Universidade do Minho
Departamento de Matemática

LEI
2022/2023

# Tópicos de Matemática Discreta

exame de recurso — 1 de fevereiro de 2023 — duração: 2 horas

Nome: ______________________________ Nº: ____________

## Grupo I

Este grupo é constituído por 6 questões. Em cada questão, deve dizer se a afirmação indicada é verdadeira (V) ou falsa (F), assinalando o respetivo quadrado. Em cada questão, a cotação atribuída será *1 valor*, *-0,25 valores* ou *0 valores*, consoante a resposta esteja certa, errada, ou não seja assinalada resposta, respetivamente. A cotação total neste grupo é no mínimo *0 valores*.

| | | V | F |
|---|---|---|---|
| 1. | Para qualquer fórmula $\varphi$, $\varphi$ é contradição se e só se $\varphi \wedge p_0$ é contradição. | □ | □ |
| 2. | A variável $p_0$ ter valor lógico verdadeiro é uma condição suficiente para a fórmula $p_0 \to (p_1 \leftrightarrow p_0)$ ter valor lógico verdadeiro. | □ | □ |
| 3. | Para qualquer predicado hereditário $p(n)$ sobre os números naturais, se existe um natural $k$ tal que $p(k)$ é uma proposição falsa, então $p(n)$ é falsa para todo o natural $n \leq k$. | □ | □ |
| 4. | Se o produto cartesiano de dois conjuntos tem exatamente 7 elementos, então um dos conjuntos tem um único elemento. | □ | □ |
| 5. | Para quaisquer relações binárias $R$, $S$ e $T$ num conjunto não vazio $A$, se $R \circ T \subseteq S \circ T$, então $R \subseteq S$. | □ | □ |
| 6. | Um cpo com dois elementos minimais não é um reticulado. | □ | □ |

## Grupo II

Este grupo é constituído por 4 questões. Responda, sem justificar, no espaço disponibilizado a seguir à questão.

1. Seja $M(x)$ o predicado "$x$ é multifacetado", relativo a números inteiros $x$. Escreva uma proposição, usando quantificadores, que traduza a afirmação "se algum número negativo é multifacetado, então todos os números são multifacetados".

   Resposta:

2. Sejam $p$ e $q$ as proposições

   $$p: \ \forall_{x \in A} \exists_{y \in A} \, xy = 1 \qquad q: \ \exists_{y \in A} \forall_{x \in A} \, xy = 1.$$

   Indique um subconjunto $A$ de $\mathbb{Q}$ tal que $p \to q$ seja verdadeira.

   Resposta:

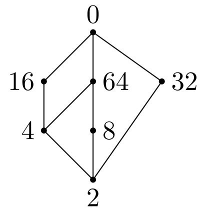
3. Considere os conjuntos $A = \{n^2 \in [0,2] : n \in \mathbb{N}_0\}$ e $B = \{n \in [0,2] : n^2 \in \mathbb{N}_0\}$.
Apresente $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$ por extensão.

Resposta:

4. Considere o c.p.o. $(X, \preceq)$ onde $X = \{0, 2, 4, 8, 16, 32, 64\}$ e $\preceq$ é a relação de ordem parcial definida pelo diagrama de Hasse ao lado.

Indique (ou diga que não existe, se não existir) ínf $\{0, 16, 64\}$ e máx $\{2, 4, 8, 16\}$.

Resposta:




## Grupo III

Este grupo é constituído por 4 questões. Responda na folha de exame.

1. Considere as fórmulas $\varphi = p_0 \to \neg(p_1 \to p_2)$ e $\psi = \neg(p_2 \wedge p_0) \wedge (\neg p_0 \vee p_1)$.
   (a) Indique, justificando, uma fórmula logicamente equivalente a $\neg\varphi$ que não tenha ocorrências do conetivo $\neg$.
   (b) Diga, justificando, se $\varphi \leftrightarrow \psi$ é uma tautologia.

2. Mostre por indução nos naturais que: para todo $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(i(i+1)) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$.

3. Prove que, para quaisquer conjuntos $A$, $B$ e $C$, se tem $(A \cup C) \setminus (B \cap \overline{C}) = (A \setminus B) \cup C$.

4. Seja $R$ a relação de equivalência definida em $\mathbb{R}$ por $x\,R\,y$ se e só se $x^2 - y^2 = 2(y - x)$.
   (a) Determine $[0]_R$.
   (b) Mostre que a relação $R$ é, efetivamente, simétrica.
   (c) Justifique que cada bloco da partição $\mathbb{R}/R$ de $\mathbb{R}$ tem, no máximo, 2 elementos.

| Cotações | I | II | III |
|---|---|---|---|
| | 6 | 4 | 3+2+2+3 |