Oceanografia Dinâmica Básica

Alexandre M. Fernandes

**“ A vida é como andar de bicicleta. Para ter equilíbrio é preciso se manter em movimento constante.”**

Albert Einstein

Sumário

[1. Revisão de conceitos matemáticos 4](#_Toc429032159)

[1.2 Componentes de um vetor 2D 4](#_Toc429032160)

[1.3 Componentes de um vetor 3D 5](#_Toc429032161)

[1.4 Produto Escalar (Produto Interno) 6](#_Toc429032162)

[1.5 Produto vetorial 6](#_Toc429032163)

[1.6 Funções Escalares 7](#_Toc429032164)

[1.7 Funções vetoriais 8](#_Toc429032165)

[1.8 O Gradiente 8](#_Toc429032166)

[1.9 O Divergente e o Laplaceano 9](#_Toc429032167)

[1.10 O Rotacional 10](#_Toc429032168)

[1.11 Considerações sobre Equações Diferenciais Parciais (EDPs) 11](#_Toc429032169)

[2 Escalas do movimento 15](#_Toc429032170)

[**2.1** **Larga Escala** 15](#_Toc429032171)

[**2.2** **Meso Escala** 16](#_Toc429032172)

[**2.3** **Escala Costeira** 17](#_Toc429032173)

[3.1 O efeito da rotação da Terra 19](#_Toc429032174)

[3.2 A Força de Coriolis 23](#_Toc429032175)

[3.3 Decomposição da Força de Coriolis em coordenadas cartesianas locais . 23](#_Toc429032176)

[4 Séries de Taylor 29](#_Toc429032177)

[5 A Força do Gradiente de Pressão Hidrodinâmico 30](#_Toc429032178)

[6 Descrições euleriana e lagrangeana do movimento 32](#_Toc429032179)

[**6.1** **Método Lagrangeano** 32](#_Toc429032180)

[**6.2** **Método Euleriano** 32](#_Toc429032181)

[6.3 O Conceito de Derivada Total 33](#_Toc429032182)

[7 A força de atrito num escoamento laminar, incompressível e irrotacional 36](#_Toc429032183)

[8 Turbulência 41](#_Toc429032184)

[9 A Lei de Conservação da Massa 45](#_Toc429032185)

[10 A aproximação de Boussinesq: 48](#_Toc429032186)

[10.1 A aproximação do plano 48](#_Toc429032187)

[11 Análise de Ordem de Grandeza dos termos da equação do movimento. 48](#_Toc429032188)

[11.1 Números adimensionais 51](#_Toc429032189)

[**11.1.2** **Número de Rossby temporal ou local**  51](#_Toc429032190)

[**11.1.3** **Número de Ekamn** 51](#_Toc429032191)

[**11.1.4** **Número de Reynolds**  52](#_Toc429032192)

[12 O equilíbrio Geostrófico 52](#_Toc429032193)

[12. Condições Barotrópicas e Baroclínicas 53](#_Toc429032194)

[12.1. Oceano Barotrópico 53](#_Toc429032195)

[12.1.1. O Movimento Geostrófico em condições Barotrópicas 54](#_Toc429032196)

[12.2. Oceano Baroclínico 55](#_Toc429032197)

[12.2.1. O Movimento Geostrófico em condições Baroclínicas 55](#_Toc429032198)

# Revisão de conceitos matemáticos

Nesta primeira seção serão revistos alguns dos conceitos da álgebra vetorial que integram a fundamentação matemática da Oceanografia Dinâmica.

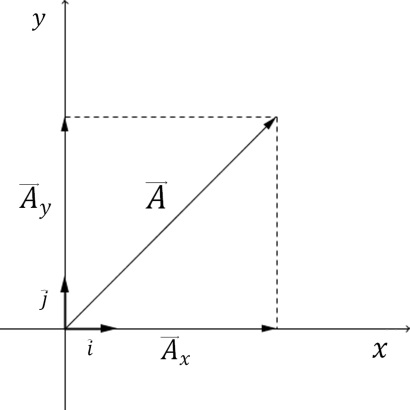
**Grandezas vetoriais e escalares**

Grandezas cuja descrição implica em um módulo, uma direção e um sentido são ditas vetoriais. Já aquelas cuja descrição é dada, simplesmente, por um valor, isto é, um módulo são ditas escalares.

Quais das seguintes grandezas abaixo são vetoriais ou escalares ? Explique. (Fonte: adaptado de Stewart, 2010)

1. O custo de um bilhete de cinema
2. A correnteza em um rio
3. A trajetória inicial do voo entre Rio de Janeiro e São Paulo
4. A população mundial

# Componentes de um vetor 2D



Pelas regras de soma vetorial, se a origem de um sistema de coordenadas coincide com a origem de um vetor, verifica-se que, este vetor é igual à soma dos vetores formados por suas projeções em cada eixo.

O módulo do vetor é dado por:

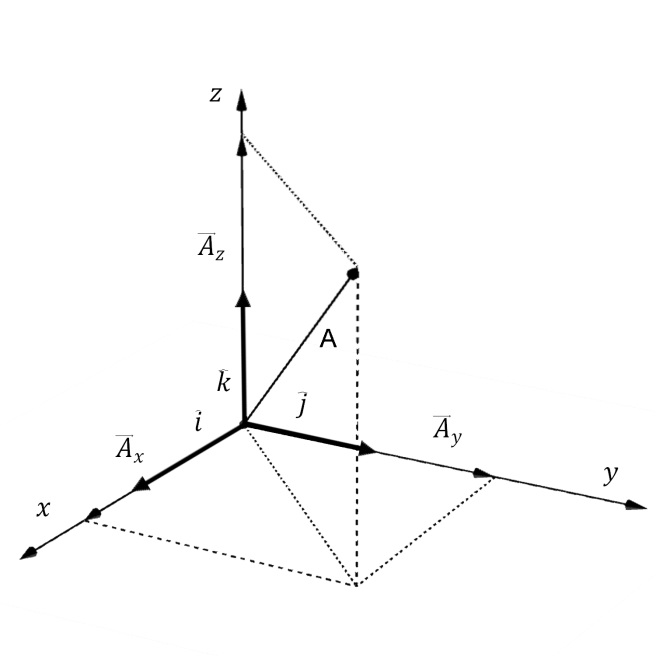
Analogamente, podemos escrever as componentes do vetor , em duas dimensões, usando a notação dos vetores unitários e :

Assim,

OBS: A representação do módulo de um vetor , geralmente é descrita de duas formas:

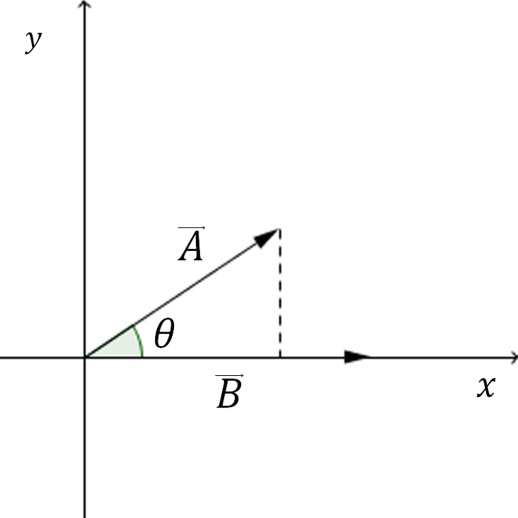
# Componentes de um vetor 3D

Similarmente, se a origem de um sistema de coordenadas coincide com a origem de um vetor, temos:



E o módulo de é dado por:

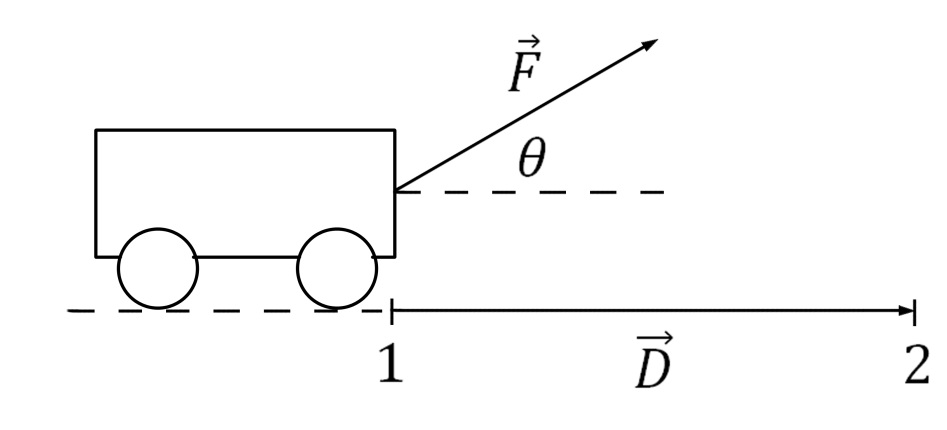
# Produto Escalar (Produto Interno)



O produto escalar entre dois vetores é um número real. Observa-se que esse produto é a projeção de em multiplicada pelo módulo de .

Como uma de suas propriedades, o produto escalar é comutativo, isto é,

**Obs:** Em uma de suas aplicações mais conhecidas, o produto escalar é a expressão matemática com a qual podemos determinar, em física, o trabalho realizado por uma força no deslocamento de um objeto quando a força possui direção diferente da reta de deslocamento do objeto.



Onde:

vetor Força

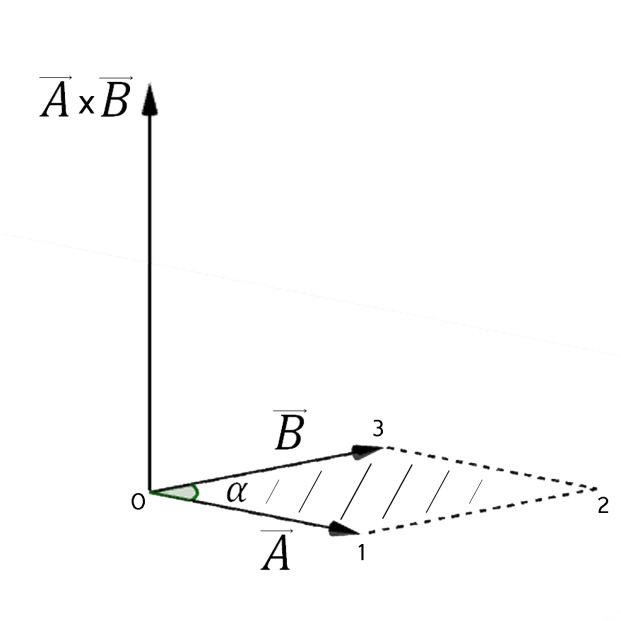
vetor Deslocamento

O trabalho corresponde à energia que devemos fornecer para que o carrinho do esquema anterior se desloque do ponto até o sob a ação da Força .

Em física, o trabalho possui unidade de força vezes distância, isto é, (no sistema internacional).

# Produto vetorial

O produto vetorial entre dois vetores resulta num vetor perpendicular ao plano formado por eles.



O módulo do produto vetorial é igual à área do paralelogramo 0123 hachurada na figura acima. O sentido do vetor é dado pela regra da mão direita.

O produto não é comutativo:

Os vetores unitários, para um dado sistema ortogonal de coordenadas, satisfazem as seguintes igualdades:

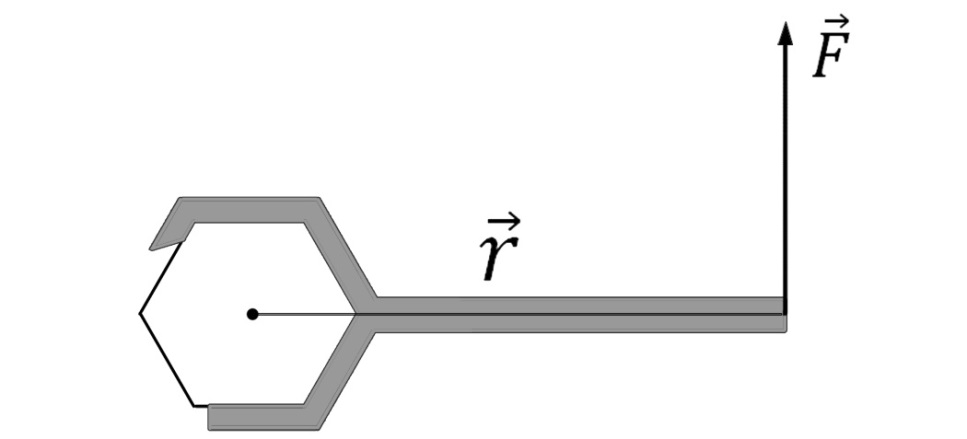
As igualdades acima permitem que o cálculo do produto vetorial seja realizado sem que haja a necessidade de se conhecer o ângulo entre os vetores.

Exemplo: considere os vetores abaixo:

O produto vetorial pode então ser calculado usando-se a notação matricial através do cálculo do determinante (ou notação de determinante):

**Obs:** Em algumas de suas aplicações mais conhecidas, o produto vetorial é a expressão matemática com a qual podemos determinar, em física, o torque de uma força. O torque mede a tendência de um corpo rodar em torno da origem. A direção do vetor torque indica o eixo de rotação e seu módulo é dado por:

Exemplo:



# Funções Escalares

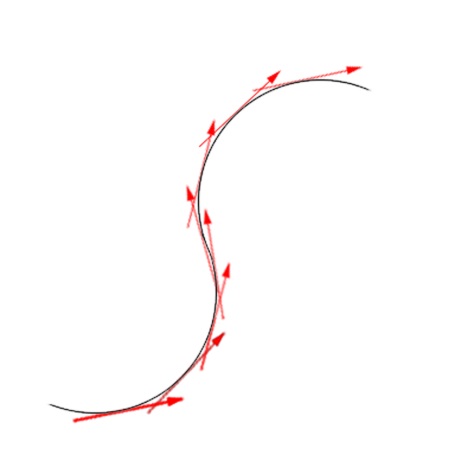
São funções cujos valores são dependem da posição e do tempo sendo independentes da direção e sentido.

Exemplo: considere uma sala retangular onde na parte superior de uma das paredes se encontra um refrigerador e, junto a parede oposta há uma fonte de calor, como um retroprojetor, ambos em funcionamento. Os valores de temperatura no interior da sala são determinados pelo processo de convecção térmica. A distribuição dos valores da temperatura no interior da sala é dada por uma função escalar .

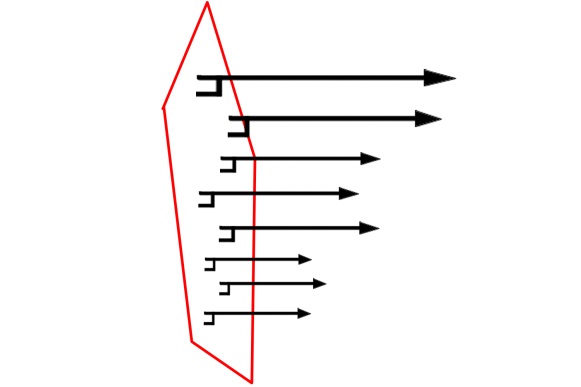
## Funções vetoriais

São funções cujos valores são vetores e dependem de um ponto P no espaço. Tais funções são, portanto, representações de campos vetoriais.

Exemplos:



1. Campo de vetores tangentes a uma curva



1. Campo de vetores normais a uma superfície

# O Gradiente

Em aplicações que ocorrem inúmeras vezes na Oceanografia Física, na Meteorologia e em outras ciências, é necessário se determinar a direção ao longo da qual se dá a máxima variação de um campo vetorial ou de uma função escalar, assim como a magnitude e o sentido dessa variação, este último apontando do menor para o maior valor. Essa determinação é obtida a partir do cálculo do gradiente. O operador gradiente aplicado a um campo f é representado por:

Para uma dada função escalar , a aplicação do operador gradiente, , resulta em um vetor definido como:

Onde a letra grega *nabla* representa o operador matemático “*del*” e são as coordenadas cartesianas.

Exemplo. O gradiente de temperatura da sala descrita na seção 6.1 é um campo vetorial, “conjunto de setas”, cuja direção aponta da menor temperatura, região em volta da saída de ar do refrigerador, para as maiores temperaturas, região em volta da lâmpada do retroprojetor e que aponta para este último.

Portanto, o gradiente é um vetor que pode ser calculado tanto para funções (ou campos) escalares quanto vetoriais.

# O Divergente e o Laplaceano

Considere a função vetorial onde são as coordenadas cartesianas cujos componentes são . O divergente de é definido como o produto escalar:

A partir da definição do produto escalar e dos vetores unitários conclui-se que: e que o produto de componentes perpendiculares resulta em zero. Portanto, o divergente se é dado por:

Nota-se que o operador divergente só pode ser calculado para campos vetoriais. A divergência de um campo escalar é sempre zero.

O divergente é o operador matemático cuja aplicação estabelece a conservação da massa e do volume em Oceanografia dinâmica. Além disso, processos causadores de divergência e convergência de massa na camada superficial dos oceanos estão associados aos fenômenos de ressurgência e subsidência de águas.

Um outro operador matemático pode ser definido a partir da aplicação do divergente sobre o gradiente de uma função qualquer. Este operador recebe o nome de Laplaceano e tem a forma:

O operador Laplaceano estabelece o efeito da força de atrito (ou viscosidade) que atua sobre os fluidos. Esta é proporcional a segunda derivada da velocidade do escoamento.

# O Rotacional

Seja:

um campo vetorial qualquer e sabendo que o operador diferencial “del” é definido por:

podemos, então, definir o produto vetorial , como :

Lembrando que:

Assim, obtem-se:

Que é denominado “Rotacional” do campo e fornece como resultado um vetor .

Analogamente, essa quantidade também pode ser calculada através do determinante da matriz abaixo:

Assim como os demais operadores vistos anteriormente, o rotacional possui grande importância em diversas áreas da ciência. Essencialmente, o seu cálculo fornece uma medida da tendência de um dado campo vetorial apresentar uma rotação. Em Oceanografia Física, a sua aplicação é fundamental uma vez que a circulação oceânica é caracterizada por giros. Tal fato é uma consequência direta da rotação do planeta.

# Considerações sobre Equações Diferenciais Parciais (EDPs)

As EDPs surgem em face dos diversos problemas da Física e da Geometria onde as funções envolvidas dependem de duas ou mais variáveis independentemente, exemplo: . De forma geral, podemos admitir que somente os problemas físicos mais simples podem ser tratados matematicamente por equações diferenciais ordinárias (EDOs) enquanto a vasta maioria dos problemas em dinâmica dos fluidos, dinâmica dos sólidos, transferência de calor, eletromagnetismo, mecânica quântica e outras áreas da física estão associados às EDPs.

Numa EDP, a chamada ordem da equação é dada pela derivada de mais alta ordem dos termos.

Assim como ocorre para as EDOs, dizemos que uma EDP é linear se a variável dependente (incógnita) e suas derivadas parciais forem todas de 1ª ordem, isto é, apresentarem apenas uma diferenciação. Outra caracterização importante é que se em uma dada equação todos os termos contém várias variáveis dependentes, a equação é dita homogênea.

Exemplos de EDPs importantes para a Oceanografia dinâmica e demais áreas da ciência:

1. Equação unidimensional de onda
2. Equação unidimensional de condução de calor
3. Equação de Laplace bidimensional
4. Equação de Poisson bidimensional
5. Equação de Laplace tridimensional

Nas equações acima, é uma constante, é o tempo, são coordenadas cartesianas.

A solução de uma EDP, em uma região R do espaço das variáveis independentes, deve satisfazer a EDP em qualquer lugar do espaço. Em geral, a totalidade das soluções de uma EDP é muito grande. Por exemplo, as funções:

1. ; ;

são inteiramente diferentes entre si, porém todas são solução da equação (3). A unicidade da solução de uma EDP corresponde a um dado problema pois somente é obtida com o uso de condições adicionais obrigatórias para a solução (única). Estas são: a especificação de valores nos contornos do espaço R considerado denominadas “condições de contorno”, e/ou quando o tempo é uma das variáveis independentes. Neste caso, a variável dependente ou a derivada deve assumir um valor já conhecido quando . Esta é a chamada “condição inicial”.

**Exercícios do Capítulo 1**

* **Vetores, produto escalar e produto vetorial**

1) Considere dois vetores e quaisquer. Mostre que o produto escalar é comutativo, isto é:

2) Considere os vetores bidimensionais *A = 3i − 2j e B = 2i − j*. Calcule os módulos desses vetores. Represente *A* e *B* graficamente. R: |A|= ; |B|=.

3) Dois vetores não nulos *A* e *B* quaisquer são perpendiculares ou ortogonais se o ângulo entre eles é ϴ=π/2. Neste caso, portanto, temos que *A.B*=0. Considere agora os vetores dados por: A=2i+2j-k e B=5i-4j+2k. Mostre que eles são ortogonais.

4) Determine o ângulo entre os vetores e .

**R:**

5) Se A=(1,2,1) e B=(0,1,3), calcule AxB e BxA.

6) Uma chave de boca com 30 cm de comprimento posicionada ao longo do eixo cartesiano y aperta um parafuso colocado na origem. Uma força é aplicada no final do cabo da chave com direção dada por (0,3,-4). Determine o módulo da força necessária para que o torque resultante no parafuso seja de 100N.m

* **Gradiente e Divergente**

**1)** Considere a função . Calcule o gradiente de e, em seguida, determine o seu valor no ponto .

**2)** Considere um campo de temperatura (T), numa certa região oceânica, sendo dado por:

Calcule:  
**a)** o gradiente deste campo;  
**b)** o valor do gradiente no ponto ;  
**c)** para o valor do gradiente obtido no item a, calcule o divergente.

**3)** Determine o rotacional e o divergente dos seguintes campos vetoriais:

a)

b)

c)

d)

**4)** Calcule o divergente (*∇.F* ) para os seguintes campos vetoriais

Para esses campos, no ponto *x* = *−*1*, y* = *−*1, *∇.F* é positivo ou negativo?

**5)** Calcule o divergente (*∇.F* ) para os seguintes campos vetoriais

Para esses campos, no ponto *x* = *−*1*, y* = *−*1, *∇.F* é positivo ou negativo?

**6)** A divergência de um campo U qualquer é matematicamente dada por: *∇.U* onde *∇*=  
( *∂x/∂ i* + *∂y/∂ j* + *∂z/∂ k*). Considere o campo *U* sendo dado pelas velocidades geostróficas horizontais. Nesse caso, pergunta-se: o movimento geostrófico é divergente? Justifique sua resposta.

**7)** Considere um campo vetorial *F(x, y, z) = Fxi + Fyj + Fzk* qualquer. O operador divergente dado por:

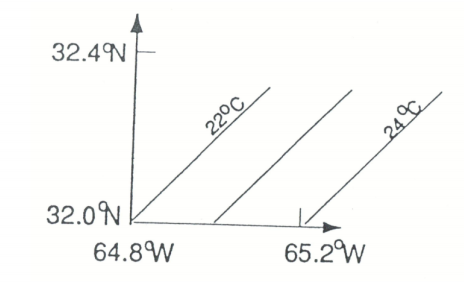
(2)

Considere que os vetores abaixo representam velocidades em diferentes escoamentos. Encontre o divergente (*∇.*) desses vetores. Pergunta: Algum deles satisfaz a equação da continuidade de volume?

**a)** *u* = *xi* + *yj*  
**b)** *u* = *xi − yj*  
**c)** *u* = *xi −* 2*yj*

**8)** Uma malha de termistores fundeados a 200 m de profundidade mediu a temperatura da água numa certa região oceânica, como mostra a figura abaixo:

Figure 1: Distribuição horizontal da temperatura.



**a)** Considere que 1° ≈ 100*km*. Qual o módulo, direção, e sentido do vetor gradiente  
horizontal de temperatura, ?   
**b)** Conside que e . Determine se os correntômetros registraram uma  
velocidade constante (*u,v*)=(0.1,0.1)ms*−*1 ?

**c)** Considere que na figura acima 1° *é aproximandamente*100*km*, e que a variação de temperatura é de 2*°*C a cada 40km nas direções zonal e meridional. Qual a expressão do vetor gradiente horizontal de temperatura? Calcule o seu módulo e indique sua direção e sentido na figura.

**9)** Considere um escoamento bidimensional com componentes de velocidade *u(x,y)=ax ev(x,y)=by*, onde a e b são constantes. Encontre uma relação entre a e b tal que esse campo de velocidades tenha divergência horizontal nula (0.5pt).

RESPOSTAS:

**1)**

**2)**

**3)** a)

b)

c)

d)

* **A integral do Transporte**

**1)** Considere uma corrente oceânica que, numa certa latitude *θ*, flui meridionalmente e possui largura zonal de 100km e profundidade total de 1000m. Nos primeiros 400m da coluna de água, a velocidade da corrente é *v*=-0.2m*s−*1 (para sul). Nos 600m restantes o escoamento ocorre em sentido norte com *v*=0.05m*s−*1. Pergunta-se, qual o transporte de volume total desse escoamento? Expresse sua resposta em Sverdrups (SV), onde 1SV=106*m*3*s−*1.

* **Noções básicas sobre as forças peso e empuxo**

**1)** Um objeto com massa de 10 *kg* e volume de 0,002 *m*3 é colocado totalmente dentro da água (*ρ* = 1*kg/m*3). Para essa situação, responda:

a) Qual é o valor do peso do objeto?

b) Qual é a intensidade da fora de empuxo que a água exerce no objeto?

c) Qual o valor do peso aparente do objeto?

d) Desprezando o atrito com a água, determine a aceleração do objeto.

**3)** Uma esfera maciça e homogênea de densidade *ρ* = 2*.*0*gcm−*3, flutua em um líquido mantendo 40% do seu volume emerso. Calcule a densidade do líquido em unidades do sistema cgs?

**4)** Um bloco cúbico de madeira com densidade *ρc*= 0*,*65*g/cm*3 e com aresta de 20cm, flutua na água (*ρa* = 1*g/cm*3). Determine a altura do cubo que permanece dentro da água.

# Escalas do movimento

Essas escalas são quantidades dimensionais aproximadas que expressam a magnitude, isto é, a grandeza de uma variável física. Na maioria dos casos as escalas principais correspondem às variáveis:

As escalas do movimento são, portanto, grandezas que utilizamos para caracterizar a circulação oceânica e avaliar quando um determinado termo dinâmico (força ou aceleração) será relevante ou não em uma dada situação de estudo.

* 1. **Larga Escala**

Exemplos:

* + 1. **Circulação de Retorno Meridional**

% A circulação termohalina é o exemplo mais conhecido de uma circulação de larga escala. Sua abrangência horizontal compreende o oceano global estendendo-se verticalmente da superfície até o assoalho oceânico. Em altas latitudes no Atlântico Norte e em alguns mares na região Antártica, as águas sofrem o processo de afundamento, convecção profunda,

PAREI AQUI

se deslocando pelo fundo, vagando pelos oceanos, se misturando verticalmente com outras águas, modificando suas características. Nos polos devido às baixas temperaturas e alta salinidade associada às calotas polares (que ao congelarem aumentam a quantidade de sal na água por não congelar tanto sal), a água fica muito densa e afunda por um processo de convecção profunda atingindo regiões com profundidades maiores de 1000m de profundidade.

Processos de subida da água profunda estão associados à turbulência, mistura ao longo da coluna d’água. Alguns processos que estimulam essa elevação:

* Encontro com montes submarinos promove região de turbulência que propicia uma mistura das águas com diferentes densidades e auxilia na elevação das parcelas de água.
* Ondas na coluna d’água provocadas, por vezes, pelo encontro das massas de água com certa velocidade com montes submarinos, que reagem retornando com igual velocidade e capacidade de deslocamento, quebrando eventualmente, provocando mistura turbulenta e auxiliando, assim na elevação das águas.
* Regiões em que ocorre ressurgência associada a alterações no relevo profundo, tendo em vista que a ressurgência traz águas de profundidades de cerca de 400m e a circulação profunda ocorre em níveis de cerca de 1000m ou maiores profundidades.

O processo de retorno das águas profundas promovendo a circulação superior é fundamental para a manutenção da circulação termohalina, de modo que a nomenclatura mais apropriada para essa circulação é Circulação de Retorno Meridional.

Regiões de formação das águas profundas: Mar da Groelândia, corrente do Labrador (Ártico), Mar de Weddel, Mar de Ross.

Próximo à região Antártica devido a grande pista favorável à atuação do vento, o fenômeno da ressurgência é notável.

* + 1. **Circulação dos giros: subequatoriais, subtropicais e subpolares**
    2. **Circulação Circumpolar**
    3. **Ressurgência Equatorial**
  1. **Meso Escala**

Exemplos:

* + 1. **Correntes de Contorno**
    2. **Meandros e vórtices das correntes oceânicas**
    3. **Retroflexões e bifurcações das correntes oceânicas**

% Os processos de meso escala são uma parte do estudo dos eventos de larga escala, como os giros. Quando estudo o giro como um todo, é um evento de larga escala, mas quando observo a situação das correntes de contorno formadas separadamente, é meso.

Retroflexão das correntes (corrente das Agulhas) – mudança de sentido das correntes influenciada pelos ventos, e outros fatores.

Por vezes, dentro de um meandro de uma corrente podem ser observadas estruturas “girantes” bem definidas, chamadas vórtices. Os anéis, como os anéis das agulhas são “meandros abandonados da corrente”. A corrente vai meandrando e eventualmente estrangula e continua se propagando, formando os anéis. No exemplo a leste da África bem no finalzinho a corrente vai descendo e sofre a retroflexão. Nessa região são formados os anéis das agulhas, que se desprendem e vão caminhando pro Atlântico.

Vórtices anticiclonicos tendem a ter a mesma temperatura da corrente. No Hemisfério Sul o anticiclone é anti-horário onde convergem as águas superficiais. No Ciclônico, a água superficial diverge e promovem a tendência de subirem águas mais fundas e mais frias para a superfície. Vórtice de Cabo Frio é Anticiclônico. Essas diferenciações permitem a visualização de vórtices em escala termal.

* 1. **Escala Costeira**

Exemplos:

* + 1. **Correntes em regiões mais internas da plataforma, baías e canais.**
    2. **Movimentos de plumas estuarinas**
    3. **Corrente de maré**
  1. **Submesoescala**
  2. **Escala Fina**

%Ondas internas

Podem ser geradas pelo vento, gerando uma turbulência vertical que pode dar origem a essas ondas em subsuperfície.

Podem ser geradas pelo encontro das correntes com a morfologia de fundo. As ondas internas são excelentes contribuintes para o retorno das correntes mais frias para a superfície.

* 1. **Microescala**

Submesoescala, escala fina e microescala (pegar o slide).

Como mencionamos anteriormente, a Oceanografia Dinâmica tem como principais diferenças em relação à mecânica dos fluidos clássica (MecFlu), a presença dos efeitos de rotação da Terra e da estratificação do fluido.

1. **A rotação da Terra**

A Terra é um planeta em rotação e, após a noção vista na seção anterior, podemos nos perguntar: em que escalas o movimento será substancialmente influenciado pelo efeito da rotação do planeta ? Resposta: Em processos físicos, onde o período (T) seja da ordem de 24h ou maior (período de rotação da Terra).

Consideremos a frequência de rotação da Terra:

24 horas – tempo de revolução da Terra

Uma forma de expressarmos essa noção, matematicamente, é definindo uma quantidade tal como:

Se:

menor em relação à ordem de 1 que representada por , que vai até aproximadamente 3,16, considerando a .

muito maior é representativo de diferenças de duas ordens de grandeza.

Exemplos:

Processos de larga escala, de mesoescala e alguns de escala costeira sofrerão influência significativa da rotação da Terra.

Os efeitos de rotação da Terra não terão relevância em processos de microescala.

Conforme mencionamos, a Oceanografia Dinâmica é governada pela mecânica clássica (Mecânica Newtoniana). Por isso, vale lembrarmos, as 3 leis de Newton.

1ª Lei – Inércia

Um corpo por si só não pode alterar seu estado de repouso ou de movimento retilíneo uniforme. Isto só poderá acontecer caso haja a ação de forças externas.

2ª Lei – Fundamental da Dinâmica

A resultante (soma) das forças que atuam num corpo é igual à massa deste corpo multiplicada pela aceleração por ele adquirida.

3ª Lei – Ação e Reação

A toda ação corresponde uma reação de mesmo módulo e direção, porém em sentido oposto.

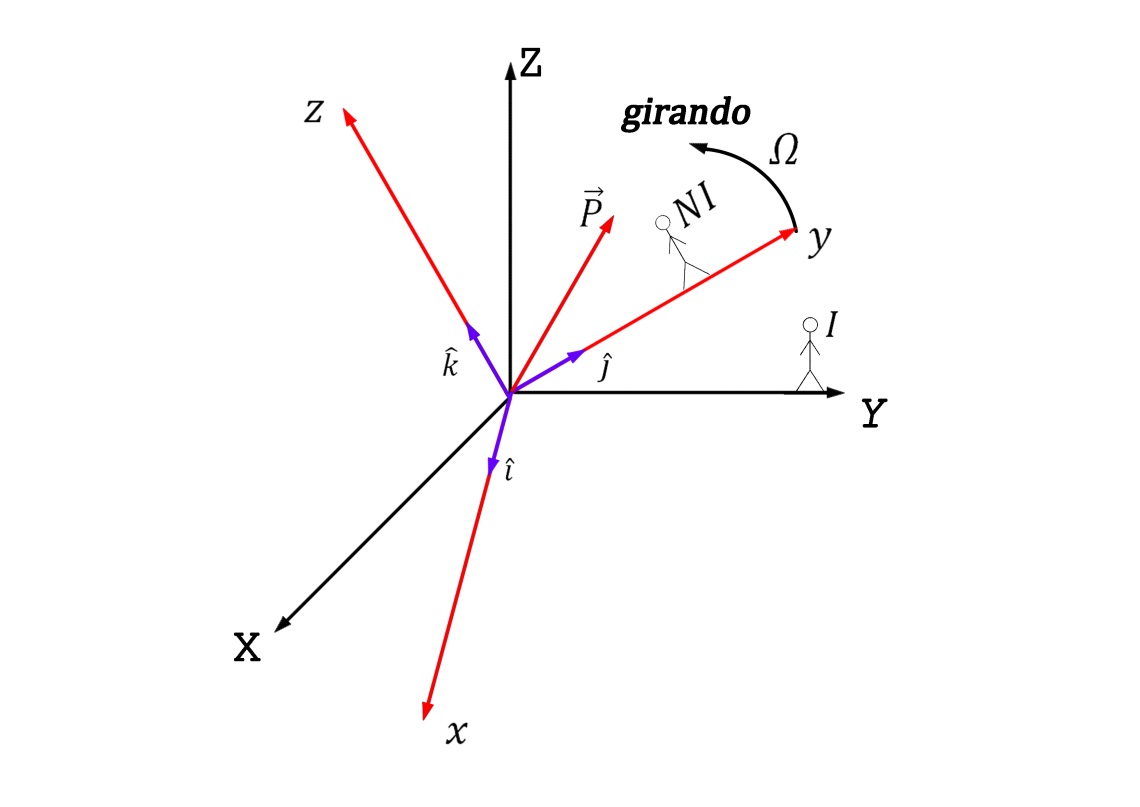
# 3.1 O efeito da rotação da Terra

Sistema de coordenadas em rotação (não inercial)

Para nós é natural a escolha de um ponto na Terra, que é um sistema em rotação, como referencial para descrevermos os movimentos no oceano e na atmosfera. Entretanto, o princípio fundamental da dinâmica de Newton não é valido para um referencial em rotação. Os fenômenos que observamos são os mesmo em qualquer referencial (inercial ou não), porém, a nossa percepção e, consequentemente, a descrição sobre eles é diferente.

Portanto, vamos agora determinar a equação do movimento () em termos de quantidades observadas diretamente de um referencial em rotação.

Considere um referencial em rotação com vetores unitários gerado com velocidade angular uniforme em relação ao referencial inercial . Um vetor qualquer é representado no referencial em rotação por:



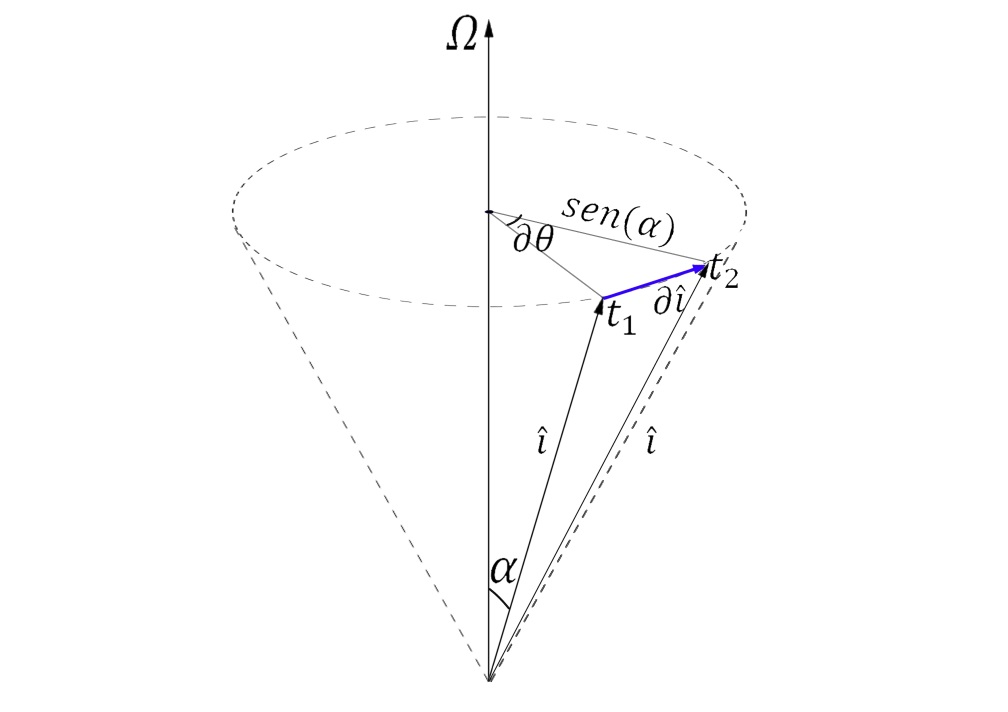
Para um observador em um referencial inercial , o vetor pode apresentar as mesmas variações vistas no referencial não inercial . Entretanto, para o observador em , os vetores unitários também variam, fato que não ocorre para um observador em . Logo, em , observa-se a seguinte taxa de variação para :

Aplicando-se a regra do produto, obtemos:

Já um observador localizado no referencial em rotação e, portanto, em movimento junto com os vetores unitários, observa-se a seguinte variação :

Logo, combinando-se (1) e (2), temos:

Cada vetor unitário encontra-se em rotação uniforme com velocidade constante. Podemos analisar e concluir que esses vetores descrevem um cone ao redor do eixo de rotação, como ilustrado na figura a seguir:



Vemos a posição do vetor unitário em dois pontos distintos, correspondentes aos instantes e ao longo de sua trajetória circular. A variação da posição do vetor no intervalo é igual a e a magnitude (módulo) de é:

A magnitude da taxa de variação de no tempo é:

Já a direção da taxa de variação é um vetor perpendicular ao plano formado pelos vetores e . Logo, podemos escrever que:

Note que, a mesma análise se aplica aos demais vetores unitários que também em seus movimentos circulares, descrevem um cone ao redor do eixo de rotação . Portanto, para os demais vetores unitários também podemos escrever:

Substituindo as equações (4) no lado direito da equação (3), temos:

ou

Logo,

Estes resultados mostram que a variação temporal de é percebida no referencial inercial diferentemente do referencial em rotação. Termo deve então ser adicionado quando descrevermos o movimento a partir do referencial inercial.

Vamos considerar agora um vetor que descreve a posição de um elemento de fluido arbitrário. De acordo com a equação , podemos escrever no lugar de :

tal que, a velocidade desse elemento de fluido vista de um referencial inercial é igual a velocidade observada de um referencial em rotação acrescida pela contribuição devido à rotação de um corpo rígido :

Onde, é a velocidade observada no referencial em rotação (ou velocidade relativa).

Da mesma forma que foi aplicada a Equação de Transformação a um vetor posição , esta pode ser aplicada ao vetor velocidade :

O presente objetivo é obter a descrição do movimento de um elemento de fluido em termos das quantidades observadas diretamente no referencial em rotação.

Assim, substituindo a equação (6) no lado direito da equação (7), obtém-se:

Então:

(1º) (2º) (3º) (4º)

1º - Aceleração no referencial inercial

2º - Aceleração relativa devido ao referencial em rotação

3º - Aceleração de Coriolis

4º - Aceleração centrípeta

Logo, a diferença entre as acelerações percebidas no referencial inercial e no referencial em rotação é dada pela inclusão de duas novas acelerações: Coriolis e Centrípeta.

Portanto, essas acelerações tem que ser consideradas quando medimos quantidades num referencial em rotação.

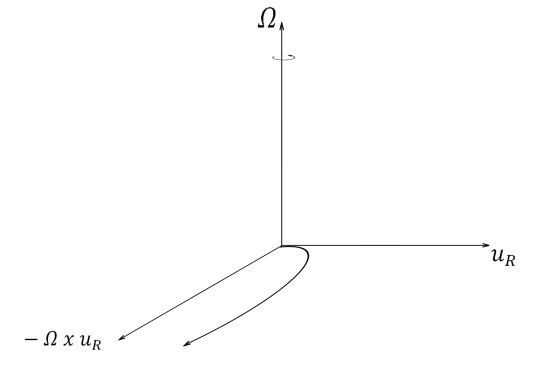
Assim, pela 2ª lei de Newton que, como foi visto, se aplica somente aos referenciais inerciais, temos:

Substituindo a equação (8) na equação (9), temos:

# A Força de Coriolis

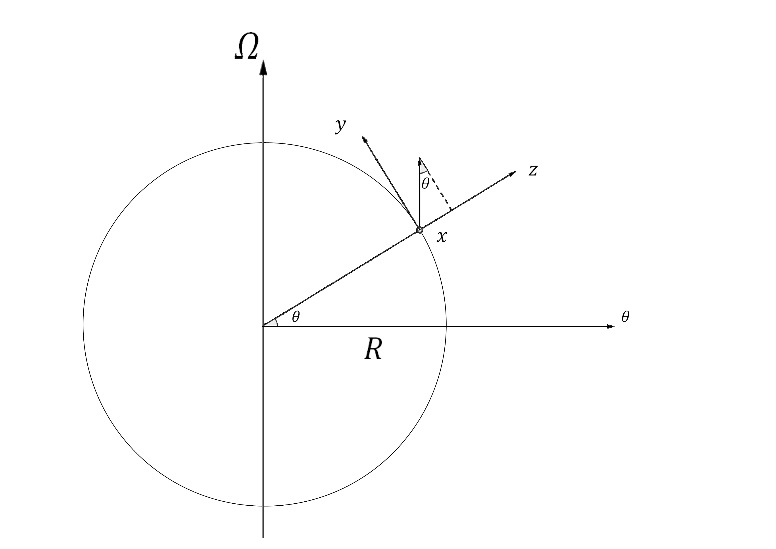
Vemos que, como característica principal, a força de Coriolis tende a desviar o movimento dos fluidos na direção perpendicular a sua velocidade.

O sentido do desvio será sempre para a direita do movimento no Hemisfério Norte (HN) e para a esquerda no Hemisfério Sul (HS).



## Decomposição da Força de Coriolis em coordenadas cartesianas locais .

As componentes da velocidade angular da Terra são:



Onde, é a latitude e o eixo é perpendicular ao plano do papel.

Um vetor velocidade 3D qualquer é dado por:

% e são velocidades horizontais e são velocidades muito maiores do que as velocidades verticais no oceano . Como a velocidade é muito pequena, ela será desprezível matematicamente, como será visto posteriormente.

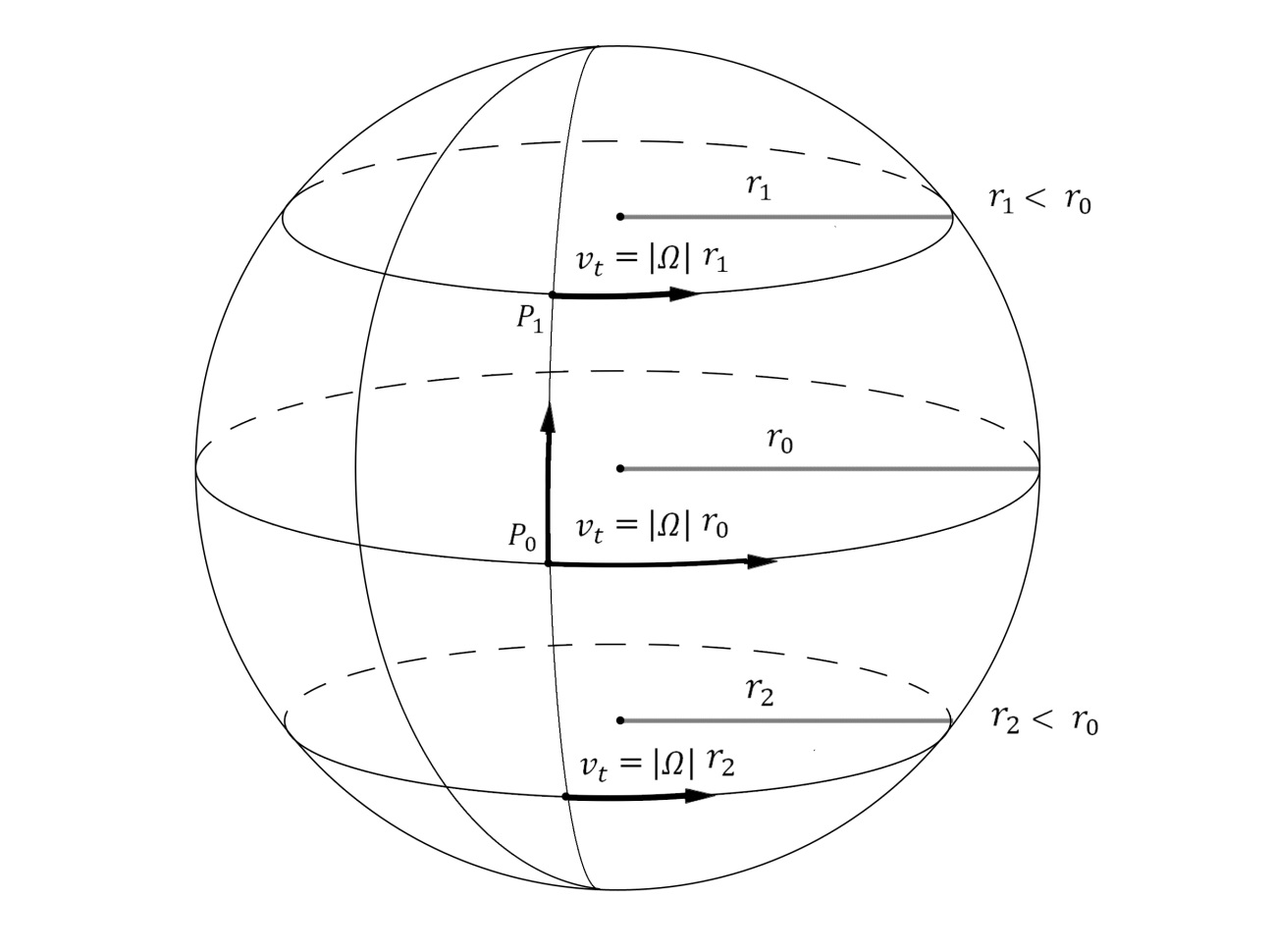
Portanto:

%Observando as acelerações horizontais, podemos perceber porque a força de Coriolis não atua no equador, tendo em vista que

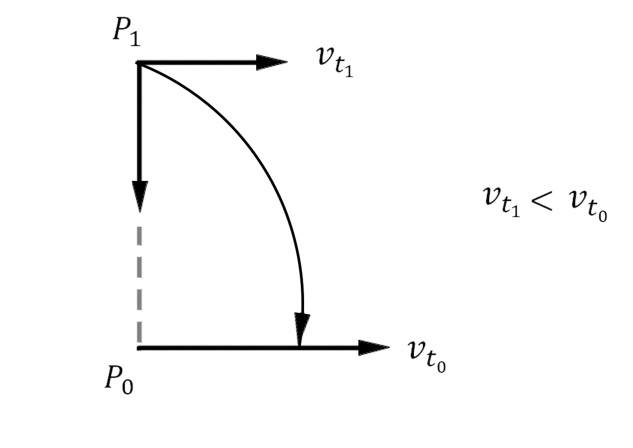
Sendo denominado Parâmetro de Coriolis ou frequência de Coriolis. Como última característica importante, vemos que os componentes horizontais da aceleração de Coriolis são nulos no Equador . O Parâmetro de Coriolis é positivo no Hemisfério Norte e negativo no Hemisfério Sul, variando de nos polos a zero no Equador.

%Onde a latitude é máxima, ou seja, , parâmetro de Coriolis será , ou seja,

Equação de Navier Stolks



é a velocidade linear tangencial nos pontos



EXERCÍCIO:

% Com base nas ilustrações, por que ocorre um desvio para a direita no Hemisfério Norte quando lançamos um projétil na direção zonal?

Para entendermos fisicamente o porque dos desvios para a direita no Hemisfério Norte e para a esquerda no Hemisfério Sul causados pela aceleração de Coriolis, podemos imaginar o deslocamento de uma partícula que é lançada do Equador na direção meridional em sentido norte com velocidade constante , a partícula também possui velocidade tangencial . Portanto, a velocidade inicial resultante do lançamento é dada pela soma vetorial . A partícula se desloca para note (latitudes menores), onde o raio da Terra é menor do que no Equador, onde ela foi lançada. Portanto, considerando-se um ponto de referencia sobre a superfície da Terra que se encontra sobre o mesmo meridiano no instante inicial de lançamento da partícula, podemos concluir que a velocidade tangencial no Equador é maior que tangencial no ponto (ou em qualquer outro ponto), pois o raio da Terra é máximo no Equador. Assim, conforme ilustra o esquema anterior, haverá um desvio para a direita do movimento, isto é, da velocidade inicial.

O mesmo resultado pode ser verificado se a partícula for lançada no sentido oposto (de um ponto ao norte para o Equador).

O fato descrito é uma consequência direta da rotação da Terra e da sua forma geométrica.

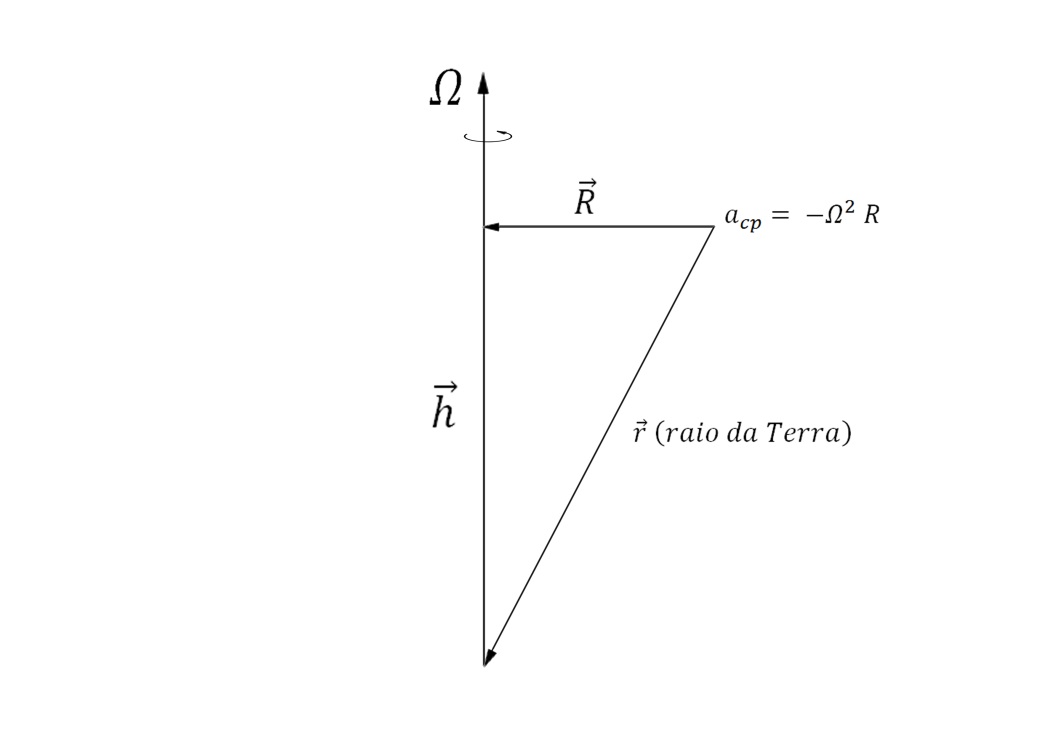
Quando considerarmos os mesmos lançamentos sendo feitos no Hemisfério Sul, o desvio observado será para a esquerda do movimento.

Este resultado explica o efeito da aceleração de Coriolis e pode ser, de forma mais geral, atribuído à Conservação do Momento Angular, que é definido como:

A conservação do momento angular se aplica a movimentos circulares na ausência de forças dissipativas. Esta lei nos diz que um corpo tende a conservar sua quantidade de rotação ao longo de seus deslocamentos, sendo esta quantidade for dependente da massa do corpo , da velocidade angular de rotação e do raio da trajetória .

* 1. **A aceleração Centrípeta e a Força Centrífuga**

Podemos reescrever o último termo da utilizando um vetor correspondente à distância perpendicular do eixo de rotação até a porção de uma parcela do fluido na superfície da Terra, de forma:

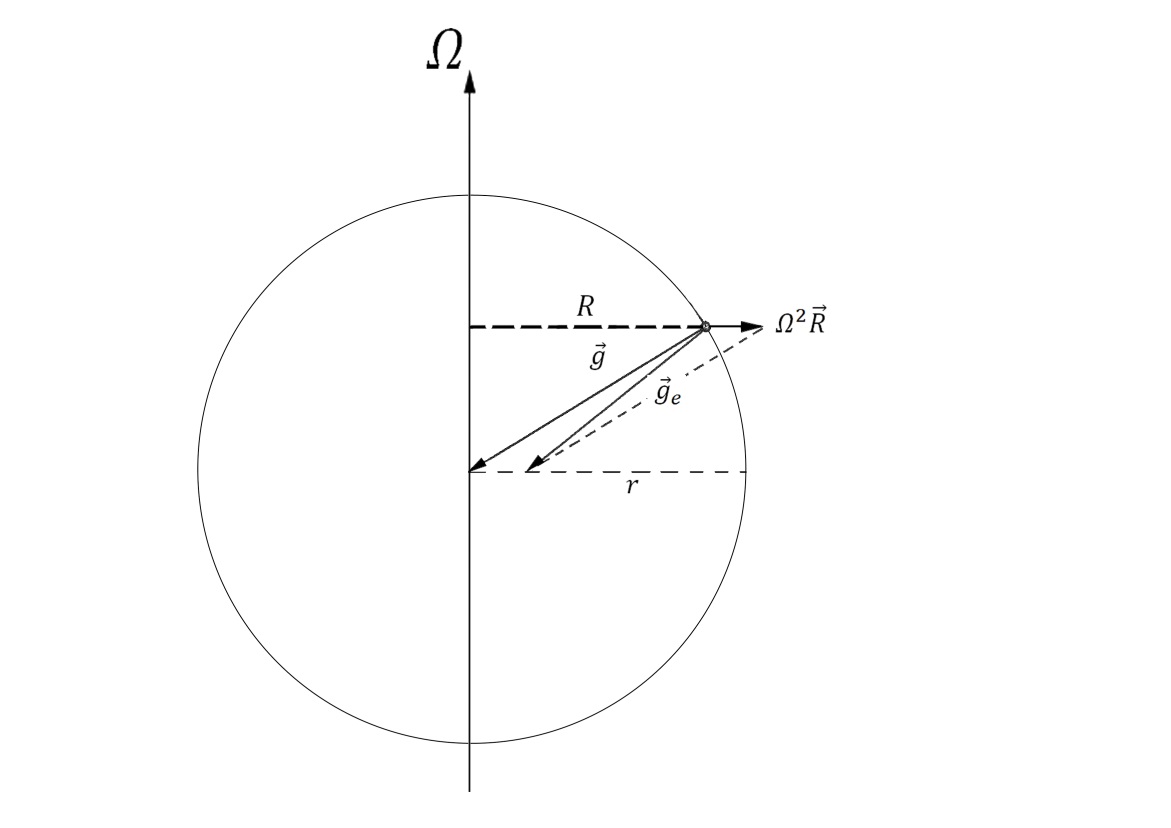


Demonstração:

Usando a e a propriedade vetorial:

Obtemos:

Portanto, vemos que esse termo atua perpendicularmente ao eixo de rotação e representa a chamada aceleração centrípeta, cujo sentido aponta sempre para o interior da trajetória circular, isto é, para o eixo de rotação. Devido à inercia dos corpos (1ªLei de Newton), a aceleração centrípeta implica em uma força denominada “Força Centrífuga”. Esta forma é também perpendicular ao eixo de rotação, tendo, portanto, a mesma direção da aceleração (ou força) centrípeta, porém sentido oposto.



Onde:

= gravidade efetiva

= gravidade

Pela teoria da gravitação de Newton, sabemos que a força de atração gravitacional entre dois corpos atua ao longo da direção radial sendo dada por:

Onde:

é a constante gravitacional ; (Cavendish, 1798).

– massa do corpo

– Massa da Terra

– direção do raio da Terra

– raio da Terra ao quadrado

Para um corpo na Terra a força corresponde à força Peso:

%Par ação e reação são forças que atuam em corpos diferentes, portanto, força centrípeta e centrífuga não são um par ação-reação, tendo em vista que atuam no mesmo corpo.

Assim, vemos que a soma da Força Gravitacional e da Força Centrífuga produzirá uma aceleração com direção e sentido indicados no esquema anterior. Esta aceleração é chamada de gravidade efetiva ou gravidade local . A gravidade efetiva varia à medida que nos deslocamos meridionalmente pela superfície da Terra, sendo menor no Equador do que nos polos.

Exercício:

# Séries de Taylor

Para continuarmos a derivação dos demais termos da equação do movimento, vamos definir um conceito matemático muito útil chamado “séries de Taylor(ST)”. A ST é um recurso matemático poderoso que mostra que uma função contínua , sendo uma variável independente qualquer e infinitamente derivável, pode ser aproximada por uma série de potências com uma certa posição do , por exemplo , se o intervalo for um intervalo pequeno, ou seja, os pontos e devem ser próximos no espaço.

Assim, a série de Taylor gerada por em é dada por:

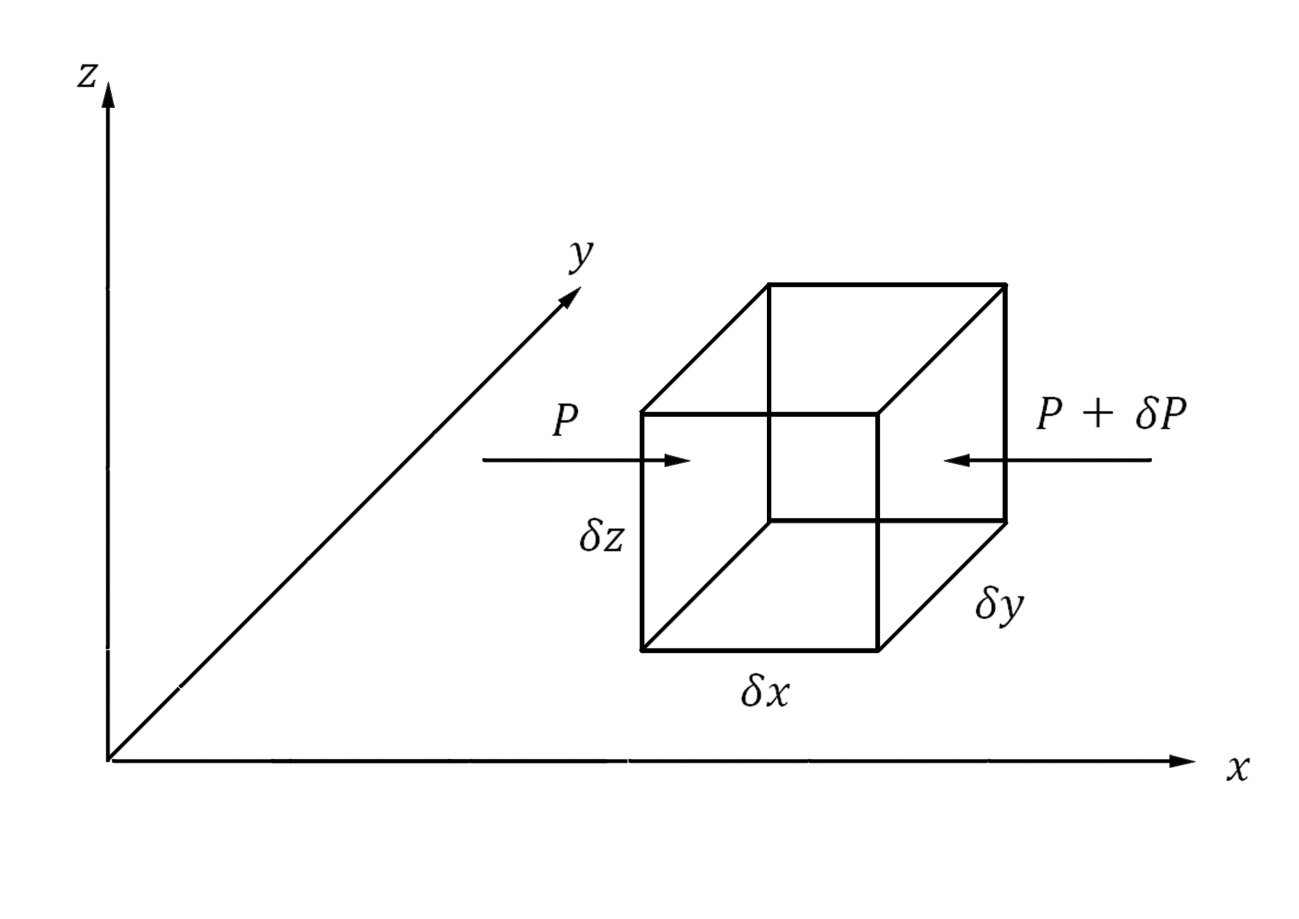
Onde a notação corresponde à derivada parcial da função da ordem até

Como é um intervalo pequeno, os termos , para , são muito menores que os dois primeiros termos do lado direito da equação e, em muitas situações práticas, podem ser desconsiderados.

A Série de Taylor pode também ser aplicada à funções com várias variáveis independentes. Por exemplo, a série de Taylor de uma função de duas variáveis calculada em torno dos pontos e é dada por:

Exercícios na lista:

# A Força do Gradiente de Pressão Hidrodinâmico

Considerando as forças esquematizadas abaixo atuando perpendicularmente às faces de uma parcela de fluido em movimento.

Lembrando que , podemos escrever a resultante das forças que atuam sobre as faces do cubo na direção , como:

Ou

Portanto, utilizando a série de Taylor, temos:

Assim,

Dividindo a pela massa infinitesimal do cubo do fluido, obtemos:

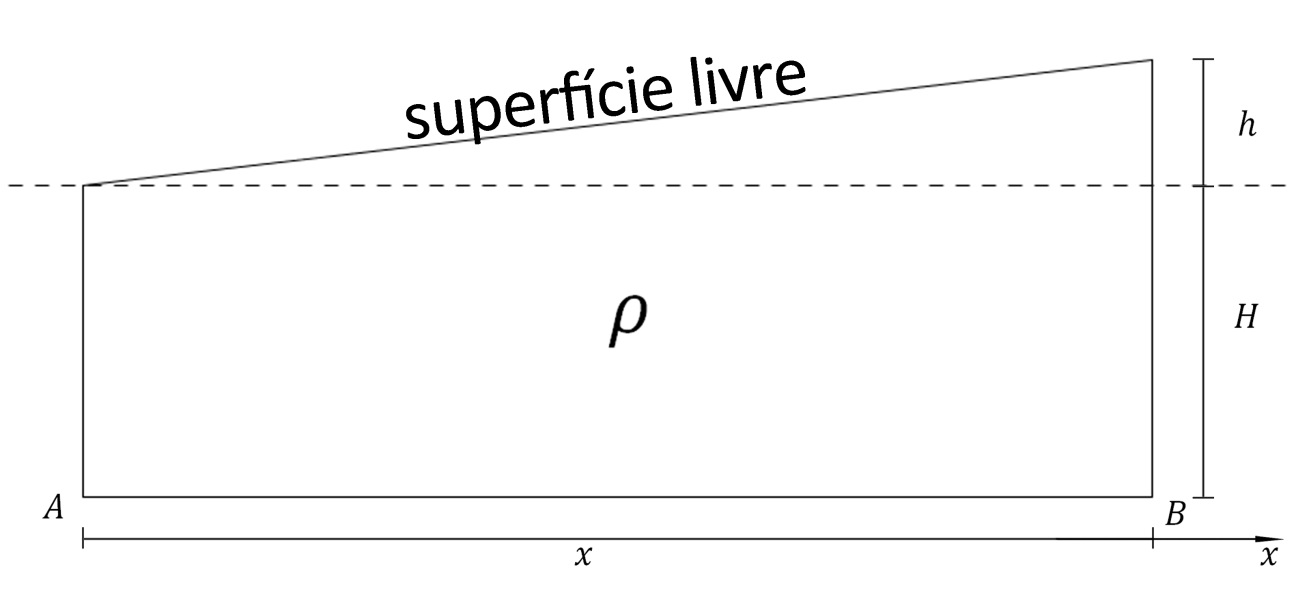
Onde, é a densidade do fluido

Generalizando esse resultado para as demais dimensões, temos:

Na forma tridimensional (que engloba as dimensões) temos, então:

Onde é a aceleração do gradiente de pressão, ou força do gradiente de pressão

% Obs: a aceleração tem sempre sentido oposto ao do gradiente de pressão



Considerando a região oceânica (esquema anterior) onde o fluido possui densidade constante e o nível da superfície livre variando ao longo do eixo entre os pontos e .

# Descrições euleriana e lagrangeana do movimento

Existem duas formas de derivarmos o movimento dos fluidos:

* 1. **Método Lagrangeano**

Descreve o escoamento a partir das posições ocupadas por uma parcela de fluidos em função do tempo ao longo de sua trajetória.

Alguns instrumentos de medição oceânicos são projetados para registrar dados a partir dessa descrição.

Exemplos:

1. Bóias de Deriva (Argo)
2. Traçadores químicos (Rodamina A ou B)

% slide equipamentos utilizados para mergulho (programado)

Na descrição lagrangeana, a aceleração de uma parcela de fluido é determinada apenas pela derivada da velocidade no tempo.

* 1. **Método Euleriano**

Descreve o escoamento a partir de posições fixas no espaço.

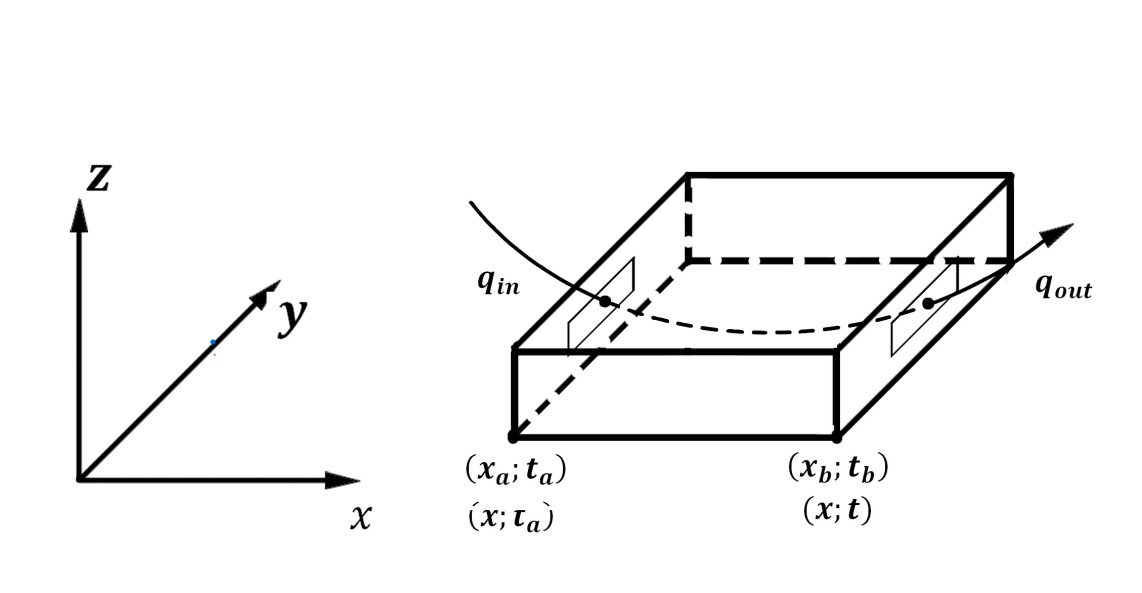
A maioria dos instrumentos de medição oceânica realizam medidas com esse método.

Exemplos:

1. ADCP (fundiado ou em bóia de fundeio)
2. CTD (perfilagem)
3. Marégrafos
4. Correntômetro
5. Estações Meteorológicas

A descrição Euleriana é usada na grande maioria dos problemas que envolvem o escoamento dos fluidos e será usada neste curso. Nessa descrição, a aceleração de uma parcela de fluido é definida pelo conceito de derivada total (também chamada de derivada do material).

## O Conceito de Derivada Total



Considere uma quantidade que flui para dentro e para fora de um pequeno volume de controle de fluido como o cubo no esquema anterior. Uma vez que varia tanto no tempo como no espaço, podemos representar a relação entre e , usando a expansão em série de Taylor.

Par tal, consideremos que e sejam intervalos pequenos. Assim, a expansão fica:

Denominando-se a taxa de variação total de como e dividindo-se a equação (2) por , obtemos:

Substituindo (isto é, a variação do espaço sobre a variação do tempo) por , obtemos:

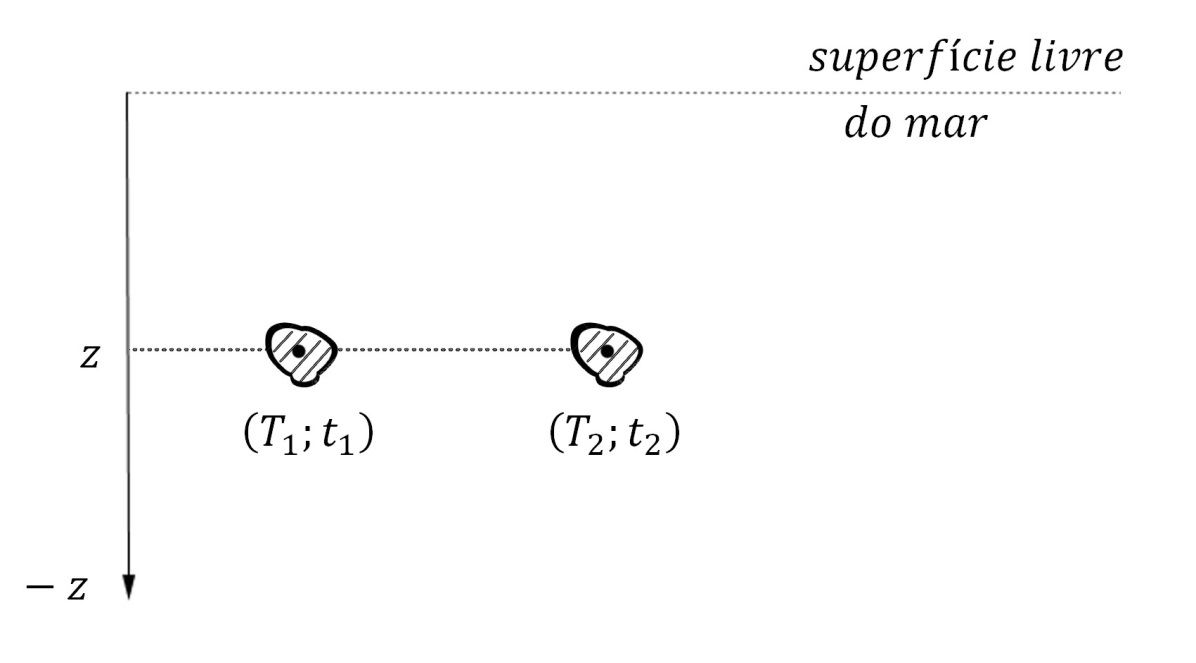
Considerando que o campo quantidade (função) também pode variar nas demais direções , a derivada total é , portanto, representada por:

Esta é a expressão da chamada “Derivada Total” ou “Derivada Material” de uma propriedade qualquer.

A partir dessa expressão, podemos definir o operador Derivada Total como:

Na forma tridimensional, esse operador é escrito como:

Onde é o vetor velocidade 3D, e é o operador vetorial “dell”.

%%%%

%A partir de dois pontos diferentes do espaço com medidas de Temperatura em tempos diferentes, para descrever a variação da temperatura não posso escrever simplesmente porque assim, não levo em consideração as influências exercidas ao longo da trajetória, que podem representar fluxos nas direções x, y e z, de modo que, para descrever corretamente a expressão matemática da variação espacial, deve-se levar em consideração os termos advectivos (levando, portanto, em consideração a variação espacial) de modo que a expressão para essa variação de temperatura deveria ser :

.

A aplicação da ao vetor velocidade de uma parcela de fluidos nos fornece a expressão da aceleração num ponto fixo do espaço (descrição Euleriana):

1º 2º

O 1º termo ao lado direito da é denominado variação local da velocidade (ou aceleração local). O 2º termo é denominado aceleração advectiva.

O 1º termo refere-se às variações da velocidade apenas em função do tempo, enquanto o 2º termo se refere às variações da velocidade causadas por “advecção”, isto é, mudanças da velocidade causadas pelo transporte da parcela de fluido entre diferentes pontos do espaço.

Retomando Equação do Movimento (10)

Dividindo por

aceleração local

aceleração advectiva

aceleração do gradiente de pressão

aceleração de Coriolis

aceleração da gravidade efetiva

Exercício:

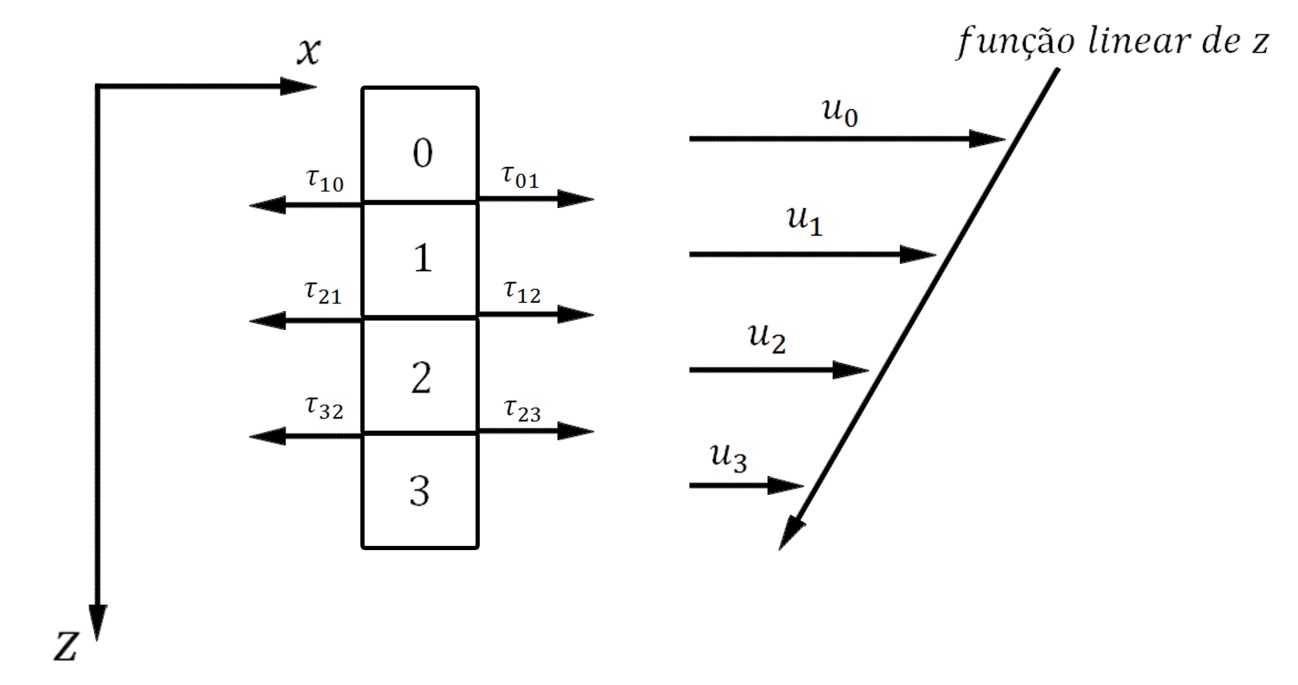
# A força de atrito num escoamento laminar, incompressível e irrotacional

Na equação do movimento, o termo que representa o atrito é também chamado fricção ou viscosidade.

A força de atrito atua apenas quando há movimento relativo entre parcelas de fluido.

Essa força está diretamente associada ao cisalhamento de velocidades.

Exemplo esquemático: Conceito de Cisalhamento



O cisalhamento, por exemplo, entre os níveis 1 e 2 é dado por:

Onde:

A lei de Newton para a fricção estabelece que num fluido, a tensão de cisalhamento é da forma:

Para a direção como no esquema anterior.

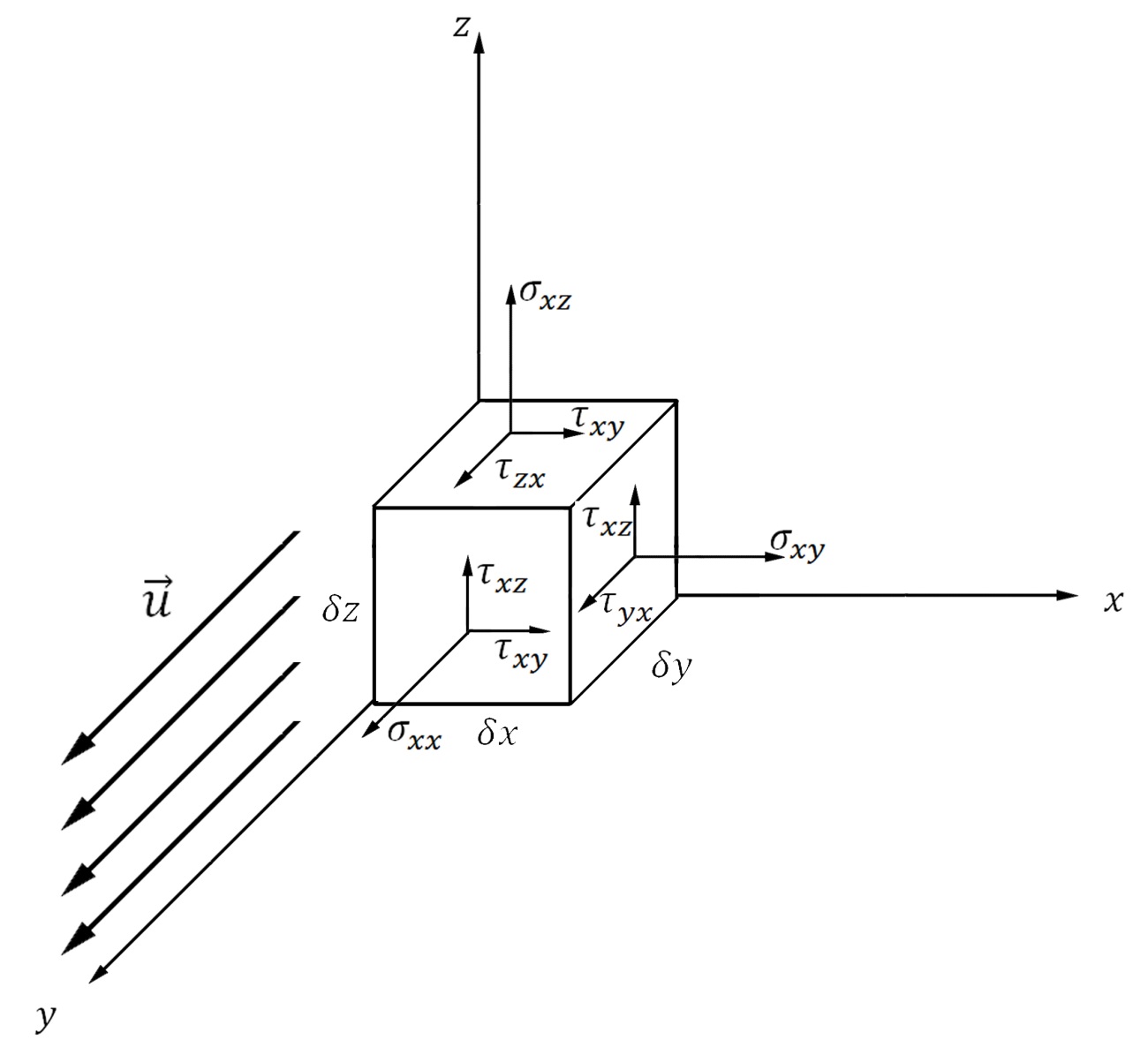
A tensão é a força por unidade de área que atua na interface entre duas camadas de fluido que se movem com velocidades diferentes e tendem a frear a camada mais rápida e acelerar a camada mais lenta. Este efeito é resultado da transferência de movimento entre as diferentes camadas de fluido e só ocorre em fluidos que possuem viscosidade.

Na expressão da Lei de Newton das tensões de atrito num fluido, é o coeficiente de viscosidade dinâmica molecular. Já o é o coeficiente de viscosidade cinemática molecular e é a densidade do fluido.

Esses coeficientes são propriedades intrínsecas do fluido. Para água do mar à :

%As tensões de atrito transferem quantidade de movimento entre parcelas de fluido (momento linear). A partir do momento que a parcela de fluido entra em movimento, considerando as parcelas abaixo inicialmente paradas, essas parcelas começam a ter um movimento, a partir dessa troca de quantidade de movimento como na figura do caderno de modo que a parcela abaixo faz uma tensão na parcela acima (meio que freando o movimento), enquanto a parcela acima em movimento impulsiona a movimentação da parcela abaixo tensão entre as parcelas 0 e 1 no desenho, por exemplo, e assim sucessivamente à medida que a profundidade aumenta.

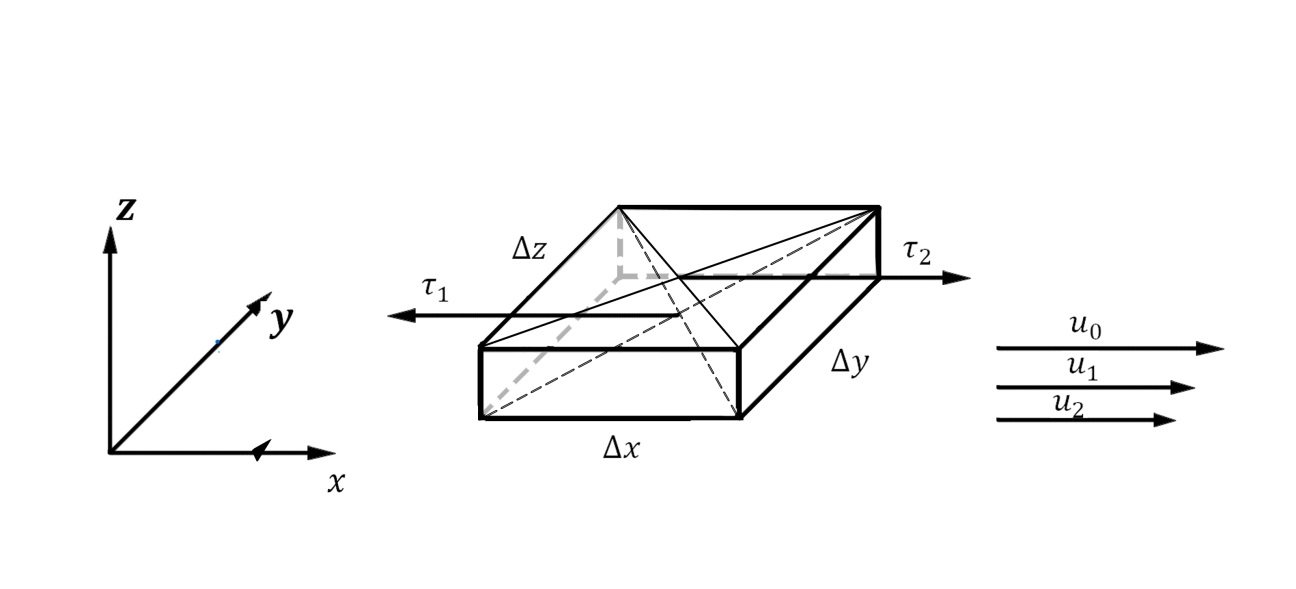
A viscosidade do fluido é função direta da densidade e temperatura (menor temperatura, menor volume, menor volume, menor densidade).



Da figura anterior, vamos computar os termos da tensão que atuam na direção , onde usamos a notação na qual o primeiro subíndice se refere ao eixo ao qual a tensão é perpendicular e o segundo subíndice se refere ao eixo ao longo do qual a tensão atua.

Assim, as tensões que, por exemplo, atuam na direção são:

Analisando a contribuição para a tensão de cisalhamento total na direção , temos:



Usando novamente uma expansão em série de Taylor, podemos escrever uma expressão que relacione as tensões e aplicadas sobre o fluido representado na figura anterior ao longo da direção :

Truncando em primeira ordem, temos:

Para escrevermos a em unidades de aceleração , assim como os demais termos da equação do movimento, multiplicamos 2 por , onde é a massa do fluido.

Assim,

Substituindo em:

Temos,

Analogamente, as contribuições para a tensão total em serão respectivamente:

Portanto, somando-se todos os termos em , obtemos:

Onde,

Onde:

Onde:

Onde:

Anteriormente, derivamos a expressão matemática das acelerações produzidas pelas tensões de atrito entre parcelas de fluido. Essas tensões moleculares aparecem na interface (microscópica) das moléculas de fluido e promovem a troca de quantidade de movimento entre as parcelas.

Com a determinação das acelerações devido às tensões de atrito, a equação do movimento fica, então, da seguinte forma:

1º 2º 3º 4º 5º 6º

Sendo

1º - aceleração local

2º - aceleração advectiva

3º - aceleração do gradiente de pressão

4º - aceleração de coriolis

5º - aceleração da gravidade efetiva

6º - aceleração molecular friccional ou viscosa

Na forma das 3 componentes cartesianas a equação 1 fica:

# Turbulência

Na equação do movimento que obtivemos, vimos que os termos de atrito representam as acelerações devido às tensões de viscosidade molecular. Entretanto, a viscosidade molecular é importante apenas entre parcelas de fluido com distâncias da ordem de alguns milímetros entre si. As trocas de quantidade de movimento devido à presença de tensões ocorrem mais efetivamente devido às chamadas tensões turbulentas.

A turbulência origina-se a partir dos termos não lineares da equação do movimento (termos advectivos). A importância desses termos é dada em função de um parâmetro adimensional denominado “Número de Reynolds ”:

Onde representa uma velocidade típica do escoamento em questão e um comprimento característico do mesmo.

O número de Reynolds foi assim denominado devido à Osborne Reynolds que conduziu vários experimentos no século XIX destinados ao estudo da turbulência. Em uma série desses experimentos, traçadores químicos (corantes) eram inseridos em fluidos que escoavam a diferentes velocidades através de um tubo. Quando a velocidade era pequena (isto é, pequeno), o escoamento era observado como suave e bem composto. Este é o denominado escoamento laminar. Para escoamentos com velocidades relativamente mais altas, as linhas de corrente observadas apresentavam-se de forma irregular. A transição ocorrida para valores de , onde era a velocidade do escoamento e o diâmetro do tubo. Assim, foi compreendido que se é aumentado acima de um valor crítico, o escoamento se torna turbulento. Este valor crítico depende das características: geometria, velocidade, e tipo de fluido. Em geral, escoamentos, onde , são turbulentos.

%A turbulência é uma característica de um escoamento e não de um fluido em si. O escoamento laminar é um escoamento bem organizado, onde não há turbulência. Se você altera a característica do escoamento laminar, como por exemplo, um aumento na sua velocidade, alteração no espaçamento ou modificação na viscosidade (essas características alteram o número de Reynolds), vão alterando a característica de escoamento do fluido, tornando-o gradativamente turbulento. Quanto maior o número de , maior a turbulência do escoamento. O oceano, bem como a atmosfera, possui caráter turbulento.

%O número de Re é a razão entre os termos não lineares (que são as acelerações advectivas) da equação do movimento sobre os termos viscosos moleculares. As acelerações advectivas estão associadas a termos com variáveis dependentes elevadas ao quadrado, e são os termos responsáveis pela geração da turbulência. O atrito viscoso é uma força dissipativa. O numero de Re, portanto, é importante porque ele vê quem está ganhando, se a produção de turbulência é maior do que a dissipação dessa turbulência e vice-versa, por isso que quanto maior o Re, maior a turbulência, que está associada diretamente à aceleração advectiva que é a que promove a turbulência. O número de Re é o que define a transição dos tipos de fluxo (laminar e turbulento).

%As turbulências não podem ser descritas matematicamente (determinística). O que se faz é uma parametrização(estatística)(mulheres que comem chocolate durante a gravidez tem filhos mais felizes).

Nas equações do movimento, os efeitos da turbulência são obtidos a partir da análise das chamadas “tensões de Reynolds”. *Prandtl, Karman* e outros pesquisadores que estudavam a mecânica dos fluidos no século XX formularam a hipótese de que parcelas de fluido num escoamento turbulento transferem momento entre si através de tensões análogas às tensões moleculares nos escoamentos laminares.

Para analisar como as tensões de Reynolds aparecem, vamos considerar a equação do movimento onde decompomos a velocidade e a pressão na soma de um valor médio + uma flutuação. Assim, temos:

O valor médio, por exemplo, é calculado a partir de uma média temporal ou espacial:

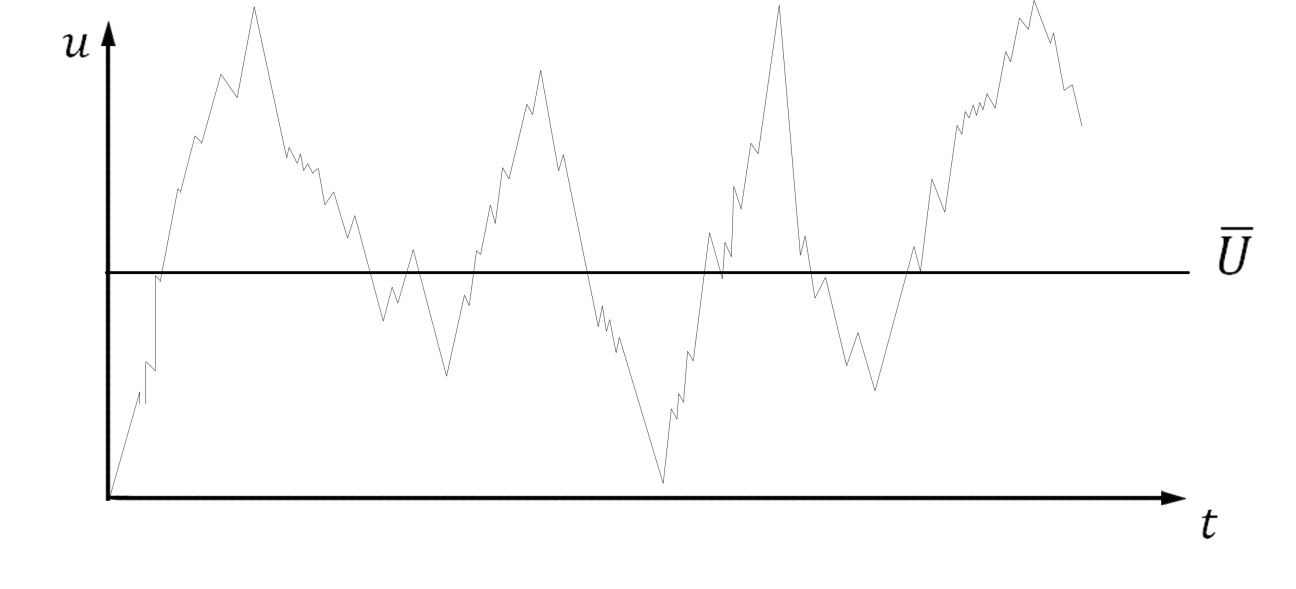
Substituindo na equação do movimento e tomando-se uma média de todos os termos da equação (por exemplo, para a componente ), teremos:

Obs: O mesmo se aplica para as demais componentes .

Para seguir a análise de Reynolds devemos considerar as seguintes regras:

* a média do produto de uma flutuação por um valor médio é zero, ou seja,
* a média de uma flutuação turbulenta é zero, ou seja,
* a média do produto de flutuações turbulentas tem um resultado que não pode ser previsto, portanto, esses termos devem ser mantidos na equação .

Aplicando essas regras sobre a , obtemos:



Onde:

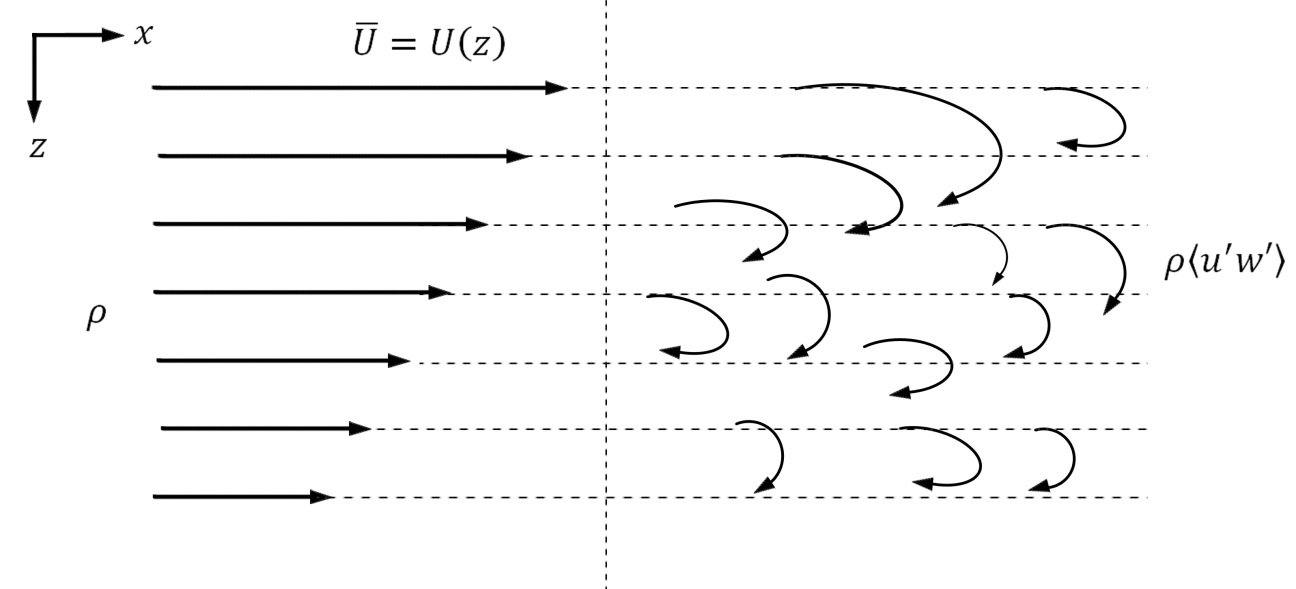
- são as flutuações

– é a média

Vemos que na aparecem todos os termos da equação do movimento (componente ) escritos em função das variáveis médias. Adicionalmente, 3 novos termos também são observados os quais correspondem aos efeitos da turbulência. Realizando um procedimento análogo para as demais componentes da equação do movimento , também verificamos o aparecimento de 3 novos termos em cada componente. Os 9 termos recebem o nome de tensões turbulentas de Reynolds. Esses termos correspondem aos efeitos não lineares que resultam do produto das flutuações turbulentas e, como podemos ver na , têm sua origem a partir dos termos advectivos (isto é, não lineares) da equação do movimento.

Onde, é a força por unidade de massa devido à turbulência.

Os termos , e da são interpretados como responsáveis por transferirem momento por unidade de volume nas direções . Por exemplo, o termo produz transferência de momento zonal na direção vertical. Essa é uma interpretação física que conduz à parametrização do efeito desses termos na equação do movimento.



são flutuações turbulentas de velocidade ao longo da direção e são flutuações turbulentas de velocidade ao longo da direção . Se então a resultante das flutuações está transferindo momento da direção horizontal para a direção vertical. Lembrando que . Se fosse negativo, seria uma transferência de momento da direção horizontal para a vertical, porém no sentido oposto ao do eixo ou oposto ao eixo (só pensar em resultante vetorial em relação ao sentido do eixo na figura). Quanto menor o numero de Reynolds menos turbulento, mais próximo de um padrão laminar.

Por transferirem momento linear e por terem sido originalmente derivados por Reynolds, os novos termos que aparecem na análise da decomposição são denominados “ Tensões de Reynolds”.

As tensões de Reynolds são interpretadas então como termos que desempenham um papel análogo ao das tensões de atrito molecular vistos anteriormente, isto é, sua função é a de transferir momento entre as camadas de um escoamento turbulento.

As tensões de Reynolds podem ser calculadas através de medidas diretas no laboratório ou no oceano. Estas estimativas são acuradas porém difíceis de serem generalizadas para espacialmente e temporalmente.

Portanto, numa analogia com o atrito molecular, a parametrização do efeito da turbulência é escrita de forma:

Onde é denominado coeficiente de viscosidade turbulenta (“Eddy Viscosity Coeficient”), o qual desempenha um papel análogo ao coeficiente de viscosidade molecular .

Analogamente, para as demais componentes das tensões em , temos:

No tratamento mais simples e usual dado a esses termos é constante e também é constante.

Mais especificamente, recebe o nome de “coeficiente de viscosidade turbulenta horizontal” e recebe o nome de “coeficiente de viscosidade turbulenta vertical”. Isto significa que a turbulência oceânica possui um caráter anisotrópico (varia de forma diferente nas três direções espaciais) pois a fricção turbulenta ocorre diferentemente para as direções horizontal e vertical. Tal fato é uma consequência da estratificação oceânica a qual tende a inibir as transferências turbulentas de momento mais eficientemente na direção vertical do que na horizontal.

No oceano, estimativas de valores de mostram que:

Portanto, a inclusão das tensões de Reynolds na forma de acelerações na equação do movimento toma a forma:

Obs: Para as componentes o procedimento é análogo.

Podemos escrever a com os termos de atrito molecular e de atrito turbulento de forma conjunta:

Obs: Para as componentes o procedimento é análogo.

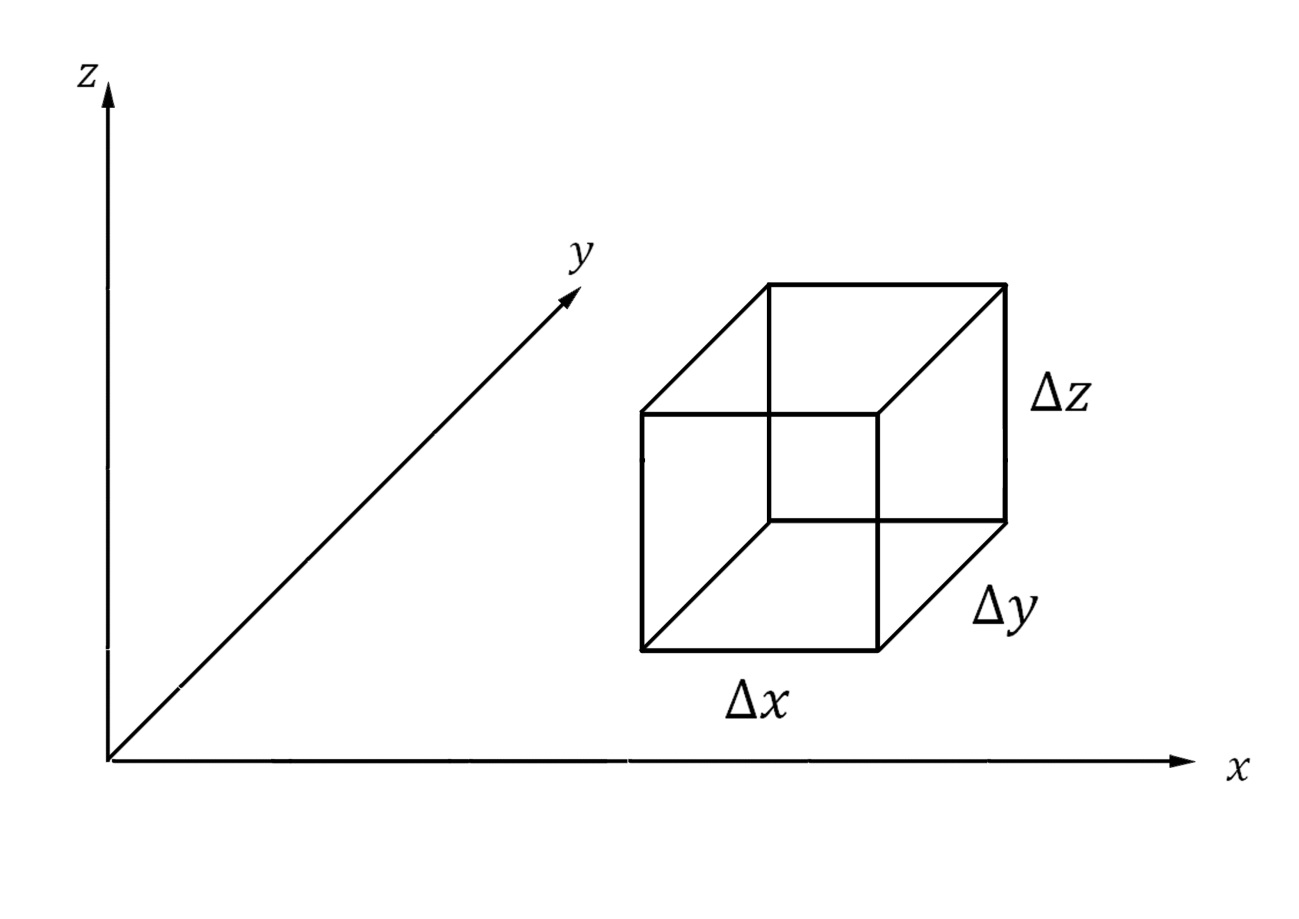
% Caráter anisotrópico – coeficientes diferentes para direção horizontal e para direção vertical . Pensando sobre a densidade do oceano a variação horizontal é muito menor do que sua variação vertical. Os coeficientes Av e Ah estão associados, não à viscosidade do fluido, mas sim do escoamento, ou seja, na vertical, as diferentes densidades das camadas (estratificação do oceano) faz com que o escoamento viscoso seja mais difícil e por isso Av é menor do que Ah.

# A Lei de Conservação da Massa

Esta lei estabelece que a massa do fluido que entra num sistema fechado (volume de controle) deve ser conservada, ou seja, a massa, portanto, não pode ser destruída nem criada. Assim, a massa que entra num dado sistema fechado e não sai, fica acumulada dentro do sistema.

Matematicamente, o conceito de conservação da massa em dinâmica dos fluidos é formulado pela equação da continuidade da massa.

Considere o esquema abaixo:

Onde são as dimensões infinitesimais do cubo.

A massa do fluido por unidade de tempo, entrando no cubo pela face no lado esquerdo é:

A massa do fluido por unidade de tempo saindo pela face do cubo ao lado direito é:

Para a podemos escrever que:

Portanto,

Ou seja, considerando o volume do cubo como sendo infinitesimal, a pode ser escrita a partir da através de uma série de Taylor.

Podemos escrever que a variação de massa no escoamento através da face , na direção é igual à diferença entre as equações :

Colocando em evidência

ordem de grandeza considerada desprezível, tendo em vista que .

Generalizando a para as demais direções , obtemos:

Onde são as componentes da velocidade nas direções .

O acúmulo de massa dentro do cubo de volume , por unidade de tempo é dado por:

Pela lei de conservação de massa, o resultado do escoamento através do cubo, isto é, o que saiu menos o que entrou, tem que ser igual ao que ficou acumulado da . Assim, temos:

Esta é a chamada equação de conservação da massa. Desenvolvendo as derivadas parciais da , podemos escrevê-las como:

Logo,

% Pelo fato das variações de densidade serem pequenas no oceno (pouco compressível), desprezamos o termo , ficando somente :

Onde a densidade a massa e o volume pouco se alteram

(tudo o que entra sai)

(há convergência ou divergência do fluido)

Considerações sobre a Equação do Movimento:

## A aproximação de Boussinesq:

Esta é uma aproximação muito usada para a equação do movimento. Ela consiste em se que assumir a densidade ) pode ser considerada constante nas componentes horizontais da equação do movimento. Na componente vertical, no entanto, deve ser tratada como variável, isto é, .

## A aproximação do plano

Quando a escala horizontal de um fenômeno em estudo não for muito grande podemos, em geral, considerar o parâmetro de Coriolis como constante, isto é, sendo latitude constante.

Quando a escala horizontal do fenômeno for maior, devemos usar outra aproximação, como veremos no próximo curso. Para este curso, usaremos apenas a proximação do plano .

% = aproximação do plano = parâmetro de Coriolis constante.

# Análise de Ordem de Grandeza dos termos da equação do movimento.

Esta análise pe um procedimento que nos permite estimar a importância de cada um dos termos da equação do movimento em um dado estudo. Em geral, a análise nos permite que alguns termos sejam desprezados fim de que sejam determinados os termos dominantes que governam um dado fenômeno.

Exemplo: Considere os seguintes parâmetros com valores típicos de mesoescala:

MESO ESCALA

|  |  |
| --- | --- |
| TERMO | ORDEM DE GRANDEZA |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

Aplicando a análise de ordem de grandeza na fórmula da equação da continuidade de massa e volume:

Aplicando os valores da tabela nas equações do movimento podemos avaliar quais os termos que governam a dinâmica em mesoescala.

Para o eixo :

% Analise de ordem de grandeza:

% Observamos que Coriolis é o termo mais importante, pois tem maior magnitude na mesoescala para o eixo . Neste tipo de análise, a pressão fica como incógnita pois ela equilibra o termo dominante, neste caso, Coriolis. Ambos são controladores da dinâmica de mesoescala.

Na forma reduzida tem-se que:

Para o eixo :

% Analise de ordem de grandeza:

% neste caso, Coriolis também é o termo mais importante

Inicialmente, não é possível estimar o termo da aceleração do gradiente de pressão, porém, ele deve necessariamente balancear o termo de mais alta ordem por exclusão, uma vez que os demais termos são menores.

% Analise de ordem de grandeza:

% Observando as ordens de grandeza, o termo mais significativo é , sendo, portanto, desprezíveis os demais termos devido a diferença de ordem de grandeza:

Logo, o equilíbrio (ou balanço) que resulta dessas análises é:

LARGA ESCALA

|  |  |
| --- | --- |
| TERMO | ORDEM DE GRANDEZA |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

Para a análise de larga escala o equilíbrio resultante será o mesmo representado pelas mesmas equações.

Conclusão: a análise mostra que numa aproximação de 1ª ordem, isto é, considerando apenas os maiores termos da equação do movimento, a dinâmica horizontal é, em mesoescala, dominada pelos termos de Coriolis e Gradiente de Pressão, enquanto na vertical é verificada a dominância é do termo do gradiente de pressão vertical e da aceleração gravitacional (ou seja, da equação hidrostática). Caso esta análise seja repetida considerando variáveis típicas de larga escala, o resultado seria o mesmo.

A palavra “geostrófico” é de origem grega e significa “Terra girando”. Este é o equilíbrio dinâmico mais natural que as correntes oceânicas tendem a seguir.

## Números adimensionais

Podemos estimar a importância relativa entre os termos da equação do movimento a partir da definição de algumas quantidades(números) adimensionais.

* + 1. **Número de Rossby (R)**

É dado pela razão entre o termo advectivo (não linear) e o termo de Coriolis:

Ou seja, quando a aceleração de Coriolis for mais importante que as acelerações advectivas, assumirá valores menores que 1.De maneira geral, assume valores bem pequenos no interior oceânico .

* + 1. **Número de Rossby temporal ou local**

É dado pela razão entre o termo da aceleração local e a aceleração de Coriolis:

* + 1. **Número de Ekamn**

É a razão entre o termo de atrito e o termo de Coriolis. Pode ser definido na direção vertical e na direção horizontal :

* + 1. **Número de Reynolds**

É dado pela razão entre o termo da aceleração advectiva e o termo de atrito molecular. É de fundamental importância para a caracterização de um escoamento laminar ou turbulento, como visto anteriormente no tópico 18.

Se , então a equação do movimento é regida apenas pela força do e por Coriolis.

# O equilíbrio Geostrófico

Conforme resultado obtido com a análise de ordem de grandeza dos termos da equação do movimento ou equilíbrio ou balanço geostrófico é dado pelas equações a seguir:

Vimos que esse equilíbrio é dominante para a dinâmica de meso e larga escalas. Ou seja, as correntes são predominantemente controladas pelas acelerações do gradiente de pressão e de Coriolis na horizontal. Na vertical, a dominância é dada pelo equilíbrio entre a aceleração vertical do gradiente de pressão e a aceleração da gravidade (Equilíbrio Hidrostático). Observando as , podemos descrever as principais características do equilíbrio geostrófico (EG):

1. O equilíbrio geostrófico não ocorre no equador, pois , isto é, .
2. O escoamento geostrófico (correntes geostróficas)ocorre paralelamente às isóbatas, portanto, ao redor da alta pressão, estando esta à direita do escoamento no Hemisfério Sul (H.S.), sendo, .
3. O equilíbrio geostrófico não predomina em regiões onde o atrito é importante. Isto se dá, em geral, próximo à superfície e ao fundo oceânico e às fronteiras laterais (próximo à costa ou nas imediações de ilhas oceânicas).

% Na corrente do Brasil podemos observar AT (Água Tropical), ACAS (Água Central do Atlântico Sul) e AIA (Água Intermediária Antártica). Os principais fatores que influenciam o sentido dos giros são a força de Coriolis em equilíbrio com a força do gradiente de pressão. Os centros dos giros subtropicais são centros de alta pressão, onde o nível do mar é um pouco mais elevado do que nas regiões radialmente mais afastadas dele. As altas do oceano não estão relacionadas às altas pressões atmosféricas. A alta pressão nos oceanos está associada a um nível do mar mais alto.

% A força do gradiente de pressão empurra o fluido da maior para a menor pressão (oposta ao gradiente de pressão). A partir do momento em que isso acontece, aparece uma velocidade e consequentemente a força de Coriolis que desvia a velocidade a um ângulo de 900 (direita HN, esquerda HS). À medida que a velocidade vai sendo desviada por essa angulação ela vai se aproximando à direção da força do gradiente de pressão em sentido oposto. As duas forças se equilibram na mesma direção e a resultante do movimento entre elas se dá numa direção ortogonal à essa direção de equilíbrio, tendo uma velocidade resultante que desloca o movimento fazendo fluir o movimentação circular dos giros.

% Raio de deformação de Rossby - distância associada ao tempo necessário para as forças de Coriolis e do gradiente de pressão entrarem em equilíbrio. Quanto maior o desnível, mais intensas as correntes em volta dos giros, já que, quanto maior o desnível maior o gradiente de pressão e a força devido ao gradiente de pressão, bem como as demais forças (Coriolis e velocidade resultante) associadas a ela.

# 12. Condições Barotrópicas e Baroclínicas

## 12.1. Oceano Barotrópico

Quando, numa dada região oceânica, a densidade não varia horizontalmente, temos que pode ser considerado como uma função apenas da pressão . Nessas condições as superfícies isopicnais (mesma densidade) são paralelas às superfícies isobáricas. Esta condição é denominada barotrópica. Matematicamente, a condição barotrópica é definida como:

No oceano, condições barotrópicas são geralmente observadas em camadas bem misturadas como, por exemplo, a camada de mistura junto à superfície livre do mar. Essas condições são observadas em grande parte do oceano profundo (abaixo de 1000m de profundidade), onde enormes massas de água possuem extensões laterais fazendo com que a densidade varie muito pouco horizontalmente.

% A densidade não é função das direções horizontais , ela é função unicamente da pressão. Isto é, a densidade varia somente de acordo com a profundidade, sendo a mesma ao longo das distâncias horizontais, de modo que a densidade se apresentará paralelamente às isóbaras. Se é paralelo à, então o ângulo formado entre eles é zero, de modo que é igual a zero, tendo em vista que o seno de 0 é igual a 0.

% A densidade é inversamente proporcional à temperatura, de modo que quanto mais quente menos denso. Na camada de mistura pode-se considerar uma condição barotrópica, em que a mistura das águas é intensa de modo que a variação horizontal não é relevante, sendo, portanto, a densidade paralela às isóbaras.

### 12.1.1. O Movimento Geostrófico em condições Barotrópicas

Para explorarmos as características do movimento geostrófico nessas condições, vamos derivar as componentes das equações geostróficas em .

, portanto, não depende de e por isso:

Pela componente em

Substituindo-se a componente na equação acima, temos:

Como é constante e, em condições barotrópicas, não é função de , o termo ao lado esquerdo da equação anterior deve ser igual à zero: .

Portanto, temos como resultado que .

Para a componente :

Tomando-se a derivada em da componente nas equações geostróficas, o resultado fornece:

## 12.2. Oceano Baroclínico

Quando a densidade apresenta variação lateral temos então que . Nessa condição as superfícies isopicnais apresentam inclinação em relação às isóbaras. Matematicamente, definimos essa condição como:

% O oceano baroclínico é o que se vê mais efetivamente no oceano. Uma região onde se pode observar claramente a condição baroclínica. Observando o perfil vertical de densidade, pode-se inferir as regiões onde as condições serão baroclínicas e barotrópicas. Onde tende a ser constante a condição é barotrópica. IMAGEM 01 CADERNO

### 12.2.1. O Movimento Geostrófico em condições Baroclínicas

Para explorarmos as características do movimento geostrófico nessas condições, vamos derivar as componentes das equações geostróficas em .

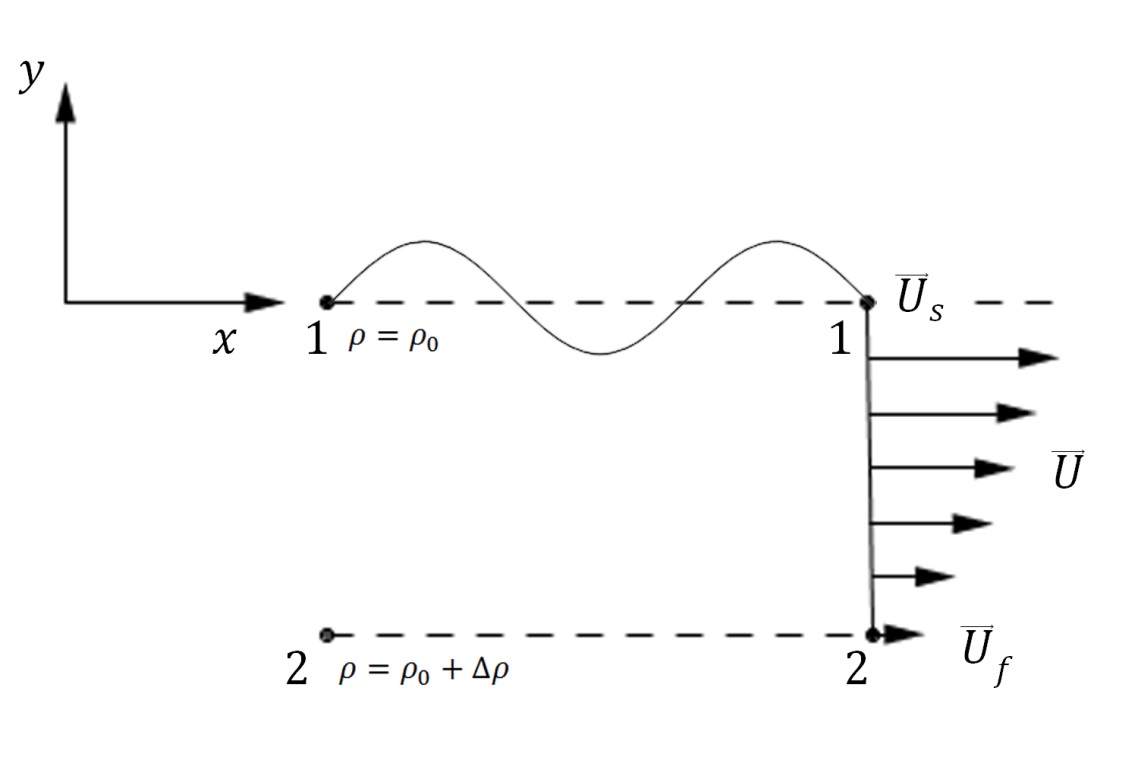
Como , a derivada ao lado esquerdo da equação anterior, assumirá valores diferentes de erro. Portanto, temos:

Para a componente , obtemos:

As equações foram originalmente batizadas por meteorologistas como “Equações do vento térmico”. Elas simplesmente mostram que, em condições baroclínicas, as velocidades geostróficas apresentam cisalhamento vertical. Este cisalhamento será mais intenso quanto menor forem os gradientes horizontais de velocidade.

1. **Os efeitos da estratificação**

O fluido oceânico é, em sua grande maioria, composto por massas de água de diferentes densidades, que tendem a se organizar verticalmente em equilíbrio gravitacional, isto é, equilíbrio hidrostático. Entretanto, movimentos da coluna de fluido continuamente perturbam esse equilíbrio e tendem a elevar águas mais densas, sobrepondo-as às águas menos densas. Assim, a importância dinâmica da estratificação pode ser avaliada através da comparação entre a energia cinética e a energia potencial da coluna d’água.



– velocidade em superfície

– velocidade de fundo

Deslocando-se o elemento de fluido da posição 1 para a posição 2 e deslocando também, o elemento da posição 2 para a posição 1, o trabalho realizado é dado por:

A energia potencial , por unidade de volume é definida por . Assim, a variação de nesses deslocamentos será de:

Já a energia cinética por unidade de volume é, por definição, dada por:

Podemos então definir a razão:

A essa quantidade, podemos dar a seguinte interpretação se , a estratificação é dinamicamente importante, pois qualquer aumento, mesmo que pequeno, na energia potencial da coluna d’água irá demandar alteração na energia cinética.

Quando , não há energia cinética suficiente para perturbar a estratificação e esta é amplamente dominante.

Quando , mudanças na energia potencial são facilmente suplantadas pela energia cinética disponível. Assim, a estratificação tem efeito desprezível sobre o escoamento.

% Quanto maior a energia cinética, maior a velocidade de deslocamento da coluna d’água, menor será a diferença de densidade, devido à grande mistura provocada por esse deslocamento. A energia cinética é quem perturba a estratificação. Essa situação pode ocorrer em regiões rasas, estuarinas, que são regiões mais misturadas, onde as densidades variam pouco ou não variam.