Universidade do Minho (DMat)
Análise Matemática para Engenharia
Teste 1

EngInf
15/04/2023
Duração: 2 horas

Nome | | Número | |

LEI ☐ MIEI ☐

Grupo I – Sem justificar, indique o valor lógico das seguintes proposições.
Resposta correta: 0.75 Resposta em branco: 0 Resposta errada: -0,25
Cotação mínima do grupo: 0

	V	F
1. O conjunto $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ y - x \geq 0 \ \wedge\ (x-1)^2 + (y+1)^2 < 16\}$ é aberto e limitado.	☐	☐
2. Se $f \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é tal que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,2)} f(x,y) = 1$, então $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x, mx+2) = 1$, para todo o $m \in \mathbb{R}$.	☐	☐
3. Não existe uma função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ com derivadas parcias de segunda ordem contínuas tal que $f_x(x,y) = y^3 + 8xy$ e $f_y(x,y) = 3xy^2 - 4x^2$.	☐	☐
4. A função $f \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \begin{cases} x & \text{se } y \neq x^2 \\ 2-y & \text{se } y = x^2 \end{cases}$ é descontínua em todos os pontos da forma (b, b^2), $b \in \mathbb{R}$.	☐	☐
5. Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável. Se $\nabla f(1,1)$ e $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ são vetores ortogonais, então $\dfrac{\partial f}{\partial v}(1,1) = 0$.	☐	☐
6. Se $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é tal que $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,1) = v_1 v_2$, para todo o vetor $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, então f não é derivável em $(0,1)$.	☐	☐
7. Seja $\mathscr{C}$ a curva de interseção da superfície $z = 2y^2 + x$ com o plano vertical $x = 1$. O declive da reta tangente a $\mathscr{C}$ no ponto $(1, -1, 3)$ é positivo.	☐	☐
8. Se $z(x,y) = y + f(x^2 - y^2)$, sendo $\begin{array}{rccc} f\colon & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & u & \longmapsto & f(u) \end{array}$ uma função derivável, então $y\dfrac{\partial z}{\partial x} + x\dfrac{\partial z}{\partial y} = x$.	☐	☐
9. O conjunto de nível 2 da função $f(x,y,z) = x^2 + (y-1)^2$ é um cilindro circular que contém o ponto $(1,2,0)$.	☐	☐
10. Se $f, g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções com derivadas parciais de primeira ordem contínuas tais que $f(1,1) = g(2,1) = 2$ e $\nabla f(1,1) = \nabla g(2,1) = (1,2)$, então o plano tangente ao gráfico de f em $(1,1,f(1,1))$ também é tangente ao gráfico de g em $(2,1,g(2,1))$.	☐	☐

(Continua)

Grupo II – Apresente os cálculos que realizar e justifique as suas respostas. Responda na folha de teste.

1. [3 val] Determine, se existir, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, para

(a) $f(x,y) = \mathrm{e}^{x^2y} + \dfrac{x-y^4}{x^3+y^4}$ (b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(2x^3-2y)}{x^3-y} & \text{se} \quad y < x^3 \\ x+2 & \text{se} \quad y \geq x^3 \end{cases}$

2. [5.5 val] Considere a função $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y+xy^2}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Mostre que a função f é contínua em $(0,0)$.

(b) Mostre que, qualquer que seja o vetor $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, existe $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0)$.

(c) Determine $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, para todo o $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(d) Estude a diferenciabilidade de f em $(1,1)$ e em $(0,0)$.

3. [2 val] Considere a função $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1.$$

Determine os pontos críticos de f e classifique-os quanto à sua natureza, indicando o valor do extremo quando existir.

4. [2 val] Utilize o método dos multiplicadores de Lagrange para determinar os extremos da função $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = y - x$$

no conjunto $\mathscr{C} = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 2\Big\}$.