Universidade do Minho (DMat) — EngInf
Análise Matemática para Engenharia — 15/04/2023
Teste 1 — Duração: 2 horas

Nome: Soluções — Número: ____

LEI ☐ MIEI ☐

Grupo I – Sem justificar, indique o valor lógico das seguintes proposições.

Resposta correta: 0.75 — Resposta em branco: 0 — Resposta errada: -0,25

Cotação mínima do grupo: 0

	V	F
1. O conjunto $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon\ y-x\geq 0\ \wedge\ (x-1)^2+(y+1)^2<16\}$ é aberto e limitado.	☐	X
2. Se $f\colon\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ é tal que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,2)} f(x,y)=1$, então $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x,mx+2)=1$, para todo o $m\in\mathbb{R}$.	X	☐
3. Não existe uma função $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ com derivadas parcias de segunda ordem contínuas tal que $f_x(x,y)=y^3+8xy$ e $f_y(x,y)=3xy^2-4x^2$.	X	☐
4. A função $f\colon\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x,y)=\begin{cases} x & \text{se } y\neq x^2\\ 2-y & \text{se } y=x^2\end{cases}$ é descontínua em todos os pontos da forma (b,b^2), $b\in\mathbb{R}$.	☐	X
5. Seja $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ uma função derivável. Se $\nabla f(1,1)$ e $v\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ são vetores ortogonais, então $\dfrac{\partial f}{\partial v}(1,1)=0$.	X	☐
6. Se $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ é tal que $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,1)=v_1v_2$, para todo o vetor $v=(v_1,v_2)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, então f não é derivável em $(0,1)$.	X	☐
7. Seja $\mathscr{C}$ a curva de interseção da superfície $z=2y^2+x$ com o plano vertical $x=1$. O declive da reta tangente a $\mathscr{C}$ no ponto $(1,-1,3)$ é positivo.	☐	X
8. Se $z(x,y)=y+f(x^2-y^2)$, sendo $\begin{array}{rccc} f\colon & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ & u & \longmapsto & f(u)\end{array}$ uma função derivável, então $y\dfrac{\partial z}{\partial x}+x\dfrac{\partial z}{\partial y}=x$.	X	☐
9. O conjunto de nível 2 da função $f(x,y,z)=x^2+(y-1)^2$ é um cilindro circular que contém o ponto $(1,2,0)$.	X	☐
10. Se $f,g:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ são funções com derivadas parciais de primeira ordem contínuas tais que $f(1,1)=g(2,1)=2$ e $\nabla f(1,1)=\nabla g(2,1)=(1,2)$, então o plano tangente ao gráfico de f em $(1,1,f(1,1))$ também é tangente ao gráfico de g em $(2,1,g(2,1))$.	☐	X

(Continua)

Grupo II – Apresente os cálculos que realizar e justifique as suas respostas. Responda na folha de teste.

1. [3 val] Determine, se existir, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, para

(a) $f(x,y) = \mathrm{e}^{x^2 y} + \dfrac{x-y^4}{x^3+y^4}$ (b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(2x^3-2y)}{x^3-y} & \text{se} \quad y < x^3 \\ x+2 & \text{se} \quad y \geq x^3 \end{cases}$

(a) Não existe, basta observar que $\lim\limits_{\substack{(x,y)\,\to\,(0,0)\\ x=0}} f(x,y) = 0$ e $\lim\limits_{\substack{(x,y)\,\to\,(0,0)\\ y=0}} f(x,y) = +\infty$.

(b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 2$ uma vez que $\lim\limits_{\substack{(x,y)\,\to\,(0,0)\\ y<x^3}} \dfrac{\operatorname{sen}(2x^3-2y)}{x^3-y} = 2$ e $\lim\limits_{\substack{(x,y)\,\to\,(0,0)\\ y\geq x^3}} (x+2) = 2$.

2. [5.5 val] Considere a função $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y+xy^2}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Mostre que a função f é contínua em $(0,0)$.

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$. Notar que $\dfrac{x^2y+xy^2}{x^2+y^2} = y\,\dfrac{x^2}{x^2+y^2} + x\,\dfrac{y^2}{x^2+y^2}$.

(b) Mostre que, qualquer que seja o vetor $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, existe $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0)$.

$\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(hv_1, hv_2) - f(0,0)}{h} = \dfrac{v_1^2 v_2 + v_1 v_2^2}{v_1^2 + v_2^2}$.

(c) Determine $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, para todo o $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Da alínea anterior, resulta, com $v = (1,0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0) = 0$ e, com $v = (0,1)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0) = 0$.

Para $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{(2xy+y^2)(x^2+y^2) - 2(x^2y+xy^2)x}{(x^2+y^2)^2}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{(x^2+2xy)(x^2+y^2) - 2(x^2y+xy^2)y}{(x^2+y^2)^2}.$$

(d) Estude a diferenciabilidade de f em $(1,1)$ e em $(0,0)$.

Em $(1,1)$ a função f é diferenciável pois, pela alínea anterior, as derivadas parciais em $(1,1)$ são contínuas (funções racionais).

A função f não é diferenciável em $(0,0)$, porque, considerando, por exemplo, $v=(1,1)$, das alíneas (b) e (c), resulta

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)}_{1} \neq v_1 \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}_{0} + v_2 \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}_{0}$$

3. [2 val] Considere a função $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1.$$

Determine os pontos críticos de f e classifique-os quanto à sua natureza, indicando o valor do extremo quando existir.

O ponto $(0,0)$ é um ponto de sela de f e os pontos $(-1,-1)$ e $(1,1)$ são minimizantes locais sendo o mínimo de f em ambos os pontos igual a -1.

4. [2 val] Utilize o método dos multiplicadores de Lagrange para determinar os extremos da função $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = y - x$$

no conjunto $\mathscr{C} = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 2\Big\}$.

Os candidatos a extremantes condicionados resultam apenas dos pontos críticos da função de Lagrange e são $(-1,1)$ para $\lambda = \dfrac{1}{2}$ e $(1,-1)$ para $\lambda = -\dfrac{1}{2}$. A função f atinge, sobre $\mathscr{C}$, o valor máximo 2 em $(-1,1)$ e o valor mínimo -2 em $(1,-1)$.