

Tópicos de Matemática Discreta

2.º teste — 11 de janeiro de 2023 — duração: 1h45min

Nome: _____ Número: _____

Grupo I

Este grupo é constituído por 6 questões. Em cada questão, deve dizer se a afirmação indicada é verdadeira (V) ou falsa (F), assinalando o respetivo quadrado. Em cada questão, a cotação atribuída será 1 valor, -0,25 valores ou 0 valores, consoante a resposta esteja certa, errada, ou não seja assinalada resposta, respetivamente. A cotação total neste grupo é no mínimo 0 valores.

- | | V | F |
|---|--------------------------|--------------------------|
| 1. Se $A = \{\{1\}, \{\{1\}\}, \mathbb{Z}\}$ e $B = \{1, \emptyset, \{1\}\}$, então $B \setminus A = \{\emptyset\}$. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 2. Para qualquer natural n e qualquer conjunto A , $\mathcal{P}(A^n) = (\mathcal{P}(A))^n$. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 3. Dado $A = \mathbb{Z}$, os conjuntos $\{x \in A : x + 1 \in A\}$ e $\{x + 1 : x \in A\}$ são iguais. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 4. A família de conjuntos $\{[-r, r] : r \in \mathbb{R}^+\}$ não é uma partição de \mathbb{R} . | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 5. Se (A, \leq) é um cpo e $X \subseteq A$ tem elemento máximo, então X tem um só elemento maximal. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 6. Se uma relação binária R , num conjunto não vazio A , é simétrica e distinta da relação identidade, então garantidamente R não é antissimétrica. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Grupo II

Este grupo é constituído por 4 questões. Responda, sem justificar, no espaço disponibilizado a seguir à questão.

1. Considere os conjuntos $A = \{a \in \mathbb{Z} : 3a \text{ é divisível por } 6\}$ e $B = \{b \in \mathbb{Z} : b - 3 \leq 5\}$. Indique $\mathbb{N} \cap (B \setminus A)$.

Resposta:

2. Considere os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{2, 3, 4\}$ e considere a relação binária R de A em B formada pelos pares (a, b) tais que $a + b > 4$ e a relação binária $S = \{(3, 1), (3, 3), (4, 2)\}$ de B em A . Indique $R \circ S^{-1}$.

Resposta:

3. Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Indique a menor relação binária R em A que contém os pares $(1, 4)$, $(3, 2)$ e $(4, 3)$ e tal que R é antissimétrica e transitiva.

Resposta:

4. Considere o conjunto $A = \{a, b, c, d\}$. Indique a relação de equivalência R em A associada à partição $\Pi = \{\{a, d\}, \{b, c\}\}$ de A .

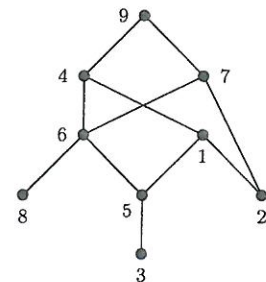
Resposta:

Grupo III

Este grupo é constituído por 3 questões. Responda na folha de exame.

- Mostre que, se A , B e C são conjuntos não vazios, então $(A \times C) \setminus (B \times C) = (A \setminus B) \times C$.
- Seja R a relação de equivalência definida no conjunto $A = \{5, 10, 50, 100, 500, 1000, 1500\}$ por $x R y$ se e só se existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $y = x \times 10^n$.
 - Mostre que a relação R é, efetivamente, reflexiva.
 - Indique $a \in A$ tal que $[a]_R \cap [10]_R = \emptyset$. Justifique.
 - Indique, justificando, o conjunto quociente A/R .

3. Considere o c.p.o. (A, \leq) com o seguinte diagrama de Hasse associado:



- Indique os elementos minimais e os elementos maximais do subconjunto $X = \{2, 3, 5, 8\}$ de A .
- Indique o conjunto dos majorantes do subconjunto $Y = \{1, 2, 6\}$ de A .
- O subconjunto $Z = \{1, 4, 5, 6, 8\}$ de A admite supremo? Justifique a sua resposta.
- Verifique que o c.p.o. dado não é um reticulado.

Cotações	I	II	III
	6	4	3+4+3

TMD

2º teste

11/01/2022

Grupo I

1. F

$$B \setminus A = \{x : x \in B \wedge x \notin A\}$$

$$= \{1, \emptyset\}$$

A tem 3 elementos : $\{1\}$
 $\{\{1\}\}$
 \mathbb{Z}

Note-se que $1 \notin A$ e $\emptyset \notin A$, mas $\{1\} \in A$.

2. F

Consideremos, por exemplo, $A = \{1\}$ e $m=2$.

Temos que

$$A^2 = A \times A = \{(1,1)\},$$

$$\text{pois que } \mathcal{P}(A^2) = \{\emptyset, \{(1,1)\}\}.$$

$$\begin{aligned} \text{Por outro lado, } (\mathcal{P}(A))^2 &= \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A) \\ &= \{\emptyset, \{1\}\} \times \{\emptyset, \{1\}\} \\ &= \{(\emptyset, \emptyset), (\emptyset, \{1\}), (\{1\}, \emptyset), (\{1\}, \{1\})\}. \end{aligned}$$

3. V

Se $x \in \mathbb{Z}$, é claro que $x+1 \in \mathbb{Z}$. Logo,

$$\{x \in A : x+1 \in A\} = \mathbb{Z}.$$

Por outro lado, $\{x+1 : x \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}$

Portanto, $\{x \in A : x+1 \in A\} = \{x+1 : x \in A\}$

quando $A = \mathbb{Z}$.

4. V $\mathcal{F} = \{[-r, r] : r \in \mathbb{R}^+\}$

Note-se que $[-2, 2] \cap [-1, 1] \neq \emptyset$.

Logo, os blocos da família $\{[-r, r] : r \in \mathbb{R}^+\}$ não são disjuntos e, portanto, \mathcal{F} não é uma partição de \mathbb{R} .

5. V

Seja $m = \max(X)$. Então, $m \in X$ e $\forall x \in X$ $x \leq m$.

Logo, m é um elemento maximal de X . Suponhamos que existe um (outro) elemento y que é maximal de

X . Então, $\nexists x \in X : (y \leq x \wedge y \neq x)$. Mas,

como $m = \max(X)$, $y \leq m$, pelo que $y = m$.

6. F

Consideremos, por exemplo, $A = \{1, 2\}$ e $R = \{(1, 1)\}$

Temos que $\text{id}_A = \{(1, 1), (2, 2)\}$. Logo, R é simétrico, antissimétrico e distinta de id_A .

Grupo II

1.

$$\begin{aligned}
 A &= \{a \in \mathbb{Z} : 3a \text{ é divisível por } 6\} \\
 &= \{a \in \mathbb{Z} : 3a = 6k \text{ para algum } k \in \mathbb{Z}\} \\
 &= \{a \in \mathbb{Z} : a = 2k \text{ para algum } k \in \mathbb{Z}\} \\
 &= \{a \in \mathbb{Z} : a \text{ é par}\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B &= \{b \in \mathbb{Z} : b - 3 \leq 5\} \\
 &= \{b \in \mathbb{Z} : b \leq 8\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B \setminus A &= \{b \in \mathbb{Z} : b \leq 8\} \setminus \{a \in \mathbb{Z} : a \text{ é par}\} \\
 &= \{b \in \mathbb{Z} : b \leq 8 \text{ e } b \text{ não é par}\} \\
 &= \{b \in \mathbb{Z} : b \leq 8 \text{ e } b \text{ é ímpar}\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{N} \cap (B \setminus A) &= \{b \in \mathbb{N} : b \leq 8 \text{ e } b \text{ é ímpar}\} \\
 &= \{1, 3, 5, 7\}
 \end{aligned}$$

2. $S^{-1} = \{(1, 3), (3, 3), (2, 4)\}$

$$R = \{(1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$$

$$\begin{aligned}
 \hookrightarrow (1, b) \in R &\Leftrightarrow 1 + b > 4 \Leftrightarrow b > 3 \\
 (2, b) \in R &\Leftrightarrow 2 + b > 4 \Leftrightarrow b > 2 \\
 (3, b) \in R &\Leftrightarrow 3 + b > 4 \Leftrightarrow b > 1
 \end{aligned}$$

Assim, $R \circ S^{-1} = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}$

3.

$$(1,4), (3,2), (4,3) \in R.$$

$$\left. \begin{array}{l} (1,4) \in R \wedge (4,3) \in R \\ R \text{ transitiva} \end{array} \right\} \Rightarrow (1,3) \in R$$

$$\left. \begin{array}{l} (1,3) \in R \wedge (3,2) \in R \\ R \text{ transitiva} \end{array} \right\} \Rightarrow (1,2) \in R$$

$$\left. \begin{array}{l} (4,3) \in R \wedge (3,2) \in R \\ R \text{ transitiva} \end{array} \right\} \Rightarrow (4,2) \in R$$

$$\text{Seja } R = \{(1,4), (3,2), (4,3), (1,3), (1,2), (4,2)\}$$

$$\text{Temos que } R \cap R^{-1} = \emptyset \quad , \quad R \circ R = \{(1,2), (1,3), (4,2)\} \subseteq R$$

Logo, R é transitiva e antissimétrica.

$$4. \quad A/R = \{\{a,d\}, \{b,c\}\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R = \{(a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (a,d), (d,a), (b,c), (c,b)\}$$

$$[a]_R = [d]_R$$

$$[b]_R \neq [c]_R$$

Grupo III

1. Seja $(x,y) \in (A \times C) \setminus (B \times C)$. Temos que
~~Seja~~ $(x,y) \in A \times C \wedge (x,y) \notin B \times C$.

Or,

$$\begin{aligned}(x, y) \in A \times C \wedge (x, y) \notin B \times C &\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in C) \wedge (x \notin B \vee y \notin C) \\&\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in C \wedge x \notin B) \\&\quad \vee (x \in A \wedge y \in C \wedge y \notin C) \\&\Leftrightarrow x \in A \wedge y \in C \wedge x \notin B \\&\Leftrightarrow x \in A \setminus B \wedge y \in C \\&\Leftrightarrow (x, y) \in (A \setminus B) \times C.\end{aligned}$$

Portanto,

$$(A \times C) \setminus (B \times C) = (A \setminus B) \times C.$$

2.

(a) Seja $a \in A$

$$a R a \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{Z} : a = a \times 10^m, \text{ o que é verdade:}$$

basta considerar $m=0$

$$a = a \times 10^0$$

Portanto, $a R a$, para todo $a \in A$, donde R é ~~transitiva~~ reflexiva.

(b) Sabemos que $[a]_R \cap [10]_R = \emptyset$ se e só se

$a \not\sim 10$, i.e. se não existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que

$$a = 10 \times 10^m$$

Logo, $a \not\sim 10$ se e só se existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que

$$a = 10^{m+1}.$$

Basta escolher a que não seja uma potência de 10.

Considere-se $a=5$.

OBS :

$$[5]_R = \{5, 50, 500\}$$

$$[10]_R = \{10, 100, 1000\}$$

(c)

$$A/R = \{[a]_R : a \in A\}$$

$$[5]_R = \{b \in A : \exists m \in \mathbb{Z} \quad b = 5 \times 10^m\}$$

$$= \{5, 50, 500\} = [50]_R = [500]_R$$

↓

$$5 = 5 \times 10^0 \quad (m=0)$$

$$50 = 5 \times 10^1 \quad (m=1)$$

$$500 = 5 \times 10^2 \quad (m=2)$$

$$[10]_R = \{b \in A : \exists m \in \mathbb{Z} : b = 10 \times 10^m\}$$

$$= \{b \in A : \exists m \in \mathbb{Z} : b = 10^{m+1}\}$$

$$= \{10, 100, 1000\} = [100]_R = [1000]_R$$

↓
 $10 = 10 \times 10^0; 100 = 10 \times 10^1; 1000 = 10 \times 10^2$

$$[1500]_R = \{b \in A : \exists m \in \mathbb{Z} : b = 1500 \times 10^m\}$$

$$= \{1500\}$$

↓

$$1500 = 1500 \times 10^0$$

$$A/R = \{ \{10, 100, 1000\}, \{5, 50, 500\}, \{1500\} \}$$

3.

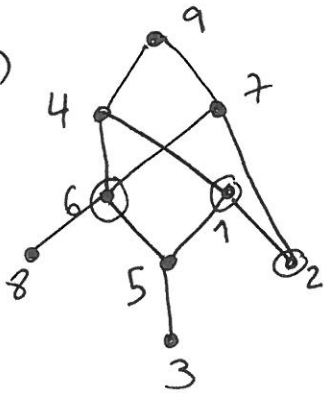
(a) $X = \{2, 3, 5, 8\}$



elementos minimais : 2, 3, 8

elementos maximais : 2, 5, 8

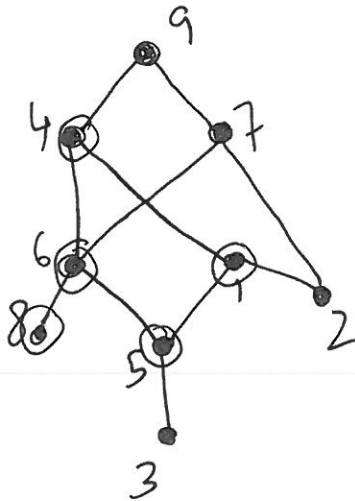
(b)



$$Y = \{1, 2, 6\}$$

$$\text{Maj}(Y) = \{4, 9\}$$

(c)



$$Z = \{1, 4, 5, 6, 8\}$$

$$\text{Maj}(Z) = \{4, 9\}$$

$$\text{Logo, } \sup(Z) = 4$$

menor dos
majorantes
($4 \leq 9$)

(d)

$$6 // 2$$

$$\nexists \inf \{2, 6\} \text{ pois } \text{Min}(\{2, 6\}) = \emptyset$$

logo, o c.p.o. (A, R) não é um reticulado.

(OBS: Num reticulado, para quaisquer x, y , existe $\sup\{x, y\}$ e existe $\inf\{x, y\}$.)