Actividad 8

Fernando Leyva Cárdenas

April 15, 2018

1 Introduccion

En sistemas dinámicos, el oscilador de van der Pol es un oscilador con amortiguamiento no lineal. Su evolución temporal obedece a una ecuación diferencial de segundo orden:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \mu(1 - x^2)\frac{dx}{dt} + x = 0$$

.

en la que x es la posición, función del tiempo t, y es un parámetro escalar que gobierna la no linealidad y el amortiguamiento. El oscilador de van der Pol fue descrito por el ingeniero y físico Balthasar van der Pol mientras trabajaba en Philips. Van der Pol encontró oscilaciones estables, que llamó oscilaciones de relajación, conocidas en la actualidad como ciclos límite, en circuitos que usaban válvulas de vacío. Cuando esos circuitos se hacen funcionar cerca del ciclo límite entran en acoplamiento y la señal entra en fase con la corriente. Van der Pol y su colega, van der Mark, informaron en el número de septiembre de 1927 de Nature que para determinadas frecuencias aparecía un ruido irregular, siempre cerca de las frecuencias de acoplamiento. Fue uno de los primeros descubrimientos experimentales de la Teoría del caos.

2 Resultados del oscilador no forzado

Hay dos regímenes de funcionamiento interesantes para el oscilador no forzado:

- Cuando $\mu = 0$, no hay amortiguamiento, y la ecuación queda:

  $$\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0$$

  .

  Es la fórmula del oscilador armónico simple sin pérdida de energía.

- Cuando $\mu > 0$, el sistema alcanzará un ciclo límite, en el que se conservará la energía. Cerca del origen $x = \frac{dx}{dt} = 0$ el sistema es inestable, y lejos del origen hay amortiguamiento.

3 El oscilador de van der Pol forzado

Utilizando una fuente de excitación sinusoidal Asin(t) la ecuación diferencial queda:

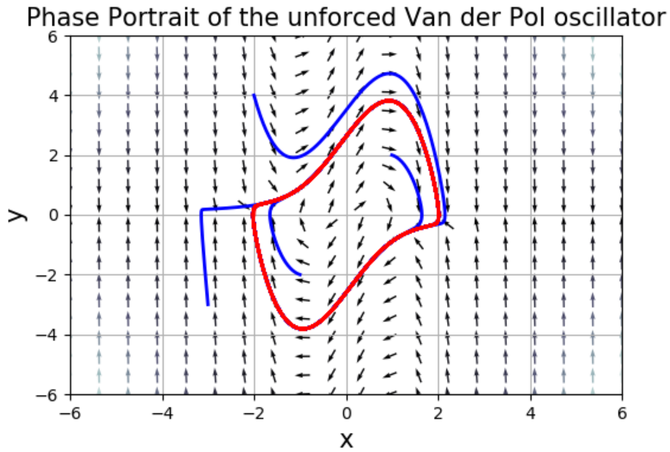
$$\frac{d^2x}{dt^2} - \mu(1 - x^2)\frac{dx}{dt} + x - Asin(wt) = 0$$

.

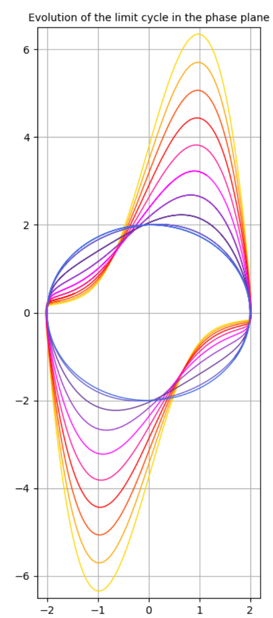
en la que A es la amplitud de la ecuación de onda y su velocidad angular.

4 resultados

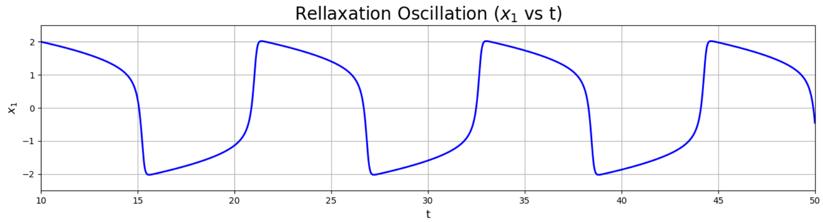
Retrato de fase del oscilador de Van der Pol no forzado, que muestra un ciclo límite y el campo de dirección:



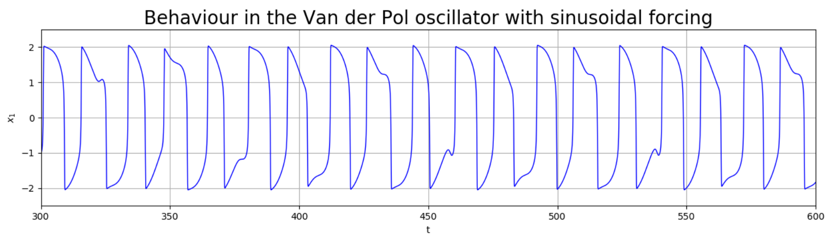
Ahora la evolución del ciclo límite en el plano de fase. El ciclo límite comienza como círculo y, con variación de μ, se vuelve cada vez más nítido. Un ejemplo de un oscilador de relajación. .



Ahora la oscilación de relajación en el oscilador Van der Pol sin forzamiento externo. El parámetro de amortiguación no lineal es igual a $\mu = 5$.



Ahora el comportamiento caótico en el oscilador Van der Pol con forzamiento sinusoidal. El parámetro de amortiguación no lineal es igual a $\mu = 8.53$, mientras que el forzamiento tiene una amplitud A = 1.2 y una frecuencia angular $\omega = 2\pi$ / 10.



5 En dos dimensiones

El teorema de Liénard se puede usar para demostrar que el sistema tiene un ciclo límite. Aplicando la transformación Liénard :

$$\dot{x} = \mu(x - 1/3x^3 - y)$$
$$\dot{y} = (1/\mu)(x)$$

6 Exploracion de soluciones

El codigo utilizado como en los ejercicios anteriores se utlizo para la definicion:

```
from scipy import array

def VanDerPol (X,t=0):
    x=X[0]
    y=X[1]
    a=X[0]
    b=X[1]
    c=X[0]
    d=X[1]
    e=X[0]
    f=X[1]
    g=X[0]
    h=X[1]
    i=X[0]
    j=X[1]
    k=X[0]
    l=X[1]
```

```
    m=X[0]
    n=X[1]
    o=X[0]
    p=X[1]
    q=X[0]
    r=X[1]
    dx=X[1]
    dy= u*(1-X[0]*X[0])*X[1]-X[0]
    return array ([dx,dy])
```

Con el fin de resolver su ecuacion diferencial; para obtener nuestra primera grafica se utilizo:

```
#Gráfica 1
figure(1, figsize=(10, 6))

xlabel('x', fontsize=15)
ylabel('y', fontsize=15)
grid(True)
lw = 2
plt.ylim(-6,6)
plt.xlim (-6,6)

plot(x,y, 'b', linewidth=lw)
plot(a,b, 'b', linewidth=lw)
plot(c,d, 'b', linewidth=lw)
plot(e,f, 'b', linewidth=lw)
plot(g,h, 'r', linewidth=lw)

title('Phase Portrait of the unforced Van der Pol oscillator', fontsize=15)
savefig('Graf1.png', dpi=100)
```

Teniendo por supuesto las condiciones del problema, en cambio para la segunda grafica se uso el siguiente codigo:

```
#Gráfica 2
figure(1, figsize=(3.8, 10))

grid(True)
lw = 1
plt.ylim(-6.5,6.5)
plt.xlim (-2.2,2.2)

plot(x,y, 'gold', linewidth=lw)
plot(a,b, 'orange', linewidth=lw)
plot(c,d, 'orangered', linewidth=lw)
plot(e,f, 'red', linewidth=lw)
plot(g,h, 'deeppink', linewidth=lw)
plot(i,j, 'magenta', linewidth=lw)
plot(k,l, 'darkorchid', linewidth=lw)
plot(m,n, 'rebeccapurple', linewidth=lw)
plot(o,p, 'slateblue', linewidth=lw)
plot(q,r, 'royalblue', linewidth=lw)

title('Evolution of the limit cycle in the phase plane', fontsize=10)
```

```
savefig('Graf2.png', dpi=100)

legend((r'u=4.0', r'u=3.5',r'u=3.0',r'u=2.5',r'u=2.0',
       r'u=1.5', r'u=1.0',r'u=0.5',r'u=0.1',r'u=0.01'), prop=FontProperties(size=10))
```

7 apendice

1. **Este ejercicio pareciera similar al desarrollado en las actividades 6 y 7. ¿Qué aprendiste nuevo?**graficas mas complejas
2. **¿Qué fue lo que más te llamó la atención del oscilador de Van der Pol?** la historia y funcionamiento
3. **Has escuchado ya hablar de caos. ¿Por qué sería importante estudiar este oscilador?**para poder entenderlo porque en el universo domina el caos
4. **¿Qué mejorarías en esta actividad?** bibliografias en español
5. **¿Algún comentario adicional antes de dejar de trabajar en Jupyter con Python?** fue divertido
6. **Cerramos la parte de trabajo con Python ¿Que te ha parecido?** muy interesante

8 Bibliografia

- wikipedia, URL:$https://en.wikipedia.org/wiki/Van_{d}er_{P}ol_{o}scillator$, 15/04/18
- scholarpedia, URL:$http://www.scholarpedia.org/article/Van_{d}er_{P}ol_{o}scillator$, 15/04/18
- scipy-cookbook, URL:$http://scipy-cookbook.readthedocs.io/items/LoktaVolterraTutorial.html$, 15/04/18