Clase de Repaso 2

Verónica Pastor, Martín Errázquin

Análisis Matemático para Inteligencia Artificial

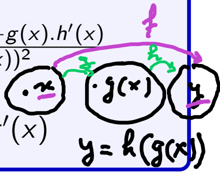
27/2/2022

Estudio de Funciones

Sea $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$ la función polinómica que queremos graficar, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
¿Cómo buscamos los puntos críticos? Calculamos la derivada, repasemos:

Reglas de Derivación

- Suma $f(x) = g(x) + h(x) \to f'(x) = g'(x) + h'(x)$
- Producto $f(x) = g(x).h(x) \to f'(x) = g'(x).h(x) + g(x).h'(x)$
- Cociente
  $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}, \forall x \in Dom(h(x)) \to f'(x) = \frac{g'(x).h(x) - g(x).h'(x)}{(h(x))^2}$
- Composición
  $f(x) = h(g(x)) = (h \circ g)(x) \to f'(x) = h'(g(x)).g'(x)$



En nuestro caso, podemos pensar distintos caminos:

- $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) = x^3 - 2x^2 + x \to f'(x) = (x^3)' - (2x^2)' + x'$
- $f(x) = f_1(x).f_2(x) = x.(x^2 - 2x + 1) = x.(x-1)^2 \to f'(x) = (x)'(x-1)^2 + x.((x-1)^2)' = 1.(x^2 - 2x + 1) + x.(2(x-1))$

En ambos casos llegamos a $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$.

Buscamos los números críticos: $f'(x) = 0$
$\rightarrow x = 1 \wedge x = \frac{1}{3}$

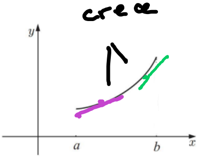
Intervalo (I)	$(-\infty, \frac{1}{3})$	$(\frac{1}{3}, 1)$	$(1, \infty)$
$x_0 \in I$	0	$\frac{1}{2}$	2
Signo de $f'(x_0)$	$+$	$-$	$+$
Crecimiento de f	↗	↘	↗

$x = \frac{1}{3}$ "MAX" $x = 1$ "MIN"

Evaluamos $f'(0) = 3\,0^2 - 4.0 + 1 > 1$

$f'(\frac{1}{2}) = 3(\frac{1}{2})^2 - 4(\frac{1}{2}) + 1 < 0$

Pero, ¿cómo crece?



Concavidad-Convexidad

- Si para todo $x \in I, f''(x) > 0$ entonces la gráfica de $f(x)$ es **cóncava hacia arriba** en I.
- Si para todo $x \in I, f''(x) < 0$ entonces la gráfica de $f(x)$ es **cóncava hacia abajo** en I.

Calculamos la derivada segunda

Si $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1 \rightarrow f''(x) = 6x - 4$. Buscamos $f''(x) = 0 \rightarrow x = \frac{2}{3}$.

Intervalo (I)	$(-\infty, \frac{2}{3})$	$(\frac{2}{3}, \infty)$
$x_0 \in I$	0	1
Signo de $f''(x_0)$	$-$	$+$
Concavidad de f	c. abajo	c. arriba

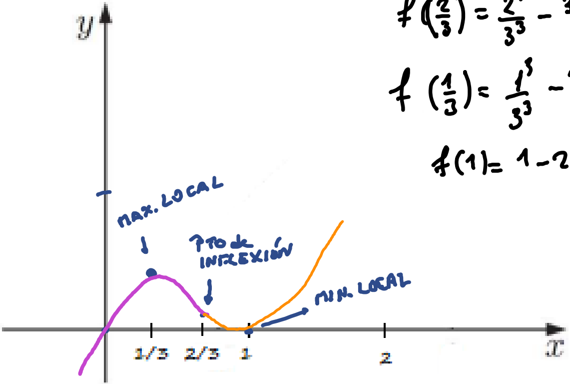
$x = \frac{2}{3}$ se dice que es un punto de inflexión.

Evaluamos

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2^3}{3^3} - \frac{3.2\,2^2}{3^3} + \frac{3^2\,2}{3^2.\,3} = \frac{2}{27}$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1^3}{3^3} - 2\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3} = \frac{12}{27}$$

$$f(1) = 1 - 2 + 1 = 0$$



Recreo: Python

Aprovechemos a repasar algunas cuestiones relativas a lo visto en la clase pasada, pero ahora en Python (y un poquito de SQL):

- Producto Cartesiano
- Relaciones
- Operatoria de conjuntos

Para el que nunca utilizó SQL, lo importante es que una Tabla es algo así:

Nombre	Edad	ComidaFavorita
Pepe	20	asado
Norma	60	ensalada
Ana	34	arroz

Cada fila es un elemento, y por lo tanto una Tabla es un conjunto de filas (sin orden particular). La sentencia `SELECT * FROM Tabla` devuelve todos los elementos de la tabla.

Repaso de matrices

Una matriz es un arreglo rectangular de números de la forma:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{m \times n}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ -8 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Id_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Algunas matrices cuadradas especiales:

- Nula: $O_n = (0)_{1 \le i,j \le n} \in \mathbb{K}^{n \times n}$
- Identidad: $Id_n = (a_{ij}) = \begin{cases} 1, & \text{si } \overbrace{\text{i=j}}^{\rightarrow \text{diag. ppal.}} \\ 0, & \text{si } \underbrace{\text{i} \neq j} \end{cases} \in \mathbb{K}^{n \times n}$
- Triangular Superior: $A = (a_{ij}) = \begin{cases} a_{ij}, & \text{si i} \le j \\ 0, & \text{si i > j} \end{cases} \in \mathbb{K}^{n \times n}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & b & a \\ 0 & a_{22} & \cdot \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

- Matriz simétrica: $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n} = (a_{ji})_{1 \le i,j \le n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, cuando $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ se dice que la matriz es hermítica $(a_{ij})_{1 \le i,j \le n} = (\bar{a}_{ji})_{1 \le i,j \le n}$ donde $\bar{a}$ es el conjugado de a.
- Matriz antisimétrica: $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n} = (-a_{ji})_{1 \le i,j \le n} \in \mathbb{K}^{n \times n}$

Operaciones con matrices

- **Suma:** $\overbrace{A, B \in \mathbb{K}^{m\times n}}$, $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{1\le i\le m, 1\le j\le n}$ $\quad 3\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 1 & 3\cdot 2 \\ 3\cdot 3 & 3\cdot 4\end{pmatrix}$
- **Producto:** $A \in \mathbb{K}^{m\times p}$, $B \in K^{p\times n}$, $AB = (\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj})_{1\le i\le m, 1\le j\le n}$
- **Producto por un escalar:** $\lambda \in \mathbb{K}, A \in \mathbb{K}^{m\times n}, \lambda A = (\lambda a_{ij})_{1\le i\le m, 1\le j\le n}$

$$\underset{A}{\overset{2\times 2}{\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0\end{pmatrix}}} \underset{B}{\overset{2\times 2}{\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -3\end{pmatrix}}} = \overset{2\times 2}{\begin{pmatrix} 3\cdot 1 + 2\cdot 2 & 3\cdot 4 + 2\cdot(-3) \\ -1\cdot 1 + 0\cdot 2 & -1\cdot 4 + 0(-3)\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ -1 & -4\end{pmatrix}$$

Matriz Inversa: Una matriz $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, tiene inversa si existe $E \in \mathbb{K}^{n\times n}$ tal que: $\underline{AE = EA} = \underline{Id_n}$. Se nota $E = A^{-1}$.

Método de Gauss-Jordan para hallar la inversa:

permuto las filas $\quad$ A la fila 2 le resto 4 veces la fila 1

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1\end{array}\right] \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \left[\begin{array}{cc|cc} \boxed{1} & -2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 0\end{array}\right] \xrightarrow{F_2 - 4F_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 9 & 1 & -4\end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{9}F_2}$$

$\overbrace{4 \quad 1}^{=A}$ $\quad$ pivote

a la fila 2 la multiplico por $\frac{1}{9}$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1/9 & -4/9\end{array}\right] \xrightarrow{F_1 + 2F_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2/9 & 1/9 \\ 0 & 1 & 1/9 & -4/9\end{array}\right]$$

pivote $\quad$ $\underbrace{\begin{matrix} 2/9 & 1/9 \\ 1/9 & -4/9\end{matrix}}_{=A^{-1}}$

¿Cómo saber si una matriz tiene inversa?

El determinante de una matriz cuadrada es una función $det : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathrm{R}$. Se nota $det(A) = |A|$.

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} \overbrace{(-1)^{i+j}}\, a_{ij} M_{ij} \quad donde \quad M_{ij} \in \mathrm{R}^{(n-1)\times(n-1)}$$

el factor $(-1)^{i+j} a_{ij}$ se llama cofactor, y M_{ij} se llama menor, es el determinante de la matriz que se forma sacando la fila i y la columna j. Para el caso de matrices ~~cuadradas~~ 2x2 es muy fácil,

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-2) - 1 \cdot 1 = -9 \boxed{\neq 0} \quad \text{sii } \exists A^{-1}$$

$$\begin{array}{c|ccc|} & 1 & 2 & 3 \\ 1 & a & b & c \\ 2 & d & e & f \\ 3 & g & h & i \end{array} = a \cdot \overbrace{(-1)^2} \cdot \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} + b \cdot \overbrace{(-1)^3} \cdot \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \cdot \overbrace{(-1)^4} \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

Algunas propiedades

Sean $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $k \in \mathbb{R}$

- A triangular, $det(A) = a_{11}.a_{22}\cdots a_{nn}$. En particular, $det(Id_n) = 1$

$A^2 = A \cdot A$

- $det(AB) = det(A)det(B)$. En particular, $det(A^p) = [det(A)]^p$

$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = [3\cdot 0 - 2\cdot(-1)] \cdot [-3-8] = 2\cdot(-11) = -22$

$\begin{vmatrix} 7 & 6 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = -28 + 6 = -22$

- $det(kA) = k^n det(A)$

En el ejemplo si $k=3$,

$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \to n=2 \quad A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

$3.A = \begin{bmatrix} 12 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \to det(3A) = 12(-6) - 9 = -81$
$= 3^2.(-9) = 3^2 \det A$

- $det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$

En el ejemplo $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, $det(A) = -9$

$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2/9 & 1/9 \\ 1/9 & -4/9 \end{bmatrix}$, $det(A^{-1}) = \frac{2}{9}\left(\frac{-4}{9}\right) - \frac{1}{9}\,\frac{1}{9} = \frac{-9}{9^2} = \frac{-1}{9}$

Se verifica q $det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$

Además, $A.A^{-1} = Id$

$det(A.A^{-1}) = det(Id)$

$det(A)det(A^{-1}) = 1$

Recreo: Python

Ahora que conocemos las operaciones básicas con matrices vamos a ver cómo replicarlas utilizando código: para esto vamos a utilizar la librería **NumPy** de Python.

Spoiler: también vamos a mostrar una aplicación muy directa a lo visto hoy!