

Guía de Ejercicios Programación No Lineal

Investigación Operativa, Universidad de San Andrés

Si encuentran algún error en el documento o hay alguna duda, mandenme un mail a rodriguezr@udesa.edu.ar y lo revisamos.

1. Ejercicios

Optimización Irrestricta

1.1. Visualización de Funciones con Python

Para cada una de las siguientes funciones, hallar su función derivada primera y derivada segunda. Utilice Python para realizar gráficos de las mismas en un dominio adecuado. Halle analíticamente (si existen) las raíces de $f(x)$, $f'(x)$ y $f''(x)$ y chequeo numéricamente con Python.

- a) $f(x) = xe^{-x}$
- b) $f(x) = x^2(x^2 + 1)^{-1}$
- c) $f(x) = 2 + e^{3x}$
- d) $f(x) = (3x + 2)^{-2}$

1.2. Curva de aprendizaje del costo

Sea $c(x)$ el costo total de producir una cantidad x de unidades de un cierto producto. La *curva de aprendizaje del costo* se define como $c(x) = kx^{1-b}$ con $0 < b < 1$ y $k > 0$.

- a) Calcule la función costo por unidad, $c_u(x)$.
- b) Calcule las derivadas de las funciones $c(x)$ y $c_u(x)$
- c) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $c_u(x)$ ¿Qué conclusión puede extraer? Chequee sus resultados con un código en Python, dando valores adecuados a los números.

1.3. Descuentos por grandes volúmenes

Una empresa de software necesita publicitar su nuevo desarrollo. A tal fin, ofrece un descuento por volúmenes grandes de compras. El lanzamiento inicial requiere de \$ 75.000 y el costo variable por habilitar usuarios es de \$ 350 por unidad vendida. El descuento se manifiesta en un función de precio que depende de las unidades vendidas y que se estima como $p(x) = 15000 - 500x$.

- a) Escriba la función costos y la función ingresos.
- b) Escriba la función ganancias totales de la empresa.
- c) Halle la cantidad óptima de unidades vendidas que maximiza las ganancias. Chequee su método a partir de un código en Python usando la técnica de semillas aleatorias.

1.4. Programación Financiera

Una empresa tiene un sobrante en pesos este año que quiere invertirlo en el mercado financiero con el objetivo de pagar los sueldos de los trabajadores de su empresa a partir de la propia inversión. A partir de una consulta con un programador financiero, determinan invertir el dinero en un bono cuyo retorno por cada x de millones de pesos invertidos es aproximadamente del 30 % anual. Ante la voluntad de la empresa de pagar los salarios del próximo año a partir de las ganancias de la inversión, los programadores determinan que en función de lo invertido y teniendo en cuenta paritarias salariales, los costos se comportan según la función $0,2x \ln x$.

- a) Halle la función que determina las ganancias en función de la cantidad de pesos x invertida. Realice un gráfico en Python
- b) Determine los rangos de inversión con ganancias positivas y con ganancias negativas.
- c) Halle el valor que hace extremo a la función. Determine si es un máximo o un mínimo con el criterio de la derivada segunda.

1.5. Optimización de precios

Un minorista de productos electrónicos desea determinar el precio óptimo para maximizar su beneficio. La empresa ha analizado el mercado y ha determinado que

la demanda de un nuevo modelo de teléfono inteligente, x (en miles de unidades), depende del precio unitario p (en dólares), de acuerdo con la función de demanda:

$$x(p) = 200 - 0,5p$$

El costo total de producir x miles de unidades del teléfono está dado por la siguiente función no lineal:

$$C(x) = 2000 + 4x^2$$

donde $C(x)$ está en miles de dólares.

Determine el precio óptimo al que el minorista debe vender el teléfono para maximizar su beneficio total. Además, calcule el beneficio máximo que se puede obtener con este precio.

1.6. Localización de almacén

Trucko está tratando de decidir donde localizar un almacén. Un estudio de agrimensura del entorno de la fábrica determina un sistema de coordenadas y desde el centro del mismo, las coordenadas de sus distintos clientes así como la cantidad anual de envíos se muestran en la siguiente tabla:

Cliente	Coordenadas		Número de Envíos
Empresa	x	y	
La Dulce Canasta	5	10	200
Pastelitos del Sol	10	5	150
Quesos de la Sierra	0	12	200
Fábrica de Postres	12	0	300

Trucko desea localizar su almacén de forma que la distancia total que deben hacer anualmente los camiones sea mínima.

- Escriba la función distancia que debe minimizar para resolver el problema.
- Calcule el gradiente de la función distancia (al cuadrado). Halle el punto óptimo analíticamente.
- Chequee su respuesta con Python y haga un gráfico donde se vean los puntos y la solución óptima.

Teoría de Funciones Convexas y Cóncavas

1.7. Determinación de concavidad/convexidad

Determine los intervalos en dónde las siguientes funciones son cóncavas o convexas a través del estudio de su segunda derivada.

a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = x^2 e^x$

c) $f(x) = 3x^3 + 2x + 1$

d) $f(x) = x \ln(x)$

e) $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$

f) $f(x) = \sqrt{x+1} + 3x$

1.8. Matriz Hessiana

Halle la matriz hessiana de las siguientes funciones, así como sus menores principales. Determine si puede definir convexidad o concavidad de la función a partir de ellos.

a) $f(x, y) = x^2 + 2xy + x^2$

b) $f(x, y) = -x^2 - xy - 2y^2$

c) $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2x^2y - 2xy$

d) $f(x, y) = -x^2 - 3xy + 2y^2$

Condiciones KKT

1.9. Inversión en Publicidad

Una agencia de publicidad necesita diseñar una estrategia para invertir de forma inteligente en dos eventos masivos: un partido de fútbol y un evento musical. La inversión en el partido de fútbol se espera que tenga un alto impacto de ventas de entradas rápidamente y luego se vendan de forma lenta pero sostenida a medida que pasa el tiempo. Por lo tanto, por cada x_1 millones de pesos invertidos, se modela la

cantidad de ventas como $V_1 = 12,3 \ln(x_1 + 1)$. En cambio, se sabe que por cada x_2 millones invertidos en eventos musicales las ventas son mas lentas, pero constantes en el tiempo. Entonces, se modela la cantidad de ventas como $V_2 = 1,17x_2$. Sabiendo que:

- Las entradas cuestan \$ 25.000 para los partidos y \$ 150.000 para el evento musical
- El doble de lo que se invierte en partidos de fútbol mas lo que se invierta en eventos no debe superar los 30M

utilice las condiciones KKT para hallar analíticamente el valor óptimo de inversión en publicidad que maximice las ventas.

1.10. Curva de Cobb-Douglas

Una empresa contrata un equipo econométrico para que realice un análisis de la empresa. En particular, se quiere conocer que pasa con la relación entre el gasto en herramientas de eficiencia, las horas de trabajo invertidas por los trabajadores y la productividad de los mismos. Esta última se relaciona con las anteriores según la formula:

$$P(H, L) = 1,47E^{1/2}H$$

Se sabe tambien que la suma de la inversión en eficiencia sumada a la tarifa por hora de trabajo sigue la relación $E + 1,17H \leq 2,4$. Halle el valor óptimo de inversión y horas de labor por trabajador que maximicen la productividad.

Programación Cuadrática

1.11. Programación Financiera

Un analista desea asignar proporciones $x = (x_1, x_2, x_3)$ en tres activos. La varianza de la cartera está dada por $x^\top Qx$ con

$$Q = \begin{pmatrix} 0,040 & 0,010 & 0,012 \\ 0,010 & 0,025 & 0,008 \\ 0,012 & 0,008 & 0,036 \end{pmatrix}, \quad r = \begin{pmatrix} 0,14 \\ 0,10 \\ 0,12 \end{pmatrix}$$

y se busca minimizar el riesgo penalizado por retorno, $\frac{1}{2}x^\top Qx - \lambda r^\top x$, con $\lambda > 0$ fijo.

- a) Escriba el modelo completo: función objetivo y restricciones $\sum_i x_i = 1, x_i \geq 0$.
- b) Justifique la convexidad del problema. ¿Qué condición debe cumplir Q ?
- c) Para $\lambda = 2$, resuelva las condiciones KKT y obtenga x^* .
- d) Verifique numéricamente en Python la solución y reporte x^* y el valor óptimo.

1.12. Planeación Industrial

Una planta fabrica tres tipos de componentes: A, B, C. El costo a los niveles de producción de cada producto se puede modelar con una función cuadrática:

$$C(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + x_2x_3 + 2x_3^2 - 8x_1 - 3x_2 - 3x_3$$

Por motivos contractuales, se debe cumplir con al menos una producción de 3 millones de unidades, contando los 3 productos. El cliente pide que al menos un 30 % de la producción total sea del producto B. Escriba un código en Python que permita resolver el problema y reporte el valor óptimo de los niveles de producción y el costo esperado.

1.13. Asignación en Centro Logístico

Un centro logístico debe asignar personal a tres áreas: Recepción (x_1), Almacenamiento (x_2) y Despacho (x_3). El coste operativo (en miles de dolares) se modela por

$$C(x) = \frac{1}{2}x^\top Qx + c^\top x,$$

con

$$Q = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

sujeto a las restricciones (en decenas de personas):

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 2, \\ x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$$

Encuentre la asignación óptima de personal que minimiza los costos de la empresa.

2. Soluciones

2.1. Visualización de Funciones con Python

Derivadas:

a) $f'(x) = e^{-x}(1 - x)$, $f''(x) = -e^{-x}(2 - x)$.

b) $f'(x) = \frac{2x}{x^2+1} - \frac{2x^3}{(x^2+1)^2}$, $f''(x) = \frac{2}{x^2+1} - \frac{10x^2}{(x^2+1)^2} + \frac{8x^4}{(x^2+1)^3}$

c) $f'(x) = 3e^{3x}$, $f''(x) = 9e^{3x}$

d) $f'(x) = -2(3x + 2)^{-3}$, $f''(x) = 6(3x + 2)^{-4}$

2.2. Curva de aprendizaje del costo

a) $c_u(x) = kx^{-b}$

b) $c'(x) = (1 - b)c_u(x)$, $c'_u(x) = -kbx^{-(1+b)}$

c) $c'_u(x) < 0$ si y sólo si $x > 0$. Esto es que el costo decrece a medida que aumenta las cantidades producidas. Se traduce en la experiencia de los trabajadores.

2.3. Descuentos por grandes volúmenes

a) Ingresos = $15000x - 500x^2$

b) Costos = $75000 + 350x$

c) $Z = \text{Ingresos} - \text{Costos} = -500x^2 + 14650x - 75000$

d) $Z' = 0 \iff x = 14,65$

2.4. Programación Financiera

a) $g(x) = x(0,3 - 0,2 \ln x)$

b) Ganancias positivas entre $[0, \cong 1,65)$ y ganancias negativas para $x > 1,65$

c) $g''(x_{opt} = e^{0,5}) < 0$, por lo tanto la función es cóncava y tiene un máximo global.

2.5. Optimización de precios

- Precio óptimo: $p = 200$ dólares
- Beneficio máximo: $I = 20000$ miles de dólares

2.6. Localización de almacén

- a) $\mathcal{Z} = \sum_{i=1}^2 d(P, S_i)^2 = (x - 5)^2 + (x - 10)^2 + (x - 12)^2 + (y - 10)^2 + (y - 5)^2 + (y - 12)^2 + x^2 + y^2$
- b) $x = 6,75, y = 6,25$

Teoría de Funciones Convexas y Cóncavas

2.7. Determinación de concavidad/convexidad

- a) $f''(x) = 2 > 0 \forall \mathbb{R}$. Entonces, es convexa en todo su dominio y tiene un mínimo global en $x = 0$
- b) $f''(x) = e^x(x^2 + 4x + 2)$ que es positiva para cualquier valor de x . Se puede chequear gráfica o analíticamente.
- c) $f''(x) = 18x$, es convexa si $x > 0$ y cóncava si $x < 0$
- d) $f''(x) = \frac{1}{x}$ es siempre positiva pues $x > 0$ para que exista (viene del logaritmo).
- e) $f''(x) = 4 > 0$, es convexa en todo su dominio.
- f) $f''(x) = -\frac{1}{4}(x + 1)^{-3/2} < 0$ para $x > -1$, es cóncava en su dominio.

2.8. Matriz Hessiana

- a) $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $D_1 = 4$, $D_2 = -4$. No es definida positiva ni negativa.
- b) $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$, $D_1 = -2$, $D_2 = 7$. Los líderes alternan signo, por lo que es cóncava y por lo tanto tiene un máximo.

- c) $\begin{pmatrix} 2+4y & 4x-2 \\ 4x-2 & 2 \end{pmatrix}$, $D_1 = 2+4y$ es positivo solo si $y > -1/2$. Para todos los demás es negativo. En el caso de $D_2 = 4+8y-16x^2+16x$. En este caso, no podemos determinar bien la concavidad o convexidad sin analizar numéricamente los líderes.
- d) $\begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $D_1 = -4$, $D_2 = -7$. En este caso, no estamos bajo los aspectos de ningún criterio. La matriz está indefinida y el punto puede ser silla, máximo o mínimo dependiendo desde dónde nos acercamos. La llamamos no convexa.

Condiciones KKT

2.9. Inversión en Publicidad

Una vez obtenido el valor óptimo de inversión en ventas, se tiene que la ganancia por la inversión es:

$$\text{ganancia} = 25,000V_1(x_1^*) + 150,000V_2(x_2^*) \quad (1)$$

2.10. Curva de Cobb-Douglas

$$u_1 = 1,17, H^* = 1,36, E^* = 0,8$$

Programación Cuadrática

2.11. Programación Financiera

- a) $F(x_1, x_2, x_3) = 0,020x_1^2 + 0,0125x_2^2 + 0,018x_3^2 + 0,010x_1x_2 + 0,012x_1x_3 + 0,008x_2x_3 - 0,28x_1 - 0,20x_2 - 0,24x_3$.
- b) Los tres menores líderes son positivos por lo que la matriz Q es definida positiva. La parte cuadrática es estrictamente convexa, por lo que tiene un mínimo.
- c) El valor óptimo es $x^* = (1, 0, 0)$ y el retorno es de pérdida en $F(x^*) = -0,26$

2.12. Planeación Industrial

$$x^* = (1,66; 0,29; 1,05)$$

2.13. Asignación en Centro Logístico