

# Probabilidad y Estadística

## Clase 1

# Cronograma

Clase 1	Distribuciones útiles. Transf de v.a.: método de la transformada inversa y eventos equivalentes
Clase 2	Transf. de v.a: método del Jacobiano V.a. condicionadas
Clase 3	Esperanza condicional ECM y estimadores de cuadrados mínimos
Clase 4	Estimación Bayesiana Estadísticos y Estimadores puntuales. Estimador de máxima verosimilitud
Clase 5	Estimación no paramétrica Intervalos de confianza
Clase 6	Intervalos de confianza Test de hipótesis
Clase 7	Repaso
Clase 8	Examen

# Un breve repaso

Sea  $X$  una v.a., su función de distribución se define como

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$$

Si  $X$  es una **v.a.d.** tendrá además función de probabilidad dada por

$$p_X(x) = \mathbb{P}(X = x)$$

Si  $X$  es una **v.a.c.** tendrá asociada una función de densidad

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

¿Qué propiedades debían cumplir cada una de estas funciones?

# Momentos

Esperanza (o media):

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[g(X)] &= \int g(x)f_X(x)dx \\ &= \sum g(x)p_X(x)\end{aligned}$$

Varianza:

$$\text{var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}(X)^2$$

Covarianza:

$$\text{cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

# Momentos

En general, definimos el  **$n$ -ésimo momento** de la v.a.  $X$  como  $\mathbb{E}[X^n]$

Se define la **función generadora de momentos** como

$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}]$$

Si que  $\mathbb{E}[e^{tX}]$  existe (es finita) para algún intervalo que contiene al cero, se puede calcular el  $n$ -ésimo momento de  $X$  como la derivada  $n$ -ésima de  $M_X(t)$  evaluada en 0:

$$\mathbb{E}[X^n] = \frac{d}{dt} M_X(t) \big|_{t=0}$$

# Ejercicio 0

Calcular la función generadora de momentos para una variable

$$X \sim \mathcal{Bin}(n, p)$$

# Algunas distribuciones útiles

# Variables discretas

- **Bernoulli( $p$ )**:  $X = \{0,1\}$ . Asociada a la ocurrencia o no de un éxito
- **Binomial( $n, p$ )**: me cuenta la cantidad de éxitos en  $n$  ensayos.
- **Geométrica( $p$ )**: cantidad de ensayos que debo realizar hasta observar el primer éxito



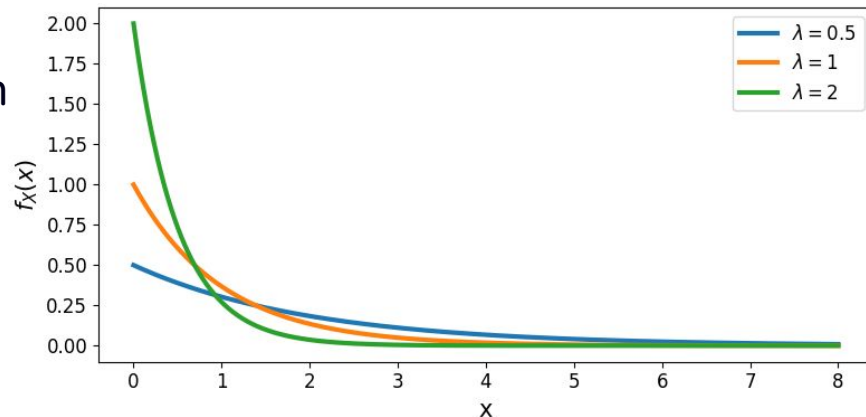
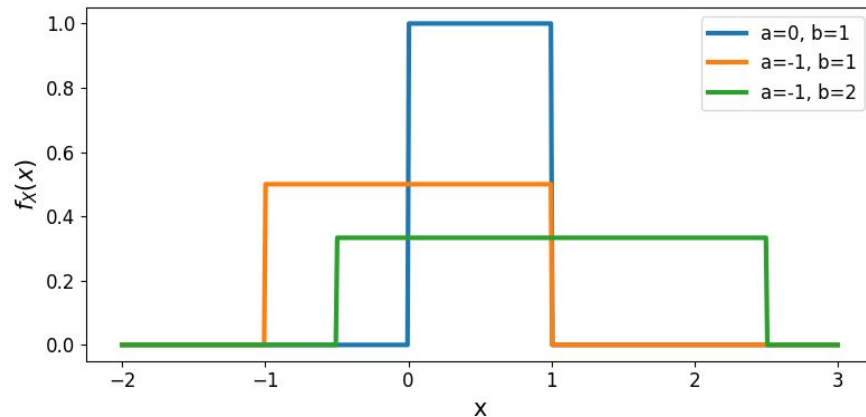
# Variables continuas

- **Uniforme:** todos los puntos son equiprobables.  $X \sim \mathcal{U}(a, b)$

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a} \mathbf{I}\{a < x < b\}$$

- **Exponencial:** sirve para modelar tiempos hasta eventos que no tienen memoria.  $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{I}\{x > 0\}$$

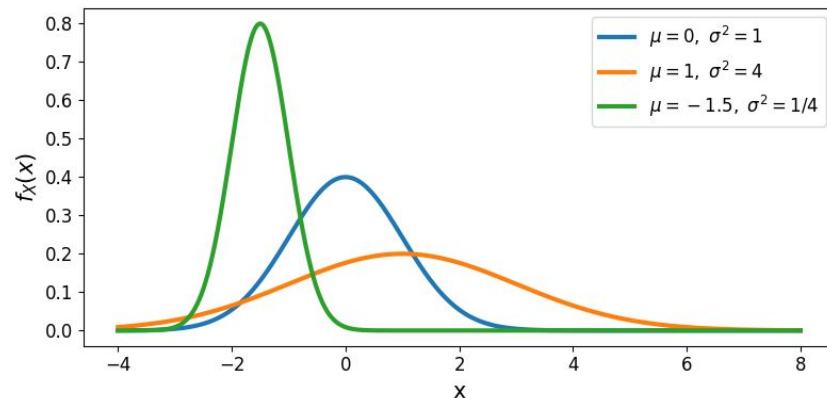


# Variables continuas

- Normal (gaussiana).  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$\mu$  es la media  
 $\sigma^2$  es la  
varianza

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$$



Propiedades: Sean  $X, Y$  dos v.a. Independientes

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \rightarrow \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad (\text{estandarización})$$

$$X \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2), Y \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2) \rightarrow aX + bY \sim \mathcal{N}(a\mu_X + b\mu_Y, a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2)$$

(combinación lineal de normales es normal)

# Ejercicio 1

Sea  $X$  una v.a con distribución normal estándar. Hallar la probabilidad de que

1.  $X > 1$
2.  $X < -1$
3.  $|X| < 2$
4. Hallar los cuantiles 0.1 y 0.9

Sea además  $Y \sim N(2, 9)$

1. Hallar  $P(2X + Y < 5)$

# Ejercicio 2

El tiempo (en minutos) entre llamadas a un call center tiene una distribución exponencial de parámetro  $1/5$ .

1. Calcular la probabilidad de que la primer llamada llegue después de 2 minutos
2. Calcular la probabilidad de que la primer llamada llegue después de los 5 minutos, si se sabe que en los primeros 3 minutos no se recibieron llamados

# Distribución normal multivariada

# Función de densidad conjunta

Sea  $\underline{X} = [X_1, \dots, X_n]^T$  un vector aleatorio continuo, diremos que  $X$  tiene distribución normal multivariada, si su función de densidad conjunta es de la forma

$$f_{\underline{X}}(\underline{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\Sigma|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2} (\underline{x} - \underline{\mu})^T \Sigma^{-1} (\underline{x} - \underline{\mu})}$$

donde  $\underline{\mu}$  se corresponde con la media de la v.a. y  $\Sigma$  Es la matriz de covarianza .

Notación:  $\underline{X} \sim \mathcal{N}(\underline{\mu}, \Sigma)$

# Distribuciones marginales

$$\mathbf{X} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \Sigma) \Rightarrow X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$$

$$\boldsymbol{\mu} = [\mu_1, \dots, \mu_n]^T$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & cov(X_1, X_2) & \dots & cov(X_1, X_n) \\ cov(X_2, X_1) & \sigma_2^2 & \dots & cov(X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ cov(X_n, X_1) & cov(X_n, X_2) & \dots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

# Ejercicio 3

Sean  $X, Y$  dos v.a. Con función de densidad conjunta

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi 0.6} e^{-\frac{1}{2} \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -0.8 \\ -0.8 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}$$

1. Calcular  $E[X]$ ,  $E[Y]$ ,  $\text{var}(X)$ ,  $\text{var}(Y)$ , y  $\text{cov}(X, Y)$
2. Hallar las densidades marginales de  $X$  e  $Y$
3. Calcular  $P(X < 2, Y < -1)$



# Transformaciones de variables

# Método de la transformada inversa

El objetivo es poder generar una variable aleatoria con una cierta distribución deseada a partir de una que “tengo a mano”.

Es decir, si tengo una función de distribución  $F$ , y quiero construir una variable aleatoria cuya función de distribución coincida con  $F$ .

# Método de la transformada inversa

Sea  $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  una función de distribución, existe una variable aleatoria

$$X/F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$$

Definimos la inversa generalizada como:

$$F_X^{-1}(u) = \min\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \geq u\}, u \in (0, 1)$$

**Teorema:** Si  $F$  es una función que cumple que

- Es no decreciente
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$  y  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$
- Es continua a derecha

Entonces, si defino  $X = F^{-1}(U)$ , con  $U \sim \mathcal{U}(0, 1)$   $X$  es una v.a. con función de distribución  $F$

# Ejercicio 4

Sea  $X$  el resultado de arrojar un dado equilibrado. A partir de 1000 realizaciones de una v.a. uniforme en el intervalo  $(0,1)$ , simular 1000 realizaciones de  $X$ .

# Ejercicio 5

A partir de 1000 observaciones de una v.a. uniforme en el intervalo  $(0,1)$ , simular 1000 valores de la variable definida en el ejercicio 2.

# Función de variable aleatoria

# Motivación

En este caso, lo que conocemos es la relación entre variables aleatorias (transformación), pero sólo conocemos la distribución de una ellas.

# Definición

Sea  $X$  una v.a. con función de distribución  $F_x(x)$ , y sea  $Y=g(X)$  una función de la variable aleatoria  $X$ . El objetivo es hallar la función de  $Y$ .

Esto puede hacerse considerando que  $F_Y(y) = P(Y < y) = P(g(X) < y)$ , y desarrollando la probabilidad en términos de la v.a.  $X$ . A este camino se lo llama **método de sucesos equivalentes**.



# Ejercicio 6

Sea  $X \sim U(-1,1)$ , y sea  $Y=X^2$ . Hallar la función de densidad de  $Y$

# Ejercicio 7

Sean  $X$  e  $Y$  dos v.a. con distribución de Poisson de parámetros  $\mu$  y  $\lambda$  respectivamente. Hallar la función de probabilidad de  $W = X + Y$ .

$$X \sim \mathcal{Poi}(\mu) \rightarrow p_X(x) = \frac{\mu^x}{x!} e^{-\mu}, \quad x \in \mathbb{N}_0$$

# Ejercicio 8

Sean  $X, Y \sim U(0,1)$  e independientes. Hallar la función de densidad de  $W = X+Y$

# Bibliografía

# Bibliografía

“Mathematical Statistics with Applications”, Dennis D. Wackerly,  
William Mendenhall III, Richard L. Scheaffer.