Probabilidad y estadística

Clase 6

Test de hipótesis

Motivación

Un test de hipótesis es una manera formal de elegir entre dos opciones, o hipótesis.

Un ejemplo de la vida cotidiana: un juicio. Se cuenta con dos hipótesis: la persona es inocente o es culpable. Para decidir que es culpable (y enviarlo a la cárcel) el juez a tener que tener evidencia suficiente para tomar esa decisión.

La presuposición de inocencia ("inocente hasta que se demuestre lo contrario") es lo que se conoce como hipótesis nula. La otra es la que se conoce como hipótesis alternativa.

Formalicemos esta idea

Sea una m.a. $\underline{X} = X_1, \ldots, X_n$ de una población con distribución perteneciente a una familia $F_\theta(x)$ con $\theta \in \Theta$. Sean Θ_0 y Θ_1 tales que $\Theta_0 \cup \Theta_1 = \emptyset$ y $\Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$. Un test para este problema será una regla basada en $\underline{X}$ para decidir entre las dos hipótesis

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \text{ vs. } H_1 : \theta \in \Theta_1$$

Definición: Se llama test a una función $\delta(\underline{X})$ que puede tomar valores 0 o 1.

Formalicemos esta idea

En un test de hipótesis se plantean dos hipótesis:

H_1: es la hipótesis del investigador (lo que se desea probar). Se la conoce como hipótesis alternativa

H_0: se formula con el objetivo de ser rechazada. Se la conoce como hipótesis nula.

Diremos que rechazamos la hipótesis nula cuando $\delta(\underline{X}) = 1$, en caso contrario decimos que no hay evidencia suficiente para rechazar H_0.

Tipos de error

Error de tipo I: Es el error que se comete al rechazar una hipótesis nula que era verdadera. Buscamos que esto tenga muy baja probabilidad.

$$\mathbb{P}(EI) = \mathbb{P}_{\theta \in \Theta_0}(\delta(\underline{X}) = 1)$$

Error de tipo II: Es el error que se comete al no rechazar una hipótesis nula que era falsa.

$$\mathbb{P}(EII) = \mathbb{P}_{\theta \in \Theta_1}(\delta(\underline{X}) = 0)$$

Potencia del test

Def: Se llama potencia del test a la probabilidad de rechazar una hipótesis nula en función del parámetro desconocido sobre el que se plantea la hipótesis.

$$\pi_\delta(\theta) = \mathbb{P}_\theta(\delta(\underline{X}) = 1).$$

Luego podemos reescribir

$$\mathbb{P}(EI) = \pi_\delta(\theta),\ \theta \in \theta_0 \quad \text{y} \quad \mathbb{P}(EII) = 1 - \pi_\delta(\theta),\ \theta \in \Theta_1$$

Ejercicio 1

Supongamos que en las especificaciones de procedimientos de una planta de energía nuclear se establece que la resistencia media de soldadura debe superar 100lb/plg. Supongamos que somos el director del equipo de inspección del ente regulador estatal que debe determinar si la planta cumple con las especificaciones. e planea seleccionar una muestra al azar de soldaduras y realizar pruebas en cada una de ellas.

1. ¿Cuáles son las hipótesis a testear?
2. Explicar que significa en este contexto el error de tipo I y el de tipo II, y discutir cuáles son las consecuencias de cometer cada tipo de error

Nivel de significación y p-valor

Def: Se llama nivel de significación del test a la máxima probabilidad de cometer un error de tipo I:

$$\alpha = \sup_{\theta \in \theta_0} \pi_\delta(\theta)$$

Def: Se llama p-valor de un test al menor nivel de significación para el cual se rechaza H_0 para una observación dada

En este video hay una explicación simpática e intuitiva de lo que representa el p-valor!

Sobre la construcción de reglas de decisión

En la práctica, las reglas de decisión se construyen basándose en una estadística de la m.a. $\underline{X}$, es decir que son de la forma $\delta(\underline{X}) = \boldsymbol{I}\{T(\underline{X}) \in \mathcal{R}\}$. A $\mathcal{R}$ la conoce como región crítica o de rechazo .

Resulta intuitivo que el estadístico $T(\underline{X})$ se corresponda con el estadístico suficiente (o una transformación del mismo)

En particular, podemos utilizar el método del pivote visto para intervalos de confianza para construir el test.

Ejercicio 2

Se tiene una m.a. de tamaño n de una población uniforme en el intervalo $(0,\theta)$.

1. Diseñar un test de hipótesis para decidir si θ es mayor a 2.5 con un nivel de significación de 0.05.
2. Suponer $\theta=3$, n=20, simular la m.a. y decidir en base a ella.
3. Hallar el p-valor.

Tipos de hipótesis

En general, tenemos 3 tipos de hipótesis que deseamos testear:

$$\left.\begin{array}{l} H_0 : \theta \geq \theta_0 \ vs. \ H_1 : \theta < \theta_0 \\ H_0 : \theta \leq \theta_0 \ vs. \ H_1 : \theta > \theta_0 \end{array}\right\} \text{Hipótesis unilaterales}$$

$$H_0 : \theta = \theta_0 \ vs. \ H_1 : \theta \neq \theta_0 \rightarrow \text{Hipótesis bilaterales}$$

Si el pivote es decreciente en θ, un test para

$$H_0 : \theta \leq \theta_0 \ vs. \ H_1 : \theta > \theta_0 \text{ será } \delta(\underline{X}) = \boldsymbol{I}\{U_{\theta_0} > k_\alpha\}$$

$$H_0 : \theta \geq \theta_0 \ vs. \ H_1 : \theta < \theta_0 \text{ será } \delta(\underline{X}) = \boldsymbol{I}\{U_{\theta_0} < k_\alpha\}$$

$$H_0 : \theta = \theta_0 \ vs. \ H_1 : \theta \neq \theta_0 \text{ será } \delta(\underline{X}) = \boldsymbol{I}\{U_{\theta_0} < k_{\alpha/2}\} + \boldsymbol{I}\{U_{\theta_0} > k_{1-\alpha/2}\}$$

Test con nivel de significación asintótico

Def: Sea $\underline{X}_n = (X_1, \ldots, X_n)$ una m.a. de duna población con distribución $F_\theta(x),\ \theta \in \Theta$. Se desea testear

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \text{ vs. } H_1 : \theta \in \Theta_1$$

Se dirá que una sucesión de test tiene nivel de significación asintótico α si

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\theta\in\Theta_0} \pi_\delta(\theta) = \alpha$$

Nuevamente, podemos basar el test en la distribución asintótica de EMV, o bien usando TCL.

Ejercicio 3

Se realiza un estudio para estimar la proporción de residentes en una ciudad que están a favor de la construcción de una planta de energía nuclear. En una muestra de 100 personas se observó que la proporción de individuos que se encuentran a favor fue de 0.62

1. ¿Puede decirse con un nivel de significación de 0.01 que la mayor parte de la población está a favor de la construcción de la planta nuclear?
2. Hallar el p-valor.

Ejercicio 4

De un experimento en los efectos de un medicamento para la ansiedad se midió el puntaje de un test de memoria antes y después de tomar el medicamento.

1. A partir de los datos que se encuentran en el archivo Islander_data.csv, diseñar un test de hipótesis de nivel de significación 0.01 para decidir si el tiempo medio de respuesta después de tomar el medicamento es menor que antes de tomarlo.
2. Hallar el p-valor