Universidade do Minho (DMat) | EngInf
Análise Matemática para Engenharia | 28 Maio 2022
Teste 2A | Duração: 2h

Nome: Soluções | Número:

LEI ☐ MIEI ☐

Grupo I – Apresente os cálculos que efectuar e justifique as suas respostas. Responda na folha de teste.

1. [3,5 val] Considere o integral $\mathcal{I} = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{y}} e^{3x-x^3}\,dx\,dy\,.$

   Esboce o domínio de integração, e calcule $\mathcal{I}$ invertendo a ordem de integração.

$$\mathcal{I} = \int_0^1 \int_{x^2}^1 e^{3x-x^3}\,dy\,dx = \frac{1}{3}(e^2-1)$$

2. [3,5 val] Considere o integral $\mathcal{J} = \int_0^1 \int_y^{\sqrt{2-y^2}} x\,dxdy.$

   Esboce a região de integração e calcule $\mathcal{J}$, usando coordenadas polares.

$$\mathcal{J} = \int_0^{\pi/4} \int_0^{\sqrt{2}} \rho^2 \cos\theta\,d\rho\,d\theta = \frac{2}{3}$$

3. [5 val] Considere o sólido $\mathcal{S}$ que é limitado

   - inferiormente, pela superfície cónica $z^2 = 3(x^2+y^2)$, e
   - superiormente, pela superfície esférica $x^2+y^2+(z-2)^2 = 4.$

   (a) Faça um esboço de $\mathcal{S}$.

   (b) Estabeleça um integral em coordenadas cilíndricas que lhe permita calcular o volume de $\mathcal{S}$.

   (c) Estabeleça um integral em coordenadas esféricas que lhe permita calcular o volume de $\mathcal{S}$.

   (d) Calcule o volume de $\mathcal{S}$, recorrendo a um integral ou a uma soma de integrais.

$$\mathrm{vol}(\mathcal{S}) = \underbrace{\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} \int_{\sqrt{3}\rho}^{2+\sqrt{4-\rho^2}} \rho\,dz\,d\rho\,d\theta}_{\text{(b)}} = \underbrace{\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/6} \int_0^{4\cos\phi} r^2 \operatorname{sen}\phi\,dr\,d\phi\,d\theta}_{\text{(c)}} = \underbrace{\frac{14\pi}{3}}_{\text{(d)}}$$

Grupo II – Sem justificar, indique com as letras V ou F o valor lógico das seguintes proposições.

Resposta correcta: **1** Resposta em branco: **0** Resposta errada: **-0,5**

(a) Se $f(x,y)>0$ para todo o $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ então $\int_{-1}^{0}\int_{-2}^{-1} f(x,y)\,dxdy<0$. $\boxed{F}$

(b) Se $f\colon[0,1]\times[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ é integrável então $\int_0^1\int_0^x f(x,y)\,dy\,dx=\int_0^1\int_0^y f(x,y)\,dxdy$. $\boxed{F}$

(c) Em coordenadas polares, a equação da circunferência $x^2+(y-1)^2=3$ é $\rho=\sqrt{3}$. $\boxed{F}$

(d) $\left(\sqrt{3},\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$ são as coordenadas esféricas do ponto cujas coordenadas cilíndricas são $\left(\sqrt{2},\frac{\pi}{4},-1\right)$. $\boxed{F}$

Grupo III – Sem justificar, assinale a opção correcta.

Resposta correcta: **1** Resposta em branco: **0** Resposta errada: **-0,25**

(a) Seja $\mathcal{J}=\iint_{\mathcal{R}}(x+y)^2e^{x-y}\,d(x,y)$, onde $\mathcal{R}$ é o domínio plano limitado pelas rectas $x+y=1$, $x+y=4$, $x-y=-1$, e $x-y=1$. Usando a mudança de variáveis $x=\frac{3}{2}u-v+1$, $y=\frac{3}{2}u+v$, $\mathcal{I}$ é dado por

○ $\int_0^1\int_0^1(3u+1)^2\,e^{1-2v}\,dudv$

○ $\frac{3}{2}\int_0^1\int_0^1(3u+1)^2\,e^{1-2v}\,dudv$

⊛ $3\int_0^1\int_0^1(3u+1)^2\,e^{1-2v}\,dudv$

○ $\frac{1}{3}\int_0^1\int_0^1(3u+1)^2\,e^{1-2v}\,dudv$

(b) Sejam $\mathcal{B}=[1,3]\times[0,1]\times[0,\pi/2]$ e $\iiint_{\mathcal{B}}\cos z\,d(x,y,z)=k$. Então:

○ $k=1$

○ $k=-2$

⊛ $k=2$

○ nenhum dos anteriores, mas $k=\ldots\ldots$

(c) Seja $\mathcal{J}=\int_1^2\int_{-1}^3\int_2^5 f(x,z)\,dxdydz$. Então:

○ $\mathcal{J}=\int_1^2\int_2^5 f(x,z)\,dxdz$

○ $\mathcal{J}=0$

○ $\mathcal{J}=3\int_1^2\int_2^5 f(x,z)\,dxdz$

⊛ $\mathcal{J}=4\int_1^2\int_2^5 f(x,z)\,dxdz$

(d) Sejam $f,g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funções contínuas. Então:

○ $\int_0^1\int_0^2\int_0^3 f(x)\,g(y)\,h(z)\,dxdydz=\int_0^1 f(x)\,dx\int_0^2 g(y)\,dy\int_0^3 h(z)\,dz$

⊛ $\int_0^1\int_0^2\int_0^3 f(x)\,g(y)\,h(z)\,dxdydz=\int_0^1 h(z)\,dz\int_0^2 g(y)\,dy\int_0^3 f(x)\,dx$

○ $\int_0^1\int_0^2\int_0^3\big(f(x)+g(y)+h(z)\big)\,dxdydz=\int_0^1 f(x)\,dx+\int_0^2 g(y)\,dy+\int_0^3 h(z)\,dz$

○ $\int_0^1\int_0^2\int_0^3\big(f(x)+g(y)+h(z)\big)\,dxdydz=\int_0^1 h(z)\,dz+\int_0^2 g(y)\,dy+\int_0^3 f(x)\,dx$