Fermín Moreno

1_ Sabemos que $f = q.c + r$, entonces planteamos:
$a = 11.c + 4$ y $b = 11.c' + 7$. También sabemos que $0 \leq r < 11$

Ahora hacemos la suma $a + b$:

$$(11.c + 4) + (11.c' + 7) \underset{\uparrow}{=} (11c + 11c') + 11 =$$

suma y aplico prop. asociativa

Como nos queda de resto 11 y el resto debe cumplir $0 \leq r < 11$ agregamos +12 y -12 y no se altera la igualdad

$$(11c + 11c') + 11 + 11 - 11 \underset{\uparrow}{=} (11c + 11c' + 11) + 11 - 11 \underset{\uparrow}{=} [11(c + c' + 1)] + 0$$

prop. asociativa — factor común

Luego por propiedad de cierre en suma de enteros resulta que $c + c' + 1 = h \in \mathbb{Z}$. Finalmente queda $a + b = 11.h + 0$, entonces concluimos que el resto buscado es 0.

3_ ⓐ Verdadero, como un número racional es $\frac{a}{b}$, donde ambos son enteros y b diferente de 0, si sumas $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$, ambos racionales ($a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ y $b, d \neq 0$) obtenemos $\frac{a.d + b.c}{b.d}$, la cual por propiedades de los enteros sabemos que la multiplicación y/o suma de enteros da como resultado otro entero, entonces podríamos decir que $\frac{a.d + b.c}{b.d} = \frac{e}{f}$ con e y $f \in \mathbb{Z}$, lo cual sería un número racional, así queda probado.

ⓑ Falso, la suma de 2 irracionales puede dar un racional en el caso de sumarle su opuesto, la cual daría 0, que es un racional

ⓒ Verdadero, teniendo en cuenta lo dicho en 3ⓐ decimos que $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$ sería $\frac{a.c}{b.d}$, lo que nos daría como resultado otro racional tal que

$\frac{e}{f}$ con e y f $\in \mathbb{Z}$.

distributiva

$$4.\ z = \frac{x+2i}{4-3i} = \frac{x+2i}{4-3i} \cdot \frac{4+3i}{4+3i} = \frac{4x+3xi+8i+6i^2}{16+12i-12i-9i^2} =$$

multiplico y divido por el conjugado

$i^2=-1$ separo real e imaginario

$$= \frac{4x+3xi+8i-6}{16+9} = \frac{4x+3xi+8i-6}{25} = \frac{3xi+8i}{25} + \frac{4x-6}{25}$$

$3x+8 = 4x-6$ Para que x sea un real tal que $Re(z) = Im(z)$

$-x = -14$ debe valer 14.

$\boxed{x=14}$

2. Suponemos que existe un entero tal que $d = (a+b, a)$, por def de mcd este entero divide a $a+b$ y divide a a. Sabiendo que $d \mid a+b$ y $d \mid a$ entonces d debe dividir a b. Como $d \mid a$ y $d \mid b$ entonces $d \mid (a,b) = 1$ por definición de mcd. Por lo tanto $d \mid 1$ y no le queda otra que sea $d=1$. Concluimos que el mcd debe ser 1.

3. $z = 2+2i$ $\quad |z| = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$

arctg $\frac{2}{2} = 1 \rightarrow 45°$ es equivalente a $\frac{1}{4}\pi$ en radianes

$$\left(\sqrt{8} \cdot e^{i\frac{1}{4}\pi}\right)^{13} = (\sqrt{8})^{13} \cdot [\cos(13.45) + i\,\mathrm{sen}(13.45)] =$$

$$= -524288 - 524288i = \boxed{-2^{19} - 2^{19}i}$$

5. $z = a+bi$ $\quad \bar{z} = a-bi$

$$z \cdot \bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 - abi + abi - b^2i^2 \overset{i^2=-1}{=} a^2 - b^2$$

$$|z|^2 = \left(\sqrt{a^2+(bi)^2}\right)^2 = a^2+b^2i^2 \underset{i^2=-1}{=} a^2-b^2$$