

# FÍSICA COMPUTACIONAL

## PRÁCTICO 1b - 2020

Entregar problemas 2 (completo), 3a, 3c y 3d, hasta el 15/04/20.

Posgrado entregar también el prob. 4

### 1. FFT

Dada la siguiente señal:

$$f(t) = \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) + \cos(20\pi t) ,$$

- Haga un muestreo de la señal, entre 0 y 4, usando  $N = 1024$  puntos y calcule la transformada discreta utilizando la librería FFTW (FFT) y de la forma directa (DFT), utilizando la subrutina *DFT* en el módulo *dft\_mod.f90*. Compare los resultados y el costo computacional. Verifique que al transformar y anti-transformar obtenga nuevamente la señal inicial. Determine las frecuencias de la señal a partir de los resultados. Grafique el espectro de potencias.
- Muestree ahora la señal con  $N = 16, 64, 128$  y  $512$ . Qué puede decir de estos resultados?

### Sistemas Caóticos

2. Considerar el mapeo logístico:

entregar

$$x_{t+1} = rx_t(1 - x_t)$$

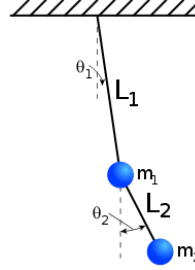
- Graficar las trayectorias  $x_t$  vs  $t$  para  $r = 1,5; 3,3; 3,5; 3,55; 4$ . Realice 500 pasos para diferentes condiciones iniciales ( $x_0 = 0,06; 0,3; 0,6$  y  $0,9$ ; por ejemplo) y grafique eligiendo adecuadamente el rango de  $t$ .
- Calcular el espectro de potencia para los mismos valores de  $r$  que en el punto a) usando FFT. Note que debe descartar el transitorio (300 pasos). Tome como condición inicial  $x_0 = 0,6$ .
- Graficar el histograma (normalizado) de la distribución de  $x$  para  $r = 4$  y  $x_0 = 0,6$ . Luego de descartar los primeros 300 pasos, considere los 10000 pasos siguientes. Sea cuidadoso en la elección del ancho de los “bins”.
- Obtener el “diagrama de órbitas” en el plano  $x, r$ . Para ello, para cada valor de  $r$  iterar primero 300 puntos, que se descartan, y luego graficar  $x_{301}, \dots, x_{600}$  para cada valor de  $r$ . Graficar para  $3,4 < r < 4$ . Realizar una ampliación del gráfico para  $3,847 < r < 3,8568$  mostrando la región  $0,13 < x < 0,185$ . (Para esto último hacer mas iteraciones, por ej.  $x_{301}, \dots, x_{1500}$ ).

e) Calcular y graficar el exponente de Lyapunov para  $2 < r < 4$ . Recuerde descartar el transitorio, y utilice del orden de 1500 pasos para calcular el exponente.

### 3. Péndulo Doble

El péndulo doble consiste en un péndulo simple cuyo extremo pende un segundo péndulo, tal como se muestra en la siguiente ilustración:

entregar



Las ecuaciones de movimiento para el péndulo doble se derivan en forma directa del *Lagrangiano* del sistema:

$$L = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) L_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 L_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 L_1 L_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2) g L_1 \cos \theta_1 + m_2 g L_2 \cos \theta_2$$

Las ecuaciones acopladas resultantes para  $\theta_1$  y  $\theta_2$  son las siguientes:

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2) L_1 \ddot{\theta}_1 + m_2 L_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2 L_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + \\ + g(m_1 + m_2) \sin(\theta_1) &= 0 \\ m_2 L_1 \ddot{\theta}_2 + m_2 L_1 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 L_1 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + g m_2 \sin(\theta_2) &= 0 \end{aligned}$$

De las cuales se puede despejar:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_1 &= \frac{-(1 + \alpha) \gamma \sin \theta_1 - \alpha \beta \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - \alpha \cos(\theta_1 - \theta_2) \left[ \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - \gamma \sin \theta_2 \right]}{1 + \alpha \sin^2(\theta_1 - \theta_2)} \\ \ddot{\theta}_2 &= \frac{(1 + \alpha) \left[ \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - \gamma \sin \theta_2 \right]}{\beta \left[ 1 + \alpha \sin^2(\theta_1 - \theta_2) \right]} + \\ &+ \frac{\cos(\theta_1 - \theta_2) \left[ (1 + \alpha) \gamma \sin \theta_1 + \alpha \beta \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \right]}{\beta \left[ 1 + \alpha \sin^2(\theta_1 - \theta_2) \right]} \end{aligned}$$

donde hemos introducido los parámetros adimensionales

$$\alpha = \frac{m_2}{m_1} \text{ y } \beta = \frac{L_2}{L_1}$$

y la cantidad

$$\gamma = \frac{g}{L_1}$$

que tiene dimensión de inversa de tiempo al cuadrado. Lleve este sistema de dos ecuaciones de segundo orden a uno de cuatro ecuaciones de primer orden, e implemente un código que lo resuelva (dado un set de condiciones iniciales) utilizando el método de Runge–Kutta de cuarto orden. Adimensionalice, de manera que los parámetros del sistema sean  $\alpha, \beta$  y  $\gamma$ , i.e. elija  $m_1$  como unidad de masa y  $L_1$  como unidad de longitud.

a) Experimente con distintas condiciones iniciales y grafique

- las trayectorias de las dos masas del péndulo,
- ángulos y velocidades angulares en función del tiempo

Presente los resultados correspondientes a un péndulo doble con  $\alpha = 1/3$ ,  $\beta = 1/2$  y  $\gamma = 1/2 \text{ seg}^{-2}$ , con las siguientes condiciones iniciales:  $(\theta_1(0) = 0, \theta_2(0) = 0, \dot{\theta}_1(0) = 0,332, \dot{\theta}_2(0) = 0,845)$  y  $(\theta_1(0) = 0, \theta_2(0) = 0, \dot{\theta}_1(0) = \sqrt{1,125}, \dot{\theta}_2(0) = 0)$ . Considere un intervalo de 450 segundos. Note que estos casos corresponden a energía  $E = -0,6m_1L_1^2\text{seg}^{-2}$  y  $E = 0$ , respectivamente (la energía mínima de este péndulo doble es  $E = -3/4m_1L_1^2\text{seg}^{-2}$ ). ).

b) La dinámica, descrita por las ecuaciones canónicas, se desarrolla en el espacio de fases 4-dimensional  $(\theta_1, \theta_2, p_1, p_2)$ . Donde  $p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}$  y  $p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}$  son los respectivos momentos generalizados. Para visualizar la dinámica usando las secciones de Poincaré, se necesita eliminar una variable y, de esa manera, reducir en una la dimensión. Para ello, usamos la conservación de la energía

$$E = H = \frac{(m_1 + m_2) L_1^2 p_2^2 + m_2 L_2^2 p_1^2 - 2m_2 L_1 L_2 p_1 p_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}{2L_1^2 L_2^2 m_2 [m_1 + m_2 \sin^2(\theta_1 - \theta_2)]} - (m_1 + m_2) g L_1 \cos \theta_1 - m_2 g L_2 \cos \theta_2 ,$$

y determinamos  $p_1$  a partir de ésta, obteniendo

$$p_1 = \frac{1}{2L_2^2 m_2} \left\{ 2L_1 L_2 m_2 p_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \sqrt{2} \sqrt{L_1^2 L_2^2 m_2 (2m_1 + m_2 - m_2 \cos[2(\theta_1 - \theta_2)])} \times \sqrt{2EL_2^2 m_2 - p_2^2 + 2gL_2^2 m_2 (L_1(m_1 + m_2) \cos \theta_1 + L_2 m_2 \cos \theta_2)} \right\}$$

Adimensionalizando (excepto el tiempo),

$$\begin{aligned} \frac{p_1}{m_1 L_1^2} &= \frac{1}{\beta} \frac{p_2}{m_1 L_1^2} + \\ &+ \frac{1}{\beta \sqrt{2\alpha}} \sqrt{2 + \alpha - \alpha \cos[2(\theta_1 - \theta_2)]} \times \\ &\times \sqrt{2\beta^2 \alpha \left\{ \left( \frac{E}{L_1^2 m_1} \right) + \gamma [(1 + \alpha) \cos \theta_1 + \beta \alpha \cos \theta_2] \right\} - \left( \frac{p_2}{L_1^2 m_1} \right)^2} \end{aligned}$$

Para el mismo péndulo doble del inciso anterior, trace las secciones de Poincaré en el plano  $p_2, \theta_2$ , i.e., grafique los puntos donde la trayectoria cruza el plano  $\theta_1 = 0$  con  $\dot{\theta}_1 > 0$  (en la implementación es conveniente buscar los cambios de signo de  $\theta_1$ ). Particularice para valores de energía  $Em_1^{-1}L_1^{-2}seg^2 = -0.745, -0.6, -0.58, -0.575$ , y 0. Para hacer los gráficos elija al menos 50 condiciones iniciales para cada valor de energía, e integre hasta  $t_{final} = 5000$  seg.

**Sugerencia:** Una posible elección de condiciones iniciales es  $\theta_1 = 0, \theta_2 = 0$ , y elegir  $p_2$  equiespaciado en el intervalo  $[-p_{2,max} : p_{2,max}]$ , con  $p_{1,max}$  tal que

$$E = \frac{(1 + \alpha)p_{2,max}^2}{2\alpha\beta^2(1 + \alpha \sin^2 \theta_2)} - (1 + \alpha)\gamma - \alpha\beta\gamma \cos \theta_2 \quad .$$

Note, además, que

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1 &= \frac{\frac{p_1}{m_1 L_1^2} - \frac{\cos(\theta_1 - \theta_2)}{\beta} \frac{p_2}{m_1 L_1^2}}{1 + \alpha \sin^2(\theta_1 - \theta_2)} \\ \dot{\theta}_2 &= \frac{1}{\alpha\beta^2} \frac{p_2}{m_1 L_1^2} - \frac{\cos(\theta_1 - \theta_2)}{\beta} \dot{\theta}_1 \end{aligned}$$

- c) Calcule el espectro de potencias de  $\theta_2(t)$  para una órbita con energía  $E = -0.6m_1L_1^2seg^{-2}$  y para una órbita con  $E = 0$  (use los ejemplos del inciso 3a).
- d) Una forma numérica bella y convincente de demostrar que el movimiento del péndulo doble puede ser complicado y caótico fue propuesta por Heyl<sup>1</sup>. Consiste en calcular para un dado conjunto de condiciones iniciales el tiempo requerido para que alguna de las dos masas de una media vuelta (tiempo de *flip*), es decir, que  $\theta_1$  o  $\theta_2$  excedan el valor  $\pi$ . Este cálculo se hace luego para un conjunto de condiciones iniciales para las cuales  $\dot{\theta}_1 = 0$  y  $\dot{\theta}_2 = 0$ , y los valores iniciales de  $\theta_1$  y  $\theta_2$  se ambos en el rango entre 0 y  $2\pi$ . Finalmente, se grafica con un mapa de colores el valor del tiempo de *flip* sobre el espacio de las condiciones iniciales  $(\theta_1, \theta_2)$ .

Construya el mapa de color correspondiente para los tiempos de *flip* para el caso particular  $\alpha = \beta = 1$  y  $\gamma = 1seg^{-2}$ . Para ello, elija condiciones iniciales  $(\theta_1, \theta_2)$  en una grilla de  $600 \times 300$  en la region  $[-3, 3] \times [0, 3]$ , y evolucione el sistema a partir del reposo, y hasta que alguno de las masas haga un *flip* o se alcance el tiempo máximo de 10000 *seg.*, y escriba para cada condición inicial el tiempo de *flip* o nada, en caso de no registrarse un *flip* en el tiempo máximo. Finalmente, grafique el mapa de colores en *gnuplot*, asignando el color verde para el rango  $[0, 10]$  *seg*, rojo para  $[10, 100]$  *seg*, púrpura para  $[100, 1000]$  *seg* y azul para  $[1000, 10000]$  *seg*. Para los puntos donde no se registró un *flip* use el color blanco.

**Sugerencia 1:** Note que para condiciones iniciales tal que  $2 \cos \theta_1 + \cos \theta_2 > 1$  no existe posibilidad de *flip* dado que el sistema no tiene energía suficiente.

---

<sup>1</sup> J. S. Heyl, <http://www.famaf.unc.edu.ar/~vmarconi/fiscomp/Double.pdf> (2007).

**Sugerencia 2:** Tal como se propone, generar los datos para la figura requiere aprox. 7hs de CPU (Intel Core 2 @ 2.83GHz). De acuerdo al tiempo (de CPU disponible) disminuya la resolución del gráfico. .

**Sugerencia 3:** Use en gnuplot `set pm3d map` para hacer mapas de color, y defina la siguiente paleta de colores:

```
set palette defined (0 "green", 10 "#000F00", 10 "#FF0000", \
100 "#310000", 100 "purple",1000 "#54025C",1000 "#0000FF", \
10000 "#000B70", 10000 "white",10001 "white")
además, utilice set cbrange [0:10000], set size ratio .5, set xrange
[-3:3] y set yrange [0:3].
```

4. El Hamiltoniano de Pullen-Edmonds consiste en dos osciladores armónicos de igual frecuencia  $\omega$  y masa  $m$ , acoplados por un término cuártico en las coordenadas:

entregar

posgrado

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2) + \alpha q_1^2 q_2^2 \quad (1)$$

(donde elegimos unidades tal que  $m = 1$  y  $\omega = 1$ ).

a) Integrar numéricamente las ecuaciones de movimiento usando el algoritmo de Runge-Kutta de 4to. orden para  $\alpha = 0,05$ . Particularice para valores de energía  $E = 5, 20$  y  $100$ , graficando coordenadas y momentos versus tiempo. (utilice el valor óptimo de  $h \equiv \Delta t$ , e integre hasta  $t = 200$ ). Como condición inicial utilice  $q_1 = 2$ ,  $p_1 = 0$ ,  $q_2 = 0$  y  $p_2 = \sqrt{2E - 4}$ .

b) Trazar las superficies de sección de Poincaré en el plano  $p_1, q_1$ , para los siguientes valores de energía:  $E = 5, 20, 100$ . Poner un punto cada vez que  $q_2 = 0$  (en la implementación es conveniente buscar los cambios de signo de  $q_2$ ) con  $p_2 > 0$ . Para la construcción de los gráficos elija al menos 50 condiciones iniciales para cada valor de energía, e integre hasta  $t_{final} = 15000$ .

c) Calcular el espectro de potencias para una órbita con energía  $E = 5$  y para una órbita con  $E = 100$ .