Diferenciabilidad

Ya han visto en el apunte de teoría que una función des diferenciable en punto $P_0(x_0;y_0)$ perteneciente a su dominio si se cumple:

$\text{Lím}[(x;y)\to(x_0;y_0)]$ ($f(x;y)$ – [$f(x_0;y_0)$ + $f_x(x_0;y_0)*(x - x_0)$ + $f_y(x_0;y_0)*(y - y_0)$]/$\sqrt{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]}$) = 0,

y observen que para que este límite exista deben cumplirse tres condiciones necesarias:

1°) la función debe estar definida en el punto en estudio $P_0(x_0;y_0)$,
2°) la derivada parcial de la función con respecto a x debe existir en el punto en estudio $P_0(x_0;y_0)$,
3°) la derivada parcial de la función con respecto a y debe existir en el punto en estudio $P_0(x_0;y_0)$,

y observen además que **si alguna de estas condiciones necesarias no se cumple, entonces tienen que la función no es diferenciable en el punto en estudio $P_0(x_0;y_0)$**.

Luego, vamos con algunos teoremas sobre diferenciabilidad, que iremos viendo en este apunte:

- T_1: "Si una función es diferenciable en el punto en estudio, entonces también es continua en dicho punto";
- T_2: "Si una función no es continua en el punto en estudio, entonces no es diferenciable en dicho punto";
- T_3: "Si las dos derivadas parciales de la función son continuas en el punto en estudio, entonces la función es diferenciable en dicho punto";
- T_4: "Si una función es diferenciable en el punto en estudio, entonces tiene vector gradiente para dicho punto, y su gráfica admite plano tangente en dicho punto";
- T_5: "Si una función es diferenciable en el punto en estudio, entonces admite derivadas en todas direcciones en dicho punto";
- T_6: "Si una función no admite derivadas en todas direcciones en el punto en estudio, entonces no es diferenciable en dicho punto";

y tengan presente que pueden aplicar estos teoremas cuando sea preciso (aquí tengan muy en cuenta que debe cumplirse la hipótesis, o antecedente, del teorema que quieran emplear, para luego poder aplicarlo).

Vamos con algunos ejemplos en los que estudiaremos la diferenciabilidad de algunas funciones en puntos pertenecientes a sus dominios, y observen que siempre que sea posible apelaremos a los Teoremas, y como último recurso a la definición de Diferenciabilidad.

1)

Tienen la expresión de la función:

$$f(x;y) = sen(x^2+y^2),$$

observen que el domino de esta función es el conjunto: D = R^2, y observen además que es continua en todo su dominio, ya que se trata de una composición de funciones continuas en dicho conjunto, pero observen que no disponemos de un teorema cuya hipótesis sea la continuidad de la función, por lo que planteamos las expresiones de las derivadas parciales de la función, y queda:

$$f_x(x;y) = 2*x*cos(x^2+y^2)$$

y

$$f_y(x;y) = 2*y*cos(x^2+y^2),$$

y observen que **estas dos funciones son continuas en R^2**, ya que son multiplicaciones y composiciones de funciones continuas en dicho conjunto, por lo que aplican el Teorema 3, y pueden concluir que la función es diferenciable en todo su dominio.

2)

Tienen la expresión de la función:

$$f(x;y) = \sqrt{(1 - x^2 - y^2)} = \sqrt{(1 - [x^2+y^2])},$$

observen que el dominio de esta función es el conjunto: D = { (x;y) ∈ R^2 : $x^2 + y^2 \leq 1$ }, cuya representación gráfica es un disco circular cerrado con centro en el origen de coordenadas y radio igual a uno; luego, observen que pueden distinguir dos clases de puntos pertenecientes al domino de esta función:

1°)

puntos de su frontera, que es la circunferencia cuya ecuación es: $x^2 + y^2 = 1$, y observen que la función está definida en los puntos internos a esta circunferencia, pero no lo está en los puntos inmediatamente externos, por lo que tienen que la función no es continua en un entorno (disco abierto) de cualquier punto de esta frontera, por lo que aplican el Teorema 2, y pueden concluir que la función no es diferenciable en ninguno de los puntos de la circunferencia cuya ecuación es: $x^2 + y^2 = 1$;

2°)

puntos interiores a su frontera, que pertenecen al disco circular abierto que es representación gráfica de las soluciones de la inecuación: $x^2 + y^2 < 1$; luego, plantean las expresiones de las funciones derivadas parciales de la función, y queda:

$$\mathbf{f_x(x;y) = -x/\sqrt{(1 - [x^2+y^2])}}$$

y

$$\mathbf{f_y(x;y) = -y/\sqrt{(1 - [x^2+y^2])}},$$

y observen que los argumentos de las raíces cuadradas toman valores positivos y distintos de cero en todos los puntos en estudio, por lo que tienen que las derivadas parciales son continuas en todos dichos puntos, por ser divisiones entre funciones continuas; luego, aplican el Teorema 3, y pueden concluir que la función es diferenciable en el conjunto: $D_d = \{ (x;y) \in R^2 : x^2 + y^2 < 1 \}$, cuya representación gráfica es el disco circular abierto con centro en el origen de coordenadas y radio igual a uno.

Diferenciabilidad y "funciones partidas"

Tengan presente que si el punto en estudio es el punto que está definido en particular, entonces deben aplicar la definición de diferenciabilidad, y pueden comenzar por verificar el cumplimiento de las tres condiciones necesarias, y recuerden que si alguna de ellas no se cumple, entonces pueden concluir que la función no es diferenciable en el punto en estudio (un camino alternativo previo sería estudiar la continuidad de la función en el punto "notable", y si llegase a no ser continua en dicho punto, entonces según el Teorema 2 podrían concluir que la función no es diferenciable en dicho punto; pero OJO: si la función sí es continua en el punto "notable", entonces no queda más opción que estudiar la diferenciabilidad de la función en el mismo por medio de la definición).

3)

Tienen la expresión de la función "partida":

$$\mathbf{f(x;y) =} \begin{cases} \mathbf{x/(x^2+y^2)} & \mathbf{si\ (x;y) \neq (0;0)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{si\ (x;y) = (0;0)}, \end{cases}$$

observen que el dominio de esta función es $D = R^2$, y observen que tienen un punto para el cuál la función está definida en forma particular: **A(0;0)**, y ustedes pueden demostrar que la función no es continua en dicho punto (pueden plantear límites iterados o trayectorias rectilíneas, por ejemplo), por lo que aplican el Teorema 2 y pueden concluir que la función no es diferenciable en el punto en estudio A(0;0),

y para los demás puntos, pueden plantear las expresiones de las funciones derivadas parciales, y verificar que existen y son continuas para todo punto distinto de A(0;0), por lo que aplican el Teorema 3 y pueden concluir que la función es diferenciable en el conjunto: $D_d = R^2 - \{(0;0)\}$.

4)

Tienen la expresión de la función "partida":

f(x;y) =

$x*y^2/(x^2+y^2)$	**si $(x;y) \neq (0;0)$**
0	**si $(x;y) = (0;0)$**,

observen que el dominio de esta función es $D = R^2$, y observen que aquí vuelven a tener al origen de coordenadas como punto particular, y a todos los demás puntos definidos con la expresión del primer trozo;

luego, queda para ustedes demostrar que la función es continua en R^2, y que es diferenciable en el conjunto: $R^2 - \{(0;0)\}$, y como la continuidad no es condición suficiente para asegurar diferenciabilidad en el punto A(0;0), para este punto aplicaremos la definición de diferenciabilidad, y comenzaremos por verificar que se cumplen las tres condiciones necesarias (observen que plantearemos las derivadas parciales por medio de sus definiciones):

1°)

$f(0;0)$ = **0** (se cumple);

2°)

$f_x(0;0)$ = $Lím(h\to0)$ [$f(0+h;0) - f(0;0)$]/h = $Lím(h\to0)$ [$f(h;0) - 0$]/h = $Lím(h\to0)$ [$f(h;0)$]/h =

= $Lím(h\to0)$ [$h*0^2/(h^2+0^2)$]/h = $Lím(h\to0)$ [$0/h^2$]/h = $Lím(h\to0)$ [$0/h^3$] = $Lím(h\to0)$ [0] = **0**,

por lo que tienen que la derivada con respecto a x en el origen de coordenadas existe y es igual a cero;

3°)

$f_y(0;0)$ = $Lím(k\to0)$ [$f(0;0+k) - f(0;0)$]/k = $Lím(k\to0)$ [$f(0;k) - 0$]/k = $Lím(k\to0)$ [$f(0;k)$]/k =

= $Lím(k\to0)$ [$0*k^2/(0^2+k^2)$]/k = $Lím(k\to0)$ [$0/k^2$]/k = $Lím(k\to0)$ [$0/k^3$] = $Lím(k\to0)$ [0] = **0**,

por lo que tienen que la derivada con respecto a y en el origen de coordenadas existe y es igual a cero; pero:

OJO aquí, porque no sabemos si las funciones derivadas parciales son continuas o discontinuas en el punto en estudio; luego, como se cumplen las tres condiciones necesarias, plantean el límite que tienen en la definición, observen que reemplazamos las coordenadas nuestro punto en estudio: A(0;0), y queda:

$$\text{Lím}[(x;y)\to(0;0)]\ (\ f(x;y) - [\ f(0;0) + f_x(0;0)*(x - 0) + f_y(0;0)*(y - 0)\ ]/\sqrt{[(x-0)^2+(y-0)^2]}\ ) =$$

reemplazan los valores correspondientes a las expresiones coloreadas:

$$= \text{Lím}[(x;y)\to(0;0)]\ (\ f(x;y) - [\ 0 + 0*(x - 0) + 0*(y - 0)\ ]/\sqrt{[(x-0)^2+(y-0)^2]}\ ) =$$

cancelan todos los términos nulos:

$$= \text{Lím}[(x;y)\to(0;0)]\ (\ f(x;y) / \sqrt{[x^2+y^2]}\ ) =$$

sustituyen la expresión de la función en el numerador:

$$= \text{Lím}[(x;y)\to(0;0)]\ [\ (\ x*y^2/(x^2+y^2)\ ) / \sqrt{(x^2+y^2)}\ ] =$$

resuelven la división de expresiones en el argumento del límite:

$$= \text{Lím}[(x;y)\to(0;0)]\ [\ x*y^2 / [(x^2+y^2)*\sqrt{(x^2+y^2)}]\ ] =$$

resuelven la expresión en el denominador del argumento del límite:

$$= \text{Lím}[(x;y)\to(0;0)]\ [\ x*y^2 / (x^2+y^2)^{3/2}\ ] = \textbf{no existe},$$

y pueden ustedes demostrar que este límite no existe (por ejemplo, planteando trayectorias rectilíneas cuya ecuación general es: y = m*x, o por medio del cambio a coordenadas polares), por lo que pueden concluir que **esta función no es diferenciable en el punto en estudio A(0;0)**, y queda que sí lo es en el conjunto: $\mathbf{D_d = R^2 - \{(0;0)\}}$.

5)

Tienen la expresión de la función "partida":

f(x;y) =

$x^2*y^2/(x^2+y^2)$	si $(x;y) \neq (0;0)$
0	si $(x;y) = (0;0)$,

observen que el dominio de esta función es D = R^2, y observen que aquí vuelven a tener al origen de coordenadas como punto particular, y a todos los demás puntos definidos con la expresión del primer trozo;

luego, queda para ustedes demostrar que la función es continua en R^2, y que sus derivadas parciales son continuas en R^2 – {(0;0)} y, de acuerdo con el Teorema 3, ya tendrían demostrado que la función es diferenciable en dicho conjunto;

pero, como la continuidad de la función en el punto A(0;0) no es condición suficiente para asegurar la diferenciabilidad en dicho punto, entonces aplicaremos la definición de diferenciabilidad, y comenzaremos por verificar que se cumplen las tres condiciones necesarias (observen que plantearemos las derivadas parciales por medio de sus definiciones):

1°)

$f(0;0)$ = **0** (se cumple);

2°)

$f_x(0;0)$ = Lím(h→0) [f(0+h;0) – f(0;0)]/h = Lím(h→0) [f(h;0) – 0]/h = Lím(h→0) [f(h;0)]/h =

= Lím(h→0) [h^2*0^2/(h^2+0^2)]/h = Lím(h→0) [0/h^2]/h = Lím(h→0) [0/h^3] = Lím(h→0) [0] = **0**,

por lo que tienen que la derivada con respecto a x en el origen de coordenadas existe y es igual a cero;

3°)

$f_y(0;0)$ = Lím(k→0) [f(0;0+k) – f(0;0)]/k = Lím(k→0) [f(0;k) – 0]/k = Lím(k→0) [f(0;k)]/k =

= Lím(k→0) [0^2*k^2/(0^2+k^2)]/k = Lím(k→0) [0/k^2]/k = Lím(k→0) [0/k^3] = Lím(k→0) [0] = **0**,

por lo que tienen que la derivada con respecto a y en el origen de coordenadas existe y es igual a cero; pero:

<u>OJO aquí, porque no sabemos si las funciones derivadas parciales son continuas o discontinuas en el punto en estudio</u>; luego, como se cumplen las tres condiciones necesarias, plantean el límite que tienen en la definición, y queda (observen que reemplazamos la coordenadas del origen de coordenadas, que es nuestro punto en estudio):

Lím[(x;y)→(0;0)] (f(x;y) – [f(0;0) + $f_x(0;0)$*(x - 0) + $f_y(0;0)$*(y - 0)]/√[(x-0)²+(y-0)²]) =

reemplazan los valores correspondientes a las expresiones coloreadas:

= **Lím[(x;y)→(0;0)] (f(x;y) – [0 + 0*(x - 0) + 0*(y - 0)]/√[(x-0)²+(y-0)²])** =

cancelan todos los términos nulos:

= **Lím[(x;y)→(0;0)] (f(x;y) / √[x²+y²])** =

sustituyen la expresión de la función en el primer término en el numerador:

= **Lím[(x;y)→(0;0)] [(x²*y²/(x²+y²)) / √(x²+y²)]** =

asocian factores y divisores en el argumento del límite (observen que buscamos que algunos de los factores sean expresiones que permitan acotar):

= **Lím[(x;y)→(0;0)] [x * [y²/(x²+y²)] * [x/√(x²+y²)]]** = ¿**0 = L**?

y pueden <u>proponer</u> este resultado ya que tienen coloreada una expresión que permiten acotar, y un factor "sobrante" que hace que el límite tienda a cero;

luego, plantean el Teorema de Encaje (o, si prefieren, el cambio a coordenadas polares) para demostrar que este nuevo límite existe y es igual a cero, y queda:

$$0 \leqslant | x * [y^2/(x^2+y^2)] * [x/\sqrt{(x^2+y^2)}] – L| =$$

reemplazan el valor del límite propuesto, y queda:

$$= | x * [y^2/(x^2+y^2)] * [x/\sqrt{(x^2+y^2)}] - 0| =$$

cancelan el término nulo, aplican la propiedad del valor absoluto de una multiplicación, y queda:

$$= |x| * |y^2/(x^2+y^2)| * |x/\sqrt{(x^2+y^2)}| \leqslant$$

aquí **acotan**, y queda:

$$\leqslant |x| * 1 * 1 =$$

resuelven esta expresión (observen que el argumento del valor absoluto es positivo):

$$= |x| = g(x;y).$$

que es la expresión de la "función de acotación"; luego, plantean su límite, y queda:

$$\text{Lím}_{(x;y) \to (0;0)}\, g(x;y) = \text{Lím}_{(x;y) \to (0;0)} [\, |x| \,] = 0,$$

y pueden concluir que la función en estudio es diferenciable en el punto **A(0;0)**;
luego, como tienen demostrado que también es diferenciable en los demás puntos de su dominio, entonces pueden concluir que **esta función sí es diferenciable en todo su dominio, que es el conjunto R^2**.

Función Linealización y Plano Tangente

Recuerden que en Matemática 2 ustedes estudiaron gráficas de funciones derivables, que eran curvas continuas y "suaves" (no presentaban interrupciones ni "puntos angulosos" o "picos"). Ahora, para funciones de dos variables que son diferenciables, tenemos que sus gráficas son superficies "suaves" en todo un entorno del punto en estudio (son continuas y no presentan interrupciones, ni aristas, ni picos, ni "rajaduras", ni "bordes").

Luego, si tienen una función de dos variables f(x;y) que es diferenciable en el punto en estudio $P_0(x_0;y_0)$, entonces tienen que esta función admite función de linealización en dicho punto, cuya expresión general es:

$$L_{P_0}(x;y) = f(x_0;y_0) + f_x(x_0;y_0)*(x – x_0) + f_y(x_0;y_0)*(y – y_0),$$

cuya gráfica tiene la ecuación cartesiana explícita:

$$z = f(x_0;y_0) + f_x(x_0;y_0)*(x – x_0) + f_y(x_0;y_0)*(y – y_0),$$

y es el plano tangente a la gráfica de la función correspondiente al punto en estudio;

y recuerden que **las únicas funciones que admiten función linealización, y cuyas gráficas admiten plano tangente en un punto de su dominio, son las funciones que son diferenciables en dicho punto**.

Luego, vamos con algunos ejemplos.

6)

$f(x;y) = e^{x^2+y^2}$, en el punto **A(1 ; 1 ; f(1;1))** que pertenece a su gráfica,

aquí observen que el valor de la tercera coordenada del punto A es: **$f(1;1) =$** $e^{1^2+1^2}$ **$= e^2$**,
y observen que la expresión del punto en estudio es: **$P_0(1;1)$**, y observen que este punto pertenece al dominio de la función, que es el conjunto: **$D = R^2$**.

Luego, plantean las expresiones de las funciones derivadas parciales, y queda (observen que ambas funciones son continuas en R^2, por lo que tienen que la función es diferenciable en dicho conjunto, de acuerdo con el Teorema 3):

$f_x(x;y) = 2*x*e^{x^2+y^2}$, que al evaluarla en el punto en estudio queda: **$f_x(1;1) = 2*e^2$**,

$f_y(x;y) = 2*y*e^{x^2+y^2}$, que al evaluarla en el punto en estudio queda: **$f_y(1;1) = 2*e^2$**;

luego, sustituyen las expresiones numéricas remarcadas en la expresión de la función linealización y en la ecuación del plano tangente, y queda:

$$L_{Po}(x;y) = e^2 + 2*e^2*(x - 1) + 2*e^2*(y - 1),$$

$$z = e^2 + 2*e^2*(x - 1) + 2*e^2*(y - 1),$$

y ustedes pueden apelar a un recurso informático, y poder apreciar que la superficie que es gráfica de la función, y el plano tangente son “muy próximos” en un entorno del punto en estudio.

Aproximaciones con funciones linealización

Las funciones linealización permiten estimar valores de una función diferenciable en un punto cercano al punto en estudio, por ejemplo:

7)

Dada la función cuya expresión es:

$$\mathbf{f(x;y) = x^2 + y^4 + e^{x*y}},$$

a) plantear la expresión de su función linealización en el punto: $\mathbf{P_0(1;0)}$,

b) estimar el valor de la función en el punto: P(0,98;0,05).

Luego, vamos con un desarrollo por etapas:

1°)

Expresión de la función linealización

Planteamos las expresiones necesarias, y queda:

$\mathbf{f(1;0)} = 1^2 + 0^4 + e^{1*0} = 1 + 0 + 1 = \mathbf{2}$,

$f_x(x;y) = 2*x + 0 + y*e^{x*y}$, que evaluada en el punto en estudio queda: $\mathbf{f_x(1;0) = 2}$,

$f_y(x;y) = 0 + 4*y^3 + x*e^{x*y}$, que evaluada en el punto en estudio queda: $\mathbf{f_x(1;0) = 1}$,

reemplazan los valores remarcados en la expresión general de la función linealización, y queda:

$$L_{Po}(x;y) = 2 + 2*(x – 1) + 1*(y – 0),$$

cancelan el término nulo y resuelven el coeficiente en el último término, y queda:

$$\mathbf{L_{Po}(x;y) = 2 + 2*(x – 1) + y};$$

2°)

Estimación del valor de la función

observen que tienen el punto en consideración:

P(0;98;0,05), cuyas coordenadas son: **x = 0,98**, e **y = 0,05**;

luego, plantean la ecuación de aproximación, y queda:

$$\mathbf{f(x;y) \cong L_{Po}(x;y)},$$

luego, sustituyen la expresión de la función linealización, y queda:

$$\mathbf{f(x;y) \cong 2 + 2*(x - 1) + y},$$

reemplazan las coordenadas del punto en consideración:

$$\mathbf{f(0{,}98;0{,}05) \cong 2 + 2*(0{,}98 - 1) + 0{,}05},$$

resuelven términos en el segundo miembro, y queda:

$$f(0{,}98;0{,}05) \cong 2 - 0{,}04 + 0{,}05,$$

resuelven, y queda:

$$\mathbf{f(0{,}98;0{,}05) \cong 2{,}010},$$

luego, observen que el valor que obtienen con las calculadoras es: **f(0,98;0,05)** ≅ **2,010**627…, y observen que obtuvieron una buena aproximación, y ello se debe al que el punto en consideración: P(0,98;0,05) y el punto en estudio: $P_0(1;0)$ son muy próximos.

Por último, pueden apreciar que los valores de la función en un entorno del punto en estudio, en este ejemplo: $P_0(1;0)$ son muy próximos a los valores que toma la función linealización, por lo que tienen que la superficie que es gráfica de la función, y el plano tangente que es gráfica de la función linealización están muy próximas ente sí, en un entorno del punto en estudio.

Repaso: producto escalar (o producto punto, o producto interno) de dos vectores

Recuerden que en Matemática 1 vieron que el producto escalar (o producto punto) de dos vectores es igual a un número, que se puede obtener de dos maneras equivalentes (consideramos los vectores cuyas expresiones son: u = < a ; b ; c > y v = < m ; n ; p >, e indicamos con θ al ángulo determinado por ellos, y con |u| y |v| a sus módulos):

$$\mathbf{u \bullet v = a*m + b*n + c*p},$$

o

$$\mathbf{u \bullet v = |u|*|v|*cos\theta},$$

que son las expresiones del producto escalar del vector u por el vector v en función de las componentes de los vectores, y en función de sus módulos y del ángulo determinado por dichos vectores, respectivamente.

Veamos una aplicación:

Dados los vectores: **u = < 1 ; 4 ; -2 >** y **v = < 0 ; -1 ; 6 >**, calcular la medida del ángulo determinado por ellos.

Luego, vamos con un desarrollo por etapas.

1°)
Plantean la expresión del producto escalar de estos dos vectores, en función de sus componentes, y queda:

$$\mathbf{u \bullet v =} 1*0 + 4*(-1) - 2*6 \mathbf{= -16};$$

2°)
plantean las expresiones de los módulos de los vectores, y queda:

$$\mathbf{|u| =} \sqrt{(1^2 + 4^2 + [-2]^2)} \mathbf{= \sqrt{(21)}},$$
$$\mathbf{|v| =} \sqrt{(0^2 + (-1)^2 + 6^2)} \mathbf{= \sqrt{(37)}};$$

3°)
plantean la expresión del producto escalar de los dos vectores en función de sus módulos y del ángulo determinado por ellos, y queda:

$$\mathbf{u \bullet v = |u|*|v|*cos\theta},$$

y de aquí despejan:

$$\mathbf{cos\theta = u \bullet v / (|u|*|v|)},$$

reemplazan valores que ya tienen calculados, y queda:

$$\cos\theta = -16 / [\sqrt{(21)} * \sqrt{(37)}],$$

resuelven el segundo miembro, y queda:

$$\cos\theta \cong -0{,}574,$$

componen en ambos miembros con la función inversa del coseno, y queda:

$$\theta \cong 125{,}029°.$$

Función vector gradiente

Definimos a la función vector gradiente a la función vectorial cuyas componentes son las derivadas parciales de una función diferenciable:

"Si **f(x;y)** es la expresión de una función de dos variables diferenciable en un punto P(x;y) perteneciente a su dominio, entonces su función vector gradiente queda expresada:

$$\nabla f(x;y) = < f_x(x;y) \,;\, f_y(x;y) >",$$

y análogamente:

"Si **f(x;y;z)** es la expresión de una función de tres variables diferenciable en un punto P(x;y;z) perteneciente a su dominio, entonces su función vector gradiente queda expresada:

$$\nabla f(x;y;z) = < f_x(x;y;z) \,;\, f_y(x;y;z) \,;\, f_z(x;y;z) >",$$

y en forma análoga se pueden definir las funciones vectores gradientes para funciones diferenciables de cuatro o más variables.

Propiedades

La derivada parcial de una función con respecto a x puede calcularse como el producto escalar de la función vector gradiente, por el vector unitario (o versor) característico del eje X, (recuerden que este vector característico está aplicado en el origen de coordenadas del plano XY, y que su extremos es el punto M(1;0), y que su expresión es: i = < 1 ; 0 >):

$$\begin{aligned}
&\mathbf{\nabla f(x_0;y_0) \bullet i =}\\
&= < f_x(x_0;y_0) \,;\, f_y(x_0;y_0) > \bullet < 1 \,,\, 0 > =\\
&= f_x(x_0;y_0)*1 + f_x(x_0;y_0)*0 =\\
&= f_x(x_0;y_0) + 0 =\\
&\mathbf{= f_x(x_0;y_0)};
\end{aligned}$$

y análogamente, la derivada parcial de una función con respecto a y puede calcularse como el producto escalar de la función vector gradiente, por el vector unitario (o versor) característico del eje Y, (recuerden que este vector característico está aplicado en el origen de coordenadas del plano XY, y que su extremos es el punto N(0;1), y que su expresión es: j = < 0 ; 1 >):

$$\begin{aligned}
&\mathbf{\nabla f(x_0;y_0) \bullet j =}\\
&= < f_x(x_0;y_0) \,;\, f_y(x_0;y_0) > \bullet < 0 \,,\, 1 > =\\
&= f_x(x_0;y_0)*0 + f_y(x_0;y_0)*1 =\\
&= 0 + f_y(x_0;y_0) =\\
&\mathbf{= f_y(x_0;y_0)};
\end{aligned}$$

y este procedimiento puede aplicarse para calcular la derivada de la función en la dirección de cualquier <u>vector unitario</u>: u = < a ; b >, cuyo módulo es igual a uno:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{\nabla f(x_0;y_0) \bullet u =}\\
&= < f_x(x_0;y_0) \,;\, f_y(x_0;y_0) > \bullet < a \,,\, b > =\\
&= f_x(x_0;y_0)*a + f_y(x_0;y_0)*b =\\
&\mathbf{= D_u f(x_0;y_0)},
\end{aligned}$$

y aclaramos que las derivadas direccionales también tienen sus definiciones, las que no emplearemos en este curso.

Vamos con algunos ejemplos.

8)

Dada la función cuya expresión es: $f(x;y) = x*y^2 + e^x$, calcular su derivada direccional en el punto $P_0(0;1)$, en la dirección del vector: U = < -3 ; 4 >.

Para comenzar, observen que la función es diferencianble en R^2, ya que se trata de una suma de funciones diferenciables en dicho conjunto; luego, plantean las expresiones de sus funciones derivadas parciales, y queda:

$f_x(x;y) = y^2 + e^x$, que evaluada en el punto en estudio queda: $\mathbf{f_x(0;1) = 2}$,
$f_y(x;y) = 2*x*y + e^x$, que evaluada en el punto en estudio queda: $\mathbf{f_y(0;1) = 1}$,

por lo que la expresión de la función vector gradiente evaluada en el punto en estudio queda:

$$\mathbf{\nabla f(0;1) = < 2 ; 1 >};$$

luego, tienen la expresión del vector que determina la dirección:

$$U = < -3 ; 4 >,$$

y observen que <u>no es un vector unitario</u>, y que su módulo tiene la expresión:

$$|U| = \sqrt{([-3]^2 + 4^2)} = \sqrt{(25)} = 5,$$

por lo que plantean la expresión de su vector unitario (o versor) asociado, y queda:

$$\mathbf{u =} U/|U|,$$

reemplazan expresiones, y queda:

$$\mathbf{u =} < - 3 ; 4 >/5,$$

resuelven, y queda:

$$\mathbf{u = < -3/5 ; 4/5 >};$$

luego, plantean la expresión de la derivada de la función en el punto y en la dirección indicada, y queda:

$$\mathbf{D_u f(0;1) =}$$
$$= \nabla f(0;1) \cdot u =$$
$$= < 2 ; 1 > \cdot < -3/5 ; 4/5 > =$$
$$= 2*(-3/5) + 1*(4/5) =$$

$= -6/5 + 4/5 =$

$\mathbf{= -2/5}$,

y, por ejemplo, como este valor es negativo, pueden concluir que la función es decreciente en la dirección del vector unitario u.

Valores máximos y mínimos de las derivadas direccionales

Comiencen por plantear la expresión general de las derivadas direccionales de una función diferenciable, en un punto perteneciente a su dominio:

$\mathbf{D_u f(x_0;y_0) =}$

$= \nabla f(x_0;y_0) \bullet u =$

desarrollan este producto escalar en función de los módulos de las expresiones vectoriales y del ángulo determinado por la dirección del vector gradiente evaluado en el punto en estudio y el vector unitario que determina la dirección en estudio, y queda:

$= |\nabla f(x_0;y_0)| * |u| * \cos\theta =$

reemplazan el valor del módulo del vector unitario (recuerden: $|u| = 1$), resuelven, y queda:

$\mathbf{= |\nabla f(x_0;y_0)| * \cos\theta}$,

que es la expresión de la derivada direccional evaluada en el punto en estudio, en función del valor del módulo del vector gradiente evaluado en dicho punto, y del ángulo determinado por dicho vector con el vector unitario que determina la dirección;

luego, **recuerden que en Matemática 1 vieron que la función coseno toma valores comprendidos entre -1 (que es su valor mínimo) y 1 (que es su valor máximo)**, por lo que tienen dos situaciones destacables:

1°)

Valor Máximo de las derivadas direccionales de una función evaluadas en un punto de su dominio

Observen que como el máximo valor del coseno del ángulo es 1, que corresponde a: $\theta = 0°$, entonces tienen que cuando el vector gradiente evaluado en el punto en estudio tiene la misma dirección y el mismo sentido que el vector unitario dirección, tienen el valor máximo de las derivadas direccionales:

$$\mathbf{D_{uM}f(x_0;y_0) =}$$
$$= |\nabla f(x_0;y_0)| * \cos(0) =$$
$$= |\nabla f(x_0;y_0)| * 1 =$$
$$\mathbf{= |\nabla f(x_0;y_0)|},$$

que corresponde a la "dirección de máximo aumento de la función", que queda expresada por el vector unitario:

$$\mathbf{u_M = \nabla f(x_0;y_0) / |\nabla f(x_0;y_0)|};$$

2°)

Valor mínimo de las derivadas direccionales de una función evaluadas en un punto de su dominio

Observen que como el mínimo valor del coseno del ángulo es -1, que corresponde a: $\theta = 180°$, entonces tienen que cuando el vector gradiente evaluado en el punto en estudio tiene la misma dirección y el sentido opuesto que el vector unitario dirección, tienen el valor mínimo de las derivadas direccionales:

$$\mathbf{D_{um}f(x_0;y_0) =}$$
$$= |\nabla f(x_0;y_0)| * \cos(180°) =$$
$$= |\nabla f(x_0;y_0)| * (-1) =$$
$$\mathbf{= -|\nabla f(x_0;y_0)|},$$

que corresponde a la "dirección de máxima disminución de la función", que queda expresada por el vector unitario:

$$\mathbf{u_m = -\nabla f(x_0;y_0) / |\nabla f(x_0;y_0)|};$$

y para todas las demás direcciones, tendrán que los valores de las funciones derivadas parciales estarán comprendidos entre los valores máximo y mínimo que hemos planteado y, en particular, tendrán que la derivada de la función será igual a cero para vectores unitarios dirección que sean perpendiculares a los vectores u_M (correspondiente a la derivada direccional con máximo valor), y u_m (correspondiente a la derivada direccional con mínimo valor).

Vamos con un ejemplo.

9)

Dada la función cuya expresión es: **$f(x;y) = x*y^2 + e^x$**, calcular sus derivadas direccionales máxima y mínima en el punto **$P_0(0;1)$**, y determinar las direcciones correspondientes.

Ya tienen determinada en el ejemplo (8) que la expresión de la función vector gradiente (recuerden que la función es diferenciable en R^2) evaluada en el punto en estudio es:

$$\nabla f(0;1) = < 2 ; 1 >,$$

y cuyo módulo tiene la expresión:

$$|\nabla f(0;1)| =$$
$$= \sqrt{(2^2 + 1^2)} =$$
$$= \sqrt{(5)};$$

luego, el vector unitario que determina la dirección de máximo aumento de la función en el punto en estudio queda expresado:

$$u_M =$$
$$= \nabla f(0;1) / |\nabla f(0;1)| =$$
$$= < 2 ; 1 > / \sqrt{(5)} =$$
$$= < 2/\sqrt{(5)} ; 1/\sqrt{(5)} >,$$

y el correspondiente valor máximo de las derivadas direccionales de la función evaluadas en el punto en estudio queda:

$$D_{uM}f(0;1) = |\nabla f(0;1)| = \sqrt{(5)};$$

luego, el vector unitario que determina la dirección de máxima disminución de la función en el punto en estudio queda expresado:

$$u_m =$$
$$= -\nabla f(0;1) / |\nabla f(0;1)| =$$

$= < -2 \,;\, -1 > / \sqrt{(5)} =$

$\mathbf{= < -2/\sqrt{(5)} \,;\, -1/\sqrt{(5)} >}$,

y el correspondiente valor mínimo de las derivadas direccionales de la función evaluadas en el punto en estudio queda:

$\mathbf{D_{um}f(0;1) =}$

$= -|\nabla f(0;1)| =$

$\mathbf{= -\sqrt{(5)}}$.