Repaso de Probabilidad

Investigación Operativa, Universidad de San Andrés

Si encuentran algún error en el documento o hay alguna duda, mandenmé un mail a rodriguezf@udesa.edu.ar y lo revisamos.

1. Fundamentos de Probabilidad

La probabilidad es fundamental en Investigación Operativa para el análisis de sistemas, optimización y evaluación de riesgos, permitiendo modelar la incertidumbre inherente a los procesos de toma de decisiones. Por ejemplo, se utiliza para:

- Optimizar inventarios considerando demanda aleatoria
- Evaluar riesgos en proyectos de inversión
- Modelar tiempos de espera en sistemas de colas
- Analizar la confiabilidad de sistemas complejos

1.1. Conceptos Básicos

- **Experimento aleatorio:** Proceso con resultado impredecible
- **Espacio muestral (Ω):** Conjunto de resultados posibles
- **Evento:** Subconjunto del espacio muestral

1.2. Propiedades y Teoremas

Para eventos A y B en Ω:

- $0 \leq P(A) \leq 1$, $P(\Omega) = 1$, $P(\emptyset) = 0$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- Probabilidad condicional: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
- Independencia: $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
- Teorema de Bayes: $P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$

1.3. Variables Aleatorias

- **Discretas:** Variables que solo pueden tomar valores específicos y aislados (como números enteros). Ejemplos:
  - Número de clientes que llegan a un banco en una hora
  - Cantidad de productos defectuosos en un lote
  - Número de intentos hasta obtener el primer éxito
- **Continuas:** Variables que pueden tomar cualquier valor dentro de un rango continuo de números reales. Ejemplos:
  - Tiempo de servicio en un sistema
  - Peso de un producto
  - Distancia recorrida por un vehículo

2. Problemas de probabilidad y estadística aplicados a IO

2.1. Ejemplo 1: Control de calidad con distribución binomial

Una empresa fabrica lotes de 1200 tornillos. Se sabe que el 3 % de los tornillos son defectuosos. Para controlar la calidad, se toma una muestra aleatoria de

50 tornillos. El lote se rechaza si se encuentran más de 2 tornillos defectuosos en la muestra. **¿Cuál es la probabilidad de que un lote con 3 % de defectuosos sea rechazado?**

- Tamaño de la muestra: $n = 50$
- Probabilidad de defecto: $p = 0{,}03$
- Variable aleatoria: $X \sim \text{Binomial}(50, 0{,}03)$
- Queremos calcular: $P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2)$

Resolución:

La probabilidad de obtener exactamente k éxitos en n ensayos independientes con probabilidad p es:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Para este caso:

$$n = 50, \quad p = 0{,}03$$

Calculamos:

$$P(X = 0) = \binom{50}{0} (0{,}03)^0 (0{,}97)^{50} \approx 0{,}218$$

$$P(X = 1) = \binom{50}{1} (0{,}03)^1 (0{,}97)^{49} \approx 0{,}337$$

$$P(X = 2) = \binom{50}{2} (0{,}03)^2 (0{,}97)^{48} \approx 0{,}266$$

$$P(X \leq 2) \approx 0{,}218 + 0{,}337 + 0{,}266 = 0{,}821$$

$$P(X > 2) = 1 - 0{,}821 = 0{,}179$$

Resolución en Python:

```python
from scipy.stats import binom

# Parametros
n = 50       # Tamano de la muestra
p = 0.03     # Probabilidad de defecto

# Probabilidad de rechazar el lote: P(X > 2) = 1 - P(X <= 2)
prob_rechazo = 1 - binom.cdf(2, n, p)
print(f"Probabilidad de rechazar el lote (mas de 2
    defectuosos): {prob_rechazo:.4f}")
```

2.2. Ejemplo 2: Colas y distribución de Poisson

En un centro de distribución, los pedidos llegan con una tasa media de 8 pedidos por hora. El sistema colapsa si se reciben más de 10 pedidos en una hora. **¿Cuál es la probabilidad de que el sistema colapse?**

Resolución:

- Tasa de llegada: $\lambda = 8$
- Variable aleatoria: $X \sim \text{Poisson}(8)$
- Queremos calcular: $P(X > 10) = 1 - P(X \leq 10)$

La probabilidad de observar k eventos en un intervalo para una variable de Poisson es:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

Para este caso:

$$\lambda = 8$$

Calculamos:

$$P(X \leq 10) = \sum_{k=0}^{10} \frac{8^k e^{-8}}{k!} \approx 0{,}815$$

$$P(X > 10) = 1 - 0{,}815 = 0{,}185$$

Resolución en Python:

```python
from scipy.stats import poisson

# Parametros
lambd = 8   # Tasa de pedidos por hora

# Probabilidad de que el sistema colapse: P(X > 10) = 1 -
    P(X <= 10)
prob_colapso = 1 - poisson.cdf(10, lambd)
print(f"Probabilidad de colapso (mas de 10 pedidos en una
    hora): {prob_colapso:.4f}")
```

2.3. Ejemplo 3: Normal y contratos

El tiempo de fabricación tiene una media de 120 minutos y desviación estándar de 15 minutos. Un contrato exige que la pieza se produzca en menos de 100 minutos. **¿Con qué porcentaje de las veces se incumplirá el contrato?**

- Media: $\mu = 120$
- Desviación estándar: $\sigma = 15$
- Variable aleatoria: $X \sim N(120, 15^2)$
- Queremos calcular: $P(X > 100)$

Resolución:

La función de densidad de la normal es:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Para calcular la probabilidad de incumplir el contrato:

$$\mu = 120, \quad \sigma = 15$$

$$P(X > 100) = 1 - P(X < 100) = 1 - P\left(Z < \frac{100 - 120}{15}\right)$$
$$\Rightarrow 1 - P(Z < -1{,}33) = P(Z > -1{,}33) \approx 0{,}9082$$

Resolución en Python:

```python
from scipy.stats import norm

# Parametros
mu = 120      # Media del tiempo de fabricacion
sigma = 15    # Desviacion estandar

# Probabilidad de incumplir contrato: P(X > 100)
prob_incumplimiento = 1 - norm.cdf(100, loc=mu, scale=sigma)
print(f"Probabilidad de incumplimiento del contrato:
    {prob_incumplimiento:.4f}")
```

3. Simulaciones: Método de Monte Carlo

En esencia, el método de Monte Carlo se basa en repetidos muestreos aleatorios de un dado problema con el objetivo de caracterizar densidades de probabilidad.

1. Identificación de variables aleatorias en el problema.
2. Elegir una distribución para cada variable aleatoria.
3. Generar grandes cantidades de muestras para cada variable aleatoria.
4. Ejecutar el modelo o cálculo para cada conjunto de valores.
5. Análisis estadístico de los resultados.

3.1. Ejemplo: Inventario y simulación

Una tienda vende un producto cuya demanda diaria sigue una distribución normal con media 80 unidades y desviación estándar 10 unidades. Cada semana decide cuántas unidades pedir.

- El costo de mantener inventario no vendido al final de la semana es de 2 pesos por unidad.
- El costo por unidad de demanda insatisfecha (falta de stock) es de 5 pesos por unidad.
- El producto se vende a 20 pesos por unidad.
- El costo por unidad comprada es de 10 pesos.

El objetivo es encontrar el nivel de pedido semanal óptimo (cantidad a comprar) que maximiza el beneficio esperado, simulando 1000 semanas con Monte Carlo.

Resolución en Python:

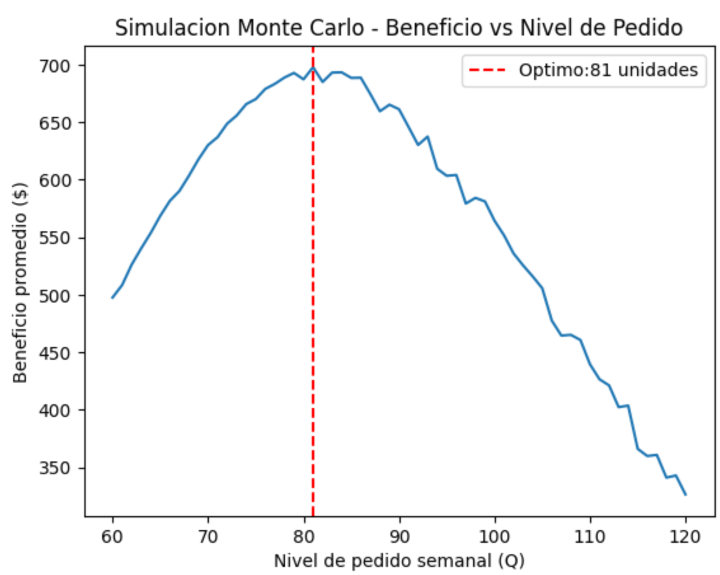
```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Parametros del problema
media_demanda = 80
desvio_demanda = 10
precio_venta = 20
costo_unitario = 10
costo_inventario = 2
costo_faltante = 5
semanas = 1000
np.random.seed(42)  # Para reproducibilidad
niveles_pedido = np.arange(60, 121, 1)  # De 60 a 120
    unidades
beneficio_promedio = []

for Q in niveles_pedido:
    demanda_simulada = np.random.normal(media_demanda,
        desvio_demanda, semanas).round().astype(int)
```

```python
    demanda_simulada = np.maximum(demanda_simulada, 0)  # No hay demanda negativa
    ventas = np.minimum(Q, demanda_simulada)
    stock_sobrante = np.maximum(Q - demanda_simulada, 0)
    faltantes = np.maximum(demanda_simulada - Q, 0)
    beneficio = (ventas * precio_venta) - (Q * costo_unitario) - (stock_sobrante * costo_inventario) - (faltantes * costo_faltante)
    beneficio_promedio.append(np.mean(beneficio))

plt.plot(niveles_pedido, beneficio_promedio)
plt.xlabel('Nivel de pedido semanal (Q)')
plt.ylabel('Beneficio promedio ($)')
plt.title('Simulacion Monte Carlo - Beneficio vs Nivel de Pedido')
plt.axvline(niveles_pedido[np.argmax(beneficio_promedio)], color='r', linestyle='--', label=f'Optimo: {niveles_pedido[np.argmax(beneficio_promedio)]} unidades')
plt.legend()
plt.show()
```



El nivel de pedido óptimo es el que maximiza el beneficio promedio esperado según la simulación.