Programación Lineal - Pt 2

Problemas de Redes

Investigación Operativa

Universidad de San Andrés

¿Qué son los Problemas de Redes?

Definición:

- Tipo especial de programación lineal
- Variables representan flujos entre nodos
- Nodos conectados por arcos con capacidades
- Visualización gráfica facilita el análisis

Ventajas:

- Estructura predefinida
- Fácil interpretación
- Algoritmos especializados más eficientes

Tipos de Problemas de Redes

Principales categorías:

- **Transporte:** Envío desde orígenes a destinos
- **Transshipment:** Permite nodos intermedios
- **Flujo Máximo:** Maximizar flujo en la red
- **Asignación:** Matching uno a uno

Problema de Transporte

Características:

- Múltiples orígenes con capacidades
- Múltiples destinos con demandas
- Costo por unidad transportada
- Objetivo: minimizar costo total

Aplicaciones:

- Distribución de productos
- Logística de almacenes
- Asignación de recursos

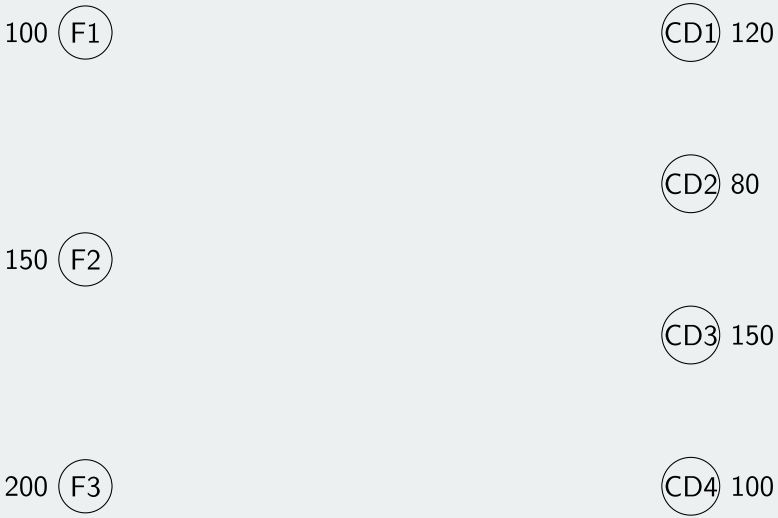
Ejemplo: Fábricas y Centros de Distribución

Situación:

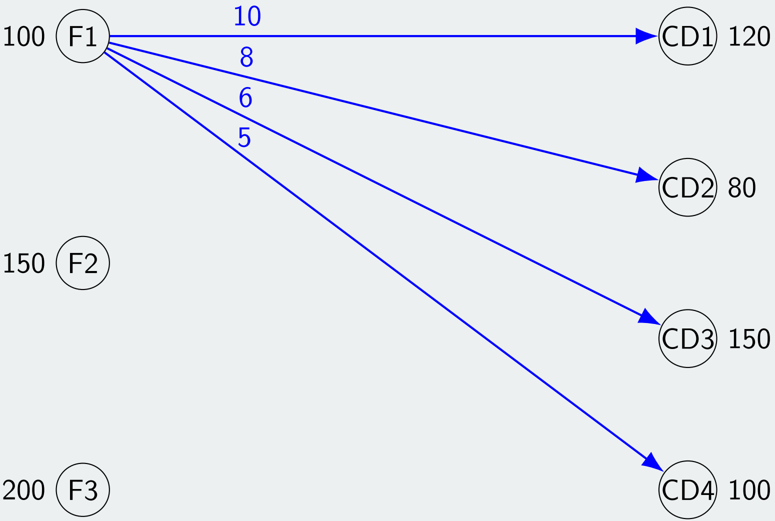
- 3 fábricas con capacidades: 100, 150, 200 unidades
- 4 centros con demandas: 120, 80, 150, 100 unidades
- Costos de transporte variables

	CD1	CD2	CD3	CD4
F1	10	8	6	5
F2	7	9	8	6
F3	8	7	5	9

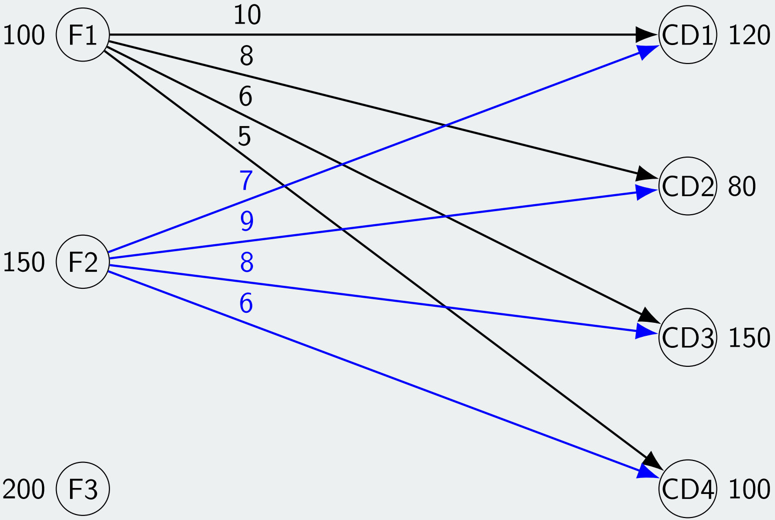
Representación Gráfica



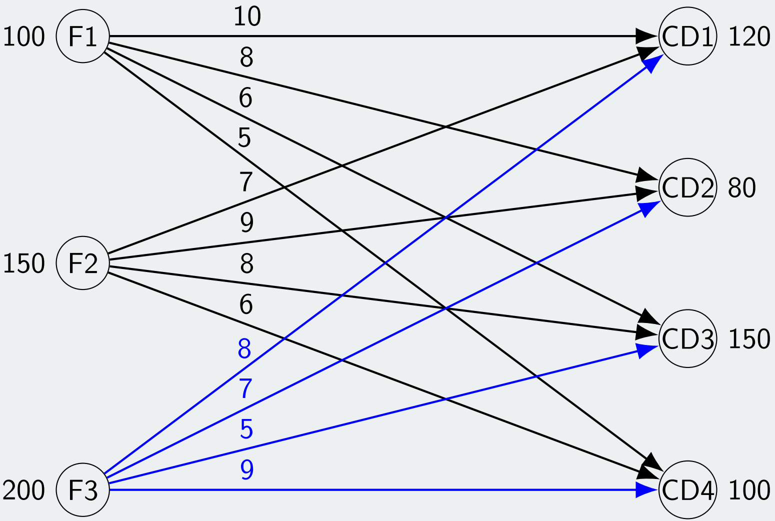
Representación Gráfica



Representación Gráfica



Representación Gráfica



Formulación del Problema de Transporte

Variables de decisión:

- x_{ij}: cantidad transportada desde fábrica i a centro j

Formulación del Problema de Transporte

Variables de decisión:

- x_{ij}: cantidad transportada desde fábrica i a centro j

Función objetivo:

$$\text{Minimizar: } Z = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{4} c_{ij} x_{ij}$$

Formulación del Problema de Transporte

Variables de decisión:

- x_{ij}: cantidad transportada desde fábrica i a centro j

Función objetivo:

$$\text{Minimizar: } Z = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{4} c_{ij} x_{ij}$$

Restricciones:

$$\sum_{j=1}^{4} x_{ij} = \text{capacidad}_i \quad \forall i$$

$$\sum_{i=1}^{3} x_{ij} = \text{demanda}_j \quad \forall j$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j$$

Implementación en PICOS

```python
import picos
import numpy as np

# Crear el problema
P = picos.Problem()

# Definir variables
x = picos.RealVariable('x', 12)

# Definir costos
c = np.array([10, 8, 6, 5, 7, 9, 8, 6, 8, 7, 5, 9])

# Funcion objetivo
P.set_objective('min', picos.sum([c[i] * x[i] for i in range(12)]))

# Restricciones de capacidad
P.add_constraint(sum(x[0:4]) == 100)  # F1
P.add_constraint(sum(x[4:8]) == 150)  # F2
P.add_constraint(sum(x[8:12]) == 200) # F3

# Restricciones de demanda
P.add_constraint(x[0] + x[4] + x[8] == 120)    # CD1
P.add_constraint(x[1] + x[5] + x[9] == 80)     # CD2
P.add_constraint(x[2] + x[6] + x[10] == 150)   # CD3
P.add_constraint(x[3] + x[7] + x[11] == 100)   # CD4

P.solve(solver='glpk')
```

¿Qué pasa cuando oferta $\neq$ demanda?

- **Exceso de oferta:** Introducir destino ficticio

Transporte Desbalanceado

¿Qué pasa cuando oferta $\neq$ demanda?

- **Exceso de oferta:** Introducir destino ficticio
- **Exceso de demanda:** Introducir origen ficticio

Transporte Desbalanceado

¿Qué pasa cuando oferta $\neq$ demanda?

- **Exceso de oferta:** Introducir destino ficticio
- **Exceso de demanda:** Introducir origen ficticio
- **Costo de penalización:** Valor M muy grande

Transporte Desbalanceado

¿Qué pasa cuando oferta $\neq$ demanda?

- **Exceso de oferta:** Introducir destino ficticio
- **Exceso de demanda:** Introducir origen ficticio
- **Costo de penalización:** Valor M muy grande

Origen/Destino ficticio:

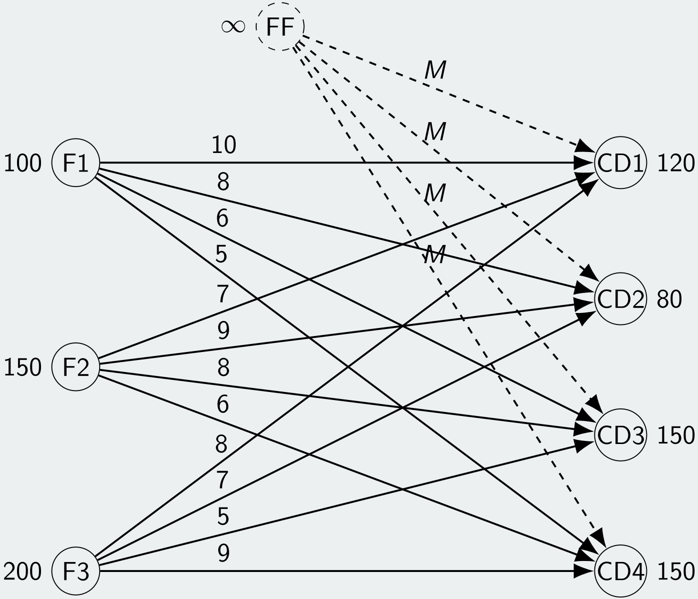
- Capacidad/demanda $=$ $|\text{oferta} - \text{demanda}|$
- Costo $= M$ (penalización)
- Representa demanda insatisfecha o capacidad ociosa

Ejemplo: Demanda Insatisfecha

Situación desbalanceada:

- Oferta total: $100 + 150 + 200 = 450$ unidades
- Demanda total: $120 + 80 + 150 + 150 = 500$ unidades
- Déficit: 50 unidades

Gráfico Demanda Insatisfecha



Función Objetivo con Penalización

Función objetivo original:

$$\text{Minimizar: } Z = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{4} c_{ij} x_{ij}$$

Función objetivo con fábrica ficticia:

$$\text{Minimizar: } Z = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{4} c_{ij} x_{ij} + M \sum_{j=1}^{4} x_{FF,j}$$

Donde:

- M es un número muy grande (ej: 1000)
- $x_{FF,j}$ es la demanda insatisfecha del centro j
- La penalización hace que se evite la demanda insatisfecha

Problema de Transshipment

Extensión del problema de transporte:

- Permite nodos intermedios
- Los nodos pueden recibir y enviar
- Más flexible que transporte puro

Características adicionales:

Nodos de tránsito: Hubs, puertos, almacenes

Restricciones de balance: Entrada = Salida

Múltiples rutas: Caminos alternativos

Ejemplo: Sunco Oil Co.

Situación:

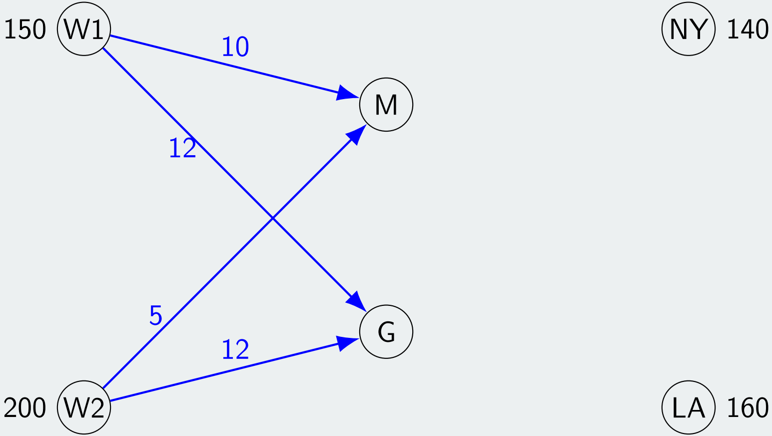
- 2 pozos (W1: 150k, W2: 200k barriles/día)
- 2 ciudades (NY: 140k, LA: 160k barriles/día)
- 2 puertos intermedios (Mobile, Galveston)
- Costos variables por ruta

Objetivo:

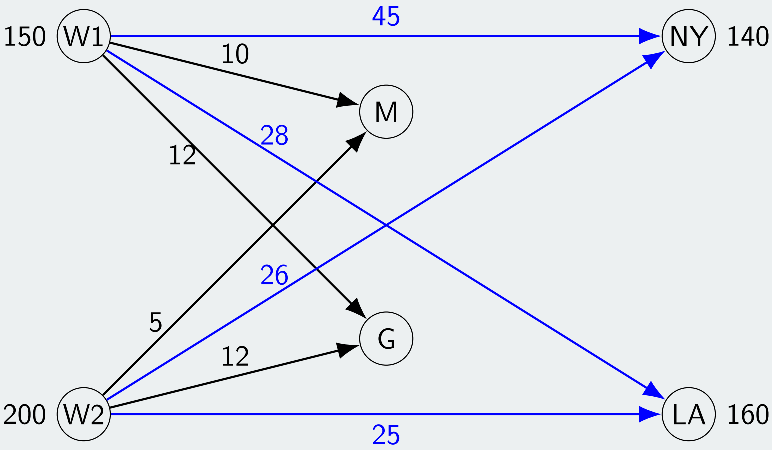
- Minimizar costo total de transporte
- Satisfacer demanda de ambas ciudades
- Usar puertos como nodos de tránsito

Red de Transshipment: Nodos

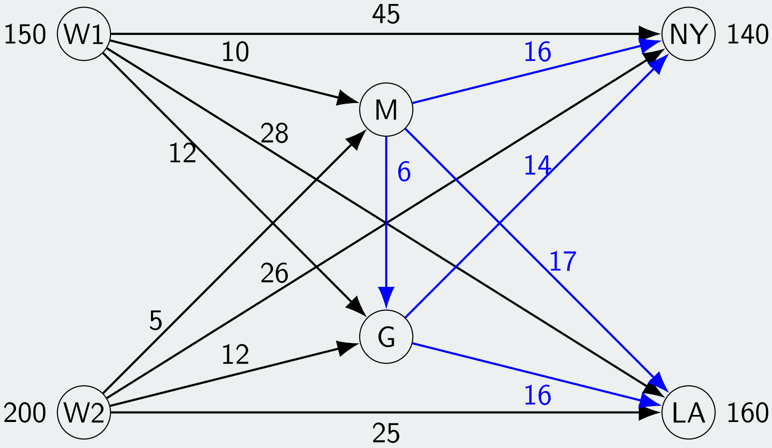
Red de Transshipment



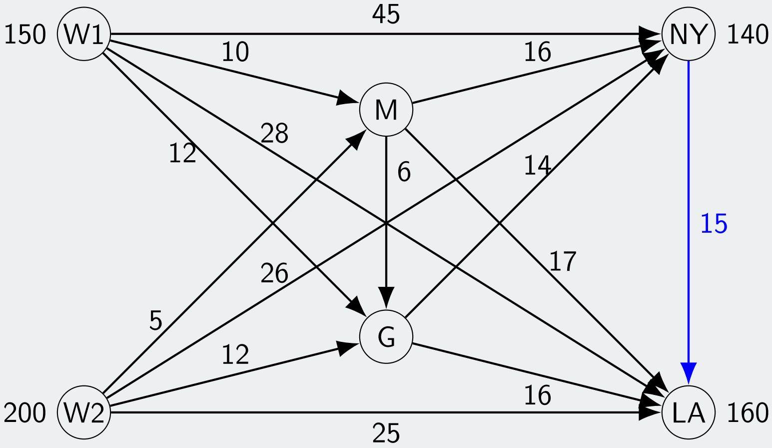
Red de Transshipment



Red de Transshipment



Red de Transshipment



Formulación Transshipment

Variables: x_{ij} = flujo desde nodo i a nodo j

Restricciones de balance:

$$\text{Entrada} - \text{Salida} = \text{Oferta neta}$$

Para cada nodo:

- **Pozos:** Salida $\leq$ Capacidad
- **Ciudades:** Entrada = Demanda
- **Puertos:** Entrada = Salida (balance)

Problema de Flujo Máximo

Objetivo: Maximizar flujo desde fuente hasta sumidero

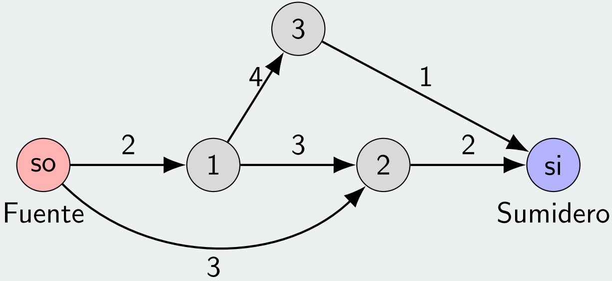
Características:

- Un nodo fuente (source)
- Un nodo sumidero (sink)
- Capacidades en los arcos
- Conservación de flujo en nodos intermedios

Aplicaciones:

- Redes de agua/gas
- Tráfico de red
- Flujo vehicular

Ejemplo: Red de Tuberías



Formulación Flujo Máximo

Variables: x_i = flujo por arco i

Función objetivo:

$$\text{Maximizar: Flujo total de salida desde fuente}$$

Restricciones:

- **Capacidad:** $x_i \leq \text{capacidad}_i$ para cada arco
- **Conservación:** Entrada = Salida en nodos intermedios
- **Balance:** Salida fuente = Entrada sumidero

Implementación Flujo Máximo

```python
import picos

# Crear el problema
P = picos.Problem()

# Definir variables
x = picos.RealVariable('x', 6)

# Funcion objetivo
P.set_objective('max', x[0] + x[1])

# Restricciones de conservacion
P.add_constraint(x[0] + x[1] == x[4] + x[5])  # salida = llegada
P.add_constraint(x[0] + x[1] == x[2] + x[3])  # nodo 1
P.add_constraint(x[1] + x[3] == x[5])         # nodo 2
P.add_constraint(x[2] == x[4])                # nodo 3

# Restricciones de capacidad
P.add_constraint(x[0] <= 2)  # so-1
P.add_constraint(x[1] <= 3)  # so-2
P.add_constraint(x[2] <= 3)  # 1-2
P.add_constraint(x[3] <= 4)  # 1-3
P.add_constraint(x[4] <= 1)  # 3-si
P.add_constraint(x[5] <= 2)  # 2-si

P.solve(solver='glpk') # Solucion: 2 unidades
```

Comparación de Problemas de Redes

Problema	Objetivo	Restricciones	Aplicación
Transporte	Min costo	Oferta/Demanda	Logística
Transshipment	Min costo	Balance + O/D	Distribución
Flujo Máximo	Max flujo	Capacidad	Redes

Elementos comunes:

- Variables de flujo
- Restricciones de balance/conservación
- Representación gráfica
- Algoritmos especializados

Próximos Pasos

Para practicar:

- Resolver problemas de transporte balanceado y desbalanceado
- Experimentar con diferentes configuraciones de red
- Analizar cuellos de botella en flujo máximo
- Implementar soluciones en PICOS

Siguiente clase:

- Programación Entera

¿Dudas?
¿Consultas?