Universidade do Minho
Departamento de Matemática

LEI | MIEI
2 de abril de 2022

Elementos de Probabilidades e Teoria de Números

Teste - Teoria de Números

duração: 2 horas

Nome:	**Número:**

Grupo I

Relativamente às questões deste grupo, indique para cada alínea se a afirmação é verdadeira (V) ou falsa (F), marcando x no quadrado respetivo.

		V	F
1.	O resto da divisão de 85 por -6 é 7 porque $85 = (-6) \times (-13) + 7$.	☐	☐
2.	Para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{Z}$, se $a \mid b$ e $a \nmid (5b + 4c)$, então $a \nmid c$.	☐	☐
3.	Se a é um inteiro tal que $\text{m.d.c.}(a, 80) = 10$ e $\text{m.m.c.}(a, 80) = 2^4 \times 3^2 \times 5^2$, então $a > 500$.	☐	☐
4.	Para quaisquer $a, b \in \mathbb{Z}$ tais que $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, $\text{m.d.c.}(a, b) \mid \text{m.d.c.}(3a, 8b)$.	☐	☐
5.	Qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $1 < n < 280$, se n não admite um divisor d tal que $1 < d \leq 14$, então n é um número primo.	☐	☐
6.	Sejam $a, b, p \in \mathbb{Z}$. Se p é um número primo e $p \mid a^3 b^2$, então $p \mid a$ ou $p \mid b$.	☐	☐
7.	O inteiro 3333 é combinação linear de 5 e 30.	☐	☐
8.	O conjunto $\{-2, 1, 3, 6, 10, 5\}$ é um sistema completo de resíduos módulo 6.	☐	☐
9.	$-85 \equiv 5 (\text{mod } 15)$.	☐	☐
10.	A congruência linear $6x \equiv 5 (\text{mod } 33)$ tem 3 soluções módulo 33.	☐	☐

Grupo II

Para cada uma das questões deste grupo, indique a sua resposta no espaço disponibilizado a seguir à questão, justificando sucintamente.

1. Considere as divisões seguintes

$$\begin{array}{r|l} 255 & 123 \\ \cline{2-2} 9 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 123 & 9 \\ \cline{2-2} 6 & 13 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 9 & 6 \\ \cline{2-2} 3 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 6 & 3 \\ \cline{2-2} 0 & 2 \end{array}$$

Indique o m.d.c.$(255, 123)$ e exprima-o como combinação linear de 255 e 123.

Resposta:

2. Sabendo que $(28, 58)$ é uma solução da equação diofantina $255x - 123y = 6$, justifique que a congruência linear $255x \equiv 6(\mathrm{mod}\, 123)$ é solúvel e indique duas das suas soluções não congruentes módulo 123.

   Resposta:

3. Determine o resto de $3^{124} + 1$ na divisão por 7.

   Resposta:

4. Determine o dígito x tal que $\overline{2734x}$ seja um inteiro divisível por 3 e tenha resto 1 na divisão por 4.

   Resposta:

Grupo III

Resolva cada uma das questões deste grupo na folha de exame. Justifique as suas respostas.

1. Num refeitório, com capacidade para 902 pessoas, há 55 mesas circulares e 77 mesas retangulares. As mesas circulares têm todas a mesma capacidade, o mesmo se passando com as mesas retangulares. Além disso, a capacidade de qualquer um dos tipos de mesas é superior ou igual a 2.
   (a) Escreva uma equação diofantina cuja resolução permita obter a capacidade das mesas circulares e a capacidade das mesas retangulares.
   (b) Determine a capacidade das mesas circulares e a capacidade das mesas retangulares.

2. Resolva a congruência linear $6x \equiv 501(\mathrm{mod}\, 21)$ e indique a maior solução não positiva.

3. Considere o sistema de congruências lineares (S) a seguir indicado

$$(S)\ \begin{cases} x & \equiv & 3\,(\mathrm{mod}\, 7) \\ x & \equiv & 4\,(\mathrm{mod}\, 5) \\ x & \equiv & 1\,(\mathrm{mod}\, 3) \end{cases}$$

   Recorrendo ao Teorema Chinês dos Restos, justifique que o sistema (S) é solúvel e resolva-o. Indique a menor solução de (S) maior do que 200.

Cotações: Grupo I: $7,5$. Grupo II: $6,0$. Grupo III: $2,5 + 1,75 + 2,25$.