Fernando Monzon

Entrega 1

Sean S, T subespacios de $\mathcal{V} = (\mathbb{V}, +, \mathbb{K}, \bullet)$. Probar si también los son:

1. $S \cap T = \{v \in \mathbb{V} : v \in S \wedge v \in T\} \subseteq \mathbb{V}$.
2. $S + T = \{v \in \mathbb{V} : v = s + t, s \in S, t \in T\} \subseteq \mathbb{V}$.
3. $S \cup T = \{v \in \mathbb{V} : v \in S \vee v \in T\} \subseteq \mathbb{V}$.

Intersección:

El 0 pertenece a S y a T por ser subespacios. Por lo tanto pertenece a la intersección.

Si tengo u y w que pertenecen a la intersección, entonces la suma de u y w también pertenece a la intersección: U y w pertenecen a S entonces su suma también pertenece a S. u y w pertenecen a T entonces su suma también pertenece a T. Por lo tanto la suma u + w también pertenece a la intersección.

$$\vec{u}, \vec{w} \in S \cap T \ \rightarrow \ \vec{u}, \vec{w} \in S, \vec{u}, \vec{w} \in T$$

$$\vec{u}, \vec{w} \in S \ \rightarrow \ \vec{u} + \vec{w} \in S$$

$$\vec{u}, \vec{w} \in T \ \rightarrow \ \vec{u} + \vec{w} \in T$$

$$\vec{u} + \vec{w} \in S \cap T$$

Si tenemos un vector v que pertenece a la intersección y tenemos un escalar que pertenece a K, entonces el producto kv pertenece a la intersección: Si tengo un vector u que pertenece a la intersección, entonces tiene que pertenecer a los dos S y T y tengo un escalar k que pertenece al cuerpo K, entonces su producto kv pertenece a S y pertenece a T por ser subespacios de V, por lo tanto pertenece a la intersección.

$$\vec{v} \in S \cap T \ \rightarrow \ \vec{v} \in S, \vec{v} \in T$$

$$k \in K, k.\vec{v} \in S, k.\vec{v} \in T \ \rightarrow k.\vec{v} \in S \cap T$$

Y si se cumplen las dos anteriores, la intersección es un subespacio vectorial.

Suma:

El cero pertenece a S y T por ser subespacios, por lo tanto 0s +0t = 0, pertenece a la suma S+T

Si tengo dos vectores v y w que pertenecen a la suma S + T, los puedo expresar como v=s1+t1, w=s2+t2. Al sumar v y w, obtenemos v + w = s1 + t1 + s2 + t2, reorganizando v + w = s1 + s2 + t1 + t2. Podemos ver que v + w = s + t, probando que la suma de dos vectores pertenecen a la suma de S+T.

$$\vec{v}, \vec{w} \in S + T$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{s1} + \overrightarrow{t1}$$

$$\vec{w} = \overrightarrow{s2} + \overrightarrow{t2}$$

$$\vec{v} + \vec{w} = \overrightarrow{s1} + \overrightarrow{t1} + \overrightarrow{s2} + \overrightarrow{t2}$$

$$\vec{v} + \vec{w} = \overrightarrow{s1} + \overrightarrow{s2} + \overrightarrow{t1} + \overrightarrow{t2}$$

$$\vec{v} + \vec{w} \in S + T$$

Tomamos k escalar que pertenece al cuerpo K, v que pertenece a la suma S + T, entonces kv pertenece a la suma S + T: si v = s + t, kv = k(s + t) = ks + kt. ks pertenece a S y kt pertenece a T, por lo tanto kv pertenece a la suma S + T

$$\vec{v} \in S + T, k \in K, k.\vec{v} \in S + T$$

$$k\vec{v} = k\left(\vec{s} + \vec{t}\right), k.\vec{s} \in S, k.\vec{t} \in T$$

$$k\vec{v} = k\vec{s} + k\vec{t} \rightarrow k.\vec{v} \in S + T$$

Y si se cumplen las dos anteriores, la suma es un subespacio vectorial.

Unión:

El cero pertenece a S y T por ser subespacios, por lo tanto pertenece a la unión.

Siendo s un vector en S = {x,y}/x=y, y t un vector en T = {x,y}/x=2y

Hacemos la suma de s+t, para comprobar que el vector resultante sea x=y o x=2y.

Tomamos un ejemplo s = {1,1} t = {2,1}, s + t = {3,2}: Este vector no pertenece a la unión $S \cup T$. Es decir que la unión de dos subespacios no es un subespacio vectorial.