

# Guía de Ejercicios Probabilidad y Estadística para I.O.

Investigación Operativa, Universidad de San Andrés

Si encuentran algún error en el documento o hay alguna duda, mandenme un mail a [rodriguezr@udesa.edu.ar](mailto:rodriguezr@udesa.edu.ar) y lo revisamos.

## 1. Ejercicios

### 1.1. Conversión de Usuarios

Una startup de e-commerce tiene tres canales de adquisición de usuarios: redes sociales (40 % de los usuarios), Google Ads (35 %) y referidos (25 %). Se sabe que la tasa de conversión a compra es del 2 % para usuarios de redes sociales, 3 % para Google Ads y 4 % para referidos. Si se selecciona un usuario al azar, ¿cuál es la probabilidad de que realice una compra?

### 1.2. A/B Testing

La app de delivery de cierto emprendimiento botánico de alto calibre está probando una nueva funcionalidad de checkout. Se muestran 100 usuarios la nueva versión y se rechaza el cambio si más de 3 usuarios abandonan el proceso de compra. Si la probabilidad de abandono con la nueva versión es 0.02, ¿cuál es la probabilidad de que el test sea exitoso?

### 1.3. Engagement en Redes Sociales

Una startup de contenido digital publica 20 posts por semana en Instagram. Cada post tiene una probabilidad del 5 % de volverse viral. ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente 2 posts se vuelvan virales en una semana?

### 1.4. Retención de Usuarios

Una app de fintech tiene una tasa de retención del 85 % después del primer mes. Si 15 usuarios nuevos se registran, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 12 usuarios permanezcan activos después del primer mes?

### **1.5. Tráfico Web**

Un sitio de e-commerce recibe en promedio 6 visitas por minuto durante las horas pico. ¿Cuál es la probabilidad de que lleguen exactamente 4 visitas en el próximo minuto?

### **1.6. Soporte Técnico**

Un chatbot de una fintech recibe en promedio 10 consultas por hora durante el horario pico. ¿Cuál es la probabilidad de que lleguen más de 12 consultas en una hora?

### **1.7. Tiempo de Carga**

El tiempo de carga de una página web sigue una distribución normal con media 2.5 segundos y desviación estándar 0.4 segundos. ¿Cuál es la probabilidad de que una página cargue en menos de 3 segundos?

### **1.8. Costos de Adquisición**

Los costos de adquisición de usuarios (CAC) de una startup siguen una distribución normal con media \$120 y desviación estándar \$15. Un inversor exige que el CAC no supere los \$140. ¿Cuál es la probabilidad de cumplir con el requisito?

### **1.9. Plataforma de E-learning**

Una plataforma de e-learning tiene una tasa de abandono del 3% en sus cursos. Se analizan 50 estudiantes y se considera que el curso falló si más de 2 estudiantes abandonan. Además, el tiempo de carga de cada video sigue una distribución normal con media 2 segundos y desviación estándar 0.5 segundos. ¿Cuál es la probabilidad de que un curso sea considerado exitoso y que el tiempo total de carga sea menor a 90 segundos?

### **1.10. Sistema de Streaming**

Una plataforma de streaming tiene una tasa de llegada de 8 usuarios por hora (distribución de Poisson) y el tiempo de procesamiento de cada video

sigue una distribución exponencial con media 6 minutos. ¿Cuál es la probabilidad de que lleguen más de 10 usuarios en una hora y que el tiempo de procesamiento sea menor a 5 minutos?

## 2. Soluciones

### 2.1. Conversión de Usuarios

Planteo:

- $P(\text{Redes}) = 0,40$ ,  $P(\text{Google}) = 0,35$ ,  $P(\text{Referidos}) = 0,25$
- $P(\text{Compra}|\text{Redes}) = 0,02$ ,  $P(\text{Compra}|\text{Google}) = 0,03$ ,  
 $P(\text{Compra}|\text{Referidos}) = 0,04$
- Queremos:  $P(\text{Compra}) = P(\text{Compra}|\text{Redes})P(\text{Redes}) + P(\text{Compra}|\text{Google})P(\text{Google}) + P(\text{Compra}|\text{Referidos})P(\text{Referidos})$

Resolución:

$$P(\text{Compra}) = 0,02 \times 0,40 + 0,03 \times 0,35 + 0,04 \times 0,25 = 0,008 + 0,0105 + 0,01 = 0,0285$$

Código Python:

```
1 # Probabilidades de los canales
2 P_redes = 0.40
3 P_google = 0.35
4 P_referidos = 0.25
5
6 # Probabilidades de conversion por canal
7 P_compra_redes = 0.02
8 P_compra_google = 0.03
9 P_compra_referidos = 0.04
10
11 # Probabilidad total de conversion
12 P_compra = P_compra_redes * P_redes + P_compra_google *
    P_google + P_compra_referidos * P_referidos
13 print(f"Probabilidad de conversion: {P_compra:.4f}")
```

### 2.2. A/B Testing

Planteo:

- $n = 100$ ,  $p = 0,02$
- $X \sim \text{Binomial}(100, 0,02)$
- Queremos:  $P(X \leq 3) = 1 - P(X > 3)$

**Resolución:**

$$P(X \leq 3) = \sum_{k=0}^3 \binom{100}{k} (0,02)^k (0,98)^{100-k}$$

**Código Python:**

```
1 from scipy.stats import binom
2
3 n = 100
4 p = 0.02
5
6 # Probabilidad de que el test sea exitoso (maximo 3 abandonos
7   )
8 prob_exitoso = binom.cdf(3, n, p)
9 print(f"Probabilidad de test exitoso: {prob_exitoso:.4f}")
```

## 2.3. Engagement en Redes Sociales

**Planteo:**

- $n = 20, p = 0,05$
- $X \sim \text{Binomial}(20, 0,05)$
- Queremos:  $P(X = 2)$

**Resolución:**

$$P(X = 2) = \binom{20}{2} (0,05)^2 (0,95)^{18} = 190 \times 0,0025 \times 0,3972 \approx 0,1887$$

**Código Python:**

```
1 from scipy.stats import binom
2
3 n = 20
4 p = 0.05
5
6 # Probabilidad de exactamente 2 posts virales
7 prob_exacta = binom.pmf(2, n, p)
8 print(f"Probabilidad de exactamente 2 posts virales: {
9   prob_exacta:.4f}")
```

## 2.4. Retención de Usuarios

Planteo:

- $n = 15, p = 0,85$
- $X \sim \text{Binomial}(15, 0,85)$
- Queremos:  $P(X \geq 12) = 1 - P(X \leq 11)$

Resolución:

$$P(X \geq 12) = 1 - P(X \leq 11) = 1 - \sum_{k=0}^{11} \binom{15}{k} (0,85)^k (0,15)^{15-k}$$

Código Python:

```
1 from scipy.stats import binom
2
3 n = 15
4 p = 0.85
5
6 # Probabilidad de al menos 12 usuarios retenidos
7 prob_al_menos_12 = 1 - binom.cdf(11, n, p)
8 print(f"Probabilidad de al menos 12 usuarios retenidos: {
    prob_al_menos_12:.4f}")
```

## 2.5. Tráfico Web

Planteo:

- $\lambda = 6$  (tasa promedio de pedidos por hora)
- $X \sim \text{Poisson}(6)$
- Queremos:  $P(X = 4)$

Resolución:

$$P(X = 4) = \frac{6^4 e^{-6}}{4!} = \frac{1296 \times 0,0025}{24} \approx 0,1339$$

Código Python:

```

1 from scipy.stats import poisson
2
3 lambd = 6
4
5 # Probabilidad de exactamente 4 visitas
6 prob_exacta = poisson.pmf(4, lambd)
7 print(f"Probabilidad de exactamente 4 visitas: {prob_exacta
    :.4f}")

```

## 2.6. Soporte Técnico

Planteo:

- $\lambda = 10$  (tasa promedio de llamadas por hora)
- $X \sim \text{Poisson}(10)$
- Queremos:  $P(X > 12) = 1 - P(X \leq 12)$

Resolución:

$$P(X > 12) = 1 - P(X \leq 12) = 1 - \sum_{k=0}^{12} \frac{10^k e^{-10}}{k!}$$

Código Python:

```

1 from scipy.stats import poisson
2
3 lambd = 10
4
5 # Probabilidad de mas de 12 consultas
6 prob_mas_12 = 1 - poisson.cdf(12, lambd)
7 print(f"Probabilidad de mas de 12 consultas: {prob_mas_12:.4f
    }")

```

## 2.7. Tiempo de Carga

Planteo:

- $\mu = 45, \sigma = 8$
- $X \sim N(45, 8^2)$

- Queremos:  $P(X < 50)$

**Resolución:**

$$P(X < 50) = P\left(Z < \frac{50 - 45}{8}\right) = P(Z < 0,625) \approx 0,7340$$

**Código Python:**

```
1 from scipy.stats import norm
2
3 mu = 45
4 sigma = 8
5
6 # Probabilidad de cargar en menos de 3 segundos
7 prob_menos_3 = norm.cdf(3, loc=mu, scale=sigma)
8 print(f"Probabilidad de cargar en menos de 3 segundos: {
    prob_menos_3:.4f}")
```

## 2.8. Costos de Adquisición

**Planteo:**

- $\mu = 120, \sigma = 15$
- $X \sim N(120, 15^2)$
- Queremos:  $P(X \leq 140)$

**Resolución:**

$$P(X \leq 140) = P\left(Z \leq \frac{140 - 120}{15}\right) = P(Z \leq 1,33) \approx 0,9082$$

**Código Python:**

```
1 from scipy.stats import norm
2
3 mu = 120
4 sigma = 15
5
6 # Probabilidad de cumplir requisito (CAC <= 140)
7 prob_cumplir = norm.cdf(140, loc=mu, scale=sigma)
8 print(f"Probabilidad de cumplir requisito: {prob_cumplir:.4f}
    ")
```



## 2.9. Plataforma de E-learning

Planteo:

- Rechazo del lote:  $X \sim \text{Binomial}(50, 0,03)$ ,  $P(X > 2)$
- Tiempo de inspección:  $Y \sim N(2, 0,5^2)$ ,  $P(\text{tiempo total} < 90)$
- Eventos independientes:  $P(\text{rechazo}) \times P(\text{tiempo} < 90)$

Resolución:

$$P(\text{rechazo}) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - \sum_{k=0}^2 \binom{50}{k} (0,03)^k (0,97)^{50-k}$$

$$P(\text{tiempo total} < 90) = P(Y < 1,8) = P\left(Z < \frac{1,8 - 2}{0,5}\right)$$

Código Python:

```
1 from scipy.stats import binom, norm
2
3 # Parametros del curso
4 n = 50
5 p_abandono = 0.03
6
7 # Parametros del tiempo de carga
8 mu_tiempo = 2 # segundos por video
9 sigma_tiempo = 0.5
10 tiempo_total = 90 # segundos
11
12 # Probabilidad de que el curso sea exitoso
13 prob_exitoso = 1 - binom.cdf(2, n, p_abandono)
14
15 # Probabilidad de tiempo total menor a 90 segundos
16 # Tiempo promedio total = 50 * 2 = 100 segundos
17 # Desviacion total = sqrt(50) * 0.5 = 3.54 segundos
18 mu_total = n * mu_tiempo
19 sigma_total = (n**0.5) * sigma_tiempo
20 prob_tiempo = norm.cdf(tiempo_total, loc=mu_total, scale=
    sigma_total)
21
22 # Probabilidad conjunta (eventos independientes)
23 prob_conjunta = prob_exitoso * prob_tiempo
24
25 print(f"Probabilidad de curso exitoso: {prob_exitoso:.4f}")
```

```

26 print(f"Probabilidad de tiempo < 90 seg: {prob_tiempo:.4f}")
27 print(f"Probabilidad conjunta: {prob_conjunta:.4f}")

```

## 2.10. Sistema de Streaming

Planteo:

- Llegadas:  $X \sim \text{Poisson}(8)$ ,  $P(X > 10)$
- Tiempo de servicio:  $Y \sim \text{Exponencial}(\lambda = 1/6)$ ,  $P(Y < 5)$
- Eventos independientes:  $P(X > 10) \times P(Y < 5)$

Resolución:

$$P(X > 10) = 1 - P(X \leq 10) = 1 - \sum_{k=0}^{10} \frac{8^k e^{-8}}{k!}$$

$$P(Y < 5) = 1 - e^{-\lambda \cdot 5} = 1 - e^{-5/6}$$

Código Python:

```

1 from scipy.stats import poisson, expon
2
3 # Parametros del sistema
4 lambd_llegadas = 8 # clientes por hora
5 lambd_servicio = 1/6 # tasa de servicio (clientes por minuto)
6
7 # Probabilidad de mas de 10 usuarios
8 prob_mas_10 = 1 - poisson.cdf(10, lambd_llegadas)
9
10 # Probabilidad de tiempo de procesamiento menor a 5 minutos
11 prob_procesamiento_rapido = expon.cdf(5, scale=1/
    lambd_servicio)
12
13 # Probabilidad conjunta
14 prob_conjunta = prob_mas_10 * prob_procesamiento_rapido
15
16 print(f"Probabilidad de mas de 10 usuarios: {prob_mas_10:.4f}")
17
18 print(f"Probabilidad de procesamiento < 5 min: {
    prob_procesamiento_rapido:.4f}")
19
20 print(f"Probabilidad conjunta: {prob_conjunta:.4f}")

```