Universidade do Minho (DMat)
Análise Matemática para Engenharia
Exame de recurso

EngInf
23 Jun 2022
Duração: 2h

Nome Soluções

Número

LEI ☐ MIEI ☐

Exame Completo (Partes 1A e 2A) ☐ Teste 1 (Partes 1A e 1B) ☐ Teste 2 (Partes 2A e 2B) ☐

Parte 1A

1. [4 val] Considere a função definida por $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2y}{3x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   (a) Estude a continuidade de f.

   A função f é contínua em $\mathbb{R}^2$.

   (b) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0)$, segundo qualquer vector $v \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{2h^3 v_1^2 v_2}{h(3h^2 v_1^2 + h^2 v_2^2)} = \cdots = \frac{2v_1^2 v_2}{3v_1^2 + v_2^2}$$

   (c) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial u}(0,0), \text{ com } u = (1,0) \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial w}(0,0), \text{ com } w = (0,1)$$

   Então

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

   (d) Estude a diferenciabilidade de f em todos os pontos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

   A função f é diferenciável em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, porque é aí uma função racional.
   Não é diferenciável em $(0,0)$, porque, considerando $v = (1,1)$, das alíneas (b) e (c) vem

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)}_{1/2} \neq v_1 \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}_{0} + v_2 \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}_{0}$$

2. [2 val] Considere a função definida por $f(x,y) = 2x^2 - 3y^2$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
   Estude a existência de extremos locais de f, bem como a sua natureza.

   A função f possui um único candidato a extremante (local), que é o ponto crítico, $(0,0)$. Pelo teste do Hessiano, conclui-se que este ponto não é extremante. Logo, f não possui extremos locais.

3. Sem justificar, indique com as letras V ou F o valor lógico das seguintes proposições.

   Resposta correcta: **1** Resposta em branco: **0** Resposta errada: **-0,5**

   (a) Dados $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, se $\alpha \neq \beta$, a intersecção dos conjuntos de nível α e β é vazia. $\boxed{\text{V}}$

   (b) Dada $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, se $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ é descontínua em (a,b), então f não é diferenciável em (a,b). $\boxed{\text{F}}$

4. Sem justificar, assinale a opção correcta em cada uma das alíneas seguintes.

Resposta correcta: **1** Resposta em branco: **0** Resposta errada: **-0,25**

(a) Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y) = e^y$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,y) = 7y^2$ e seja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $h(t) = f(t^2, e^{-t})$. Então $h'(0)$ é igual a

- ⊛ -7
- ◯ -1
- ◯ 1
- ◯ 7

(b) Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função tal que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y) = 2$. Então:

- ◯ $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x,x) = 2$
- ⊛ $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x,3x+1) = 2$
- ◯ $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x,2x) = 2$
- ◯ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} f(x^2,y^2) = 4$

Parte 2A

1. [2 val] Considere o integral $\mathcal{I} = \displaystyle\int_0^3 \int_{y^2}^9 y\cos(x^2)\,dx\,dy\,.$

   Esboce o domínio de integração, e calcule $\mathcal{I}$ invertendo a ordem de integração.

$$\mathcal{I} = \int_0^9 \int_0^{\sqrt{x}} y\cos(x^2)\,dy\,dx = \cdots = \frac{\operatorname{sen}(81)}{4}$$

2. [4 val] Considere o sólido $\mathcal{S}$ que é interior, simultaneamente, às superfícies esféricas

$$x^2+y^2+z^2=1 \quad \text{e} \quad x^2+y^2+(z-1)^2=1.$$

   Faça um esboço de $\mathcal{S}$, e estabeleça um integral, ou uma soma de integrais, que lhe permita calcular o volume de $\mathcal{S}$, usando:

   (a) coordenadas cilíndricas; (b) coordenadas esféricas.

   (a) $\operatorname{vol}(\mathcal{S}) = \displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}/2}\int_{1-\sqrt{1-\rho^2}}^{\sqrt{1-\rho^2}} \rho\,dz\,d\rho\,d\theta$

   (b) $\operatorname{vol}(\mathcal{S}) = \displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\int_0^{1} r^2\operatorname{sen}\phi\,dr\,d\phi\,d\theta + \int_0^{2\pi}\int_{\pi/3}^{\pi/2}\int_0^{2\cos\phi} r^2\operatorname{sen}\phi\,dr\,d\phi\,d\theta$

3. Sem justificar, indique com as letras V ou F o valor lógico das seguintes proposições.

   Resposta correcta: **1** Resposta em branco: **0** Resposta errada: **-0,5**

   (a) As coordenadas polares do ponto de coordenadas cartesians $(\pi,0)$ são $(\pi,0)$. $\boxed{\text{V}}$

   (b) Se $\mathscr{C}$ é o círculo de centro na origem e raio 1, então $\displaystyle\iint_{\mathscr{C}} x\,d(x,y)=0$. $\boxed{\text{V}}$

4. Sem justificar, assinale a opção correcta em cada uma das alíneas seguintes.

   Resposta correcta: **1** Resposta em branco: **0** Resposta errada: **-0,25**

   (a) Sejam $\mathcal{B}=[0,2]^3$ e $\displaystyle\iiint_{\mathcal{B}} xy\;d(x,y,z)=k$. Então:

   ○ $k=2$ ⊛ $k=8$

   ○ $k=4$ ○ nenhum dos anteriores.

   (b) Sejam $f\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ contínua e $\mathcal{R}$ o domínio triangular de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,1)$. Usando a mudança de variáveis $x+y=u$, $y=v$, o integral $\displaystyle\iint_{\mathcal{R}} f(x+y)\,d(x,y)$ é dado por

   ⊛ $\displaystyle\int_0^1 uf(u)\,du$ ○ $\displaystyle\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^u f(u)\,dv\,du$

   ○ $\displaystyle\int_0^1\int_0^u vf(u)\,dv\,du$ ○ $\displaystyle 2\int_0^1\int_0^u f(u)\,dv\,du$

Parte 1B

5. [4 val] Determine, se existirem, os seguintes limites

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-y^4}{x^2+y^2}$

(a) Não existe, porque, por exemplo,

$$\lim_{\substack{(x,\,y)\to(0,\,0)\\ y\,=\,0}} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{\substack{(x,\,y)\to(0,\,0)\\ x\,=\,y^2}} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \frac{1}{2}$$

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-y^4}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2-y^2)(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 0$

6. [1,5 val] Considere a função definida por $f(x,y) = 2x^2 - 3y^2$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Estude a existência e a natureza de extremos da função f restrita ao conjunto $\mathscr{C} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2+y^2 = 5\right\}$.

f possui um máximo condicionado de valor 10, que é atingido nos pontos $(\sqrt{5},0)$ e $(-\sqrt{5},0)$, e possui um mínimo condicionado de valor -15, que é atingido nos pontos $(0,\sqrt{5})$ e $(0,-\sqrt{5})$.

7. Sem justificar, indique com as letras V ou F o valor lógico das seguintes proposições.

Resposta correcta: **1** Resposta em branco: **0** Resposta errada: **-0,5**

(a) O conjunto $A = \left\{(1, \frac{1}{n}) : \ n \in \mathbb{N}\right\}$ não é aberto nem limitado. $\boxed{\text{F}}$

(b) O conjunto dos pontos de continuidade da função $g(x,y) = \begin{cases} 4x+2y & \text{se } \ y \geq 0 \\ x^3 - y^2 & \text{se } \ y < 0 \end{cases}$

é $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$. $\boxed{\text{F}}$

8. Sem justificar, assinale a opção correcta em cada uma das alíneas seguintes.

Resposta correcta: **1** Resposta em branco: **0** Resposta errada: **-0,25**

(a) Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função cujas curvas de nível $k \geq 0$ são circunferências de centro na origem e raio k^2. Então

- ◯ $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$
- ◯ $f(x,y) = x^2+y^2-1$
- ⊛ $f(x,y) = \sqrt[4]{x^2+y^2}$
- ◯ $f(x,y) = 1-(x^2+y^2)$

(b) Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x,y) = xy+y-x$. O plano tangente ao gráfico de f no ponto $(-1,-1,f(-1,-1))$

- ◯ intersecta o eixo dos zz no ponto de cota 1;
- ◯ intersecta o eixo dos yy no ponto de ordenada $1/2$;
- ⊛ intersecta o eixo dos xx no ponto de abcissa $-1/2$;
- ◯ contém a origem.

Para os alunos que fazem apenas a parte relativa ao Teste 1, a cotação das questões 1. e 2. da **Parte 1A** passa a ser

Questão 1. 5 val Questão 2. 1,5 val

Parte 2B

5. [3,5 val] Considere o integral $\mathcal{J} = \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{0} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy$.

   Esboce a região de integração e calcule $\mathcal{J}$ usando coordenadas polares.

$$\mathcal{J} = \int_0^2 \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \rho\, e^{-\rho^2}\, d\theta\, d\rho = \cdots = \frac{\pi(1-e^{-4})}{2}$$

6. [1,5 val] Considere o sólido $\mathcal{S}$ da questão 2 da **Parte 2A**.

   Calcule o volume de $\mathcal{S}$, usando coordenadas cilíndricas ou coordenadas esféricas. $5\pi/12$

7. Sem justificar, indique com as letras V ou F o valor lógico das seguintes proposições.

   Resposta correcta: **1** Resposta em branco: **0** Resposta errada: **-0,5**

   (a) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função integrável em qualquer intervalo limitado então $\int_3^5 \int_0^2 f(x)\, dxdy = 2 \int_0^2 f(x)\, dx$. $\boxed{\text{V}}$

   (b) A equação, em coordenadas cilíndricas, da superfície esférica de centro $(0,0,0)$ e raio 1 é $\rho = 1$. $\boxed{\text{F}}$

8. Sem justificar, assinale a opção correcta em cada uma das alíneas seguintes.

   Resposta correcta: **1** Resposta em branco: **0** Resposta errada: **-0,25**

   (a) Se $\mathcal{I} = \int_0^1 \int_0^x x^2 y\, dydx$, então:

   ◯ $\mathcal{I} = \int_0^1 \int_0^y x^2 y\, dxdy$ ◯ $\mathcal{I} = \int_0^1 \int_y^0 x^2 y\, dxdy$

   ◯ $\mathcal{I} = \int_0^1 \int_1^y x^2 y\, dxdy$ ⊛ $\mathcal{I} = \int_0^1 \int_y^1 x^2 y\, dxdy$

   (b) Em coordenadas esféricas, a equação da superfície $x^2 + y^2 = x$ é dada por

   ⊛ $r^2 \operatorname{sen}^2 \phi = r \cos\theta \operatorname{sen}\phi$ ◯ $r = \cos\theta \operatorname{sen}\phi$

   ◯ $r^2 = r\cos\phi$ ◯ $r \operatorname{sen}\phi = \cos\phi \operatorname{sen}^2\phi$

Para os alunos que fazem apenas a parte relativa ao Teste 2, a cotação das questões 1. e 2. da **Parte 2A** passa a ser

Questão 1. 3,5 val Questão 2. 3,5 val