Universidade do Minho (DMat)
Análise Matemática para Engenharia
Teste 1A

EngInf
9 Abr 2022
Duração: 2h

Nome Soluções | Número

LEI ☐ MIEI ☐

Grupo I – Sem justificar, indique com as letras V ou F o valor lógico das seguintes proposições.

Resposta correcta: **1** Resposta em branco: **0** Resposta errada: **-0,5**

1. Se $A = \mathbb{Z} \times [0, 1]$ então o conjunto dos pontos isolados de A é não vazio. F

2. Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função. Se $\lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x, y) = 2$ então $\lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x^2, y^2) = 4$. F

3. A função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } y \geq x \\ 2y & \text{se } y < x \end{cases}$ é contínua nos pontos $(0, 3)$ e $(1, 1)$ e é descontínua no ponto $(0, 0)$. V

4. Se $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é tal que $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0, 0) = v_1^2 v_2$, para todo o vector $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, então f é derivável em $(0, 0)$. F

Grupo II – Sem justificar, assinale a opção correcta.

Resposta correcta: **1** Resposta em branco: **0** Resposta errada: **-0,25**

1. Considere uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e os subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ que se seguem:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 1)^2 + y^2 = 1\} \text{ e } B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x + 1)^2 + y^2 = 1\}.$$

Sabendo que cada um dos conjuntos A e B está contido num conjunto de nível de f, qual das seguintes situações acontece?

- (★) $f(1, 1) = f(-1, 1)$
- ◯ $f(-1, 0) \neq f(1, 0)$
- ◯ $f(0, 0) = 0$
- ◯ f é descontínua em $(0, 0)$

2. Considere uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- ◯ Se f admite derivadas parciais em $(0, 0)$, então f é derivável em $(0, 0)$
- (★) Se f admite derivadas parciais contínuas em $(0, 0)$, então f é contínua em $(0, 0)$
- ◯ Se f admite derivadas parciais em $(0, 0)$, então $f_x(0, 0) = f_y(0, 0)$
- ◯ Se f admite derivadas parciais em $(0, 0)$, então f é contínua em $(0, 0)$

3. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função derivável cujo plano tangente no ponto $(1, 0, f(1, 0))$ tem equação $z = 2 + x + 3y$. Então:

- ◯ $f(1, 0) = 2$
- ◯ $f_y(1, 0) = 2$
- ◯ $f_x(1, 0) = 0$
- (★) $\nabla f(1, 0) = (1, 3)$

4. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função tal que $\nabla f(x, y) = (y^2 + \cos x, 2xy - \operatorname{sen} y)$ e seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(t) = f(\cos t, \operatorname{sen} t)$. Então $g'(\frac{\pi}{2})$ é:

- ◯ 2
- ◯ 1
- (★) -2
- ◯ 0

Grupo III – Apresente os cálculos que efectuar e justifique as suas respostas. Responda na folha de teste.

1. [4 val] Determine, se existirem, os seguintes limites

   (a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+\operatorname{sen}(y^2)}{x^2+y^2}$ (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-y^4}{3x^2+4y^2}$

   (a) Não existe, porque são diferentes os limites trajectoriais ao longo dos eixos OX e OY.

   (b) O limite proposto vale 0. Notar que $\displaystyle\frac{x^3-y^4}{3x^2+4y^2} = x\,\frac{x^2}{3x^2+4y^2} - y^2\,\frac{y^2}{3x^2+4y^2}$

2. [5 val] Consideremos a função $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x-y)}{x-y} & \text{se} \quad y \neq x \\ 1+x & \text{se} \quad x = y \end{cases}$$

   (a) Estude a continuidade da função f.

   O domínio de continuidade de f é $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\neq y\right\}\cup\{(0,0)\}$.

   (b) Mostre que, dado $v=(v_1,v_2)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, se tem $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = \begin{cases} v_1 & \text{se} \quad v_1 = v_2 \\ 0 & \text{se} \quad v_1 \neq v_2 \end{cases}$

   Usar a definição de derivada direccional num ponto.
   Para $v_1 = v_2$, a resolução é imediata.
   Para $v_1 \neq v_2$, obter $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = \displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(h(v_1-v_2)) - h(v_1-v_2)}{h^2(v_1-v_2)}$ e usar duas vezes a Regra de L'Hospital (derivar a respeito de h).

   (c) Calcule as derivadas parciais de f em $(0,0)$.

   Notando que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial u}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial w}(0,0)$ com $u=(1,0)$ e $w=(0,1)$, da alínea (b), resulta

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

   (d) Estude a diferenciabilidade de f em $(0,0)$.

   A função f não é diferenciável em $(0,0)$, porque, considerando, por exemplo, $v=(1,1)$, das alíneas (b) e (c), resulta

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)}_{1} \neq v_1 \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}_{0} + v_2 \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}_{0}$$

3. [3 val] Considere a função $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = 9 - 2x - x^2 + 4y - 4y^2, \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

   (a) Estude a existência de extremos locais da função f.
   f possui um máximo local em $(-1,1/2)$ de valor 11, e não possui mínimos locais.

   (b) Estude a existência de extremos da função f no conjunto $\mathscr{C} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ x+2y=0\right\}$.
   f possui um único extremo condicionado sobre a recta $x+2y=0$, atingido em $(-1,1/2)$, com valor 11.