

Ejemplo

- Reciclamos SRL. Acopia y compacta latas de aluminio y botellas de vidrio. Los conductores de sus camiones esperan 15 minutos antes de vaciar su carga para el reciclaje. El costo de cada conductor esta valuado en 60 \$/hora. Se esta planificando comprar una compactadora de material automática que trabajará a una tasa de 12 camiones/hora (5 minutos / camión). Los camiones llegan de acuerdo a una distribución de poisson a una tasa promedio de 8 camiones/hora. Si la nueva compactadora es puesta en uso, el costo será amortizado a una tasa de 3 \$/ camión. Es conveniente comprar la nueva máquina?

Ejemplo - Solución

- Condiciones actuales:

$$C_{Conductor} = 60 \text{ us / hora} \times 0.25 \text{ hora} = 15\$ / \text{camion}$$

Ejemplo - Solución

- Condiciones con la máquina nueva

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{8 \text{ camiones / hora}}{12 \text{ camiones / hora}} = 0.667$$

$$Lq = \frac{(0.667)^2}{2 \cdot 0.3333} = 0.667 \text{ camiones}$$

$$L = Lq + \rho = 0.6667 + 0.6667 = 1.3334$$

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{1.333}{8} = 0.16667$$

$$Wq = 0.08333 \text{ hora}$$

Ejemplo - Solución

- Costos con la máquina nueva

$$CT = C_{serv} + C_{espera}$$

$$CT = 3\$ / camion + 60\$ / hora \cdot 0.16667 hora / camion$$

$$CT = 3\$ / camion + 10\$ / camion$$

$$CT = 13\$ / camion$$

Ejemplo II

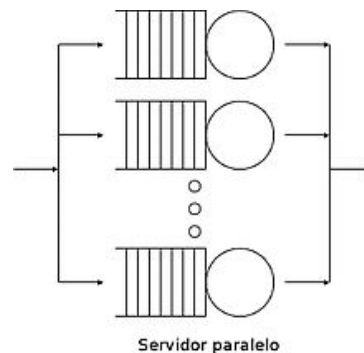
- La fotocopidora de la Facultad, tiene una tasa de servicio aproximadamente poisson, con una tasa media de servicio de 10 trabajos por hora. La solicitud de trabajos son aleatorias durante la jornada laboral del operario de la máquina, no obstante, llegan a una tasa de 5 por hora. Dado que algunos procesos se retardan dado que no siempre es oportuna la entrega de los documentos, se ha pensado en incrementar el número de fotocopadoras. Si el tiempo del operario vale \$35 la hora, determine:
 - *Utilización del equipo.*
 - *Porcentaje de tiempo que un documento tiene que esperar.*
 - *Tiempo promedio del sistema*
 - *Número esperado de personas en el sistema*
 - *Costo promedio ocasionado por esperar y hacer funcionar la máquina.*
 - *Qué propone como Gerente?*

Ejemplo II- Solución

04-01-2017	Performance Measure	Result
1	System: M/M/1	From Formula
2	Customer arrival rate (λ) per hour =	5,0000
3	Service rate per server (μ) per hour =	10,0000
4	Overall system effective arrival rate per hour =	5,0000
5	Overall system effective service rate per hour =	5,0000
6	Overall system utilization =	50,0000 %
7	Average number of customers in the system (L) =	1,0000
8	Average number of customers in the queue (Lq) =	0,5000
9	Average number of customers in the queue for a busy system (Lb) =	1,0000
10	Average time customer spends in the system (W) =	0,2000 hours
11	Average time customer spends in the queue (Wq) =	0,1000 hours
12	Average time customer spends in the queue for a busy system (Wb) =	0,2000 hours
13	The probability that all servers are idle (Po) =	50,0000 %
14	The probability an arriving customer waits (Pw) or system is busy (Pb) =	50,0000 %
15	Average number of customers being balked per hour =	0
16	Total cost of busy server per hour =	\$17,5000
17	Total cost of idle server per hour =	\$17,5000
18	Total cost of customer waiting per hour =	\$0
19	Total cost of customer being served per hour =	\$0
20	Total cost of customer being balked per hour =	\$0
21	Total queue space cost per hour =	\$0
22	Total system cost per hour =	\$35,0000

Modelo: M/M/s

- Características
 - Clientes llegan de acuerdo a una distribución Poisson con una esperanza λ .
 - El tiempo de atención se distribuye exponencialmente.
 - Existen k servidores, cada uno atiende a una tasa de μ clientes.
 - Existe una población infinita y la posibilidad de infinitas filas.



Resumen de casos

	Modelo con un solo servidor	Modelo con múltiples servidores	Modelo con fuente finita
Utilización promedio del sistema	$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$	$\rho = \frac{\lambda}{s\mu}$	$\rho = 1 - P_0$
Probabilidad de que haya n clientes en el sistema	$P_n = (1 - \rho)\rho^n$	$P_n = \begin{cases} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} P_0 & 0 < n < s \\ \frac{(\lambda/\mu)^n}{s! s^{n-s}} P_0 & n \geq s \end{cases}$	
Probabilidad de que haya cero clientes en el sistema	$P_0 = 1 - \rho$	$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \left(\frac{1}{1-\rho} \right) \right]^{-1}$	$P_0 = \left[\sum_{n=0}^N \frac{N!}{(N-n)!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \right]^{-1}$
Número promedio de clientes en el sistema de servicio	$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$	$L = \lambda W$	$L = N - \frac{\mu}{\lambda} (1 - P_0)$
Número promedio de clientes en la fila de espera	$L_q = \rho L$	$L_q = \frac{P_0 (\lambda/\mu)^s \rho}{s! (1-\rho)^2}$	$L_q = N - \frac{\lambda + \mu}{\lambda} (1 - P_0)$
Tiempo promedio pasado en el sistema, incluido el servicio	$W = \frac{1}{\mu - \lambda}$	$W = W_q + \frac{1}{\mu}$	$W = L[(N - L)\lambda]^{-1}$
Tiempo promedio de espera en la fila	$W_q = \rho W$	$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$	$W_q = L_q[(N - L)\lambda]^{-1}$

Ejemplo II

- El gerente de un banco debe determinar cuantos cajeros deberían trabajar los viernes. Para cada minuto un cliente está de pie en la línea, el gerente cree que un coste de retraso de 5¢ es incurrido. Un promedio de 2 clientes por minuto llega al banco. Sobre el promedio, esto toma a un cajero 2 minutos para completar la transacción de un cliente. Esta operación le cuesta al banco 9 dólares por hora por el pago de un cajero. La llegada y el servicio son exponenciales. ¿Para reducir al mínimo el costo de servicio y los gastos de retraso, cuántos cajeros debería el banco tener el funcionamiento los días viernes?

Ejemplo II- Solución

DATOS				
lambda	2 min/cliente			
mu	0,5 min/cliente			
ro	0,8			
s	5			
costo espera	5 cents/min			
costo cajero	9 \$us/hora	0,15	15 cents/min	
Pi(0)	0,012987013			
P(j>s)	0,554112554			
Lq	2,216450216			
Wq	1,108225108			
L	4,716450216			
W	2,358225108			
CT=	Costo espera+costo cajero			
Costo espera	11,08225			
Costo cajero	75			
Costo total	86,08225 centavos/min			

Ejemplo III

La clínica del ojo ofrece exámenes de la vista gratis cada miércoles por la tarde. Hay tres oftalmólogos de turno. Una prueba toma, por regla general, 20 minutos, y este tiempo se distribuye aproximadamente exponencial alrededor de este promedio. Los clientes llegan según un proceso de Poisson con una media de 6 pacientes/hora, y los pacientes son atendidos con una disciplina PEPS.

Los planificadores de hospital están interesados en saber:

- 1) el número promedio de gente esperando
- 2) la cantidad de tiempo promedio que un paciente pasa en la clínica;
- 3) el porcentaje promedio de tiempo ocioso de cada uno de los doctores.

Así deseamos calcular L_q , W , y el porcentaje el tiempo ocioso de un servidor.

.

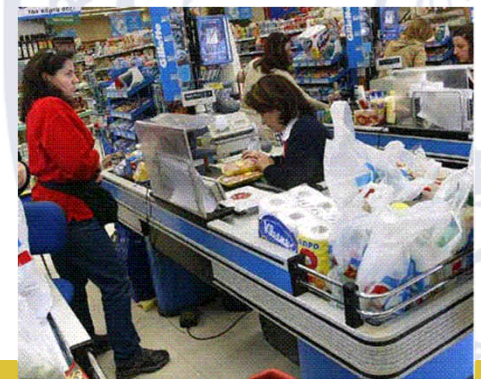
Ejemplo III- Solución

DATOS			
lambda	6	paciente/hora	
mu	3	paciente/hora	
ro	0,66666667		
s	3		
costo espera	0	cents/min	
costo cajero	0	\$us/hora	0
Pi(0)	0,111	6,666667 mins	
P(j>s)	0,444444444		
Lq	0,888888889	1 paciente	
Wq	0,148148148	8,888889 mins	
L	9,888888889		
W	0,481481481	28,88889 mins	
Pi(1)	0,222222222		
Pi(2)	0,222222222		
Prob al menos 1 este desocupado			0,556

Modelo: $M / G / 1 / \infty / \infty$

Supuestos

- Los clientes llegan de acuerdo a un proceso Poisson con esperanza λ .
- El tiempo de atención tiene una distribución general con esperanza μ .
- Existe un solo servidor.
- Se cuenta con una población infinita y la posibilidad de infinitas filas.



Modelo: $M / G / 1 / \infty / \infty$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} \quad L_q = \frac{\lambda^2 \sigma^2 + \rho^2}{2(1 - \rho)}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} \quad W = W_q + \frac{1}{\mu}$$

$$L = L_q + \rho$$

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

Ejemplo I (12,27)

Parte 1: Las barcazas llegan a la esclusa La Crosse en el río Mississippi a una tasa promedio de una cada dos horas. Si el tiempo entre llegadas, tiene una distribución exponencial,

- (a) ¿cuál es el valor de λ ?
- (b) ¿cuál es el tiempo medio interarribos?
- (c) ¿cuál es la tasa media de llegadas?

Suponga que el modelo básico es una aproximación razonable a su operación.

Parte 2: La nueva estimación de la media de tiempo interarribos para la temporada entrante es 60 minutos para barcazas, y en promedio toma 30 minutos pasar una barcaza por la esclusa. Encuentre:

- (a) La cantidad esperada en el sistema.
- (b) La cantidad estimada en la cola de espera.
- (c) El tiempo de espera estimado.
- (d) El tiempo medio en la cola de espera.
- (e) La probabilidad de que el sistema esté vacío.
- (f) El mayor tiempo promedio de servicio para el cual el tiempo de espera estimado sea menor que 45 minutos.

Considere de nuevo la esclusa La Crosse mencionada en la parte 1 y 2. Suponga que la media de tiempo interarribos es de 60 minutos y que en promedio toma 30 minutos mover la barcaza a través de la esclusa, pero que la desviación estándar de este tiempo de servicio es de tres minutos. Vuelva a responder los incisos (a) a (e) del problema 12-6. ¿Cómo cambiaron sus respuestas, y por qué?

Ejemplo I – Solución

Parte 2			
DATOS			
lambda	1 barcaza/hora		
mu	2 barcaza/hora		
ro	0,5		
s	1		
Pi(0)	0,500	30 mins	
Lq	0,5	1 barcaza	
Wq	0,5	30 mins	
L	1	barcaza	
W	1	60 mins	
W	45 mu		60 barcaza/m

Parte 3			
Sigma	0,05 hr		
lambda	1 barcaza/hora		
mu	2 barcaza/hora		
ro	0,5		
s	1		
Pi(0)	0,500	30 mins	
Lq	0,2525	1 barcaza	
Wq	0,2525	15,15 mins	
L	0,7525	barcaza	
W	0,7525	45,15 mins	

Ejemplo II

Un lavacarro puede atender un auto cada 5 min. y la tasa media de llegadas es de 9 autos/hora, $\sigma = 2$ min.

Obtenga las medidas de desempeño de acuerdo con el modelo M/G/1

Además la probabilidad de tener 0 clientes en el sistema y la probabilidad de que un cliente tenga que esperar por el servicio

Ejemplo II – Solución

$$L_s = L_q + \rho = 1.31 + .75 = 2.06 \text{ clientes}$$

$$L_q = \frac{\lambda^2 \sigma^2 + \rho^2}{2(1 - \rho)} = 1.31 \text{ clientes}$$

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu} = 0.228 \text{ hrs} = 13.7 \text{ min}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = 0.145 \text{ hrs} = 8.7 \text{ min}$$

$$P_0 = 1 - \rho = 0.25 \qquad P_w = \rho = 0.75$$

Modelo: M/M/1/m con población finita

- En este sistema el número de clientes potenciales es finito y relativamente pequeño.
- Como resultado, el número de clientes que se encuentran en el sistema corresponde a la tasa de llegada de clientes.
- Características
 - Un solo servidor
 - Tiempo de atención exponencial y proceso de llegada de Poisson.
 - El tamaño de la población es de m clientes (m finito).

Modelo: M/M/1/m con población finita

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^N \frac{N!}{(N-n)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}$$

$$W_q = \frac{L_q}{(N-L)\lambda}$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}$$

$$L_q = N - \frac{\lambda + \mu}{\lambda} (1 - P_0)$$

$$L = L_q + (1 - P_0)$$

$$P_w = 1 - P_0$$

$$P_n = \frac{N!}{(N-n)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 \quad \text{for } n = 0, 1, \dots, N$$

Ejemplo I

Kolkmeyer, una empresa de manufactura, usa un grupo de seis máquinas idénticas; cada máquina maneja un promedio de 20 horas entre interrupciones. Así, la tasa de llegada o de demanda del servicio de reparación para cada máquina es de $\lambda=1/20 = 0.05$ por hora. Con interrupciones que ocurren al azar, la distribución de probabilidad de Poisson es usada para describir el proceso de llegada e interrupción de una máquina. Una persona del departamento de mantenimiento proporciona el servicio de reparación de canal solo para las seis máquinas. Las veces de servicio exponencialmente distribuidas tienen una media de dos horas por máquina o una tarifa de servicio de $\mu=1/2=0.50$ máquinas por hora.

Modelo: M/M/1/m con población finita

Customers	6
Arrival Rate (λ)	0,05
Service Rate (μ)	0,5

Probability of zero customers in the system (P_0)	0,4845
Probability of fewer than ▼ 3 customers in the system (P_n)	#N/A
Average utilization of the server (ρ)	0,5155
Average number of customers in the system (L)	0,8451
Average number of customers in line (L_q)	0,3297
Average waiting/service time in the system (W)	3,2790
Average waiting time in line (W_q)	1,2790

Ejemplo II

Cinco ayudantes administrativos utilizan una copiadora de oficina. El tiempo promedio entre llegadas para cada ayudante es 40 minutos, que son equivalentes a una tarifa de llegada de $1/40=0.025$ llegadas por minuto. El tiempo medio que cada ayudante pasa en la copiadora es 5 minutos, que son equivalentes a una tasa de servicio de 0.20 por minuto. Use el modelo de M/M/1 con una población de llamada finita para determinar lo siguiente:

- La probabilidad que la copiadora este ociosa
- El número medio de ayudantes administrativos en la línea de espera
- El número medio de ayudantes administrativos en la copiadora
- El tiempo medio que un ayudante pasa esperando la copiadora
- El tiempo medio un ayudante pasa en la copiadora
- Durante un día de 8 horas, cuántos los minutos un ayudante gasta en la fotocopidora
- Debería el gerente estar pensando en comprar otra fotocopidora?

Ejemplo II - Solución

Customers	5
Arrival Rate (λ)	0,025
Service Rate (μ)	0,2
Probability of zero customers in the system (P_0)	0,4790
Probability of <input type="text" value="fewer than"/> customers in the system (P_n)	#N/A
Average utilization of the server (ρ)	0,5210
Average number of customers in the system (L)	0,8321
Average number of customers in line (L_q)	0,3111
Average waiting/service time in the system (W)	7,9854
Average waiting time in line (W_q)	2,9854

- F) 16 mins por asistente al día en la fotocopidora

Ejemplo II - Solución

04-02-2017	Performance Measure	Result
1	System: M/M/2//5	From Formula
2	Customer arrival rate (λ) per min =	0,0250
3	Service rate per server (μ) per min =	0,2000
4	Overall system effective arrival rate per min =	0,1107
5	Overall system effective service rate per min =	0,1107
6	Overall system utilization =	27,6635 %
7	Average number of customers in the system (L) =	0,5738
8	Average number of customers in the queue (Lq) =	0,0206
9	Average number of customers in the queue for a busy system (Lb) =	0,1969
10	Average time customer spends in the system (W) =	5,1858 mins
11	Average time customer spends in the queue (Wq) =	0,1858 mins
12	Average time customer spends in the queue for a busy system (Wb) =	1,7798 mins
13	The probability that all servers are idle (Po) =	55,1135 %
14	The probability an arriving customer waits (Pw) or system is busy (Pb) =	10,4406 %

Modelo: M/D/1

Esta línea de espera puede ocurrir en ambientes de producción y manufactura donde los tiempos de servicio controlados por máquinas son constantes. Modelo M/D/1, con D refiriéndose a los tiempos de servicio determinísticos. Con la condición que la desviación estándar del tiempo de servicio constante es $\sigma = 0$, solo cambia

Algunos sistemas tienen tiempos de servicio constantes en lugar de exponencialmente distribuidos.

Cuando los clientes son atendidos o equipos son procesados con un ciclo fijo como es el caso de una lavadora de carros automatizada o ciertos entretenimientos en los parques de diversiones, el asumir servicio constante es adecuado, es decir tenemos un proceso de servicio determinístico, y que en su mayoría de los casos, está dado por un sistema automatizado

Modelo: M/D/1

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$L_q = \frac{\rho^2}{2 \cdot (1 - \rho)}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

$$P_w = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$P_0 = 1 - \rho$$

$$L = L_q + \rho$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}$$

Ejemplo II

- Un lavacar puede atender un auto cada 5 min.
- La tasa media de llegadas es de 9 autos/hora.
- Obtenga las medidas de desempeño de acuerdo con el modelo M/D/1

$$L_s = \lambda W_s = 1.875 \text{ clientes}$$

$$L_q = \frac{\rho^2}{2(1-\rho)} = 1.125 \text{ clientes}$$

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu} = 0.21 \text{ hrs} = 12.5 \text{ min}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = 0.125 \text{ hrs} = 7.5 \text{ min}$$

Ejemplo III

- Los vehículos llegan a una cabina de peaje a una tasa media de 300 por hora. El tiempo de espera promedio en la cabina de peaje es de 10 segundos por vehículo. ¿Si tanto las llegadas como las salidas están exponencialmente distribuidas, cuál es el número promedio de vehículos en el sistema, la longitud de cola media, el retraso medio por vehículo, el tiempo promedio que un vehículo está en el sistema?
- Resuelva el modelo para un sistema de 2 servidores en paralelo, independientes y con fila compartida, luego contraste los resultados y defina cual es el sistema más eficiente
- Si el costo por hora de cada conductor es de 72\$ y el costo de añadir un nuevo puesto de peaje es de 10\$/hora, cuantos servidores serían los aconsejables para operar a un costo mínimo



Ejemplo III

$$\lambda = 300 \text{ autos} / \text{hora}$$

$$1/\mu = 10 \text{ seg} / \text{auto} = \frac{3600}{10} \Rightarrow \mu = 360 \text{ auto} / \text{hora}$$

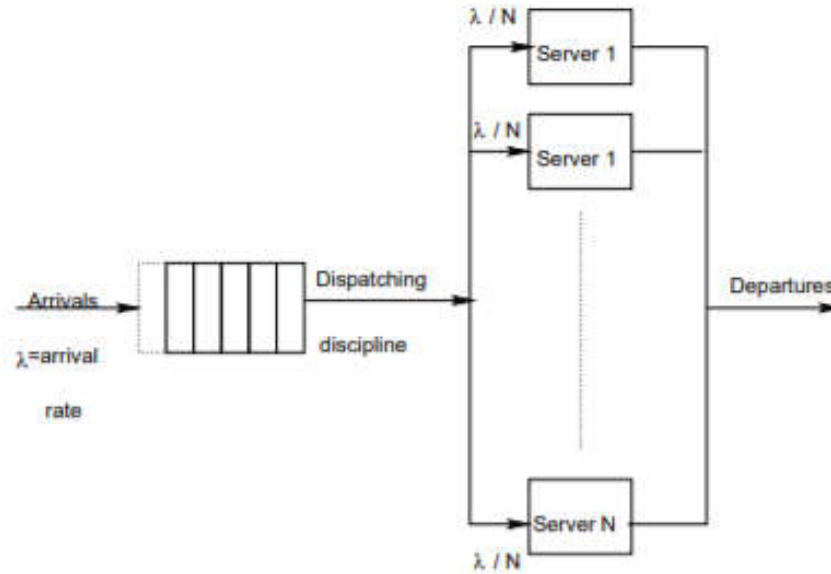
$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{300}{360} = 0.833$$

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{300}{360 - 300} = 5 \text{ autos} \quad W = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{360 - 300} = 0.01667 \text{ hr}$$

$$Lq = \rho L = 0.8333 * 5 = 4.1666 \text{ autos} \quad Wq = \rho W = 0.8333 * 0.016667 = 0.833 \text{ min}$$

Ejemplo III

- Resuelva el modelo para un sistema de 2 servidores en paralelo, independientes y con fila compartida



Ejemplo III

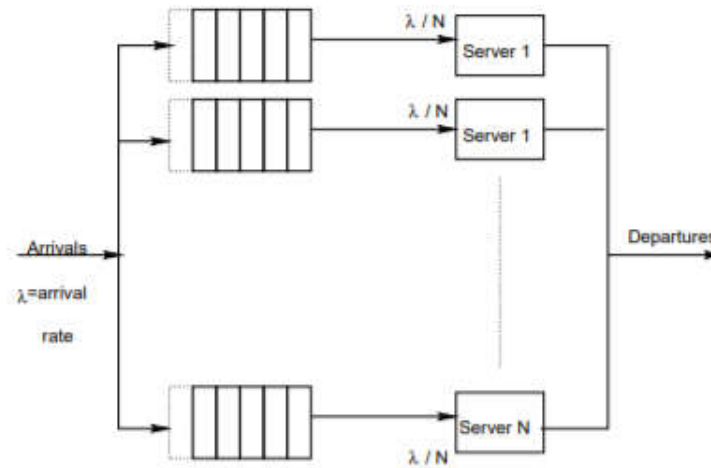
- Resuelva el modelo para un sistema de 2 servidores en paralelo, independientes y con fila compartida

Servers	2
Arrival Rate (λ)	300
Service Rate (μ)	360

Probability of zero customers in the system (P_0)	0.4118
Probability of <input type="text" value="exactly"/> <input type="button" value="▼"/> 1 customers in the system (P_n)	0.3431
Average utilization of the server (ρ)	0.4167
Average number of customers in the system (L)	1.0084
Average number of customers in line (L_q)	0.1751
Average waiting/service time in the system (W)	0.0034
Average waiting time in line (W_q)	0.0006

Ejemplo III

- Resuelva el modelo para un sistema de 2 servidores en paralelo, independientes y con filas independientes



Ejemplo III

- Resuelva el modelo para un sistema de 2 servidores en paralelo, independientes y con filas independientes

☐ Single-server model
 ☒ Multiple-server model
 ☐ Finite-source model

Servers
 Arrival Rate (λ)
 Service Rate (μ)

Probability of zero customers in the system (P_0)	0.6552
Probability of <input type="text" value="exactly"/> <input type="text" value="1"/> customers in the system (P_n)	0.2730
Average utilization of the server (ρ)	0.2083
Average number of customers in the system (L)	0.4356
Average number of customers in line (L_q)	0.0189
Average waiting/service time in the system (W)	0.0029
Average waiting time in line (W_q)	0.0001

Ejemplo III

- Análisis comparativo de cada modelo

	M/M/1	M/M/2	Multiple servidor (Independiente)
Tiempo desocupado (mins)	10	34.99	47.5
Vehículos en el sistema	5	1.0084	0.4356
Vehículos en la cola	4.1667	0.1751	0.0189
Tiempo de espera en el sistema (segs)	60.12	12.24	10.44
Tiempo de espera en la cola (segs)	50.04	2.16	0.36

Ejemplo III

- Análisis comparativo de cada modelo

	M/M/1	M/M/2	Multiple servidor (Independiente)
Tiempo desocupado (mins)	10	34.99	47.5
Vehículos en el sistema	5	1.0084	0.4356
Vehículos en la cola	4.1667	0.1751	0.0189
Costo espera(\$/hora)	360	12.6	1.36
Costo Operación (\$/hora)	10	20	20
Costo Total (\$/hora)	380	32.6	21.36

Proyecto de Simulación

