

## Tópicos de Matemática Discreta

\_\_\_\_\_ 1.º teste — 23 de novembro de 2020 \_\_\_\_\_ duração: 105 minutos \_\_\_\_\_

Nome: \_\_\_\_\_ Número \_\_\_\_\_

### Grupo I

Este grupo é constituído por 6 questões. Em cada questão, deve dizer se a afirmação indicada é verdadeira (V) ou falsa (F), assinalando o respetivo quadrado. Em cada questão, a cotação atribuída será 1 valor, -0,25 valores ou 0 valores, consoante a resposta esteja certa, errada, ou não seja assinalada resposta, respetivamente. A cotação total neste grupo é no mínimo 0 valores.

|   | V                        | F                        |
|---|--------------------------|--------------------------|
| 1. A última letra de qualquer fórmula proposicional é a letra “)” ou uma variável proposicional.  | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 2. Se todas as variáveis proposicionais que ocorrem em $\varphi = (p_0 \wedge \neg p_1) \rightarrow \perp$ tomarem o valor lógico 1, então $\varphi$ toma o valor lógico 0.                   | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 3. Para quaisquer fórmulas $\varphi$ , $\psi$ e $\sigma$ , se $\varphi \vee \neg \sigma$ é tautologia e $\varphi \Leftrightarrow \psi$ , então $\sigma \rightarrow \psi$ também é tautologia. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 4. O predicado $p(n)$ : “ $3n + 1$ é par”, sobre os elementos $n$ de $\mathbb{N}$ , é hereditário.  | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 5. Os conjuntos $\{a \in \mathbb{N} : a \text{ é ímpar}\}$ e $\{b \in \mathbb{N} : 5b \text{ é ímpar}\}$ são diferentes.  | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 6. Se $A = \{\emptyset, 1, 2, \{1, 3\}\}$ e $B = \{1, 2, \{1\}, 2\}$ , então $\{3, \emptyset, 2, 1\} \subseteq A \cup \{ B \}$ .  | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

### Grupo II

Este grupo é constituído por 4 questões. Responda, sem justificar, no espaço disponibilizado a seguir à questão.

1. Considere as proposições *343 é divisível por 3*, *A soma dos algarismos do número 343 é 10* e *10 é divisível por 3* representadas, respetivamente, por  $p_0$ ,  $p_1$  e  $p_2$ . Represente por uma fórmula a afirmação *Se a soma dos algarismos do número 343 é 10 e 10 não é divisível por 3, então 343 não é divisível por 3*.

Resposta:

2. Dê exemplo, em linguagem simbólica e sem recorrer ao símbolo de negação, de uma proposição equivalente à negação de  $\forall_{x \in A} (x > 0 \rightarrow \forall_{y \in A} xy^2 > 0)$ .

Resposta:

3. Dê exemplo de subconjuntos  $A$ ,  $B$  e  $C$  de  $\mathbb{Z}$ , não vazios, tais que  $A \cap (\overline{B \cup C}) = \emptyset$ .

Resposta:

4. Considere os conjuntos  $A = \{a \in \mathbb{N} : \exists x \in \mathbb{N} \ a = 4x\}$  e  $B = \{b \in \mathbb{N} : b \text{ é par}\}$ . Indique  $\mathbb{N} \setminus (A \cup B)$ .

Resposta:

### Grupo III

Este grupo é constituído por 4 questões. Responda na folha de exame, justificando todas as suas respostas.

1. Considere as fórmulas  $\varphi = (p_0 \leftrightarrow \neg p_1)$  e  $\psi = (p_1 \rightarrow p_0)$ .

(a) Verifique se a fórmula  $\varphi \rightarrow \psi$  é uma tautologia.

(b) Para que  $\varphi$  tenha valor lógico 1, é suficiente que  $\psi$  tenha valor lógico 1?

2. Seja  $P$  a proposição  $\exists x \in A \forall y \in A \ x^3 y + y = 0$ .

(a) Verifique se  $P$  é verdadeira para  $A = \{-3, 0, 1\}$ .

(b) Existe algum subconjunto  $A$  de  $\mathbb{R}$ , com um só elemento não nulo, tal que  $P$  é verdadeira para  $A$ ?

3. Mostre, por indução nos naturais, que

$$3 + 12 + 48 + \dots + 3 \times 4^n = 4^{n+1} - 1,$$

para todo o natural  $n$ .

4. Sejam  $A$  e  $B$  subconjuntos de um conjunto  $X$ . Mostre que  $(A \cup B) \cap \overline{A \cap B} = B$ .

|          |   |    |         |
|----------|---|----|---------|
|          | I | II | III     |
| Cotações | 6 | 4  | 3+2+3+2 |