Modelos de Inventarios independientes

Estocásticos

Introducción
Procesos Estocásticos

La naturaleza y las realizaciones humanas nos muestran numerosos fenómenos en los cuales, una o varias magnitudes, que representan "el estado" de un cierto sistema, varían en función del tiempo en una forma que no puede ser previsible.

Sin embargo, las variaciones de estas magnitudes pueden ser sometidas a las leyes estadísticas que permiten vincular probabilidades a los diferentes valores que pueden tomar dichas magnitudes.

Objetivo

VARIABLE ALEATORIA A LO LARGO DEL TIEMPO → PROCESO ESTOCASTICO

- Ajustar un modelo con el fin de hacer predicciones sobre el comportamiento futuro.

Modelo estocástico-Definición

- Las distribuciones de probabilidad (Normal, Poisson, etc.) y las relaciones que ligan las magnitudes del sistema constituyen lo que se llama un “modelo matemático” del fenómeno; se llama *proceso estocástico a un modelo que se* ajusta al caso descrito, en donde una o varias magnitudes del sistema varían en una forma *aleatoria en función del* tiempo.

Modelo estocástico-Definición

A los posibles valores que puede tomar la variable aleatoria se le denominaran estados, por lo que se puede tener un espacio de estados discreto o un espacio de estados continuo.

Los estados posibles del sistema pueden ser en número finito o infinito, pero a menudo se les definirá en forma que puedan ser numerados. Cada estado posible puede ser referido como

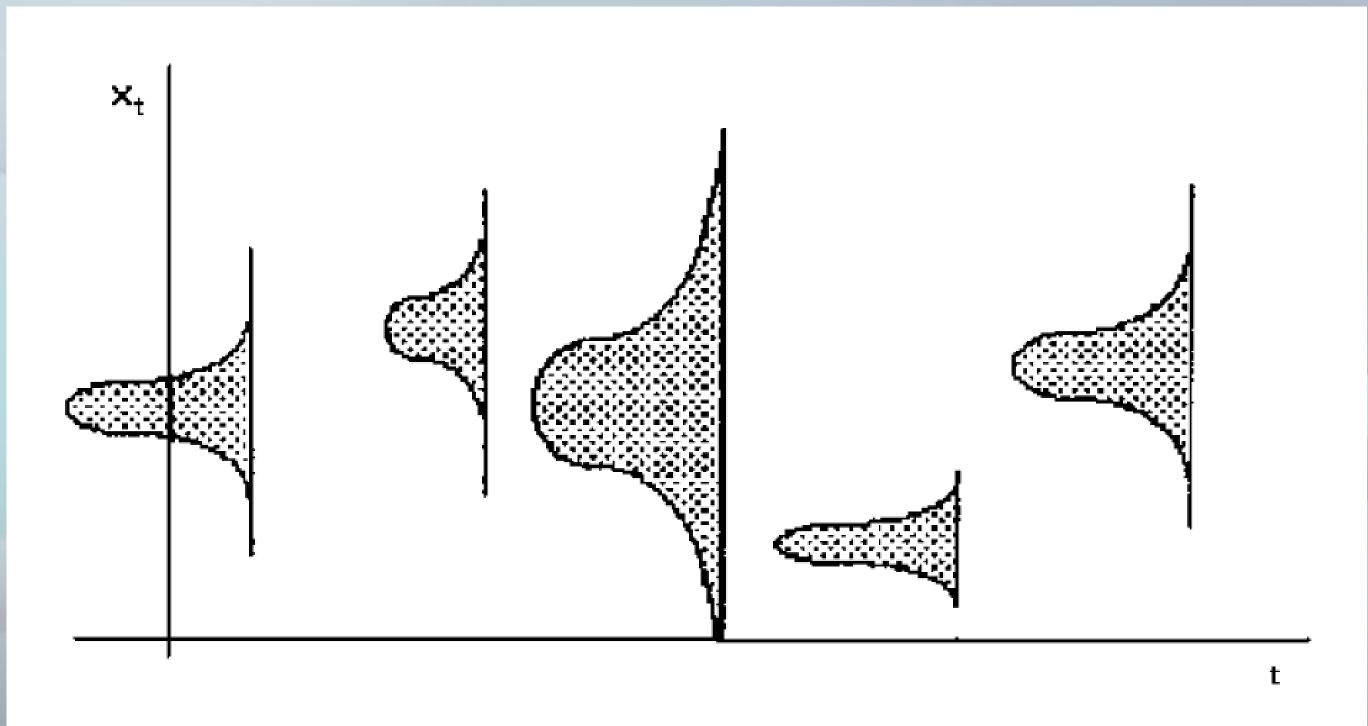
X0, X1, … ,Xi, …

- Una **secuencia de variables que indique** el valor de alguna magnitud del sistema en instantes sucesivos suele representarse de la siguiente manera:

$$\{X_0 = x_0, X_1 = x_1, ..., X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x_n\}$$

Modelo estocástico-Definición

- en la que cada variable *Xi* , *i* = *0, ..., n,* tiene una distribución de probabilidades, en general, distinta de las otras variables.



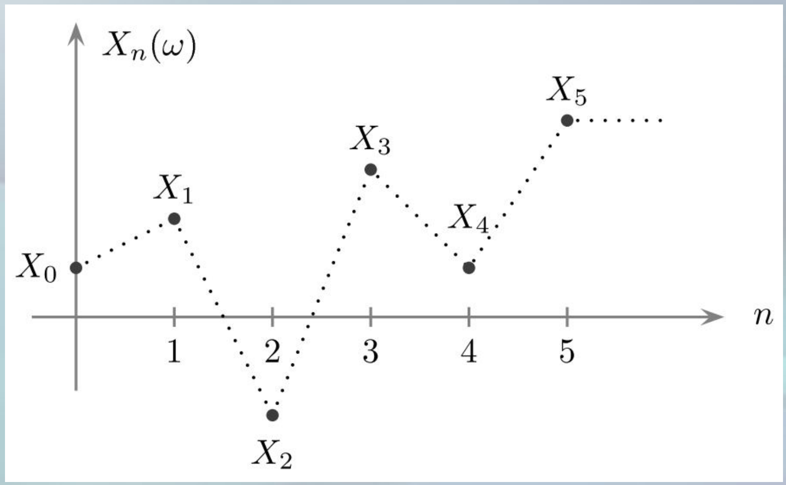
Clasificación de procesos

	t **Discreto**	t **Continuo**
X **Discreta**	*Proceso de estado discreto y tiempo discreto* (***Cadena***) (Unidades producidas mensualmente de un producto)	*Proceso de estado discreto y tiempo continuo* (**Proc. Saltos Puros**) (Unidades producidas hasta el instante t)
X **Continua**	*Proceso de estado continuo y tiempo discreto* (Toneladas de producción diaria de un producto)	*Proceso de estado continuo y tiempo continuo* (***Proceso Continuo***) (Velocidad de un vehículo en el instante t)

Clasificación (Ejemplo discreto)

- Supongamos el espacio de tiempo:

$$T = \{0, 1, 2, \dots\}$$

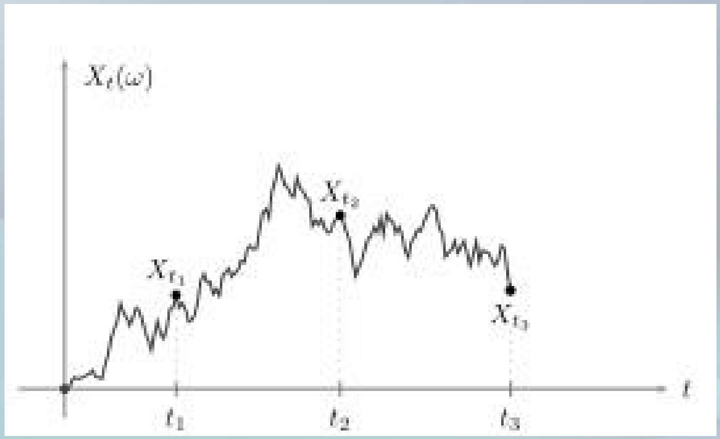


- Entonces para cada t, X es el valor del proceso o estado del sistema al tiempo t.

Clasificación (Ejemplo continuo)

- El espacio de tiempo también puede ser un conjunto continuo

$$T = [0, \infty)$$



- Entonces el proceso es a tiempo continuo y se denota:

$$\{X_t : t \geqslant 0\}.$$

Tipos de modelos matemáticos- Estocástico

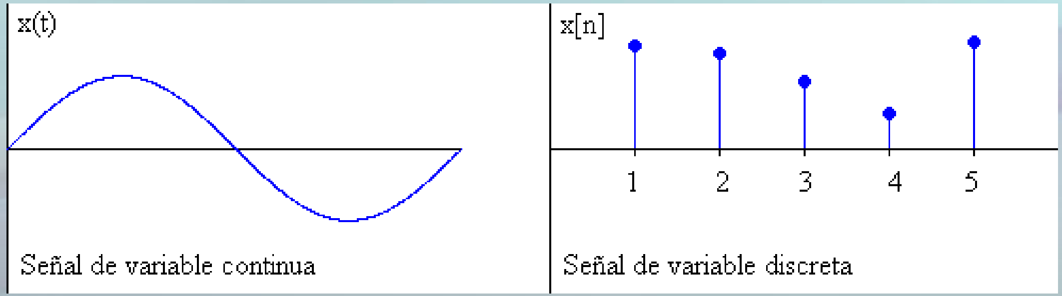
- Modelo Estocástico aquellos basados en la estadística y probabilidades (donde se incorpora las incertidumbres que por lo general acompañan nuestras observaciones de eventos reales).
- En procesos estocásticos no estamos frente a un simple curso de acontecimientos en el tiempo, o sea que hay un grado de **indeterminación en los posibles** cursos o secuencias de pasos que tome el proceso y este escenario múltiple puede ser descrito por distribuciones de probabilidad. En un proceso estocástico aun cuando tenemos las mismas condiciones iniciales en el comienzo hay diferente cursos de acontecimiento que el proceso puede tomar y por ende se puede arribar a diferentes estados finales partiendo de unas mismas condiciones iniciales.

Tipos de modelos matemáticos- Determinístico

- Modelo Determinístico corresponde a aquel modelo cuantitativo que no contiene consideraciones probabilísticas.
- Los procesos determinísticos, son procesos en los que conociendo las condiciones iniciales siempre siguen el mismo curso y producen el mismo resultado final, o sea no hay elementos aleatorios, podemos predecir en el tiempo todos los posibles estados y el estado final siempre será el mismo dado unas mismas condiciones iniciales.

Variables aleatorias

- En los modelos estocásticos se cuentan con dos tipos de variables:
  - DISCRETAS – Puede tomar un valor contable o entero positivo
    EJEMPLO- Número de defectos, demanda de un producto
  - CONTINUAS- Puede tomar incontables número de valores
    EJEMPLO – Dimensiones, tiempo transcurrido



Variables aleatorias

Función de probabilidad de una v.a. discreta: Es la función que asocia a cada valor x de la v.a. X su probabilidad p.

Los valores que toma una v.a. discreta X y sus correspondientes probabilidades suelen disponerse en una tabla con dos filas o dos columnas llamada tabla de distribución de probabilidad:

X	x_1	x_2	...	x_n
$P(X=x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

Toda función de probabilidad se verifica que $p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_n = 1$

Función de distribución de una v.a. discreta: Sea X una v.a. cuyos valores suponemos ordenados de menor a mayor. Se llama función de distribución de la variable X a la función que asocia a cada valor de la v.a. la probabilidad acumulada hasta ese valor, es decir, $F(x) = P(X \leq x)$

Distribución de Probabilidad-Discreta

- El conjunto de pares ordenados (x,f(x)) se llama función de probabilidad o distribución de probabilidad de la v.a.d. X.
- El conjunto de pares ordenados (x,f(x)) es una función de probabilidad, función de masa de probabilidad o distribución de probabilidad de la v.a.d. X, si para cada resultado posible x,

1. $f(x) \geq 0,$
2. $\sum f(x) = 1,$
3. $P(X = x) = f(x).$

Distribución de Probabilidad-Discreta

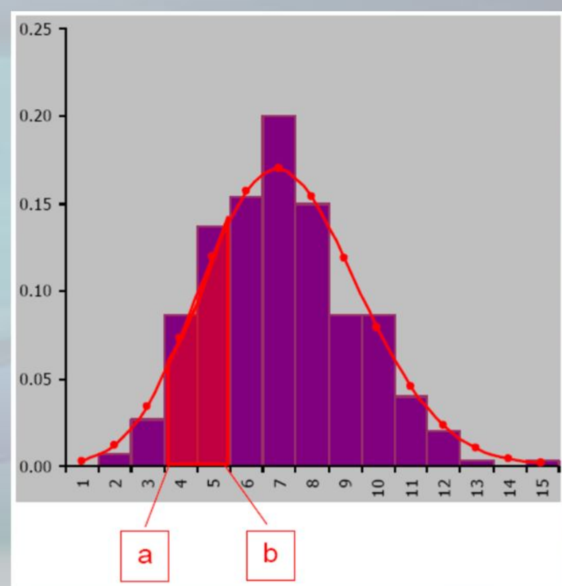
- *La **distribución acumulada** F(x) de una v.a.d. X con distribución de probabilidad f(x) es*

$$F(x) = P(x \leq x) = \sum_{t \leq x} f(t), \quad -\infty < x < \infty,$$

Distribución de Probabilidad - Continua

- Trataremos el cálculo de probabilidades para varios intervalos de v.a.c. como $P(a<X<b)$, $P(W>c)$, etc

$$P(a < X \leq b) = P(a < X < b) + P(X = b) = P(a < X < b)$$



Distribución de Probabilidad - Continua

- En la Figura anterior, la probabilidad de que X tome un valor entre a y b es igual al área sombreada bajo la función de densidad entre las ordenadas en x=a y x=b, y del cálculo integral es dada por

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$$

- *La función f(x) es una **función de densidad de probabilidad** para la v.a.c. X, definida en el conjunto de números reales, si*

1. $f(x) \geq 0, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$
3. $P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx.$

Esperanza matemática

- *Sea X una v.a. con distribución de probabilidad f(x). La* ***media*** *o* ***valor esperado*** *de X es*

$$\mu = E(X) = \sum_x x f(x)$$

- *si X es discreta, y*

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

- *si X es continua.*

Varianza de una variable aleatoria-Discreta

<u>Media, varianza y desviación típica de una variable aleatoria discreta.</u>

Se llama media o esperanza de una v.a. discreta X, que toma los valores x_1, x_2, ...con probabilidades p_1, p_2,... al valor de la siguiente expresión:

$$\mu = \sum_i x_i P(X = x_i) = \sum_i x_i p_i$$

La varianza viene dada por la siguiente fórmula:

$$\sigma^2 = \sum_i (x_i - \mu)^2 p_i$$

que puede calcularse mediante:

$$\sigma^2 = \sum_i x_i^2 p_i - \mu^2$$

Varianza de una variable aleatoria-Continua

- *Sea X una v.a. con distribución de probabilidad f(x) y media μ.* ***La varianza de X*** *es*

$$\sigma^2 = E((X-\mu)^2) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx$$

- *Si X es continua. La raíz cuadrada positiva de la varianza, σ, se llama* ***desviación estándar de X****.*
- ***•Corolario****. La varianza de una v.a. X es*

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2$$

Distribución Normal

- Distribución normal de parámetros μ y σ(N(μ; σ))

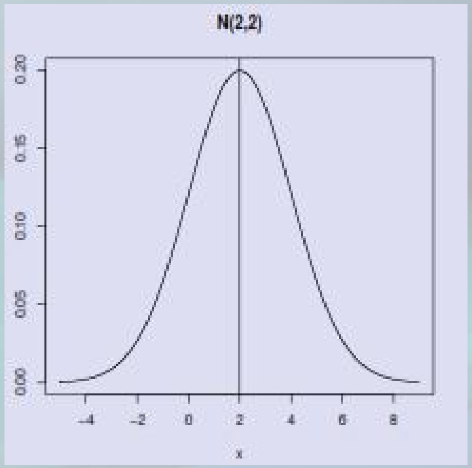
Es la distribución de probabilidad que viene determinada por la siguiente función de densidad, definida en toda la recta real:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \quad , \quad -\infty < x < \infty$$

Intuitivamente, es la distribución de probabilidad que se asume para una variable cuyos posibles valores se disponen de forma simétrica en torno a su media de modo que los valores próximos a dicha media tendrán mayor probabilidad de ser alcanzados. Conforme más alejados estén de la media, los valores tienen menor probabilidad de ser alcanzados.

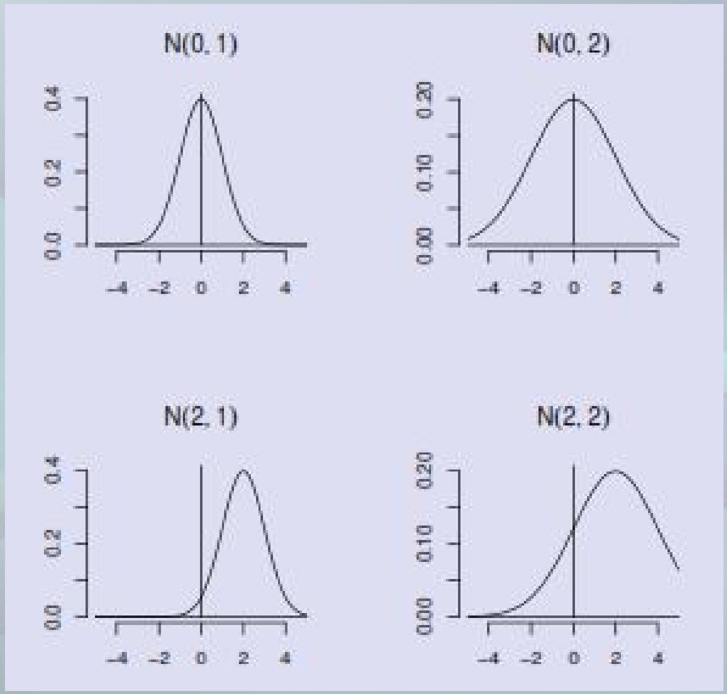
Distribución Normal

- La gráfica de la función de densidad de la distribución normal es la denominada campana de Gauss y se representa del siguiente modo:



Distribución Normal

- En el siguiente gráfico se ve la variación que se produce en la gráfica de la normal cuando cambiamos su media y su desviación típica:



Distribución Normal

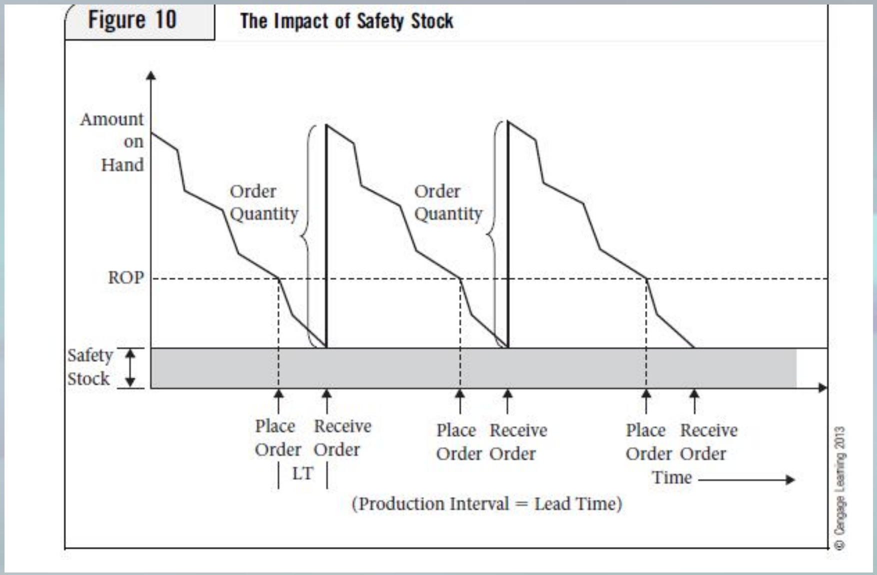
- La distribución N(μ; σ) se puede relacionar con la distribución N(0; 1), mediante el siguiente proceso al que se denomina tipificación o estandarización:

$$\mathrm{X} \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma) \;\rightarrow\; \mathrm{Z} = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

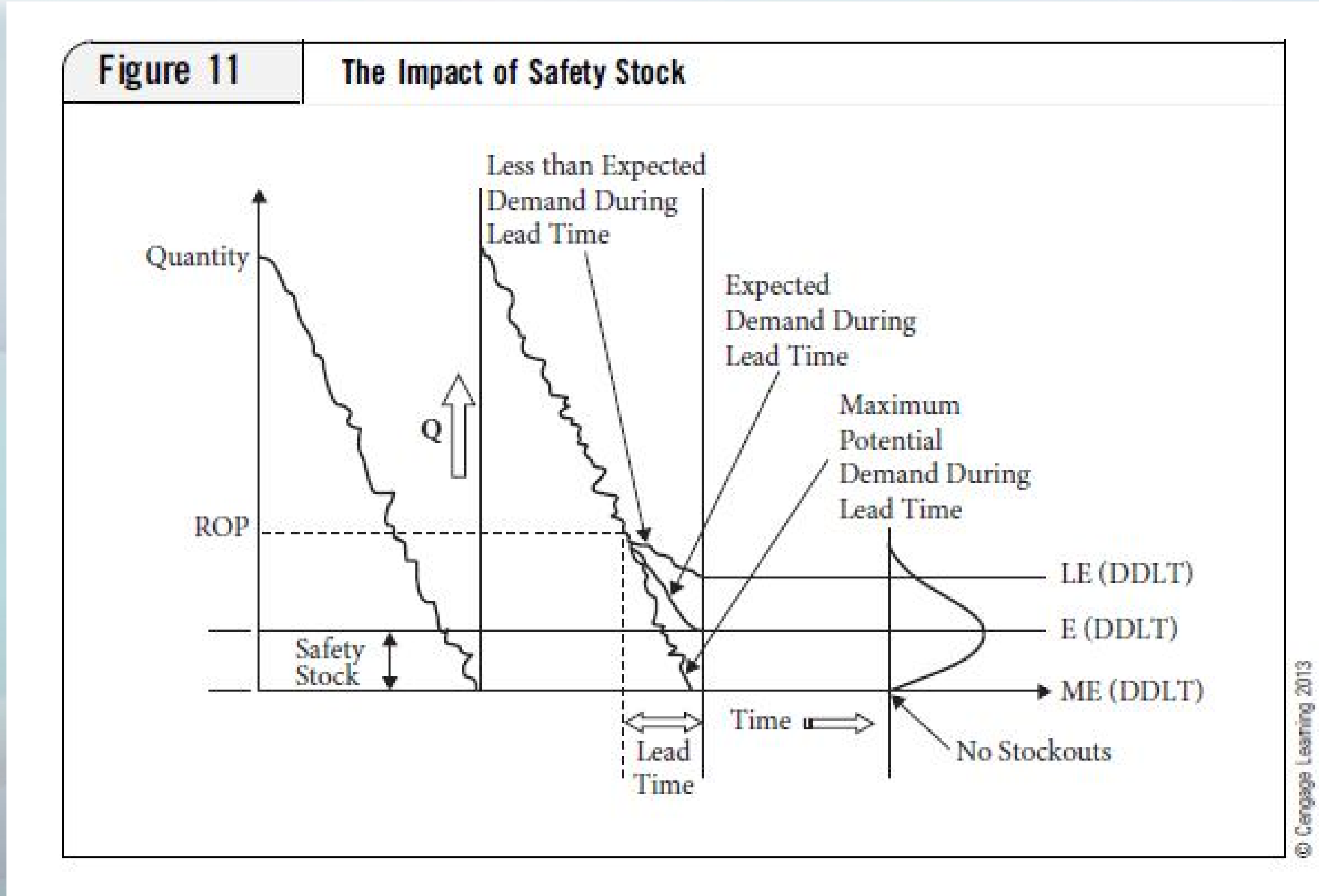
- A la distribución N(0; 1) se le denomina Normal Estándar.

Inventario de Seguridad

- Se lo utiliza para evitar roturas de inventarios debido a variabilidad e incertidumbre en:
  - TIEMPOS DE ENTREGA (LEAD TIME)
  - DEMANDA



Inventario de seguridad



Inventario de seguridad

$$ROP = E(DDLT) + SS$$

$donde:$

$ROP = \text{Punto de reorden}$

$E(DDLT) = \text{Esperanza de la demanda en } LT$

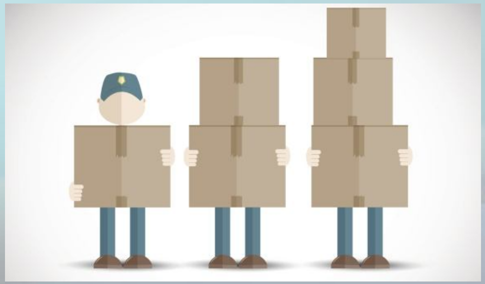
$SS = \text{Stock de seguridad}$

$$T = D(R + L) + SS$$

$donde:$

$T = \text{Nivel máximo o nivel objetivo}$

$R = \text{Tiempo de revisión}$



$$SS = Z \cdot \sqrt{LT} \times \sigma_d$$

$donde:$

$LT = \text{Tiempo de entrega de pedido}$

$Z = \text{Número de desviaciones estándar de la media}$

$\sigma_d = \text{Desviación estándar de la demanda, para un periodo}$

Nivel de servicio

- Es el porcentaje de demanda del comprador que se satisface con material proveniente del inventario, así un nivel de 100% representa la satisfacción de todos los requerimientos de comprador con material existente en “bodega”.
- El porcentaje de inexistencia es igual a 100% - el nivel de servicio

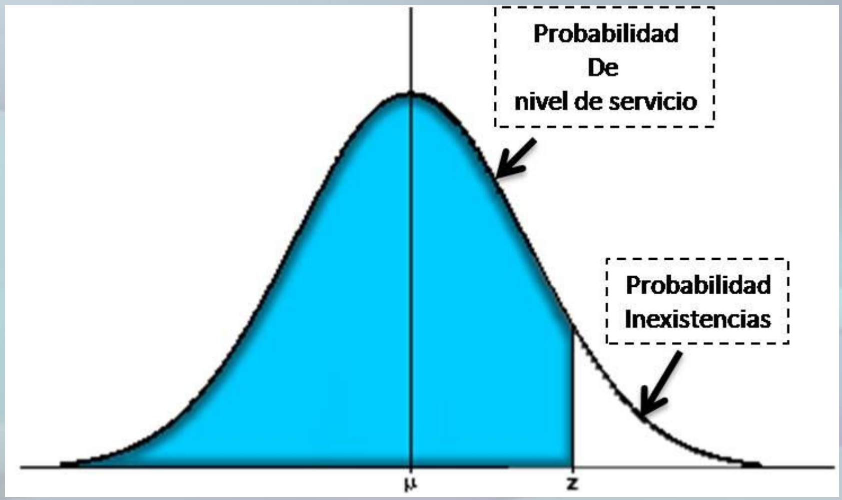
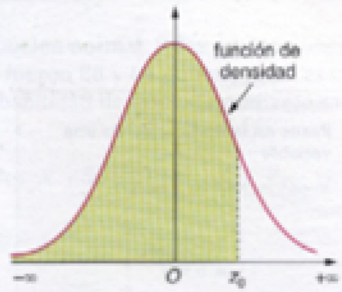


Tabla Normal

TABLA DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL $N(0, 1)$

$$P(Z \leq z_0) = \left\{ \begin{array}{c} \text{área del recinto} \\ \text{coloreado} \end{array} \right\}$$

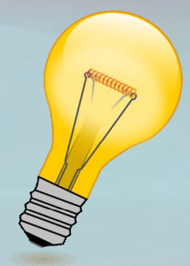


z_0	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

Ejemplo I

La empresa de focos NIA desea saber cuando debe ordenar si la demanda es variable, con una media de 154 unidades por semana y una desviación estándar de 25 unds. cada unidad tiene un precio de $6, un costo de mantener en inventario del 20% y el costo de pedir es $12. En todos los pedidos realizados, solo se permite fallar una vez al año para este producto El tiempo de entrega es de 1 semana

DATOS		
Demanda	154	u/semana
Desv. Std	25	u/semana
Precio	6	$/u
Cm	0,2	
Ce	12	$/pedido



CALCULOS		
EOQ	400,19995	unidades
Num pedidos	20,0099975	pedidos
Nivel servicio	0,95002498	%
Z	1,64509589	
LT	1	
ROP	195,127397	Unidades

Ejemplo II

- Una ferretería ordena tornillos una vez cada 2 semanas (10 días de trabajo). Con un tiempo de entrega de 2 días. Se ha definido que la demanda promedio para los tonillos de 1⁄2-inch es de 150 u/semana. La política es tener 3 días de consumo de estos tornillos a mano. Se colocará una orden esta semana, actualmente el inventario es de 130 unidades.

DATOS			
TIEMPO ENTRE PEDIDOS (R)	10	días..\	
LT	2	días	
D	150	u/semana	
D(diaria)	30	u/dia	
I (Inventario)	130	u	
	DDLT	SS	
ROP=DDLT+SS	60	90	
T=D(R+L)+SS	450	Nivel máximo u objetivo	
PEDIDO ESTA VEZ	320		

Ejercicios\Ejercicios Sistemas Inv Estocásticos.xlsx

Ejemplo III

La compañía Wheelie que distribuye llantas tiene una demanda normalmente distribuida con una media de 500 unidades por semana y una desviación estándar de 60 unidades por semana. El tiempo de entrega de sus proveedores es de 5 semanas. Una llanta 225/75 R15

Tiene un costo de 100 $us y tiene un costo de mantenimiento anual de 30% del costo unitario. El costo realizar un pedido es de 50 $us. Calculo la cantidad a ordenar y el punto de reorden para un nivel de servicio del 95%

D (semana)	500	u/semana
Desv Std	60	u/semana
LT	5	semanas
P	100	$
Cm	0,3	
Ce	50	$/pedido
Nivel Servicio	0,95	
Q	?	
ROP		

Tiempo de reorden y demanda variable

$$ROP = E(DDLT) \times \mathrm{E(LT)} + SS$$

$$donde:$$

$$ROP = Punto\ de\ reorden$$

$$E(DDLT) = Esperanza\ de\ la\ demanda\ en\ LT$$

$$E(LT) = Esperanza\ del\ tiempo\ de\ entrega$$

$$SS = Stock\ de\ seguridad$$

Tiempo de reorden y demanda variable

$$SS = Z \cdot \sigma_{dLT}$$

$$\sigma_{dLT} = \sqrt{\bar{d}^2 \cdot \sigma_d^{\,2} + \bar{L} \cdot \sigma_{LT}^{\,2}}$$

$donde:$

$LT = Tiempo\ de\ entrega\ de\ pedido$

$Z = Número\ de\ desviaciones\ estándar\ de\ la\ media$

$\sigma_{LT} = Desviación\ del\ tiempo\ de\ entrega$

$\sigma_d = Desviación\ estándar\ de\ la\ demanda,\ para\ un\ periodo$

$\bar{d} = Demanda\ promedio\ (semanal\ o\ mensual)$

$\bar{L} = Tiempo\ de\ entrega\ promedio$

Ejemplo

- La oficina de suministro nacional estima que la demanda promedio de bolígrafos por semana es de 12000 unidades. Con una desviación estándar de 3000 bolígrafos. La política actual de compras ordena 156000 unidades. El promedio del tiempo de pedido son 5 semanas con una desviacion de 2 semanas. Si la administración requiere un 95% de nivel de servicio. Cuál será el punto de reorden?

$$\sigma_{dLT} = \sqrt{\bar{d}^2 \cdot \sigma_{LT}{}^2 + \bar{L} \cdot \sigma_d{}^2}$$

$$\sigma_{dLT} = \sqrt{12000^2 \times 2^2 + 5 \times 3000^2 +} = 24919.87$$

$$SS = z \cdot \sigma_{dLT} = 1.65 \times 24919.87 = 40989.54$$

$$ROP = \overline{dL} + SS = 12000 \times 5 + 40989.54 = 100989.5\, unids$$

Inventario de revisión periódica

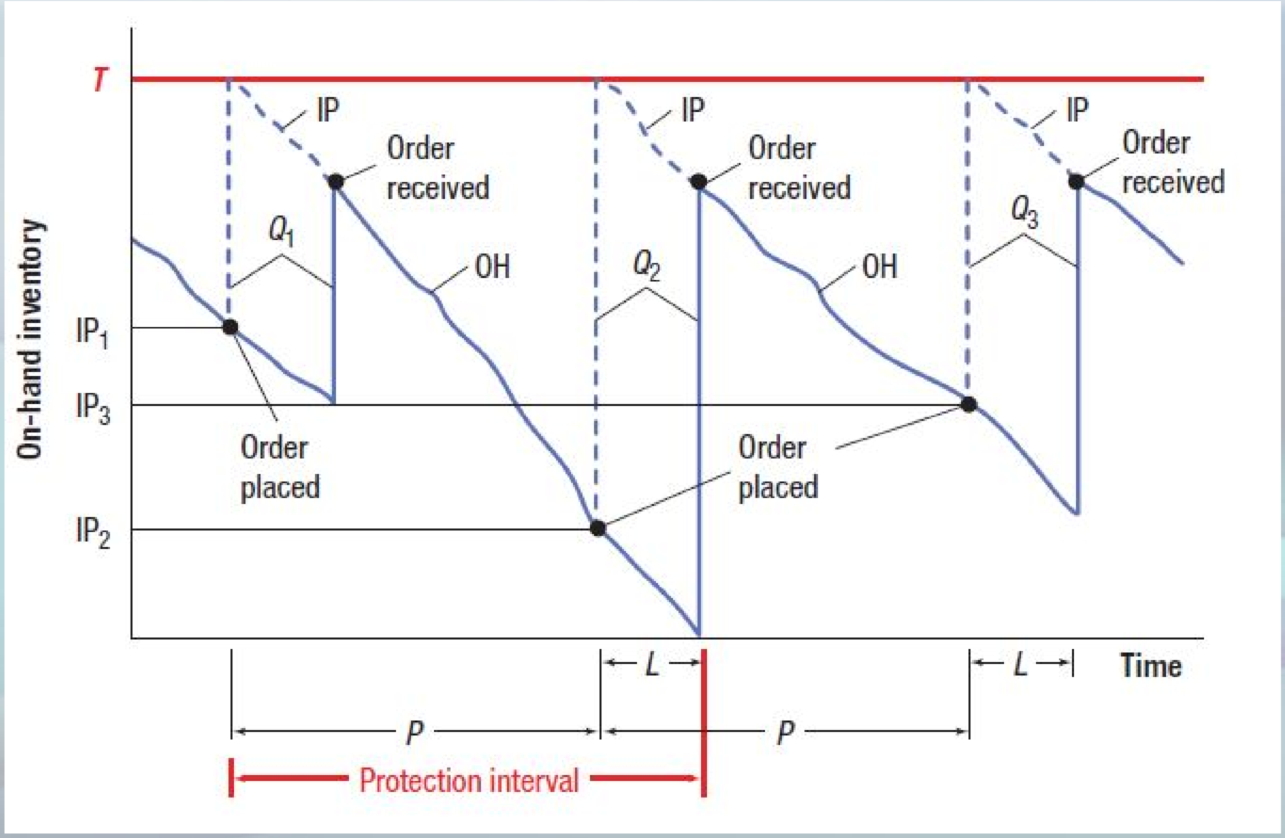
A veces es difícil o casi imposible adoptar un Sistema Continuo de Revisión, porque:

- Resulta demasiado caro para comprar un sistema computarizado.
- Poco práctico para ordenar artículos diferentes desde el mismo vendedor en forma separada.

La Revisión periódica para sistemas de inventario puede ser más apropiada para estas situaciones.

- Bajo este sistema la posición de inventario para cada artículo se observa periódicamente.
- Las órdenes de artículos diferentes puedan ser coordinadas mejor.

Inventario de revisión periódica



Revisión Periódica

$$P = \frac{EOQ}{D} \times 52 [=] semanas$$

$$donde:$$

$$P = Periodo\ de\ revisión$$

$$EOQ = Cantidad\ Económica\ de\ Pedido$$

$$D = Demanda\ anual$$

Revisión Periódica

$$T = \bar{d} \times (P + L) + SS$$

$$Donde:$$

$$T = Nivel\ de\ inventario\ Objetivo\ (Target)$$

$$\bar{d} = Demanda\ promedio\ en\ un\ periodo\ de\ tiempo$$

$$SS = Stock\ de\ Seguridad$$

$$L = Tiempo\ de\ entrega\ (Lead\ Time)$$

$$SS = z\sigma_{P+L}$$

$$\sigma_{P+L} = \sigma_d \sqrt{P + L}$$

Ejemplo

- Los inventarios de una tienda de barrio se han convertido en un problema. El volumen de ventas de inventario bajo reduce, márgenes de beneficio y causa problemas de flujo de caja.
  Una de los SKUs más importante es helado artesanal. Las ventas son 18 Kgs por semana, y el proveedor cobra 60 Bs. por unidad. El coste de hacer un pedido al proveedor es 45 Bs. El coste de propiedad anual es el 25 por ciento del valor del producto, esta tienda trabaja 52 semanas por año. La desviación estándar de la demanda de 5 Kgr por semana. El tiempo de entrega es de 2 semanas. Calcular el tiempo de revisión y el nivel objetivo T, para el sistema de inventario en caso de optar por un sistema de revisión periódica

$$EOQ = \sqrt{\frac{2 \cdot D \cdot C_e}{h \cdot C_p}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 936 \cdot 45}{0.25 \cdot 60}} = 74.93 \approx 75\,Kgr$$

$$P = \frac{EOQ}{D} \times 52 = \frac{75}{936} \times 52 = 4.2 \approx 4.0\,semanas$$

Ejemplo

$$\sigma_{P+L} = \sigma_d \sqrt{P+L} = 5 \cdot \sqrt{6} = 12.25\, kgr$$

$$SS = z_{90\%} \cdot \sigma_{P+L} = 1.28 \times 12.25 = 15.68 \approx 16\, Kgr$$

$$T = 18 \times (4+2) + 16 = 124\, Kgrs.$$