

Segundo informe de Física Computacional: Dinámicas no-lineales y sistemas caóticos

Francisco Fernández

Abril del 2020

Resumen

En este informe se estudiaron sistemas caóticos, para ello fue necesario aprender a utilizar la transformada de Fourier, de la librería FFTW3, entender los conceptos del mapeo logístico y distintos indicadores de caos como las secciones de Poincaré o el exponente de Lyapunov. Para ello se resolvieron dos problemas de la guía 1 (b), el primero correspondiente al mapeo logístico y el segundo a un péndulo doble.

1. Introducción teórica

1.1. Transformada de Fourier

Para definir lo que es la transformada de Fourier, nos imaginamos que tenemos una señal $y(t)$ expresada en términos de una serie de armónicos,

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega Y(\omega) \frac{e^{i\omega t}}{\sqrt{2\pi}},$$

donde la amplitud $Y(\omega)$ se *llama transformada de Fourier de $y(t)$* y se puede obtener de la siguiente manera

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{e^{-i\omega t}}{\sqrt{2\pi}} y(t),$$

donde el factor $1/\sqrt{2\pi}$ es convención para la normalización.

La transformada de Fourier nos permite obtener espectros de potencia, $|Y(\omega)|^2$ versus ω , que nos puede servir para indicar la existencia de caos cuando los picos se van desdoblando.

1.1.1. Algoritmo de DFT

Para utilizar este método *discreto de la transformada de Fourier* debemos tener $(N+1)$ puntos de $y_k(t_k)$, donde $t_k = kh$. Entonces se puede definir el período $T = Nh$ de $y(t)$,

$$y(t + T) = y(t).$$

Con esto también se puede resaltar que la frecuencia mínima, o *frecuencia de Nyquist*, del espectro de potencia será

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T},$$

y las frecuencias siguientes vienen determinadas por múltiplos de esta,

$$\omega_n = n\omega_1.$$

El tiempo de cómputo de DFT escala como N^2 , mientras que existen algoritmos de *transformada rápida de Fourier* que escalan como $N \log_2 N$.

1.1.2. FFT

Esencialmente, lo que hace el algoritmo de la transformada rápida de Fourier es dividir los datos de entrada en dos grupos iguales y resolver solo uno de ellos, luego vuelve a dividir el conjunto no transformado a la mitad y continua hasta que todos los datos hayan sido transformados.

La librería que se utilizó en este trabajo fue la FFTW3, que utiliza *planes* para adaptar el algoritmo al *hardware* para maximizar la *performance*, y suele ser demandante en consumición de tiempo. Esta escrita en el lenguaje de programación C y sirve para cualquier valor de N , mientras que los métodos de DFT están restringidos para N que son potencia de dos.

1.2. Dinámicas no-lineales discretas

1.2.1. Mapeo logístico

El mapeo logístico se utiliza para representar la reproducción de las generaciones de insectos y suele escribirse como una relación entre el número de individuos de la generación futura y la presente,

$$x_{i+1} = \mu x_i (1 - x_i), \quad (1)$$

donde μ es el parámetro adimensional de crecimiento y x_i la población adimensional variable, entonces los valores de esta están restringidos entre 0 y 1, donde $x = 0$ corresponde a que no hay individuos y $x = 1$ a que la población es máxima. El valor inicial de población x_0 se lo conoce como *semilla* y tiene poca influencia en la dinámica de la población a tiempos largos, en cambio, la dinámica suele cambiar drásticamente con pequeños cambios de μ .

1.2.2. Puntos fijos y atractores

En un punto fijo x_* no hay cambio en la población de la generación i a la $i + 1$, es decir,

$$x_{i+1} = x_i = x_*.$$

Si tomamos la expresión (1) e igualamos x_i a x_{i+1} llegamos a que hay dos puntos fijos, $x_* = 0$ y $x_* = \frac{\mu-1}{\mu}$, este último valor distinto de cero se corresponde con una población estable entre el nacimiento y la muerte de individuos. La estabilidad de la población viene dada por la magnitud de la derivada primera de $x_{i+1} = f(x_i)$; si $\frac{df}{dx}(x_*) < 1$ entonces es estable.

Cuando el sistema se *bifurca* en dos poblaciones, entre las cuales la población va oscilando y actúa como si fuera atraída por ellas. A estas poblaciones se las conoce como atractores.

1.3. Diagrama de bifurcación

Los puntos fijos pueden crearse o destruirse, o incluso cambiar si estabilidad, estos cambios en la dinámica se conocen como bifurcaciones y los puntos en los que ocurren se conocen como *puntos de bifurcación* y dependen de un parámetro de control, en el caso del mapeo logístico, μ . Los puntos fijos tienden a aparecer o desaparecer en pares simétricos. A medida que el número de bifurcaciones aumenta el sistema se va convirtiendo en caótico.

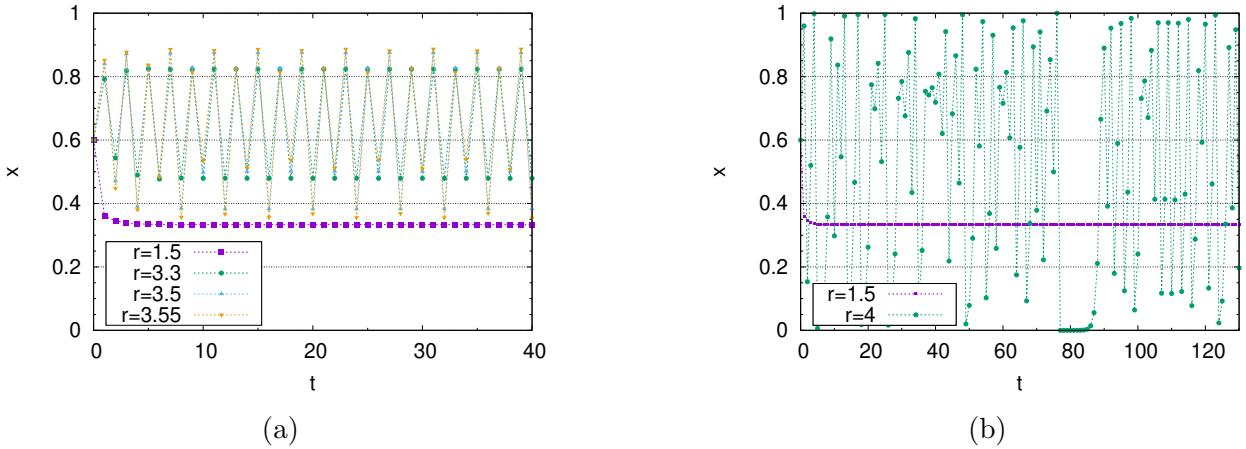


Figura 1: Variación en la cantidad de individuos en una población en función del tiempo discreto para distintos parámetros de crecimiento. r es el parámetro de crecimiento μ .

1.4. Exponente de Lyapunov

Dada la población inicial x_0 y δ_n la separación luego de n iteraciones. Si $|\delta_n| = |\delta_0| \exp(\lambda t)$, entonces λ es el exponente de Lyapunov. Si $\lambda > 0$ la órbitas divergen y el sistema es caótico; si $\lambda = 0$ se mantiene estable y, si $\lambda < 0$ la órbita es periódica y estable. El valor del mismo puede obtenerse a partir de la siguiente expresión,

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left| \left(\frac{\delta f}{\delta x} \right)_{x_i} \right|;$$

que, en particular, para el caso del mapeo logístico, se escribe como

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |\mu - 2\mu x_i|.$$

1.5. Secciones de Poincaré

Si tenemos un sistema n -dimensional, $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, definimos S como la sección de superficie de dimensión $n - 1$, transversal al flujo del sistema. El *mapa de Poincaré* P es un mapeo de S mismo, obtenido a través de un seguimiento de las trayectorias que pasan por la misma.

Si en el mapa aparece sólo un punto fijo entonces se trata de un sistema periódico. Si aparece una curva cerrada rodeando el punto fijo, entonces el sistema es estable en dicha región. Si en el mapa aparecen puntos aleatorios, entonces el sistema es caótico.

2. Resultados y discusiones

2.1. Problema 2: Mapeo Logístico

En este problema se considera la expresión (1) y los programas `*.f90` son bastante simples, tiene un *loop* principal que llama a una subrutina que calcula el paso del mapeo logístico.

2.1.1. Inciso a: trayectorias x_t vs t

En la figura (1) se muestran comportamientos típicos de las poblaciones para distintos parámetros de crecimiento, con la misma población inicial $x_0 = 0,6$. En el caso de la fig. (1a), para un

$\mu = 1,5$ vemos que la población se equilibra. Luego, para $\mu = 3,3$ observamos una oscilación entre dos poblaciones, para $\mu = 3,5$ y $\mu = 3,55$ vemos que hay cuatro poblaciones. Por otro lado, en la fig. (1b), para un $\mu = 4$ el sistema es completamente caótico. Esto nos muestra como las variaciones en la cantidad de individuos en una población no depende tanto de la población inicial como del parámetro de crecimiento.

2.1.2. Inciso b: espectro de potencia

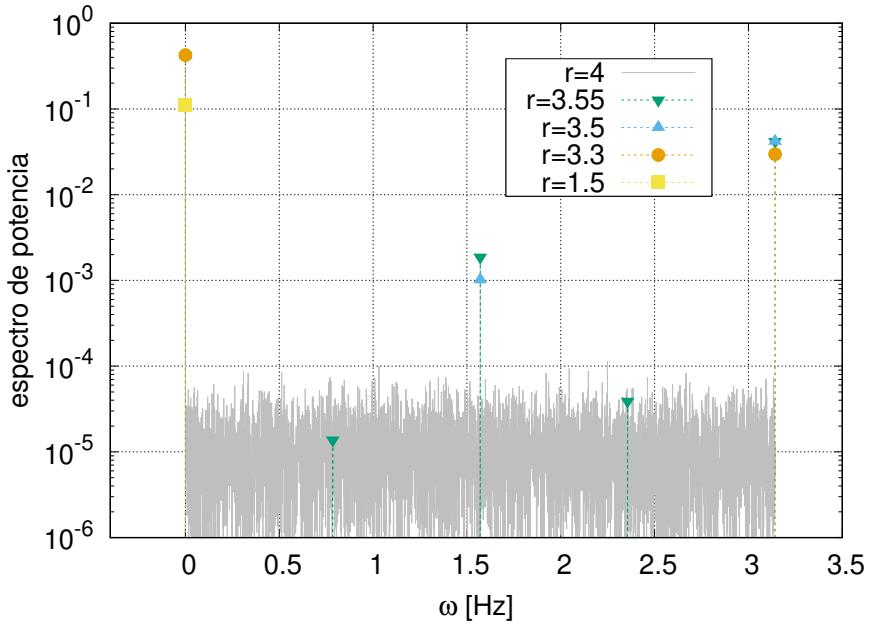


Figura 2: Espectro de potencia para distintos parámetros de crecimiento con la misma población inicial $x_0 = 0$. r se corresponde con el parámetro μ .

En la figura (2) se observa el espectro de potencia. Los primeros picos para todos los casos corresponden para $\omega = 0$, sin embargo, vimos en la sección teórica que la primera frecuencia con sentido físico es la de *Nyquist*. Aquí podemos observar que para $\mu = 1,5$ no hay ninguna frecuencia de las poblaciones, como ya vimos en la figura (1a), la misma se estabiliza en un punto fijo $\sim 0,333\dots$. Para $\mu = 3,3$ vemos que aparece un primer pico, que sumado al anterior evidencia la existencia de que hay dos atractores entre los que oscila la cantidad de individuos. También se puede destacar que un cambio de 10^{-2} en μ , entre $\mu = 3,5$ y $\mu = 3,55$, aparece un atractor más. Por último, para $\mu = 4$ no se obtiene ninguna frecuencia característica, si no que se ve ruido del orden de 10^{-5} , lo cual nos indica que el sistema ya se convirtió en un sistema caótico.

2.1.3. Inciso c: histograma de la distribución de x

Para obtener un buen histograma de la distribución de x para $\mu = 4$ y $x_0 = 0,6$ se descartaron los primeros 300 pasos de la dinámica, correspondientes al transitorio, y se tomaron los 10000 siguientes. Se utilizó un ancho de bin de 0,01. En la figura (3) se observa la distribución de x , vemos que la misma no es uniforme si no que, a pesar de que el sistema sea caótico y no podamos predecir que es lo que pasará en el siguiente tiempo, hay valores más probables en los cuales la población está próxima a extinguirse o cerca de su máximo.

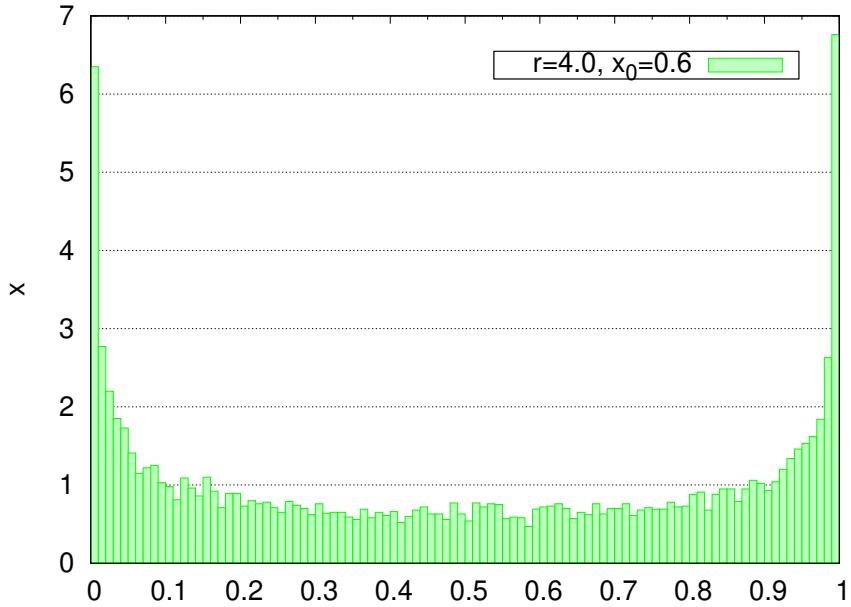


Figura 3: Histograma normalizado de la distribución de x . r se corresponde al valor de μ .

2.1.4. Inciso d: diagrama de órbitas

Para obtener los diagramas de órbitas en el plano x, r se fue variando el valor de r , tomando unos mil puntos entre el inicial y el final, en el caso de la figura (4a) alcanzó con tomar 300 puntos luego del transitorio, pero para obtener un buen gráfico en un intervalo más pequeño como el de la figura (4b) se tomaron 1200 puntos.

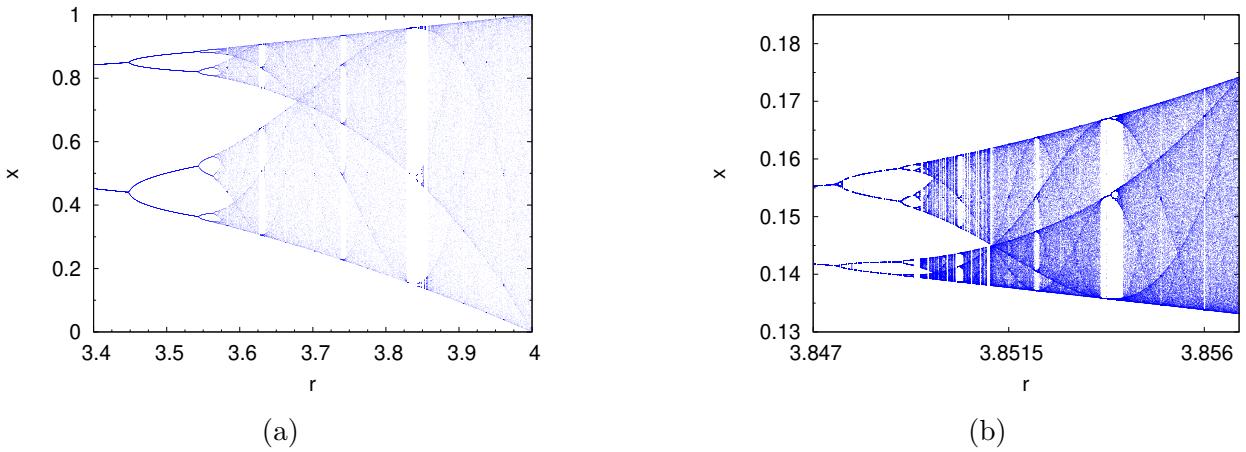
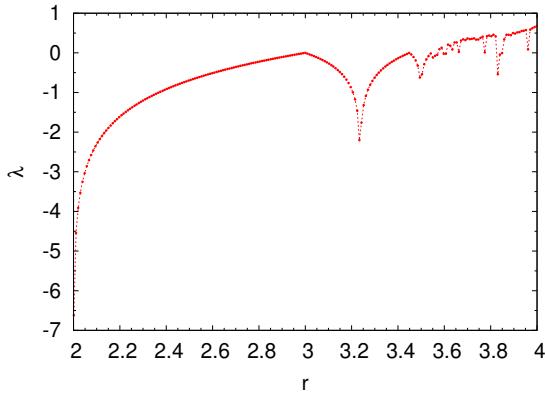


Figura 4: Diagrama de bifurcaciones para un barrido en r .

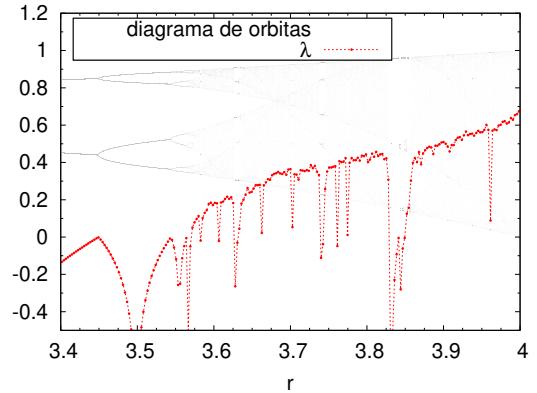
Observando los dos gráficos de la figura (4) se puede destacar la *auto-similaridad* de uno con respecto al otro, ya que su forma funcional es la misma solo que invertida y en otra escala. También se detectan algunas ventanas limpias donde la respuesta del sistema vuelve a ser periódica y reaparecen las órbitas estables.

2.1.5. Inciso e: exponente de Lyapunov

El exponente de Lyapunov mostrado en la figura (5) es una medida de cuan rápido se separan las trayectorias. Vemos en la figura (5a) que el exponente es negativo hasta $r = 3$, lo cual quiere decir que la trayectoria es periódica y estable, luego llega a tomar valores iguales a cero



(a)



(b)

Figura 5: Exponente de Lyapunov para un barrido en r .

en los cuales hay bifurcaciones, y para $r > 3.6$ empiezan a aparecer valores positivos en los cuales el sistema ya es caótico. Por último, en la figura (5b) se muestra el diagrama de órbitas y el exponente de Lyapunov en el mismo gráfico para observar que las caídas en este último se corresponden con las ventanas limpias del anterior y que a medida que λ crece el diagrama de órbitas se va bifurcando más..

2.2. Problema 3: Péndulo Doble

El péndulo doble consiste en un péndulo de cuyo extremo pende un segundo péndulo. Las ecuaciones de movimiento se pueden derivar en forma directa de Lagrangiano del sistema, de las cuales se obtiene un sistema de dos ecuaciones de segundo orden que puede ser llevado a uno de cuatro ecuaciones de primer orden que pueden ser adimensionadas para simplificar los cálculos, la unidad de masa pasa a ser m_1 , la de longitud L_1 y el tiempo en segundos. Todas estas ecuaciones están implementadas dentro de los distintos `main.f90` de cada inciso. Para resolverlas se utilizó el modulo `odes.f90` desarrollado en el informe anterior, utilizando solo el módulo de Runge-Kutta de cuarto orden.

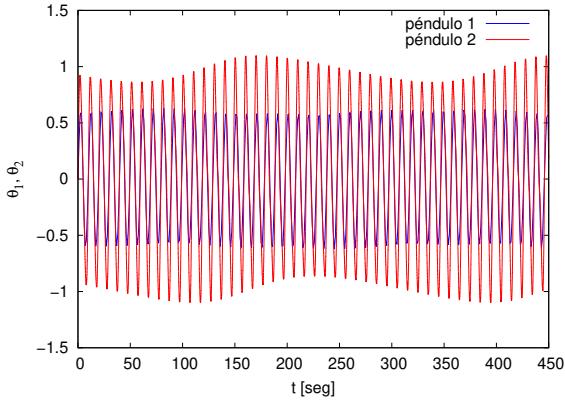
Los parámetros adimensionales son los siguientes

$$\alpha = \frac{m_2}{m_1}, \quad \beta = \frac{L_2}{L_1}, \quad \gamma = \frac{g}{L_1}.$$

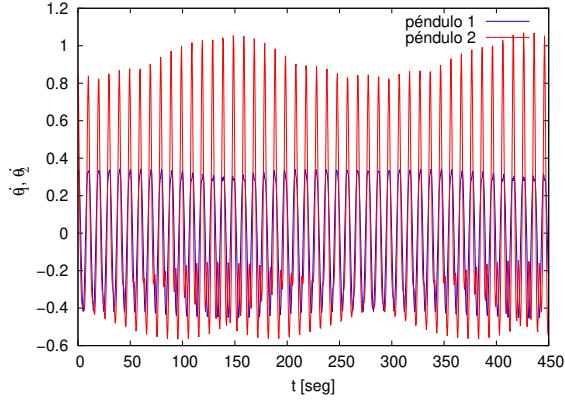
Para todos los casos, salvo el inciso (d), se utilizó $\alpha = 1/3$, $\beta = 1/2$ y $\gamma = 1/2$.

2.2.1. Inciso a: trayectorias

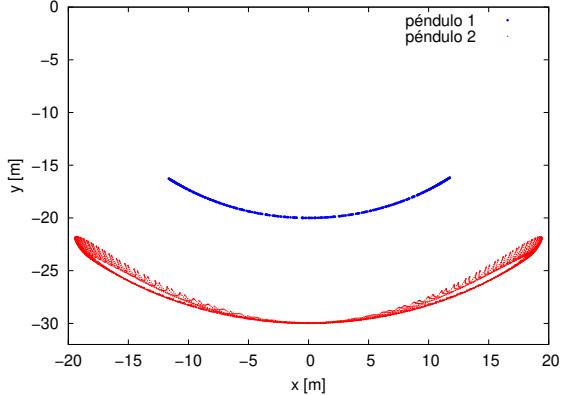
En la figuras (6a) y (6b) podemos ver el comportamiento de los ángulos de las distintas masas para 450 segundos. Se observa que variando las condiciones iniciales el péndulo tiene dos comportamientos completamente distintos, en el primero ambas masas tienen una oscilación periódica y en el segundo la primera de ellas tiene este tipo de movimiento pero la segunda posee un movimiento más caótico. Un análisis parecido puede hacerse a partir de las figuras (6c) y (6d). Por último, en las figuras (6e) y (6f) se tienen las trayectorias del péndulo doble para ambos casos especificados, en el primero de ellos se ve como la segunda masa tiene una órbita estable, donde las posiciones no varían abruptamente como en el segundo caso donde toma todos valores posibles alrededor de la trayectoria de el primer péndulo.



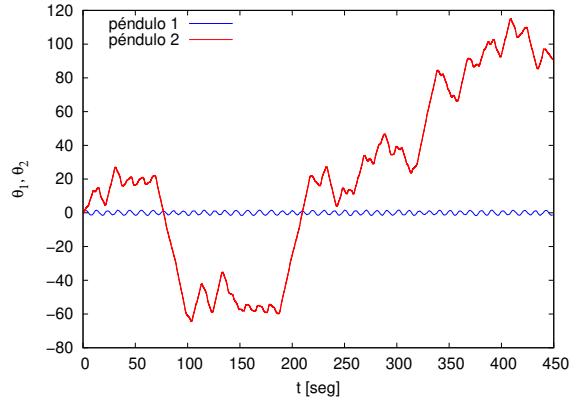
(a) $E = -0,6$, $\theta_1(0) = 0$, $\theta_2(0) = 0$, $\omega_1(0) = 0,332$, $\omega_2 = 0,845$



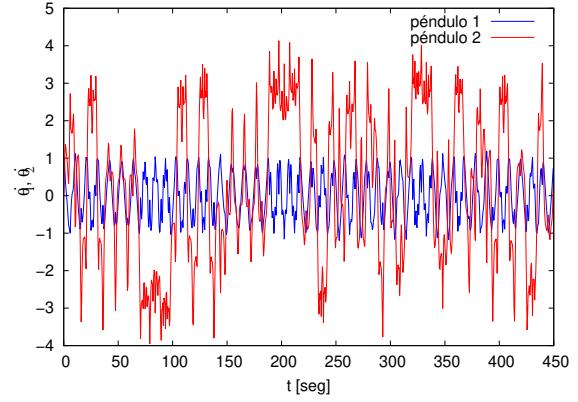
(c) $E = -0,6$, $\theta_1(0) = 0$, $\theta_2(0) = 0$, $\omega_1(0) = 0,332$, $\omega_2 = 0,845$



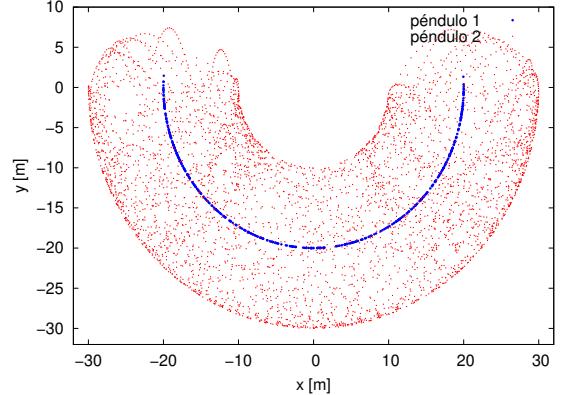
(e) $E = -0,6$, $\theta_1(0) = 0$, $\theta_2(0) = 0$, $\omega_1(0) = 0,332$, $\omega_2 = 0,845$



(b) $E = 0$, $\theta_1(0) = 0$, $\theta_2(0) = 0$, $\omega_1(0) = \sqrt{1,125}$, $\omega_2 = 0$



(d) $E = 0$, $\theta_1(0) = 0$, $\theta_2(0) = 0$, $\omega_1(0) = \sqrt{1,125}$, $\omega_2 = 0$



(f) $E = 0$, $\theta_1(0) = 0$, $\theta_2(0) = 0$, $\omega_1(0) = \sqrt{1,125}$, $\omega_2 = 0$

Figura 6: Ángulos y velocidades angulares en función del tiempo. Trayectorias de las dos masas del péndulo. Todo para ambas condiciones iniciales.

2.2.2. Inciso b: mapas de Poincaré

En las secciones de Poincaré que se muestran en la figura (7) vemos como para la energía más cercana al mínimo hay dos puntos al rededor de los cuales hay órbitas cerradas que representan que el péndulo está en una condición estable. Luego en la siguiente energía aparecen otros de estos puntos, en la sección de p_2 positiva, indicando que las órbitas se empiezan a bifurcar. Luego de la imagen (7c) empieza a haber puntos aleatorios en el mapa, lo cual indica que el péndulo no vuelve a pasar por esos mismos puntos y se empieza a comportar de manera

caótica. Entre esta figura y la siguiente (7d), hay un cambio de energía de 5×10^{-3} y se ve como el punto de la sección negativa de p_2 empieza a bifurcarse y sobre la región de p_2 positiva empieza a predominar el caos. Cuando llegamos a energía igual a 0, en la figura (7e), el mapa está predominado por los puntos caóticos que no se repiten.

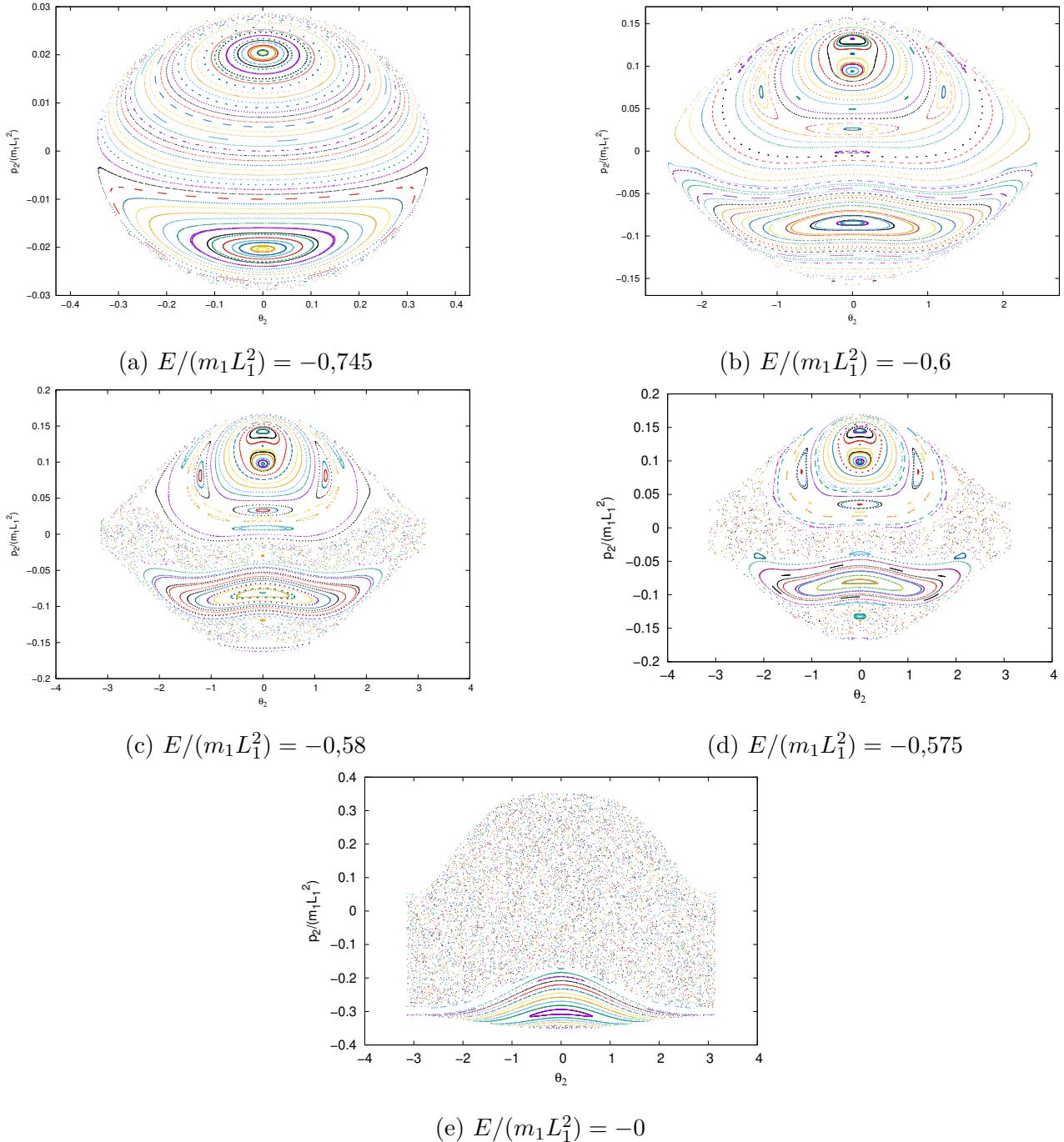


Figura 7: Mapas de Poincaré en el plano p_2, θ_2 para distintas energías del péndulo doble

2.2.3. Inciso c: espectro de potencia

En el espectro de potencia para las condiciones iniciales del inciso (a) de la figura (8) se observa como para el caso más estable el péndulo de menor masa tiene frecuencias definidas y que para el caso más caótico solo se puede notar una tendencia de predominancia por parte de las frecuencias más bajas.

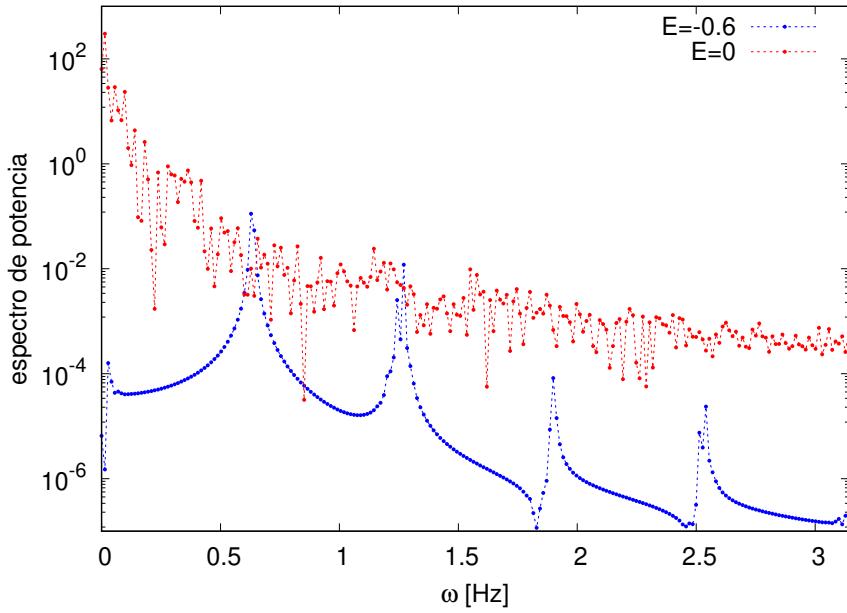


Figura 8: Espectro de potencia de θ_2 para ambas condiciones del inciso (a).

2.2.4. Inciso d: tiempo de *flip*

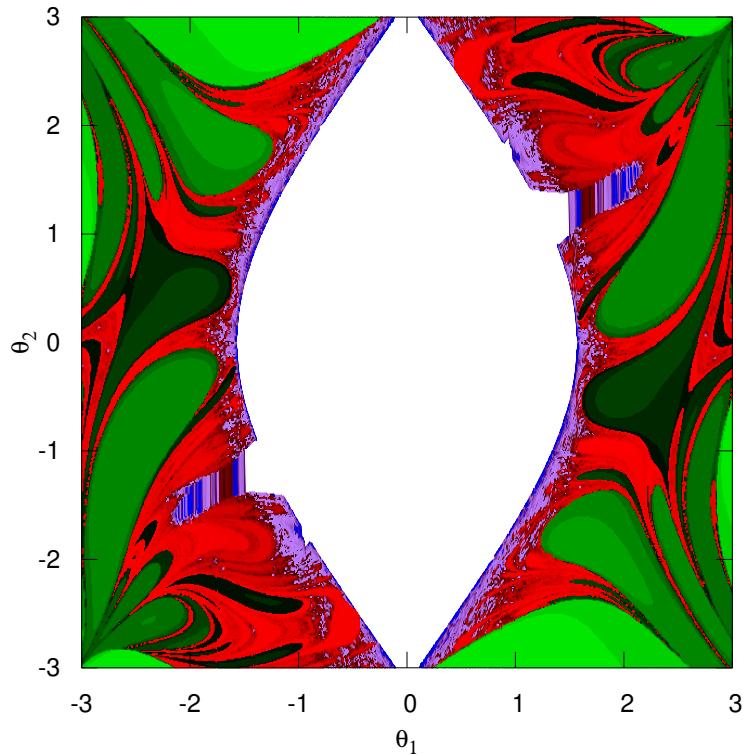


Figura 9: Tiempo requerido para que alguna de las dos masas del tiempo de una media vuelta en función de θ_1 y θ_2 iniciales.

En este inciso se tomó $\alpha = \beta = \gamma = 1\text{seg}^{-2}$. Se midió el tiempo que demora alguna de las dos masas en dar media vuelta para distintas condiciones iniciales de θ_{t1} y θ_2 . En la

figura (9) los tiempos de *flip* están representados en una mapa de colores donde el verde se corresponde a los valores entre 0 y 100 segundos (pasando de verde más claro a más oscuro) y de 100 a 1000 del purpura al rojo y azul para aquello entre 1000 y 1000 segundos. De la misma podemos destacar que para condiciones iniciales muy parecidas el tiempo que se demora alguno de los dos péndulos en dar una media vuelta puede ser muy distinto. Pequeñas variaciones en estas condiciones llevan a resultados completamente distintos, lo cual nos está indicando que el sistema es complicado y caótico.