Cadenas de Markov

Investigación Operativa

Universidad de San Andrés

Introducción a las Cadenas de Markov

¿Qué es una Cadena de Markov?

Es un proceso estocástico que cumple con la *propiedad de Markov*: la probabilidad de cualquier estado futuro depende **únicamente del estado presente**, no de la secuencia de eventos que le precedieron.

Intuición: El sistema "no tiene memoria" del pasado. Solo le importa dónde está ahora para decidir dónde estará después.

Ejemplos en la vida real:

- El clima de mañana depende del clima de hoy (no del de la semana pasada)
- El estado de una máquina depende de su estado actual (no de toda su historia)
- El precio de una acción depende del precio actual (modelo simplificado)

Definición Formal

Sea $\{X_n, n \geq 0\}$ un proceso estocástico con espacio de estados S.

Es una cadena de Markov si para todo $n \geq 0$ y para todos los estados $i_0, i_1, ..., i_n, j \in S$:

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, ..., X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = j | X_n = i_n)$$

En palabras: La probabilidad de estar en el estado j en el tiempo $n + 1$, dado todo el historial hasta el tiempo n, es igual a la probabilidad de estar en j conociendo solo el estado actual i_n.

El pasado es **irrelevante** una vez que conocemos el presente.

Matriz de Transición

¿Cómo representamos las probabilidades de transición?

La matriz $P = (p_{ij})$ contiene todas las probabilidades de transición entre estados.

$$p_{ij} = P(X_{n+1} = j | X_n = i)$$

Interpretación: p_{ij} es la probabilidad de pasar del estado i al estado j en un paso.

Propiedades importantes:

- $0 \leq p_{ij} \leq 1$ para todo $i, j \in S$ (son probabilidades)
- $\sum_{j \in S} p_{ij} = 1$ para todo $i \in S$ (cada fila suma 1)

¿Por qué cada fila suma 1? Porque desde el estado i, el sistema debe ir a algún estado (incluyendo quedarse en i).

Ejemplo Introductorio: Sistema F/R

Consideremos un sistema simple con dos estados: Funcionando (F) y Roto (R).

Probabilidades de transición:

- Si funciona hoy: 80 % sigue funcionando mañana, 20 % se rompe
- Si está roto hoy: 60 % es reparado, 40 % sigue roto

Matriz de transición:

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix}$$

Las filas representan el estado actual (F, R) y las columnas el estado futuro.

Ejemplo Introductorio: ¿Qué pasa en 2 días?

Pregunta: Si hoy funciona, ¿cuál es la probabilidad de que funcione en 2 días?

Caminos posibles:

- F $\rightarrow$ F $\rightarrow$ F: $(0{,}8)(0{,}8) = 0{,}64$
- F $\rightarrow$ R $\rightarrow$ F: $(0{,}2)(0{,}6) = 0{,}12$

Total: $0{,}64 + 0{,}12 = 0{,}76$

Esto equivale a calcular P^2:

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0{,}76 & 0{,}24 \\ 0{,}72 & 0{,}28 \end{pmatrix}$$

El elemento $P^2_{FF} = 0{,}76$ confirma nuestro cálculo.

Ejercicio 1: Predicción del Clima - Consigna

- Si hoy está soleado:
  - 70 % de probabilidad de que mañana esté soleado
  - 20 % de probabilidad de que mañana esté nublado
  - 10 % de probabilidad de que mañana llueva
- Si hoy está nublado:
  - 30 % de probabilidad de que mañana esté soleado
  - 40 % de probabilidad de que mañana esté nublado
  - 30 % de probabilidad de que mañana llueva
- Si hoy llueve:
  - 20 % de probabilidad de que mañana esté soleado
  - 40 % de probabilidad de que mañana esté nublado
  - 40 % de probabilidad de que mañana llueva

Ejercicio 1: Predicción del Clima - Preguntas

a) Construir la matriz de transición P

b) ¿Cuál es la probabilidad de que llueva dentro de dos días si hoy está soleado?

Ejercicio 1: Predicción del Clima - Matriz de Transición

a) Matriz de transicion:

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}4 \end{pmatrix}$$

Donde:

- Fila 1: Probabilidades desde estado soleado
- Fila 2: Probabilidades desde estado nublado
- Fila 3: Probabilidades desde estado lluvioso

Ejercicio 1: Predicción del Clima - Cálculo de Probabilidad

b) Probabilidad de lluvia en dos días si hoy está soleado:

Debemos considerar todos los caminos posibles desde Soleado hasta Lluvia en 2 pasos:

$$\begin{aligned} P(X_2 = L | X_0 = S) &= (0{,}7)(0{,}1) + (0{,}2)(0{,}3) + (0{,}1)(0{,}4) \\ &= 0{,}07 + 0{,}06 + 0{,}04 = 0{,}17 \end{aligned}$$

Interpretación de cada camino:

- 7 %: Soleado → Soleado → Lluvia
- 6 %: Soleado → Nublado → Lluvia
- 4 %: Soleado → Lluvia → Lluvia

Hay 17 % de probabilidad de lluvia en 2 días partiendo de un día soleado.

Ejercicio 2: Puntos en Tenis - Contexto

Escenario: Final de Roland Garros 2025. Francisco Cerúndolo vs Holger Rune con match point.

Como analista de tenis de Cerúndolo, conoces las siguientes probabilidades:

- 50 % de ganar el punto de ace o saque no devuelto (punto directo)
- 30 % de que entre el primer saque y se arme el punto (peloteo)
- 20 % de errar el primer saque
- 90 % de meter el segundo saque
- 2 % de ganar directo con el segundo saque
- 55 % de ganar cualquier peloteo (sea con primer o segundo saque)

Objetivo: Modelar el punto como una cadena de Markov para calcular la probabilidad de que Cerúndolo se consagre campeón.

Ejercicio 2: Puntos en Tenis - Preguntas

a) Identificar estados

b) ¿Cuál es la probabilidad de que Cerúndolo gane el punto?

c) Si se jugaran infinitos puntos con estas probabilidades, ¿qué porcentaje ganaría cada jugador?

Ejercicio 2: Estados y Matriz

Estados identificados:

- S: Primer saque
- D: Segundo saque
- P: Peloteo
- W: Ganado (absorbente)
- L: Perdido (absorbente)

W y L son **estados absorbentes**: una vez terminado el punto, no hay más transiciones.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}20 & 0{,}30 & 0{,}50 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}90 & 0{,}02 & 0{,}08 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}55 & 0{,}45 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Orden: S, D, P, W, L

Ejercicio 2: Resolución

Calculamos todos los caminos que llevan a ganar el punto:

- **Camino 1:** Gana directo con primer saque: 0,50
- **Camino 2:** Primer saque entra, peloteo, gana: $(0{,}30)(0{,}55) = 0{,}165$
- **Camino 3:** Erra primer saque, segundo entra, peloteo, gana: $(0{,}20)(0{,}90)(0{,}55) = 0{,}099$
- **Camino 4:** Erra primer saque, gana directo con segundo: $(0{,}20)(0{,}02) = 0{,}004$

Sumando todos los caminos:

$$P(\text{Cerú Gana}) = 0{,}50 + 0{,}165 + 0{,}099 + 0{,}004 = 0{,}768$$

Conclusión: Cerúndolo tiene un 76.8 % de probabilidad de ganar el punto y consagrarse campeón. *A largo plazo:* Si jugaran infinitos puntos con estas probabilidades, Cerúndolo ganaría el 76.8 % y Rune el 23.2 %.

Ejercicio 3: Máquina de Juguetes - Consigna

Estados posibles:

- F: Funcionando perfectamente (80 %)
- M: Mal funcionamiento (15 %)
- R: Rota (5 %)

Producción por hora:

- F: 100 muñecos
- M: 50 muñecos
- R: 0 muñecos

Ejercicio 3: Intervención del Técnico

Intervención del técnico:

- 90 % de probabilidad de reparar
- 10 % de probabilidad de empeorar

Importante: El técnico solo interviene cuando la máquina **no está funcionando perfectamente** (estados M o R).

Ejercicio 3: Preguntas

a) Construir matriz de transición considerando las acciones del técnico
b) Probabilidad de estar rota después de dos intervenciones, partiendo de F
c) Probabilidad de funcionar perfectamente durante tres horas consecutivas

Ejercicio 3: Resolución - Parte 1

a) Matriz de transicion:

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}80 & 0{,}15 & 0{,}05 \\ 0{,}90 & 0 & 0{,}10 \\ 0{,}90 & 0 & 0{,}10 \end{pmatrix}$$

- Primera fila: Desde F, 80 % sigue en F, 15 % pasa a M, 5 % pasa a R
- Segunda fila: Desde M, técnico arregla (90 %), empeora (10 %)
- Tercera fila: Desde R, técnico arregla (90 %), empeora (10 %)

Ejercicio 3: Resolución - Parte 2

b) Probabilidad de estar rota después de dos intervenciones:

Nota: Consideramos caminos sin reparación (sino serían infinitos).

Posibles caminos desde F hasta R en exactamente 3 transiciones (2 intervenciones):

- $F \to M \to M \to R$: $(0{,}15)(0)(0{,}10) = 0$
- $F \to R \to R \to R$: $(0{,}05)(0{,}10)(0{,}10) = 0{,}0005$
- $F \to R \to M \to R$: $(0{,}05)(0)(0{,}10) = 0$
- $F \to M \to R \to R$: $(0{,}15)(0{,}10)(0{,}10) = 0{,}0015$

$$P(\text{Rota después de 2 intervenciones}) = 0{,}002 \ (0.2\,\%)$$

Ejercicio 3: Resolución - Parte 3

c) Probabilidad de funcionar tres horas consecutivas:

$$\begin{aligned} P(F \text{ durante 3 horas}) &= 0{,}80 \cdot 0{,}80 \cdot 0{,}80 \\ &= 0{,}512 \end{aligned}$$

- Cada hora tiene 80 % de probabilidad de seguir en F
- Las probabilidades son independientes
- Multiplicamos las tres probabilidades

Clasificación de Estados

Estados Comunicantes

Definición: El estado i *comunica* con el estado j (denotado $i \to j$) si existe $n \geq 0$ tal que $P_{ij}^{(n)} > 0$.

Es decir, es posible llegar del estado i al estado j en un número finito de pasos.

Intercomunicación: Dos estados i y j se intercomunican si $i \to j$ y $j \to i$.

Cadenas Irreducibles

Definición: Una cadena es *irreducible* si todos sus estados se intercomunican.

Desde cualquier estado es posible llegar a cualquier otro estado en un número finito de pasos.

Ejemplo: La cadena del clima (Ejercicio 1) es irreducible porque desde Soleado, Nublado o Lluvioso se puede llegar a cualquier otro estado.

Periodicidad

Definición: El *período* de un estado i es el máximo común divisor de todos los valores de n para los cuales $P_{ii}^{(n)} > 0$.

Un estado con período 1 se llama *aperiódico*.

Intuición: Un estado periódico solo puede volver a sí mismo en múltiplos de su período.

Por ejemplo, si el período es 2, solo puede volver en 2, 4, 6, ... pasos.

Estados Absorbentes

Definición: Un estado i es *absorbente* si $p_{ii} = 1$.

Una vez que el sistema entra en ese estado, nunca puede salir de él.

Ejemplo: En el Ejercicio 2 (Tenis), los estados W (Cerúndolo gana) y L (Cerúndolo pierde) son absorbentes: una vez terminado el punto, no hay más transiciones.

Cadenas Ergódicas

Definición: Una cadena es *ergódica* si es *irreducible* y *aperiódica*.

Importancia: Las cadenas ergódicas tienen una única distribución estacionaria π hacia la cual converge el sistema independientemente del estado inicial.

Esta propiedad es fundamental para calcular comportamientos a largo plazo.

Ecuaciones de Chapman-Kolmogorov

Intuición: Para ir del estado i al estado j en $n+m$ pasos, primero damos n pasos (llegamos a algún estado intermedio k), luego desde k damos m pasos más hasta j.

Para probabilidades de n pasos:

$$P_{ij}^{(n)} = P(X_n = j | X_0 = i)$$

se cumple:

$$P_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k \in S} P_{ik}^{(n)} P_{kj}^{(m)}$$

En forma matricial:

$$P^{(n+m)} = P^{(n)} P^{(m)}, \quad P^{(n)} = P^n$$

Para calcular probabilidades a n pasos, simplemente elevamos P a la potencia n.

Distribucion en Tiempo n

Intuición: Si comenzamos con una distribución inicial $q^{(0)}$ (porcentaje en cada estado al tiempo 0), podemos calcular cómo se distribuye el sistema en cualquier tiempo futuro n.

Sea $q^{(0)}$ el vector fila inicial con $q_i^{(0)} = P(X_0 = i)$. La distribución en el tiempo n es:

$$q^{(n)} = q^{(0)}\, P^n$$

donde $q_j^{(n)} = P(X_n = j)$.

Ejemplo: Si el clima hoy tiene 50 % probabilidad de estar soleado, 30 % nublado y 20 % lluvioso, entonces $q^{(0)} = [0{,}5, 0{,}3, 0{,}2]$. Para saber la distribución en 5 días: $q^{(5)} = q^{(0)} \cdot P^5$.

Estado Estacionario

Motivación: ¿Qué pasa si aplicamos P infinitas veces? ¿Converge la distribución a algo fijo?

En cadenas **ergódicas** (irreducibles y aperiódicas) existe un vector π tal que:

$$\pi = \pi P, \quad \sum_j \pi_j = 1$$

¿Por qué esta ecuación? Si π es estacionaria, al aplicar P la distribución no cambia: sigue siendo π. El sistema está en equilibrio.

Para encontrar π, resolvemos:

$$\pi_j = \sum_i \pi_i \, p_{ij}, \quad \sum_j \pi_j = 1$$

π_j representa la fracción de tiempo que el sistema pasa en el estado j a largo plazo.

Método Práctico para Resolver el Estado Estacionario

Pasos para resolver el sistema $\pi = \pi P$:

1. Escribir la ecuación como sistema de ecuaciones lineales
2. Equivalente a $(P^T - I)\pi^T = 0$ (sistema homogéneo)
3. El sistema tiene infinitas soluciones, una ecuación es redundante
4. Reemplazar una ecuación por $\sum_j \pi_j = 1$ (normalización)
5. Resolver el sistema resultante usando Python (o a mano si es pequeño)

Pasos Prácticos de Cálculo

Para resolver problemas con cadenas de Markov:

1. Definir conjunto de estados S y construir matriz de transición P
2. Clasificar la cadena (irreducible, ergódica, con estados absorbentes, etc.)
3. Calcular P^n para probabilidades a n pasos, o usar $q^{(n)} = q^{(0)} P^n$
4. Si la cadena es ergódica, resolver $\pi = \pi P$ para estado estacionario
5. Interpretar resultados en el contexto del problema

Importancia en Investigación Operativa

Las Cadenas de Markov en IO permiten:

- Modelar y optimizar sistemas como colas, inventarios, fiabilidad y clientes.
- Predecir el desempeño a largo plazo y cuantificar indicadores clave.
- Diseñar políticas óptimas de operación.

Ejercicio 4: Demanda en Centro de Datos - Consigna

Un datacenter de cloud computing puede tener tres niveles de demanda diaria: Baja (B), Media (M), Alta (A).

Probabilidades de transición según registros históricos:

- Si está en **baja demanda**: 30 % permanece en B, 50 % pasa a M, 20 % pasa a A
- Si está en **media demanda**: 20 % pasa a B, 40 % permanece en M, 40 % pasa a A
- Si está en **alta demanda**: 30 % pasa a B, 50 % pasa a M, 20 % permanece en A

Pregunta: Si hoy el sistema está en baja demanda, ¿cuál es la probabilidad de que en 3 días esté en alta demanda?

Ejercicio 4: Solución

Paso 1: Construir la matriz de transición

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2 \end{pmatrix}$$

Filas/columnas en orden: B, M, A

Paso 2: Definir estado inicial

$\mathbf{e_0} = [1\ 0\ 0]$ (100 % en baja demanda)

Paso 3: Calcular distribución en 3 días

$\mathbf{e_0} \cdot P^3 = [0{,}248,\ 0{,}452,\ \boxed{0{,}300}]$

Respuesta: Hay 30 % de probabilidad de estar en alta demanda en 3 días.

Ejercicio 5: Movilidad del Ingeniero Civil - Consigna

Un ingeniero civil trabaja en tres ciudades: A, B y C. Cada día permanece en la ciudad o se desplaza a otra según la demanda de trabajo.

Probabilidades de transición entre ciudades:

- Desde **A**: 10 % queda en A, 30 % va a B, 60 % va a C
- Desde **B**: 20 % va a A, 20 % queda en B, 60 % va a C
- Desde **C**: 20 % va a A, 40 % va a B, 40 % queda en C

Preguntas:

a) ¿Probabilidad de estar en C después de 2 días, si hoy está en C?

b) ¿Distribución estacionaria a largo plazo?

Ejercicio 5: Solución Parte a)

Construir matriz de transición:

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}6 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}6 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}4 \end{pmatrix}$$

Filas/columnas en orden: A, B, C

Estado inicial: $\mathbf{e_2} = [0\ 0\ 1]$ (hoy está en C)

Calcular: $\mathbf{e_2} \cdot P^2 = [0{,}26\ 0{,}34\ \boxed{0{,}40}]$

Respuesta a): Hay 40 % de probabilidad de estar en C después de 2 días.

Ejercicio 5: Solución Parte b)

Encontrar distribución estacionaria: Resolver $\pi P = \pi$ con $\sum \pi_i = 1$

Sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 0{,}1\pi_A + 0{,}2\pi_B + 0{,}2\pi_C = \pi_A \\ 0{,}3\pi_A + 0{,}2\pi_B + 0{,}4\pi_C = \pi_B \\ 0{,}6\pi_A + 0{,}6\pi_B + 0{,}4\pi_C = \pi_C \\ \pi_A + \pi_B + \pi_C = 1 \end{cases}$$

Solución:

$$\pi = \left[\frac{12}{71} \approx 0{,}169,\ \frac{22}{71} \approx 0{,}310,\ \frac{37}{71} \approx 0{,}521\right]$$

Interpretación: A largo plazo, el ingeniero pasa aproximadamente 17 % del tiempo en A, 31 % en B y 52 % en C.

De Cadenas Pasivas a Decisiones Activas

Motivación: ¿Por qué MDPs?

Hasta ahora: Cadenas de Markov donde el sistema evoluciona según probabilidades fijas. Solo observamos y calculamos.

En la realidad: Podemos tomar *decisiones* que afectan la evolución del sistema.

Ejemplos:

- ¿Cuándo reparar una máquina?
- ¿Cuándo reemplazarla por una nueva?
- ¿Dónde estacionar el auto para minimizar costos?
- ¿Cuándo hacer mantenimiento preventivo?

Objetivo: Encontrar la *política óptima* (qué decisión tomar en cada estado) que minimice el costo promedio a largo plazo.

MDPs: Formulación General

Veamos la formulación general de los Procesos de Decisión de Markov.

Los MDPs añaden tres elementos nuevos a las cadenas de Markov:

1. **Decisiones:** En cada estado podemos elegir entre varias acciones
2. **Transiciones dependientes:** La probabilidad de ir al siguiente estado depende de la acción elegida
3. **Costos/recompensas:** Cada decisión tiene un costo (o beneficio) asociado

Para cada estado i y decisión k definimos:

- $p_{ij}(k)$: probabilidad de transición de i a j bajo decisión k
- c_{ik}: costo de tomar decisión k en estado i

Variables de Decisión y Coste Promedio

Definimos para cada estado $i = 0, \ldots, M$ y decisión $k = 1, \ldots, K$:

$$y_{ik} = P(\text{estado} = i \text{ y decisión } k)$$

Interpretación: y_{ik} representa la frecuencia con que el sistema está en estado i y se toma la decisión k a largo plazo.

Se relaciona con la distribución estacionaria:

$$y_{ik} = \pi_i \cdot D_{ik}$$

donde π_i es la probabilidad de estar en i y D_{ik} es la probabilidad de tomar decisión k dado que estamos en i.

La función objetivo (costo promedio por unidad de tiempo) es:

$$E(C) = \sum_{i=0}^{M} \sum_{k=1}^{K} c_{ik} \, y_{ik}$$

Restricciones del Modelo LP

(1) Normalización:

$$\sum_{i=0}^{M}\sum_{k=1}^{K} y_{ik} = 1$$

Las y_{ik} forman una distribución de probabilidad válida.

(2) Balance de flujo en cada estado j:

$$\sum_{k=1}^{K} y_{jk} - \sum_{i=0}^{M}\sum_{k=1}^{K} y_{ik}\, p_{ij}(k) = 0$$

Flujo que sale del estado j = Flujo que entra al estado j

(3) No negatividad: $y_{ik} \geq 0$

Una vez resuelto, obtenemos:

$$\pi_i = \sum_{k=1}^{K} y_{ik}, \quad D_{ik} = \frac{y_{ik}}{\pi_i}$$

Ejercicio 6: Reemplazo de Maquinaria (MDP)

Contexto: Una empresa utiliza maquinaria que se desgasta con el tiempo. Cada máquina puede estar en uno de cuatro estados:

- Estado 0: máquina nueva
- Estado 1: máquina con poco desgaste
- Estado 2: máquina deteriorada
- Estado 3: máquina rota

Decisiones posibles en cada período:

1. No hacer nada ($k = 1$)
2. Renovar la máquina ($k = 2$, solo aplicable en estado 2)
3. Comprar una máquina nueva ($k = 3$, aplicable en estados 1, 2 o 3)

Objetivo: Encontrar la política óptima que minimice el costo promedio a largo plazo.

Matriz de Transición sin Intervención

Cuando no se toma ninguna acción, la máquina evoluciona según:

Estado $i \to j$	0	1	2	3
0	0	7/8	1/16	1/16
1	0	3/4	1/8	1/8
2	0	0	1/2	1/2
3	0	0	0	1

Efecto de las decisiones:

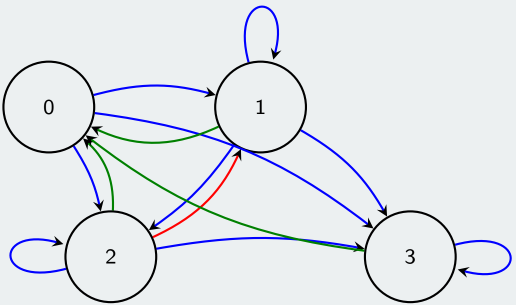
- **Renovar** en estado 2 (acción $k = 2$) lleva con certeza al estado 1
- **Comprar nueva** en estados 1, 2 o 3 (acción $k = 3$) lleva con certeza al estado 0

Costos de las Decisiones

Estado i	c_{ik} (miles de dólares)		
	Nada ($k=1$)	Renovar ($k=2$)	Nueva ($k=3$)
0	0	—	—
1	1	—	6
2	3	4	6
3	—	—	6

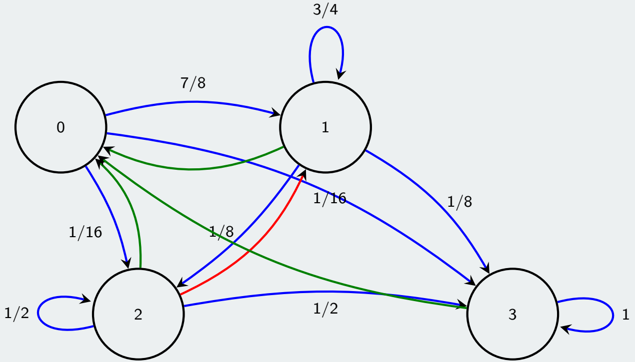
Diagrama de la Cadena de Markov con Decisiones

Visualización de todas las transiciones posibles:



- Flechas azules: Decisión 1 (no hacer nada)
- Flecha roja: Decisión 2 (renovar) - solo en estado 2
- Flechas verdes: Decisión 3 (comprar nueva) - estados 1, 2, 3

Diagrama con Probabilidades de Transición



Nota: Flechas rojas y verdes son determinísticas (probabilidad 1). Solo flechas azules muestran probabilidades.

Variables Válidas

Las variables válidas son: $y_{01}, y_{11}, y_{13}, y_{21}, y_{22}, y_{23}, y_{33}$

Cada variable y_{ik} representa la probabilidad de estar en el estado i y tomar la decisión k.

Función Objetivo

La función objetivo la podemos plantear de la siguiente manera:

$$\text{Minimizar} \quad Z = 1000\, y_{11} + 6000\, y_{13} + 3000\, y_{21} + 4000\, y_{22} + 6000\, y_{23} + 6000\, y_{33}$$

Restricción de Normalización

La restricción de normalización la podemos plantear de la siguiente manera:

$$y_{01} + y_{11} + y_{13} + y_{21} + y_{22} + y_{23} + y_{33} = 1$$

Restricciones de Balance de Flujo

Para cada estado j, el flujo que sale debe ser igual al flujo que entra.

Estado 0 (máquina nueva):

La única forma de salir del estado 0 es mediante y_{01} (no hacer nada). Se puede llegar al estado 0 comprando una máquina nueva desde los estados 1, 2 o 3:

$$y_{01} = y_{13} + y_{23} + y_{33}$$

Restricciones de Balance de Flujo (cont.)

Estado 1 (poco desgaste):

Se sale del estado 1 mediante y_{11} (no hacer nada) o y_{13} (comprar nueva).
Se puede llegar al estado 1 desde:

- Estado 0 con probabilidad $\frac{7}{8}$ (acción $k = 1$)
- Estado 1 con probabilidad $\frac{3}{4}$ (acción $k = 1$)
- Estado 2 con probabilidad 1 (acción $k = 2$, renovar)

$$y_{11} + y_{13} = \frac{7}{8}\, y_{01} + \frac{3}{4}\, y_{11} + y_{22}$$

Restricciones de Balance de Flujo (cont.)

Estado 2 (deteriorada):

Se sale del estado 2 mediante y_{21}, y_{22} o y_{23}. Se puede llegar al estado 2 desde:

- Estado 0 con probabilidad $\frac{1}{16}$ (acción $k = 1$)
- Estado 1 con probabilidad $\frac{1}{8}$ (acción $k = 1$)
- Estado 2 con probabilidad $\frac{1}{2}$ (acción $k = 1$)

$$y_{21} + y_{22} + y_{23} = \frac{1}{16} y_{01} + \frac{1}{8} y_{11} + \frac{1}{2} y_{21}$$

Restricciones de Balance de Flujo (cont.)

Estado 3 (rota):

Se sale del estado 3 mediante y_{33} (comprar nueva). Se puede llegar al estado 3 desde:

- Estado 0 con probabilidad $\frac{1}{16}$ (acción $k = 1$)
- Estado 1 con probabilidad $\frac{1}{8}$ (acción $k = 1$)
- Estado 2 con probabilidad $\frac{1}{2}$ (acción $k = 1$)

$$y_{33} = \frac{1}{16}\, y_{01} + \frac{1}{8}\, y_{11} + \frac{1}{2}\, y_{21}$$

No Negatividad

$$y_{ik} \geq 0 \quad \forall\, i, k$$

Solución Óptima

Aplicando el método simplex, se obtiene:

$$y_{01} = \frac{2}{21}, \quad y_{11} = \frac{5}{7}, \quad y_{13} = 0, \quad y_{21} = 0, \quad y_{22} = \frac{2}{21}, \quad y_{23} = 0, \quad y_{33} = \frac{2}{21}$$

Política Óptima

La política óptima se obtiene calculando $D_{ik} = \frac{y_{ik}}{\pi_i}$, donde $\pi_i = \sum_k y_{ik}$:

- **Estado 0**: $D_{01} = 1$ (no hacer nada)
- **Estado 1**: $D_{11} = 1$, $D_{13} = 0$ (no hacer nada)
- **Estado 2**: $D_{21} = 0$, $D_{22} = 1$, $D_{23} = 0$ (renovar parcialmente)
- **Estado 3**: $D_{33} = 1$ (comprar nueva)

Costo Promedio Óptimo

El costo promedio mínimo a largo plazo es:

$$Z^* = 1000 \cdot \frac{5}{7} + 6000 \cdot 0 + 3000 \cdot 0 + 4000 \cdot \frac{2}{21} + 6000 \cdot 0 + 6000 \cdot \frac{2}{21} \approx 1666{,}67$$

Interpretación de las Restricciones de Balance de Flujo

Las restricciones de balance de flujo garantizan que el sistema esté en equilibrio estacionario. Por ejemplo, para el estado 1:

$$\underbrace{y_{11} + y_{13}}_{\text{flujo que sale}} = \underbrace{\frac{7}{8} y_{01} + \frac{3}{4} y_{11} + y_{22}}_{\text{flujo que entra}}$$

- **Lado izquierdo**: frecuencia con que se está en estado 1 y se actúa
- **Lado derecho**: frecuencia con que se llega al estado 1 desde otros estados
- La igualdad garantiza que el flujo total hacia y desde el estado 1 se equilibra

Simulación en Python

El siguiente código muestra cómo simular el comportamiento del sistema con y sin la política de reemplazo:

```
import numpy as np

# Matriz de transicion si NO se hace nada (accion "normal")
# Estados: 0->1->2->3 (3 es absorbente)
P_normal = np.array([
    [0,   7/8, 1/16, 1/16],
    [0,   3/4, 1/8,  1/8 ],
    [0,   0,   1/2,  1/2 ],
    [0,   0,   0,    1   ]
])
```

Simulación en Python (cont.)

```python
# Matriz de transicion si REEMPLAZAMOS al llegar a estado 3
P_reemplazo = np.array([
    [0,   7/8, 1/16, 1/16],
    [0,   3/4, 1/8,  1/8 ],
    [0,   0,   1/2,  1/2 ],
    [1,   0,   0,    0   ]  # Desde 3 volvemos a 0
])

# Numero de semanas a simular
semanas = 10

# Calculamos P^n por multiplicacion sucesiva
P_normal_n = P_normal.copy()
P_reemplazo_n = P_reemplazo.copy()

for i in range(1, semanas):
    P_normal_n = np.dot(P_normal_n, P_normal)
    P_reemplazo_n = np.dot(P_reemplazo_n, P_reemplazo)
```

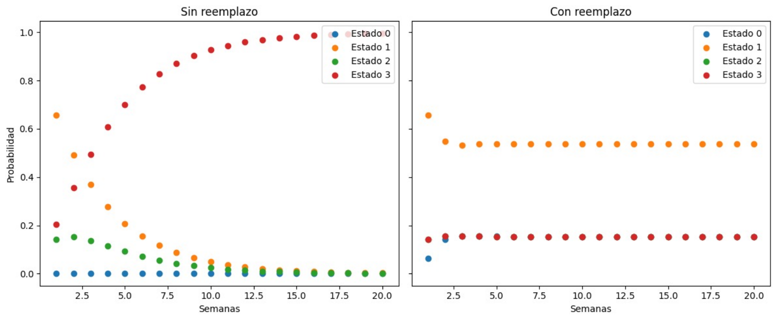
Simulación en Python (cont.)

```
# Vector estado inicial: comenzamos 100% en el estado 0
e_0 = np.array([1, 0, 0, 0])

# Distribucion tras 10 semanas
estado_sin_reemplazo = np.dot(e_0, P_normal_n)
estado_con_reemplazo = np.dot(e_0, P_reemplazo_n)

print(f"Distribucion tras {semanas} semanas (sin reemplazo):")
print(estado_sin_reemplazo)
# [0.     0.05   0.02   0.93]

print(f"\nDistribucion tras {semanas} semanas (con reemplazo):")
print(estado_con_reemplazo)
# [0.15   0.54   0.15   0.15]
```

Análisis de Resultados

- **Sin reemplazo:** Después de 10 semanas, hay un 93 % de probabilidad de que la máquina esté en estado 3 (rota). El sistema converge hacia el estado absorbente.
- **Con reemplazo:** El sistema alcanza un estado estacionario donde la máquina pasa aproximadamente 54 % del tiempo en estado 1, 15 % en estados 0 y 2, y 15 % en estado 3 (cuando es reemplazada inmediatamente).

Evolución de Probabilidades



Se observa claramente cómo sin reemplazo (izquierda), el sistema inevitablemente converge hacia el estado 3 (rota), mientras que con reemplazo (derecha), el sistema se estabiliza en una distribución estacionaria.

Implementación Completa con picos

Para resolver el problema de optimización utilizando programación lineal, podemos usar la biblioteca `picos`:

```python
import picos as pc

# Crear el problema
prob = pc.Problem()

# Crear las variables validas individualmente
y_vars = {}  # y_vars[(estado, decision)]
valid = [(0, 0),       # y_01
         (1, 0), (1, 2),  # y_11, y_13
         (2, 0), (2, 1), (2, 2),  # y_21, y_22, y_23
         (3, 2)]       # y_33

for (i, k) in valid:
    y_vars[(i, k)] = pc.RealVariable(f"y{i}{k}", lower=0)
```

Implementación Completa con picos (cont.)

```
# Funcion objetivo
objective = (
    1000 * y_vars[(0, 0)] +
    6000 * y_vars[(1, 2)] +
    3000 * y_vars[(2, 0)] +
    4000 * y_vars[(2, 1)] +
    6000 * y_vars[(2, 2)] +
    6000 * y_vars[(3, 2)]
)
prob.set_objective("min", objective)

# Restriccion de suma total
prob.add_constraint(sum(y_vars.values()) == 1)
```

Implementación Completa con picos (cont.)

```
# Restriccion 2: estado 0
prob.add_constraint(y_vars[(0, 0)] -
    (y_vars.get((1, 2), 0) + y_vars.get((2, 2), 0) +
     y_vars.get((3, 2), 0)) == 0)

# Restriccion 3: estado 1
prob.add_constraint(y_vars.get((1, 0), 0) +
    y_vars.get((1, 2), 0) -
    (7/8 * y_vars.get((0, 0), 0) +
     3/4 * y_vars.get((1, 0), 0) +
     y_vars.get((2, 1), 0)) == 0)
```

Implementación Completa con picos (cont.)

```
# Restriccion 4: estado 2
prob.add_constraint(y_vars.get((2, 0), 0) +
    y_vars.get((2, 1), 0) + y_vars.get((2, 2), 0) -
    (1/16 * y_vars.get((0, 0), 0) +
     1/8 * y_vars.get((1, 0), 0) +
     1/2 * y_vars.get((2, 0), 0)) == 0)

# Restriccion 5: estado 3
prob.add_constraint(y_vars.get((3, 2), 0) -
    (1/16 * y_vars.get((0, 0), 0) +
     1/8 * y_vars.get((1, 0), 0) +
     1/2 * y_vars.get((2, 0), 0)) == 0)
```

Implementación Completa con picos (cont.)

```python
# Resolver
solution = prob.solve(solver='cvxopt')

# Mostrar resultados
print("Solucion optima:")
for (i, k), var in y_vars.items():
    print(f"y_{i}{k} = {var.value}")

print(f"\nCosto minimo: ${objective.value:.2f}/semana")
```

Problema de Estacionamiento - Contexto

Escenario: Ramiro cuida mucho su Renault Coupé Fuego 1.6 Turbo 1985 y no le gustan las abolladuras. Cada día debe decidir dónde estacionar.

Opciones de estacionamiento:

- **Calle (1 espacio):** Gratis, pero 10 % de probabilidad de abolladura
- **Calle (2 espacios):** Reduce abolladura a 2 %, pero 30 % de multa ($15)
- **Lote:** Cuesta $5, pero 0 % de probabilidad de abolladura

Si el auto se abolla:

- **Reparar:** Cuesta $50 (incluye remis por 1 día fuera de servicio)
- **Conducir abollado:** Pérdida de valor y orgullo = $9 por día

Objetivo: Encontrar la política óptima (dónde estacionar y cuándo reparar) que minimice el costo promedio esperado a largo plazo por día en la Universidad de San Andrés.

Problema de Estacionamiento: Estados y Acciones

- **Estados:**
  - Estado 0: Auto sin abolladuras
  - Estado 1: Auto con abolladuras
- **Acciones posibles:**
  - En estado 0: Estacionar en 1/2 espacios, o en lote
  - En estado 1: Reparar o conducir abollado

Costos y Probabilidades

Acción	Costo	Probabilidad de daño
Estacionar (1 espacio)	\$0	1/10
Estacionar (2 espacios)	\$4.5	1/50
Estacionar en lote	\$5	0
Reparar	\$50	-
Conducir abollado	\$9	-

Nota: El costo de estacionar en 2 espacios (\$4.5) considera la probabilidad de multa (\$15 con probabilidad 3/10).

Modelo de Programación Lineal

Función Objetivo:

$$\text{Min } Z = 4{,}5y_{02} + 5y_{03} + 50y_{14} + 9y_{15}$$

Restricciones:

$$y_{01} + y_{02} + y_{03} + y_{14} + y_{15} = 1$$

$$y_{01} + y_{02} + y_{03} = \frac{9}{10}y_{01} + \frac{49}{50}y_{02} + y_{03} + y_{14}$$

$$y_{14} + y_{15} = \frac{1}{10}y_{01} + \frac{1}{50}y_{02} + y_{15}$$

donde:

- y_{01}, y_{02}, y_{03}: estacionar en 1 espacio, 2 espacios, o lote (estado 0)
- y_{14}, y_{15}: reparar o conducir abollado (estado 1)

Conservación de Flujo en Estado 0 (Auto Sano)

Restricción (balance de flujo):

$$\underbrace{y_{01} + y_{02} + y_{03}}_{\text{Decisiones en el estado 0}} = \underbrace{\frac{9}{10} y_{01}}_{\substack{\text{Sobrevive con 90 \%} \\ \text{en calle (1 espacio)}}} + \underbrace{\frac{49}{50} y_{02}}_{\substack{\text{Sobrevive con 98 \%} \\ \text{en calle (2 espacios)}}} + \underbrace{y_{03}}_{\substack{\text{Siempre sobrevive} \\ \text{en lote}}} + \underbrace{y_{14}}_{\substack{\text{Auto es reparado} \\ \text{y vuelve a estado 0}}}$$

Interpretación:

- **Izquierda:** frecuencia con que el auto está sano y se estaciona.
- **Derecha:** probabilidad de terminar sano al día siguiente.
- El término y_{14} representa los casos en que se repara el coche desde estado abollado.

¿Dudas?

¿Consultas?

Universidad de San Andrés