Cálculo de Programas

2.º Ano de LCC (Universidade do Minho) Ano Lectivo de 2022/23

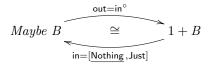
Teste — 2 de Junho de 2023, 10h00–12h00 Salas E1-0.04 + E1-0.20

PROVA PRESENCIAL INDIVIDUAL SEM CONSULTA (2h)

Importante — Ler antes de iniciar a prova:

- Esta prova consta de 8 questões que valem, cada uma, 2.5 valores. O tempo médio estimado para resolução de cada questão é de 15 min.
- Recomenda-se que os alunos leiam a prova antes de decidirem por que ordem querem responder às questões que são colocadas.

Questão 1 Recorde o isomorfismo



e considere a função:

```
fromMaybe :: a \rightarrow Maybe \ a \rightarrow a fromMaybe a = [\underline{a}, id] \cdot \text{out}
```

Derive a versão *pointwise* de fromMaybe por forma a não recorrer ao combinador de alternativa (vulg. 'either') de funções.

RESOLUÇÃO: Tem-se (justificar os passos com reticências):

```
\begin{array}{ll} & \text{fromMaybe } a = [\underline{a},id] \cdot \text{out} \\ \\ \equiv & \left\{ \begin{array}{l} \text{in / out; } inMaybe \end{array} \right\} \\ \\ \text{fromMaybe } a \cdot [\underline{\text{Nothing}}, \text{Just}] = [\underline{a},id] \\ \\ \equiv & \left\{ \begin{array}{l} \text{fromMaybe } a \cdot \underline{\text{Nothing}} = \underline{a} \\ \\ \text{fromMaybe } a \cdot \overline{\text{Just}} = id \end{array} \right. \\ \\ \equiv & \left\{ \begin{array}{l} \text{fromMaybe } a \text{ Nothing} = a \\ \\ \text{fromMaybe } a \text{ Nothing} = a \end{array} \right. \\ \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{fromMaybe } a \text{ Nothing} = a \\ \\ \text{fromMaybe } a \text{ (Just } a') = a' \end{array} \right. \end{array}
```

Questão 2 Suponha que apenas sabe a seguinte propriedade de uma dada função α ,

$$\alpha \cdot \langle f, \langle q, h \rangle \rangle = \langle h, f \rangle \tag{E1}$$

válida para quaisquer f, g e h que a tipem correctamente.

Deduza a definição de α e, a partir do seu tipo mais geral, a respectiva propriedade *natural* (também chamada *grátis*) usando o habitual diagrama.

RESOLUÇÃO: A propriedade dar-nos-á uma definição de α desde que consigamos anular o termo $\langle f, \langle g, h \rangle \rangle$ em (E1), ou seja, reduzi-lo à identidade:

$$\begin{split} \langle f, \langle g, h \rangle \rangle &= id \\ &\equiv \qquad \big\{ \text{ universal-} \times \text{ ou reflexão-} \times \text{ seguida de eq-} \times \big\} \\ &\left\{ \begin{array}{l} f = \pi_1 \\ \langle g, h \rangle = \pi_2 \end{array} \right. \\ &\equiv \qquad \big\{ \text{ universal-} \times \big\} \\ &\left\{ \begin{array}{l} f = \pi_1 \\ \left\{ \begin{array}{l} g = \pi_1 \cdot \pi_2 \\ h = \pi_2 \cdot \pi_2 \end{array} \right. \end{array} \right. \end{split}$$

Logo, voltando a (E1):

$$\alpha \cdot id = \langle \pi_2 \cdot \pi_2, \pi_1 \rangle$$

$$\equiv \qquad \{ \text{ natural-id } \}$$

$$\alpha = \langle \pi_2 \cdot \pi_2, \pi_1 \rangle$$

Logo α tem tipo $B \times C \leftarrow C \times (A \times B)$ de que decorre, fazendo o diagrama habitual, a propriedade grátis

$$\alpha \cdot (h \times (f \times g)) = (g \times h) \cdot \alpha$$

Questão 3 Considere a função:

$$x \ominus y = \mathbf{if} \ x \leqslant y \ \mathbf{then} \ 0 \ \mathbf{else} \ 1 + x \ominus (y+1)$$

Use o condicional de McCarthy para identificar o gene de $\widehat{\ominus}: \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ escrita como um anamorfismo de naturais, fazendo o respectivo diagrama.

RESOLUÇÃO: Parte-se de $\widehat{\ominus}(x,y)=\mathbf{if}\ x\leqslant y$ then 0 else $1+\widehat{\ominus}(x,y+1)$. Diagrama:

$$\mathbb{N}_{0} \times \mathbb{N}_{0} \xrightarrow{g} 1 + \mathbb{N}_{0} \times \mathbb{N}_{0}$$

$$\widehat{\ominus} \downarrow \qquad \qquad id + \widehat{\ominus} \downarrow \downarrow$$

$$\mathbb{N}_{0} \xleftarrow{\text{in}} 1 + \mathbb{N}_{0}$$

Pelo procedimento habitual,¹

$$g(x,y) = \mathbf{if} \ x \leqslant y \ \mathbf{then} \ i_1() \ \mathbf{else} \ i_2(x,y+1)$$

¹Ver e.g. vídeo T9b, t=3.55 etc.

Passando a pointfree, introduz-se o condicional,:

$$g = \widehat{(\leqslant)} \rightarrow i_1 \cdot !, i_2 \cdot (id \times \mathsf{succ})$$

ou seja:

$$g = \widehat{(\leqslant)} \to (! + id \times \mathsf{succ})$$

Questão 4 Considere o combinador comb f definido por:

$$comb f = [id, f] \cdot (i_1 + i_2) \cdot f \tag{E2}$$

Mostre que o tipo mais geral de comb é

$$comb: (C+B)^{A+B} \rightarrow (C+B)^{A+B}$$

e demonstre analiticamente que

$$comb \ id = id$$

RESOLUÇÃO: Por absorção, $comb \ f = [i_1, f \cdot i_2] \cdot f$. Tipos iniciais:

$$f: X \to Z$$

$$i_2: B \to A + B$$

$$i_1: C \to C + D$$

Por $[i_1, f \cdot i_2]$ a saída de f tem de ser C + D e a sua entrada tem de ser A + B. Logo tem-se

$$f: A + B \rightarrow C + D$$
.

Mas o segundo f terá que ter saída C+B. Logo D=B e $f:A+B\to C+B$.

O tipo de comb f é o mesmo que o de f, pois a sua entrada e saída coincidem com as de f.

Finalmente, $comb\ id = [i_1, id \cdot i_2] \cdot id = [i_1, i_2] = id$ é imediato (apresentar justificações em casa). \Box

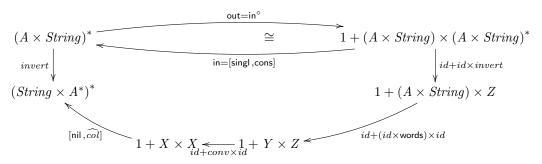
Questão 5 Na estratégia algorítmica conhecida por *Google map-reduce* abordada nas aulas teóricas ocorre o catamorfismo de listas seguinte,

$$invert :: Eq \ a \Rightarrow [(a, String)] \rightarrow [(String, [a])]$$

 $invert = \{[nil, \widehat{col}] \cdot (id + (conv \cdot (id \times words)) \times id)\}$

onde words : $String \rightarrow String^*$ é a função que separa um string na lista das suas palavras.

Identifique os tipos X, Y e Z no diagrama abaixo e, assim, os das funções auxiliares conv e col (cuja definição se omite). Justifique a sua resposta.

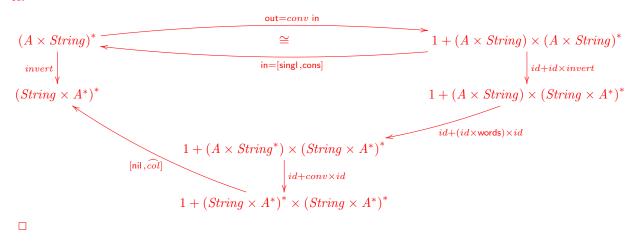


RESOLUÇÃO: Temos

$$X = (String \times A^*)^*$$

 $Y = A \times String^*$
 $Z = X$
 $conv: Y \to X$
 $col: X \to X \to X$

cf:



Questão 6 Considere o catamorfismo LTree $(A \times B) \xrightarrow{unzp} (LTree \ A) \times (LTree \ B)$ que divide uma árvore de pares num par de árvores

$$unzp = \{ \langle \mathsf{in}_1 \cdot (\mathsf{F} \, \pi_1), \mathsf{in}_2 \cdot (\mathsf{F} \, \pi_2) \rangle \}$$
 where $\mathsf{in}_1 = \mathsf{in} \cdot \mathsf{B} \, (\pi_1, id)$ $\mathsf{in}_2 = \mathsf{in} \cdot \mathsf{B} \, (\pi_2, id)$

onde, como sabe, B $(f,g)=f+g\times g$. Recorra a uma lei que conhece (e cujo nome é bastante sugestivo) para demonstrar a seguinte propriedade de cancelamento:

$$\pi_1 \cdot unzp = \mathsf{LTree} \ \pi_1$$
 (E3)

RESOLUÇÃO: A lei que é sugerida é conhecida por "banana-split". Investigar as justificações que faltam em

Questão 7 O conceito genérico de catamorfismo (g) gerado pelo gene g é captado pela propriedade universal

$$k = (g) \equiv k \cdot in = g \cdot (\mathsf{F} \, k)$$

Mostre que:

$$(f \cdot g) = f \cdot (g \cdot \mathsf{F} f) \tag{E4}$$

Resolução: O termo $f \cdot (g \cdot \mathsf{F} f)$ sugere o recurso à fusão-cata:

Questão 8 Considere, definido em Haskell, o tipo

 $\mathbf{data} \ \mathsf{RTree} \ a = Ros \ a \ [\mathsf{RTree} \ a]$

das habitualmente designadas "rose trees", que tem bifunctor de base B $(X, Y) = X \times Y^*$ e

Considere fmap f definida por

$$fmap \ f \ (Ros \ a \ xs) = Ros \ (f \ a) \ (map \ (fmap \ f) \ xs)$$
 (E5)

e mostre que $fmap\ f=(g)$ identificando g. Mostre ainda que esse catamorfismo se pode definir como um anamorfismo, calculando-o.

RESOLUÇÃO: Vai ser preciso

$$\mathsf{B}\left(f,g\right) = f \times \mathsf{map}\ g \tag{E6}$$

$$\mathsf{F} f = \mathsf{B} (id, g) = id \times \mathsf{map} g \tag{E7}$$

Tem-se:2

²Completar com as justificações.