Dinâmica predador-presa com doenças afetando a população de presas

Fernanda Luísa Silva Gomes
João Lucas Duim

Setembro de 2021

1 Introdução

Muitas são as referências onde pode-se encontrar estudos sobre a dinâmica predador-presa e sobre epidemiologia, dado o avanço ocorrido nessas áreas ultimamente. No entanto, ainda são escassas as referências que contemplam a fusão dessas duas importantes áreas de pesquisa. A abordagem desse trabalho mostra-se extremamente útil, visto que nenhuma população real encontra-se completamente invulnerável a epidemias. Apesar disso, a fim de evitar demasiada complexidade dos modelos e também pela escassez de artigos que abordem epidemias em ambas as populações, trataremos o caso em que apenas a população de presas é afetada por epidemias, as quais não afetam a população de predadores pelo ato da predação.

Neste artigo encontra-se uma abordagem essencialmente teórica, não envolvendo análise de nenhum conjunto de dados de situações reais. O sistema eco-epidemiológico descrito terá 3 atores: o predador, a presa suscetível e a presa infectada. Nesse sistema, nota-se, principalmente, a predação de presas infectadas, visto que a doença a enfraquece, deixando-a mais exposta e vulnerável.

Um dos trabalhos de modelagem sobre o tema, por Joydev Chattopadhyay e Ovide Arino [1], assume as mesmas premissas e utiliza uma metodologia semelhante à deste artigo. Além disso, nele é apresentada uma análise matemática minuciosa, permeada por interpretação biológica que produz ricas conclusões, sendo o seguinte resultado de especial interesse para a modelagem aqui apresentada: "Quando a taxa máxima de renovação da população infectada é menor do que sua taxa de mortalidade natural, então ambas as populações (infectadas e predadoras sãs) vão à extinção.".

Md Sabiar Rahman e Santabrata Chakravarty [3] modela o mesmo fenômeno biológico em questão com a premissa adicional de que as presas infectadas são incapazes de se reproduzir. O sistema de equações tratado é:

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = rS\left(1 - \dfrac{S+I}{k}\right) - \dfrac{c_1 SP^2}{a+(S+I)P} - \lambda IS \\ \dfrac{dI}{dt} = \lambda IS - \dfrac{c_2 IP^2}{a+(S+I)P} - \gamma I \\ \dfrac{dP}{dt} = \dfrac{e(c_1 S + c_2 I)P^2}{a+(S+I)P} - dP \end{cases}$$

onde P, S e I representam, respectivamente, as populações de predadores, presas suscetíveis e presas infectadas. Os parâmetros r, k, λ, c_2, c_1, a, γ, e, d pertencem todos a $\mathbb{R}_+$, sendo que r representa a taxa de crescimento da população de presas, k representa a capacidade de suporte do meio, λ representa a força da infecção, c_2 é a taxa de predação de presas infectadas, c_1 é a taxa de predação de presas suscetíveis, a representa a constante de meia saturação, γ é a taxa de mortalidade total de presas infectadas (taxa de morte natural + taxa de mortalidade devido à doença), e é o fator de conversão e d representa a taxa de morte natural da população de predadores. Nesta investigação, a delimitação das soluções, a existência e a estabilidade de diferentes equilíbrios foram minuciosamente examinados, sendo de grande valor as conclusões obtidas.

Por fim, Krishna pada Das et al [2] apresenta um estudo similar, com o tema "Um estudo matemático da dinâmica predador-presa com doenças afetando a população de predadores". Assume-se que, na ausência de predadores, a população de presas cresce segunda uma curva logística e que a doença é disseminada apenas entre a população de predadores, segundo a lei de ação das massas. O sistema de equações tratado é:

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dT} = rX\left(1 - \dfrac{X}{k}\right) - \dfrac{c_1X(Y+fZ)}{a_1+X} \\ \dfrac{dY}{dT} = \dfrac{m_1X(Y+fZ)}{a_1+X} - d_1Y - \lambda_1YZ \\ \dfrac{dZ}{dT} = \lambda_1YZ - (d_1+a_1)Z \end{cases}$$

onde X, Y e Z representam, respectivamente, as populações de presa, predador suscetível e predador infectado, c_1 é a taxa de predação do predador suscetível, c_1f é a taxa de predação do predador infectado, λ_1 é a taxa de infecção e a_1 é a constante de meia saturação. Este estudo indica que dois resultados muito diferentes são possíveis: a população de predadores infectados pode ser levada à extinção ou atingir um equilíbrio instável. Apesar do trabalho de modelagem feito não ser exatamente sobre o mesmo fenômeno, a metodologia é bastante similar e útil para a confecção do modelo deste artigo.

2 Metodologia

Nosso sistema eco-epidemiológico é constituído de três espécies, sendo elas: a presa suscetível, a presa infectada e a população de predadores. De modo a simplificar o problema, assumiremos que a população de presas sãs cresce de acordo com uma lei logística envolvendo toda a população de presas. Além disso, a taxa de transmissão entre a população de presas suscetíveis e infectadas segue a lei simples de ação de massa. A doença se espalha apenas entre a população de presas, estando os predadores imunes, e a doença não é herdada geneticamente. As populações infectadas não se recuperam e não se tornam imunes. Por último, a população de predadores se alimenta principalmente da população de presas infectadas.

A partir das suposições acimas, obtemos o seguinte sistema de EDOs:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} &= r(S+I)\left(1 - \frac{S+I}{k}\right) - bSI - \eta\gamma_1(S)Y, \\ \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} &= bSI - \gamma(I)Y - cI, \\ \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t} &= (\varepsilon\gamma(I) + \eta\varepsilon\gamma_1(S) - d)Y. \end{aligned}$$

O parâmetro r é a taxa de crescimento intrínseca da população de presas suscetíveis, k é o suporte do ecossistema ou capacidade de suporte ambiental, b é a taxa de transmissão entre as populações de presas sãs e infectadas, c é a taxa de mortalidade natural das presas infectadas (sem ser devido à predação), d é a taxa de mortalidade da população de predadores, ε é a taxa de conversão de presas em predadores, e $\gamma(I)$ e $\eta\gamma(S)$

são as funções de resposta do predador.

2.1 Compartimento S

O primeiro compartimento do modelo é o S. Esse compartimento representa a população de presas sãs e suscetíveis, ou seja, que não estão contaminadas, mas podem contrair a doença. A população de presas cresce segundo uma lei logística contendo toda a equação das presas. Adicionalmente, as presas passam de suscetíveis para infectadas conforme a lei da ação das massas. Desse modo, a variação desse compartimento é descrita pela equação

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = r(S+I)\left(1 - \frac{S+I}{k}\right) - bSI - \eta\gamma_1(S)Y.$$

2.2 Compartimento I

O segundo compartimento do modelo é o I que representa a população de presas infectadas. Se uma presa suscetível for infectada, ela permanece infectada até morrer, uma vez que ela não se recupera e não se torna imune. A variação desse compartimento é descrita pela equação

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = bSI - \gamma(I)Y - cI.$$

2.3 Compartimento Y

O último compartimento do modelo é o Y. Esse compartimento representa os predadores. A doença infecta somente as presas, estando a população de predadores imunes. A variação desse compartimento é

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t} = (\varepsilon\gamma(I) + \eta\varepsilon\gamma_1(S) - d)Y.$$

2.4 Análise dimensional

Visto que estamos trabalhando com populações, sabemos que [S] = [I] = [Y] = [indivíduos]. Assim

$$\left[\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}\right] = \left[\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\right] = \left[\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}\right] = \left[\frac{\text{indivíduos}}{\text{tempo}}\right].$$

Desse modo, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} &= r(S+I)\left(1 - \frac{S+I}{k}\right) - bSI - \eta\gamma_1(S)Y \\
\left[\frac{\text{indivíduos}}{\text{tempo}}\right] &= [r][\text{indivíduos}]\left(1 - \frac{[\text{indivíduos}]}{[k]}\right) - [b][\text{indivíduos}][\text{indivíduos}] - [\eta\gamma_1(S)][\text{indivíduos}],
\end{aligned}$$

ou seja,

$$
\begin{aligned}
[r] &= \frac{1}{[\text{tempo}]} \\
[k] &= [\text{indivíduos}] \\
[b] &= \frac{1}{[\text{tempo}][\text{indivíduos}]} \\
[\eta\gamma_1(S)] &= \frac{1}{[\text{tempo}]}.
\end{aligned}
$$

Pela segunda equação do modelo,

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} &= bSI - \gamma(I)Y - cI, \\
\left[\frac{\text{indivíduos}}{\text{tempo}}\right] &= \frac{1}{[\text{tempo}][\text{indivíduos}]}[\text{indivíduos}][\text{indivíduos}] - [\gamma(I)][\text{indivíduos}] - [c][\text{indivíduos}],
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\begin{aligned}
[\gamma(I)] &= \frac{1}{[\text{tempo}]} \\
[c] &= \frac{1}{[\text{tempo}]}.
\end{aligned}
$$

Pela terceira equação do modelo,

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t} &= (\varepsilon\gamma(I) + \eta\varepsilon\gamma_1(S) - d)Y \\
\left[\frac{\text{indivíduos}}{\text{tempo}}\right] &= \left([\varepsilon]\frac{1}{[\text{tempo}]} + [\varepsilon]\frac{1}{[\text{tempo}]} - [d]\right)[\text{indivíduos}],
\end{aligned}
$$

ou seja, ε é adimensional e

$$
[d] = \frac{1}{[\text{tempo}]}.
$$

Referências

[1] Joydev Chattopadhyay e Ovide Arino. ≪A predator-prey model with disease in the prey≫. Em: *Nonlinear analysis* 36 (1999), pp. 747–766.

[2] Krishna pada Das et al. ≪A mathematical study of a predator-prey dynamics with disease in predator≫. Em: *ISRN Applied mathematics* (2011).

[3] Md Sabiar Rahman e Santabrata Chakravarty. ≪A predator-prey model with disease in prey≫. Em: *Nonlinear Analysis: Modelling and Control* 18.2 (2013), pp. 191–209.