Modelos de MT

- Existen numerosos modelos de MT que se han probado equivalentes
- **Definición**. Dos MT M_1 y M_2 son equivalentes sii $L(M_1)=L(M_2)$
- **Definición**. Dos modelos de MT son equivalentes si para cada MT de un modelo existe una MT equivalente en el otro modelo.

Modelos de MT

- **Teorema**: El modelo q_A-q_R de MT visto es equivalente al modelo de MT que comienza su computación apuntando al último símbolo de la cadena de entrada (al que llamaremos también "*ultsim*" para abreviar).

- **Demostración**. Hay que probar 2 cosas:
  - 1) Para toda MT M del modelo q_A-q_R existe una MT M' equivalente que comienza con el cabezal apuntando al último símbolo de la cadena de entrada
  - 2) para toda MT M' del modelo *ultsim* existe una MT M del modelo q_A-q_R equivalente.

Modelos de MT

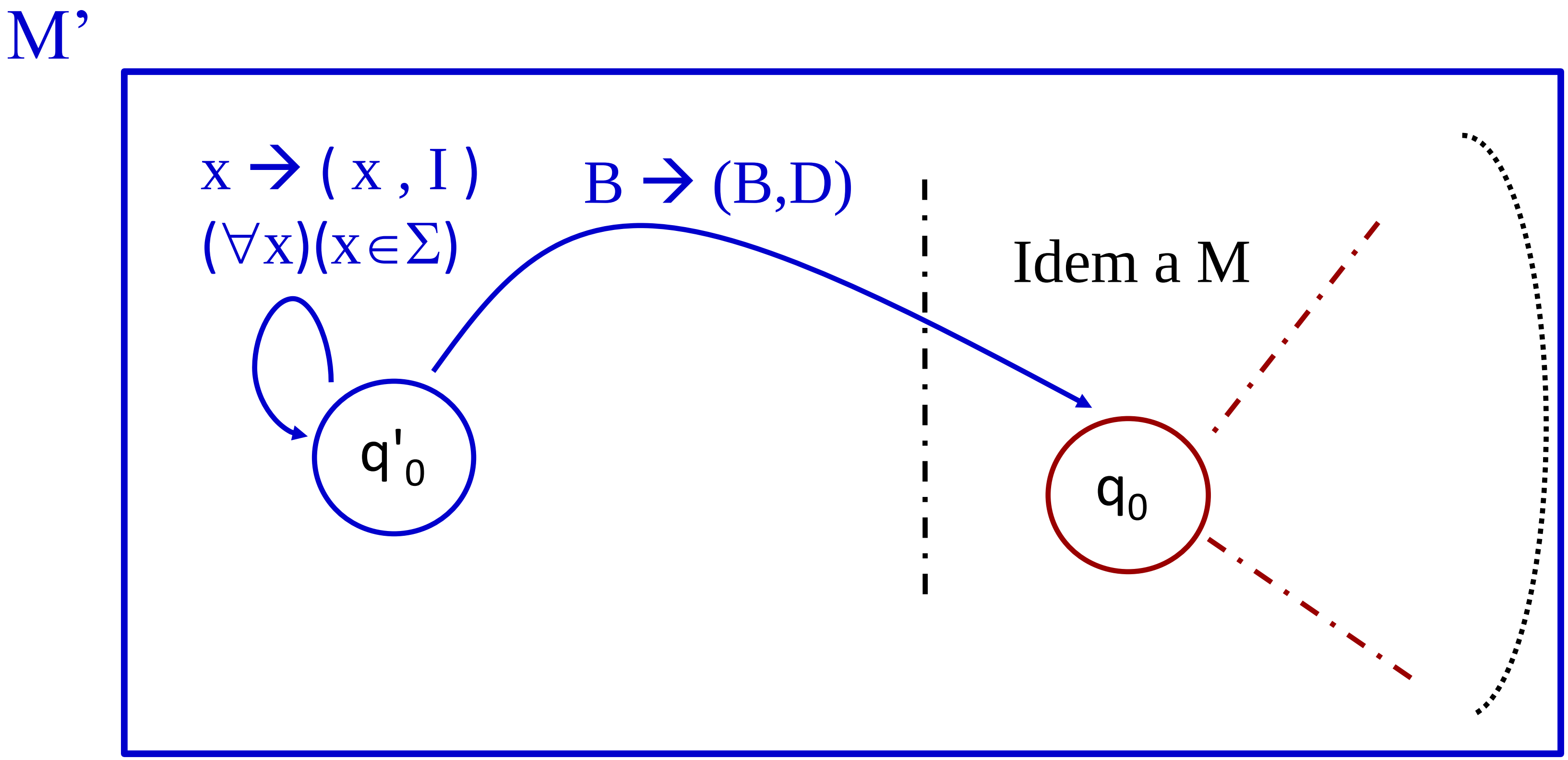
1) Vamos a probar que para toda MT M del modelo q_A-q_R existe una máquina de MT M' del modelo *ultsim* equivalente.

Sea $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_A, q_R \rangle$ una MT arbitraria del modelo q_A-q_R, construiremos M' del modelo *ultsim* tal que L(M') sea igual a L(M)

$M' = \langle Q', \Sigma, \Gamma, \delta', q'_0, q_A, q_R \rangle$

con $Q' = Q \cup \{q'_0\}$ y $q'_0 \notin Q$

Modelos de MT



Notar que la entrada tiene solo símbolos de Σ
¿Qué pasa si la entrada es λ?

Modelos de MT

Definimos $\delta' : Q' \times \Gamma \rightarrow Q' \cup \{q_A, q_R\} \times \Gamma \times \{D, I\}$

a) Si $\delta(q_i, x) = (q_j, y, Z)$ con $x, y \in \Gamma$, $Z \in \{D, I\}$

definimos $\delta'(q_i, x) = (q_j, y, Z)$

(con esto se tiene en M' lo mismo que en M)

b) y agregamos las siguientes transiciones:

$\delta'(q'_0, x) = (q'_0, x, I)$, $(\forall x)(x \in \Sigma)$

$\delta'(q'_0, B) = (q_0, B, D)$

(con esto M' queda apuntando al inicio y en estado q_0)

Hay que probar $L(M) = L(M')$

i) $L(M) \subseteq L(M')$

ii) $L(M') \subseteq L(M)$

Sea $w = s_1 s_2 \ldots s_n \in L(M)$ (si $n = 0$ entonces $w=\lambda$)

$\Rightarrow q_0 s_1 s_2 \ldots s_n \vdash^*_M \alpha q_A \beta$ *(por def. L(M))*

Para M' se cumple que:

$$s_1 s_2 \ldots \underbrace{q'_0 s_n \vdash^*_{M'}}_{\text{(por def. } \delta' \text{ b)}} q_0 s_1 s_2 \ldots \underbrace{s_n \vdash^*_{M'}}_{\text{(por def. } \delta' \text{ a)}} \alpha q_A \beta$$

$\Rightarrow s_1 s_2 \ldots q'_0 s_n \vdash^*_{M'} \alpha q_A \beta$, *(por def. $\vdash^*$)*

$\Rightarrow w \in L(M')$ *por def. L(M') y también se cumple para $w=\lambda$*

Por lo tanto $L(M) \subseteq L(M')$ ✓

Hay que probar $L(M) = L(M')$

i) $L(M) \subseteq L(M')$ ✓

ii) $L(M') \subseteq L(M)$ Usaremos contrarecíproca ($w \notin L(M) \Rightarrow w \notin L(M')$)

Sea $w = s_1 s_2 \ldots s_n$ tal que $w \notin L(M)$, por def. de $L(M)$ se tienen dos casos:

A) M se detiene en q_R con entrada w

B) M no se detiene con entrada w

Traza de M: $q_0 s_1 . s_2 \ldots s_n \vdash^*_M \alpha q_R \beta$,

Traza de M':

$$\underbrace{s_1 s_2 \ldots q'_0 s_n \vdash^*_{M'}}_{\textit{(por def. } \delta'\textit{ b)}} q_0 s_1 s_2 \ldots s_n \underbrace{\vdash^*_{M'}}_{\textit{(por def. } \delta'\textit{ a)}} \alpha q_R \beta$$

$\Rightarrow s_1 s_2 \ldots q'_0 s_n \vdash^*_{M'} \alpha q_R \beta$ *(por def.* $\vdash^*$*)*

$\Rightarrow w \notin L(M')$ *(por def. L(M'))* ✓

Observe que también se cumple para $w=\lambda$

Hay que probar L(M) = L(M')

i) $L(M) \subseteq L(M')$ ✓

ii) $L(M') \subseteq L(M)$ Usaremos contrarecíproca ($w \notin L(M) \Rightarrow w \notin L(M')$)

Sea $w = s_1 s_2 \ldots s_n$ tal que $w \notin L(M)$, por def. de L(M) se tienen dos casos:

A) M se detiene en q_R con entrada $w \Rightarrow w \notin L(M')$ ✓

B) M no se detiene con entrada *w*

A partir de $q_0 s_1 s_2 \ldots s_n$ M nunca se detiene

Para M' se cumple que:

$$\underbrace{s_1 s_2 \ldots q'_0 s_n \; \vdash^*_{M'}}_{\textit{(por def. } \delta' \textit{ b)}} q_0 s_1 s_2 \ldots s_n \text{ y } \underbrace{\text{a partir de aquí M' loopea}}_{\textit{(por def. } \delta' \textit{ a)}}$$

$\Rightarrow$ A partir de $s_1 s_2 \ldots q'_0 s_n$ M' nunca se detiene

$\Rightarrow w \notin L(M')$ *(por def. L(M'))* ✓

Observe que también se cumple para $w=\lambda$

Hay que probar $L(M) = L(M')$

i) $L(M) \subseteq L(M')$

ii) $L(M') \subseteq L(M)$ Usaremos contrarecíproca ($w \notin L(M) \Rightarrow w \notin L(M')$)

Sea $w = s_1 s_2 \ldots s_n$ tal que $w \notin L(M)$, por def. de $L(M)$ se tienen dos casos:

A) M se detiene en q_R con entrada $w \Rightarrow w \notin L(M')$

B) M no se detiene con entrada $w \Rightarrow w \notin L(M')$

Por lo tanto si $w \notin L(M) \Rightarrow w \notin L(M')$ *(por casos A y B)*

Por contrarecíproca si $w \in L(M') \Rightarrow w \in L(M)$.

Por lo tanto $L(M') \subseteq L(M)$.

Hay que probar L(M) = L(M')

i) L(M) $\subseteq$ L(M') ✓

ii) L(M') $\subseteq$ L(M) ✓

$\Rightarrow$ **L(M) = L(M')**

Se ha demostrado que para toda MT M del modelo q_A-q_R existe una MT M' equivalente del modelo *ultsim*

Para demostrar que ambos modelos son equivalentes faltaría demostrar que para toda MT M' del modelo *ultsim* existe una MT M del modelo q_A-q_R equivalente (la demostración es análoga),

Modelos de MT

Modelo D-I-S (Derecha-Izquierda-Sin movimiento)

Máquina de Turing que admite transiciones sin movimiento del cabezal de la cinta.

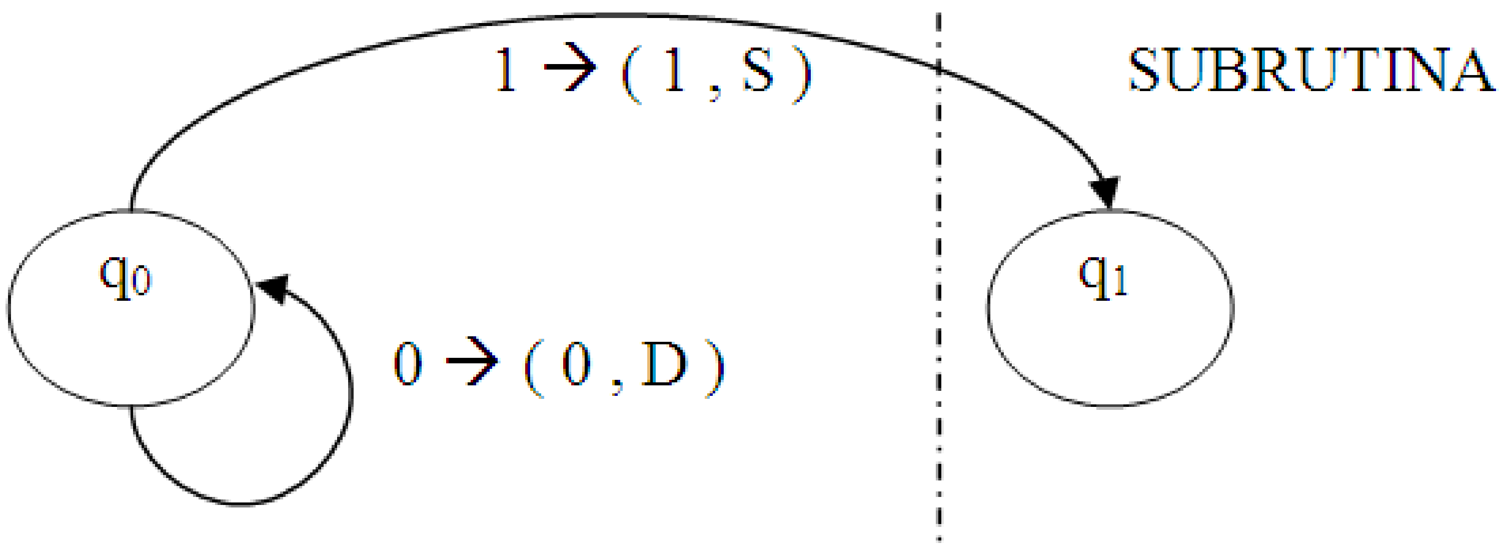
$M = <Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_A, q_R>$ con $Q, \Sigma, \Gamma, q_0, q_A, q_R$, definidos como en el modelo de referencia (que llamaremos modelo D-I en este caso)

y $\delta: Q \times \Gamma \rightarrow Q \cup \{q_A, q_R\} \times \Gamma \times \{D, I, S\}$

(S significa sin movimiento)

Modelos de MT

Ejemplo: Construir una máquina de Turing que se posicione en el primer símbolo ‘1’ del input de la cinta para luego saltar a una subrutina ($\Sigma=\{0,1\}$)



Modelos de MT

Teorema: Los modelos de máquinas de Turing D-I-S y D-I son equivalentes

Preguntas:

- ¿Qué se necesita demostrar?
- ¿Alguna demostración es trivial? ¿Por qué?

Modelos de MT

Se demuestra trivialmente que para toda MT del modelo D-I existe una MT equivalente del modelo D-I-S, pues las máquinas del modelo D-I son un caso particular de las del modelo D-I-S

Modelos de MT

- **Ejercicio 1**: Demostrar que para toda MT del modelo D-I-S existe una MT del modelo D-I equivalente

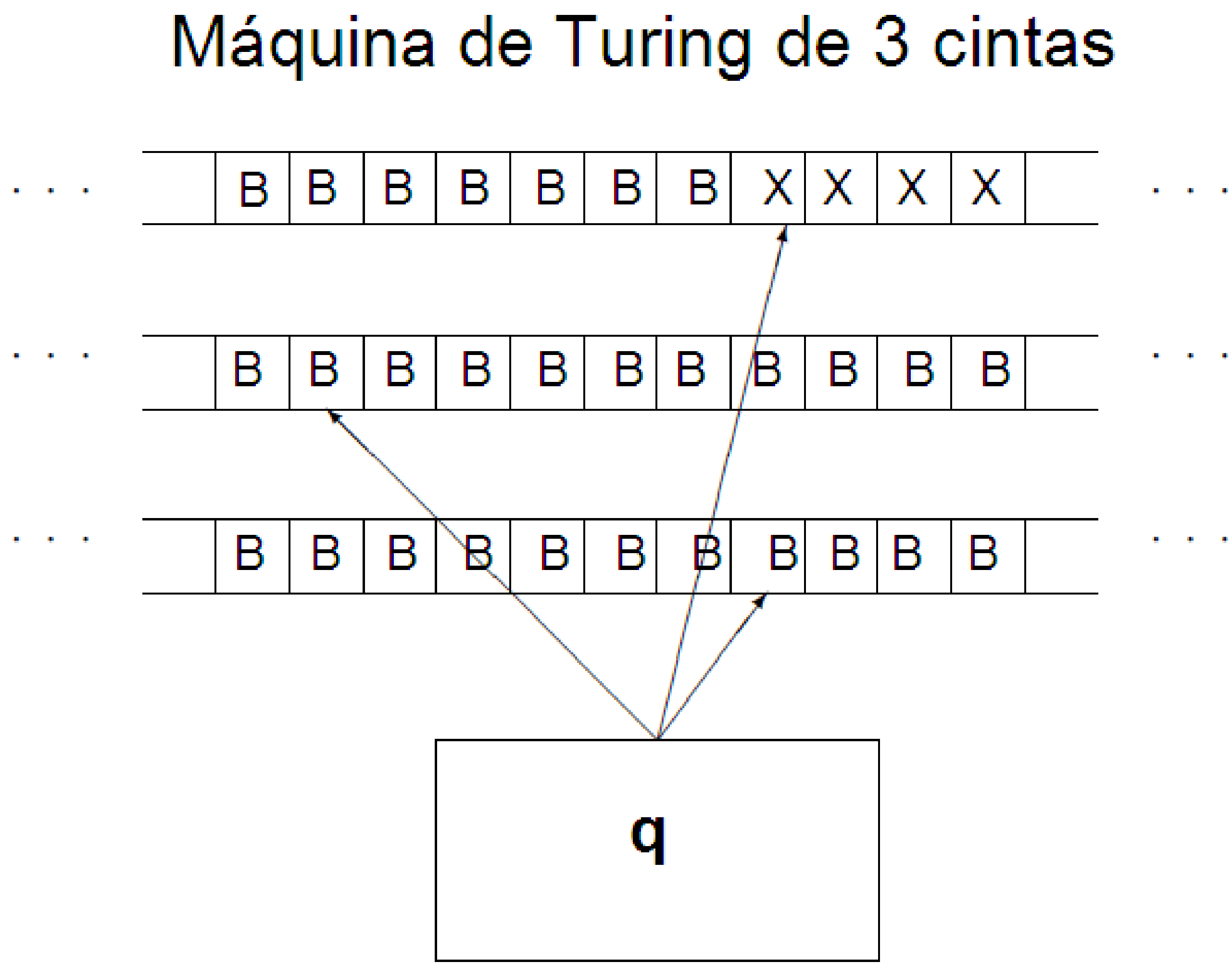
- **Ejercicio 2**: Demostrar que para toda MT del modelo D-I-S existe una MT M’ equivalente con la restricción de no poder cambiar el símbolo de la cinta y mover el cabezal simultáneamente

Modelo de MT de k Cintas

- Consiste en un control con k cintas y k cabezales que pueden moverse en forma independiente.

- La entrada se encuentra en la primera cinta y todas las demás están en blanco.

Modelo de MT de k Cintas



Modelo de MT de k Cintas

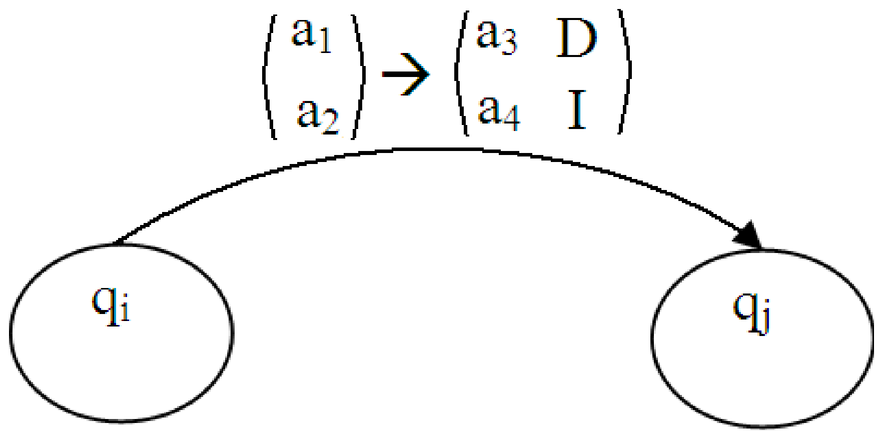
$M = <Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_A, q_R>$

con $Q, \Sigma, \Gamma, q_0, q_A, q_R$ definidos como en el modelo estándar D-I-S de una cinta

y $\delta: Q \text{ x } \Gamma^k \rightarrow Q \cup \{q_A, q_R\} \text{ x } (\Gamma \text{ x } \{D, I, S\})^k$

Modelo de MT de k Cintas

Ejemplo: $\delta(q_i,(a_1,a_2)) = (q_j,(a_3,D),(a_4,I))$



Estando en el estado q_i, al leer a_1 en la primera cinta y a_2 en la segunda, escribe a_3 en la primera y a_4 en la segunda, mueve a la derecha el cabezal de la primera cinta y a la izquierda en de la segunda cinta.

Modelo de MT de k Cintas

NOTA: Puede probarse que este modelo multicinta es equivalente a cualquiera de los que ya hemos visto.

Modelo de MT de k Cintas

Ejercicio: Definir la δ de transición de una MT con 2 cintas que reconozca el lenguaje:

$$L = \{ 0^n 1^n / n \geq 1 \}$$

$\delta(q_0,(0,B)) = (q_0,(0,D),(0,D))$

$\delta(q_0,(1,B)) = (q_1,(1,S),(B,I))$

$\delta(q_1,(1,0)) = (q_1,(1,D),(0,I))$

$\delta(q_1,(B,B)) = (q_A,(B,S),(B,S))$

Las transiciones que faltan van todas a q_R