Ejemplo

- Recliclamos SRL. Acopia y compacta latas de aluminio y botellas de vidrio. Los conductores de sus camiones esperan 15 minutos antes de vaciar su carga para el reciclaje. El costo de cada conductor esta valuado en 60 $/hora. Se esta planificando comprar una compactadora de material automática que trabajará a una tasa de 12 camiones/hora (5 minutos / camión). Los camiones llegan de acuerdo a una distribución de poisson a una tasa promedio de 8 camiones/hora. Si la nueva compactadora es puesta en uso, el costo será amortizado a una tasa de 3 $/ camión. Es conveniente comprar la nueva máquina?

Ejemplo - Solución

- Condiciones actuales:

$$C_{Conductor} = 60\,us / hora \times 0.25\,hora = 15\$ / camion$$

Ejemplo - Solución

- Condiciones con la máquina nueva

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{8\,camiones\,/\,hora}{12\,camiones\,/\,hora} = 0.667$$

$$Lq = \frac{(0.667)^2}{2 \cdot 0.3333} = 0.667\,camiones$$

$$L = Lq + \rho = 0.6667 + 0.6667 = 1.3334$$

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{1.333}{8} = 0.16667$$

$$Wq = 0.08333\,hora$$

Ejemplo - Solución

- Costos con la máquina nueva

$$CT = C_{serv} + C_{espera}$$

$$CT = 3\$ / camion + 60\$ / hora \cdot 0.16667 hora / camion$$

$$CT = 3\$ / camion + 10\$ / camion$$

$$CT = 13\$ / camion$$

Ejemplo II

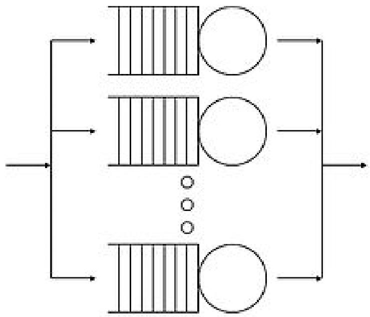
- La fotocopiadora de la Facultad, tiene una tasa de servicio aproximadamente poisson, con una tasa media de servicio de 10 trabajos por hora. La solicitud de trabajos son aleatorias durante la jornada laboral del operario de la máquina, no obstante, llegan a una tasa de 5 por hora. Dado que algunos procesos se retardan dado que no siempre es oportuna la entrega de los documentos, se ha pensado en incrementar el número de fotocopiadoras. Si el tiempo del operario vale $35 la hora, determine:
  - *Utilización del equipo.*
  - *Porcentaje de tiempo que un documento tiene que esperar.*
  - *Tiempo promedio del sistema*
  - *Número esperado de personas en el sistema*
  - *Costo promedio ocasionado por esperar y hacer funcionar la máquina.*
  - *Qué propone como Gerente?*

Ejemplo II- Solución

04-01-2017	Performance Measure	Result
1	System: M/M/1	From Formula
2	Customer arrival rate (lambda) per hour =	5,0000
3	Service rate per server (mu) per hour =	10,0000
4	Overall system effective arrival rate per hour =	5,0000
5	Overall system effective service rate per hour =	5,0000
6	Overall system utilization =	50,0000 %
7	Average number of customers in the system (L) =	1,0000
8	Average number of customers in the queue (Lq) =	0,5000
9	Average number of customers in the queue for a busy system (Lb) =	1,0000
10	Average time customer spends in the system (W) =	0,2000 hours
11	Average time customer spends in the queue (Wq) =	0,1000 hours
12	Average time customer spends in the queue for a busy system (Wb) =	0,2000 hours
13	The probability that all servers are idle (Po) =	50,0000 %
14	The probability an arriving customer waits (Pw) or system is busy (Pb) =	50,0000 %
15	Average number of customers being balked per hour =	0
16	Total cost of busy server per hour =	$17,5000
17	Total cost of idle server per hour =	$17,5000
18	Total cost of customer waiting per hour =	$0
19	Total cost of customer being served per hour =	$0
20	Total cost of customer being balked per hour =	$0
21	Total queue space cost per hour =	$0
22	Total system cost per hour =	$35,0000

Modelo: M/M/s

- Características
  - Clientes llegan de acuerdo a una distribución Poisson con una esperanza l.
  - El tiempo de atención se distribuye exponencialmente.
  - Existen k servidores, cada uno atiende a una tasa de m clientes.
  - Existe una población infinita y la posibilidad de infinitas filas.



Servidor paralelo

Resumen de casos

	Modelo con un solo servidor	Modelo con múltiples servidores	Modelo con fuente finita
Utilización promedio del sistema	$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$	$\rho = \frac{\lambda}{s\mu}$	$\rho = 1 - P_0$
Probabilidad de que haya n clientes en el sistema	$P_n = (1-\rho)\rho^n$	$P_n = \begin{cases} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}P_0 & 0<n<s \\ \frac{(\lambda/\mu)^n}{s!\,s^{n-s}}P_0 & n\geq s \end{cases}$	
Probabilidad de que haya cero clientes en el sistema	$P_0 = 1-\rho$	$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{s-1}\frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}+\frac{(\lambda/\mu)^s}{s!}\left(\frac{1}{1-\rho}\right)\right]^{-1}$	$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{N}\frac{N!}{(N-n)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right]^{-1}$
Número promedio de clientes en el sistema de servicio	$L = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$	$L = \lambda W$	$L = N - \frac{\mu}{\lambda}(1-P_0)$
Número promedio de clientes en la fila de espera	$L_q = \rho L$	$L_q = \frac{P_0(\lambda/\mu)^s\rho}{s!(1-\rho)^2}$	$L_q = N - \frac{\lambda+\mu}{\lambda}(1-P_0)$
Tiempo promedio pasado en el sistema, incluido el servicio	$W = \frac{1}{\mu-\lambda}$	$W = W_q + \frac{1}{\mu}$	$W = L[(N-L)\lambda]^{-1}$
Tiempo promedio de espera en la fila	$W_q = \rho W$	$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$	$W_q = L_q[(N-L)\lambda]^{-1}$

Ejemplo II

- El gerente de un banco debe determinar cuantos cajeros deberían trabajar los viernes. Para cada minuto un cliente está de pie en la línea, el gerente cree que un coste de retraso de 5¢ es incurrido. Un promedio de 2 clientes por minuto llega al banco. Sobre el promedio, esto toma a un cajero 2 minutos para completar la transacción de un cliente. Esta operación le cuesta al banco 9 dólares por hora por el pago de un cajero. La llegada y el servicio son exponenciales. ¿Para reducir al mínimo el costo de servicio y los gastos de retraso, cuántos cajeros debería el banco tener el funcionamiento los días viernes?

Modelo: $M\ / G / 1 / \infty / \infty$

Supuestos

- Los clientes llegan de acuerdo a un proceso Poisson con esperanza λ.
- El tiempo de atención tiene una distribución general con esperanza μ.
- Existe un solo servidor.
- Se cuenta con una población infinita y la posibilidad de infinitas filas.

Modelo: $M / G / 1 / \infty / \infty$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}.$$

$$L_q = \frac{\lambda^2\sigma^2 + \rho^2}{2(1-\rho)}$$

$$L = L_q + \rho$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}$$

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

Ejemplo I (12,27)

Parte 1: Las barcazas llegan a la esclusa La Crosse en el río Mississippi a una tasa promedio de una cada dos horas. Si el tiempo entre llegadas, tiene una distribución exponencial,

(a) ¿cuál es el valor de λ?

(b) ¿cuál es el tiempo medio interarribos?

(c) ¿cuál es la tasa media de llegadas?

Suponga que el modelo básico es una aproximación razonable a su operación.

Parte 2: La nueva estimación de la media de tiempo interarribos para la temporada entrante es 60 minutos para barcazas, y en promedio toma 30 minutos pasar una barcaza por la esclusa. Encuentre:

(a) La cantidad esperada en el sistema.

(b) La cantidad estimada en la cola de espera.

(c) El tiempo de espera estimado.

(d) El tiempo medio en la cola de espera.

(e) La probabilidad de que el sistema esté vacío.

(f) El mayor tiempo promedio de servicio para el cual el tiempo de espera estimado sea menor que 45 minutos.

Considere de nuevo la esclusa La Crosse mencionada en la parte 1 y 2. Suponga que la media de tiempo interarribos es de 60 minutos y que en promedio toma 30 minutos mover la barcaza a través de la esclusa, pero que la desviación estándar de este tiempo de servicio es de tres minutos. Vuelva a responder los incisos (a) a (e) del problema 12-6. ¿Cómo cambiaron sus respuestas, y por qué?

Ejemplo I – Solución

Parte 2				
DATOS				
lambda	1	barcaza/hora		
mu	2	barcaza/hora		
ro	0,5			
s	1			
Pi(0)	0,500	30	mins	
Lq	0,5	1	barcaza	
Wq	0,5	30	mins	
L	1		barcaza	
W	1	60	mins	
W	45	mu		60 barcaza/m

Parte 3				
Sigma	0,05	hr		
lambda	1	barcaza/hora		
mu	2	barcaza/hora		
ro	0,5			
s	1			
Pi(0)	0,500		30	mins
Lq	0,2525		1	barcaza
Wq	0,2525		15,15	mins
L	0,7525			barcaza
W	0,7525		45,15	mins

Ejemplo II

Un lavacarro puede atender un auto cada 5 min. y la tasa media de llegadas es de 9 autos/hora, σ= 2 min.

Obtenga las medidas de desempeño de acuerdo con el modelo M/G/1

Además la probabilidad de tener 0 clientes en el sistema y la probabilidad de que un cliente tenga que esperar por el servicio

Ejemplo II – Solución

$$L_s = L_q + \rho = 1.31 + .75 = 2.06\, clientes$$

$$L_q = \frac{\lambda^2\sigma^2 + \rho^2}{2(1-\rho)} = 1.31\, clientes$$

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu} = 0.228\, hrs = 13.7 \min$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = 0.145\, hrs = 8.7 \min$$

$$P_0 = 1 - \rho = 0.25 \qquad P_w = \rho = 0.75$$

Modelo: M/M/1/m con población finita

- En este sistema el número de clientes potenciales es finito y relativamente pequeño.
- Como resultado, el número de clientes que se encuentran en el sistema corresponde a la tasa de llegada de clientes.
- Características

  - Un solo servidor

  - Tiempo de atención exponencial y proceso de llegada de Poisson.

  - El tamaño de la población es de m clientes (m finito).

Modelo: M/M/1/m con población finita

$$P_0 = \frac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{N!}{(N-n)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}$$

$$L_q = N - \frac{\lambda + \mu}{\lambda}(1 - P_0)$$

$$L = L_q + (1 - P_0)$$

$$W_q = \frac{L_q}{(N - L)\lambda}$$

$$P_w = 1 - P_0$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}$$

$$P_n = \frac{N!}{(N-n)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 \quad \text{for } n = 0, 1, \ldots, N$$

Ejemplo I

Kolkmeyer, una empresa de manufactura, usa un grupo de seis máquinas idénticas; cada máquina maneja un promedio de 20 horas entre interrupciones. Así, la tasa de llegada o de demanda del servicio de reparación para cada máquina es de $\lambda=1/20 = 0.05$ por hora. Con interrupciones que ocurren al azar, la distribución de probabilidad de Poisson es usada para describir el proceso de llegada e interrupción de una máquina. Una persona del departamento de mantenimiento proporciona el servicio de reparación de canal solo para las seis máquinas. Las veces de servicio exponencialmente distribuidas tienen una media de dos horas por máquina o una tarifa de servicio de $\mu=1/2=0.50$ máquinas por hora.

fewer than

Modelo: M/M/1/m con población finita

Customers	6
Arrival Rate (λ)	0,05
Service Rate (μ)	0,5

Probability of zero customers in the system (P_0)	0,4845
Probability of fewer than 3 customers in the system (P_n)	#N/A
Average utilization of the server (ρ)	0,5155
Average number of customers in the system (L)	0,8451
Average number of customers in line (L_q)	0,3297
Average waiting/service time in the system (W)	3,2790
Average waiting time in line (W_q)	1,2790

Modelo: M/M/s/m con población finita

$$\sum_{i=1}^{K} p_i = 1,$$

we get

$$p_0 = \left[\sum_{n=0}^{s} \left\{ \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \right\} + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \sum_{n=s+1}^{K} \rho^{n-s} \right]^{-1}$$

where

$$\rho = \frac{\lambda}{s\mu}.$$

Therefore, for all $j \in S$

$$p_j = \begin{cases} \frac{1}{j!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^j p_0 & \text{if } j < s, \\ \frac{1}{s! s^{j-s}} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^j p_0 & \text{if } s \le j \le K. \end{cases}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda(1 - p_K)}$$

$$W = \frac{L_q}{\lambda(1 - p_K)} + \frac{1}{\mu}$$

$$L = L_q + \frac{\lambda(1 - p_K)}{\mu}$$

$$p_K = \frac{(\lambda/\mu)^K}{s! s^{K-s}} p_0$$

$$L_q = \sum_{j=0}^{K} p_j \max(j - s, 0) = \frac{p_0 (\lambda/\mu)^s \rho}{s!(1-\rho)^2} [1 - \rho^{K-s} - (K-s)\rho^{K-s}(1-\rho)].$$

Ejemplo II

Cinco ayudantes administrativos utilizan una copiadora de oficina. El tiempo promedio entre llegadas para cada ayudante es 40 minutos, que son equivalentes a una tarifa de llegada de 1/40=0.025 llegadas por minuto. El tiempo medio que cada ayudante pasa en la copiadora es 5 minutos, que son equivalentes a una tasa de servicio de 0.20 por minuto. Use el modelo de M/M/1 con una población de llamada finita para determinar lo siguiente:

a. La probabilidad que la copiadora este ociosa

b. El número medio de ayudantes administrativos en la línea de espera

c. El número medio de ayudantes administrativos en la copiadora

d. El tiempo medio que un ayudante pasa esperando la copiadora

e. El tiempo medio un ayudante pasa en la copiadora

f. Durante un día de 8 horas, cuántos los minutos un ayudante gasta en la fotocopiadora

g. Debería el gerente estar pensando en comprar otra fotocopiadora?

Ejemplo II - Solución

04-02-2017	Performance Measure	Result
1	System: M/M/2//5	From Formula
2	Customer arrival rate (lambda) per min =	0,0250
3	Service rate per server (mu) per min =	0,2000
4	Overall system effective arrival rate per min =	0,1107
5	Overall system effective service rate per min =	0,1107
6	Overall system utilization =	27,6635 %
7	Average number of customers in the system (L) =	0,5738
8	Average number of customers in the queue (Lq) =	0,0206
9	Average number of customers in the queue for a busy system (Lb) =	0,1969
10	Average time customer spends in the system (W) =	5,1858 mins
11	Average time customer spends in the queue (Wq) =	0,1858 mins
12	Average time customer spends in the queue for a busy system (Wb) =	1,7798 mins
13	The probability that all servers are idle (Po) =	55,1135 %
14	The probability an arriving customer waits (Pw) or system is busy (Pb) =	10,4406 %

Modelo: M/D/1

Está línea de espera puede ocurrir en ambientes de producción y manufactura donde los tiempos de servicio controlados por máquinas son constantes. Modelo M/D/1, con D refiriéndose a los tiempos de servicio determinísticos. Con la condición que la desviación estándar del tiempo de servicio constante es $\sigma = 0$, solo cambia

Algunos sistemas tienen tiempos de servicio constantes en lugar de exponencialmente distribuidos.

Cuando los clientes son atendidos o equipos son procesados con un ciclo fijo como es el caso de una lavadora de carros automatizada o ciertos entretenimientos en los parques de diversiones, el asumir servicio constante es adecuado, es decir tenemos un proceso de servicio determinístico, y que en su

mayoría de los casos, está dado por un sistema automatizado

Modelo: M/D/1

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$P_0 = 1 - \rho$$

$$L_q = \frac{\rho^2}{2 \cdot (1 - \rho)}$$

$$L = L_q + \rho$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}$$

$$P_w = \frac{\lambda}{\mu}$$

Ejemplo II

- Un lavacar puede atender un auto cada 5 min.
- La tasa media de llegadas es de 9 autos/hora.
- Obtenga las medidas de desempeño de acuerdo con el modelo M/D/1

$$L_s = \lambda W_s = 1.875\, clientes$$

$$L_q = \frac{\rho^2}{2(1-\rho)} = 1.125\, clientes$$

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu} = 0.21\, hrs = 12.5 \min$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = 0.125\, hrs = 7.5 \min$$

Ejemplo III

- Los vehículos llegan a una cabina de peaje a una tasa media de 300 por hora. El tiempo de espera promedio en la cabina de peaje es de 10 segundos por vehículo. ¿Si tanto las llegadas como las salidas están exponencialmente distribuidas, cuál es el número promedio de vehículos en el sistema, la longitud de cola media, el retraso medio por vehículo, el tiempo promedio que un vehículo está en el sistema?
- Resuelva el modelo para un sistema de 2 servidores en paralelo, independientes y con fila compartida, luego contraste los resultados y defina cual es el sistema más eficiente
- Si el costo por hora de cada conductor es de 72$ y el costo de añadir un nuevo puesto de peaje es de 10$/hora, cuantos servidores serían los aconsejables para operar a un costo mínimo

Ejemplo III

$$\lambda = 300\,autos / hora$$

$$1/\mu = 10\,seg / auto = \frac{3600}{10} \Rightarrow \mu = 360\,auto / hora$$

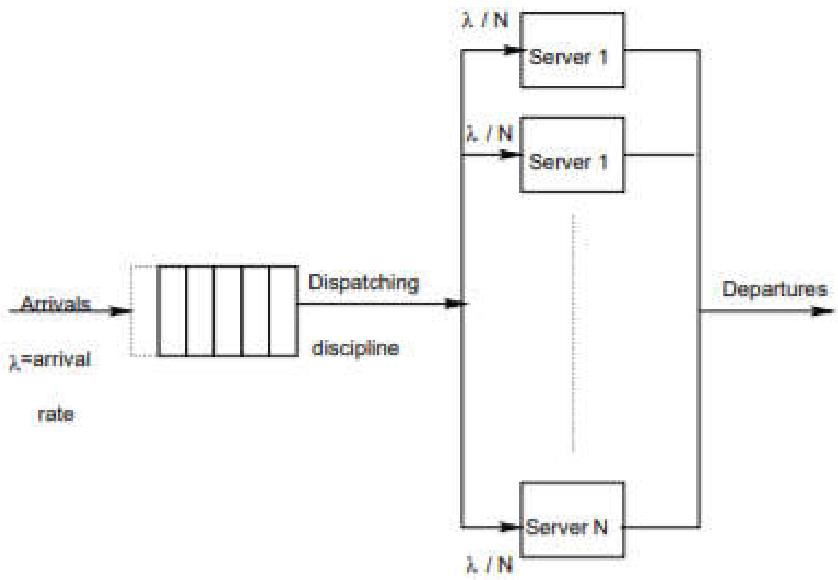
$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{300}{360} = 0.833$$

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{300}{360 - 300} = 5\,autos \qquad W = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{360 - 300} = 0.01667\,hr$$

$$Lq = \rho L = 0.8333 * 5 = 4.1666\,autos \quad Wq = \rho W = 0.8333 * 0.016667 = 0.833\,\mathrm{min}$$

Ejemplo III

- Resuelva el modelo para un sistema de 2 servidores en paralelo, independientes y con fila compartida



Ejemplo III

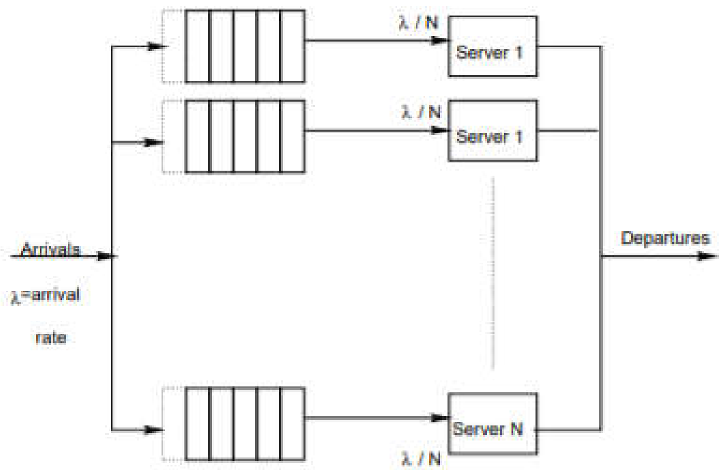
- Resuelva el modelo para un sistema de 2 servidores en paralelo, independientes y con fila compartida

Servers	2
Arrival Rate (λ)	300
Service Rate (μ)	360

Probability of zero customers in the system (P_0)			0.4118
Probability of	exactly	1 customers in the system (P_n)	0.3431
Average utilization of the server (ρ)			0.4167
Average number of customers in the system (L)			1.0084
Average number of customers in line (L_q)			0.1751
Average waiting/service time in the system (W)			0.0034
Average waiting time in line (W_q)			0.0006

Ejemplo III

- Resuelva el modelo para un sistema de 2 servidores en paralelo, independientes y con filas independientes



Ejemplo III

- Resuelva el modelo para un sistema de 2 servidores en paralelo, independientes y con filas independientes

Servers		(Number of servers is assumed to be 1 in single-server model.)
Arrival Rate (λ)	150	
Service Rate (μ)	360	

Probability of zero customers in the system (P_0)	0.5833
Probability of at most 4 customers in the system (P_n)	0.9874
Average utilization of the server (ρ)	0.4167
Average number of customers in the system (L)	0.7143
Average number of customers in line (L_q)	0.2976
Average waiting/service time in the system (W)	0.0048
Average waiting time in line (W_q)	0.0020

Ejemplo III

- Análisis comparativo de cada modelo

	M/M/1	M/M/2	Multiple servidor (Independiente)
Tiempo desocupado (mins)	10	24.70	35.0
Vehículos en el sistema	5	1.0084	0.7143
Vehículos en la cola	4.1667	0.1751	0.2976
Tiempo de espera en el sistema (segs)	60.12	12.10	17.14
Tiempo de espera en la cola (segs)	50.04	2.10	7.14

Ejemplo III

- Análisis comparativo de cada modelo añadiendo costos

	M/M/1	M/M/2	Multiple servidor (Independiente)x2
Tiempo desocupado (mins)	10	24.70	35.0
Vehículos en el sistema	5	1.0084	1.4286
Vehículos en la cola	4.1667	0.1751	0.5952
Costo espera($/hora)	360	72.6048	102.86
Costo Operación ($/hora)	10	20	20
Costo Total ($/hora)	370	92.60	122.86