Cadenas de Markov

Investigación Operativa, Universidad de San Andrés

Si encuentran algún error en el documento o hay alguna duda, mandenmé un mail a rodriguezf@udesa.edu.ar y lo revisamos.

1. Introducción a las Cadenas de Markov

Una cadena de Markov es un proceso estocástico que cumple con la propiedad de Markov, es decir, la probabilidad de cualquier estado futuro depende únicamente del estado presente y no de la secuencia de eventos que le precedieron.

1.1. Definición Formal

Sea $\{X_n, n \geq 0\}$ un proceso estocástico con espacio de estados S. Decimos que es una cadena de Markov si para todo $n \geq 0$ y para todos los estados $i_0, i_1, ..., i_n, j \in S$:

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, ..., X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = j | X_n = i_n)$$

1.2. Matriz de Transición

La matriz de transición $P = (p_{ij})$ contiene las probabilidades de transición de un estado a otro, donde:

$$p_{ij} = P(X_{n+1} = j | X_n = i)$$

Propiedades importantes:

- $0 \leq p_{ij} \leq 1$ para todo $i, j \in S$
- $\sum_{j \in S} p_{ij} = 1$ para todo $i \in S$

2. Ejercicios Resueltos

2.1. Ejercicio 1: Predicción del Clima

Un meteorólogo estudia el clima en Buenos Aires y clasifica los días en tres estados posibles: Soleado (S), Nublado (N) y Lluvioso (L). Las probabilidades de transición son:

- Si hoy está soleado:
  - 70 % de probabilidad de que mañana esté soleado

- 20 % de probabilidad de que esté nublado
- 10 % de probabilidad de que llueva

- Si hoy está nublado:
  - 30 % de probabilidad de que mañana esté soleado
  - 40 % de probabilidad de que siga nublado
  - 30 % de probabilidad de que llueva

- Si hoy llueve:
  - 20 % de probabilidad de que mañana esté soleado
  - 40 % de probabilidad de que esté nublado
  - 40 % de probabilidad de que siga lloviendo

a) Construir la matriz de transición P que representa este sistema.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que llueva dentro de dos días si hoy está soleado?

Solución:

a) La matriz de transición P es:

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}4 \end{pmatrix}$$

b) Si hoy está soleado, la probabilidad de que dentro de dos días llueva es:

$$P(X_2 = L|X_0 = S) = \sum_{j \in S} P(X_1 = j|X_0 = S)P(X_2 = L|X_1 = j)$$

Para calcular la probabilidad de que llueva en dos días partiendo de un día soleado, necesitamos considerar todos los caminos posibles:

- Si mañana está soleado (0.7) y luego llueve (0.1)
- Si mañana está nublado (0.2) y luego llueve (0.3)
- Si mañana llueve (0.1) y sigue lloviendo (0.4)

$$\begin{aligned} P(X_2 = L|X_0 = S) &= (0{,}7)(0{,}1) + (0{,}2)(0{,}3) + (0{,}1)(0{,}4) \\ &= 0{,}07 + 0{,}06 + 0{,}04 \\ &= 0{,}17 \end{aligned}$$

Por lo tanto, hay un 17 % de probabilidad de que llueva dentro de dos días si hoy está soleado.

2.2. Ejercicio 2: Puntos en Tenis

Final de Roland Garros 2025. Francisco Cerúndolo está contra Holger Rune con match point. Siendo el analista de tenis de Cerúndolo, se sabe las siguientes probabilidades:

- Hay un 50 % de chances de ganar el punto de un ace o un saque no devuelto
- Tiene 30 % de chances de que la pelota entre con el primer saque y se arme el punto
- Si erra el primer saque, tiene 90 % de chances de meter el segundo
- Hay un 2 % de chances de que gane el punto directamente con el segundo saque
- En cualquier peloteo (sea con primer o segundo saque), tiene 55 % de chances de ganar el punto

Resuelva los siguientes items:

a) Identifique los estados posibles del sistema y construya el diagrama de transición.

b) Calcule la probabilidad de que Cerúndolo gane el punto y se consagre campeón.

c) Si se jugaran infinitos puntos con estas probabilidades, ¿qué porcentaje ganaría cada jugador?

Solución:

a) Los estados posibles son:

- S: Primer saque de Cerúndolo
- D: Segundo saque de Cerúndolo
- P: Punto en juego (peloteo)
- W: Punto ganado por Cerúndolo
- L: Punto perdido por Cerúndolo (ganado por Rune)

b) La matriz de transición es:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}30 & 0{,}20 & 0{,}50 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}90 & 0{,}02 & 0{,}08 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}55 & 0{,}45 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donde las filas y columnas siguen el orden S, D, P, W, L.

Analicemos cada fila:

- Primera fila (S): 0.30 de ir a D (errar primer saque), 0.20 de ir a P (peloteo), 0.50 de ir a W (ganar directo)
- Segunda fila (D): 0.90 de ir a P (peloteo), 0.02 de ir a W (ganar directo), 0.08 de ir a L (doble falta)
- Tercera fila (P): 0.55 de ir a W (ganar el punto), 0.45 de ir a L (perder el punto)
- Cuarta y quinta filas (W y L): estados absorbentes (probabilidad 1 de quedarse en el mismo estado)

La probabilidad de que Cerúndolo gane el punto se puede calcular considerando todos los caminos posibles:

- Ganar directo con el primer saque (0.50)
- Ir a peloteo con primer saque (0.20) y ganar el peloteo (0.55)
- Errar primer saque (0.30), meter segundo (0.90) y ganar el peloteo (0.55)
- Errar primer saque (0.30), ganar directo con el segundo saque (0.02)

Resolvemos entonces la ecuación:

$$\begin{aligned} P(\text{Cerúndolo gana}) &= 0{,}50 + (0{,}20 \cdot 0{,}55) + (0{,}30 \cdot 0{,}90 \cdot 0{,}55) + (0{,}30 \cdot 0{,}02) \\ &= 0{,}50 + 0{,}11 + 0{,}1485 + 0{,}006 \\ &= 0{,}7645 \end{aligned}$$

Por lo tanto, Cerúndolo tiene aproximadamente un 76.45 % de probabilidad de ganar el punto.

c) A largo plazo, considerando que cada punto es independiente y las probabilidades se mantienen constantes:

- Cerúndolo ganaría aproximadamente el 76.45 % de los puntos
- Rune ganaría aproximadamente el 23.55 % de los puntos

2.3. Ejercicio 3: Máquina de Juguetes

En una fábrica de juguetes, hay una máquina que produce muñecos de peluche. La máquina puede estar en tres estados:

- F: Funcionando perfectamente (0.80)
- M: Mal funcionamiento (0.15)
- R: Rota (0.05)

Cuando la máquina está funcionando perfectamente, produce 100 muñecos por hora. En mal funcionamiento, produce 50 muñecos por hora. Cuando está rota, no produce nada.

El técnico de mantenimiento puede:

- Reparar la máquina (0.90)
- Empeorar la situación (0.10)

Resuelva los siguientes items:

a) Construya la matriz de transición considerando los estados de la máquina y las acciones del técnico.

b) Si la máquina comienza funcionando perfectamente, ¿cuál es la probabilidad de que esté rota después de dos intervenciones del técnico?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que la máquina funcione perfectamente durante tres horas consecutivas?

Ayuda:

- La máquina puede cambiar de estado por sí sola o por la intervención del técnico
- El técnico solo interviene cuando la máquina no está funcionando perfectamente
- Las probabilidades son independientes del tiempo

Resolución:

a) La matriz de transición es:

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}80 & 0{,}15 & 0{,}05 \\ 0{,}90 & 0 & 0{,}10 \\ 0{,}90 & 0 & 0{,}10 \end{pmatrix}$$

Donde las filas y columnas siguen el orden F, M, R.

Explicación de los valores:

- Primera fila: Desde F, la máquina tiene 80 % de probabilidad de seguir en F, 15 % de pasar a M y 5 % de pasar a R
- Segunda fila: Desde M, el técnico tiene 90 % de probabilidad de arreglarla (F), 0 % de dejarla igual (M) y 10 % de empeorarla (R)
- Tercera fila: Desde R, el técnico tiene 90 % de probabilidad de arreglarla (F), 0 % de dejarla en M y 10 % de dejarla igual (R)

b) Para calcular la probabilidad de que esté rota después de dos intervenciones, partiendo de F, analizamos todas las posibles combinaciones válidas:

Posibles caminos, sin considerar que la arregla porque si no sería infinito:

- F → M → M → R
- F → R → R → R
- F → R → M → R
- F → M → R → R

Calculando cada probabilidad:

$$\begin{aligned}
P(F \to M \to M \to R) &= 0{,}15 \cdot 0 \cdot 0{,}10 = 0 \\
P(F \to R \to R \to R) &= 0{,}05 \cdot 0{,}10 \cdot 0{,}10 = 0{,}0005 \\
P(F \to R \to M \to R) &= 0{,}05 \cdot 0 \cdot 0{,}10 = 0 \\
P(F \to M \to R \to R) &= 0{,}15 \cdot 0{,}10 \cdot 0{,}10 = 0{,}0015
\end{aligned}$$

Sumando todas las probabilidades:

$$\begin{aligned}
P(\text{Rota después de 2 intervenciones}) &= 0 + 0{,}0005 + 0 + 0{,}0015 \\
&= 0{,}002
\end{aligned}$$

c) Para que funcione perfectamente durante tres horas consecutivas:

$$\begin{aligned}
P(\text{F durante 3 horas}) &= 0{,}80 \cdot 0{,}80 \cdot 0{,}80 \\
&= 0{,}512
\end{aligned}$$