Cadenas de Markov

Investigación Operativa

Universidad de San Andrés

Introducción a las Cadenas de Markov

- Un proceso estocástico que cumple con la propiedad de Markov

Introducción a las Cadenas de Markov

- Un proceso estocástico que cumple con la propiedad de Markov
- La probabilidad de cualquier estado futuro depende únicamente del estado presente

Introducción a las Cadenas de Markov

- Un proceso estocástico que cumple con la propiedad de Markov
- La probabilidad de cualquier estado futuro depende únicamente del estado presente
- No depende de la secuencia de eventos que le precedieron

Definición Formal

Sea $\{X_n, n \geq 0\}$ un proceso estocástico con espacio de estados S.

Es una cadena de Markov si para todo $n \geq 0$ y para todos los estados $i_0, i_1, ..., i_n, j \in S$:

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, ..., X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = j | X_n = i_n)$$

Matriz de Transición

- La matriz $P = (p_{ij})$ contiene las probabilidades de transición
- $p_{ij} = P(X_{n+1} = j | X_n = i)$
- Propiedades:
  - $0 \leq p_{ij} \leq 1$ para todo $i, j \in S$
  - $\sum_{j \in S} p_{ij} = 1$ para todo $i \in S$

Ejercicio 1: Predicción del Clima - Consigna

- Si hoy está soleado:
  - 70 % de probabilidad de que mañana esté soleado
  - 20 % de probabilidad de que mañana esté nublado
  - 10 % de probabilidad de que mañana llueva
- Si hoy está nublado:
  - 30 % de probabilidad de que mañana esté soleado
  - 40 % de probabilidad de que mañana esté nublado
  - 30 % de probabilidad de que mañana llueva
- Si hoy llueve:
  - 20 % de probabilidad de que mañana esté soleado
  - 40 % de probabilidad de que mañana esté nublado
  - 40 % de probabilidad de que mañana llueva

Ejercicio 1: Predicción del Clima - Preguntas

a) Construir la matriz de transición P

b) ¿Cuál es la probabilidad de que llueva dentro de dos días si hoy está soleado?

Ejercicio 1: Predicción del Clima - Matriz de Transición

a) Matriz de transición:

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}4 \end{pmatrix}$$

Donde:

- Fila 1: Probabilidades desde estado soleado
- Fila 2: Probabilidades desde estado nublado
- Fila 3: Probabilidades desde estado lluvioso

Ejercicio 1: Predicción del Clima - Cálculo de Probabilidad

b) Probabilidad de lluvia en dos días si hoy está soleado:

$$\begin{aligned} P(X_2 = L | X_0 = S) &= (0{,}7)(0{,}1) + (0{,}2)(0{,}3) + (0{,}1)(0{,}4) \\ &= 0{,}07 + 0{,}06 + 0{,}04 = 0{,}17 \end{aligned}$$

Interpretación:

- 7 %: Soleado $\rightarrow$ Soleado $\rightarrow$ Lluvia
- 6 %: Soleado $\rightarrow$ Nublado $\rightarrow$ Lluvia
- 4 %: Soleado $\rightarrow$ Lluvia $\rightarrow$ Lluvia

Ejercicio 2: Puntos en Tenis - Contexto

Final de Roland Garros 2025. Cerúndolo vs Rune con match point.

Probabilidades de Cerúndolo:

- 50 % de ganar de ace o saque no devuelto
- 30 % de que entre el primer saque y se arme el punto
- 90 % de meter el segundo saque
- 2 % de ganar directo con segundo saque
- 55 % de ganar cualquier peloteo

Ejercicio 2: Puntos en Tenis - Preguntas

a) Identificar estados
b) ¿Cuál es la probabilidad de que Cerúndolo gane el punto?
c) Si se jugaran infinitos puntos con estas probabilidades, ¿qué porcentaje ganaría cada jugador?

Ejercicio 2: Estados y Matriz

Estados identificados:

- S: Primer saque
- D: Segundo saque
- P: Peloteo
- W: Ganado
- L: Perdido

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}20 & 0{,}30 & 0{,}50 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}90 & 0{,}02 & 0{,}08 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}55 & 0{,}45 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2: Resolución

Probabilidad de ganar el punto:

$$\begin{aligned} P(\text{Cerú Gana}) &= 0{,}50 + (0{,}30 \cdot 0{,}55) + (0{,}20 \cdot 0{,}90 \cdot 0{,}55) + (0{,}20 \cdot 0{,}02) \\ &= 0{,}50 + 0{,}165 + 0{,}099 + 0{,}004 = 0{,}768 \end{aligned}$$

A largo plazo:

- Cerúndolo: 76.8 % de los puntos
- Rune: 23.2 % de los puntos

Ejercicio 3: Máquina de Juguetes - Consigna

Estados posibles:

- F: Funcionando perfectamente (80 %)
- M: Mal funcionamiento (15 %)
- R: Rota (5 %)

Producción por hora:

- F: 100 muñecos
- M: 50 muñecos
- R: 0 muñecos

Ejercicio 3: Intervención del Técnico

Intervención del técnico:

- 90 % de probabilidad de reparar
- 10 % de probabilidad de empeorar

Ejercicio 3: Preguntas

a) Construir matriz de transición
b) Probabilidad de estar rota después de dos intervenciones, partiendo de F
c) Probabilidad de funcionar perfectamente durante tres horas consecutivas

Ejercicio 3: Resolución - Parte 1

a) Matriz de transición:

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}80 & 0{,}15 & 0{,}05 \\ 0{,}90 & 0 & 0{,}10 \\ 0{,}90 & 0 & 0{,}10 \end{pmatrix}$$

- Primera fila: Desde F, 80 % sigue en F, 15 % pasa a M, 5 % pasa a R
- Segunda fila: Desde M, técnico arregla (90 %), empeora (10 %)
- Tercera fila: Desde R, técnico arregla (90 %), empeora (10 %)

Ejercicio 3: Resolución - Parte 2

b) Probabilidad de estar rota después de dos intervenciones:

Posibles caminos:

- F $\to$ M $\to$ M $\to$ R (prob $=$ 0)
- F $\to$ R $\to$ R $\to$ R (prob $=$ 0.0005)
- F $\to$ R $\to$ M $\to$ R (prob $=$ 0)
- F $\to$ M $\to$ R $\to$ R (prob $=$ 0.0015)

$$\begin{aligned} P(\text{Rota después de 2}) &= 0 + 0{,}0005 + 0 + 0{,}0015 \\ &= 0{,}002 \end{aligned}$$

Ejercicio 3: Resolución - Parte 3

c) Probabilidad de funcionar tres horas consecutivas:

$$\begin{aligned} P(F \text{ durante 3 horas}) &= 0{,}80 \cdot 0{,}80 \cdot 0{,}80 \\ &= 0{,}512 \end{aligned}$$

- Cada hora tiene 80 % de probabilidad de seguir en F
- Las probabilidades son independientes
- Multiplicamos las tres probabilidades

¡Gracias!