1º Teste de Lógica

Licenciatura/Mestrado Integrado em Engenharia Informática

12 de abril de 2023 Duração: **2h**

Nome : ______________________ Nº __________ Curso __________

1. Responda a cada uma das seguintes 5 questões seguintes, sem apresentar justificação.

   (a) Determine uma valoração v tal que $v\big((\neg(p_1 \wedge \neg p_2) \wedge p_1) \to \neg p_2\big) = 1$.

   $v : \mathcal{V}^{CP} \longrightarrow \{0,1\}$

   $p_2 \longmapsto 0$

   $p_i \longmapsto 1$ para qualquer $i \in \mathbb{N}_0 \setminus \{2\}$.

   Alternativas: qualquer valoração em que $v(p_1)=0$ ou $v(p_2)=0$.

   (b) Considere a função h definida recursivamente sobre $\mathcal{F}^{CP}$ por: $h(\bot) = 1$; $h(p_i) = 0$ para qualquer $p_i \in \mathcal{V}^{CP}$; $h(\neg\varphi) = h(\varphi) + 1$ para qualquer $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$; $h(\varphi \Box \psi) = h(\varphi) + h(\psi) + 1$ para quaisquer $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$ e $\Box \in \{\vee, \wedge, \to, \leftrightarrow\}$. Calcule $h\big((p_0 \to (p_1 \vee p_2)) \to (p_0 \vee p_2)\big)$.

   4

   (c) Seja $\Gamma = \{p_1 \to p_2, p_1 \vee p_2, (\neg p_0 \vee p_2) \wedge p_1\}$. Dê um exemplo de uma fórmula do Cálculo Proposicional φ que não é uma contradição, nem a negação de uma fórmula de Γ e tal que $\Gamma \cup \{\varphi\}$ é semanticamente inconsistente.

   Algumas alternativas: $\neg p_2$, $\neg p_1 \vee \neg p_2$, $p_1 \to \bot$, $p_2 \to \bot$, $p_1 \leftrightarrow \neg p_2$, $\neg(p_1 \to p_2)$, $\neg(p_2 \to p_1)$, $\neg p_1 \wedge \neg p_2$, $\neg p_1 \wedge p_0$, $\neg p_2 \wedge p_1$, ...

   $\varphi = \neg p_1$

   (d) Indique uma fórmula do Cálculo Proposicional que seja uma forma normal conjuntiva equivalente a $\neg(p_1 \vee p_2) \to (p_0 \wedge \neg p_1)$.

   $p_0 \vee p_1 \vee p_2$. Uma alternativa: $(p_0 \vee p_1 \vee p_2) \wedge (p_1 \vee p_2 \vee \neg p_1)$

   (e) Indique uma fórmula do Cálculo Proposicional φ em que apenas ocorrem conectivos pertencentes ao conjunto $\{\neg, \to\}$ e tal que φ é logicamente equivalente à fórmula $\neg(p_1 \vee p_2) \to (p_0 \wedge \neg p_1)$.

   Algumas alternativas: • $\neg\varphi_1 \to \neg\varphi_2$ e $\varphi_1 \to \varphi_2$ em que $\varphi_1 \in \{\neg p_1 \to p_2, \neg p_2 \to p_1\}$ e $\varphi_2 \in \{p_0 \to p_1, \neg p_1 \to p_0\}$;

   • $\neg p_i \to (\neg p_j \to p_k)$ e $\neg(\neg p_i \to p_j) \to p_k$ em que $i, j, k \in \{0,1,2\}$ e $i \neq j$, $j \neq k$, $i \neq k$.

   $\varphi = \neg(\neg p_1 \to p_2) \to \neg(p_0 \to p_1)$.

Cada resposta certa vale **1** *; cada resposta em branco ou errada vale* **0**.

2. Sem justificar, diga se é verdadeira (V) ou se é falsa (F) cada uma das seguintes afirmações:

(a) O conjunto $\{p_0, p_1, p_3, (p_1 \wedge p_0), (p_0 \vee p_3), (p_1 \wedge (p_0 \vee p_3))\}$ é o conjunto das subfórmulas da fórmula do Cálculo Proposicional $(p_1 \wedge p_0) \to (p_1 \wedge (p_0 \vee p_3))$ F

(b) Sendo v a valoração tal que, para qualquer $i \in \mathbb{N}_0$, $v(p_{2i+1}) = 1$ e $v(p_{2i}) = 0$, então $v(p_1 \to (p_0 \wedge (p_1 \to p_2))) = 1$ F

(c) A fórmula do Cálculo Proposicional $(p_0 \to (p_1 \to p_2)) \to (p_0 \to p_2)$ é uma tautologia. F

(d) $((p_0 \to \bot) \wedge (p_2 \to p_0)) \;\Leftrightarrow\; \neg(p_0 \vee \neg(\neg p_2 \vee p_0))$ V

(e) $(p_1 \wedge p_2) \to (\neg p_1 \vee \neg p_2)[p_1 \wedge p_2/p_2] = (p_1 \wedge p_2) \to (\neg p_1 \vee (p_1 \wedge \neg p_2))$. F

(f) Seja $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$. Então $\models \varphi$ se e só se $\varphi \Leftrightarrow \neg\bot$ V

(g) Seja $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$ um conjunto constituído apenas por tautologias. $\Gamma \models \psi$ se e só se $\models \psi$. V

(h) Seja $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$. Se $\Gamma \models \psi$ para qualquer $\psi \in \mathcal{F}^{CP}$, então Γ contém uma contradição. F

(i) Seja $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$. Se $\bot \vdash \varphi$, então φ é uma contradição. F

(j) Sejam $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$. Se $\vdash \varphi \to \psi$ e $\vdash \neg\psi$, então $\not\models \varphi$. V

Cada resposta certa vale **0.5** *; cada resposta errada vale* **-0.2***; cada resposta em branco vale* **0**.

3. Justifique cuidadosamente as suas respostas.

(a) Defina por recursão estrutural uma função $n : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathbb{N}_0$ que a cada fórmula proposicional associa o número de ocorrências de variáveis proposicionais.

$n : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathbb{N}_0$

$p_i \longmapsto 1$ para qualquer $i \in \mathbb{N}_0$

$\perp \longmapsto 0$

$\varphi_1 \square \varphi_2 \longmapsto n(\varphi_1) + n(\varphi_2)$ para quaisquer $\square \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ e $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{F}^{CP}$.

$\neg\varphi \longmapsto n(\varphi)$ para qualquer $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$.

(b) Sejam $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$ e v uma valoração tal que $v \models \Gamma$. Mostre que, se $\Gamma \models p_2 \vee \neg p_3$ e $\Gamma \cup \{\neg p_1 \rightarrow p_2\}$ é semanticamente inconsistente, então $\Gamma \cup \{p_3 \rightarrow p_1\}$ é semanticamente consistente.

Dizer que $v \models \Gamma$ significa que v satisfaz todas as fórmulas do conjunto Γ.

Verifica-se que:

(i) $\Gamma \models p_2 \vee \neg p_3$ implica $v(p_2 \vee \neg p_3) = 1$;

(ii) Se $\Gamma \cup \{\neg p_1 \rightarrow p_2\}$ é semanticamente inconsistente, como $v(\varphi) = 1$ para todas as fórmulas φ de Γ, então $v(\neg p_1 \rightarrow p_2) \neq 1$.

Por hipótese admitimos que $\Gamma \models p_2 \vee \neg p_3$ e que $\Gamma \cup \{\neg p_1 \rightarrow p_2\}$ é inconsistente, então $v(p_2) = 1$ ou $v(\neg p_3) = 1$, e $v(p_1) = v(p_2) = 0$. Consequentemente, $v(p_1) = v(p_2) = v(p_3) = 0$, pelo que $v(p_3 \rightarrow p_1) = 1$.

Assim, mostramos que existe uma valoração, a saber a valoração v, que satisfaz todas as fórmulas do conjunto $\Gamma \cup \{p_3 \rightarrow p_1\}$. Isto implica que $\Gamma \cup \{p_3 \rightarrow p_1\}$ é semanticamente consistente.

4. (a) Construa uma derivação do sistema DNP que prove que $\neg p_1 \vee p_2,\ p_1 \vdash p_2$.

$$\dfrac{\neg p_1 \vee p_2 \qquad \dfrac{\dfrac{p_1 \qquad \cancel{\neg p_1}^{(1)}}{\bot}\ \neg E}{p_2}\ (\bot) \qquad \cancel{p_2}^{(1)}}{p_2}\ \vee E^{(1)}$$

(b) Sejam $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$ e $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$. Mostre que se $\varphi \wedge \psi$ é uma contradição e $\Gamma \models \varphi \leftrightarrow \psi$, então $\Gamma \vdash \neg(\varphi \vee \psi)$. Justifique detalhadamente a sua resposta

- Suponhamos que existe uma valoração v tal que $v \models \Gamma$. Por hipótese, admitimos que $\varphi \wedge \psi$ é uma contradição e $\Gamma \models \varphi \leftrightarrow \psi$. Então:

  (i) $v(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1$, porque $\Gamma \models \varphi \leftrightarrow \psi$;

  (ii) $v(\varphi \wedge \psi) = 0$, porque $\varphi \wedge \psi$ é uma contradição.

  Consequentemente $v(\varphi) = v(\psi)$ e $\min\{v(\varphi), v(\psi)\} = 0$, ou seja, $v(\varphi) = v(\psi) = 0$. Assim $v(\varphi \vee \psi) = 0$, pelo que $v(\neg(\varphi \vee \psi)) = 1$. Logo $\Gamma \models \neg(\varphi \vee \psi)$.

- Se não existe uma valoração v tal que $v \models \Gamma$, ou seja, se Γ é semanticamente inconsistente, então $\Gamma \models \neg(\varphi \vee \psi)$.

Em qualquer caso $\Gamma \models \neg(\varphi \vee \psi)$ e, pelo Teorema da Completude, $\Gamma \vdash \neg(\varphi \vee \psi)$.

COTAÇÃO: *cada um dos quatro grupos vale 5 valores .*