Universidade do Minho (DMat)
Análise Matemática para Engenharia
Exame de recurso

EngInf
23 Jun 2022
Duração: 2h

Nome [ ] Número [ ]

LEI [ ] MIEI [ ]

Exame Completo (Partes 1A e 2A) [ ] Teste 1 (Partes 1A e 1B) [ ] Teste 2 (Partes 2A e 2B) [ ]

Parte 1A

1. [4 val] Considere a função definida por $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2y}{3x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   (a) Estude a continuidade de f.

   (b) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0)$, segundo qualquer vector $v \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.

   (c) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

   (d) Estude a diferenciabilidade de f em todos os pontos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

2. [2 val] Considere a função definida por $f(x,y) = 2x^2 - 3y^2$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
   Estude a existência de extremos locais de f, bem como a sua natureza.

3. Sem justificar, indique com as letras V ou F o valor lógico das seguintes proposições.

   Resposta correcta: **1** Resposta em branco: **0** Resposta errada: **-0,5**

   (a) Dados $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, se $\alpha \neq \beta$, a intersecção dos conjuntos de nível α e β é vazia. [ ]

   (b) Dada $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, se $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ é descontínua em (a,b), então f não é diferenciável em (a,b). [ ]

4. Sem justificar, assinale a opção correcta em cada uma das alíneas seguintes.

   Resposta correcta: **1** Resposta em branco: **0** Resposta errada: **-0,25**

   (a) Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y) = e^y$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,y) = 7y^2$ e seja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $h(t) = f(t^2, e^{-t})$.
   Então $h'(0)$ é igual a

   ◯ -7 ◯ -1 ◯ 1 ◯ 7

   (b) Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função tal que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y) = 2$. Então:

   ◯ $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x,x) = 2$ ◯ $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x,3x+1) = 2$

   ◯ $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x,2x) = 2$ ◯ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} f(x^2,y^2) = 4$

Parte 2A

1. [2 val] Considere o integral $\quad \mathcal{I} = \displaystyle\int_0^3 \int_{y^2}^9 y\cos(x^2)\,dx\,dy\,.$

   Esboce o domínio de integração, e calcule $\mathcal{I}$ invertendo a ordem de integração.

2. [4 val] Considere o sólido $\mathcal{S}$ que é interior, simultaneamente, às superfícies esféricas
$$x^2+y^2+z^2=1 \qquad \text{e} \qquad x^2+y^2+(z-1)^2=1.$$

   Faça um esboço de $\mathcal{S}$, e estabeleça um integral, ou uma soma de integrais, que lhe permita calcular o volume de $\mathcal{S}$, usando:

   (a) coordenadas cilíndricas; (b) coordenadas esféricas.

3. Sem justificar, indique com as letras V ou F o valor lógico das seguintes proposições.

   Resposta correcta: **1** Resposta em branco: **0** Resposta errada: **-0,5**

   (a) As coordenadas polares do ponto de coordenadas cartesians $(\pi,0)$ são $(\pi,0)$. ☐

   (b) Se $\mathscr{C}$ é o círculo de centro na origem e raio 1, então $\displaystyle\iint_{\mathscr{C}} x\,d(x,y)=0.$ ☐

4. Sem justificar, assinale a opção correcta em cada uma das alíneas seguintes.

   Resposta correcta: **1** Resposta em branco: **0** Resposta errada: **-0,25**

   (a) Sejam $\mathcal{B}=[0,2]^3$ e $\displaystyle\iiint_{\mathcal{B}} xy\;d(x,y,z)=k$. Então:

   ◯ $k=2$ ◯ $k=8$

   ◯ $k=4$ ◯ nenhum dos anteriores.

   (b) Sejam $f\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ contínua e $\mathcal{R}$ o domínio triangular de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,1)$. Usando a mudança de variáveis $x+y=u$, $y=v$, o integral $\displaystyle\iint_{\mathcal{R}} f(x+y)\,d(x,y)$ é dado por

   ◯ $\displaystyle\int_0^1 uf(u)\,du$ ◯ $\displaystyle\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^u f(u)\,dv\,du$

   ◯ $\displaystyle\int_0^1\int_0^u vf(u)\,dv\,du$ ◯ $\displaystyle 2\int_0^1\int_0^u f(u)\,dv\,du$

Parte 1B

5. [4 val] Determine, se existirem, os seguintes limites

   (a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-y^4}{x^2+y^2}$

6. [1,5 val] Considere a função definida por $f(x,y) = 2x^2 - 3y^2$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Estude a existência e a natureza de extremos da função f restrita ao conjunto $\mathscr{C} = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 5\Big\}$.

7. Sem justificar, indique com as letras V ou F o valor lógico das seguintes proposições.

   Resposta correcta: **1** Resposta em branco: **0** Resposta errada: **-0,5**

   (a) O conjunto $A = \Big\{(1, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\Big\}$ não é aberto nem limitado. ☐

   (b) O conjunto dos pontos de continuidade da função $g(x,y) = \begin{cases} 4x + 2y & \text{se } y \geq 0 \\ x^3 - y^2 & \text{se } y < 0 \end{cases}$

   é $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$. ☐

8. Sem justificar, assinale a opção correcta em cada uma das alíneas seguintes.

   Resposta correcta: **1** Resposta em branco: **0** Resposta errada: **-0,25**

   (a) Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função cujas curvas de nível $k \geq 0$ são circunferências de centro na origem e raio k^2. Então

   ◯ $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ ◯ $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$

   ◯ $f(x,y) = \sqrt[4]{x^2+y^2}$ ◯ $f(x,y) = 1 - (x^2+y^2)$

   (b) Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x,y) = xy + y - x$. O plano tangente ao gráfico de f no ponto $(-1, -1, f(-1,-1))$

   ◯ intersecta o eixo dos zz no ponto de cota 1;

   ◯ intersecta o eixo dos yy no ponto de ordenada 1/2;

   ◯ intersecta o eixo dos xx no ponto de abcissa $-1/2$;

   ◯ contém a origem.

Para os alunos que fazem apenas a parte relativa ao Teste 1, a cotação das questões 1. e 2. da **Parte 1A** passa a ser

Questão 1. 5 val Questão 2. 1,5 val

Parte 2B

5. [3,5 val] Considere o integral $\mathcal{J} = \displaystyle\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{0} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$.

   Esboce a região de integração e calcule $\mathcal{J}$ usando coordenadas polares.

6. [1,5 val] Considere o sólido $\mathcal{S}$ da questão 2 da **Parte 2A**.

   Calcule o volume de $\mathcal{S}$, usando coordenadas cilíndricas ou coordenadas esféricas.

7. Sem justificar, indique com as letras V ou F o valor lógico das seguintes proposições.

   Resposta correcta: **1** Resposta em branco: **0** Resposta errada: **-0,5**

   (a) Se $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é uma função integrável em qualquer intervalo limitado então $\displaystyle\int_3^5\int_0^2 f(x)\,dxdy = 2\int_0^2 f(x)\,dx.$ ☐

   (b) A equação, em coordenadas cilíndricas, da superfície esférica de centro $(0,0,0)$ e raio 1 é $\rho = 1$. ☐

8. Sem justificar, assinale a opção correcta em cada uma das alíneas seguintes.

   Resposta correcta: **1** Resposta em branco: **0** Resposta errada: **-0,25**

   (a) Se $\mathcal{I} = \displaystyle\int_0^1\int_0^x x^2y\,dydx$, então:

   ○ $\mathcal{I} = \displaystyle\int_0^1\int_0^y x^2y\,dxdy$ ○ $\mathcal{I} = \displaystyle\int_0^1\int_y^0 x^2y\,dxdy$

   ○ $\mathcal{I} = \displaystyle\int_0^1\int_1^y x^2y\,dxdy$ ○ $\mathcal{I} = \displaystyle\int_0^1\int_y^1 x^2y\,dxdy$

   (b) Em coordenadas esféricas, a equação da superfície $x^2+y^2=x$ é dada por

   ○ $r^2\operatorname{sen}^2\phi = r\cos\theta\operatorname{sen}\phi$ ○ $r = \cos\theta\operatorname{sen}\phi$

   ○ $r^2 = r\cos\phi$ ○ $r\operatorname{sen}\phi = \cos\phi\operatorname{sen}^2\phi$

Para os alunos que fazem apenas a parte relativa ao Teste 2, a cotação das questões 1. e 2. da **Parte 2A** passa a ser

Questão 1. 3,5 val Questão 2. 3,5 val