Fundamentação matemática

GABRIEL LAZARI TREVISANI

September 2024

1 Limites de funções reais

1.1 Definição

Dado $x \in \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, diz-se que L é o limite de f quando x tende a um ponto a se:

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists \delta \,|\, \delta > |x - a| > 0 \Longrightarrow \epsilon > |f(x) - L| > 0 \tag{1}$$

Para o qual usaremos a notação $\lim_{x\to a} f(x) = L$.

1.2 Operações

1.2.1 Adição*

Seja $\lim_{x\to a} f_1(x) = L_1$ e $\lim_{x\to a} f_2(x) = L_2$. Então, $\lim_{x\to a}(f_1 + f_2)(x) = L_1 + L_2$, isso é, o limite das somas é a soma dos limites.

Prova: pela definição acima, temos $\epsilon_1 > |f_1(x)-L_1| > 0$ e $\epsilon_2 > |f_2(x)-L_2| > 0$ como consequência de $\delta > |x - a| > 0$. Ademais:

$$\epsilon_1 + \epsilon_2 > |f_1(x) - L_1| + |f_2(x) - L_2| \geq |f_1(x) + f_2(x) - L_1 - L_2| > 0 \tag{2}$$

Assim, dado $\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2$, temos:

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists \delta \,|\, \delta > |x - a| > 0 \Longrightarrow \epsilon > |(f_1 + f_2)(x) - (L_1 + L_2)| > 0 \tag{3}$$

1.2.2 Teorema do Sanduíche

Seja f, g, h funções contínuas tal que $\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x) \leq \lim_{x\to a} h(x)$ e $\lim_{x\to a} f(x) = L$, $\lim_{x\to a} g(x) = L$. Então, $\lim_{x\to a} g(x) = L$.

Prova: Pela definição de limite, $\exists \epsilon > 0 \,|\, L-\epsilon < \lim_{x\to a} f(x) < L+\epsilon$, $L-\epsilon < \lim_{x\to a} h(x) < L + \epsilon$.

Portanto,

$$L - \epsilon < \lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x) \leq \lim_{x\to a} h(x) < L + \epsilon \Longrightarrow \lim_{x\to a} g(x) = L \tag{4}$$

1.2.3 Multiplicação por um limite que tende a 0*

Seja $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to a} g(x) \leq N$, para $N > 0$. Então, $\lim_{x\to a}(f \cdot g)(x) = 0$.

Prova: Pela definição de limite, temos $\epsilon' > |f(x)| > 0$ como consequência de $\delta > |x - a| > 0$. Assim, tomando $\epsilon = \epsilon' \cdot N$, temos:

$$\delta > |x - a| > 0 \Longrightarrow \epsilon > N|f(x)| = |Nf(x)| \geq |(g \cdot f)(x)| > 0 \tag{5}$$

1.2.4 Produto

Seja $\lim_{x\to a} f_1(x) = L_1$ e $\lim_{x\to a} f_2(x) = L_2$. Então, $\lim_{x\to a}(f_1 \cdot f_2)(x) = L_1L_2$, isso é, o limite dos produtos é o produto dos limites.

Prova: usando a propriedade de adição e produto deduzidas, temos:

$$\lim_{x\to a}(f_1 \cdot f_2)(x) - L_1L_2 = \lim_{x\to a} f_1(x)f_2(x) - f_1(x)L_2 + f_1(x)L_2 - L_1L_2 \tag{6}$$

$$= \lim_{x\to a} f_1(x)(g(x) - L_2) + \lim_{x\to a} L_1(f(x) - L_1) = 0 \tag{7}$$

2 Continuidade

2.1 Definição

Dado $x \in \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, diz-se que f é contínua se $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Essa propriedade simplificará muito as nossas contas futuramente.

2.2 Continuidade de polinômios

Seja $f(x) = x$ e $g(x) = c$, para uma constante c. Então:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} x = a = f(a) \tag{8}$$

$$\lim_{x\to a} g(x) = c = f(a) \tag{9}$$

Como um polinômio é formado por soma e produto de potências de x, todas elas multiplicadas por algum coeficiente, deduzimos que todos os polinômios são contínuos.

3 Derivada

3.1 Definição

Dado $x \in \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então, define-se como derivada de f no ponto a o limite:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \tag{10}$$

Ele possui outras definições, que serão ignoradas para economizar espaço.

3.2 Derivada de $f(x) = x^n$, com n inteiro**

Como se trata de uma função contínua, temos:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{(x-a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + ... + a^{n-1})}{x - a} = na^{n-1} \tag{11}$$

3.2.1 Derivada de polinômios**

Dado $x \in \mathbb{R}$, seja $f_i(x) = x^i$ e $P(x) = c_0 + c_1x + ... + c_nx^n$. Então, como são ambas funções contínuas:

$$P'(x) = \lim_{x \to a} \frac{\sum_{i=0}^n c_ix^i - \sum_{i=0}^n c_ia^i}{x - a} = \lim_{x - a} \frac{\sum_{i=0}^n c_i(x^i - a^i)}{x - a} \tag{12}$$

$$= \sum_{i=0}^n c_i \lim_{x - a} \frac{x^i - a^i}{x - a} = \sum_{i=0}^n c_i f_i'(a) \tag{13}$$

4 Aproximações

4.1 Aproximações de polinômios

Seja $P(x) = c_0 + c_1x + ... + c_nx^n$. Então,

$$\frac{P^{(i)}(0)}{i!} = c_i \tag{14}$$

Podemos usar isso para fazer aproximações até o grau desejado de um polinômio. Caso queiramos começar em um ponto a no lugar de 0, ficamos com:

$$P(x-a) = c_0 + c_1(x-a) + ... + c_n(x-a)^n \implies \frac{P^{(i)}(a)}{i!} = c_i \tag{15}$$

4.2 Raízes e o método de Newton

Esse método consiste em fazer uma suposição inicial de um número próximo à raiz de um polinômio P e fazer uma aproximação linear desse ponto para encontrar um valor próximo a raiz. Geralmente é feito sucessivas vezes para aumentar a precisão.

O problema está na parte de adivinhar o valor inicial, principalmente quando não se sabe quantas raízes se tem a função.

4.3 Algoritmo para encontrar raízes de polinômios**

Este algoritmo tem como objetivo fornecer pontos ideais para que se opere o método de Newton, trabalhando na suposição de que se conhece as raízes da derivada.

Assim, dado uma derivada que tenha n raízes, para a primeira e a última, checa-se se o valor do polinômio na raiz da derivada e no infinito tem sinais trocados. Caso haja, da-se um pequeno intervalo ao lado para que a derivada não seja nula, e aplica-se o método de Newton. Também checa-se se essas e as demais raízes são também as raízes do polinômio.

Para as raízes do meio, checa-se se os valores do polinômio entre uma raiz e a outra tem sinais contrários. Caso haja, faz-se o método de Newton partindo do ponto médio entre as raízes.

No caso da derivada não ter raízes, por simetria, sabe-se que haverá apenas uma raiz, e, portanto, basta pegar qualquer ponto do polinômio para aplicar o método de Newton.

5 Integral

5.1 Definição

Seja $f(u)$ uma função contínua no intervalo $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}$, e seja $u, x, a, c \in \mathbb{X}$. Então, a pseudo-área sobre a curva $y = f(u)$ no intervalo $[c, x]$ é:

$$I(x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=0}^{N} f(u_i*)\frac{(x-c)}{N} \stackrel{\text{def}}{=} \int_c^x f(u)du \tag{16}$$

Em que u_i* é um valor aleatório de x no intervalo u_i, u_{i+1}

5.2 Teorema Fundamental do Cálculo*

5.2.1 Parte 1: $I'(a) = f(a)$

$$I'(a) = \lim_{x\to a} \frac{F(x)-F(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}(\lim_{N\to\infty} \sum_{i=0}^{N} f(u_i*)\frac{(x-c)}{N(x-a)} - \lim_{N\to\infty} \sum_{i=0}^{N} f(u_i*)\frac{(a-c)}{N(x-a)}) \tag{17}$$

$$= \lim_{x\to a}(\lim_{N\to\infty}\sum_{i=0}^{N} f(u_i*)\frac{(x-a)}{N(x-a)}) = \lim_{x\to a}(\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N} f(u_i*)) = \lim_{x\to a} f_m(x) \tag{18}$$

Em que $f_m(x)$ é o valor médio de f no intervalo $[a, x]$. Assim, seja $m(x) = min(f(a),\, f(x))$, $M(x) = max(f(a),\, f(x))$:

$$m(x) \le f_m(x) \le M(x) \implies \lim_{x\to a} m(x) \le \lim_{x\to a} f_m(x) \le \lim_{x\to a} M(x) \tag{19}$$

$$\implies \lim_{x\to a} f_m(x) = f(a) \tag{20}$$

5.2.2 Parte 2: $I(x) = \int_c^x f(u)du = F(x) - F(c)$

$$I'(x) = f(x) \implies I(x) + C = F(x) \implies I(c) + C = F(c) \tag{21}$$

$$\implies F(c) = C \implies I(x) = F(x) - F(c) \tag{22}$$