Universidade do Minho (DMat)
Análise Matemática para Engenharia
Teste 1A

EngInf
9 Abr 2022
Duração: 2h

Nome [ ] Número [ ]

LEI [ ] MIEI [ ]

Grupo I – Sem justificar, indique com as letras V ou F o valor lógico das seguintes proposições.

Resposta correcta: **1** Resposta em branco: **0** Resposta errada: **-0,5**

1. Se $A = \mathbb{Z} \times [0,1]$ então o conjunto dos pontos isolados de A é não vazio. [ ]

2. Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função. Se $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y) = 2$ então $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x^2,y^2) = 4$. [ ]

3. A função $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \begin{cases} x+1 & \text{se } y \geq x \\ 2y & \text{se } y < x \end{cases}$ é contínua nos pontos $(0,3)$ e $(1,1)$ e é descontínua no ponto $(0,0)$. [ ]

4. Se $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é tal que $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0) = v_1^2 v_2$, para todo o vector $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, então f é derivável em $(0,0)$. [ ]

Grupo II – Sem justificar, assinale a opção correcta.

Resposta correcta: **1** Resposta em branco: **0** Resposta errada: **-0,25**

1. Considere uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e os subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ que se seguem:

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 = 1\} \quad \text{e} \quad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x+1)^2 + y^2 = 1\}.$$

Sabendo que cada um dos conjuntos A e B está contido num conjunto de nível de f, qual das seguintes situações acontece?

- ◯ $f(1,1) = f(-1,1)$
- ◯ $f(-1,0) \neq f(1,0)$
- ◯ $f(0,0) = 0$
- ◯ f é descontínua em $(0,0)$

2. Considere uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- ◯ Se f admite derivadas parciais em $(0,0)$, então f é derivável em $(0,0)$
- ◯ Se f admite derivadas parciais contínuas em $(0,0)$, então f é contínua em $(0,0)$
- ◯ Se f admite derivadas parciais em $(0,0)$, então $f_x(0,0) = f_y(0,0)$
- ◯ Se f admite derivadas parciais em $(0,0)$, então f é contínua em $(0,0)$

3. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função derivável cujo plano tangente no ponto $(1,0,f(1,0))$ tem equação $z = 2 + x + 3y$. Então:

- ◯ $f(1,0) = 2$
- ◯ $f_y(1,0) = 2$
- ◯ $f_x(1,0) = 0$
- ◯ $\nabla f(1,0) = (1,3)$

4. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função tal que $\nabla f(x,y) = (y^2 + \cos x, 2xy - \operatorname{sen} y)$ e seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(t) = f(\cos t, \operatorname{sen} t)$. Então $g'(\frac{\pi}{2})$ é:

- ◯ 2
- ◯ 1
- ◯ -2
- ◯ 0

Grupo III – Apresente os cálculos que efectuar e justifique as suas respostas. Responda na folha de teste.

1. [4 val] Determine, se existirem, os seguintes limites

   (a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+\operatorname{sen}(y^2)}{x^2+y^2}$ (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-y^4}{3x^2+4y^2}$

2. [5 val] Consideremos a função $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x-y)}{x-y} & \text{se} \quad x\neq y \\ 1+x & \text{se} \quad x=y \end{cases}$$

   (a) Estude a continuidade da função f.

   (b) Mostre que, dado $v=(v_1,v_2)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, se tem $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0)=\begin{cases} v_1 & \text{se} \quad v_1=v_2 \\ 0 & \text{se} \quad v_1\neq v_2 \end{cases}$

   (c) Calcule as derivadas parciais de f em $(0,0)$.

   (d) Estude a diferenciabilidade de f em $(0,0)$.

3. [3 val] Considere a função $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y)=9-2x-x^2+4y-4y^2, \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

   (a) Estude a existência de extremos locais da função f.

   (b) Estude a existência de extremos da função f no conjunto $\mathscr{C}=\Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x+2y=0\Big\}$.