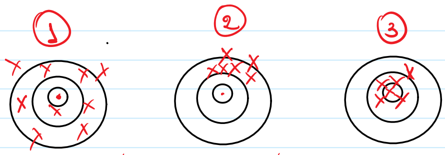

Insesgado pero impreciso | Sesgado y preciso | Insesgado y preciso (Exacto)

Se desea estimar la media de una variable con distribución N(μ,9) a partir del promedio de n realizaciones. Analizar las bondades de las que goza dicho estimador.

$X_1; X_2, \dots, X_n \overset{iid}{\sim} \mathcal{N}(\mu, 9)$, $\underline{X} = \{X_1; X_2; \dots; X_n\} \rightarrow n$ v. aleatorias

$x_1, x_2, \dots, x_n \rightarrow n$ realizaciones

Estimador de μ: $\hat{\mu} = \overline{X} = \delta(\underline{X})$

$$B = E[\overline{X} - \mu] = 0 \quad ó \quad E[\overline{X}] = \mu$$

$$B = E\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} - \mu\right] = E\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right] - \mu = \frac{1}{\cancel{n}}\cancel{n}\underbrace{E[X_1]}_{=\mu} - \mu = 0$$

$$ECM(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - \theta)^2]$$

$$Ecm(\hat{\theta}) = Var(\hat{\theta}) + B^2(\hat{\theta})$$

$$Ecm(\overline{X}) = Var(\overline{X}) + 0 = Var\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right) = \frac{1}{n^{\cancel{2}}}\cancel{n} Var(X_1) = \frac{Var(X_1)}{n}$$

$$Ecm(\overline{X}) = \frac{9}{n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} ECM(\overline{X}) = \lim_{n\to\infty} \frac{9}{n} = 0 \Rightarrow \text{es un estimador consistente.}$$

$$\lim_{n\to\infty} Var(\overline{X}) = 0 \text{ y } E[\overline{X}] = \mu \Rightarrow \text{es consistente}$$

La posición del impacto en un tiro al blanco (en decímetros) respecto del cero sobre el eje x es una variable aleatoria X con distribución normal de media cero y varianza 1/θ, donde θ representa la precisión del tirador.
A priori, la precisión θ tiene una distribución Chi-cuadrado de 8 grados de libertad. Lucas tiro 10 veces al blanco y observó que $\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 17$. Hallar la distribución a posteriori de θ.
Hallar la estimación de Bayes de θ para la el riesgo cuadrático

X_i: distancia del impacto con respecto a cero (decímetros), $i = 1, 2, \dots, 10$

$\Gamma(4; \frac{1}{2})$ $\quad X_i \sim \mathcal{N}(0; \frac{1}{\theta})$ precisión del tirador

A priori: $\Theta \sim \chi^2_8$, $n = 10 \rightarrow \sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 17$ $\quad \chi^2_8$

$$f_{\Theta|\underline{X}=\underline{x}}(\theta) = \frac{f_{X_1|\Theta=\theta}(x_1) \cdot f_{X_2|\Theta=\theta}(x_2) \cdot \dots \cdot f_{X_{10}|\Theta=\theta}(x_{10}) \cdot f_{\Theta|\underline{X}=\underline{x}}(\theta)}{\int_0^\infty f_{X_1|\Theta=\theta}(x_1) \cdot \dots \cdot f_{X_{10}|\Theta=\theta}(x_{10}) \cdot f_{\Theta|\underline{X}=\underline{x}}(\theta)\, d\theta} =$$

$$= \frac{\left(\prod_{i=1}^{10} \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{\theta x_i^2}{2}}\right) \frac{1}{\cancel{2^4} \cdot 3!} \cdot \theta^3 \cdot e^{-\frac{\theta}{2}}}{\int_0^\infty \prod_{i=1}^{10} \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{\theta x_i^2}{2}} \cdot \frac{1}{\cancel{2^4} \cdot 3!} \cdot \theta^3 \cdot e^{-\frac{\theta}{2}} d\theta} = \frac{(\sqrt{\theta})^{10} \cdot e^{-\frac{\theta}{2}\sum_{i=1}^{10} x_i^2} \cdot \theta^3 \cdot e^{-\frac{\theta}{2}}}{\int_0^\infty (\sqrt{\theta})^{10} \cdot e^{-\frac{\theta}{2}\sum_{i=1}^{10} x_i^2} \cdot e^{-\frac{\theta}{2}} d\theta} =$$

$$= \frac{\theta^8 \, e^{-\frac{\theta}{2}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i^2 + 1\right)}}{\int_0^\infty \theta^8 \cdot e^{-\frac{\theta}{2}\left(\sum_{i=1}^{10} x^2 + 1\right)} d\theta} = \frac{\theta^8 \cdot e^{-\frac{\theta}{2}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i + 1\right)}}{\frac{\Gamma(9)}{(\sum x_i^2 + 1)^9} \int_0^\infty \underbrace{\frac{(\sum x_i^2 + 1)^9}{\Gamma(9)} \cdot \theta^8 e^{-\frac{\theta}{2}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i + 1\right)} d\theta}} =$$

$$\int_0^\infty \theta^8 \cdot e^{-\frac{\theta}{2}\left(\sum_{i=1} x^2+1\right)} d\theta \quad \frac{\Gamma(9)}{\left(\sum x_i^2+1\right)^9}\int_0^\infty \underbrace{\frac{\left(\sum x_i^2+1\right)^9}{\Gamma(9)} \cdot \theta^8 e^{-\frac{\theta}{2}\left(\sum_{i=1} x_i+1\right)}}_{\Gamma\left(9,\, \frac{\sum_1^{10} x^2+1}{2}\right)} d\theta$$

$$= \frac{\left(\sum x_i+1\right)^9}{\Gamma(9)} \cdot \theta^8 \cdot e^{-\frac{\theta}{2}\left(\sum x_i^2+1\right)}$$

Función de densidad a posteriori: $\Theta|_{\underline{X}=\underline{x}} \sim \Gamma\left(9,\, \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i^2+1}{2}\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \Theta|_{\underline{X}=\underline{x}} \sim \Gamma(9, 9)$$

La cantidad de accidentes semanales en una planta industrial tiene una distribución de Poisson de media μ. En una muestra de 100 semanas se observaron las frecuencias:

Cantidad de accidentes	0	1	2	3	4	5
Frecuencia	10	29	25	17	13	6

A priori, μ tiene una distribución exponencial de media 2. Hallar la distribución a posteriori de μ.

$$X_1, X_2, \dots, X_{100} \overset{i.i.d}{\sim} Po(\mu), \quad \text{A priori } \mu \sim \overbrace{\mathcal{E}xp\left(\tfrac{1}{2}\right)}^{\Gamma\left(1, \frac{1}{2}\right)}$$

$$f_{\mu|\underline{X}=\underline{x}}(\mu) = \frac{\prod_{i=1}^{100} P_{X_i|\mu=\mu}(x_i) \cdot f_\mu(\mu)}{\int_0^\infty \prod_{i=1}^{100} P_{X_i|\mu=\mu}(x_i) \cdot f_\mu(\mu)\, d\mu} \quad f_\mu(\mu) \to \pi(\mu) \quad = \frac{\prod_{i=1}^{100} \frac{e^{-\mu}\mu^{x_i}}{\cancel{x_i!}} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \cdot e^{-\frac{\mu}{2}}}{\int_0^\infty \prod_{i=1}^{100} \frac{e^{-\mu}\mu^{x_i}}{\cancel{x_i!}} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \cdot e^{-\frac{\mu}{2}}\, d\mu} =$$

$$= \frac{e^{-100\mu} \cdot \mu^{\sum_{i=1}^{100} x_i} \cdot e^{-\frac{\mu}{2}}}{\int_0^\infty e^{-100\mu} \cdot \mu^{\sum_{i=1}^{100} x_i} \cdot e^{-\frac{\mu}{2}}\, d\mu} = \frac{e^{-100{,}5\mu}\, \mu^{\sum_{i=1}^{100} x_i}}{\int_0^\infty e^{-100{,}5\mu} \cdot \mu^{\sum_{i=1}^{100} x_i}\, d\mu} =$$

$$= \frac{e^{-100{,}5\mu} \cdot \mu^{\sum_{i=1}^{100} x_i}}{\frac{\Gamma(\sum x_i+1)}{(100{,}5)^{\sum x_i+1}} \underbrace{\underbrace{\int_0^\infty \frac{(100{,}5)^{\sum x_i+1}}{\Gamma(\sum x_i+1)} \mu^{\sum_{i=1}^{100} x_i} e^{-100{,}5\mu}}_{\Gamma\left(\sum_{i=1}^{100} x_i+1,\; 100{,}5\right)} d\mu}_{=1}} = \frac{(100{,}5)^{\sum x_i+1}}{\Gamma(\sum x_i+1)} \cdot \mu^{\sum x_i} \cdot e^{-100{,}5\mu}$$

Función de densidad a posteriori: $\mu \sim \Gamma\left(\sum_{i=1}^{100} x_i+1,\; 100{,}5\right)$

Ejercicio 1:

Función de densidad a posteriori: $\Theta|_{\underline{X}=\underline{x}} \sim \Gamma\left(9,\, \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i^2+1}{2}\right)$

$$\Rightarrow \Theta|_{\underline{X}=\underline{x}} \sim \Gamma(9, 9)$$

Estimador de Bayes: $E[\Theta \mid \underline{X}=\underline{x}] = \frac{9}{9} = 1$

Para el ejercicio 2, estimar la probabilidad de que en la semana del 18 de diciembre de 2021 no ocurra ningún accidente en la mencionada planta.

$$P(X=0) = \int_0^\infty P_{X|\mu=\mu}(x) \cdot f_{\mu|\underline{X}=\underline{x}}(\mu)\, d\mu = \int_0^\infty \frac{e^{-\mu} \cdot \mu^0}{0!} \cdot \frac{(100{,}5)^{\sum x_i+1}}{\Gamma(\sum x_i+1)} \cdot \mu^{\sum x_i} \cdot e^{-100{,}5\mu} d\mu =$$

$$= \int_0^\infty e^{-\mu(100{,}5+1)} \cdot \frac{(100{,}5)^{\sum_{i=1}^{100} x_i+1}}{\Gamma(\sum x_i+1)} \cdot \mu^{\sum x_i}\, d\mu =$$

$$= \int_0 \cdots \frac{\cdots}{\Gamma(\sum x_i+1)} \mu \cdots d\mu =$$

$$= \frac{(100{,}5)^{\sum_{i=1}^{100} x_i+1}}{(101{,}5)^{\sum x_i+1}} \cdot \underbrace{\int_0^{\infty} \frac{(101{,}5)^{\sum x_i+1}}{\Gamma(\sum x_i+1)} \mu^{\sum x_i} \cdot e^{-101{,}5\mu} \, d\mu}_{} =$$

$$= \frac{(100{,}5)^{\sum_{i=1}^{100} x_i+1}}{(101{,}5)^{\sum_{i=1}^{100} x_i+1}} = \frac{100{,}5^{213}}{101{,}5^{213}} = 0{,}1214$$

$=1$

$$\sum_{i=1}^{100} x_i = 212$$

1. Hallar un estadístico suficiente para el parámetro de una v.a. con distribución exponencial

$$X_1, X_2, \ldots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} \mathcal{E}xp(\lambda) \qquad f_\theta(\underline{x}) = g(r(\underline{x}), \theta)h(\underline{x})$$

$$f_\lambda(\underline{x}) = \prod_{i=1}^{n} \lambda e^{-\lambda x_i} \, \mathbb{1}\{x_1>0, x_2>0, \ldots, x_n>0\}$$

$$f_\lambda(\underline{x}) = \lambda^n \underbrace{e^{-\lambda \sum x_i}}_{g(\underbrace{\sum x_i}_{r(\underline{x})}, \lambda)} \underbrace{\mathbb{1}\{x_1>0, x_2>0; \ldots; x_n>0\}}_{h(\underline{x})}$$

Entonces: $\sum_{i=1}^{n} x_i$ es un estadístico suficiente.

2. Hallar un estadístico suficiente para el parámetro de una v.a. con distribución de Bernoulli

$$X_1, X_2, \ldots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} Be(p), \qquad X_i = \begin{cases} 0 \longrightarrow P(X_1=1) = 1-p \\ 1 \longrightarrow P(X_1=1) = p \end{cases}$$

$$p_{\underline{X}}(\underline{x}) = \prod_{i=1}^{n} p^{x_i} \cdot (1-p)^{1-x_i} \, \mathbb{1}\{x_i \in \{0;1\}\} = p^{\sum x_i} \cdot (1-p)^{n-\sum x_i} \, \mathbb{1}\{x_i \in \{0;1\}\} =$$

$$= \underbrace{\left(\frac{p}{1-p}\right)^{\sum x_i}}_{g(r(\underline{x}); p)} \cdot (1-p)^n \, \underbrace{\mathbb{1}\{x_i \in \{0;1\}\}}_{h(\underline{x})}$$

$$r(\underline{x}) \rightarrow \sum x_i$$

- $$P_{\underline{X}|\underbrace{T=t}_{T=\sum_{i=1}^{n} x_i}}(\underline{x}) = \frac{P(\underline{X}=\underline{x}, T=t)}{P(T=t)} = \cdots = \frac{1}{\binom{n}{t}} \Rightarrow T \text{ es un estadístico suficiente}$$

3. Hallar un estadístico suficiente para el parámetro de una v.a. con distribución Uniforme en el intervalo (0,θ)

Método de máxima verosimilitud:

Monedas

① ②

$p=\frac{1}{2}$ $\quad p=\frac{3}{4}$

$p = P(\text{cara})$

$X_i = \begin{cases} 1 \to \text{cara} \\ 0 \to \text{ceca} \end{cases}$

. Elijo la moneda 2 veces y la arrojo,

$n=2 \longrightarrow$ por ej.: $X_1 = 1$, $X_2 = 1$

. Para ① $\to P(X_1=1, X_2=1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

. Para ② $\to P(X_1=1, X_2=1) = \frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4} = \frac{9}{16}$

$\to p = \frac{3}{4}$

La probabilidad de acertar a un blanco es p. Se realizan 10 tiros independientes, en los cuales se observaron 4 aciertos. A partir este valor observado estimar el valor de p por MV.

$X_1, X_2, \dots, X_{10} \overset{i.i.d.}{\sim} Be(p)$

↳ parámetro a estimar

$$L(p) = \prod_{i=1}^{10} p^{x_i}\cdot(1-p)^{1-x_i} = p^{\Sigma x_i}\cdot(1-p)^{10-\Sigma x_i}$$

$$\ln(L(p)) = \Sigma x_i\, p + (10-\Sigma x_i)\cdot(1-p)$$

$$\frac{\partial \ln(L(p))}{\partial p} = \frac{\Sigma x_i}{p} + \frac{(10-\Sigma x_i)}{1-p}\cdot(-1) = 0$$

$$\Sigma x_i - \cancel{p\Sigma x_i} = 10p - \cancel{p\Sigma x_i}$$

$$p = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i}{10}$$

Estimador de máxima verosimilitud: $\hat{p} = \dfrac{\sum_{i=1}^{10} X_i}{10}$

A partir de la muestra: $\hat{p} = \frac{4}{10} = 0{,}4$

Siguiendo el ejercicio 7, estimar la probabilidad de que se necesiten al menos 2 tiros para observar el primer acierto.

X: cantidad de tiros hasta el 1° acierto

$X \sim Ge(p)$

$$\widehat{P(X\geq 2)} = 1-\widehat{P(X=1)} = 1-\hat{p} = 1-0{,}4 = \underline{0{,}6}$$ $\longrightarrow$ Por principio de invarianza

$$P(X\geq 2) = 1-P(X=1) = 1-p = g(p)$$