix}0&0\\2&-1\\0&2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}5&1\\3&0\\2&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5&-1\\-1&-1\\-2&4\end{bmatrix}$

(8) $A=\begin{bmatrix}1&-1&3\\0&1&0\\1&2&0\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}0&2&2\\1&0&2\\1&1&0\end{bmatrix}$; $B^T=\begin{bmatrix}0&1&1\\2&0&1\\2&2&0\end{bmatrix}$

C.A. $\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}$ (5)

$a_{11}=0$ $a_{21}=1$ $a_{31}=1$
$a_{12}=2$ $a_{22}=0$ $a_{32}=1$
$a_{13}=2$ $a_{23}=2$ $a_{33}=0$

$X+A=2(X-AB^T)$
$\Leftrightarrow X+A=2X-2AB^T$
$\Leftrightarrow X-2X=-2AB^T-A$
$\Leftrightarrow -X=-2AB^T-A$
$\Leftrightarrow X=2AB^T+A$

$\Leftrightarrow X=\begin{bmatrix}9&13&3\\4&1&2\\9&4&6\end{bmatrix}$

C.A.3
$2.AB^T$
$=2.\begin{bmatrix}4&7&0\\2&0&1\\4&1&3\end{bmatrix}$
$=\begin{bmatrix}8&14&0\\4&0&2\\8&2&6\end{bmatrix}$

C.A.2 $AB^T_{3\times3}$
$A.B^T$
$a_{11}=1.0+-1.2+3.2$
$=0-2+6=4$
$a_{12}=1.1+-1.0+3.2$
$=1+0+6=7$
$a_{13}=1.1+-1.1+3.0$
$=1-1+0=0$
$a_{21}=0.0+1.2+0.2$
$=0+2+0=2$
$a_{22}=0.1+1.0+0.2$
$=0+0+0=0$
$a_{23}=0.1+1.1+0.0$
$=0+1+0=1$
$a_{31}=1.0+2.2+0.2$
$=0+4+0=4$
$a_{32}=1.1+2.0+0.2$
$=1+0+0=1$
$a_{33}=1.1+2.1+0.0$
$=1+2+0=3$

AB^T
$\shortparallel$
$\begin{bmatrix}4&7&0\\2&0&1\\4&1&3\end{bmatrix}$

C.A.4
$2AB^T+A$
$=\begin{bmatrix}8&14&0\\4&0&2\\8&2&6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&-1&3\\0&1&0\\1&2&0\end{bmatrix}$
$=\begin{bmatrix}9&13&3\\4&1&2\\9&4&6\end{bmatrix}$

(11)
$(A-B)(A+B)-(A+B)^2+2B^2$
$=A^2+AB-BA-B^2-((A+B)(A+B))+2B^2$
$=A^2+AB-BA+B^2-(A^2+AB+BA+B^2)$
$=A^2+AB-BA+B^2-A^2-AB-BA-B^2$
$=-2BA$

(12) Para ser inversa $A.A'=A'.A=I$

a) $A=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&1&-1\\3&0&1\end{bmatrix}$; $A'=\begin{bmatrix}-1&1&1\\3&-2&-2\\3&-3&-2\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

Logo, A' é inversa de A.

Bastava apenas calcular $A.A'$

segundo teóricas [cap.1 slide 23]

C.A.
$A.A'$
$a_{11}=2.-1+1.3+0.3$
$=-2+3+0=1$
$a_{12}=2.1+1.-2+0.-3$
$=2-2+0=0$
$a_{13}=2.1+1.-2+0.-2$
$=2-2+0=0$
$a_{21}=0.-1+1.1+-1.1$
$=0+1-1=0$
$a_{22}=0.1+1.-2+-1.-3$
$=0-2+3=1$
$a_{23}=0.1+1.-2+-1.-2$
$=0-2+2=0$
$a_{31}=3.-1+0.3+1.3$
$=-3+0+3=0$
$a_{32}=3.1+0.-2+1.-3$
$=3+0-3=0$
$a_{33}=3.1+0.-2+1.-2$
$=3+0-2=1$

$A'.A$
$a_{11}=-1.2+1.0+1.3$
$=-2+0+3=1$
$a_{12}=-1.1+1.1+1.0$
$=-1+1+0=0$
$a_{13}=-1.0+1.-1+1.1$
$=0+-1+1=0$
$a_{21}=3.2+-2.0+-2.3$
$=6+0-6=0$
$a_{22}=3.1+-2.1+-2.0$
$=3-2+0=1$
$a_{23}=3.0+-2.-1+-2.1$
$=0+2-2=0$
$a_{31}=3.2+-3.0+-2.3$
$=6+0-6=0$
$a_{32}=3.1+-3.1+-2.0$
$=3-3+0=0$
$a_{33}=3.0+-3.-1+-2.1$
$=0+3-2=1$

(13)

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$; $A' = ?$ $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$A.A' = I$

por c.a.1

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a+2c & b+2d \\ 2a+c & 2b+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\therefore A' = \begin{bmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{bmatrix}$

c.a.1

$A.A'$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$a_{11} = a+2c$

$a_{12} = b+2d$

$a_{21} = 2a+c$

$a_{22} = 2b+d$

c.a.2

$\begin{cases} a+2c=1 \\ b+2d=0 \\ 2a+c=0 \\ 2b+d=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \\ \\ c=-2a \\ d=1-2b \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a+2(-2a)=1 \\ b+2(1-2b)=0 \\ c=-2a \\ d=1-2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-4a=1 \\ b+2-4b=0 \\ c=-2(-1/3) \\ d=1-2.2/3 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -3a=1 \\ -3b=-2 \\ c=2/3 \\ d=1-4/3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1/3 \\ b=2/3 \\ c=2/3 \\ d=-1/3 \end{cases}$

(15) $A_{m \times m}$; $B_{m \times n}$; $C_{m \times n}$

$\times A^{-1}$ $AB = AC$

$\Leftrightarrow A^{-1}.AB = A^{-1}AC$

$A^{-1}A = I$

$\div I \Leftrightarrow IB = IC$

$\Leftrightarrow B = C$ //

(16)

a) $A = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$; $A' = \begin{bmatrix} -x & 1 & x \\ 0 & y & 0 \\ 1/2 & 2y & 1/2 \end{bmatrix}$

Para A' ser inversa de A:

$A.A' = I$

por c.a.1

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x+1/2 & -y-1 & -x+1/2 \\ 0 & -y & 0 \\ -x+1/2 & y+1 & x+1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

por c.a.2

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\therefore S = \{(1/2, -1)\}$

c.a.1

$A.A'$

$a_{11} = -1.-x + -3.0 + 1.1/2$
$= x+0+1/2 = x+1/2$ /

$a_{12} = -1.1 + -3.y + 1.2y$
$= -1-3y+2y = -y-1$ /

$a_{13} = -1.x + -3.0 + 1.1/2$
$= -x+0+1/2 = -x+1/2$ /

$a_{21} = 0.-x + -1.0 + 0.1/2$
$= 0+0+0 = 0$ /

$a_{22} = 0.1 + -1.y + 0.2y$
$= 0 - y + 0 = -y$ /

$a_{23} = 0.x + -1.0 + 0.1/2$
$= 0+0+0 = 0$ /

$a_{31} = 1.-x + -1.0 + 1.1/2$
$= -x+0+1/2 = -x+1/2$

$a_{32} = 1.1 + -1.y + 1.2y$
$= 1-y+2y = y+1$ /

$a_{33} = 1.x + -1.0 + 1.1/2$
$= x+0+1/2 = x+1/2$ /

c.a.2

$\begin{cases} x+1/2=1 \\ -y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1/2 \\ y=-1 \end{cases}$

Temos:

$x+1/2 = 1/2+1/2 = 1$ /

$-y-1 = 1-1 = 0$ /

$-x+1/2 = -1/2+1/2 = 0$ /

$-y = -(-1) = 1$ /

$y+1 = -1+1 = 0$ /

Ficha 2

2) c)

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ x + y + z = 0 \\ x + z = -1 \end{cases}$$

c.a.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \leftarrow L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ \leftarrow L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \end{array}$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \end{array}\right]$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 1 \\ -y + z = -1 \\ 3z = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2\cdot(-1/3) = 1 \\ -y = -1 + 4/3 \\ z = -4/3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5/3 \\ y = -1/3 \\ z = -4/3 \end{cases}$$

$C.S. = \{(5/3, -1/3, -4/3)\}$

3) c)

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + x_4 = 0 \end{cases}$$

c.a.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \leftarrow L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ \leftarrow L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array}$$

$$= \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

4) a) como $R(A) = 4$ e $R([A|B]) = 5$
$R(A) \neq R([A|B])$, logo o sistema é impossível.

b) Como é homogéneo é um sistema possível (admite solução $(0,0,0,0)$) mas como $R(A) < R([A|B])$, é indeterminado.

5) como o sistema $AX = 0$ é determinado, temos $R(A) = n$. Logo, se for possível, o sistema $AX = B$ também será determinado.
Podemos concluir que, ou é possível e determinado ou é impossível.

7 a) $\begin{cases} x_1+x_2-3x_3+x_4-5x_5=0 \\ x_2+x_4+3x_5=0 \\ 2x_1+2x_3=0 \\ x_1+x_2+x_3+x_4+3x_5=0 \\ 2x_1+2x_2-2x_3+2x_4-2x_5=0 \end{cases}$

c.a. como o sistema é homogéneo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow L_3 \leftarrow L_3-2L_1 \\ \leftarrow L_4 \leftarrow L_4-L_1 \\ \leftarrow L_5 \leftarrow L_5-2L_1 \end{matrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 8 & -2 & 10 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow L_3 \leftarrow L_3+2L_2 \\ \\ \leftarrow L_5 \leftarrow L_5-L_4 \end{matrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow L_3 \leftarrow L_3-1/8L_3 \\ \leftarrow L_4 \leftarrow L_4-1/2L_3 \\ \\ \end{matrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2-3x_3+x_4-5x_5=0 \\ x_2+x_4+3x_5=0 \\ x_3+2x_5=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 (-x_4-3x_5)-3(-2x_5)+x_4-5x_5=0 \\ x_2=-x_4-3x_5 \\ x_3=-2x_5 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 -x_4-3x_5+6x_5+x_4-5x_5 \overset{=0}{} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1=2x_5 \\ x_2=-x_4-3x_5 \\ x_3=-2x_5 \end{cases}$

$C.S.=\{(-2x_5, -x_4-3x_5, -2x_5, x_4, x_5) : x_4, x_5 \in \mathbb{R}\}$

12 $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3=1 \\ 2x_1+kx_2+6x_3=6 \\ -x_1+3x_2+(k-3)x_3=0 \end{cases}$

c.a.1

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & K & 6 & 6 \\ -1 & 3 & K-3 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \leftarrow L_2 \leftarrow L_2-2L_1 \\ \leftarrow L_3 \leftarrow L_3+L_1 \end{matrix}$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & K+4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & K & 1 \end{array}\right] \leftarrow L_2 \leftarrow L_2+(-K-4)L_3 \text{ e } L_2 \leftrightarrow L_3$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & K & 1 \\ 0 & 0 & K^2+4K & K \end{array}\right]$$

c.a.2

$K^2+4K=K$

$\Leftrightarrow (-4)^2+4\times(-4)=-4$

$\Leftrightarrow 16-16=-4$

$\Leftrightarrow 0=-4$ imp.

$K^2+4K=0 \wedge K\neq 0$

$\Leftrightarrow (K=0 \vee K=-4) \wedge K\neq 0$ $\quad S=\{-4\}$

a) Para o sistema ser impossível, $K=-4$.

b) Para ser possível determinado, $K \in \mathbb{R} \setminus \{0,-4\}$

c) Para ser possível indeterminado, $K=0$.

16 $[A]_{ij} = -2 + 2(i-j)^2$, ordem 3

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 0 \\ 6 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

c.a. $a_{11} = -2+2(1-1)^2 = -2+0 = -2$
$a_{12} = -2+2(1-2)^2 = -2+2 = 0$
$a_{13} = -2+2(1-3)^2 = -2+8 = 6$
$a_{21} = -2+2(2-1)^2 = -2+2 = 0$
$a_{22} = -2+2(2-2)^2 = -2+0 = -2$
$a_{23} = -2+2(2-3)^2 = -2+2 = 0$
$a_{31} = -2+2(3-1)^2 = -2+8 = 6$
$a_{32} = -2+2(3-2)^2 = -2+2 = 0$
$a_{33} = -2+2(3-3)^2 = -2+0 = -2$

9

a) A é simétrica sse $A = A^T$

$$A^T = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 0 \\ 6 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$, logo A é simétrica.

b) $A \cdot A' = I$ ~~(x)~~

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 0 \\ 6 & 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix}$$

$$\left|\begin{matrix} -2 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 0 \\ 6 & 0 & -2 \end{matrix}\right| \begin{matrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \\ 6 & 0 \end{matrix} \quad = -8+72 = 64$$

$$\underbrace{-72\ 0\ 0}_{-72} \quad \underbrace{-8\ 0\ 0}_{-8}$$

$A = -2B$, onde $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \leftarrow L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1$

$r(B) = 3$.

como B é de ordem 3, admite inversa. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}$

Podemos concluir que A também é inversa.

$A^{-1} = -\frac{1}{2} \Pi^{-1}$

$$\Pi^{-1} = \begin{bmatrix} -1/8 & 0 & -3/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3/8 & 0 & -1/8 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/16 & 0 & 3/16 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 3/16 & 0 & 1/16 \end{bmatrix}$$ //

c) $A^T X = B$, onde $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} -2x + 6z = 2 \\ -2y = 4 \\ 6x - 2z = -2 \end{cases}$$

c.a.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 4 \\ 6 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right] \begin{matrix} L_1 \leftarrow -1/2 L_1 \\ L_2 \leftarrow 1/2 L_2 \\ L_3 \leftarrow -1/2 L_3 \end{matrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \longrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & 4 \end{array}\right]$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 3z = -1 \\ -y = 2 \\ 8z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + 3/2 \\ y = -2 \\ z = 1/2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1/2 \\ y = -2 \\ z = 1/2 \end{cases}$$

Ficha 3

1

a) $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$; $\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}=(1\times4)-(2\times3)=4-6=-2$ / $|A|\neq0$, logo é invertível.

b) $B=\begin{bmatrix}3&6\\2&4\end{bmatrix}$; $\begin{vmatrix}3&6\\2&4\end{vmatrix}=(3\times4)-(6\times2)=12-12=\emptyset$ / $|B|=0$, logo não é invertível.

c) $C=\begin{bmatrix}1&4&6\\0&2&5\\0&0&3\end{bmatrix}$; $\begin{vmatrix}1&4&6\\0&2&5\\0&0&3\end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{1+1}\cdot D_{11}=D_{11}=\begin{vmatrix}2&5\\0&3\end{vmatrix}=(2\times3)-(5\times0)=6-0=6$ /

$|C|\neq0$, é invertível.

d) $D=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{bmatrix}$; $\begin{vmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{1+1}\cdot D_{11}=D_{11}=\begin{vmatrix}2&2\\3&3\end{vmatrix}$ ⊗

$\begin{vmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{vmatrix}\begin{matrix}1&1\\2&2\\3&3\end{matrix}=18-18=\emptyset$ $|D|=0$, não é invertível.

$\underbrace{6\ 6\ 6}_{18}\ \underbrace{6\ 6\ 6}_{18}$

e) $E=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$; $\begin{vmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{vmatrix}\begin{matrix}-1&0\\0&2\\0&0\end{matrix}=-2-0=-2$ / $|E|\neq0$, é invertível.

$\underbrace{0\ 0\ 0}_{0}\ \underbrace{-2\ 0\ 0}_{-2}$

f) $3A=\begin{vmatrix}3&6\\9&12\end{vmatrix}=(3\times12)-(9\times6)=36-54=-18$ /

$(CD)^T=\begin{bmatrix}27&27&27\\19&19&19\\9&9&9\end{bmatrix}^T$

$=\begin{vmatrix}27&19&9\\27&19&9\\27&19&9\end{vmatrix}\begin{matrix}\cancel{27}&\cancel{19}\\\cancel{27}&\cancel{19}\\\cancel{27}&\cancel{19}\end{matrix}=\emptyset$, ~~pois~~ pela propriedade de filas iguais paralelas.

C.A. $CD_{3\times3}$

$CD=\begin{bmatrix}1&4&6\\0&2&5\\0&0&3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{bmatrix}$

$a_{11}=1.1+4.2+6.3$
$=1+8+18=27$ /

$a_{12}=1.1+4.2+6.3$
$=27$ /

$a_{13}=27$ /

$a_{21},a_{22},a_{23}=0.1+2.2+5.3$
$=0+4+15=19$ /

$a_{31},a_{32},a_{33}=0.1+0.2+3.3$
$=0+0+9=9$ /

2

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

c.a.

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow 1/2 L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 2L_1}]{}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{L_3 \leftarrow L_3 + 1/2 L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_2}]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftrightarrow L_4]{}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Ex.:

$$1 \times C_{11} = C_{11} = (-1)^{1+1} \cdot D_{11}$$

$$= D_{11} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{matrix} = -16 - 0 = -16$$

$$\underbrace{0\ 0\ 0}_{0} \quad \underbrace{-16\ 0\ 0}_{-16}$$

a)

$$|A| = 4 \times 2 \times (-2) \times 1$$
$$= 8 \times (-2)$$
$$= -16$$

b)

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \cdot C_{13} + 1 \cdot C_{23} + 0 \cdot C_{33} + 2 \cdot C_{43}$$

$$= C_{23} + 2C_{43} = (-1)^{2+3} \cdot D_{23} + 2 \cdot (-1)^{4+3} \cdot D_{43}$$

$$= -D_{23} - 2D_{43} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -\left(2 \cdot C_{12} - 2 \cdot C_{22} + 0 \cdot C_{32}\right) - 2\left(2 \cdot C_{11} + 2 \cdot C_{12} + -2 \cdot C_{13}\right)$$

$$= -\left(2 \cdot (-1)^{1+2} \cdot D_{12} - 2 \cdot (-1)^{2+2} \cdot D_{22}\right) - 2\left(2 \cdot (-1)^{1+1} \cdot D_{11} + 2 \cdot (-1)^{1+2} \cdot D_{12} - 2 \cdot (-1)^{1+3} \cdot D_{13}\right)$$

$$= -\left(-2D_{12} - 2D_{22}\right) - 2\left(2D_{11} - 2D_{12} - 2D_{13}\right)$$

$$= 2\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} - 2\left(2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}\right)$$

$$= 2\left((-1 \cdot -1) - (-2 \cdot 3)\right) + 2\left((2 \cdot -1) - (-2 \cdot -2)\right) - 2\left(2\left((3 \cdot 1) - (-2 \cdot 1)\right) - 2\left((3 \cdot 3) - (-1 \cdot 1)\right) - 2\left((3 \cdot 2) - (-1 \cdot 1)\right)\right)$$

$$= 2 \cdot 7 + 2 \cdot -6 - 2\left(2 \cdot 5 - 2 \cdot 10 - 2 \cdot 7\right)$$

$$= 14 - 12 - 2\left(10 - 20 - 14\right)$$

$$= 2 - 2(-24) = 2 + 48 = 50$$

③

⑫

④ a) $|A_1| = \begin{vmatrix} 5 & -4 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 5 & -4 \\ 0 & -1 \\ 1 & -3 \end{matrix} = -10-(-3)$

$= -10+3$

$= 7$ //

$\underbrace{-3\ 0\ 0}_{-3}$ $\underbrace{-10\ 0\ 0}_{-10}$

$|A_2| = \begin{vmatrix} 1/2 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 3/2 \\ -1 & 0 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 4(-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3/2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1/2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix}$

$= -4 \cdot (-15/2) - 24$

$= \frac{60}{2} - 24$

$= 30 - 24 = 6$ //

c.a.

$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3/2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 0 & 0 \\ -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{matrix} = 3/2 - 18/2$

$= -15/2$

$\underbrace{9\ 0\ 0}_{9}$ $\underbrace{0\ 0\ 3/2}_{3/2}$

$\begin{vmatrix} 1/2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1/2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{matrix} = -4-20$

$= -24$

$\underbrace{18\ 1\ 1}_{20}$ $\underbrace{-1\ -6\ 3}_{-4}$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -4 & -5 \end{vmatrix} = -2(-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -5 \end{vmatrix} + 4 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -5 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -5 \end{vmatrix}$$

$= -2.20 - 4.(-10)$

$= -40 + 40$

$= 0$ //

c.a.

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & -3 & 4 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -4 & -5 & 0 & -4 \end{array}\right| = 1-(-19) = 1+19 = 20/$$

$\underbrace{0 \ -4 \ -15}_{-19}$ $\underbrace{-15 \ 0 \ 16}_{1}$

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 4 & -5 & 0 & 4 \end{array}\right| = -6-4 = -10/$$

$\underbrace{0 \ 4 \ 0}_{4}$ $\underbrace{10 \ 0 \ -16}_{-6}$

b)

5) i) $\begin{cases} 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$

$x = \frac{D_x}{D}$, $y = \frac{D_y}{D}$, $z = \frac{D_z}{D}$

$$D = \left|\begin{array}{ccc|cc} 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right| = 1-5 = -4 //$$

$\underbrace{1 \ 0 \ 4}_{5}$ $\underbrace{0 \ 2 \ -1}_{1}$

$$D_x = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & -1 \end{array}\right| = 5-5 = \emptyset //$$

$\underbrace{2 \ -1 \ 4}_{5}$ $\underbrace{2 \ 4 \ -1}_{5}$

$$D_y = \left|\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right| = 3-3 = \emptyset //$$

$\underbrace{1 \ 0 \ 2}_{3}$ $\underbrace{0 \ 1 \ 2}_{3}$

$D_z = D$, pois os valores saõ os mesmos.

$x = \frac{0}{-4} = \emptyset$ //

$y = \frac{0}{-4} = \emptyset$ //

$z = \frac{-4}{-4} = 1$ //

$C.S. = \{(0,0,1)\}$

ii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$x = \frac{Dx}{D}, \; y = \frac{Dy}{D}, \; z = \frac{Dz}{D}$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{matrix} = 2-(-1) = 2+1 = 3$$

$\underbrace{0 \;\; 1 \;\; -2}_{-1} \quad \underbrace{0 \;\; 4 \;\; -2}_{2}$

$$Dx = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} = -2-0 = -2$$

$\underbrace{0 \;\; 2 \;\; -2}_{0} \quad \underbrace{0 \;\; 0 \;\; -2}_{-2}$

$$Dy = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \\ 2 & 0 \end{matrix} = 3-(-6) = 3+6 = 9$$

$\underbrace{-4 \;\; 0 \;\; -2}_{-6} \quad \underbrace{-1 \;\; 4 \;\; 0}_{3}$

$$Dz = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{matrix} = -6-(-1) = -6+1 = -5$$

$\underbrace{0 \;\; -1 \;\; 0}_{-1} \quad \underbrace{0 \;\; -4 \;\; -2}_{-6}$

$x = \frac{-2}{3}$

$y = \frac{9}{3}$

$z = \frac{-5}{3}$

$C.S. = \{(-2/3, 3, -5/3)\}$

6)

$$A_t = \begin{bmatrix} 5 & t & 3 \\ t & -1 & 0 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 5 & t & 3 \\ t & -1 & 0 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 5 & t \\ t & -1 \\ 1 & -3 \end{matrix} = -9t+10-(-2t^2-3) = 2t^2-9t+13$$

$\underbrace{-3 \;\; 0 \;\; -2t^2}_{-2t^2-3} \quad \underbrace{10 \;\; 0 \;\; -9t}_{-9t+10}$

ou $t(-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} t & 3 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} + (1)(-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$

$= -t(-2t+9) - (-10-3)$

$= 2t^2 - 9t + 13$

Inventível se $|A| \neq 0$, temos

$2t^2 - 9t + 13 = 0$, como $\Delta < 0$, não tem raízes reais

logo A_t é inventível para todo o valor de t.