# Probabilidad y estadística

## Clase 2

# Transformaciones de variables

# Función de variable aleatoria

# Motivación y usos

En este caso, lo que conocemos es la relación entre variables aleatorias (transformación), pero sólo conocemos la distribución de una ellas.

**Usos:** en ML, se suele usar la transformación de variables para mejorar los resultados de ajustes y predicciones.

Algunas transformaciones más comunes son

- Log
- Exp
- Sqrt
- Inversa
- Binning

# Definición

Sea X una v.a. con función de distribución $F_x(x)$, y sea $Y=g(X)$ una función de la variable aleatoria X. El objetivo es hallar la función de Y.

Esto puede hacerse considerando que $F_Y(y) = P(Y < y) = P(g(X)< y)$, y desarrollando la probabilidad en términos de la v.a. X. A este camino se lo llama **método de sucesos equivalentes.**

# Ejercicio 6

Sea $X \sim U(-1,1)$, y sea $Y=X^2$. Hallar la función de densidad de Y

# Ejercicio 7

Sean X e Y dos v.a. con distribución de Poisson de parámetros μ y λ respectivamente. Hallar la función de probabilidad de W = X + Y.

$$X \sim \mathcal{P}oi(\mu) \rightarrow p_X(x) = \frac{\mu^x}{x!}e^{-\mu},\ x \in \mathbb{N}_0$$

# Ejercicio 8

Sean $X,Y \sim U(0,1)$ e independientes. Hallar la función de densidad de $W = X+Y$

# Método de transformaciones

- Sea X una v.a.c. con función de densidad $f_X(x)$,
- Sea Y=g(X).
- g(x) es una función 1 a 1 (existe $g^{-1}(y)$)

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{dg^{-1}(y)}{d\,y} \right|$$

# Método del Jacobiano

Sean $X_1$ y $X_2$ son v.a **continuas** con función de densidad conjunta $f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)$. Sean también $h_1,\ h_2$ dos func. tales que para todo $(x_1, x_2)$ en el soporte de $(X_1, X_2)$, $y_1 = h_1(x_1, x_2)$ y $y_2 = h_2(x_1, x_2)$ son una transformación uno a uno con **inversa** $x_1 = h_1^{-1}(y_1, y_2)$ y $x_2 = h_2^{-1}(y_1, y_2)$. Si las inversas tienen **derivadas parciales continuas** respecto de $y_1$ e $y_2$ y jacobiano J, entonces la densidad conjunta de $Y_1,\ Y_2$ será:

$$f_{Y_1,Y_2} = f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)\big|_{h_1^{-1}(u_1,u_2),h_2^{-1}(u_1,u_2)}\ |J|$$

# Ejercicio 1

Sean $X_1, X_2 \overset{i.i.d}{\sim} \mathcal{E}(\lambda)$ y sean $U = X_1 + X_2$ y $V = \frac{X_1}{X_1+X_2}$. Hallar $f_{U,V}(u,v)$. ¿Qué puede decir al respecto?

# V.A Gaussianas: Proyección

Sea $\underline{X} \sim \mathcal{N}(\underline{\mu}, \Sigma)$ de dimensión n. Y sea $w \in \mathbb{R}^n$ .
Definamos $Z = w^T X$ la proyección de $\underline{X}$ en $w$

$$Z \sim \mathcal{N}(w^T \underline{\mu}, w^T \Sigma w)$$

# Variables aleatorias condicionadas

# Motivación

Cuando tenemos diferentes variables, que se encuentran vinculadas, saber qué ocurrió con una variable nos da información extra sobre las otras.

Las variables condicionadas aparecen en el corazón de ML,

- Dado el valor de una muestra, cual es la probabilidad de que pertenezca a cierta clase?
- Modelos de grafos, que se basan en probabilidades condicionales
- Estimación paramétrica (enfoque Bayesiano)

# Variables discretas

Sean $X, Y$ dos variables aleatorias, y sean $p_X(x) > 0$ y $p_{X,Y}(x, y)$ las función de probabilidad marginal de $X$ y la función de probabilidad conjunta respectivamente. Se define la función de probabilidad condicionada de $Y$ dado que $X = x$ como:

$$\begin{aligned} \boxed{p_{Y|X=x}(y)} &= \mathbb{P}[Y = y | X = x] \\ &= \frac{\mathbb{P}(X = x, Y = y)}{\mathbb{P}(X = x)} \\ &\boxed{= \frac{p_{X,Y}(x, y)}{p_X(x)}} \end{aligned}$$

# Variables continuas

Sean $X, Y$ dos variables aleatorias con función de densidad conjunta $f_{X,Y}(x, y)$ y densidad marginal de $X$ $f_X(x)$. Se define la función de densidad condicional de $Y$ dado $X = x$ como

$$f_{Y|X=x}(y) = \frac{f_{X,Y}(x;y)}{f_X(x)}$$

**Obs:** Si $f_{Y|X=x}(y) = f_Y(y)$ $X$ e $Y$ son independientes.

# Ejercicio 3

1. La probabilidad de acertar a un blanco es $\frac{1}{5}$. Se realizan 10 tiros independientes y se cuenta la cantidad de aciertos. Sean X la cantidad de aciertos en los 10 tiros, e Y la cantidad de aciertos en el primer tiro. Hallar la distribución de $X|Y=y$ y $Y|X=x$.

2. Sean X,Y dos v.a. conjuntamente uniformes en el triángulo de vértices (0,0), (2,2), (0,2). Hallar la función de densidad de $Y|X=x$.

# Ejercicio 3 (P)

1. Se tira un dado equilibrado, y luego se tira una moneda equilibrada tantas veces como indica el dado. Sea X el resultado obtenido en el dado, y sea Y la cantidad de caras obtenidas al lanzar la moneda. a) Obtener la distribución de $Y|X=6$ y luego la distribución de $Y|X=x$ (para todos los posibles x); b) Obtener la distribución de $X|Y=3$.

2. Sean X,Y dos v.a. conjuntamente uniformes en el triángulo de vértices (0,0), (2,2), (0,2). Hallar la función de densidad de $Y|X=x$.

# Factorización

Sean $X, Y$ dos variables aleatorias con función. de densidad conjunta $f_{X,Y}(x, y)$ , la misma puede descomponerse de la forma

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) f_{Y|X=x}(y)$$

**Obs:** Si $f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$ $X$ e $Y$ son independientes.

# Ejercicio 4

Sean X, Y dos v.a. con función de densidad conjunta

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{e^{-x/2y}}{4y}\mathbf{1}\{0 < x, 1 < y < 3\}$$

Hallar la función de densidad de X|Y=y

# Normal multivariada: dist. condicionales

$$\text{Sea } \boldsymbol{X} = [X_1, X_2]^T \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$$

$$X_1|X_2 = x_2 \sim \mathcal{N}\left(\mu_1 + \frac{cov(X_1,X_2)}{\sigma_2^2}(x_2 - \mu_2)\,, (1 - \frac{cov(X_1,X_2)^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2})\sigma_1^2\right)$$

$$X_2|X_1 = x_1 \sim \mathcal{N}\left(\mu_2 + \frac{cov(X_1,X_2)}{\sigma_1^2}(x_1 - \mu_1)\,, (1 - \frac{cov(X_1,X_2)^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2})\sigma_2^2\right)$$

# Mezcla de v.a.

Sea $M$ una v.a. discreta a valores $1, \ldots, n$, con función de probabilidad $p_M(m)$, y sea $X$ una v.a. tal que se conocen las distribuciones $X|M = m, \; m = 1, 2, \ldots, n$ . Luego, la distribución de $X$ resulta

$$F_X(x) = \sum_{m=1}^{n} F_{X|M=m}(x) p_M(m)$$

**Obs**:

Si $X$ es v.a.d: $p_X(x) = \sum_{m=1}^{n} p_{X|M=m}(x) p_M(m)$

Si $X$ es v.a.c $f_X(x) = \sum_{m=1}^{n} f_{X|M=m}(x) p_M(m)$

# Ejercicio 5

Para ir al trabajo Juan puede tomar el subte, o el tren, eligiendo viajar en tren el 60% de las veces. Si viaja en subte, el tiempo de viaje (en horas) es una v.a. con distribución U(0.75,1), mientras que si viaja en tren distribuye de manera uniforme en el intervalo (0.8, 1.25).

1. Calcular la función de densidad del tiempo viaje
2. Hallar la probabilidad de que haya viajado en tren si se sabe que tardó más de 0.9hs en llegar al trabajo.
3. Hallar la probabilidad de que haya viajado en tren si se sabe que tardó exactamente 0.9hs en llegar al trabajo.

# Bayes para mezclas

Sea $M$ una v.a. discreta a valores $1, \ldots, n$, con función de probabilidad $p_M(m)$, y sea $X$ una v.a. continua tal que se conocen las distribuciones $f_{X|M=m}(x),\ m = 1, 2, \ldots, n$ , la función de probabilidad de $M$ dado que $X = x$ será:

$$\boxed{p_{M|X=x}(m) = \frac{f_{X|M=m}(x)p_M(m)}{\sum_{m=1}^{n} f_{X|M=m}(x)p_M(m)}}$$