

Tópicos de Matemática Discreta

_____ 2.º teste — 19 de janeiro de 2022 _____ duração: 2 horas _____

Nome: _____ Número _____

Grupo I

Este grupo é constituído por 6 questões. Em cada questão, deve dizer se a afirmação indicada é verdadeira (V) ou falsa (F), assinalando o respetivo quadrado. Em cada questão, a cotação atribuída será 1 valor, -0,25 valores ou 0 valores, consoante a resposta esteja certa, errada, ou não seja assinalada resposta, respetivamente. A cotação total neste grupo é no mínimo 0 valores.

- | | V | F |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1. Sendo A e B os conjuntos $A = \{\emptyset, 2, \{1, 2\}\}$ e $B = \{0, 2, \{\emptyset\} , \{1\}\}$, o conjunto $A \cap \mathcal{P}(B)$ tem 2 elementos. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 2. Para quaisquer conjuntos A , B e C , $(A \times B) \cup C = (A \cup C) \times (B \cup C)$. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 3. A família de conjuntos $\left\{ \{x \in \mathbb{Z} : x < -100 \vee x > 100\}, \{x \in \mathbb{Z} : x \leq 100\} \right\}$ é uma partição de \mathbb{Z} . | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 4. A relação binária R em \mathbb{Z} definida por $x R y$ se e só se $ x = y $ é uma relação reflexiva e antissimétrica. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 5. Existe uma relação de equivalência R em \mathbb{N} tal que $\mathbb{N}/R = \{\mathbb{N}, \mathbb{N} \setminus \{1\}\}$. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 6. A relação binária em $A = \{0, 1, 2\}$ definida por $R = \{(0, 2), (2, 0), (1, 2), (2, 1)\}$ é uma função de A em A . | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Grupo II

Este grupo é constituído por 5 questões. Responda, sem justificar, no espaço disponibilizado a seguir à questão.

1. Dê exemplos de dois conjuntos A e B não vazios tais que $(A \times B) \cap (B \times A) = \emptyset$.

Resposta:

2. Considere os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{\{1, 2\}, \{1, 3, 4\}, \{5\}\}$ e a relação binária W de A em B formada pelos pares (a, X) tais que $a \in X$. Indique $W^{-1} \circ W$.

Resposta:

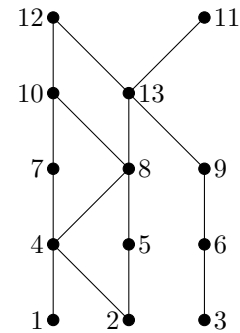
3. Seja S a relação binária em $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ definida por $S = \{(3, 1), (1, 2), (3, 3), (1, 3), (4, 6), (5, 6)\}$. Indique a menor relação binária em A que contém S e é uma relação de equivalência.

Resposta:

4. Considere o c.p.o. (A, R) , onde $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 13\}$ e R é a relação de ordem parcial definida pelo diagrama de Hasse seguinte.

Indique $R \cap \{(2, 2), (2, 3), (3, 6), (5, 7), (8, 4), (9, 12), (10, 8)\}$.

Resposta:



5. Considere o c.p.o. (A, R) definido na questão 4 e o subconjunto $X = \{4, 5, 6\}$ de A . Indique o conjunto dos majorantes de X e, caso exista, o supremo de X .

Resposta:

Grupo III

Este grupo é constituído por 3 questões. Responda na folha de exame, justificando todas as suas respostas.

- Seja ρ a relação de equivalência definida em \mathbb{R} por $x \rho y$ se e só se $x - y \in \mathbb{Z}$.
 - Mostre que a relação ρ é, efetivamente, transitiva.
 - Determine $[0]_\rho$.
 - Dê exemplo de elementos $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a \neq b$ e $[a]_\rho = [b]_\rho = [\frac{1}{2}]_\rho$.
- Considere o c.p.o. (B, \preceq) , onde $B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ e \preceq é a relação definida por

$$a \preceq b \iff a = b \vee |a| < |b|.$$
 - Apresente o diagrama de Hasse deste c.p.o.
 - Verifique que o c.p.o. dado não é um reticulado.
- Considere as funções

$$g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z} \\ n \mapsto -n$$

e $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ definida por

$$f(n) = \begin{cases} 2 - 2n & \text{se } n < 1 \\ 2n - 1 & \text{se } n \geq 1 \end{cases}.$$

- Determine $f(\{-3, 0, 1, 2\})$ e $f^{\leftarrow}(\{k \in \mathbb{N} : k \text{ é par}\})$.
- Determine $g \circ f$.
- Diga se a relação inversa de g é uma função de \mathbb{Z} em \mathbb{N} . Justifique a sua resposta.

Cotações	I	II	III
	6	5	4+3+3