Exame de Recurso de Lógica

Licenciatura/Mestrado Integrado em Engenharia Informática

15 de junho de 2023 — Duração: **2h**

Nome : ______________________ Nº __________ Curso __________

1. Responda a cada uma das seguintes 5 questões, sem apresentar justificação.

   (a) i. Diga se existe e, em caso afirmativo, dê exemplo de uma valoração que atribui o valor 1 à seguinte fórmula de $\mathcal{F}^{CP}$: $\neg(p_1 \to (p_1 \vee p_2)) \wedge p_2$.

   Não existe

   ii. Seja $\Gamma = \{p_1 \wedge \neg p_2, \neg p_1 \to p_2, (p_0 \vee \neg p_2) \wedge p_1\}$. Dê um exemplo de uma fórmula $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$ onde ocorre o conectivo $\to$ e tal que $\Gamma \cup \{\varphi\}$ é semanticamente inconsistente.

   $\varphi = p_1 \to p_2$

   iii. Indique uma fórmula do Cálculo Proposicional φ em que apenas ocorrem conectivos pertencentes ao conjunto $\{\neg, \to\}$ e tal que φ é logicamente equivalente à fórmula $(p_0 \vee \neg p_1) \leftrightarrow p_2$.

   $\varphi = \neg\left(\left((p_1 \to p_0) \to p_2\right) \to \neg\left(p_2 \to (p_1 \to p_0)\right)\right)$

   (b) Considere o tipo de linguagem $L_A = (\{0, s, *\}, \{\geq, =\}, \mathcal{N})$ em que $\mathcal{N}(0) = 0$, $\mathcal{N}(s) = 1$ e $\mathcal{N}(*) = \mathcal{N}(\geq) = \mathcal{N}(=) = 2$.

   i. Considere o conjunto de L_A-fórmulas $\Gamma = \{\forall_{x_0}(x_1 = s(x_1) * x_0),\ s(x_0) \geq 0\}$. Indique uma realização (E, a) de Γ.

   $E = (\{0,1\}, -)$ em que $\bar{0} = 0$, $\bar{s}(0) = 1$ e $\bar{s}(1) = 0$, $\bar{*}$ é a operação binária definida pela tabela

$\bar{*}$	0	1
0	1	1
1	0	0

   , $\bar{=}$ é a relação de igualdade e $\bar{\geq} = \{(1,0)\}$.

   A atribuição a é a função $a: \mathcal{V} \to \{0,1\}$, $x_i \mapsto 0$ para todo $i \in \mathbb{N}_0$.

   ii. Diga se existe e, em caso afirmativo, dê um exemplo de um conjunto consistente Δ formado por duas L_A-fórmulas tal que $\Delta \cup \{\forall_{x_0}(x_1 \geq s(x_0) \vee x_0 = x_1)\}$ é inconsistente.

   $\Delta = \{\exists x_0\, (\neg(x_1 \geq s(x_0)) \wedge \neg(x_0 = x_1)),\ \forall x_1\ s(x_1) \geq x_1\}$

Cada resposta certa vale **1** *; cada resposta em branco ou errada vale* **0**.

2. Diga se são verdadeiras ou se são falsas as afirmações abaixo.

(a) i. O conjunto $\{p_0, p_1, \neg p_0, \neg p_0 \vee p_1, (\neg p_0 \vee p_1) \to \neg(p_0 \vee p_1)\}$ é o conjunto das subfórmulas da fórmula do Cálculo Proposicional $(\neg p_0 \vee p_1) \to \neg(p_0 \vee p_1)$. $\boxed{F}$

ii. $(\perp \to (p_0 \vee p_1)) \wedge (p_2 \to p_0) \;\Leftrightarrow\; \neg(p_0 \vee \neg(p_0 \vee \neg p_2))$ $\boxed{F}$

iii. $(p_1 \wedge p_2) \to (\neg p_1 \vee \neg p_2)[p_1 \wedge p_2/p_2] = (p_1 \wedge p_2) \to (\neg p_1 \vee (p_1 \wedge \neg p_2))$. $\boxed{F}$

iv. Se $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$ é um conjunto constituído apenas por tautologias e $\psi \in \mathcal{F}^{CP}$, então $\Gamma \models \psi$ se e só se $\models \psi$. $\boxed{V}$

v. Para quaisquer $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$, se $\vdash \varphi \to \psi$ e $\vdash \neg\psi$, então $\not\models \varphi$. $\boxed{V}$

(b) Considere o tipo de linguagem $L = (\{\varnothing, \cup, \cap\}, \{=, \subseteq\}, \mathcal{N})$ em que a função aridade $\mathcal{N}$ é definida por: $\mathcal{N}(\varnothing) = 0$, $\mathcal{N}(\cup) = \mathcal{N}(\cap) = \mathcal{N}(=) = \mathcal{N}(\subseteq) = 2$.
Seja $E = (\mathcal{P}(\mathbb{N}), \bar{\ })$ a L-estrutura definida por:

- $\overline{\varnothing}$ é o conjunto vazio;
- $\overline{\cap}$ é a operação interseção de conjuntos;
- $\overline{=}$ é a relação igualdade de conjuntos;
- $\overline{\cup}$ é a operação união de conjuntos;
- $\overline{\subseteq}$ é a relação inclusão de conjuntos.

i. O conjunto $\{\forall_{x_0}\ x_0 \cup x_1 \subseteq x_1,\quad \varnothing \cap x_1 = \varnothing\}$ é um conjunto de L-fórmulas. $\boxed{V}$

ii. A variável x_2 está livre para o L-termo $x_2 \cup x_0$ na L-fórmula
$$\forall_{x_0}(\forall_{x_2}\exists_{x_1} x_0 \cap x_1 = x_1 \to\ x_2 \subseteq x_1).$$ $\boxed{F}$

iii. $(\exists_{x_0}\ x_0 \subseteq x_1 \to x_0 \subseteq \varnothing)\,[x_2 \cap x_0/x_0] = \exists_{x_0}\ x_2 \cap x_0 \subseteq x_1 \to x_2 \cap x_0 \subseteq \varnothing$. $\boxed{F}$

iv. Sendo $a : \mathcal{V} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ tal que $a(x_i) = \{n\ :\ n > i\}$ para qualquer $i \in \mathbb{N}_0$,
$$((x_0 \cup x_3) \cap x_2)\,[a]_E = x_3\,[a]_E.$$ $\boxed{F}$

v. A seguinte árvore de L-fórmulas é uma derivação de DN_L $\boxed{V}$

$$\dfrac{\exists_{x_1}\ \neg(x_1 \cap x_2 = \varnothing) \qquad \dfrac{\dfrac{\forall_{x_0}\ (x_0 \cap x_2 = \varnothing)}{x_1 \cap x_2 = \varnothing}\,\forall E \qquad \cancel{\neg(x_1 \cap x_2 = \varnothing)}}{\perp}\,\neg E}{\perp}\,\exists E$$

Cada resposta certa vale **0.5** *; cada resposta errada vale* **-0.2***; cada resposta em branco vale* **0**.

3. Justifique cuidadosamente as suas respostas.

(a) Sejam $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$ e v uma valoração tal que $v \models \Gamma$. Mostre que, se $\Gamma \models p_3 \to p_2$ e $\Gamma \cup \{p_1 \vee p_2\}$ é semanticamente inconsistente, então $\Gamma \cup \{p_3 \to p_1\}$ é semanticamente consistente.

Como $v \models \Gamma$, então Γ é um conjunto semanticamente consintente. Tendo por hipótese que $\Gamma \models p_3 \to p_2$, podemos dizer que $v(p_3 \to p_2)=1$
Da hipótese $\Gamma \cup \{p_1 \vee p_2\}$ é inconsintente conclui-se que $v(p_1 \vee p_2)=0$ pois $v \models \Gamma$.
De seguida temos de calcular o valor de $v(p_3 \to p_1)$. Sendo $v(p_1 \vee p_2)=0$, então $v(p_1) = v(p_2) = 0$. Mais ainda, sendo $v(p_3 \to p_2)=1$, tem-se que $v(p_3)=0$. Consequentemente, $v(p_3 \to p_1) = 1$, pelo que $v(\varphi)=1$ para qualquer fórmula $\varphi \in \Gamma \cup \{p_3 \to p_1\}$. Assim $\Gamma \cup \{p_3 \to p_1\}$ é semanticamente consintente.

(b) Construa uma derivação do sistema DNP que prove que $p_1 \wedge \neg p_2 \vdash \neg(p_1 \to p_2)$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{p_1 \wedge \neg p_2}{p_1}\,\wedge_1 E \qquad \cancel{p_1 \to p_2}^{(1)}}{p_2}\,\to E \qquad \dfrac{p_1 \wedge \neg p_2}{\neg p_2}\,\wedge_2 E}{\bot}\,\neg E}{\neg(p_1 \to p_2)}\,\neg I\ (1)$$

4. Considere L um tipo de linguagem do Cálculo de Predicados. Justifique cuidadosamente a resposta às duas questões seguintes.

(a) Sejam φ e ψ L-fórmulas. Seja x uma variável. Mostre que: $\exists_x \neg(\varphi \to \neg\psi) \models (\exists_x \varphi \wedge \exists_x \psi)$;

Seja $E = (D, \bar{\ })$ uma L-estrutura e $a: V \to D$ uma atribuição. Suponhamos que $\exists x \neg(\varphi \to \neg\psi)[a] = 1$. Então existe $d \in D$ tal que $\neg(\varphi \to \neg\psi)[a\binom{x}{d}] = 1$, ou seja, existe $d \in D$ tal que $(\varphi \to \neg\psi)[a\binom{x}{d}] = 0$. Assim, existe $d \in D$ tal que $\varphi[a\binom{x}{d}] = 1$ e $\neg\psi[a\binom{x}{d}] = 0$, pelo que existe $d \in D$ tal que $\varphi[a\binom{x}{d}] = 1$ e existe $d \in D$ tal que $\psi[a\binom{x}{d}] = 1$. Consequentemente $\exists x \varphi[a] = 1$ e $\exists x \psi[a] = 1$. Logo $(\exists x \varphi \wedge \exists x \psi)[a] = 1$, o que conclui a prova.

(b) Considere $L = (\{z, s, +\}, \{\text{soma}\}, \mathcal{N})$, onde $\mathcal{N}(z) = 0$, $\mathcal{N}(s) = 1$, $\mathcal{N}(+) = 2$ e $\mathcal{N}(\text{soma}) = 3$. Seja $E = (\mathbb{N}_0, \bar{\ })$ a L-estrutura em que $\bar{z} = 0$, $\bar{s}$ e $\bar{+}$ são as funções de sucessor e adição em $\mathbb{N}_0$, respetivamente, e $\overline{\text{soma}}$ é a relação definida por $\overline{\text{soma}} = \{(i, j, k) \in \mathbb{N}_0^3 : i + j = k\}$. Verifique se:

$$E \models \left\{\forall_{x_1} \exists_{x_0} (\text{soma}(s(z), x_0, x_1) \to \text{soma}(s(x_0), s(z), x_1)), \quad \exists_{x_2} \text{soma}(z, x_2, s(s(z)))\right\}.$$

I) Comecemos por verificar que, para qualquer atribuição $a: V \to \mathbb{N}_0$,

$$\forall x_1 \exists x_0 (\text{soma}(s(z), x_0, x_1) \to \text{soma}(s(x_0), s(z), x_1))[a] = 1.$$

A igualdade acima é verdadeira sse para todo o $d_1 \in \mathbb{N}_0$, existe $d_0 \in \mathbb{N}_0$ tal que

$$\text{soma}(s(z), x_0, x_1) \to \text{soma}(s(x_0), s(z), x_1)[a\binom{x_1}{d_1}\binom{x_0}{d_0}] = 1,$$

ou seja, sse para todo o $d_1 \in \mathbb{N}_0$, existe $d_0 \in \mathbb{N}_0$ tal que

$$\text{soma}(s(z), x_0, x_1)[a\binom{x_1}{d_1}\binom{x_0}{d_0}] = 0 \text{ ou } \text{soma}(s(x_0), s(z), x_1)[a\binom{x_1}{d_1}\binom{x_0}{d_0}] = 1,$$

ou seja, sse para todo o $d_1 \in \mathbb{N}_0$, existe $d_0 \in \mathbb{N}_0$ tal que

$$\bar{s}(0) \bar{+} d_0 \neq d_1 \quad \text{ou} \quad \bar{s}(d_0) \bar{+} \bar{s}(0) = d_1.$$

O que é verdade, pois basta escolher $d_0 = d_1$, por exemplo, e $1 + d_0 \neq d_1$.

II) De seguida, vamos verificar que, para qualquer atribuição $a: V \to \mathbb{N}_0$

$$\exists x_2 \text{ soma}(z, x_2, s(s(z)))[a] = 1.$$

Esta igualdade verifica-se sse existe $d \in \mathbb{N}_0$ tal que

$$\text{soma}(z, x_2, s(s(z)))[a\binom{x_2}{d}] = 1,$$

ou seja, sse existe $d \in \mathbb{N}_0$ tal que $(\bar{z}, d, \bar{s}(\bar{s}(\bar{z}))) \in \overline{\text{soma}}$

ou seja, sse existe $d \in \mathbb{N}_0$ tal que $0 + d = 0 + 1 + 1$, o que é verdade pois $d = 2 \in \mathbb{N}_0$. Por I e II verifica-se que E é um modelo do conjunto de L-fórmulas dado.

COTAÇÃO: *cada um dos quatro grupos vale 5 valores*.