Clase de Repaso 1

Verónica Pastor, Martín Errázquin

Análisis Matemático para Inteligencia Artificial

18/2/2022

Nociones sobre Conjuntos

Un **conjunto** es la reunión de entes u objetos bien definidos y diferenciables entre sí, que en general tienen características similares. Estos entes u objetos se llaman **elementos del conjunto**.
Si a es un elemento del conjunto A se denota con la **relación de pertenencia** $a \in A$. En caso contrario, si a no es un elemento de A se denota $a \notin A$.

$A = \{x : x \text{ está cursando AM para IA}\}$

$a =$ Ariadna $\quad a \in A \quad b =$ Martín $\quad b \notin A$

~~$a \subset A$~~

Formas de Expresar un Conjunto

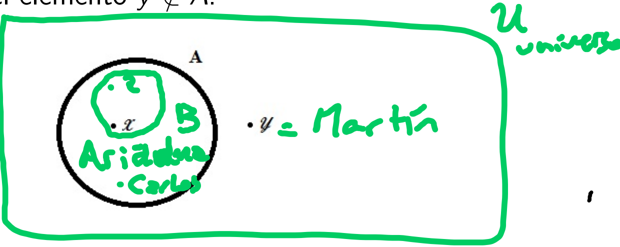
- Expresado por Extensión
  Cuando damos de manera explícita los elementos, es decir, se especifica cuales son cada uno de los elementos de A. Por ejemplo:
  $\boxed{A = \{1, 3, 5, 7\}}$
- Expresado por Comprensión
  Cuando expresamos la propiedad que define el conjunto. En el ejemplo anterior, $A = \{x \in \mathbb{N} : x \textit{ es un nro. impar menor o igual a } 7\} = \{x \in \mathbb{N} : x \textit{ es impar } \wedge x \leq 7\}$
  y

Recordatorio $\wedge$ = y $\quad \vee$ = o

- Diagrama de Venn
  Seguramente esté familiarizado con gráficos como el siguiente, donde el elemento $x \in A$ y el elemento $y \notin A$.

$\mathcal{U} = \{x : x$ recibió el enlace meet de este curso$\}$

$z =$ Alan



Subconjuntos de un conjunto: Si A y B son conjuntos tales que todo elemento de B es también elemento de A, se dice que B es subconjunto de A, o que B está incluido en A, se nota $B \subset A$.

$B = \{x :$ x su nombre empieza con A

$\subseteq$ contenido o igual $A = B$

$A \subset B \wedge B \subset A$

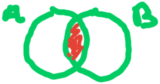
Es necesario distinguir entre Conjuntos y Sucesiones

Una **sucesión** es una lista de objetos dispuestos en un orden. La lista puede finalizar (sucesión finita) o puede continuar indefinidamente (sucesión infinita). Los elementos de la sucesión pueden ser todos distintos o pueden repetirse.
Así las dos diferencias fundamentales son:

1. En las sucesiones importa el orden en el que están los términos. Por ejemplo, el conjunto que mencionamos antes: $A = \{1, 3, 5, 7\}$ también puede ser considerado como lista una sucesión finita, pero si permutamos los elementos $A = \{7, 3, 1, 5\}$ el conjunto sigue siendo el mismo mientras que como sucesión es otra.
2. Las sucesiones admiten elementos repetidos, por ejemplo $1, 0, 0, 1, 0, \ldots,$ mientras que en la definición de conjunto los elementos son diferenciables entre sí.

Operaciones con Conjuntos

- **Intersección**: Dados los conjuntos A y B, se define el conjunto $A \cap B$ que llamaremos **intersección de A y B**, como el conjunto formado por los elementos que son comunes a ambos conjuntos.



$$B \cap A = A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$

- **Unión**: Dados los conjuntos A y B, se define el conjunto $A \cup B$ que llamaremos **unión de A y B**, como el conjunto formado por los elementos que pertenecen a uno u otro conjunto.

$$x \in A \cup B \quad B \cup A = A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$$

- **Diferencia**: Dados los conjuntos A y B, se define el conjunto $A - B$ que llamaremos **diferencia entre A y B** (en ese orden), como el conjunto formado por los elementos de A que no pertenecen a B

$$B - A \neq A - B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$$

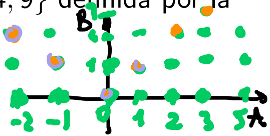
- **Producto Cartesiano**: Dados los conjuntos A y B, se define el conjunto $A \times B$ que llamaremos **producto cartesiano entre A y B** (en ese orden), como el conjunto formado por los pares ordenados donde el primer elemento pertenece a A y el segundo pertenece a B.

$$B \times A = A \times B = \{(x, y) : x \in A \wedge y \in B\}$$

Relaciones

Este repaso pretende ser ser una introducción a un modelo que se usa para la administración de una base de datos. Una relación de un conjunto A en el conjunto B es un subconjunto de $A \times B$.

Ejemplo: Sean $A = \{0, 1, 2, 3, -1, -2, 5\}$ y $B = \{0, 1, 4, 9\}$ definida por la relación



relación → si y sólo si:

$R \subset A \times B$ $\qquad x \in A \quad y \in B$

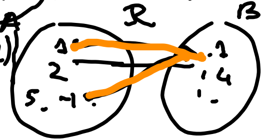
$$xRy \text{ sii } y \text{ es el cuadrado de } x$$

Representación por pares: ¿Podemos cambiar el orden?

$A \times B = \{(0,0), (0,1), (0,4), (0,9), (1,0), (1,1), \ldots\} =$
$= \{(x,y) : x \in A \wedge y \in B\}$

$R = \{(0,0), (1,1), (2,4), (3,9), (-1,1), (-2,4)\}$

$R^{-1} = \{(0,0), (1,1), (4,2), (9,3), (1,-1), (4,-2)\}$



Así definimos la relación inversa

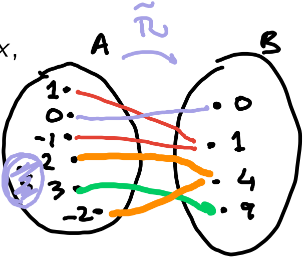
$$yR^{-1}x \text{ sii } xRy$$

$yR^{-1}x$ sii x es raiz de y $\qquad R^{-1} \subset B \times A$

Caso particular: funciones

Cuando una relación definida sobre $A \times B$ cumple con que todo elemento del conjunto A está relacionando con un elemento del conjunto B, se dice que es una **función**.

Analicemos el ejemplo *xRy sii y es el cuadrado de x*,
$A = \{\cancel{0,1,2,3,}-1,-2,5\}$ y $B = \{0,1,4,9\}$

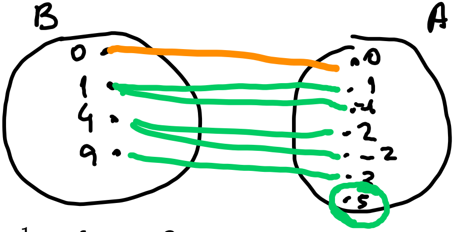


R no es función

$A = \{0,1,2,3,-1,-2\}$

$\tilde{R} \subset A \times B$

¿es función? Rta: SI



R^{-1} es función?

$B = \text{Dom } R^{-1}$

$A = \text{Codom } R^{-1}$

$\text{Im}(R^{-1}) = \{0, 1, -1, 2, -2, 3\}$

¿Es R^{-1} es función?

Algunas definiciones ...

Si consideramos $f : A \to B$, siendo $A = \{0, 1, 2, 3, -1, -2\}$ y $B = \{0, 1, 4, 9\}$

función

"salen flechas"

- El conjunto A se llama dominio de la función. Se nota $Dom(f)$.
- El conjunto B se llama codominio de la función. Se nota $Codom(f)$.
- El subconjunto de B formado por los elementos que están relacionados con los de A se llama imagen de la función. Se nota $Im(f)$.

$B = Codom(f)$ $A = Dom(f)$

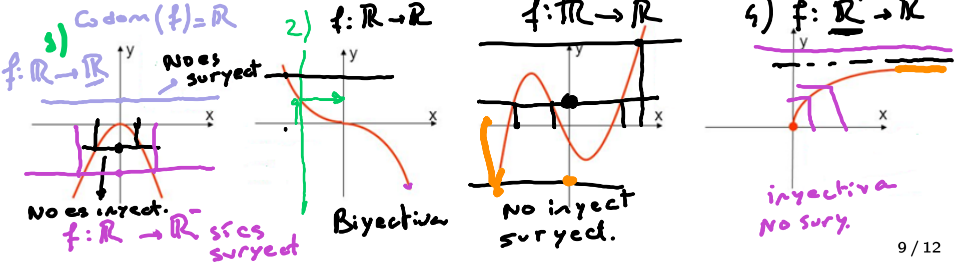
"a los que les llegan flechas"

$B = Im(f)$

Funciones Inyectivas, Suryectivas y Biyectivas

- Inyectiva: cuando a elementos distintos del dominio le corresponden elementos distintos del codominio, y recíprocamente. En símbolos: $a, b \in Dom(f), a \neq b \leftrightarrow f(a) \neq f(b)$. $\longleftrightarrow$ si y sólo si
- Suryectiva: cuando todo elemento del codominio es imagen de por lo menos un elemento del dominio. En símbolos: $\forall c \in Codom(f), \exists a \in Dom(f) : c = f(a)$.
  $\forall$: para todo
  $\exists$: existe
- Biyectiva: cuando la función es inyectiva y suryectiva es biyectiva, o sea es uno a uno.

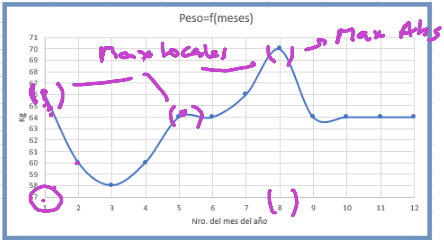
Figura: Analizando algunas gráficas de funciones...



Estudio de Funciones

Cuando miramos un gráfico tendemos a describir ciertas características, miremos por ejemplo este .

Meses	Kg
Enero	66
Febrero	60
Marzo	58
Abril	60
Mayo	64
Junio	64
Julio	66
Agosto	70
Setiembre	64
Octubre	64
Noviembre	64
Diciembre	64



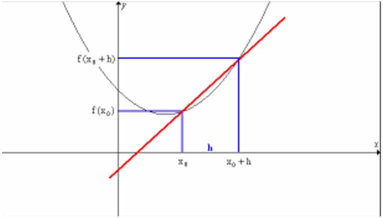
Im(f)

Sea $c \in f(x)$ se dice que $f(x)$ alcanza en c un máximo local si $f(c) \geq f(x), \forall x$ en un intervalo alrededor de c. Cuando este intervalo puede abarcar todo el $Dom(f)$ el máximo es absoluto. Análogo para el caso de mínimo.

Sea $f(x) : I \subset Dom(f) \rightarrow Codom(f)$, se dice que $f(x)$ es creciente en I si cada vez que $x_1 < x_2$ se tiene que $f(x_1) < f(x_2)$, cualesquiera sean $x_1, x_2 \in I$. Análogo para el caso de decreciente.

Derivada de una función

Toda función f describe el cambio de una magnitud (v. dependiente) en términos de otra (v. independiente), cuando esta variable se mueve en cierto intervalo $[x_0, x_0 + h]$ la variación total se mide como $f(x_0 + h) - f(x_0)$, mientras que la variación media es $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{(x_0+h)-x_0}$. Geométricamente, podemos ver la variación media como la pendiente de la recta secante, pero cuando hacemos que $h \to 0$,



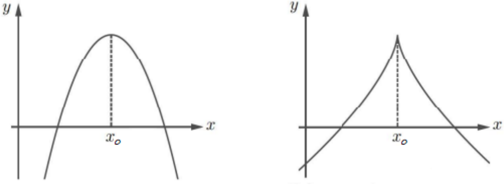
Esto nos conduce a la definición de derivada de f en x_0:

$$lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

- Cuando $f'(x_0) < 0$, f es decreciente.
- Cuando $f'(x_0) = 0$, f tiene un punto crítico en x_0.
- Cuando $f'(x_0) > 0$, f es creciente.

Máximos y Mínimos

Acabamos de ver que se puede iterpretar la derivada como la pendiente de la recta tangente en el punto $(x_0, f(x_0))$, pero ¿siempre existe la tangente?



Un número x_0 es un **número crítico** de una función $f(x)$, si es un punto de continuidad y sucede alguna de las siguientes cosas:

1. $f(x)$ es derivable en x_0 y $f'(x_0) = 0$, o bien
2. $f(x)$ no es derivable en x_0

Estos números críticos son candidatos a ser máximos o mínimos.
Pero si no tenemos el gráfico de la función ¿cómo sabemos si es un máximo o un mínimo?