Matematica IV.
Trabajo práctico I

primer entrega

Integrantes:
- Aguado Thomas, 14245/6
- Fermín Moreno, 16276/2
- Nicolás Cerone 16519/2

1. Sea f : D ⊂ R 2 → R dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Dar el dominio de f y analizar su continuidad.

Al ser una función partida tenemos que estudiar el dominio y continuidad de todas las partes implicadas a simple vista podemos observar que el dominio de la parte de arriba es todo R 2 menos cuando (x,y) = (0,0) eso haría que la función sea indeterminada, pero como vemos en la parte de abajo, la función está definida para ese caso por lo tanto podemos decir que su dominio es todo R 2.

En cuanto a su continuidad tiene un poco mas de estudio, tenemos que evaluar que realmente cuando x,y tiende a 0 esta función es 0, y lo hacemos evaluando los límites de la función tendiendo a 0. Cómo evaluamos los límites y no la función en el punto utilizamos la parte superior:

primero probamos con límites iterados:

```
lim  ((x*y)/(√x^2+y^2)) = (0*y)/y  = 0
x->0
```

```
lim  ((x*y)/(√x^2+y^2)) = (0*x)/x = 0
y->0
```

podemos probar por la recta también: y = mx

```
lim   ((x*mx)/(√x^2+(mx)^2)) =
x->0
```

```
lim   ((mx)/(√1+m^2)) = 0
x->0
```

por lo tanto, presiento que L = 0, pero no podemos demostrarlo completamente sin aplicar el teorema del encaje:

Si existen funciones g (x, y) y h (x, y) tales que g (x, y) ≤ f (x, y) ≤ h (x, y)
∀ (x, y) <> (x0, y0) en un disco con centro en (x0, y0), y si lim (x,y)→(x0,y0) g(x, y) = lim (x,y)→(x0,y0) h(x, y) = L

```
g(x,y) ≤ f(x,y) ≤ h(x,y)
```

```
g(x,y) ≤((x*y)/(√x^2+y^2))≤ h(x,y)
```

vamos a aplicar valor absoluto a f(x,y) para maximizar la función, podemos demostrar que (y o x)/(√x^2+y^2) = 1, por lo tanto aplicando valor absoluto nos queda

```
|x|*1 = |x|
```

llegando a:

```
0 ≤((x*y)/(√x^2+y^2)) - L ≤ |x|          L= 0
```

calculamos los límites de g(x,y) h(x,y) y como llegamos a que nos da 0 demostramos que la función del medio tiene a 0 efectivamente, y demostramos su continuidad. Demostrando también que la función es continua en todo R 2

b) Analizar si f es diferenciable en todo su dominio.

Para analizar la diferenciabilidad podemos partir calculando sus derivadas parciales, si estas son continuas, entonces la primera parte es diferenciable y tendríamos que estudiar la función en el punto (0,0) para ver si es diferenciable o no.

```
Fx= ((x*y)/(√x^2+y^2)) = ((y^3)/(x^2+y^2)^3/2)
```

```
Fy= ((x*y)/(√x^2+y^2)) = ((x^3)/(x^2+y^2)^3/2)
```

Como podemos observar estas funciones en el punto (0,0) no son continuas por ende sabemos que es diferenciable en todo R^2 menos en el punto 0,0 que es el que vamos a tener que estudiar en detalle

Definición 1.1. *Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y sea $(x_0, y_0) \in D$. Se dice que f es **diferenciable** en $(x_0, y_0) \in D$ si:*

$$\frac{f(x,y) - \left\{\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y - y_0) + f(x_0, y_0)\right\}}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} \to 0$$

Como primer condición ya cumplimos que f(0,0) = 0
Como segunda y tercera condición tenemos que estudiar si existen la derivadas parciales con respecto a "x" e "y".
Como tenemos que calcular solo sobre f(0,0) aplicamos las derivadas parciales en el punto

```
Fx (0,0) = (f(0+h,0)- f(0,0))/h = (h.0)/√(h^2+0^2) = 0/(h.h^½) = 0/h^3/2 = 0
```

```
Fy (0,0) = (f(0,h+0)- f(0,0))/h = (h.0)/√(0^2+h^2) = 0/(h.h^½) = 0/h^3/2 = 0
```

Ahora sabemos que las derivadas parciales de la función en el origen de coordenadas existen, como se cumplen las 3 condiciones necesarias por ende debemos aplicar la definición de diferenciabilidad

```
((x.y)/(√x^2+y^2) - (0)*(x-0) +((0)*(y-0)+ f(0,0)) / (√x^2+y^2))
```

```
((x.y)/(√x^2+y^2) / (√x^2+y^2)) - 0 = x.y/((√x^2+y^2)^2) = x.y/x^2+y^2
```

Ahora con coordenadas polares tratamos de probar que existe el límite

```
lim  r cos(0).r sin(0)/(r^2 cos^2(0)+ r^2 sin^2(0) =
r->0
```

```
lim  r^2.cos(0).sin(0)/r^2 =
r->0
```

se cancelan los r^2 y queda:

```
lim cos(0).sin(0) =
r->0
```

por lo tanto la función no es diferenciable en el punto 0,0

c) Hallar, si existe, el plano tangente a la gráfica de f en el punto (−3, 4, f(−3,4)).

$$z = \frac{\partial f(a,b)}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial f(a,b)}{\partial y}(y-b) + f(a,b)$$

tenemos que evaluar esa ecuación, primero evaluamos las derivadas parciales en el punto (-3,4)

```
Fx(-3,4) = (y^3)/(x^2+y^2)^3/2 = 64/125
```

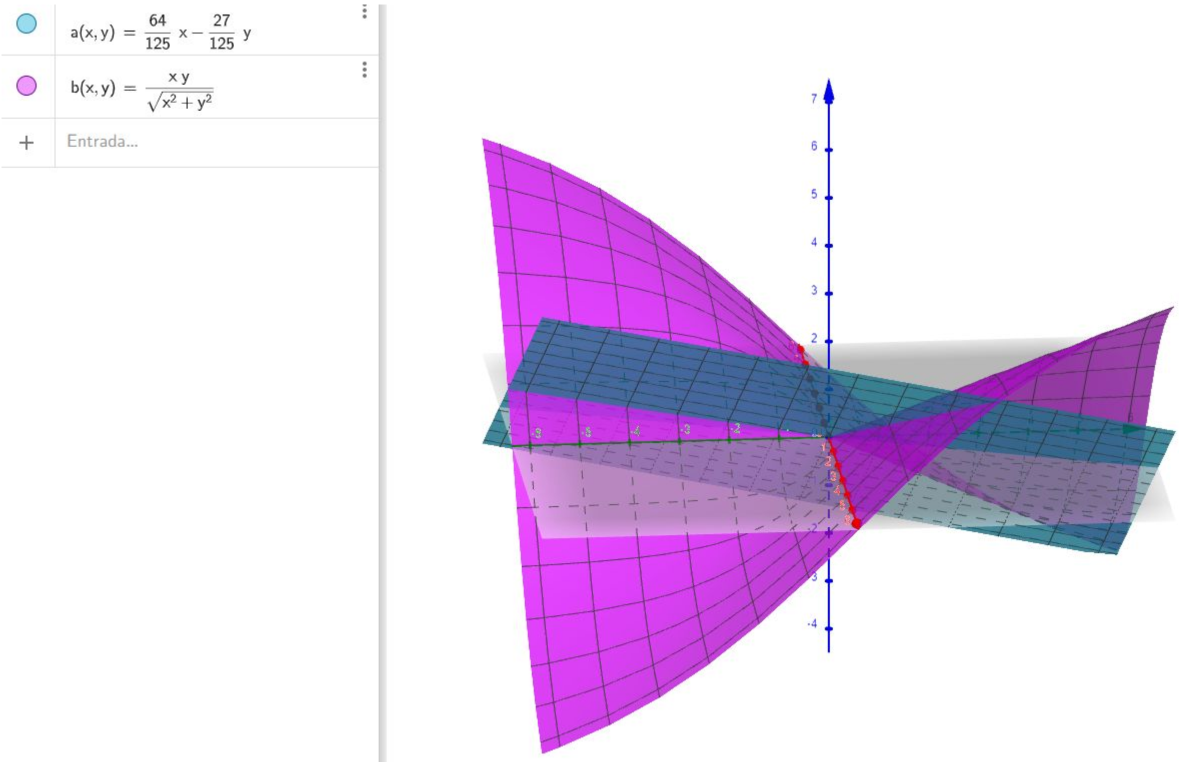
```
Fy(-3,4) = (x^3)/(x^2+y^2)^3/2 = -27/125
```

```
F(-3,4) = (-3.4)/(√(-3)^2+4^2)) = -12/√25 = -12/5
```

luego tenemos que aplicar la función de la recta tangente:

```
z = (64/125)*(x-(-3)) + (-27/125)*(y - 4) + f(-3,4) =
z = 64/125 x + 1.536 + -27/125 y + 108/125 - 12/5 =
z = (64/125)x - (27/125)y
```

Dibujar (con ayuda de software) el plano y la funcíon en un mismo gráfico



2. Sea g : D ⊂ R 2 → R dada por: g(x, y) = e^x^2 .(sen(y) + cos(y))

a) Analizar la diferenciabilidad de g

Analizando las derivadas parciales de estas funciones, demostramos que son continuas, y si son continuas en todo R 2, también demostramos que son diferenciables

```
Fx = e^x^2 *(sen(y) + cos(y))
Fx = 2x*e^(x^2)*(sen(y)+cos(y))


Fy = e^x^2 .(sen(y) + cos(y))
Fy = e^(x^2)*(cos(y) - sen(y))
```

b) Encontrar la aproximación lineal de la función g en (−1, π/2) y utilizarla para estimar aproximadamente g(−0,98, 1,55). Graficar con ayuda de software, la función y su aproximación lineal.

por lo tanto hay que evaluar las derivadas parciales en el punto (-1, π/2)

```
Fx = 2(-1)*e^(-1^2)*(sen(π/2)+cos(π/2)) = -5.5835
```

```
Fy = e^(-1^2)*(cos(π/2) - sen(π/2)) = 2.6427
```

luego calculamos la función en el punto (−1, π/2)

```
f(x,y) = e^(-1)^2 .(sen(π/2) + cos(π/2)) = 2.7917
```

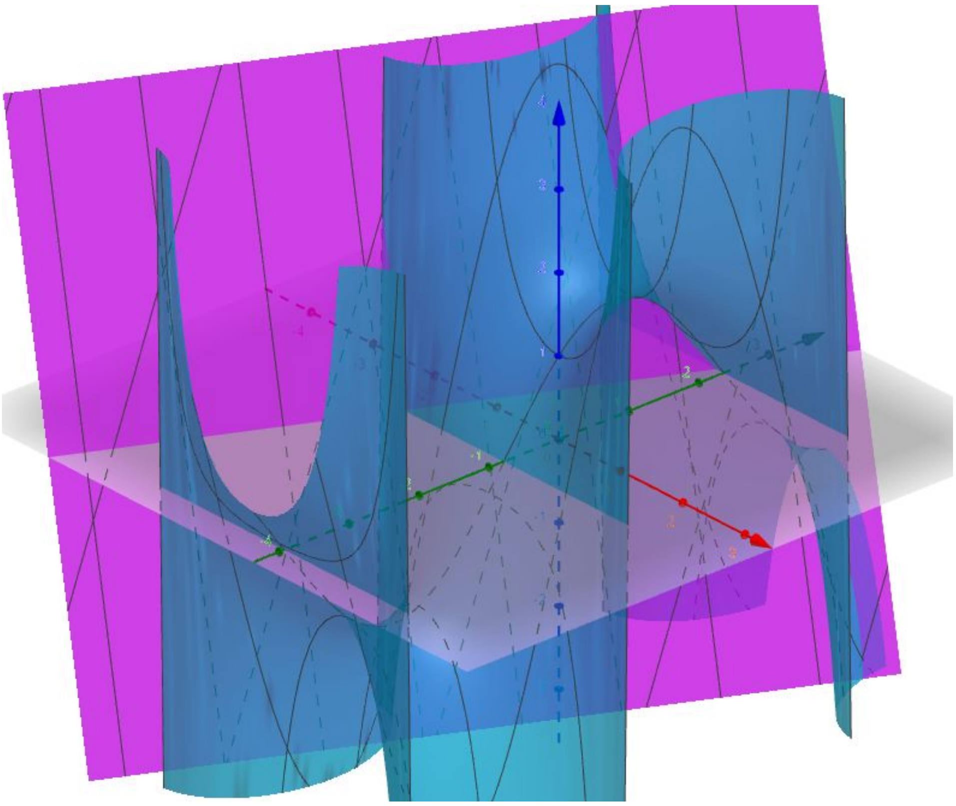
por último, calculamos la linealización:

$$L(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0)$$

```
L(x,y) = 2.7917 +  (-5.5835)*(x+1) +2.6427*(y-π/2)
L(x,y) = 2.7917-5.5835x -5.5835 + 2.6427y - 4.1511
L(x,y) = -5.5835x + 2.6427y - 6.9429
```

ahora con la linealización realizada la evaluamos en el punto que nos dan:

```
g(-0,98, 1,55) = -5.5835*(-0,98) + 2.6427*(1,55) - 6.9429 = 2.625115 aproximado
```



c) Encontrar la dirección de máximo crecimiento de g en el punto (2, π)

para obtener la dirección de máximo crecimiento tenemos que aplicar la siguiente definición:

$$D_{\vec{u}} f(a, b) = |\nabla f(a, b)|$$

y esto se calcula de la siguiente manera:

$D_u g(2,\pi) = |\nabla g(2,\pi)|$

```
∇g(2,π) = (2x*e^(x^2)*(sen(y)+cos(y);e^(x^2)*(cos(y) - sen(y)))
∇g(2,π) = (2*2*e^(2^2)*(sen(π)+cos(π);e^(2^2)*(cos(π) - sen(π)))
∇g(2,π) = (4*e^4*(sen(π)+cos(π);e^4*(cos(π) - sen(π)))
∇g(2,π) = (4*e^4*(1.0533);e^4*(0.9436))
∇g(2,π) = (230.0329;51.5188)
```

3.

a) calcular la siguiente integral:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\cos(\theta)} r^3(\sin(\theta))drd\theta$$

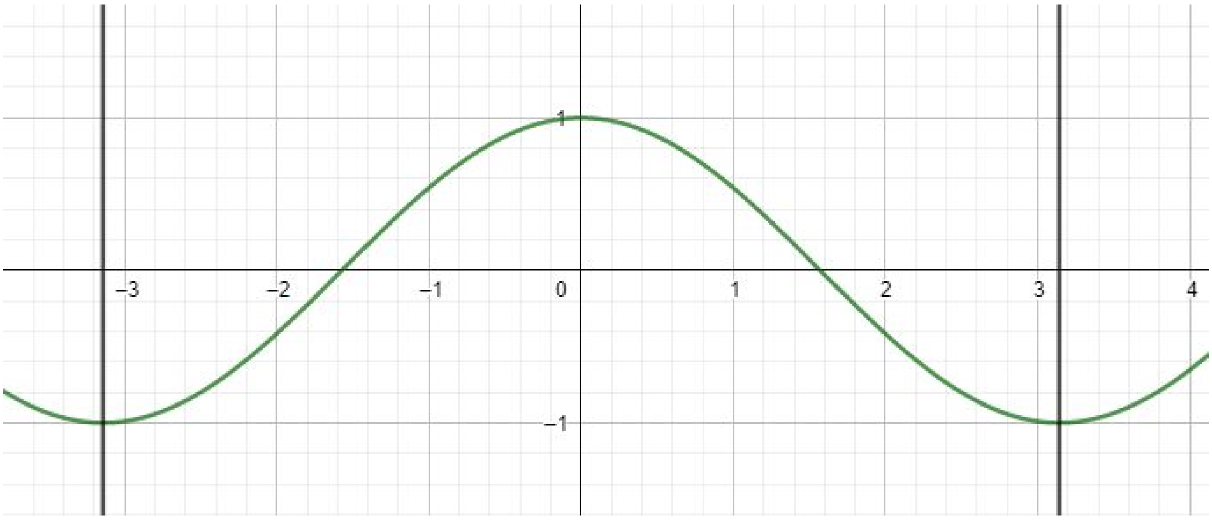
```
0∫π/2 0∫cos(θ) r^3 *(sen(θ))drdθ
0∫π/2 (sen(θ))* ( 0∫cos(θ) r^3 dr )dθ
0∫π/2 (sen(θ))* ((r^4)/4 0|cos(θ))dθ
0∫π/2 (sen(θ)*cos^4(θ))/4 )dθ
```

ahora al ver que tenemos una multiplicación podemos usar la técnica de sustitución tomamos

```
cos(θ) = u
du/dθ = -sin(θ)
dθ = -1/sin(θ) du

1/4 * 0∫π/2 (u^4)du
1/4 * 0∫π/2 (u^5)/5du
(-cos(θ)^5)/20 0|π/2
-0.049906 + 0.05 = 0.099906
```

b) Calcular el área, si existe, de la región plana acotada por la curva cos(x) en el intervalo [−π, π] y los ejes coordenados.



|-π∫-π/2 cos(x)∫0 [1]dydx| + |-π/2∫π/2 cos(x)∫0|[1]dydx +| π/2∫π 0∫cos(x) [1]dydx|

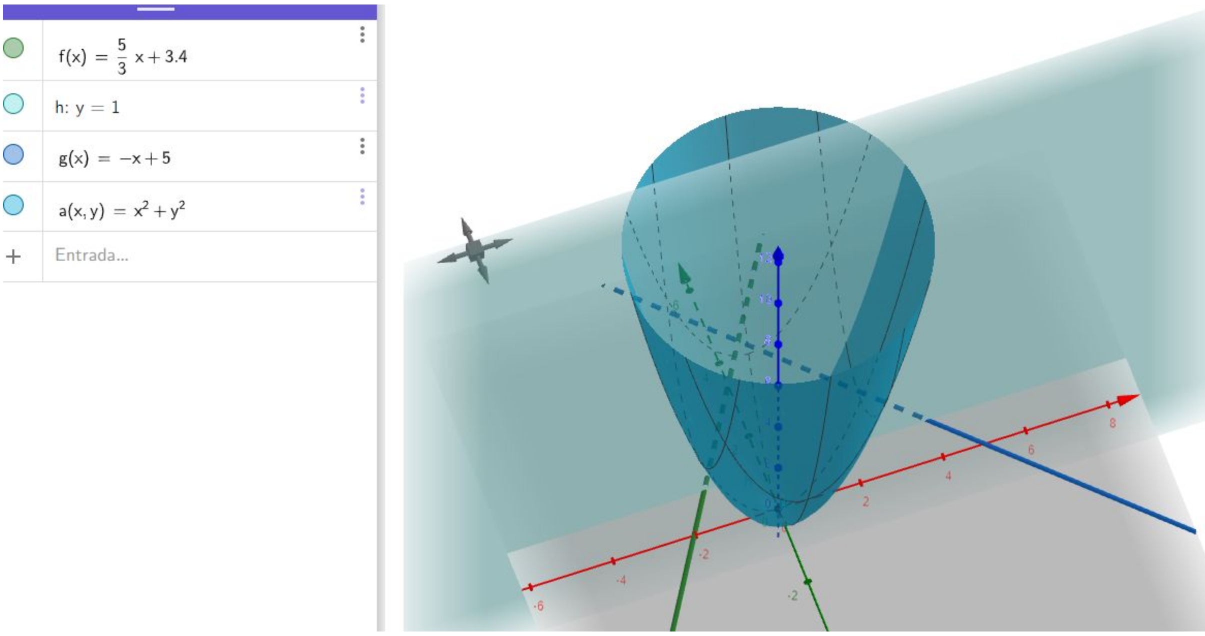
-π∫-π/2 cos(x)∫0 [1]dydx
-π∫-π/2 y cos(x)|0
-π∫-π/2 -cos(x)
-sin(x) -π|-π/2
=|1|

|-π/2∫π/2 cos(x)∫0[1]dydx|
|-π/2∫π/2 y cos(x)|0 |
sin(x) -π/2|π/2
=|2|

| π/2∫π 0∫cos(x) [1]dydx|
π/2∫π y 0|cos(x)
π/2∫π -cos(x)
-sen(x) π/2|π
=| 1|

1 + 2 + 1 = 4

c) Hallar el volumen del sólido bajo el paraboloide z = x^2+y^2 y sobre la región limitada por T, donde T es el triángulos de vértices (−4, 1), (1, 4) y (4, 1)



tomamos el ejercicio como una región de tipo 1, donde

$-4 \leq x \leq 4$ e $f(x) \leq y \leq g(x)$

primero sacamos las rectas f(x) e g(x) con
"mx+b" y hacemos que m = (4-1)/(1+4) m = 3/5x +b sacamos b con una ecuación por ejemplo:

3/5*-4 + b = 1
-2.4 + b = 1
-2.4 = 1+2,4
b = 3,4
3/5x + 3.4

y hacemos lo mismo con g(x)

m = (1-4)/4-1 = -1
-1x+b = 0
-1*4 + b = 1
-4 + b = 1
b = 1+4
b = 5
-x + 5

sacamos las funciones de las rectas

f(x) = 3/5x + 3.4 y g(x)=-x + 5

por ende lo que queda calcular es:

[-4∫1 1∫3/5x+3,4 x^2+y^2] + [1∫4 1∫-x+5 x^2+y^2]

por un lado calculamos a:

-4∫1 1∫3/5x+3,4 x^2+y^2 dydx =
-4∫1 1∫3/5x+3,4 x^2 + 1∫3/5x+3,4 y^2
-4∫1 x^2*y 1|3/5x+3,4 + y^3/3 1|3/5x+3,4
-4∫1 x^2*(3/5x+3,4) 1|3/5x+3,4 + (3/5x+3,4)^3/3 1|3/5x+3,4
-4∫1 3/5x^3+3,4x^2 -x^2 + (3/5x+3,4)^3/3 - ⅓

Ordenando un poco
-4∫1 3/5x^3 + 2,4x^2 + 1/5x3 + 2,04x + 6,936x + 13,10 - 1/3

finalmente
-4∫1 4/5x^3 + 4,44x^2 + 6,936x + 12,76 dx =

Ahora resolvemos la segunda integral

-4∫1 4/5x^3 + -4∫1 4,44x^2 + -4∫1 6,936x + -4∫1 12,76
[(4/5x^4)/4] -4|1 + [(4,44x^3)/3]-4|1 +[(6,936x^2)/2]-4|1+ [12,76x] -4|1

aplicando barrow nos queda:
-51 + 96.2 - 52.02 + 63.8 = 56,98

ahora tenemos que hacer la segunda parte del cálculo

1∫4 1∫-x+5 x^2+y^2 dydx
1∫4 1∫-x+5 x^2 dy+ 1∫-x+5 y^2 dydx
1∫4 [x^2*y] 1|-x+5 + [y^3/3] 1|-x+5 dx
1∫4 [x^2*(-x+5) - x^2] + [(-x+5)^3)/3 - 1/3] dx
1∫4 [-x^3 +5x^2 - x^2] + [(-x^3 +15x^2 - 75x+125)/3 - 1/3] dx
1∫4 [-x^3 +4x^2] + [-1/3x^3 + 5x^2 - 25x + 124/3] dx

1∫4 -4/3x^3 + 9x^2 -25x + 124/3 dx

y ahora aplicamos la segunda derivada:

1∫4 -4/3x^3 +1∫4 9x^2 - 1∫4 25x + 1∫4 124/3 dx
-(x^4)/3 1|4 + 3x^3 1|4 - (25x^2)/2 1|4 + 124/3 x 1|4 dx

aplicando barrow nos queda:
-85 + 189 - 187.5 + 124 = 40.5

ahora sumando las dos partes

40,5 + 56,89 = 97,48