

# Teoría Electromagnética: Resumen de Notas

Noviembre 28, 2020



**Prof. Héctor Javier Medel Cobaxin**

Redacción por:

**Juan Antonio Fernández de la Garza**  
**Eugenio Alejandro Butler Villarreal**

# Índice general

Introducción . . . . .	2
Unidad 1: Introducción matemática . . . . .	2
Unidad 2: Carga y campos electrostáticos . . . . .	4
Unidad 3: Potencial electrostático . . . . .	5
Unidad 4: Energía electrostática . . . . .	5
Unidad 5: Condiciones de frontera electrostáticas . . . . .	6
Unidad 6: Multipolos eléctricos . . . . .	7
Unidad 7: Materia conductora . . . . .	10
Unidad 8: Materia dieléctrica . . . . .	13
Unidad 9: Métodos especiales en electrostática . . . . .	13
Unidad 10: Corrientes estacionarias . . . . .	14
Unidad 11: Magnetostática . . . . .	15
Unidad 12: Inducción electromagnética . . . . .	17
Unidad 13: Materia magnética . . . . .	18
Unidad 14: Ecuaciones de Maxwell . . . . .	19
<b>Bibliografía</b>	<b>23</b>

## Introducción

Este escrito está destinado a resumir brevemente los temas del curso de Teoría Electromagnética en el Tecnológico de Monterrey. Este escrito pretende ser únicamente un recordatorio de los puntos clave del curso [1] y a su vez guía básica para que el estudiante tenga una referencia de los principios fundamentales a partir de los cuales se obtienen los resultados más específicos.

*Última actualización: 28 de Noviembre del 2020.*

## Unidad 1: Introducción matemática

Esta sección trata las principales propiedades y operaciones dentro del álgebra vectorial. Primero notemos algunas convenciones:

### Componentes

Un vector puede descomponerse en sus componentes ortogonales:

$$\mathbf{A} = \sum_i A_i \hat{e}_i \quad (1)$$

### Convención de Einstein

Para hacer de la notación más amena, se utiliza la convención de Einstein. Esta nos dice que los índices repetidos **dos veces** (no más, no menos) se suman:

$$\mathbf{A} = \sum_i A_i \hat{e}_i = A_i \hat{e}_i \quad (2)$$

### Producto punto y vectorial

El producto punto (o interno) de dos vectores, se define como

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (A_i \hat{e}_i) \cdot (B_j \hat{e}_j) = A_i B_j \hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = A_i B_j \delta_i^j \quad (3)$$

donde  $\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_i^j = 1$  si y solo si  $i = j$ , y 0 de otra manera. Esto debido a que asumimos que los vectores  $\hat{e}_i$  forman una **base ortonormal**.

El producto vectorial se define de la siguiente manera:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \dots = \varepsilon_{ijk} A_j B_k \quad (4)$$

haciendo uso del tensor de Levi-Civita. Para permutaciones simétricas (123, 231, 312,  $\varepsilon_{ijk} = 1$ , para anti-simétricas (321, 213, 132),  $= -1$ . Para otro caso, es igual a 0.

### Transformaciones lineales

Se pueden establecer transformaciones lineales para los vectores. Estas consisten en una operación de una matriz de transformación con un vector de entrada, para regresar un vector transformado. Ejemplos de lo que se puede hacer con esto incluyen:

- Desplazamientos
- Escalamientos
- Rotaciones
- Reflexiones

Notar que estas transformaciones son útiles para realizar cambios de sistema de referencia.

## Operadores diferenciales

### Gradiente

El operador gradiente nos regresa la derivada direccional de una función escalar.

$$\nabla := \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right). \quad (5)$$

Operando sobre una función escalar  $f(x, y, z)$  nos regresa una función vectorial

$$\nabla f(x_1, x_2, x_3) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3} \right) =: \mathbf{F}(x_1, x_2, x_3). \quad (6)$$

### Divergencia y Rotacional

Los operadores de divergencia y rotacional aparecen como la aplicación del operador  $\nabla$  sobre funciones vectoriales mediante el producto punto y vectorial respectivamente.

$$\nabla \cdot \mathbf{F}(x, y, z) = \frac{\partial F_i}{\partial x_i} =: g(x, y, z) \quad (7)$$

$$\nabla \times \mathbf{F}(x, y, z) = \varepsilon_{ijk} \hat{e}_k \frac{\partial F_j}{\partial x_i} =: \mathbf{G}(x, y, z). \quad (8)$$

Notar que la divergencia regresa una función escalar, mientras que el rotacional una vectorial.

Físicamente, ambas funciones hacen analogía a **cuánto campo diverge** de un volumen especificado, y **cuánto el campo rota** alrededor de un punto especificado

## Teoremas relevantes

### Teorema fundamental del gradiente

Nos dice que la integral de línea del gradiente de una función  $f$  ( $C^1$ -continua) sobre una trayectoria  $C$  ( $C_1$ -continua por partes) con puntos iniciales y finales  $a$  y  $b$  respectivamente, es equivalente a la diferencia de las evaluaciones de dicha función  $f$  en los puntos  $a$  y  $b$ :

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{c}(b)) - f(\mathbf{c}(a)) \quad (9)$$

### Teorema fundamental de la divergencia

El teorema de Gauss relaciona la integral volumétrica de la divergencia con la integral de flujo sobre un volumen especificado:

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \oint_{\partial V} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \quad (10)$$

### Teorema fundamental del rotacional

El teorema de Stokes relaciona la integral superficial del rotacional de una función con la integral de contorno de la función sobre una superficie definida.

$$\int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \quad (11)$$

### Teorema de Helmholtz

Una función vectorial arbitraria puede descomponerse en una parte con 0-divergencia y una con 0-rotacional.

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}_\perp(\mathbf{r}) + \mathbf{F}_\parallel(\mathbf{r}) \quad (12)$$

en donde

$$\nabla \cdot \mathbf{F}_\perp(\mathbf{r}) = 0, \quad \nabla \times \mathbf{F}_\parallel(\mathbf{r}) = 0. \quad (13)$$

## Identidades de Green

Primera identidad:

$$\int_S \phi(\nabla\psi) \cdot d\mathbf{S} = \int_V [\phi\Delta\psi + (\nabla\phi) \cdot (\nabla\psi)] dV \quad (14)$$

Segunda identidad:

$$\int_V (\phi\Delta\psi - \psi\Delta\phi) dV = \int_S (\phi\nabla\psi - \psi\nabla\phi) \cdot d\mathbf{S} \quad (15)$$

## Unidad 2: Carga y campos electrostáticos

### Caso discreto

El campo que emite un conjunto de cargas distribuidas en el espacio puede verse como

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{|\mathbf{R}_i|^2} \hat{\mathbf{R}}_i, \quad (16)$$

donde  $\mathbf{R}_i = \mathbf{r} - \mathbf{r}_i$  es el vector de separación entre el punto de evaluación del campo y la locación de las cargas.

La energía potencial que conlleva un arreglo de cargas se pueden calcular entonces como

$$U = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{|\mathbf{R}_{ij}|}, \quad (17)$$

donde  $\mathbf{R}_{ij}$  denota el vector de separación entre dos cargas  $i, j$ . El factor de  $1/2$  está presente para evitar el sobre conteo bajo la permutación  $i \Leftrightarrow j$ .

### Caso continuo

Para hacer la generalización al caso continuo, se considera que las cargas no están completamente localizadas en un punto, sino distribuidas acorde a una función de densidad de carga  $\rho(\mathbf{r}')$ , donde  $\mathbf{r}'$  denota que se refiere a la posición en la que se encuentra un *cachito de carga*.

Entonces podemos generalizar la suma sobre cargas puntuales como una integral sobre la distribución de carga. Tal que

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{R}|^2} \hat{\mathbf{R}} dV', \quad (18)$$

donde  $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$  denota el vector separación entre mi punto de evaluación no primado y el punto en donde se integra una distribución de carga (primado).

Similarmente, la energía de un sistema se generaliza al caso continuo como

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V \mathbf{E}(\mathbf{r})^2 dV, \quad (19)$$

### Ley de Gauss

Aplicando el teorema de Gauss, podemos encontrar una relación entre el flujo de campo y la carga obtenida en el

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}') dV' \quad (20)$$

## Unidad 3: Potencial electrostático

### Definición

Aplicando el teorema fundamental del gradiente, podemos definir una función que nos sirva para evaluar de manera más sencilla la física del campo eléctrico. Este es el potencial electrostático, que cumple con

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\Phi(\mathbf{r}). \quad (21)$$

### Ecuación de Poisson

Ahora, aplicando la ley de Gauss, podemos recuperar la ecuación de Poisson, la cual es sumamente importante para el estudio de sistemas en general mediante el uso únicamente de la función de potencial.

$$\Delta\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0} \quad (22)$$

### Ecuación de Laplace

Un caso particular y muy importante de la ecuación de Poisson es la ecuación de Laplace, que nos sirve para modelar el comportamiento de los campos en espacio vacío (sin cargas)

$$\Delta\Phi(\mathbf{r}) = 0. \quad (23)$$

### Teorema de Earnshaw

Debido al principio de máximos y mínimos, cuando no hay presencia de cargas, el campo potencial necesariamente presenta puntos mínimos locales y máximos locales **únicamente** sobre la frontera de la región que analicemos.

Esto implica que dado un potencial de este tipo, **dentro de la región no se puede encontrar un punto de equilibrio para una carga prueba**. La carga prueba *rodará* hacia el mínimo de potencial, que estará fuera de la región.

## Unidad 4: Energía electrostática

Ya teniendo el potencial electrostático, naturalmente podemos definir la energía de la manera siguiente:

$$U_E = \frac{1}{2} \sum_i q_i \Phi(\mathbf{r}_i), \quad (24)$$

donde  $i$  hace referencia a la carga localizada en  $\mathbf{r}_i$ , de magnitud  $q_i$ .

En el caso continuo, se generaliza como

$$U_E = \frac{1}{2} \int_V \rho(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r})dV \quad (25)$$

### Teorema de reciprocidad de Green

A partir de la integral anterior, podemos notar, mediante la inserción de la definición de  $\Phi$ , que existe un sistema recíproco para todo sistema dado.

Consideremos dos sistemas arbitrarios 1 y 2. La energía potencial de  $\rho_1$  en el campo producido por  $\rho_2$  es equivalente a la energía de  $\rho_2$  en el campo producido por  $\rho_1$ .

$$\int_V \rho_2(\mathbf{r})\Phi_1(\mathbf{r})dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \int_{V'} \frac{\rho_1(\mathbf{r})\rho_2(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' dV = \int_{V'} \rho_1(\mathbf{r}')\Phi_2(\mathbf{r}')dV'. \quad (26)$$

## Densidad de energía en términos del campo electrostático

En términos del campo electrostático, la densidad de energía puede escribirse como ya se expresó en la ecuación (19), pero sin la integral:

$$u_E = \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E}(\mathbf{r})^2, \quad (27)$$

Notar que debido a que la energía es cuadrática con el campo, no se puede aplicar el principio de superposición, pues hay términos de producto cruzados.

## Unidad 5: Condiciones de frontera electrostáticas

Las condiciones de frontera aparecen ante la aplicación de los teoremas de la divergencia y del rotacional (Stokes) a través de una interfaz que contiene densidades de carga y de corriente dadas.

Recordemos que el teorema de la divergencia se expresa de la siguiente manera:

$$\int_V d^3\mathbf{r}' \nabla \cdot \mathbf{A} = \oint_{\partial V} d\sigma \cdot \mathbf{A}, \quad (28)$$

y el de rotacional como :

$$\oint_{\partial S} d\mathbf{l} \cdot \mathbf{A} = \int_S d\sigma \cdot (\nabla \times \mathbf{A}). \quad (29)$$

Entonces, aplicando estos teoremas sobre una superficie con distribución de carga superficial, obtenemos que

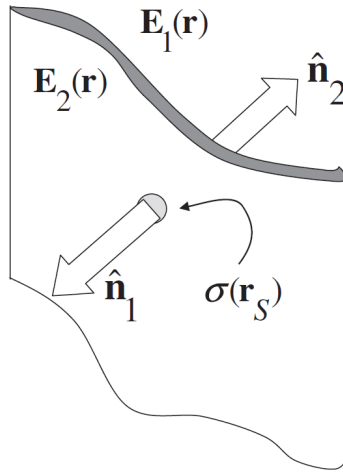


Figura 1: Condiciones de frontera para  $\rho(\mathbf{r}) = \sigma(\mathbf{r}_S)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_S)$

$$\hat{\mathbf{n}}_2 \cdot [\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2] = \sigma(\mathbf{r}_S)/\epsilon_0 \quad (30)$$

$$\hat{\mathbf{n}}_2 \times [\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2] = 0. \quad (31)$$

Y visto desde el punto de vista del potencial electrostático:

$$\left[ \frac{\partial \Phi_2}{\partial n_2} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial n_2} \right] \bigg|_S = \frac{\sigma(\mathbf{r}_S)}{\epsilon_0} \quad (32)$$

## Unidad 6: Multipolos eléctricos

La idea principal de realizar una expansión en términos multipolares es la obtención del comportamiento de un sistema electrostático visto "desde (muy muy) lejos".

### Monopolo

Lo primero que podremos notar será la carga total de un sistema. Esta la podemos definir como

$$Q = \int dV \rho(r) = \sum_{\alpha} q_{\alpha}, \quad (33)$$

donde  $\alpha$  enumera las distintas partículas puntuales en un sistema. Recordar que se puede utilizar superposición.

### Dipolo

Para el siguiente momento multipolar, es decir, la siguiente estructura que podemos detectar al realizar "mediciones", observamos el dipolo. Este se puede definir como

$$\vec{p} = \int \rho(\vec{r}) \vec{r} dV = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \vec{r}_{\alpha}, \quad (34)$$

igualmente,  $\alpha$  señala cada una de las cargas puntuales. Recordar que se puede utilizar superposición.

### Cuadrupolo

Para el próximo momento multipolar, observamos un cuadrupolo. Este se puede escribir como

$$Q_{ij} = \frac{1}{2} \int \rho(\vec{r}) r_i r_j dV = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} q_{\alpha} r_{\alpha i} r_{\alpha j}, \quad (35)$$

ahora tenemos dos contadores:  $\alpha$  que indica la partícula puntual, e  $i, j$  que señala qué coordenada tratamos ( $i, j$  van de 1,2,3, correspondiendo a x,y,z).

### Potencial electrostático

Con estos primeros momentos, podemos obtener la expresión para el potencial electrostático.

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q}{r} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} + Q_{ij} \frac{3r_i r_j - r^2 \delta_{ij}}{r^5} + \dots \right) \quad (36)$$

Tener cuidado con no confundir  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ , con  $r_i r_j = \{xx, xy, xz, yx, yy, yz, zx, zy, zz\}$ .

### Potencial electrostático (más general)

Esta sección está dedicada al lector interesado en ver un formalismo un poco más tensorial y general, y se basa en la referencia [2]. Si se complica, por favor sigan el tratamiento intuitivo presentado en la sub-sección anterior.

**Advertencia:** Aquí  $\mathbf{x}$  se trata como el vector posición y  $x$  como la longitud del mismo. No se refiere a la coordenada  $x$ .

Recordemos que la función de potencial puede ser escrita como

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\mathbf{x}' \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (37)$$



A partir de esta expresión, podemos realizar una expansión del integrando en series de Taylor

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x'_{i_1} \dots x'_{i_n} \frac{\partial}{\partial x'_{i_1}} \dots \frac{\partial}{\partial x'_{i_n}} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \Big|_{\mathbf{x}'=0}, \quad (38)$$

donde  $n$  es el orden de cada término multipolar,  $i_k$  va del 1 al 3 (convención de Einstein), y  $k$  es cada una de las derivadas que se aplican en una expansión de Taylor. Recordar que  $k$  irá de 0 a  $n$ .

### Tensor multipolo general

En general se puede definir un tensor multipolar que nos sirva para calcular los distintos momentos multipolares. Este tensor es

$$T_{i_1, \dots, i_n} := |\mathbf{x}|^{2n+1} \frac{\partial}{\partial x'_{i_1}} \dots \frac{\partial}{\partial x'_{i_n}} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \Big|_{\mathbf{x}'=0}, \quad (39)$$

donde los índices nos indican cada término de momento multipolar para un momento en general de  $n$  dimensión.

Este Tensor tiene las propiedades de ser homogéneo:

$$T_{i_1, \dots, i_n}(\lambda \mathbf{x}) = \lambda^n T_{i_1, \dots, i_n}(\mathbf{x}),$$

simétrico:

$$T_{i_1, \dots, i_n}(\mathbf{x}) = T_{(i_1, \dots, i_n)}(\mathbf{x}),$$

y sin traza (traceless):

$$\delta_{i_1, i_2} T_{i_1, \dots, i_n}(\mathbf{x}) = 0.$$

Podemos entonces definir los multipolos de manera que

$$Q_{i_1, \dots, i_n} = \int d^3 \mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}') T_{i_1, \dots, i_n}(\mathbf{x}'). \quad (40)$$

Para entonces escribir el potencial electrostático de la siguiente manera

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} Q_{i_1, \dots, i_n} \frac{x_{i_1} \dots x_{i_n}}{x^{2n+1}} = \sum_{n \geq 0} \Phi^{(n)}, \quad (41)$$

donde  $n$  enumera cada orden de momento multipolar.

Como una revisión de sanidad, recordar que para cada orden  $n$ , un objeto con carga  $q$  y de tamaño  $a$  tendrá un multipolo como  $Q_{i_1 \dots i_n} \sim q a^n$ . Entonces, el potencial debería de ir como

$$\Phi^{(n)} \sim \frac{q}{\epsilon_0 x} \left( \frac{a}{x} \right)^n.$$

### Polinomios de Legendre

Si bien realizamos anteriormente una expansión de Taylor con coordenadas cartesianas, resulta más útil realizar una expansión en coordenadas esféricas en ciertos problemas en los que la simetría es naturalmente esférica. Entonces, podemos definir la expansión binomial (caso particular de una expansión de Taylor) de la forma siguiente.

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}' + r'^2}} = \frac{1}{r} \left[ 1 - 2(\hat{r} \cdot \hat{r}') \frac{r'}{r} + \frac{r'^2}{r^2} + \dots \right], \quad r' < r. \quad (42)$$

De manera súper interesante, esta expansión puede ser expresada en términos de los polinomios de

Legendre, tal que

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \left( \frac{r'}{r} \right)^l P_l(\hat{r} \cdot \hat{r}'), \quad r' < r. \quad (43)$$

**Notar** que esta expansión es válida para  $r' < r$ . Es decir, para mediciones de potencial *fuera* de la distribución de carga.

## Potencial electrostático en expansión de Legendre

A partir del resultado que se acaba de definir anteriormente, realizamos una expansión a la integral de la función potencial.

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dV' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \int dV' \rho(\vec{r}') \left( \frac{r'}{r} \right)^l P_l(\hat{r} \cdot \hat{r}'), \quad r' < r. \quad (44)$$

Puesto que  $r' < r$  (medición fuera de la distribución de carga) tiene que cumplirse para que la expansión sea válida, se le denomina a esta expresión la expansión **exterior**.

Notar que podemos también obtener la expansión **interior** mediante un intercambio de las variables  $r'$  y  $r$ .

## Potencial electrostático en expansión de armónicos esféricos

Si bien la fórmula anterior es válida, podemos hacerla más conveniente mediante el teorema de adición, para poder expresar  $\vec{r}$  y  $\vec{r}'$  en coordenadas esféricas  $(r, \theta, \varphi)$  y  $(r', \theta', \varphi')$  respectivamente.

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r_{>}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2l+1} \left( \frac{r_{<}}{r_{>}} \right) \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\Omega_{<}) Y_{lm}(\Omega_{>}), \quad (45)$$

donde  $r_{<}$  es la variable pequeña de entre  $r$  y  $r'$ , y  $r_{>}$  la grande de entre  $r$  y  $r'$ .

Finalmente por ortogonalidad, la expansión exterior es

$$\Phi_{ext}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_{lm} \frac{Y_{lm}(\Omega)}{r^{l+1}}, \quad (46)$$

donde  $A_{lm}$  son los momentos esféricos exteriores,

$$A_{lm} = \frac{4\pi}{2l+1} \int dV' \rho(\vec{r}') r'^l Y_{lm}^*(\Omega'). \quad (47)$$

La expansión interior es

$$\Phi_{int}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l B_{lm} Y_{lm}^*(\Omega) r^l, \quad (48)$$

donde  $B_{lm}$  son los momentos esféricos interiores,

$$B_{lm} = \frac{4\pi}{2l+1} \int dV' \frac{\rho(\vec{r}')}{r'^{l+1}} Y_{lm}(\Omega'). \quad (49)$$

Recordar que existe un caso particular de una expansión en armónicos cuando existe simetría azimutal, lo que reduce la cantidad de integrales que se deben realizar, y simplifica también los cálculos de los momentos multipolares.

## Unidad 7: Materia conductora

### Conductores

La definición más común de un material conductor es que es un material que conduce cargas eléctricas de manera fácil. Para poder mantener el equilibrio, en un conductor las cargas se concentran sobre la superficie

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r}) = 0 \quad (50)$$

para  $\mathbf{r} \in V$ . Es evidente que el potencial eléctrico dentro del volumen de un conductor es constante y es igual al potencial en la superficie.

### Inducción eléctrica

Cuando tenemos un campo eléctrico externo en presencia de un conductor, la condición 50 se tiene que seguir cumpliendo, para lograr esto las cargas se reacomodan. Esto lo podemos ver de la siguiente manera

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{ext} + \mathbf{E}_{self} = \mathbf{E}_{ext} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S dS' \sigma(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = 0 \quad (51)$$

Es decir, que el campo generado por la densidad de carga superficial  $\sigma(\mathbf{r}')$  genera un campo que se opone al campo exterior dentro del conductor.

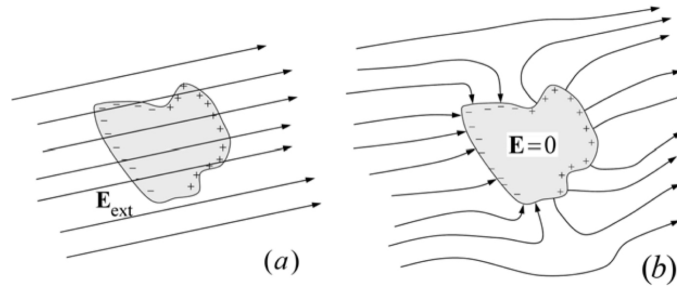


Figura 2: Líneas de campo en un conductor.

### La densidad de carga superficial

El campo de un conductor debe de cumplir con las condiciones de frontera que nos dicen que

$$\hat{n} \times [\mathbf{E}_{out} - \mathbf{E}_{in}] = 0 \quad (52)$$

$$\hat{n} \cdot [\mathbf{E}_{out} - \mathbf{E}_{in}] = \sigma(\mathbf{r}_s)/\epsilon_0 \quad (53)$$

Como  $E_{in} = 0$  podemos decir que el campo externo es proporcional a la densidad de carga superficial y es normal a la superficie.

$$\mathbf{E}_{out}(\mathbf{r}_s) = \hat{n}\sigma(\mathbf{r}_s)/\epsilon_0 \quad (54)$$

La ecuación 54 nos proporciona una forma de obtener la densidad superficial del conductor

$$\sigma(\mathbf{r}_s) = \epsilon_0 \hat{n} \cdot \mathbf{E}_{out}(\mathbf{r}_s) \quad (55)$$

### Apantallamiento y escudamiento (Screening and Shielding)

Esto nos dice que cuando tenemos un conductor y le hacemos un hueco, podemos colocar una carga afuera o un campo eléctrico, e idealmente, adentro de la cavidad el campo es cero. También si dentro de la

cavidad colocamos una carga el campo afuera del conductor es diferente de cero. El primer caso se justifica con el hecho de que

$$\oint d\mathbf{l} \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (56)$$

Esta integral se puede partir en una sección que pasa por dentro de la cavidad y otra por el conductor pero sabemos que el campo dentro de un conductor es cero y por lo tanto solo sobrevive la integral del potencial dentro de la cavidad, pero como esto es igual a cero para cualquier trayectoria, podemos concluir que el campo dentro de la cavidad (para una justificación más matemática referirse a [9]).

El segundo caso se justifica con la ley de Gauss y podemos hacer una superficie que encierre el conductor y como la carga encerrada no es igual a cero debe de existir un campo afuera del conductor.

## Capacitancia

La capacitancia es la medida en que un conductor para almacenar carga. Resulta que esta cantidad depende de dos factores, la manera en que decae el potencial fuera del conductor y la geometría del mismo. Podemos definir el potencial de un conductor de la siguiente forma

$$\phi(\mathbf{r}) = V \hat{\phi}(\mathbf{r}) \quad (57)$$

donde  $\phi(\mathbf{r})$  es igual a 1 cuando  $r \in V$  y  $\hat{\phi}(|r| \rightarrow \infty) \rightarrow 0$  Usando la Ley de Gauss y sabiendo que el campo eléctrico es igual al negativo del gradiente del potencial y usando la primera identidad de Green podemos llegar a

$$Q = -\epsilon_0 V \int_S d\mathbf{S} \cdot \nabla \hat{\phi} \quad (58)$$

Podemos definir la cantidad  $Q/V$  como la auto-capacitancia de un conductor.

$$C = \frac{Q}{V} = -\epsilon_0 \int_S d\mathbf{S} \cdot \nabla \hat{\phi} \quad (59)$$

Algunos ejemplos:

- La capacitancia de una esfera es:

$$C = 4\pi\epsilon_0 R \quad (60)$$

- La capacitancia de un disco es:

$$C = 8\epsilon_0 R \quad (61)$$

## La matriz de capacitancia

El caso tratado arriba es el caso de un capacitor por si solo, resulta que si tenemos más de un conductor calcular la capacitancia de un sistema se vuelve algo mucho más complicado, ya que la carga de un conductor genera un potencial que altera los demás conductores y la alteración de esos conductores lleva a más modificaciones del arreglo de cargas y debemos de considerar todos estos efectos. Para calcular la carga de un conductor  $i$  debemos hacer lo siguiente:

$$Q_i = \sum_{j=1}^N C_{ij} \phi_j \quad (62)$$

donde  $C_{ij}$  son los elementos de la matriz de capacitancia. Esto es lo único que mencionaremos de la matriz de capacitancia en estas notas, para mayor información referirse al Zangwill.

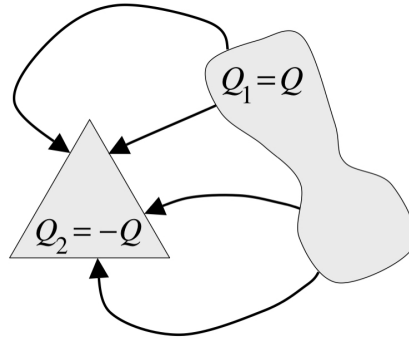


Figura 3: Campo cerca de dos capacitores

### El caso de un capacitor de dos conductores

En este caso utilizamos la formula

$$\phi_i = \sum_{j=1}^N P_{ij} Q_j \quad (63)$$

donde  $P_{ij}$  son los elementos de la matriz  $P$  donde  $P = C^{-1}$

Ahora tomando por sentado el hecho de que  $Q_1 = Q$  y  $Q_2 = -Q$ , podemos escribir la diferencia de potencial como

$$\phi_1 - \phi_2 = (P_{11} + P_{22} - 2P_{12})Q \quad (64)$$

Recordando que  $C_{ij} = C_{ji}$ . De aqui podemos escribir que

$$C = \frac{Q}{\phi_1 - \phi_2} = \frac{1}{P_{11} + P_{22} - 2P_{12}} = \frac{C_{11}C_{22} - C_{12}^2}{C_{11} + C_{22} + 2C_{12}} \quad (65)$$

### La energía de un sistema de conductores

Ya habíamos visto que la energía de un sistema se puede escribir

$$U_E = \frac{1}{2} \int d^3r \rho(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) \quad (66)$$

En un conductor el potencial se mantiene constante por lo que la energía se puede reescribir como

$$U_E = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \phi_k \int dS \sigma_k(\mathbf{r}_s) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N Q_k \phi_k \quad (67)$$

Substituyendo la expresión de la carga que proviene de la matriz de capacitancia

$$U_E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \phi_i C_{ij} \phi_j \quad (68)$$

$$U_E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N Q_i P_{ij} Q_j \quad (69)$$

Usando los resultados del capacitor de dos conductores llegamos a la siguiente expresión

$$U_E = \frac{1}{2} Q^2 (P_{11} + P_{22} - 2P_{12}) = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} C (\phi_1 - \phi_2)^2 \quad (70)$$

De esta formula también se puede concluir que la capacitancia siempre es una cantidad positiva ya que la energía debe ser igual o mayor a cero.

## Unidad 8: Materia dieléctrica

Cuando consideramos sistemas de materia dieléctrica, es decir, que existe una interacción entre las cargas internas de la materia y el material, tenemos que considerar la existencia de campos que provienen de la interacción.

### Dieléctricos

Los medios dieléctricos se caracterizan comúnmente con tener una nula carga libre y de estar (a primera aproximación), conformados de muchos dipolos que pueden o no estar orientados de distinta manera. Particularmente en presencia de campos eléctricos externos, notamos que los pequeños dipolos que conforman el material dieléctrico se tienden a alinear en cierta medida, teniendo como consecuencia la aparición de una polarización, tal como se puede notar en el marco teórico definido previamente.

#### Dieléctricos lineales

Este tipo de dieléctricos pueden ser modelados a través de un tensor dieléctrico tal que un campo  $\mathbf{E}$  externo ocasiona una generación de un campo de desplazamiento  $\mathbf{D}$  en el material de la siguiente forma

$$D_i = \varepsilon_{ij} E_j \quad (71)$$

Cuando el material reacciona al campo exterior de una manera isotrópica, es decir, un campo en una dirección genera un desplazamiento en esa misma dirección, y la reacción es igual sin importar la orientación del material, podemos usar la relación dieléctrica siguiente

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} = \kappa \varepsilon_0 \mathbf{E} = (1 + \chi) \varepsilon_0 \mathbf{E} \implies \mathbf{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0) \mathbf{E} = \varepsilon_0 (\kappa - 1) \mathbf{E}, \quad (72)$$

donde vemos que podemos expresar las relaciones dieléctricas mediante la permitividad eléctrica del material  $\varepsilon$ , la constante dieléctrica del material  $\kappa$ , o la susceptibilidad eléctrica del material  $\chi$ . En términos simples, son definiciones que resultan convenientes en distintos contextos físicos pero todas son válidas.

### Condiciones de frontera

Finalmente, podemos analizar las condiciones de frontera que nuestros campos tendrán que cumplir. Estas son similares a las que habíamos encontrado anteriormente, pero esta vez en el caso de materia dieléctrica lineal e isotrópica.

$$\hat{\mathbf{n}}_2 \cdot [\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2] = \sigma_f(\mathbf{r}_S) \quad (73)$$

$$\hat{\mathbf{n}}_2 \times [\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2] = 0. \quad (74)$$

Entonces, en términos de la función de potencial electrostático

$$\left[ \kappa_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n_2} - \kappa_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial n_2} \right] \bigg|_S = \sigma_f(\mathbf{r}_S) / \varepsilon_0. \quad (75)$$

## Unidad 9: Métodos especiales en electrostática

Puesto que estas notas no podrán abarcar de manera resumida este tema, referenciamos al lector a las presentaciones del curso [1] y a los libros de lectura [3-11], en las cuales se pueden encontrar diversos métodos

aplicados en casos de ejemplo con explicaciones muy precisas, acertadas y puntuales de cómo estos métodos se utilizan.

Aquí solamente les listamos los aspectos más relevantes:

- Teoría de potencial
- Teorema de unicidad
- Separación de variables
- Superposición
- Método de imágenes
- Método de funciones de Green

## Unidad 10: Corrientes estacionarias

### Ecuación de continuidad

Una de las propiedades que se puede encontrar en la teoría electromagnética es la conservación de la carga. La cual se puede describir de manera sencilla a través de la ecuación de continuidad:

$$\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0, \quad (76)$$

que nos dice que una reducción de la densidad de carga en un punto dado implica una divergencia de la corriente en ese punto (la corriente se aleja de ese punto).

En el caso particular de corrientes estacionarias, el cual nos interesa, se obtiene que la densidad de carga no varía, por lo tanto

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_{stat} = 0. \quad (77)$$

### Ley de Ohm

La ley de Ohm se puede expresar como

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}, \quad (78)$$

donde  $\sigma$  se toma como una constante de conductividad.

Una conductividad constante implica que  $\rho(\mathbf{r}) = 0$ , entonces nuestro sistema puede modelarse a través de la ecuación de Laplace, y la corriente fluye de manera constante, sin acumularse en ningún lugar.

### Calentamiento de Joule

Puesto que la corriente implica cargas moviéndose, y las cargas son susceptibles a fuerzas (campo eléctrico), podemos calcular el trabajo que se ejerce al mover las cargas. Visto de otra manera, el calentamiento de Joule debido a los choques de las cargas con átomos en su trayecto a lo largo del material en el que se encuentran.

$$\frac{dW}{dt} = P = \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dV \quad (79)$$

### Fuerza electromotriz

La fuerza electromotriz puede verse como el potencial que ha movido una corriente a través de un material conductor en un circuito cerrado. Sin la fuerza electromotriz, la corriente se frenaría por el calentamiento de Joule.

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} \quad (80)$$

donde  $\mathbf{E}'$  es el campo que le da la energía a la corriente para mantenerse estacionaria aún cuando se disipa energía por calentamiento de Joule.

## Leyes de conservación

Recordar que existen las leyes de Kirchhoff que se aplican principalmente en el diseño de circuitos eléctrico. Estas leyes salen de la teoría y se simplifican a partir de

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0. \quad (81)$$

En términos sencillos, la suma de corrientes entrando y saliendo de un nodo son 0 (la corriente no se pierde, crea, o acumula)

$$\sum_k I_k = 0, \quad (82)$$

y la caída neta de potencial alrededor de una circuito cerrado es 0

$$\sum_k \mathcal{E}_k = \sum_n I_n R_n, \quad (83)$$

donde  $I$  es la corriente transversal total sobre un alambre,  $R$  la resistencia de dicho alambre, y  $\mathcal{E}$  la fuerza electromotriz sobre un alambre.

## Unidad 11: Magnetostática

### Ley de Biot-Savart

La manera en la que corrientes generan campos magnéticos se puede describir mediante la ley de Biot-Savart

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' \quad (84)$$

### Fuerza de Lorentz

La fuerza de Lorentz surge de tomar en cuenta las contribuciones a la fuerza que siente una carga eléctrica con cierta velocidad (en esencia, una corriente).

Primero, se define la fuerza que siente una corriente como

$$\mathbf{F} = \int_V \mathbf{J} \times \mathbf{B} dV, \quad (85)$$

después, mediante la definición de la corriente como

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \sum_k q_k \mathbf{v}_k \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k) \quad (86)$$

obtenemos que

$$\mathbf{F} = \sum_k q_k \mathbf{v}_k \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_k). \quad (87)$$

Entonces, tomando en cuenta ambos componentes de las fuerzas que siente una partícula, recuperamos la fuerza de Lorentz

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (88)$$



## Ley de Ampère

A partir de la ley de Biot-Savart, Ampère encontró la relación fundamental de

$$\oint_{\partial S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 I, \quad (89)$$

donde  $I$  alude a la corriente encerrada por la circulación  $\partial S$ .

Adicionalmente, se puede plantear la ley de Ampère de manera diferencial como

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}). \quad (90)$$

## No existen monopolos

A partir de la ley de Biot-Savart, también se puede derivar que

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (91)$$

lo cual es una evidencia clara de la no existencia de los monopolos en la teoría clásica de electromagnetismo.

## Condiciones de frontera

Tomando ambas ecuaciones anteriores, se puede derivar que las condiciones de frontera para los campos magnéticos son

$$\hat{n} \cdot [\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2] = 0 \quad (92)$$

$$\hat{n} \times [\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2] = \mu_0 \mathbf{K}(\mathbf{r}_S), \quad (93)$$

donde  $K$  alude a una corriente superficial paralela a la frontera.

## Potencial magnético escalar

**Siempre y cuando  $\mathbf{J} = 0$**  en una región dada, podemos obtener un campo escalar similar al obtenido previamente en el contexto electrostático, el cual también tendrá que solucionar la ecuación de Laplace.

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\nabla \Psi(\mathbf{r}), \quad (94)$$

por lo que se pueden aplicar las herramientas que ya hemos aprendido para la resolución de problemas magnéticos cuando estamos fuera de las corrientes.

$$\Delta \Psi = 0. \quad (95)$$

## Potencial vectorial

Para lograr tener un potencial que sea útil dentro de las regiones con corrientes podemos definir un potencial vectorial, puesto que nuestro campo es puramente rotacional

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}). \quad (96)$$

Entonces,

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mu_0 \mathbf{J}, \quad (97)$$

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J}. \quad (98)$$

## Transformación de norma y ecuación de Poisson vectorial

Tomando en cuenta una transformación de norma, podemos lograr que

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (99)$$

mediante la transformación

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\chi \implies \Delta\chi = -\nabla \cdot \mathbf{A}, \text{ t.q. } \nabla \cdot \mathbf{A}' = 0. \quad (100)$$

Recordar que las transformaciones de norma funcionan porque los campos no cambian al sumar el gradiente de una función:

$$\nabla \times (\nabla\chi) = 0. \quad (101)$$

Por lo tanto, la ecuación (98) se reduce a

$$\Delta\mathbf{A} = -\mu_0\mathbf{J}, \quad (102)$$

entonces, podemos escribir la solución para cada componente como

$$A_k = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{J_k}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (103)$$

y aplicar todas las herramientas que habíamos desarrollado (expansiones multipolares y métodos especiales) para la ecuación de Poisson, solo que ahora para cada componente del potencial vectorial.

## Unidad 12: Inducción electromagnética

Existe una relación fundamental entre los campos eléctricos y magnéticos.

### Ley de Faraday

El movimiento de un campo magnético a través de una bobina genera una corriente a través de esta. Matemáticamente se puede expresar como

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}, \quad (104)$$

donde  $\Phi_B = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$  representa el flujo de campo magnético a través de una superficie definida por una circulación.

De manera diferencial (y más fundamental), la ley de Faraday se plantea como

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (105)$$

### Ley de Lenz

Lenz planteó la ley de que la dirección de una fuerza electromagnética inducida es tal que las corrientes inducidas crean un campo magnético **que se opone al cambio del flujo**.

### Energía de las corrientes

Se puede obtener que la función que determina la energía que toma tener un sistema de corrientes es

$$U_B = \frac{1}{2} \int \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} dV \quad (106)$$

para el caso continuo, y

$$U_m = \frac{1}{2} \sum_k I_k \Phi_B^{(k)} \quad (107)$$

## Energía del campo

De manera análoga al caso en el contexto electrostático, se puede calcular la energía magnética mediante el campo magnético como

$$U_B = \frac{1}{2\mu_0} \int_V \mathbf{B}^2 dV. \quad (108)$$

Notar que esta fórmula se obtiene de la aplicación de la ley de Ampère en su formato diferencial sobre la ecuación (106).

## Unidad 13: Materia magnética

El estudio de las interacciones magnéticas en materia en análogo al de las interacciones eléctricas en materia. Se parte de ver la reacción de materiales ante la presencia de campos externos.

$$\mathbf{B}_{total} = \mathbf{B}_{externo} + \mathbf{B}_{propio} \quad (109)$$

Las reacciones de materia se pueden clasificar en

- Paramagnética:  $\mathbf{m} \propto \mathbf{B}_{externo}$
- Super-conductor:  $\mathbf{B} = 0$
- Diamagnética:  $\mathbf{m} \propto -\mathbf{B}_{externo}$

## Magnetización y campo debido a la magnetización

Es importante estudiar cómo la materia se magnetiza, para ello definimos la función que representa cuántos dipolos magnéticos por unidad de volumen encontramos:

$$\frac{d\mathbf{m}}{dV} =: \mathbf{M}(\mathbf{r}) \quad (110)$$

Suponiendo que tenemos un material magnetizado, el potencial vectorial que genera es

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}) \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV', \quad (111)$$

que se puede separar en contribuciones internas y contribuciones superficiales como

$$\mathbf{J}_m = \nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}') \quad (112)$$

$$\mathbf{K}_m = \mathbf{M}(\mathbf{r}) \times \hat{n}' \quad (113)$$

De tal manera que

$$\mathbf{A}_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}_m(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\mathbf{K}_m(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS' \quad (114)$$

## Campo total

Para obtener el campo total, hemos de sumarle a lo anteriores las contribuciones provenientes de tener corrientes libres en el material:

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_f + \mathbf{J}_m \quad (115)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J}_f + \mathbf{J}_m) = \mu_0(\mathbf{J}_f + \nabla \times \mathbf{M}) \quad (116)$$

Resulta natural el definir una función de campo magnético que solamente *vea* las contribuciones provenientes de las corrientes libres. Esta función es

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{B}(\mathbf{r})}{\mu_0} - \mathbf{M}(\mathbf{r}) \quad (117)$$

tal que

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f. \quad (118)$$

## Condiciones de frontera

Las condiciones de frontera que se derivan de las ecuaciones diferenciales son entonces

$$\hat{n}_2 \times [\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2] = \mathbf{K}_f \quad (119)$$

$$\hat{n}_2 \cdot [\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2] = 0 \quad (120)$$

## Materia simple

Para campos externos no extremos se pueden encontrar materiales que se magnetizan de manera lineal con respecto a los campos magnéticos

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}, \quad (121)$$

donde  $\chi$  es la susceptibilidad magnética

De manera similar, podemos plantear

$$\kappa_m = 1 + \chi_m, \text{ Permeabilidad relativa} \quad (122)$$

$$\mu = \kappa_m \mu_0, \text{ Permeabilidad absoluta} \quad (123)$$

Finalmente, se encuentra nuevamente que no existen los monopolos:

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (124)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{M} = 0 \quad (125)$$

## Unidad 14: Ecuaciones de Maxwell

Antes de que Maxwell entrara al juego, se sabían las leyes de Gauss

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f, \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (126)$$

la ley de Faraday

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (127)$$

la ley de Ampère

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f, \quad (128)$$

y la de continuidad

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_f + \frac{\partial \rho_f}{\partial t} = 0. \quad (129)$$

Pero algo no cuadraba al modelar por ejemplo un capacitor, y es que parecía que repentinamente aparecía carga de un lado de la placa y desaparecía del otro, sin tener una corriente en medio.

Matemáticamente esta inconsistencia se deja ver al aplicar el gradiente al rotacional de  $H$ . Sabemos que necesariamente este término tiene que morir por los teoremas de análisis vectorial (**la divergencia de un rotacional es 0**).

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla \cdot \mathbf{J}_f = -\frac{\partial \rho_f}{\partial t}. \quad (130)$$

Entonces tiene que existir una corriente desplazada que contrabalancee para lograr que se cumplan los teoremas de análisis.

Maxwell propuso

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \mathbf{J}_d \quad (131)$$

y entonces

$$-\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}_d = 0. \quad (132)$$

Por lo tanto

$$\mathbf{J}_d = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (133)$$

y finalmente, las ecuaciones finales vendrían a ser

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (134)$$

$$\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\mathbf{J}}{\varepsilon_0} \quad (135)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{0} \quad (136)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (137)$$

donde para el caso de materia

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f \quad (138)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{J}_f \quad (139)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{0} \quad (140)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (141)$$

donde el subíndice  $f$  denota las contribuciones que son libres al material.

Con esto, las ecuaciones de campos clásicos estaban bien consistentes. Más aún, notamos que son bastante simétricas.

## Campos en materia directamente de las ecuaciones de Maxwell

*Esta sección sigue los mismos argumentos encontrados en [2].* Podemos considerar entonces que existen campos microscópicos en la materia dieléctrica, los cuales son medidos por nosotros en forma de un promedio.

Consideremos las ecuaciones de Maxwell:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (142)$$

$$\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\mathbf{J}}{\varepsilon_0} \quad (143)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{0} \quad (144)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (145)$$

Si consideramos una versión de ellas desde el punto de vista **microscópico**, y **exacto**:

$$\nabla \cdot \mathbf{e} = \frac{\eta}{\varepsilon_0} \quad (146)$$

$$\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \nabla \times \mathbf{b} - \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} = \frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0} \quad (147)$$

$$\nabla \times \mathbf{e} + \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = \mathbf{0} \quad (148)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{b} = 0. \quad (149)$$

Podemos notar que si definimos nuestros campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  como integrales de promedio volumétrico de nuestros campos microscópicos:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int d^3 \mathbf{r}' \mathbf{e}(\mathbf{r}') f(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) = \langle \mathbf{e}(\mathbf{r}) \rangle \quad (150)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \int d^3 \mathbf{r}' \mathbf{b}(\mathbf{r}') f(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) = \langle \mathbf{b}(\mathbf{r}) \rangle, \quad (151)$$

y aplicamos los operadores diferenciales en coordenadas no primadas, recuperamos que:

$$\nabla_{\mathbf{r}'} \langle \mathbf{e}(\mathbf{r}) \rangle = \int d^3 \mathbf{r}' \mathbf{e}(\mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}'} f(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) = \int d^3 \mathbf{r}' \mathbf{e}(\mathbf{r}') (-\nabla_{\mathbf{r}'}) f(\mathbf{r}' - \mathbf{r}), \quad (152)$$

después, aplicando una integral por partes ( $\int u dv = uv - \int v du$ , recordar que los términos de frontera de  $f \mathbf{e}$  se mueren en infinito), obtenemos que:

$$\int d^3 \mathbf{r}' \mathbf{e}(\mathbf{r}') (-\nabla_{\mathbf{r}'} f(\mathbf{r}' - \mathbf{r})) = \int d^3 \mathbf{r}' f(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) (\nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \mathbf{e}(\mathbf{r}')) \quad (153)$$

Concluyendo,

$$\nabla_{\mathbf{r}'} \langle \mathbf{e}(\mathbf{r}) \rangle = \langle \nabla \cdot \mathbf{e} \rangle (\mathbf{r}). \quad (154)$$

Similarmente con el operador de derivada temporal, notamos que

$$\frac{\partial \langle \mathbf{e} \rangle}{\partial t} = \left\langle \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} \right\rangle \quad (155)$$

Ahora, consideremos que tenemos un material formado por muchas partículas, cada una con su propia función de densidad de carga, el campo que todas ellas puede ser escrito como

$$\eta(\mathbf{r}) = \sum_n \int d^3 \mathbf{r}' \eta_n(\mathbf{r}') f(\mathbf{r}' - \mathbf{r}), \quad (156)$$

donde  $n$  enumera todas las partículas.

Entonces, podemos realizar una expansión de Taylor de  $f$  alrededor de  $\mathbf{r}' = \mathbf{r}'_n$ , donde  $\mathbf{r}'_n$  es la posición central de cada partícula. Tal que

$$\begin{aligned} \eta(\mathbf{r}) &= \int d^3 \mathbf{r}' \eta_n(\mathbf{r}') f(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \\ &= \int d^3 \mathbf{y} \eta_n(\mathbf{r}') (f(\mathbf{r}'_n - \mathbf{r}) + \mathbf{y} \nabla_{\mathbf{y}} f(\mathbf{y}) + \dots) \\ &= \int d^3 \mathbf{y} \eta_n(\mathbf{r}'_n + \mathbf{y}) (f(\mathbf{r}'_n - \mathbf{r}) + \mathbf{y} \nabla_{\mathbf{y}} f(\mathbf{y}) + \dots) \\ &= q_n f(\mathbf{r}'_n - \mathbf{r}) - \mathbf{d}_n \nabla_{\mathbf{r}} f(\mathbf{r}'_n - \mathbf{r}), \end{aligned}$$

remarcar que  $\mathbf{y} = \mathbf{r}' - \mathbf{r}'_n$  es el vector de la expansión de Taylor, y que el diferencial volumétrico cambia a ser expresado en  $\mathbf{y}$  (el Jacobiano del cambio de variable es 1).

Entonces, naturalmente podemos definir la carga libre y la polarización como los dos primeros términos de nuestra expansión de contribuciones expansivas de nuestras "mediciones de la densidad de carga".

$$\rho_f(\mathbf{r}) = \sum_n q_n f(\mathbf{r}'_n - \mathbf{r}) \quad (157)$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \sum_n \mathbf{d}_n f(\mathbf{r}'_n - \mathbf{r}) \quad (158)$$

Finalmente, podemos definir los campos

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (159)$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M}, \quad (160)$$

tal que sustituyéndolos en las ecuaciones 146, y aplicando las propiedades de las ecuaciones 154 y 155, obtenemos un conjunto de ecuaciones mucho más conveniente

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f \quad (161)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{J}_f \quad (162)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{0} \quad (163)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (164)$$

donde el subíndice  $f$  denota las contribuciones que son libres al material.

### Condiciones de frontera en materia

De las ecuaciones anteriores, finalmente se puede derivar que las condiciones de frontera para materia son

$$\hat{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \sigma_f \quad (165)$$

$$\hat{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0 \quad (166)$$

$$\hat{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0 \quad (167)$$

$$\hat{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{K}_f \quad (168)$$

# Bibliografía

- [1] Héctor J. Medel-Cobaxin. *Teoría Electromagnética*. Tecnológico de Monterrey, 2020.
- [2] João M.A. Penedones. *Classical Electrodynamics: Summary Notes*. École polytechnique fédérale de Lausanne, 2018.
- [3] David J Griffiths. *Introduction to electrodynamics*. Prentice Hall New Jersey, 1962.
- [4] Edward M Purcell and Edward Mills Purcell. *Electricity and magnetism*, volume 2. McGraw-Hill New York, 1965.
- [5] Ronald K Wangsness. *Electromagnetic fields*, volume 2. Wiley New York, 1979.
- [6] Paul Lorrain and Dale R Corson. *Electromagnetic fields and waves*, 1970.
- [7] Wolfgang KH Panofsky and Melba Phillips. *Classical electricity and magnetism*. Courier Corporation, 2005.
- [8] Oleg D Jefimenko. *Electricity and Magnetism: An Introduction to the Theory of Electric and Magnetic Fields*. Electret Scientific Company, 1989.
- [9] Andrew Zangwill. *Modern electrodynamics*. Cambridge University Press, 2013.
- [10] Julian Schwinger, Lester L DeRaad Jr, Kimball Milton, and Wu-yang Tsai. *Classical electrodynamics*. Westview Press, 1998.
- [11] John David Jackson. *Classical electrodynamics*, 1999.