Pautas de Examen

- *Cada problema se puntua sobre un total de 10.*
- *La nota es el promedio de las notas de los 3 problemas. Este parcial es el 50% de su nota práctica.*
- *Es condición necesaria para aprobar tener al menos 4 puntos en cada problema.*

Problema 1 - Programación Lineal

El empleado LG de cierto emprendimiento botánico debe coordinar la ubicación de productos a tres distintos clientes. Tiene dos proveedores del producto, uno en Escobar y el otro en Pueyrredón, que le venden el producto a distintos valores por unidad. Además, el costo de transporte de cada uno de estos proveedores a los clientes es distinto. Se pueden comprar hasta 21 kilos en Escobar y hasta 13 kilos en Pueyrredón. LG necesita llevar 4, 20 y 6 kilos a cada uno de los clientes Ezequiel, Ignacio y Felipe. Los costos de compra y transporte se resumen en la siguiente tabla. Formule un problema de programación lineal para minimizar los costos totales.

	$ de transporte (por kg)			**$ por kg**
	Ezequiel	Ignacio	Felipe	
Escobar	$100	$190	$160	$300
Pueyrredón	$180	$110	$140	$420

Problema 2 - Programación Entera Mixta

La planta de botellas PET recicladas (B) debe planificar su producción para el próximo mes (4 semanas). Cada semana dispone de una capacidad de línea limitada de $H = 18$ horas. Siempre que en una semana se decida producir, es necesario realizar un setup que consume $s = 1{,}5$ horas de línea y genera un costo fijo de $f = \$75$, aun cuando el volumen producido sea pequeño. Las demandas semanales (medidas en miles de botellas) son:

$$D_1 = 20, \qquad D_2 = 15, \qquad D_3 = 22, \qquad D_4 = 13.$$

El proceso de fabricación insume 0.6 horas por cada mil botellas producidas y tiene un costo variable de $ 1.8 por cada mil botellas. Se permite producir por encima de la demanda semanal y almacenar el excedente pagando un costo de inventario de $ 0.15 por cada mil botellas y por semana. A fin de mes se quiere que el inventario se encuentre en las mismas condiciones que al comienzo, es decir, nulo. Escriba un problema de programación mixta que permita minimizar los costos totales de la planta.

Problema 3 - Programación No Lineal

En mercados donde la demanda de un producto depende del precio de forma no lineal, la fijación del precio se convierte en un problema de programación cuadrática. Considere que tiene que ponerle precio a tres productos y se sabe que la demanda para uno es decreciente de forma lineal con el precio:

$$d(p) = a - Bp \qquad p^\top = (p_1, p_2, p_3)$$

donde $a^\top = (100, 80, 90)^\top$ y $B = \begin{pmatrix} 8 & 1.5 & 1 \\ 1.5 & 6 & 1.5 \\ 1 & 1.5 & 7 \end{pmatrix}$. Los costos por producto se escriben como $c^\top = (20, 18, 22)$. Los ingresos se pueden calcular como $I(p) = p^\top d(p)$ y los costos como $C(p) = c^\top d(p)$. Escriba un código en python que:

- Determine si la función beneficios definida como $B(p) = I(p) - C(p)$ es cóncava o convexa a través clasificar el Hessiano de $B(p)$.
- Optmice el problema usando SciPy

Ayuda: Si A, B, C son matrices entonces A(B$\pm$ C) = A*B $\pm$ B*C*

Machete de Código

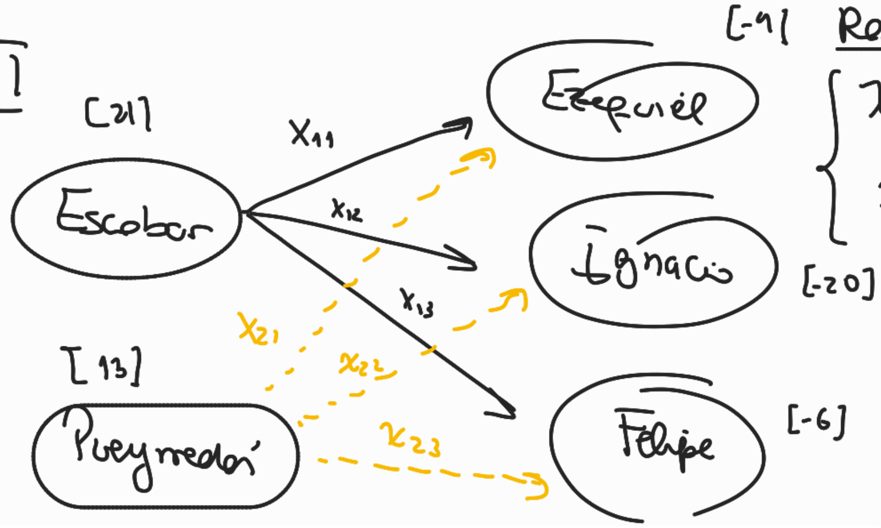
Picos

```
!pip install picos
!pip install swiglpk
import picos
import numpy as np
from scipy import optimize
P = picos.Problem()
x = picos.(RealVariable,IntegerVariable , BinaryVariable) ( ’x’ , 2, lower=0)
c = picos .Constant( ’c ’ , [1 ,2])
b = picos.Constant( ’b’ , [2 ,4])
A = picos.Constant(’A’ , np. array ([[1 ,0] ,[0 ,1]]))
P.set_objective ( ’min’ , c | x)
P.add_constraint (A * x >= b)
P.solve ( solver = ’glpk ’)
```

SciPy

```
# Producto de matrices
 A @ B
# Trasposicion
x.T
# Restricciones
cons = ({’type’: ’eq’, ’fun’: lambda x: np.sum(x) - 1.0})
# Límites
bounds = [(0,None),(-np.inf, 10)]
# optimización
res = minimize(C, x0, method=’SLSQP’, bounds=bounds, constraints=cons)
# Semillas aleatorias
x1 = np.random.uniform(-100,100, 1000)
X = np.zeros(len(x1))
F = np.zeros(len(x1))
for i in range(len(x1)):
  opt = optimize.minimize(fun = f, x0 = x1[i], bounds = bounds)
  xopt = opt.x[0]
  fopt = opt.fun
  X[i] = xopt
  F[i] = fopt
```

P1



Restricciones oferta

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13} \leq 21 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23} \leq 13 \end{cases}$$

Demanda

$$\begin{cases} x_{11}+x_{21} \geq 4 \\ x_{12}+x_{22} \geq 20 \\ x_{13}+x_{23} \geq 6. \end{cases}$$

	$ de transporte (por kg)			$ por kg
	Ezequiel	Ignacio	Felipe	
Escobar	$100	$190	$160	$300
Pueyrredón	$180	$110	$140	$420

Minimizar costos

$$z = \underbrace{\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} c_{ij}x_{ij}}_{\text{Costos de transporte}} + \underbrace{300\sum_{j=1}^{3} x_{1j}}_{\text{Costos compra escobar}} + \underbrace{420\sum_{j=1}^{3} x_{2j}}_{\text{costos compra pueyrredón.}}$$

P2

Planificar producción por el próximo mes (4 semanas)

- Capacidad semanal → 18 horas.
- Si se decide producir, se consumen 1,5 hs de línea y se genera un costo fijo de $f = \$75$
- Demandas semanales → $D_1 = 20$; $D_2 = 15$, $D_3 = 22$, $D_4 = 13$
- 0,6 hs p/c mil botellas, costo de 1,8 p/c mil botellas.
- se puede almacenar el excedente por 0,15 por c/mil botellas y por semana.
- $I_i = 0 \ \forall i = 1,2,3,4$ (inventario nulo)

Variable de decisión $\rightarrow x_i \rightarrow$ # de miles de botellas en semana i

$x_i \in \mathbb{R}$ con $i = \{1,2,3,4\}$

se cobran

(*) $y_i = \begin{cases} 1 & \text{si se decide producir en semana } i \\ 0 & \text{si no se produce en semana } i. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} +1{,}5\, y_i \text{ horas si se produce en sem } i \\ +75\, y_i \text{ costo.} \end{cases}$

(*) $0{,}6 x_i \rightarrow$ horas consumidas en semana i

$1{,}8\, x_i \rightarrow$ costos de la semana i

(*) I_i = # de miles de botellas en inventario ——— se cobran

$$\Rightarrow \boxed{\underset{\text{costos}}{\min}\quad Z = 1{,}8 \sum_{i=1}^{4} x_i + 75 \sum_{i=1}^{4} y_i + 0{,}15 \sum_{i=1} I_i}$$

¿Como se calcula el inventario al final de la semana?

- Si satisface exactamente la demanda $\Rightarrow$ no tengo inventario $\Rightarrow \boxed{I_i = x_i - d_i}$ Se cobra
- Si $x_i > d_i \Rightarrow$ exceso de producción e $I_i \geq 0$

  si $x_i = d_i \Rightarrow \boxed{I_1 = 0 \wedge I_4 = 0}$ "al final igual q' al inicio"

  ¿cómo es el inventario de la semana siguiente?

  $I_{i+1} = I_i + x_{i+1} - d_{i+1}$

  $$\boxed{I_i = I_{i-1} + x_i - d_i}$$

- Big M para producir $\rightarrow \boxed{x_i \leq M y_i}$ ¿cómo elijo el M?

Horas disponibles $\rightsquigarrow \boxed{0{,}6 x_i + 1{,}5 y_i \leq 18.}$

Si produzco, tengo un máx de $0{,}6 x_i \leq 18 - 1{,}5 = 16{,}5$

$x_i \leq 20{,}625 \leq 21$

$\Rightarrow \boxed{x_i \leq 21}$ Tomo un $M = 21$

$\boxed{P3}$

$$p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \qquad d(p) = a - Bp$$

$$\circledast \; Bp = \begin{pmatrix} 8 & 1{,}5 & 1 \\ 1{,}5 & 6 & 1{,}5 \\ 1 & 1{,}5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \qquad \underbrace{(3 \times 3) \times (3 \times 1)}_{3 \times 1}$$

$$a = \begin{pmatrix} 100 \\ 80 \\ 90 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 8p_1 + 1{,}5p_2 + p_3 \\ 1{,}5p_1 + 6p_2 + 1{,}5p_3 \\ p_1 + 1{,}5p_2 + 7p_3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 8 & 1{,}5 & 1 \\ 1{,}5 & 6 & 1{,}5 \\ 1 & 1{,}5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{d(p) = \begin{pmatrix} 100 - 8p_1 - 1{,}5p_2 - p_3 \\ 80 - 1{,}5p_1 - 6p_2 - 1{,}5p_3 \\ 90 - p_1 - 1{,}5p_2 - 7p_3 \end{pmatrix}}$$

$$I(p) = p^T d(p) = (p_1 \;\; p_2 \;\; p_3) \begin{pmatrix} 100 - 8p_1 - 1{,}5p_2 - p_3 \\ 80 - 1{,}5p_1 - 6p_2 - 1{,}5p_3 \\ 90 - p_1 - 1{,}5p_2 - 7p_3 \end{pmatrix}$$

$$= 100p_1 - 8p_1^2 - 1{,}5p_1p_2 - p_13 + 80p_2 - 1{,}5p_1p_2 - 6p_2^2 - 1{,}5p_2p_3$$
$$+ 90p_3 - p_1p_3 - 1{,}5p_2p_3 - 7p_3^2$$

$$\boxed{I(p) = -8p_1^2 - 6p_2^2 - 7p_3^2 - 3p_1p_2 - 3p_2p_3 - 2p_1p_3 + 100p_1 + 80p_2 + 90p_3.}$$

$$C(p) = c^T d(p) = (20 \;\; 18 \;\; 22) \begin{pmatrix} 100 - 8p_1 - 1{,}5p_2 - p_3 \\ 80 - 1{,}5p_1 - 6p_2 - 1{,}5p_3 \\ 90 - p_1 - 1{,}5p_2 - 7p_3 \end{pmatrix}$$

$$C(p) = (2000 - 160p_1 - 30p_2 - 20p_3) + 1440 - 27p_1 - 108p_2 - 27p_3$$
$$+ 1980 - 22p_1 - 33p_2 - 154p_3$$

$$= 5420 - 49p_1 - 141p_2 - 181p_3$$

$B(p) = I(p) - C(p)$

$$\boxed{= -8p_1^2 - 6p_2^2 - 7p_3^2 - 3p_1p_2 - 3p_2p_3 - 2p_1p_3 - 5420 + 149p_1 + 221p_2 + 271p_3.}$$

$$\frac{\partial B}{\partial p_1} = -16p_1 - 3p_2 - 2p_3 + 149$$

$$\frac{\partial B}{\partial p_2 \partial p_1} = -3 = \frac{\partial B}{\partial p_1 \partial p_2}$$

$$\frac{\partial B}{\partial p_3 \partial p_1} = -2 = \frac{\partial B}{\partial p_1 \partial p_3}$$

$$\frac{\partial^2 B}{\partial p_1^2} = -16.$$

$$\frac{\partial B}{\partial p_2} = -12p_2 - 3p_1 - 3p_3 + 221$$

$$\frac{\partial B}{\partial p_3 \partial p_2} = -3 = \frac{\partial B}{\partial p_2 \partial p_3}$$

$$\frac{\partial^2 B}{\partial p_2^2} = -12$$

$$\frac{\partial B}{\partial p_3} = -14p_3 - 3p_2 - 2p_1 + 271$$

$$\frac{\partial^2 B}{\partial p_3^2} = -14$$

$$\boxed{H = \begin{pmatrix} -16 & -3 & -2 \\ -3 & -12 & -3 \\ -2 & -3 & -14 \end{pmatrix}}$$

$D_1 = -16$

$D_2 = 16 \times 12 - 9$

$= 182 - 9 = 173 \Rightarrow$

$$\begin{array}{r} 16 \\ \times\ 12 \\ \hline 22 \\ 16\ \ \\ \hline 182 \end{array}$$

$D_3 = -2406$

Los menores alternan signo $\Rightarrow$ es definida negativa

$\Rightarrow$ $\boxed{B(p) \text{ es cóncava y tiene un máximo global.}}$