2º Teste de ÁLGEBRA LINEAR para a Engenharia

Licenciatura em Engenharia Informática/ Mestrado Integrado em Engenharia Informática

4 de janeiro de 2023 Duração: **1h50m**

Nome : ______________________ Nº ________ Curso ________

Para todas as questões seguintes devem ser apresentados os cálculos essenciais e uma ***justificação*** *da resposta, nos espaços indicados.*

1. Em $\mathbb{R}^4$ considere o subespaço vetorial $\langle C\rangle$ onde $C = \{(4,1,1,2),\ (0,0,0,3),\ (8,2,2,1)\}$.
   (a) Calcule uma base e a dimensão de $\langle C\rangle$.
   (b) Verifique se: (i) $(1,1,1,0)$ é combinação linear dos vetores do conjunto C;
   (ii) $\langle C\rangle = S$ onde $S = \{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4:\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0,\ x_2 = x_3\}$.

a) $\dim\langle C\rangle = r\begin{bmatrix}4&1&1&2\\0&0&0&3\\8&2&2&1\end{bmatrix} \underset{L_3\leftarrow L_3-2L_1}{=} r\begin{bmatrix}4&1&1&2\\0&0&0&3\\0&0&0&-3\end{bmatrix} \underset{L_3\leftarrow L_3+L_2}{=} r\begin{bmatrix}4&1&1&2\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{bmatrix} = 2$.

Como as coordenadas dos vetores foram colocadas por linhas e os elementos pivô estão na 1.ª e 2.ª linhas, temos que $(4,1,1,2)$ e $(0,0,0,3)$ são vetores linearmente independentes de C.

Então $\langle C\rangle = \langle (4,1,1,2),(0,0,0,3)\rangle$ e $((4,1,1,2),(0,0,0,3))$ é uma base de C.

b) i) $(1,1,1,0)$ é combinação linear dos vetores de C sse é possível o sistema $\begin{bmatrix}4&0\\1&0\\1&0\\2&3\end{bmatrix}X = \begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\end{bmatrix}$.

$\left[\begin{array}{cc|c}4&0&1\\1&0&1\\1&0&1\\2&3&0\end{array}\right] \xrightarrow[L_2\leftarrow L_1-4L_2]{} \left[\begin{array}{cc|c}4&0&1\\0&0&-3\\1&0&1\\2&3&0\end{array}\right]$ pelo que se obtém a equação $0=-3$. O sistema é impossível e, consequentemente, $(1,1,1,0)$ não é combinação linear dos vetores de C.

ii) O vetor $(4,1,1,2)$ não é solução da equação $2x_1 - x_2 - x_3 = 0$, pois $2\times 4 - 1 - 1 \neq 0$. Logo $(4,1,1,2)\notin S$. Como $(4,1,1,2)\in C$ então $S \neq \langle C\rangle$.

2. Em $\mathbb{R}^4$ considere os dois seguintes subespaços vetoriais: $\mathcal{U} = \{(x_1, \cdots, x_4) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x_1 + x_2 = x_4\}$ e $\mathcal{W} = \{(x_1, \cdots, x_4) \in \mathbb{R}^4 \ : \ 2x_1 + x_3 = x_4, \ x_2 + 2x_4 = x_3\}$.

(a) Mostre que $\mathcal{U} \cap \mathcal{W} = < (-2, 3, 5, 1) >$.

(b) Sendo $\mathcal{B}_4$ a base canónica de $\mathbb{R}^4$, considere a transformação linear $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definida por $\mathcal{M}(\varphi; \mathcal{B}_4, \mathcal{B}_4) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Verifique se: (i) $(2, 1, 1, 0) \in \text{Im}\varphi$; (ii) $(2, 1, 1, 0) \in \varphi(\mathcal{U} \cap \mathcal{W})$.

3a) $U \cap W = \{(x_1, \dots, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 = x_4, 2x_1 + x_3 = x_4, x_2 + 2x_4 = x_3\}$, ou seja, $U \cap W$ é o conjunto das soluções do sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 \leftarrow 2L_3 + L_2]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & 0 \end{array}\right]$$

Então o sistema (1) é equivalente a

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_4 = 0 \\ -2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ -x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = -2x_4 \\ x_2 = 3x_4 \\ x_3 = 5x_4 \end{cases}.$$

O conjunto das soluções é $\{x_4(-2, 3, 5, 1) : x_4 \in \mathbb{R}\}$

Logo $U \cap W = \langle (-2, 3, 5, 1) \rangle$, como queríamos demonstrar.

b i) $(2, 1, 1, 0) \in \text{Im}\varphi$ se existir $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$ tal que $\mathcal{M}(\varphi, B_4, B_4) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ou seja, se o sistema $\mathcal{M}(\varphi; B_4, B_4) X = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ for possível.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_1}]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 2L_2}]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Então $r(\mathcal{M}(\varphi; B_4, B_4)) = r\left(\mathcal{M}(\varphi; B_4, B_4) \middle| \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = 2$ pelo que o sistema é possível e, consequentemente, $(2, 1, 1, 0) \in \text{Im}\varphi$.

ii) $(2, 1, 1, 0) \in \text{Im}\, \varphi(U \cap W)$ sse $(2, 1, 1, 0) \in \langle \varphi(-2, 3, 5, 1) \rangle$

$$\mathcal{M}(\varphi; B_4, B_4) \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ pelo que } \varphi(-2, 3, 5, 1) = (7, 3, 4, 1).$$

Como $(2, 1, 1, 0) \neq \alpha(7, 3, 4, 1)$ qualquer que seja $\alpha \in \mathbb{R}$, então $(2, 1, 1, 0) \notin \varphi(U \cap W)$.

3. Sejam $\mathcal{B}_2 = ((1,0),(0,1))$ e $\mathcal{B} = ((1,0,0),(0,1,0),(0,1,1))$ bases dos espaços vetoriais $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, respetivamente. Sejam $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ transformações lineares tais que

$$f(1,0,0) = (0,0,0),\ f(0,1,0) = (1,0,1),\ f(0,1,1) = (1,1,0) \quad \text{e} \quad \mathcal{M}(g;\mathcal{B}_2,\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Calcule $f(2,1,2)$ e $g(-1,3)$.

(b) Calcule: (i) $\mathcal{M}(f\circ g;\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_3)$ onde $\mathcal{B}_3$ é a base canónica de $\mathbb{R}^3$; (ii) $Nuc(f\circ g)$.

a) Do enunciado temos que $\mathcal{M}(f; B, B_3) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ sendo B_3 a base canónica de $\mathbb{R}^3$.

Por outro lado, $(2,1,2) = 2(1,0,0) - 1(0,1,0) + 2(0,1,1)$, ou seja, as coordenadas de $(2,1,2)$ na base B são $2, -1$ e 2.

$\mathcal{M}(f; B, B_3)\cdot\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ pelo que as coordenadas de $f(2,1,2)$ na base B_3 são $1, 2$ e -1, ou seja, $f(2,1,2) = (1,2,-1)$.

$\mathcal{M}(g; B_2, B)\cdot\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ pelo que as coordenadas de $g(-1,3)$ na base B são $2, 1$ e 3, ou seja

$$g(-1,3) = 2(1,0,0) + 1(0,1,0) + 3(0,1,1) = (2,4,3).$$

b i) $\mathcal{M}(f\circ g; B_2, B_3) = \mathcal{M}(f; B, B_3)\cdot \mathcal{M}(g; B_2, B) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$

ii) $Nuc\ f\circ g = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : f\circ g(x,y) = (0,0,0)\}$

$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \mathcal{M}(f\circ g; B_2, B_3)\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\}$

ou seja, $Nuc\ f\circ g$ é igual ao conjunto das soluções do sistema $\mathcal{M}(f\circ g; B_2, B_3)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[L_1 \leftrightarrow -L_3]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 + L_1 - L_2]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Então

$$\mathcal{M}(f\circ g; B_2, B_3)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Logo $Nuc\ f\circ g = \{(0,0)\}$.

4. Sejam $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ e $v_a = \begin{bmatrix} 3a \\ 0 \\ 2a \end{bmatrix}$, para algum valor de a tal que $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(a) Verifique que v_a é um vetor próprio de A e determine os valores próprios de A.

(b) Diga se existe uma base de $\mathbb{R}^3$ constituída por vetores próprios de A e, em caso afirmativo, calcule uma.

a) Como $a \neq 0$, então v_a não é o vetor nulo e

$$A \cdot v_a = \begin{bmatrix} 9a-6a \\ -6a+6a \\ 6a-4a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a \\ 0 \\ 2a \end{bmatrix} = 1 \cdot v_a$$

Consequentemente, v_a é um vetor próprio de A (associado ao valor próprio 1), qualquer que seja $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$\det \begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 & -3 \\ -2 & 1-\lambda & 3 \\ 2 & 0 & -2-\lambda \end{bmatrix} \underset{\substack{\text{T. Laplace} \\ 2^a \text{ coluna}}}{=} (1-\lambda)(-1)^{2+2} \det \begin{bmatrix} 3-\lambda & -3 \\ 2 & -2-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)\big((3-\lambda)(-2-\lambda)+6\big)$$

$$= -(1-\lambda)^2 \lambda$$

$-(1-\lambda)^2 \cdot \lambda = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda) = 0 \vee \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \vee \lambda = 0.$

Então os valores próprios de A são 1 e 0.

b) Começamos por calcular os vetores próprios de A.

Caso $\lambda = 1$

$$(A - 1I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix} X = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3z = 0 \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} z \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Os vetores próprios associados a 1 são os elementos de

$$\left\langle \begin{bmatrix} 3/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \setminus \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \quad \left(\text{nota } r \begin{bmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 2\right).$$

Caso $\lambda = 0$

$(A - 0I)X = 0 \Leftrightarrow AX = 0.$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -3 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{L_1 \leftarrow \frac{1}{3} L_1 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{2} L_3}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Então $AX = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = -z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$.

Os vetores próprios associados a 0 são os vetores da forma $z \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ com $z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Com $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ e $(3/2, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$ e $(1, -1, 1)$ são 3 vetores de $\mathbb{R}^3$ linearmente independentes $((3/2, 0, 1), (0, 1, 0), (1, -1, 1))$ é uma base de $\mathbb{R}^3$