Teoría de Filas

Investigación Operativa, Universidad de San Andrés

Si encuentran algún error en el documento o hay alguna duda, mandenmé un mail a rodriguezf@udesa.edu.ar y lo revisamos.

1. Introducción a la Teoría de Filas

La Teoría de Filas es una rama de la Investigación Operativa que estudia el comportamiento de sistemas en los que entidades (clientes) deben esperar para recibir un servicio. Estos sistemas se encuentran en múltiples contextos:

- Bancos y supermercados: clientes esperando ser atendidos
- Sistemas de comunicaciones: paquetes de datos esperando ser transmitidos
- Hospitales: pacientes esperando atención médica
- Centros de llamadas: llamadas esperando ser atendidas
- Sistemas de manufactura: trabajos esperando ser procesados

1.1. Componentes de un Sistema de Filas

Un sistema de filas típico consta de los siguientes elementos:

1. **Proceso de llegada**: Describe cómo los clientes llegan al sistema (tasa λ)
2. **Mecanismo de servicio**: Describe cómo se atienden los clientes (tasa μ)
3. **Disciplina de la cola**: El orden en que se atienden los clientes (FIFO, LIFO, prioridades, etc.)
4. **Capacidad del sistema**: Número máximo de clientes que puede contener
5. **Número de servidores**: Cantidad de recursos disponibles para atender

1.2. Objetivos del Análisis

El análisis de sistemas de filas busca responder preguntas como:

- ¿Cuánto tiempo esperará un cliente en promedio?
- ¿Cuántos clientes habrá en el sistema en un momento dado?
- ¿Cuál es la probabilidad de que el sistema esté vacío u ocupado?
- ¿Cuántos servidores se necesitan para mantener un nivel de servicio aceptable?
- ¿Cómo optimizar el balance entre costos de servicio y costos de espera?

2. Distribuciones

En teoría de filas, las distribuciones de probabilidad más comunes para modelar llegadas y servicios son:

2.1. Distribución de Poisson

La distribución de Poisson se utiliza para modelar el **número de llegadas** en un intervalo de tiempo fijo. Si las llegadas ocurren con una tasa λ (llegadas por unidad de tiempo), la probabilidad de que ocurran exactamente n llegadas en un intervalo de tiempo es:

$$P(N = n) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Propiedades:

- Media: $E[N] = \lambda$
- Varianza: $\text{Var}(N) = \lambda$
- Las llegadas son independientes entre sí
- El proceso es sin memoria (propiedad markoviana)

2.2. Distribución Exponencial

La distribución exponencial se utiliza para modelar los **tiempos entre llegadas** y los **tiempos de servicio**. Si el tiempo entre eventos sigue una distribución exponencial con parámetro λ, su función de densidad es:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0$$

Y su función de distribución acumulada:

$$F(t) = P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

Propiedades:

- Media: $E[T] = \frac{1}{\lambda}$
- Varianza: $\text{Var}(T) = \frac{1}{\lambda^2}$
- **Propiedad de falta de memoria**: $P(T > s + t \mid T > s) = P(T > t)$
- El mínimo de variables exponenciales independientes es exponencial

2.3. Relación entre Poisson y Exponencial

Existe una relación fundamental entre ambas distribuciones:

- Si el número de llegadas sigue una distribución de Poisson con tasa λ, entonces los tiempos entre llegadas siguen una distribución exponencial con parámetro λ
- Recíprocamente, si los tiempos entre llegadas son exponenciales con parámetro λ, el número de llegadas sigue una distribución de Poisson con tasa λ

2.4. Distribución General

En algunos modelos (como M/G/1), el tiempo de servicio puede seguir una distribución general (no necesariamente exponencial). En estos casos se caracteriza por:

- Media: $E[S] = \frac{1}{\mu}$
- Varianza: $\text{Var}(S) = \sigma^2$
- Segundo momento: $E[S^2]$

3. Nacimiento y Muerte

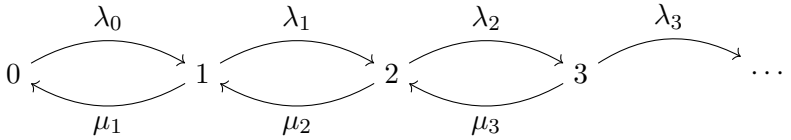
Los **procesos de nacimiento y muerte** son una clase especial de cadenas de Markov en tiempo continuo que modelan sistemas donde la población puede aumentar (nacimientos) o disminuir (muertes) de a una unidad a la vez.

3.1. Definición

Un proceso de nacimiento y muerte se caracteriza por:

- **Estados**: $n = 0, 1, 2, \ldots$ (número de clientes en el sistema)
- **Tasas de nacimiento** λ_n: tasa a la que el sistema pasa del estado n al estado $n + 1$
- **Tasas de muerte** μ_n: tasa a la que el sistema pasa del estado n al estado $n - 1$

3.2. Diagrama de Transiciones



3.3. Ecuaciones de Balance

En el estado estacionario, la tasa de entrada a cada estado debe igualar la tasa de salida. Esto da lugar a las **ecuaciones de balance**:
Para el estado 0:

$$\lambda_0 \pi_0 = \mu_1 \pi_1$$

Para el estado $n \geq 1$:

$$(\lambda_n + \mu_n)\pi_n = \lambda_{n-1}\pi_{n-1} + \mu_{n+1}\pi_{n+1}$$

3.4. Solución para Distribuciones de Estado Estacionario

Resolviendo las ecuaciones de balance, obtenemos:

$$\pi_n = \pi_0 \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

donde π_0 se obtiene de la condición de normalización:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \pi_n = 1$$

3.5. Aplicación a Teoría de Filas

En teoría de filas, los procesos de nacimiento y muerte modelan:

- **Nacimientos**: Llegadas de clientes (tasa λ_n)
- **Muertes**: Salidas de clientes después del servicio (tasa μ_n)

Para sistemas M/M/1 y M/M/1/c:

- $\lambda_n = \lambda$ (tasa de llegada constante)
- $\mu_n = \mu$ (tasa de servicio constante)

4. Notación de Kendall

La notación de Kendall es una notación estándar para clasificar sistemas de filas. Se expresa como:

$$\boxed{A/B/c/K/N/D}$$

donde cada símbolo tiene el siguiente significado:

- **A**: Distribución de los tiempos entre llegadas
- **B (o a veces S)**: Distribución de los tiempos de servicio
- **c**: Número de servidores en paralelo
- **K**: Capacidad máxima del sistema (opcional, por defecto ∞)
- **N**: Tamaño de la población de clientes (opcional, por defecto ∞)
- **D**: Disciplina de la cola (opcional, por defecto FIFO)

4.1. Símbolos Comunes para Distribuciones

- **M** (Markoviana): Distribución exponencial (o Poisson para llegadas)
- **D** (Determinística): Tiempos constantes
- **G** (General): Distribución arbitraria
- E_k (Erlang): Distribución Erlang con k fases

4.2. Ejemplos Comunes

- **M/M/1**: Llegadas Poisson, servicio exponencial, 1 servidor, capacidad infinita
- **M/M/1/c**: Llegadas Poisson, servicio exponencial, 1 servidor, capacidad máxima c
- **M/M/s**: Llegadas Poisson, servicio exponencial, s servidores en paralelo
- **M/G/1**: Llegadas Poisson, servicio con distribución general, 1 servidor
- **M/D/1**: Llegadas Poisson, servicio determinístico, 1 servidor

4.3. Disciplinas de Cola

- **FIFO** (First In First Out): El primero en llegar es el primero en ser atendido
- **LIFO** (Last In First Out): El último en llegar es el primero en ser atendido
- **SIRO** (Service In Random Order): Se atiende en orden aleatorio
- **Priority**: Se atiende según prioridades asignadas

5. Parámetros

- λ: Tasa de llegadas.
- μ: Tasa de servicio.
- L: Número de clientes en el sistema.
- L_q: Número de clientes en la cola.
- L_s: Número de clientes en servicio.
- W: Valor medio esperado del tiempo de espera en el sistema.
- W_q: Valor medio esperado del tiempo de espera en la cola.
- W_s: Valor medio esperado del tiempo de servicio.

6. Fórmulas

6.1. ρ

Tanto para modelos M/M/1 como M/M/1/c, la fórmula para ρ es la misma:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

6.2. π_0

Para modelos M/M/1:

$$\pi_0 = 1 - \rho$$

Para modelos M/M/1/c:

$$\pi_0 = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^c + 1}$$

6.3. L

Para modelos M/M/1:

$$L = \frac{\rho}{1 - \rho}$$

Para modelos M/M/1/c:

$$L = \frac{\rho\left[1 - (c+1)\rho^c + c\rho^{c+1}\right]}{(1 - \rho^{c+1})(1 - \rho)}$$

6.4. L_q

Para modelos M/M/1:

$$L_q = \frac{\rho^2}{1 - \rho}$$

Para modelos M/M/1/c:

$$L_q = L - (1 - \pi_0)$$

6.5. L_s

Para modelos M/M/1:

$$L_s = \rho$$

Para modelos M/M/1/c:

$$L_s = 1 - \pi_0$$

6.6. W

Para modelos M/M/1:

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

Para modelos M/M/1/c:

$$W = \frac{L}{\lambda(1 - \pi_c)}$$

6.7. W_q

Para modelos M/M/1:

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$$

Para modelos M/M/1/c:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda(1 - \pi_c)}$$

6.8. W_s

Tanto para modelos M/M/1 como M/M/1/c:

$$W_s = \frac{1}{\mu}$$

7. Ejercicios

7.1. Ejercicio 1

Suponga que en una estación con un solo servidor llegan en promedio 45 clientes por hora, Se tiene capacidad para atender en promedio a 60 clientes por hora. Se sabe que los clientes esperan en promedio 3 minutos en la cola. Se solicita:

a) Tiempo promedio que un cliente pasa en el sistema.

b) Número promedio de clientes en la cola.

c) Número promedio de clientes en el Sistema en un momento dado.

7.1.1. Solución

Datos:

- $\lambda = 45$ clientes/hora
- $\mu = 60$ clientes/hora
- $W_q = 3$ minutos $= 0{,}05$ horas

Este es un modelo M/M/1.

a) Tiempo promedio en el sistema (W):

Sabemos que $W = W_q + W_s$, donde $W_s = \frac{1}{\mu}$:

$$W_s = \frac{1}{60} \text{ horas} = 1 \text{ minuto}$$

Por lo tanto:

$$W = W_q + W_s = 3 + 1 = 4 \text{ minutos} = \frac{1}{15} \text{ horas}$$

Alternativamente, usando la fórmula directa:

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{60 - 45} = \frac{1}{15} \text{ horas} = 4 \text{ minutos}$$

b) Número promedio de clientes en la cola (L_q):

Usando la Ley de Little: $L_q = \lambda W_q$

$$L_q = 45 \times 0{,}05 = 2{,}25 \text{ clientes}$$

Alternativamente, usando la fórmula directa:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{45}{60} = 0{,}75$$

$$L_q = \frac{\rho^2}{1 - \rho} = \frac{(0{,}75)^2}{1 - 0{,}75} = \frac{0{,}5625}{0{,}25} = 2{,}25 \text{ clientes}$$

c) Número promedio de clientes en el sistema (L):

Usando la Ley de Little: $L = \lambda W$

$$L = 45 \times \frac{1}{15} = 3 \text{ clientes}$$

Alternativamente, usando la fórmula directa:

$$L = \frac{\rho}{1 - \rho} = \frac{0{,}75}{1 - 0{,}75} = \frac{0{,}75}{0{,}25} = 3 \text{ clientes}$$

7.2. Ejercicio 2

Suponga un restaurante de comidas rápidas al cual llegan en promedio 100 clientes por hora. Se tiene capacidad para atender en promedio a 150 clientes por hora. Calcule las medidas de desempeño del sistema

a) ¿Cuál es la probabilidad que el sistema esté ocioso?

b) ¿Cuál es la probabilidad que un cliente llegue y tenga que esperar, porque el sistema está ocupado?

c) ¿Cuál es el número promedio de clientes en la cola?

d) ¿Cuál es la probabilidad que hayan 10 clientes en la cola?

7.2.1. Solución

Datos:

- $\lambda = 100$ clientes/hora
- $\mu = 150$ clientes/hora

Este es un modelo M/M/1.
Primero calculamos ρ:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{100}{150} = \frac{2}{3} \approx 0{,}667$$

a) Probabilidad de que el sistema esté ocioso (π_0):

$$\pi_0 = 1 - \rho = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \approx 0{,}333$$

La probabilidad de que el sistema esté ocioso es del 33.3 %.

b) Probabilidad de que un cliente tenga que esperar:

Un cliente tiene que esperar cuando el sistema está ocupado, es decir, cuando hay al menos 1 cliente en el sistema. Esta probabilidad es:

$$P(\text{esperar}) = 1 - \pi_0 = \rho = \frac{2}{3} \approx 0{,}667$$

La probabilidad de que un cliente tenga que esperar es del 66.7 %.

c) Número promedio de clientes en la cola (L_q):

Usando la fórmula para modelo M/M/1:

$$L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{(2/3)^2}{1-2/3} = \frac{4/9}{1/3} = \frac{4}{3} \approx 1{,}33 \text{ clientes}$$

Alternativamente, primero calculamos W_q:

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{100}{150(150 - 100)} = \frac{100}{150 \times 50} = \frac{100}{7500} = \frac{1}{75} \text{ horas} = 0{,}8 \text{ minutos}$$

Y luego aplicamos la Ley de Little:

$$L_q = \lambda W_q = 100 \times \frac{1}{75} = \frac{100}{75} = \frac{4}{3} \approx 1{,}33 \text{ clientes}$$

d) Probabilidad de que haya 10 clientes en la cola:

En un sistema M/M/1, la probabilidad de que haya exactamente n clientes en el sistema es:

$$\pi_n = (1 - \rho)\rho^n$$

Si hay 10 clientes en la cola, hay 11 clientes en el sistema (10 esperando + 1 siendo atendido):

$$\pi_{11} = (1 - \rho)\rho^{11} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{11} \approx 0{,}333 \times 0{,}00568 \approx 0{,}00189$$

La probabilidad de que haya exactamente 10 clientes en la cola es aproximadamente 0.189 %.

7.3. Ejercicio 3

Una cabina de peaje tiene una ventanilla y puede atender como máximo a 4 autos. Los autos llegan a razón de 20 por hora, y el tiempo medio de servicio es de 2 minutos por auto. Se desea calcular:

a) La probabilidad de que el sistema esté vacío.

b) La probabilidad de que haya 4 autos (sistema lleno).

c) El número promedio de autos en el sistema.

d) El número promedio de autos en la cola.

e) El tiempo promedio total y en cola que pasa un auto en el sistema.

7.3.1. Solución

Datos:

- $\lambda = 20$ autos/hora
- Tiempo medio de servicio = 2 minutos $\Rightarrow \mu = 30$ autos/hora

- Capacidad máxima del sistema: $c = 4$ autos

Este es un modelo M/M/1/4 (llegadas Poisson, servicio exponencial, 1 servidor, capacidad máxima 4).
Primero calculamos ρ:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$$

a) Probabilidad de que el sistema esté vacío (π_0):

Para un modelo M/M/1/c:

$$\pi_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{c+1}} = \frac{1-\frac{2}{3}}{1-(\frac{2}{3})^5} = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{32}{243}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{211}{243}} = \frac{243}{3\times 211} = \frac{81}{211} \approx 0{,}384$$

La probabilidad de que el sistema esté vacío es aproximadamente 38.4 %.

b) Probabilidad de que el sistema esté lleno (π_4):

Para un modelo M/M/1/c, la probabilidad de estado n es:

$$\pi_n = \pi_0 \rho^n$$

Por lo tanto:

$$\pi_4 = \pi_0 \rho^4 = \frac{81}{211} \times \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{81}{211} \times \frac{16}{81} = \frac{16}{211} \approx 0{,}076$$

La probabilidad de que haya 4 autos (sistema lleno) es aproximadamente 7.6 %.

c) Número promedio de autos en el sistema (L):

Para un modelo M/M/1/c:

$$L = \frac{\rho\left[1-(c+1)\rho^c + c\rho^{c+1}\right]}{(1-\rho^{c+1})(1-\rho)}$$

Sustituyendo con $\rho = \frac{2}{3}$ y $c = 4$:

$$L = \frac{\frac{2}{3}\left[1-5\left(\frac{2}{3}\right)^4 + 4\left(\frac{2}{3}\right)^5\right]}{\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^5\right)\left(1-\frac{2}{3}\right)}$$

$$L = \frac{\frac{2}{3}\left[1-5\times\frac{16}{81}+4\times\frac{32}{243}\right]}{\frac{211}{243}\times\frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{3}\left[1-\frac{80}{81}+\frac{128}{243}\right]}{\frac{211}{729}}$$

$$L = \frac{\frac{2}{3}\left[\frac{243-240+128}{243}\right]}{\frac{211}{729}} = \frac{\frac{2}{3}\times\frac{131}{243}}{\frac{211}{729}} = \frac{\frac{262}{729}}{\frac{211}{729}} = \frac{262}{211} \approx 1{,}242$$

El número promedio de autos en el sistema es aproximadamente 1.24 autos.

d) Número promedio de autos en la cola (L_q):

Para un modelo M/M/1/c:

$$L_q = L - (1 - \pi_0) = L - L_s$$

donde $L_s = 1 - \pi_0 = 1 - \frac{81}{211} = \frac{130}{211}$

$$L_q = \frac{262}{211} - \frac{130}{211} = \frac{132}{211} \approx 0{,}626$$

El número promedio de autos en la cola es aproximadamente 0.63 autos.

e) Tiempo promedio total y en cola:

La tasa efectiva de llegadas es:

$$\lambda_{ef} = \lambda(1 - \pi_c) = 20 \times \left(1 - \frac{16}{211}\right) = 20 \times \frac{195}{211} \approx 18{,}48 \text{ autos/hora}$$

Tiempo promedio en el sistema:

$$W = \frac{L}{\lambda_{ef}} = \frac{\frac{262}{211}}{20 \times \frac{195}{211}} = \frac{262}{20 \times 195} = \frac{262}{3900} \approx 0{,}0672 \text{ horas} \approx 4{,}03 \text{ minutos}$$

Tiempo promedio en la cola:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda_{ef}} = \frac{\frac{132}{211}}{20 \times \frac{195}{211}} = \frac{132}{3900} \approx 0{,}0338 \text{ horas} \approx 2{,}03 \text{ minutos}$$

8. M/G/1

El modelo M/G/1 es un sistema de filas donde:

- **M**: Las llegadas siguen un proceso de Poisson (distribución Markoviana)
- **G**: El tiempo de servicio sigue una distribución general (no necesariamente exponencial)
- **1**: Hay un solo servidor

Este modelo generaliza el M/M/1 al permitir cualquier distribución de tiempo de servicio.

8.1. Parámetros del Sistema

- λ: Tasa de llegadas (llegadas por unidad de tiempo)
- $E[S]$: Tiempo medio de servicio
- $\mu = \frac{1}{E[S]}$: Tasa media de servicio
- $\text{Var}(S)$: Varianza del tiempo de servicio
- $E[S^2]$: Segundo momento del tiempo de servicio
- $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \lambda E[S]$: Factor de utilización

Para estabilidad del sistema, se requiere $\rho < 1$.

8.2. Fórmula de Pollaczek-Khinchin

La fórmula de Pollaczek-Khinchin proporciona el número promedio de clientes en la cola:

$$L_q = \frac{\lambda^2 E[S^2]}{2(1-\rho)} = \frac{\rho^2 + \lambda^2 \text{Var}(S)}{2(1-\rho)}$$

Esta fórmula también puede expresarse en términos del coeficiente de variación del tiempo de servicio $C_s^2 = \frac{\text{Var}(S)}{E[S]^2}$:

$$L_q = \frac{\rho^2(1+C_s^2)}{2(1-\rho)}$$

8.3. Otras Medidas de Desempeño

Tiempo promedio en la cola:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\lambda E[S^2]}{2(1-\rho)}$$

Número promedio de clientes en el sistema:

$$L = L_q + \rho$$

Tiempo promedio en el sistema:

$$W = W_q + E[S] = \frac{L}{\lambda}$$

8.4. Casos Especiales

8.4.1. M/M/1 (Servicio Exponencial)

Si el servicio es exponencial: $E[S^2] = \frac{2}{\mu^2}$ y $C_s^2 = 1$

$$L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

que coincide con la fórmula del modelo M/M/1.

8.4.2. M/D/1 (Servicio Determinístico)

Si el servicio es determinístico (constante): $\text{Var}(S) = 0$, $E[S^2] = E[S]^2$ y $C_s^2 = 0$

$$L_q = \frac{\rho^2}{2(1-\rho)}$$

Nótese que para el mismo ρ, el sistema M/D/1 tiene la mitad de clientes en cola que M/M/1, debido a la ausencia de variabilidad en el servicio.

8.5. Interpretación

La fórmula de Pollaczek-Khinchin muestra que:

- El número de clientes en cola aumenta con la variabilidad del tiempo de servicio
- Reducir la variabilidad del servicio (manteniendo la media constante) reduce la congestión
- Cuando $C_s^2 = 0$ (servicio determinístico), se minimiza L_q
- Cuando $C_s^2 = 1$ (servicio exponencial), se recupera el modelo M/M/1

9. Simulaciones

9.1. Ejercicio 1

Un banco recibe en promedio ($\lambda = 4$) clientes por hora (llegadas Poisson) y atiende cada cajero a razón de ($\mu = 2$) clientes por hora (servicio exponencial). El banco puede contratar s cajeros paralelos.

- El costo de espera es de \$10 por cliente-hora en cola.
- El costo de servicio es de \$15 por cajero-hora.

Se busca determinar el número óptimo de cajeros s que minimice el costo total:

$$C(s) = 10\,L_q(s) \;+\; 15\,s$$

donde $L_q(s)$ es el número promedio de clientes en cola en el sistema M/M/s.

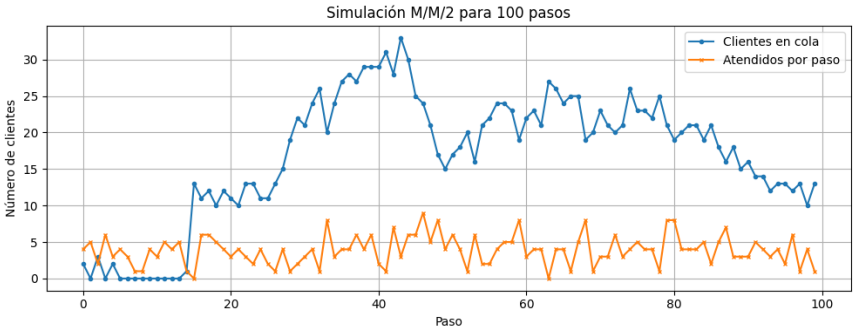
9.1.1. Código Python

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Parámetros
rate_llegada   = 4     # lambda (llegadas/hora)
rate_atencion  = 2     # mu     (servicios por servidor
    por hora)
s              = 2     # número de servidores
n_pasos        = 100   # número de intervalos
costo_espera   = 10    # costo por cliente en cola
costo_servidor = 15    # costo por servidor

# Historial
hist_cola      = []
hist_atendidos = []

# Estado inicial
cola = 0

for paso in range(n_pasos):
    # 1) Llegadas: Poisson(lambda * dt)
    llegadas = np.random.poisson(rate_llegada)
    cola += llegadas

    # 2) Atenciones: Poisson(s * mu * dt), hasta agotar
        la cola
    capacidad = np.random.poisson(s * rate_atencion)
    atendidos = min(cola, capacidad)
    cola -= atendidos

    # 3) Guardar historial
    hist_cola.append(cola)
    hist_atendidos.append(atendidos)

# 4) Costo final
cola_final = hist_cola[-1]
costo_total = costo_espera * cola_final + costo_servidor
    * s

print(f"Clientes en cola al final: {cola_final}")
```

```
print(f"Costo total = {costo_espera}*{cola_final} + {
    costo_servidor}*{s} = {costo_total:.2f}")

# 5) Gráfica
plt.figure(figsize=(10,4))
plt.plot(hist_cola,      label="Clientes en cola",
    marker='o', markersize=3)
plt.plot(hist_atendidos, label="Atendidos por paso",
    marker='x', markersize=3)
plt.xlabel("Paso")
plt.ylabel("Número de clientes")
plt.title(f"Simulación M/M/{s} para {n_pasos} pasos")
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.tight_layout()
plt.show()
```

9.1.2. Solución

- Clientes en cola al final: 13
- Costo total = 10*13 + 15*2 = 160.00

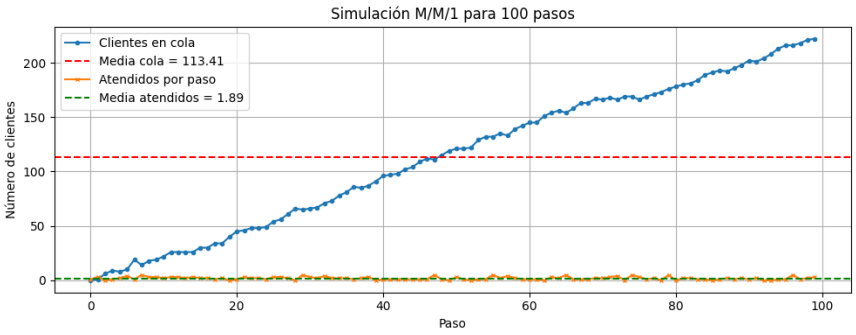


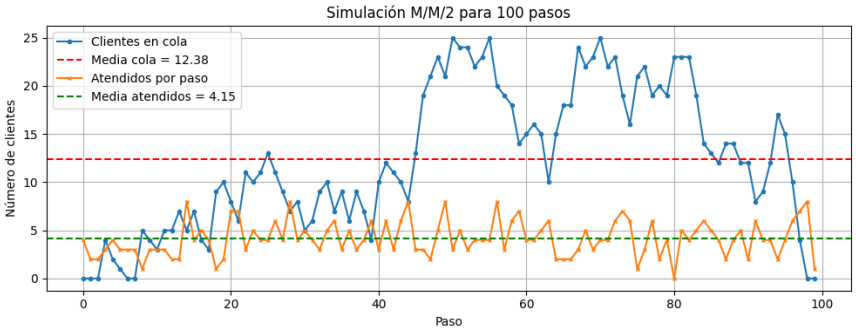
9.2. ¿Y si tengo diferentes S?

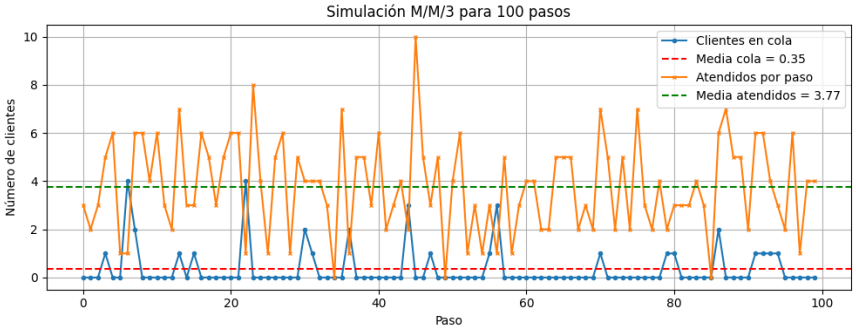
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Parámetros base
rate_llegada   = 4     # lambda (llegadas/hora)
rate_atencion  = 2     # mu     (servicios por servidor
    por hora)
s_max          = 5     # número máximo de servidores a
    probar
n_pasos        = 100   # número de intervalos
costo_espera   = 10    # costo por cliente en cola (por
    intervalo)
```

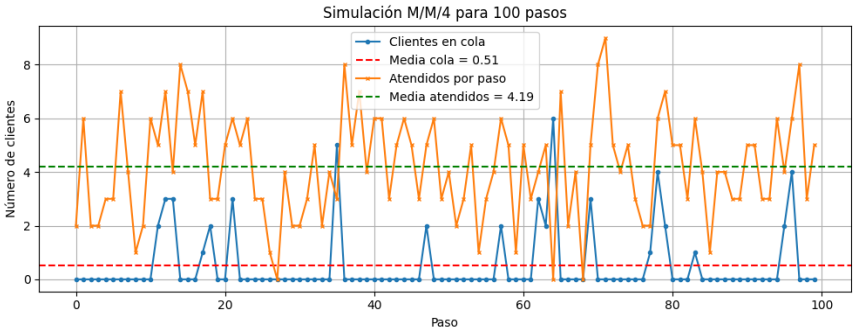
```
costo_servidor = 15   # costo por servidor (por intervalo
    )

def M_M_s(rate_llegada, rate_atencion, s, n_pasos,
    costo_espera, costo_servidor):
    """
    Simula un sistema M/M/s discretizado en n_pasos.
    Retorna:
        hist_cola      : lista con la longitud de cola en
            cada paso
        hist_atendidos : lista con atendidos en cada paso
        cola_final     : longitud de cola al final de la
            simulación
        costo_total    : costo = costo_espera *
            media_cola + costo_servidor * s
    """
    hist_cola      = []
    hist_atendidos = []
    cola = 0

    for paso in range(n_pasos):
        # 1) Llegadas: Poisson(rate_llegada)
        llegadas = np.random.poisson(rate_llegada)
        cola += llegadas

        # 2) Atenciones: Poisson(s * rate_atencion)
        capacidad = np.random.poisson(s * rate_atencion)
        atendidos = min(cola, capacidad)
        cola -= atendidos

        # 3) Guardar historial
        hist_cola.append(cola)
        hist_atendidos.append(atendidos)

    media_cola   = np.mean(hist_cola)
    costo_total  = costo_espera * media_cola +
       costo_servidor * s

    return hist_cola, hist_atendidos, costo_total

# Simular para s = 1 ... s_max
costos_totales = []
for i in range(1, s_max + 1):
    hist_cola, hist_atendidos, costo_total = M_M_s(
        rate_llegada, rate_atencion, i, n_pasos,
            costo_espera, costo_servidor)
    costos_totales.append(costo_total)

    # Gráfico de evolución para cada s
```

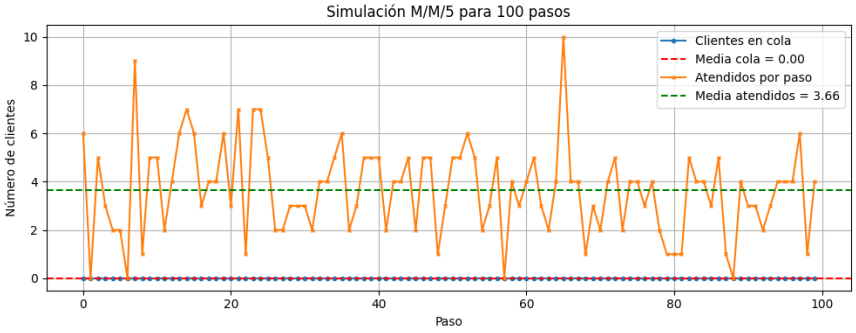
```
    plt.figure(figsize=(10,4))
    plt.plot(hist_cola,      label="Clientes en cola",
          marker='o', markersize=3)
    plt.axhline(np.mean(hist_cola), color='r', linestyle=
        '--',
                label=f"Media cola = {np.mean(hist_cola)
                    :.2f}")
    plt.plot(hist_atendidos, label="Atendidos por paso",
        marker='x', markersize=3)
    plt.axhline(np.mean(hist_atendidos), color='g',
        linestyle='--',
                label=f"Media atendidos = {np.mean(
                    hist_atendidos):.2f}")
    plt.xlabel("Paso")
    plt.ylabel("Número de clientes")
    plt.title(f"Simulación M/M/{i} para {n_pasos} pasos")
    plt.legend()
    plt.grid(True)
    plt.tight_layout()
    plt.show()

# Gráfico de costos totales vs número de servidores
plt.figure(figsize=(8,4))
plt.plot(range(1, s_max+1), costos_totales, '-o')
plt.xlabel("Número de servidores $s$")
plt.ylabel("Costo total por intervalo")
plt.title("Costo total vs. número de servidores")
plt.grid(True)
plt.tight_layout()
plt.show()
```

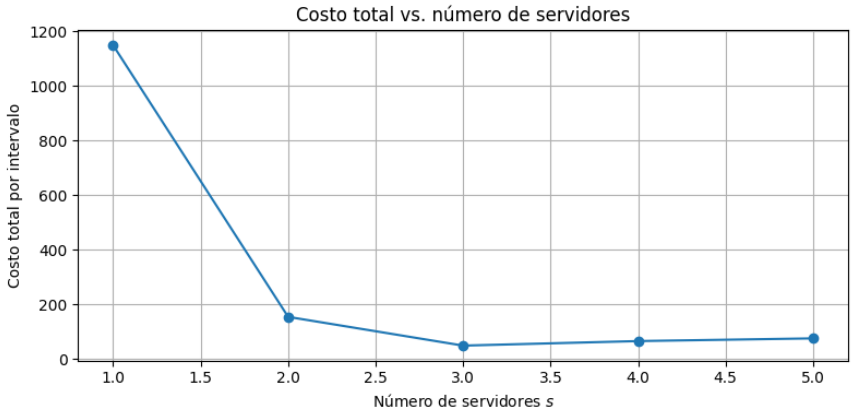



Simulación M/M/2 para 100 pasos
Clientes en cola
Media cola = 12.38
Atendidos por paso
Media atendidos = 4.15
Número de clientes
Paso


Simulación M/M/3 para 100 pasos
Clientes en cola
Media cola = 0.35
Atendidos por paso
Media atendidos = 3.77
Número de clientes
Paso


Simulación M/M/4 para 100 pasos
Clientes en cola
Media cola = 0.51
Atendidos por paso
Media atendidos = 4.19
Número de clientes
Paso


Simulación M/M/5 para 100 pasos
Clientes en cola
Media cola = 0.00
Atendidos por paso
Media atendidos = 3.66
Número de clientes
Paso

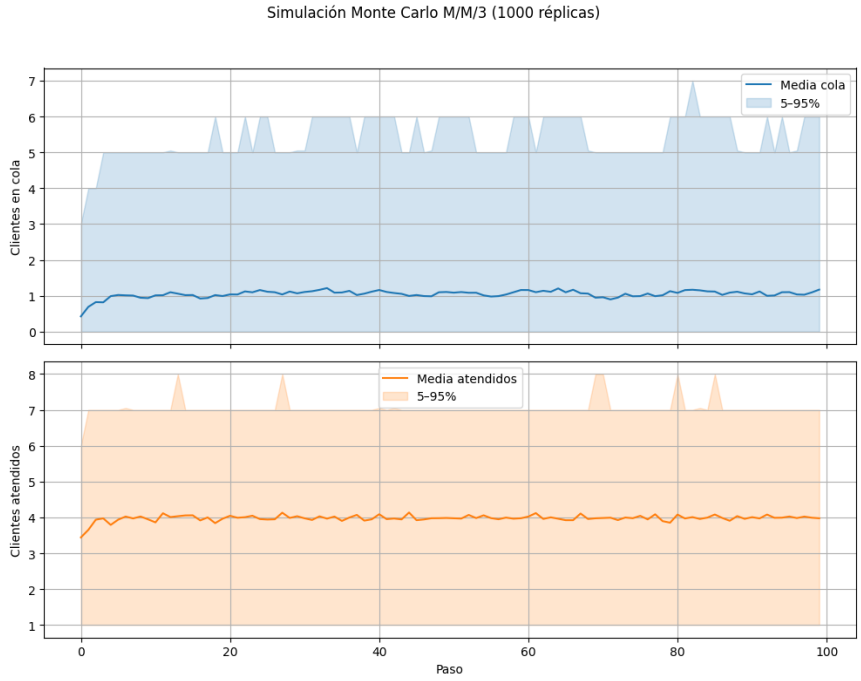


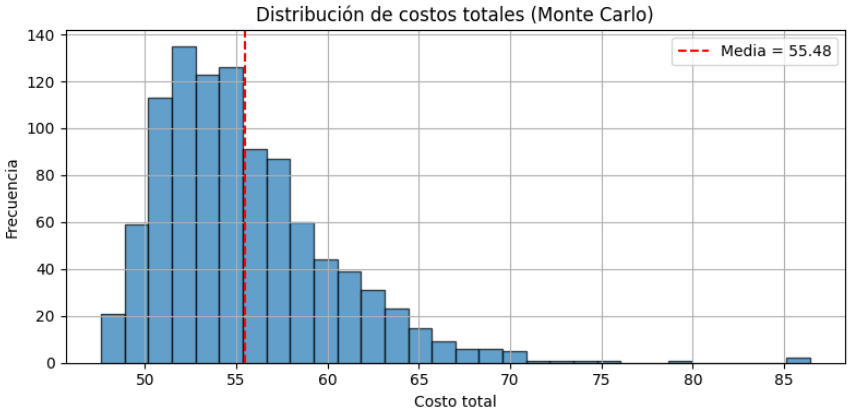
10. ¿Y si hacemos Montecarlo?

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Parámetros base
rate_llegada   = 4
rate_atencion  = 2
s              = 3      # fijamos s=3
n_pasos        = 100
costo_espera   = 10
costo_servidor = 15
n_rep          = 1000   # número de réplicas Monte Carlo

# Función simulación
def M_M_s(rate_llegada, rate_atencion, s, n_pasos,
    costo_espera, costo_servidor):
     hist_cola = []
     hist_atendidos = []
     cola = 0

     for _ in range(n_pasos):
         # Llegadas y atenciones como procesos Poisson
         llegadas  = np.random.poisson(rate_llegada)
         capacidad = np.random.poisson(s * rate_atencion)
         cola += llegadas
         atendidos = min(cola, capacidad)
         cola -= atendidos

         hist_cola.append(cola)
         hist_atendidos.append(atendidos)

     media_cola  = np.mean(hist_cola)
```

```
    costo_total = costo_espera * media_cola +
       costo_servidor * s
    return np.array(hist_cola), np.array(hist_atendidos),
        costo_total

# Almacenar todos los históricos
all_colas      = np.zeros((n_rep, n_pasos))
all_atendidos  = np.zeros((n_rep, n_pasos))
all_costos     = np.zeros(n_rep)

for i in range(n_rep):
    hc, ha, ctot = M_M_s(rate_llegada, rate_atencion, s,
       n_pasos, costo_espera, costo_servidor)
    all_colas[i]     = hc
    all_atendidos[i] = ha
    all_costos[i]    = ctot

# Calcular estadísticos
mean_cola     = all_colas.mean(axis=0)
p5_cola, p95_cola = np.percentile(all_colas, [5,95], axis
   =0)

mean_atendidos    = all_atendidos.mean(axis=0)
p5_att, p95_att   = np.percentile(all_atendidos, [5,95],
   axis=0)

# 1) Trayectorias promedio con bandas 5-95%
fig, axes = plt.subplots(2,1, figsize=(10,8), sharex=True
   )

# Cola
axes[0].plot(mean_cola, color='C0', label='Media cola')
axes[0].fill_between(range(n_pasos), p5_cola, p95_cola,
   color='C0', alpha=0.2, label='5-95\%')
axes[0].set_ylabel('Clientes en cola')
axes[0].legend()
axes[0].grid(True)

# Atendidos
axes[1].plot(mean_atendidos, color='C1', label='Media
   atendidos')
axes[1].fill_between(range(n_pasos), p5_att, p95_att,
   color='C1', alpha=0.2, label='5-95\%')
axes[1].set_xlabel('Paso')
axes[1].set_ylabel('Clientes atendidos')
axes[1].legend()
axes[1].grid(True)
```

```
plt.suptitle(f'Simulación Monte Carlo M/M/{s} ({n_rep} ré
    plicas)')
plt.tight_layout(rect=[0,0,1,0.95])
plt.show()

# 2) Histograma de costos
plt.figure(figsize=(8,4))
plt.hist(all_costos, bins=30, edgecolor='k', alpha=0.7)
plt.axvline(all_costos.mean(), color='r', linestyle='--',
     label=f'Media = {all_costos.mean():.2f}')
plt.xlabel('Costo total')
plt.ylabel('Frecuencia')
plt.title('Distribución de costos totales (Monte Carlo)')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.tight_layout()
plt.show()
```



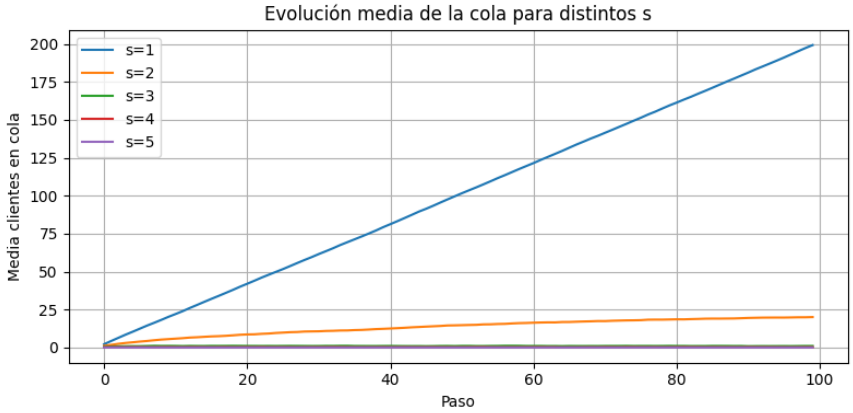


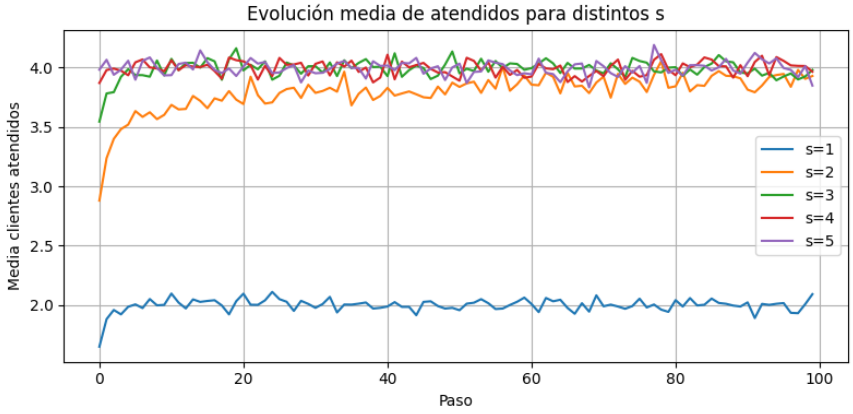
10.1. ¿Y con diferentes S?

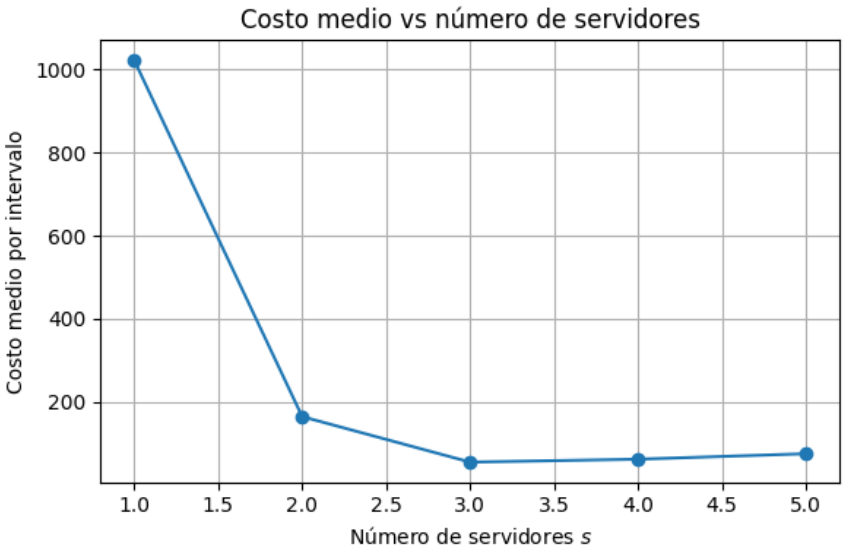
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Parámetros base
rate_llegada   = 4
rate_atencion  = 2
s_max          = 5
n_pasos        = 100
costo_espera   = 10
costo_servidor = 15
n_rep          = 1000

def M_M_s(rate_llegada, rate_atencion, s, n_pasos,
    costo_espera, costo_servidor):
    hist_cola = np.zeros(n_pasos)
    hist_att  = np.zeros(n_pasos)
    cola = 0
    for t in range(n_pasos):
        # Llegadas
        cola += np.random.poisson(rate_llegada)
        # Atenciones
        atend = min(cola, np.random.poisson(s *
            rate_atencion))
        cola -= atend
        hist_cola[t] = cola
        hist_att[t]  = atend
    media_cola = hist_cola.mean()
    costo_total = costo_espera * media_cola +
        costo_servidor * s
    return hist_cola, hist_att, costo_total

# Arrays para almacenar resultados
```

```
cola_means   = np.zeros((s_max, n_pasos))
att_means    = np.zeros((s_max, n_pasos))
costos_means = np.zeros(s_max)

# Bucle sobre s
for s in range(1, s_max + 1):
    all_colas = np.zeros((n_rep, n_pasos))
    all_atts  = np.zeros((n_rep, n_pasos))
    all_costs = np.zeros(n_rep)

    # Réplicas Monte Carlo
    for i in range(n_rep):
        hc, ha, ctot = M_M_s(rate_llegada, rate_atencion,
            s, n_pasos, costo_espera, costo_servidor)
        all_colas[i] = hc
        all_atts[i]  = ha
        all_costs[i] = ctot

    # Medias temporales (sobre réplicas)
    cola_means[s-1]   = all_colas.mean(axis=0)
    att_means[s-1]    = all_atts.mean(axis=0)
    costos_means[s-1] = all_costs.mean()

# 1) Plot de medias de cola a lo largo del tiempo, un
    curve por cada s
plt.figure(figsize=(8,4))
for idx in range(s_max):
    plt.plot(cola_means[idx], label=f's={idx+1}')
plt.xlabel('Paso')
plt.ylabel('Media clientes en cola')
plt.title('Evolución media de la cola para distintos s')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.tight_layout()

# 2) Plot de medias de atendidos a lo largo del tiempo
plt.figure(figsize=(8,4))
for idx in range(s_max):
    plt.plot(att_means[idx], label=f's={idx+1}')
plt.xlabel('Paso')
plt.ylabel('Media clientes atendidos')
plt.title('Evolución media de atendidos para distintos s'
    )
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.tight_layout()

# 3) Plot del costo medio final vs s
plt.figure(figsize=(6,4))
```

```
plt.plot(range(1, s_max+1), costos_means, '-o')
plt.xlabel('Número de servidores $s$')
plt.ylabel('Costo medio por intervalo')
plt.title('Costo medio vs número de servidores')
plt.grid(True)
plt.tight_layout()

plt.show()
```






Costo medio vs número de servidores
Costo medio por intervalo
1000
800
600
400
200
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
3.5
4.0
4.5
5.0
Número de servidores s