Universidade do Minho (DMat) | EngInf
Análise Matemática para Engenharia | 28 Maio 2022
Teste 2A | Duração: 2h

Nome | Número

LEI | MIEI

Grupo I – Apresente os cálculos que efectuar e justifique as suas respostas. Responda na folha de teste.

1. [3,5 val] Considere o integral $\mathcal{I} = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{y}} e^{3x-x^3}\, dx\, dy\,.$

   Esboce o domínio de integração, e calcule $\mathcal{I}$ invertendo a ordem de integração.

2. [3,5 val] Considere o integral $\mathcal{J} = \int_0^1 \int_y^{\sqrt{2-y^2}} x\, dxdy.$

   Esboce a região de integração e calcule $\mathcal{J}$, usando coordenadas polares.

3. [5 val] Considere o sólido $\mathcal{S}$ que é limitado

   - inferiormente, pela superfície cónica $z^2 = 3(x^2+y^2)$, e
   - superiormente, pela superfície esférica $x^2+y^2+(z-2)^2 = 4$.

   (a) Faça um esboço de $\mathcal{S}$.

   (b) Estabeleça um integral em coordenadas cilíndricas que lhe permita calcular o volume de $\mathcal{S}$.

   (c) Estabeleça um integral em coordenadas esféricas que lhe permita calcular o volume de $\mathcal{S}$.

   (d) Calcule o volume de $\mathcal{S}$, recorrendo a um integral ou a uma soma de integrais.

(v.s.f.f.)

Grupo II – Sem justificar, indique com as letras V ou F o valor lógico das seguintes proposições.

Resposta correcta: **1** Resposta em branco: **0** Resposta errada: **-0,5**

(a) Se $f(x,y) > 0$ para todo o $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ então $\displaystyle\int_{-1}^{0}\int_{-2}^{-1} f(x,y)\,dxdy < 0$. ☐

(b) Se $f\colon [0,1]\times[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ é integrável então $\displaystyle\int_0^1\int_0^x f(x,y)\,dy\,dx = \int_0^1\int_0^y f(x,y)\,dxdy$. ☐

(c) Em coordenadas polares, a equação da circunferência $x^2 + (y-1)^2 = 3$ é $\rho = \sqrt{3}$. ☐

(d) $\left(\sqrt{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$ são as coordenadas esféricas do ponto cujas coordenadas cilíndricas são $\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}, -1\right)$. ☐

Grupo III – Sem justificar, assinale a opção correcta.

Resposta correcta: **1** Resposta em branco: **0** Resposta errada: **-0,25**

(a) Seja $\mathcal{J} = \displaystyle\iint_{\mathcal{R}} (x+y)^2 e^{x-y}\, d(x,y)$, onde $\mathcal{R}$ é o domínio plano limitado pelas rectas $x+y=1$, $x+y=4$, $x-y=-1$, e $x-y=1$. Usando a mudança de variáveis $x = \frac{3}{2}u - v + 1$, $y = \frac{3}{2}u + v$, $\mathcal{I}$ é dado por

- ◯ $\displaystyle\int_0^1\int_0^1 (3u+1)^2\, e^{1-2v}\, dudv$
- ◯ $\displaystyle\frac{3}{2}\int_0^1\int_0^1 (3u+1)^2\, e^{1-2v}\, dudv$
- ◯ $\displaystyle 3\int_0^1\int_0^1 (3u+1)^2\, e^{1-2v}\, dudv$
- ◯ $\displaystyle\frac{1}{3}\int_0^1\int_0^1 (3u+1)^2\, e^{1-2v}\, dudv$

(b) Sejam $\mathcal{B} = [1,3]\times[0,1]\times[0,\pi/2]$ e $\displaystyle\iiint_{\mathcal{B}} \cos z\, d(x,y,z) = k$. Então:

- ◯ $k = 1$
- ◯ $k = -2$
- ◯ $k = 2$
- ◯ nenhum dos anteriores, mas $k = \ldots\ldots$

(c) Seja $\mathcal{J} = \displaystyle\int_1^2\int_{-1}^3\int_2^5 f(x,z)\,dxdydz$. Então:

- ◯ $\mathcal{J} = \displaystyle\int_1^2\int_2^5 f(x,z)\,dxdz$
- ◯ $\mathcal{J} = 0$
- ◯ $\mathcal{J} = 3\displaystyle\int_1^2\int_2^5 f(x,z)\,dxdz$
- ◯ $\mathcal{J} = 4\displaystyle\int_1^2\int_2^5 f(x,z)\,dxdz$

(d) Sejam $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções contínuas. Então:

- ◯ $\displaystyle\int_0^1\int_0^2\int_0^3 f(x)\,g(y)\,h(z)\,dxdydz = \int_0^1 f(x)\,dx \int_0^2 g(y)\,dy \int_0^3 h(z)\,dz$
- ◯ $\displaystyle\int_0^1\int_0^2\int_0^3 f(x)\,g(y)\,h(z)\,dxdydz = \int_0^1 h(z)\,dz \int_0^2 g(y)\,dy \int_0^3 f(x)\,dx$
- ◯ $\displaystyle\int_0^1\int_0^2\int_0^3 \big(f(x)+g(y)+h(z)\big)\,dxdydz = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_0^2 g(y)\,dy + \int_0^3 h(z)\,dz$
- ◯ $\displaystyle\int_0^1\int_0^2\int_0^3 \big(f(x)+g(y)+h(z)\big)\,dxdydz = \int_0^1 h(z)\,dz + \int_0^2 g(y)\,dy + \int_0^3 f(x)\,dx$