Teoría de la Computación y Verificación de Programas - 2021

Horario, plantel docente, material, inscripción:

- **Teoría.** Martes de 19 a 21 hs. Clases virtuales por Teams. Asistencia no obligatoria pero recomendable.
- **Práctica.** Jueves de 19 a 21 hs. Clases virtuales por Zoom. Asistencia no obligatoria pero recomendable.
- **Clase comodín (plan de contingencias).** Lunes de 19 a 21 hs.
- **Trabajos prácticos.** Cada 2 semanas**,** para ejercitarse. Las entregas no son obligatorias pero se recomienda hacerlas (si no, costará seguir la materia). Los ejercicios se discuten con el plantel docente.
- **Plantel docente:** Prof. Ricardo Rosenfeld. JTP Leandro Mendoza. Ayudante Pedro Dal Bianco.
- **Material básico.** Publicado en el sitio IDEAS (programa, contenidos, calendario, clases, bibliografía).
- **Inscripción.** En el Sistema Guaraní y en el sitio IDEAS.

Teoría de la Computación y Verificación de Programas - 2021

Estructura:

- **Parte 1. Computabilidad.** 5 clases teóricas y 5 clases prácticas.
- **Parte 2. Complejidad Computacional.** 4 clases teóricas y 4 clases prácticas.
- **Parte 3. Verificación de Programas.** 4 clases teóricas y 4 clases prácticas.
- **Dictada.** 13 semanas, desde el martes 9-Mar hasta el viernes 4-Jun.
  Semanas del 7-Jun, 14-Jun y 21-Jun: consultas.
  Martes 29-Jun: Examen (Promoción) Fecha 1.
  Martes 6-Jul: Examen (Promoción) Fecha 2.
  Martes 13-Jul: Examen (Promoción) Fecha 3.
- **Receso Invernal.** 2 semanas, desde el lunes 19-Jul hasta el viernes 30-Jul.
- **Fin del Semestre.** Sábado 7-Ago.
- **Aprobación de la Materia.** Se considera todo: examen, concepto en las clases, trabajos prácticos.

Teoría de la Computación y Verificación de Programas - 2021

Alguna bibliografía:

BÁSICA

R. Rosenfeld & J. Irazábal. 2013. *Computabilidad, Complejidad Computacional y Verificación de Programas*. EDULP. Edición digital. **En IDEAS.**

R. Rosenfeld & J. Irazábal. 2010. *Teoría de la Computación y Verificación de Programas*. McGraw Hill y EDULP. **En IDEAS.**

C. Pons, R. Rosenfeld & C. Smith. 2017. *Lógica para Informática*. EDULP. Edición digital. **En IDEAS.**

COMPLEMENTARIA

Hopcroft & Ullman. 1979. *Introduction to Automata Theory, Language & Computation*. Prentice-Hall.

H. Lewis & C. Papadimitriou. 1998. *Elements of the Theory of Computation*. Prentice-Hall.

M. Sipser. 1997. *Introduction to the Theory of Computation*. PWS Publishing.

S. Arora & B. Barak. 2007. *Computational Complexity: A Modern Approach*. Princeton Univ.

C. Papadimitriou. 1995. *Computational Complexity*. Addison-Wesley.

O. Goldreich. 2008. *Computational Complexity: A Conceptual Perspective*. Cambridge University Press.

Bovet & Crescenzi. *Introduction to the Theory of Complexity*. Prentice-Hall. 1994.

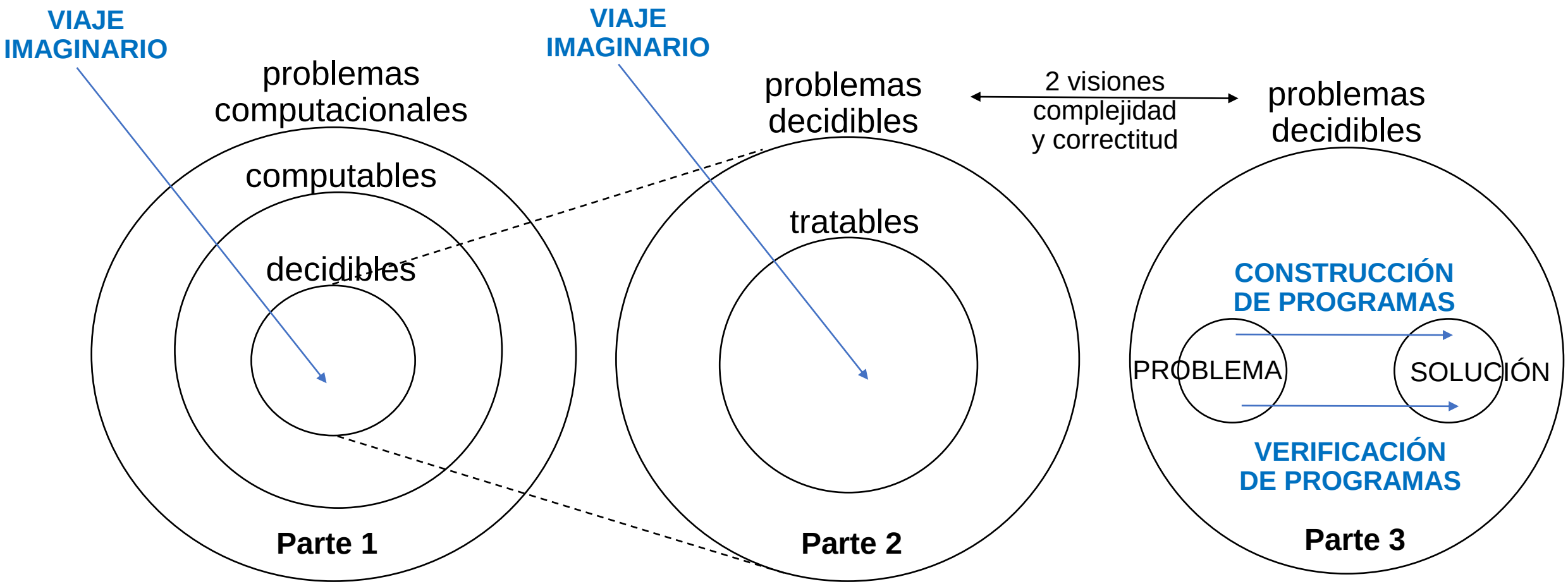
C. Moore & S. Mertens. 2011. *The Nature of Computation*. Oxford University Press.

N. Francez. 1992. *Program Verification*. Addison-Wesley.

K. Apt & F. Olderog. 1997. *Verification of Sequential and Concurrent Programs*. Springer.

M. Huth & M. Ryan. 2004. *Logic in Computer Science*. Cambridge University Press.

Introducción



Mapa de la computabilidad
años 1930
Máquinas de Turing

Mapa de la complejidad computacional
años 1960
Máquinas de Turing

Correctitud de programas
años 1970
Programas While

INTRODUCCIÓN

Viaje imaginario

- Desde los confines del universo de los problemas computacionales hacia su interior.
- Problemas no computables, computables indecidibles, computables decidibles intratables, computables decidibles tratables.

Viaje complementario a uno ya emprendido

- Luego de un viaje de ida, recorriendo algorítmica, programación, estructuras de datos, lenguajes de programación, testing, matemáticas, …
- … viaje de vuelta, para volver a recorrerlos con mayor madurez, desde una óptica más formal y abstracta, centrados en los fundamentos de la Teoría de la Computación.
- Temas: computabilidad, complejidad computacional, teoría de autómatas, lenguajes formales, gramáticas, lógica, inducción, diagonalización, autorreferencia, reducciones de problemas, teoría de grafos, teoría de conjuntos, combinatoria, números cardinales y ordinales, infinitos).

Introducción

Algo de historia:

- Años 1900. Necesidad de **formalizar las matemáticas para evitar inconsistencias** (p.ej. la Paradoja de Russell en el marco de la Teoría de Conjuntos - obra de Frege -). En simultáneo, siguen los intentos por automatizar los cálculos con máquinas (iniciados siglos atrás por Pascal, Leibniz, Babbage).

- Los formalistas. Hilbert. De la semántica a la sintaxis. La búsqueda de un esquema mecánico para **demostrar todas las verdades matemáticas**. El *Entscheidungsproblem* (el problema de decisión).

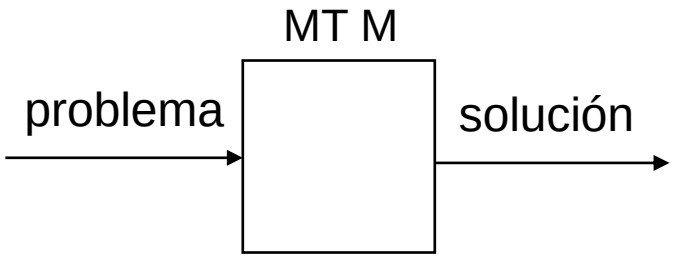
- **Primer fracaso.** Gödel. 1931. Teoría de Incompletitud. No existe una lógica consistente y completa para toda la aritmética. Hay verdades de la aritmética que no se pueden demostrar mecánicamente.

- **Segundo fracaso.** Turing y Church. 1936. Máquinas de Turing y Lambda Cálculo. Indecidibilidad (más profunda que la incompletitud). Hay enunciados acerca de los cuales no se puede establecer mecánicamente si son verdaderos o falsos.

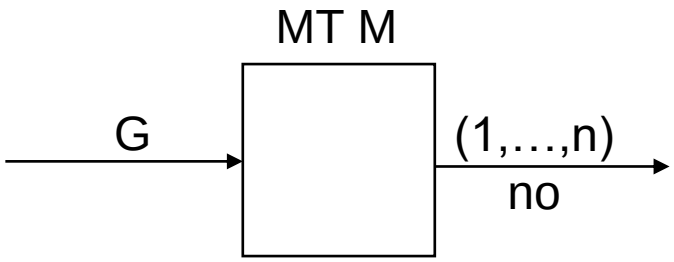
- **Origen de la Teoría de la Computación.** “Lo computable”. Máquina de Turing. Tesis de Church-Turing. Otros modelos (funciones recursivas, gramáticas, Máquina de Post, etc). 1ras computadoras (EEUU, Inglaterra, años 1940 y 1950). Complejidad computacional (años 1960). Lógica para programación (años 1970).

Clase 1. Máquinas de Turing (MT).

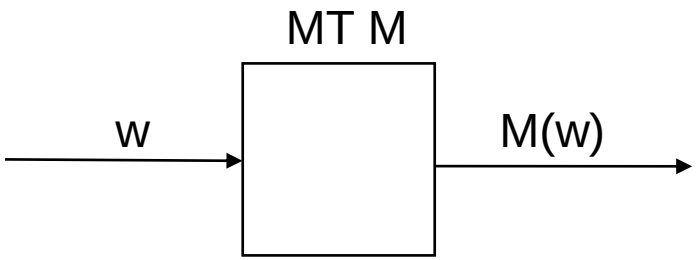
Modelo matemático simple de una computadora



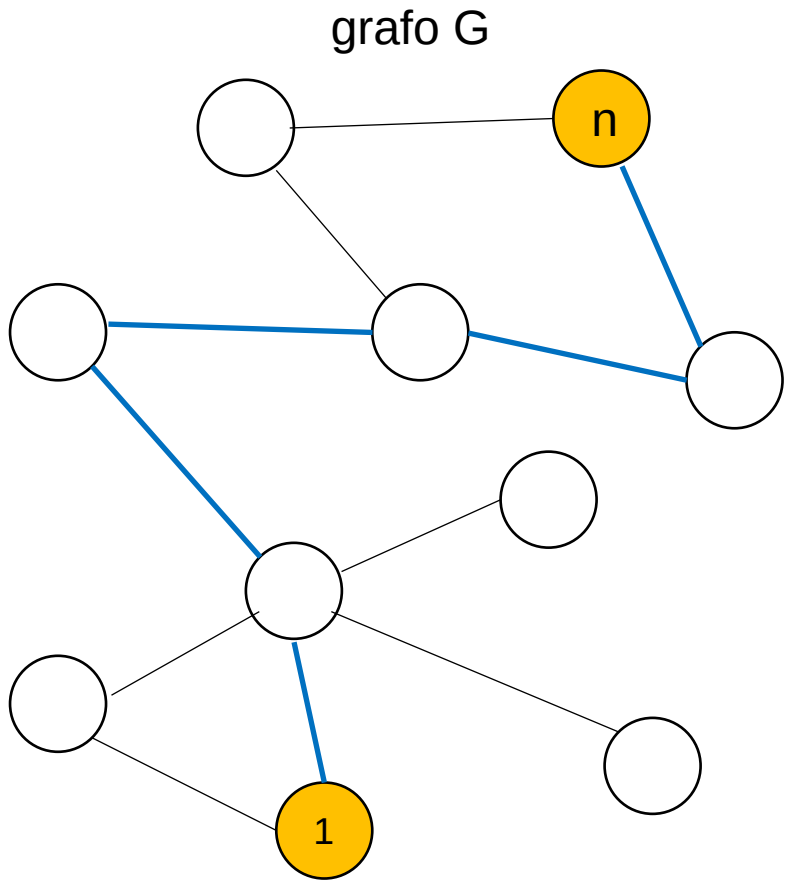
El **algoritmo** de M **devuelve** una solución al problema



Ejemplo: dado un grafo G, M devuelve si existe un camino en G del vértice 1 al vértice n, y si no existe responde no

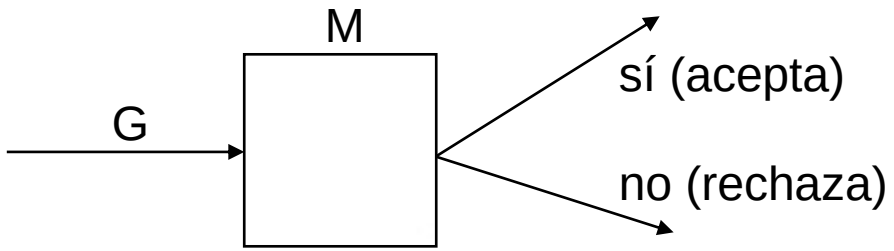


Genéricamente, w es el **input** y M(w) es el **output**

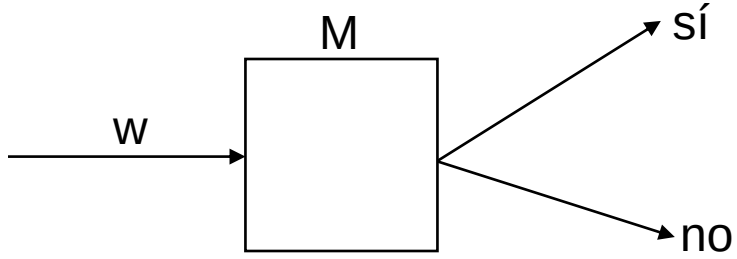


camino del vértice 1 al vértice n

Problema similar pero más simple: dado un grafo G, ¿existe en G un camino del vértice 1 al vértice n? Este es un problema de **decisión**, no de **búsqueda**.



M **acepta** si y sólo si G tiene un camino del vértice 1 al vértice n



M **decide** a partir del input w

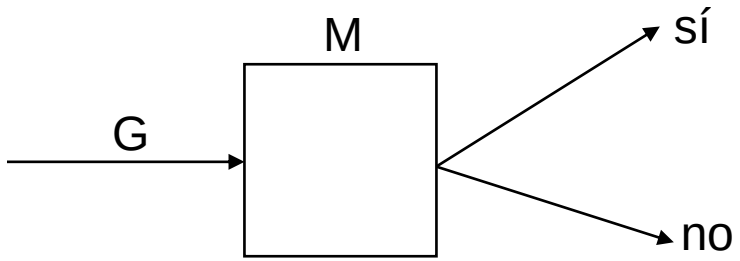
Otro ejemplo: dada una fórmula booleana φ, por ejemplo: $(x_1 \vee x_2) \wedge (x_3 \wedge x_4)$, ¿existe una asignación A de valores de verdad, que la satisface, es decir que la hace verdadera? Por ejemplo, A1 = (V, F, V, V) satisface φ, y A2 = (F, F, V, V) no.

De los problemas generales de **búsqueda** a los problemas particulares de **decisión:** estos últimos son más simples para estudiar la computabilidad y complejidad computacional (y veremos luego, también útiles para inferir sobre los problemas de búsqueda).

Precisando la ventaja de enfocarnos en los problemas de decisión:

Logramos trabajar directamente con **lenguajes** (conjuntos de cadenas de símbolos), que es más sencillo. Volviendo al ejemplo anterior:

Problema del camino en un grafo G:



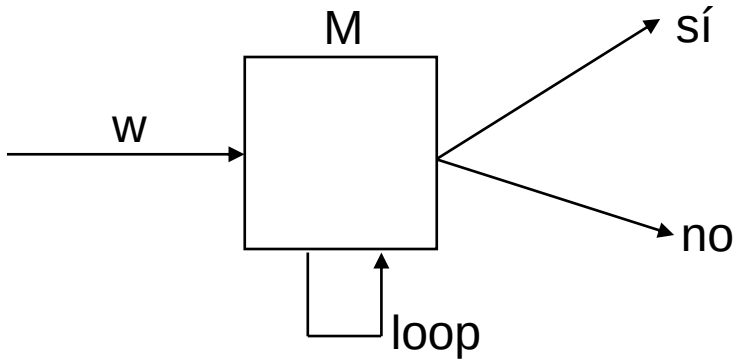
La MT M **acepta** todas las cadenas G que representan grafos con un camino del vértice 1 al vértice n

En otras palabras, M **acepta,** o **reconoce,** o **decide,** el siguiente lenguaje:
L(M) = {G | G es un grafo y G tiene un camino del vértice 1 al vértice n}.

Salvo indicación en contrario, trabajaremos con esta visión, de MT **reconocedora**. Así, problemas y lenguajes serán sinónimos en este contexto.

¡Inconveniente!:

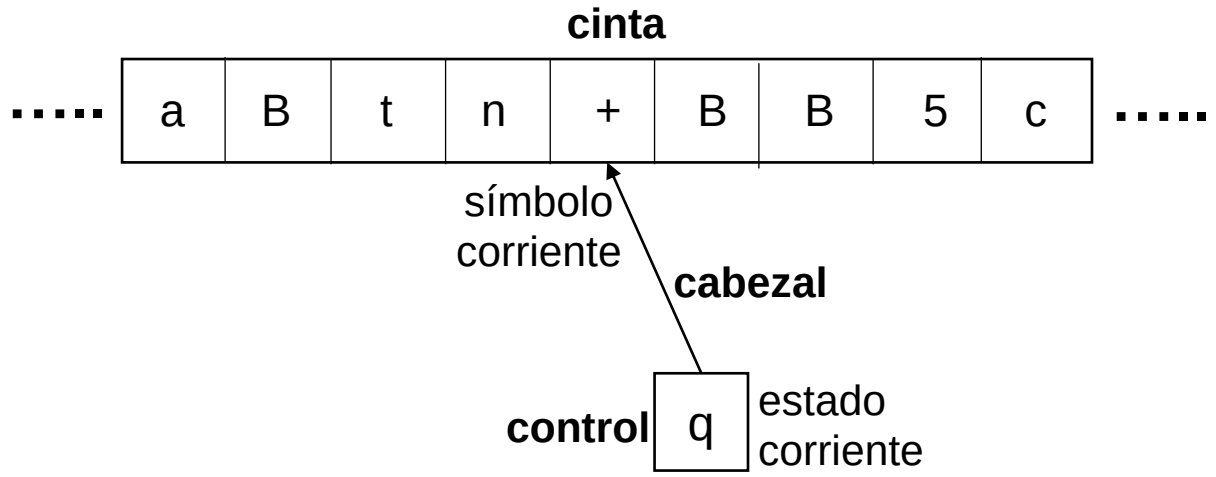
Veremos que el caso más general de MT corresponde a este esquema:



Es decir, para algunos problemas **NO existen MT que siempre paran**.

Es el caso de los problemas **indecidibles:** toda MT M que pretenda resolver un problema así cumplirá que en algunos casos negativos, es decir en que $w \notin L(M)$, en lugar de responder no M “loopeará”, no terminará, no emitirá respuesta alguna.

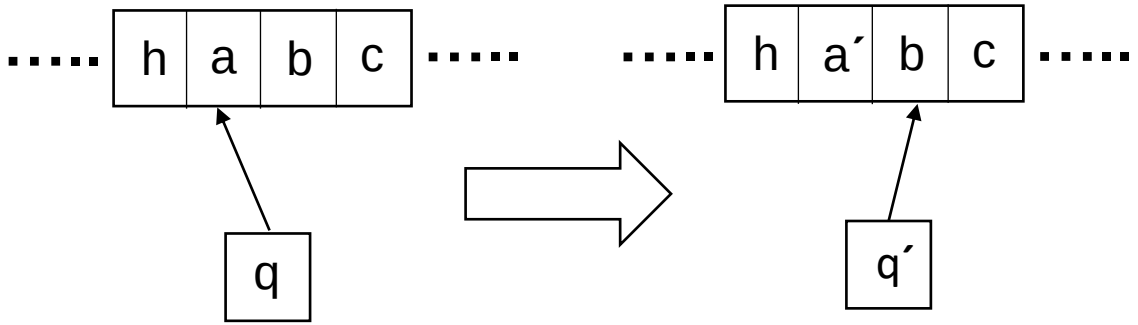
Descripción formal de una Máquina de Turing



Tesis de Church-Turing

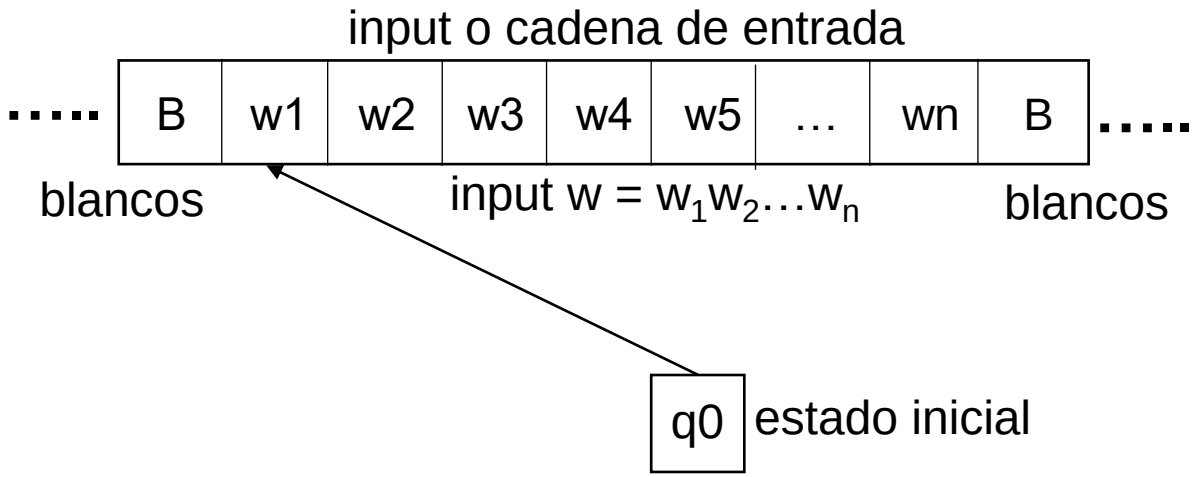
¡Todo lo computable puede ser resuelto por una Máquina de Turing!

En un paso, una MT puede modificar el símbolo corriente, el estado corriente, y moverse un lugar a derecha o izquierda. Por ejemplo:



un paso de la MT

Al inicio, el input se delimita por blancos, y el cabezal apunta al 1er símbolo de la izquierda:



Formalmente, una MT M es una tupla ($Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_A, q_R$):

- Q es el conjunto de **estados** de M
- Σ es el **alfabeto de los inputs** de M
- Γ es el **alfabeto de las cadenas de la cinta** de M

  Se cumple: $\Sigma \subseteq \Gamma$. Convención: $B \in (\Gamma - \Sigma)$, siendo B el símbolo blanco.

Nota: podría omitirse en la descripción de la MT M, el alfabeto Σ de los inputs.

- q_0 es el **estado inicial** de M
- q_A y q_R son los **estados finales** de aceptación y rechazo de M, respectivamente

- δ es la **función de transición** de M (la que especifica el comportamiento de M):

$$\delta : Q \times \Gamma \rightarrow (Q \cup \{q_A, q_R\}) \times \Gamma \times \{L, R, S\}$$

Dado un estado corriente y un símbolo corriente, la máquina pasa a un nuevo estado (o el mismo), pasa también a un nuevo símbolo (o el mismo), y se mueve un lugar a la derecha, la izquierda o se queda en la misma celda. L representa el movimiento a la izquierda, R a la derecha, y S el no movimiento.

La máquina **se detiene** si para el estado corriente y el símbolo corriente la función δ no está definida.

Por ejemplo, en la página anterior se usó: δ(q, a) = (q´, a', R).

(Mini) repaso sobre lenguajes

- Σ es un alfabeto o conjunto de **símbolos**:

  $\Sigma = \{w_1, w_2, w_3, \ldots\}$

- Σ* es el lenguaje o conjunto de cadenas de símbolos generado a partir de Σ:

  $\Sigma^* = \{\lambda, w_1, w_2, w_3, \ldots, w_1w_1, w_1w_2, w_1w_3, \ldots, w_1w_1w_1, w_1w_1w_2, \ldots\}$

  Σ* es **infinito**. Sus cadenas son **finitas**. λ es la **cadena vacía**.

- Todo lenguaje L que consideraremos será un subconjunto de Σ*, siendo Σ un único alfabeto que tomaremos como referencial, **universal**:

  $L \subseteq \Sigma^*$. Expresado de otra manera: $L \in P(\Sigma^*)$.

  $P(\Sigma^*)$ es el conjunto de partes de Σ*, es decir, el conjunto de todos sus subconjuntos.

- Operaciones típicas entre lenguajes: $L_1 \cap L_2$, $L_1 \cup L_2$, $L_1 - L_2$, L^C, $L_1 . L_2$, etc.

Ejemplo con MT

L = {$a^n b^n$ | n ≥ 1}. Es decir, L = {ab, aabb, aaabbb, …}

Queremos construir una MT M que acepte (o decida) L, es decir tal que L(M) = L

1. Idea General. Un posible algoritmo podría ser:

aaaaabbbbb

αaaaabbbbb

αaaaaβbbbb

ααaaaβbbbb

ααaaaββbbb

……..

αααααβββββ

2. Construcción.

La correspondiente MT $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_A, q_R)$ sería así:

- $Q = \{q_0, q_a, q_b, q_L, q_H\}$

  q_0 : estado inicial q_a : M busca una a q_b : M busca una b q_L : M vuelve q_H : no hay más a

- $\Sigma = \{a, b\}$

- $\Gamma = \{a, b, \alpha, \beta, B\}$

Nota: en la construcción que presentamos a continuación hemos optado por diferenciar q_0 de q_a. Podría pensarse una manera en que sean el mismo estado.

Función de transición δ

1. $\delta(q_0, a) = (q_b, \alpha, R)$
2. $\delta(q_a, a) = (q_b, \alpha, R)$
3. $\delta(q_a, \beta) = (q_H, \beta, R)$
4. $\delta(q_b, a) = (q_b, a, R)$
5. $\delta(q_b, b) = (q_L, \beta, L)$
6. $\delta(q_b, \beta) = (q_b, \beta, R)$
7. $\delta(q_L, a) = (q_L, a, L)$
8. $\delta(q_L, \alpha) = (q_a, \alpha, R)$
9. $\delta(q_L, \beta) = (q_L, \beta, L)$
10. $\delta(q_H, \beta) = (q_H, \beta, R)$
11. $\delta(q_H, B) = (q_A, B, S)$

Todos los casos omitidos en la descripción son de rechazo.
Por ejemplo: $\delta(q_0, b) = (q_R, b, S)$.

Forma alternativa de describir la función de transición δ

	a	b	α	β	B
q_0	q_b, α, R				
q_a	q_b, α, R			q_H, β, R	
q_b	q_b, a, R	q_L, β, L		q_b, β, R	
q_L	q_L, a, L		q_a, α, R	q_L, β, L	
q_H				q_H, β, R	q_A, B, S

Las celdas en blanco representan los casos de rechazo (estado q_R)

3. Prueba de L(M) = L.

- Si **w ∈ L**, entonces w tiene la forma $a^n b^n$, con n ≥ 1.
  Entonces, por cómo está definida la función de transición δ, claramente a partir de w **la MT M acepta w**, es decir que w ∈ L(M).
  Esto no es formal. Formalmente, esta parte podría probarse por inducción, primero considerando n = 1 y luego n > 1.

- Si **w ∉ L**, entonces M no tiene la forma $a^n b^n$, con n ≥ 1.
  Entonces se cumple que **la MT M rechaza w,** es decir que w ∉ L(M):
  - Si w = λ, M rechaza porque no está definido en δ el par (q_0, B).
  - Si w empieza con b, M rechaza porque no está definido en δ el par (q_0, b).
  - Etc.

- Queda como ejercicio completar la prueba.

Notación

Por ejemplo, volviendo al problema $L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$:

$q_0aaabbb \vdash_M \alpha q_b aabbb \vdash_M \alpha a q_b abbb \vdash_M \ldots$
El estado corriente precede al símbolo corriente. El símbolo $\vdash_M$ representa un paso de M.

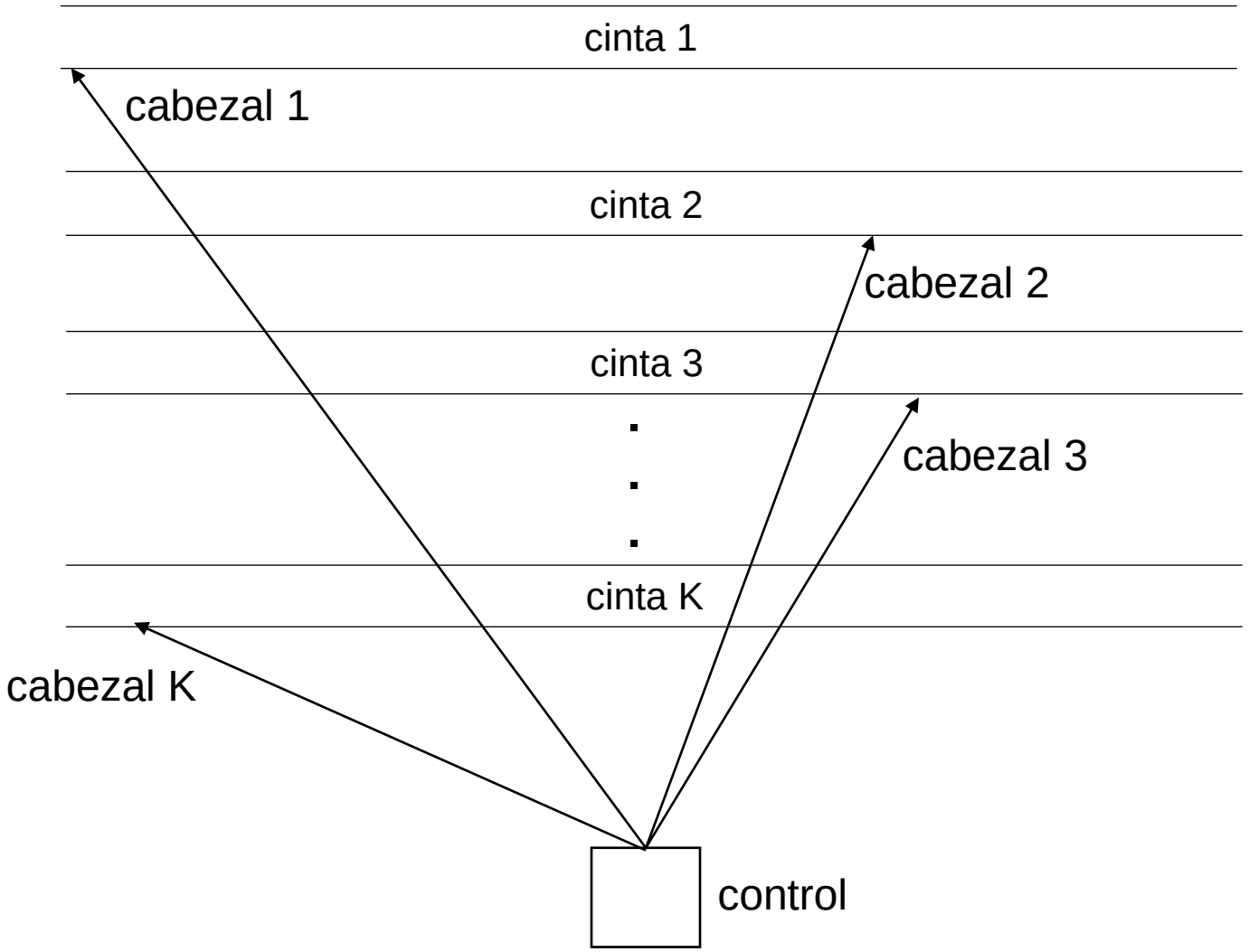
$q_0aaabbb \vdash^*_M \alpha\alpha\alpha\beta\beta\beta q_A$
En varios pasos (representados por el símbolo $\vdash^*_M$) se pasa de $q_0aaabbb$ a $\alpha\alpha\alpha\beta\beta\beta q_A$

Genéricamente, las MT arrancan con la configuración:
$q_0 w_1 w_2 w_3 \ldots w_n$

y si paran, terminan en una configuración:
$x q_A y$ o bien **$x q_R y$**, siendo x e y cadenas

Otro caso, ahora de rechazo, del ejemplo anterior, es:
$q_0a \vdash_M \alpha q_b \vdash_M \alpha q_R$, y así: $q_0a \vdash^*_M \alpha q_R$

Máquinas de Turing con varias cintas (MT con K cintas)



Características generales de las MT con K cintas:

- En cada cinta la MT se comporta de manera **independiente**
- La cinta 1 contiene el **input**
- La MT se comporta como siempre según su función de transición δ, que ahora:

  1. En cada paso lee un estado y una K-tupla de símbolos (los apuntados por los cabezales 1 a K)
  2. Modifica eventualmente el estado
  3. Modifica cero, uno o más símbolos
  4. Se mueve independientemente en cada cinta (derecha, izquierda o nada)

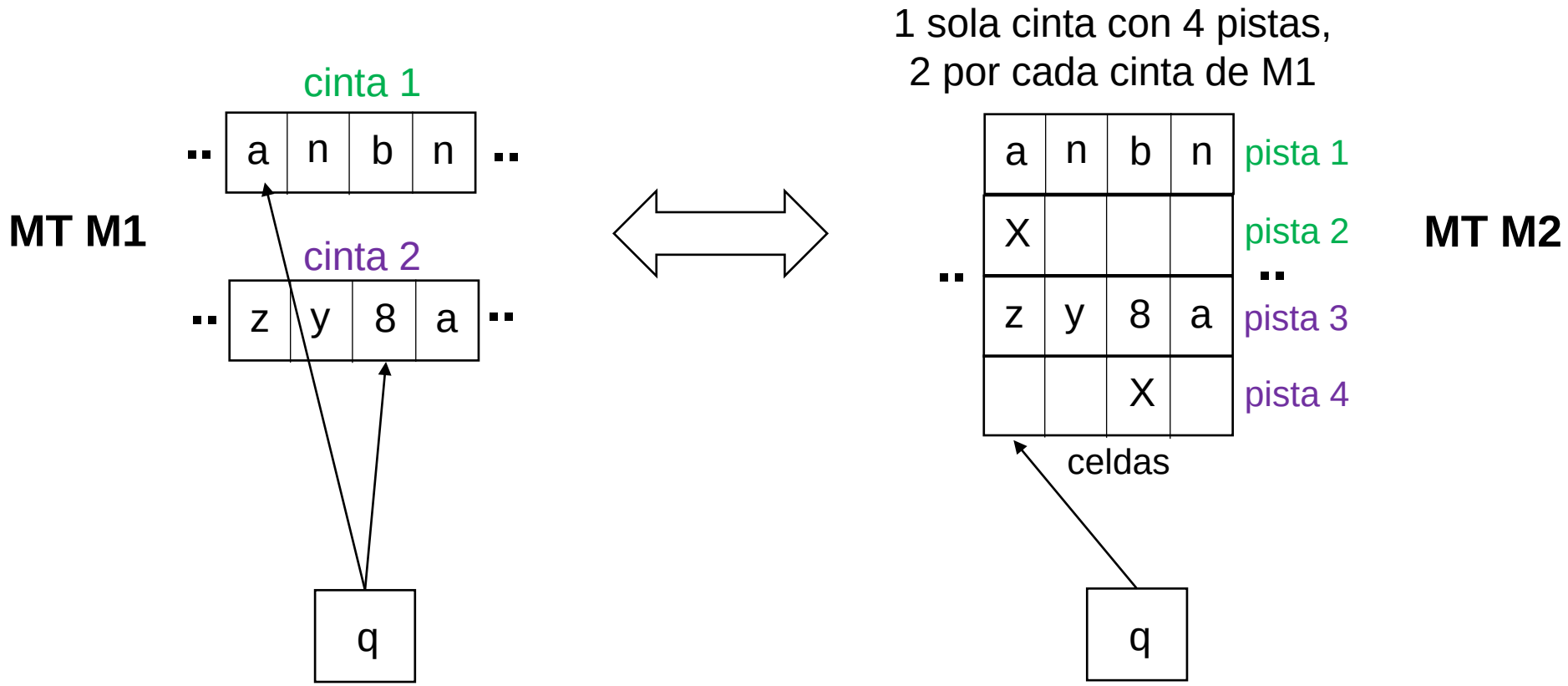
- Ahora tenemos entonces:

$$\delta: Q \times \Gamma^K \rightarrow (Q \cup \{q_A, q_R\}) \times (\Gamma \times \{L, R, S\})^K$$

- Por ejemplo, para el caso de 3 cintas, abreviando algunos paréntesis, una transición posible sería:

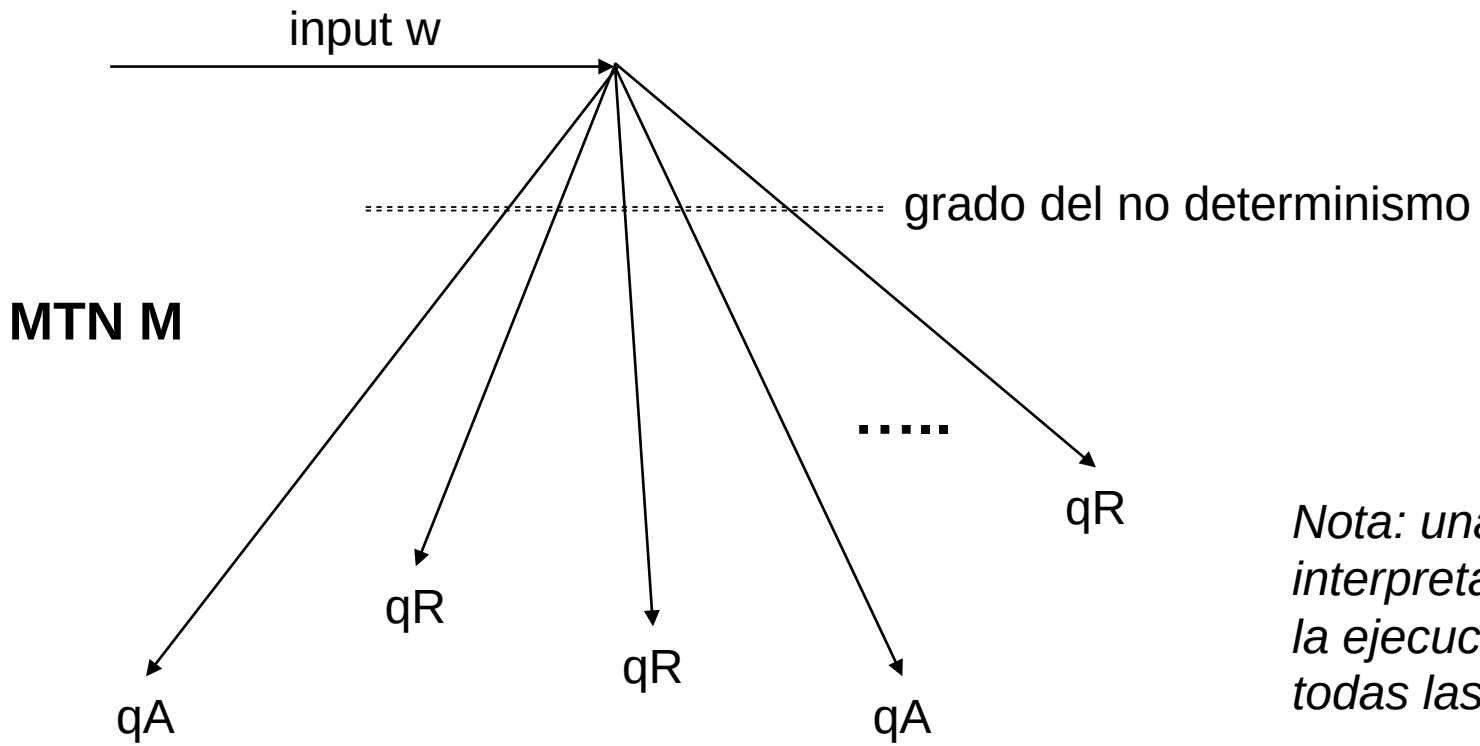
$$\delta(q, (a, b, c)) = (q', (a, R), (b', L), (c', S))$$

Aunque no es intuitivo, una MT con K cintas **no tiene más potencia computacional** que una MT con 1 cinta (es decir, sin considerar el tiempo, lo que hace una MT con K cintas lo puede hacer una MT con 1 cinta). Por ejemplo:



Idea general para la simulación de M1 por M2: uso de **cintas con pistas**. En el ejemplo, 2 cintas se simulan con 1 cinta con 4 pistas. Lo que sí, la MT M2 tardará más que la MT M1 (orden cuadrático): h pasos de M1 se simulan con unos $4 + 8 + 12 + \ldots + 4h = 4h(h+1)/2 = O(h^2)$ pasos de M2.

Máquinas de Turing no determinísticas (MTN)



Nota: una manera de interpretarla es considerando la ejecución en paralelo de todas las computaciones.

- En lugar de una **función** de transición δ, M tiene una **relación** de transición Δ, es decir que para un mismo par (q, a), la máquina puede responder de más de una manera. Por ejemplo:
  $\Delta(q, a) = \{(q_1, a_1, L), (q_2, a_2, R), (q_3, a_3, S)\}$
- La relación de transición se define así: **$\Delta: Q \times \Gamma \rightarrow P((Q \cup \{q_A, q_R\}) \times \Gamma \times \{L, R, S\})$**
- Una MTN acepta si y sólo si **al menos** una computación acepta

Las MTN tampoco introducen mayor potencia computacional (es decir, sin considerar el tiempo, lo que hace una MTN lo puede hacer una MT estándar o determinística, es decir una MTD):

- La simulación de una MTN con una MTD consiste en recorrer una a una las computaciones de la MTN y aceptar si y sólo si se encuentra una computación que acepta.

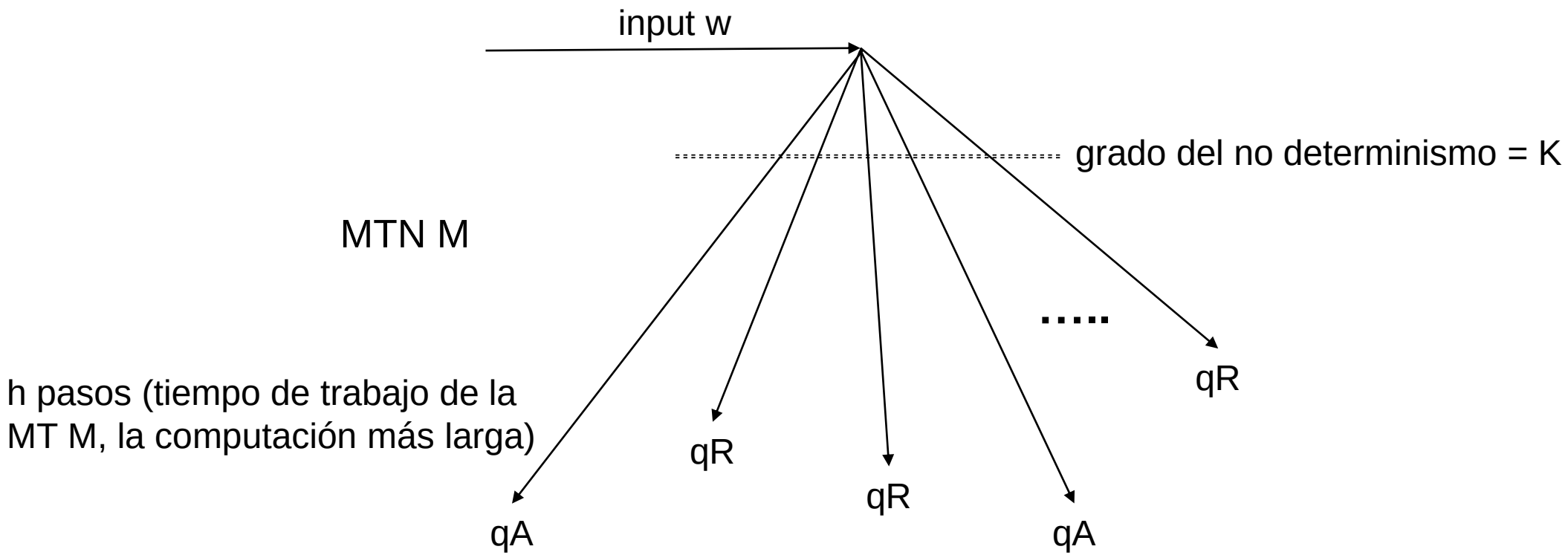
- Para evitar el problema de las computaciones que no paran, el recorrido debe ser **a lo ancho** (BFS), no a lo largo (DFS).

- Las MTN no deben tomarse como “máquinas reales”, se usan más que nada para **abreviar las descripciones de las MT**. Veremos su uso fundamentalmente en la parte de complejidad computacional.

Vimos que simular una MT con K cintas mediante una MT con 1 cinta, hace que el tiempo de ejecución se eleve a un **orden cuadrático**.

En el caso de las MTN el retardo es mayor, es **exponencial,** como se muestra a continuación:

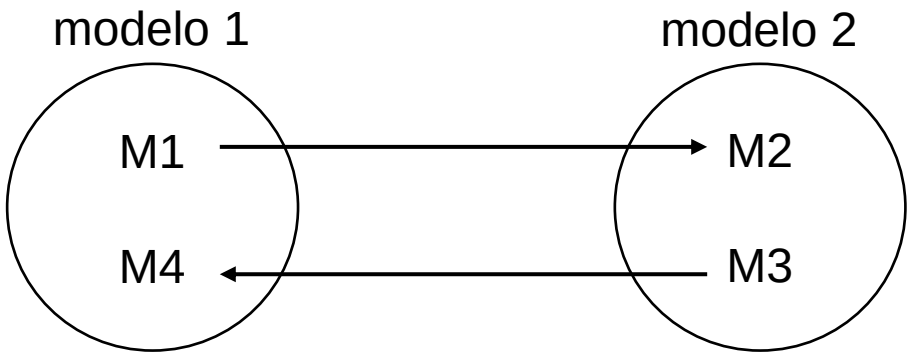
Tiempo de retardo para simular una MTN con una MT estándar (determinística o MTD):



Si el grado de la relación Δ es K, y la computación más larga tiene h pasos, entonces la simulación debe recorrer **a lo sumo K^h computaciones de a lo sumo h pasos cada una**, es decir un **número exponencial de pasos con respecto a h, siendo h el tiempo en el que trabaja M.**
Por ejemplo, si K = 3 y h = 10, la simulación deberá considerar a lo sumo 3^{10} computaciones de a lo sumo 10 pasos cada una.

Dos MT son equivalentes (computacionalmente) si reconocen el mismo lenguaje.

Dos modelos de MT son equivalentes si dada una MT de un modelo existe una MT equivalente del otro. Ya vimos los casos de las MT con 1 y K cintas, y las MTD y MTN.



Otros modelos equivalentes a las MT estudiadas son las MT con **cintas semi-infinitas**, MT con cintas de **2 dimensiones**, MT con **2 cintas y un solo estado**, etc.

También hay varios modelos computacionales equivalentes a las MT, como las **máquinas RAM**, los **autómatas celulares**, los **circuitos booleanos**, el **lambda cálculo**, las **funciones recursivas parciales**, las **gramáticas**, los **programas Java**, etc. Todo esto refuerza la **Tesis de Church-Turing**.

Clase Práctica 1

1. Ejemplo con MT con K cintas.

Sea L = {w | w ∈ {a, b}* y w es un palíndromo o “capicúa”}.
w es un palíndromo o “capicúa” sii w = w^R, siendo w^R la cadena inversa de w.
Por ejemplo, si w = abb, entonces w^R = bba.

Queremos construir una MT M que acepte L.

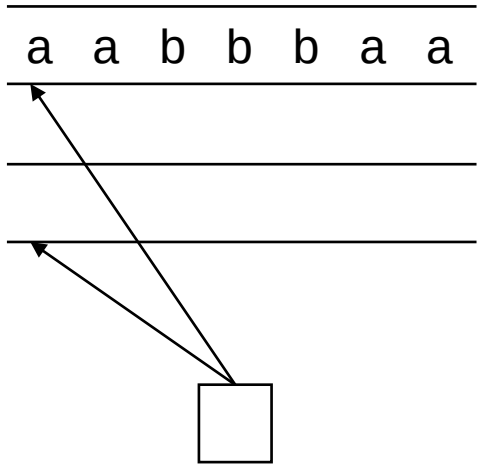
Idea general: MT con 2 cintas, que hace:

1. Copiar el input, de la cinta 1 a la cinta 2

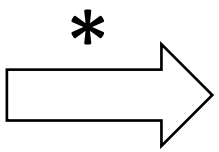
2. Volver a apuntar al 1er símbolo de la cinta 1 (dejar como está el 2do cabezal)

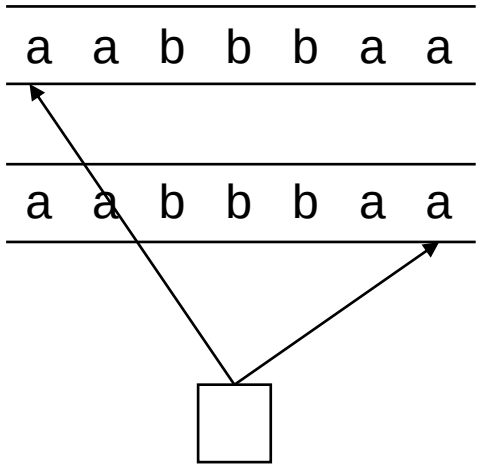
3. Comparar los símbolos apuntados (al comienzo el 1ro de la cinta 1 y el último de la cinta 2):

   - Si son distintos, rechazar
   - Si son iguales y blancos, aceptar
   - En otro caso moverse un lugar a derecha en la cinta 1, un lugar a izquierda en la cinta 2, y volver al paso (3)



Configuración inicial





Situación luego del paso 2 (en realidad, conjunto de pasos 2) de la MT

Si el input mide n símbolos, la MT hace unos 3n pasos (**tiempo lineal**): unos n pasos para copiar la cinta 1 en la 2, unos n pasos para volver a ubicar el cabezal de la cinta 1 al comienzo, y unos n pasos para comparar los símbolos de las 2 cintas.

Usando una cinta, en cambio, **el tiempo es cuadrático**. Por ejemplo, ir a derecha e izquierda tachando primero el 1er y el último símbolo, luego el 2do y el anteúltimo, luego el 3ro y el antepenúltimo, etc., lo que tarda:

$$n + (n -1) + (n - 2) + (n - 3) + \ldots + 2 + 1 = n(n+1)/2 = O(n^2) \text{ pasos.}$$

Función de transición δ de la MT con 2 cintas

q_0: copia de la cinta 1 a la 2; q_1: reposicionamiento en la cinta 1; q_2: comparación de las 2 cintas

	a, a	a, b	a, B	b, a	b, b	b, B	B, a	B, b	B, B
q_0			q_0, a, R, a, R			q_0, b, R, b, R			q_1, B, L, B, L
q_1	q_1, a, L, a, S	q_1, a, L, b, S		q_1, b, L, a, S	q_1, b, L, b, S		q_2, B, R, a, S	q_2, B, R, b, S	q_2, B, S, B, S
q_2	q_2, a, R, a, L	q_R, a, S, b, S		q_R, b, S, a, S	q_2, b, R, b, L				q_A, B, S, B, S

Como siempre, las celdas en blanco son casos de rechazo de la MT.

2. Ejemplo sencillo de uso de MTN

Construir una MTN que acepte todas las cadenas iniciadas por un símbolo de cabecera *h*, seguido por cero o más símbolos *a*, o por cero o más símbolos *b:*

Solución propuesta:

1. $\Delta(q_0, h) = \{(q_a, h, R), (q_b, h, R)\}$
2. $\Delta(q_a, a) = \{(q_a, a, R)\}$
3. $\Delta(q_a, B) = \{(q_A, B, S)\}$
4. $\Delta(q_b, b) = \{(q_b, b, R)\}$
5. $\Delta(q_b, B) = \{(q_A, B, S)\}$

Queda como ejercicio construir una MT estándar (es decir determinística o MTD) para reconocer el lenguaje.

3. Ejemplo con la visión de MT calculadora (problema general, de búsqueda)

Construir una MT que **reste** 2 números representados en notación unaria.

Por ejemplo, dado el input 11111101111, obtener el output 11 (6 – 4 = 2).
Idea general: tachar el primer 1 antes del 0, luego el primer 1 después del 0, luego el segundo 1 antes del 0, y así hasta tachar al final el 0. La construcción queda como ejercicio.
Comentario: en este caso, además del estado final, interesa el contenido final de la cinta.

4. Ejemplo con la visión de MT generadora

Construir una MT que genere **todas** las cadenas de la forma $a^n b^n$, con $n \geq 1$.
Idea general (la construcción queda como ejercicio):

(1) i := 1
(2) imprimir i veces a, imprimir i veces b, e imprimir separador
(3) i := i + 1 y volver a (2)

Comentario: se prueba que las visiones de MT reconocedora y generadora son equivalentes.