Resolución Detallada de Ejercicios

Análisis de Modelos Lineales
Alumno
Fernando José Mamani Machaca
Docente
Fred Torres Cruz

Ejercicio 1

Planteamiento

Se busca minimizar el costo de transferencia de datos entre dos distritos. La función objetivo y las restricciones son:

- Función objetivo: $C(x, y) = 4x + 6y$.
- Restricciones:

$$\begin{aligned} x + y &\leq 100, \\ x &\geq 10, \\ y &\geq 5, \\ x, y &\geq 0. \end{aligned}$$

1. Identificamos los valores mínimos de x y y que satisfacen sus restricciones individuales:
   - $x \geq 10$, por lo tanto $x = 10$.
   - $y \geq 5$, por lo tanto $y = 5$.
2. Verificamos si $x = 10$ y $y = 5$ satisfacen la restricción principal $x + y \leq 100$:

$$10 + 5 = 15 \leq 100. \checkmark$$

3. Calculamos el costo para estos valores:

$$C(10, 5) = 4(10) + 6(5) = 40 + 30 = 70.$$

Por lo tanto, el costo mínimo es **70 soles**.

Ejercicio 2

Planteamiento

Se busca minimizar el costo de contratación de analistas para cubrir requerimientos. La función objetivo y restricciones son:

- Función objetivo: $C(x, y) = 1500x + 3000y$.
- Restricciones:

$$\begin{aligned} x + y &\geq 8, \\ y &\geq 3, \\ x + y &\leq 12, \\ x, y &\geq 0. \end{aligned}$$

1. Determinamos los valores posibles para x y y que cumplan las restricciones:
   - De $y \geq 3$, se deduce que $y \in \{3, 4, 5, \dots\}$.
   - De $x + y \geq 8$ y $x + y \leq 12$, se tiene que:

   $$\max(8 - y, 0) \leq x \leq 12 - y.$$

2. Probamos combinaciones enteras que satisfagan las restricciones:

   $$(x, y) \in \{(5, 3), (4, 4), (3, 5)\}.$$

3. Calculamos el costo para cada combinación:

   $$\begin{aligned} C(5,3) &= 1500(5) + 3000(3) = 7500 + 9000 = 16500, \\ C(4,4) &= 1500(4) + 3000(4) = 6000 + 12000 = 18000, \\ C(3,5) &= 1500(3) + 3000(5) = 4500 + 15000 = 19500. \end{aligned}$$

4. El costo mínimo es $C(5, 3) = 16500$.

Por lo tanto, la contratación óptima es de **5 analistas juniors y 3 analistas seniors**.

Ejercicio 3

Planteamiento

Se busca maximizar la cobertura utilizando dos tipos de equipos. La función objetivo y restricciones son:

- Función objetivo: $S(x, y) = 50x + 65y$.
- Restricciones:

$$\begin{aligned} 3x + 4y &\leq 200, \\ x + y &\leq 40, \\ x, y &\geq 0. \end{aligned}$$

Resolución

1. Determinamos los puntos de vértice:
   - Punto de origen: $(0, 0)$ con $S(0, 0) = 0$
   - Punto donde $x + y = 40$:

   $$\begin{aligned} x = 0, y = 40 &: S(0, 40) = 50(0) + 65(40) = 2600 \\ y = 0, x = 40 &: S(40, 0) = 50(40) + 65(0) = 2000 \end{aligned}$$

   - Punto de intersección de las restricciones:

   $$\begin{aligned} 3x + 4y &= 200 \\ x + y &= 40 \end{aligned}$$

   Resolviendo simultáneamente:

   $$\begin{aligned} y &= 40 - x \\ 3x + 4(40 - x) &= 200 \\ 3x + 160 - 4x &= 200 \\ -x &= 40 \\ x &= 20, y = 20 \end{aligned}$$

   $S(20, 20) = 50(20) + 65(20) = 1000 + 1300 = 2300$

2. Verificamos las restricciones para el punto $(20, 20)$:

$$3(20) + 4(20) = 60 + 80 = 140 \leq 200 \checkmark$$
$$20 + 20 = 40 \leq 40 \checkmark$$

3. Comparamos los valores de la función objetivo:

$$S(0,0) = 0$$
$$S(0,40) = 2600$$
$$S(40,0) = 2000$$
$$S(20,20) = 2300$$

Por lo tanto, la solución óptima es **0 equipos del primer tipo y 40 equipos del segundo tipo**, con una cobertura máxima de **2600 unidades**.

Ejercicio 4

Planteamiento

El sistema a resolver por el método de Cramer es:

$$x + 2y = 40,$$
$$3x + y = 70.$$

Resolución

1. Matriz de coeficientes y determinante:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1(1) - 2(3) = -5.$$

2. Determinantes:

$$D_x = \begin{vmatrix} 40 & 2 \\ 70 & 1 \end{vmatrix} = 40(1) - 2(70) = -100,$$
$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 40 \\ 3 & 70 \end{vmatrix} = 1(70) - 40(3) = -50.$$

3. Soluciones:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-100}{-5} = 20,$$
$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-50}{-5} = 10.$$

4. Verificación:

$$20 + 2(10) = 40,$$
$$3(20) + 10 = 70.$$

Por lo tanto, $x = 20$ y $y = 10$.

Ejercicio 5

Planteamiento

El sistema de ecuaciones es:

$$2x + y + 3z = 20,$$
$$x + 4y + 2z = 23,$$
$$3x + 2y + z = 16.$$

Resolvemos usando Cramer.

Resolución

1. Determinante del sistema (D):

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -25.$$

2. Determinantes para D_x, D_y, D_z:

$$D_x = \begin{vmatrix} 20 & 1 & 3 \\ 23 & 4 & 2 \\ 16 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -45,$$
$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 20 & 3 \\ 1 & 23 & 2 \\ 3 & 16 & 1 \end{vmatrix} = -77,$$
$$D_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 20 \\ 1 & 4 & 23 \\ 3 & 2 & 16 \end{vmatrix} = -111.$$

3. Soluciones:

$$x = \frac{D_x}{D} = 1{,}8,$$
$$y = \frac{D_y}{D} = 3{,}08,$$
$$z = \frac{D_z}{D} = 4{,}44.$$

Los parámetros calibrados son $x = 1{,}8$, $y = 3{,}08$, $z = 4{,}44$.

Ejercicio 6

Planteamiento

El sistema de ecuaciones es:

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 8, \\ 2x - y + 4z &= 12, \\ -x + 3y + 2z &= 6. \end{aligned}$$

Resolución

1. Determinante del sistema (D):

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -20.$$

2. Determinantes para D_x, D_y, D_z:

$$D_x = \begin{vmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 12 & -1 & 4 \\ 6 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -40,$$
$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 2 & 12 & 4 \\ -1 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 20,$$
$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 2 & -1 & 12 \\ -1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 40.$$

3. Soluciones:

$$\begin{aligned}
x &= \frac{D_x}{D} = \frac{-40}{-20} = 2,\\
y &= \frac{D_y}{D} = \frac{20}{-20} = -1,\\
z &= \frac{D_z}{D} = \frac{40}{-20} = -2.
\end{aligned}$$

Interpretación:

- $x = 2$: Inversión en infraestructura (miles de soles).
- $y = -1$: Capacidad de generación (MW).
- $z = -2$: Reserva de potencia (MW).

Ejercicio 7

Planteamiento

El sistema lineal es:

$$\begin{aligned}
x + y &= 350,\\
2x - y &= 100.
\end{aligned}$$

Resolución por Gauss-Jordan

1. Representamos el sistema como una matriz aumentada:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 350 \\ 2 & -1 & 100 \end{pmatrix}.$$

2. Realizamos operaciones elementales para reducir la matriz:

$$\begin{aligned}
F_2 \leftarrow F_2 - 2F_1 &: \begin{pmatrix} 1 & 1 & 350 \\ 0 & -3 & -600 \end{pmatrix},\\
F_2 \leftarrow \frac{F_2}{-3} &: \begin{pmatrix} 1 & 1 & 350 \\ 0 & 1 & 200 \end{pmatrix},\\
F_1 \leftarrow F_1 - F_2 &: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 150 \\ 0 & 1 & 200 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

3. Las soluciones son:

$$\begin{aligned}
x &= 150,\\
y &= 200.
\end{aligned}$$

Interpretación:

- $x = 150$: turistas estimados en Ollantaytambo (en miles).
- $y = 200$: turistas estimados en Poroy (en miles).

Ejercicio 8

Planteamiento

El sistema matricial es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 70 \\ 80 \\ 60 \end{pmatrix}.$$

Resolvemos por el método de Gauss-Jordan.

Resolución

1. Escribimos la matriz aumentada y aplicamos operaciones elementales:

$$\begin{aligned} F_1 &\leftarrow F_1, \\ F_2 &\leftarrow F_2 - 2F_1, \\ F_3 &\leftarrow F_3 - F_1, \\ F_4 &\leftarrow F_4. \end{aligned}$$

2. Reducimos hasta obtener forma escalonada y verificamos soluciones:

$$\begin{aligned} A &= 20, \\ B &= 15, \\ C &= 15, \\ w &= 15. \end{aligned}$$

Interpretación: Proporciones óptimas para la mezcla diaria.

Ejercicio 9

Planteamiento

Una agencia de marketing desea minimizar el costo de servidores. La función objetivo y restricciones son:

- Función objetivo: $C(x, y) = 400x + 700y$
- Restricciones:

$$\begin{aligned} 200x + 300y &\geq 4000 \text{ (procesamiento mínimo)}, \\ 400x + 700y &\leq 7000 \text{ (presupuesto)}, \\ x, y &\geq 0 \text{ (no negatividad)}. \end{aligned}$$

1. Simplificamos las restricciones:

$$\begin{aligned} 200x + 300y \geq 4000 &\rightarrow 2x + 3y \geq 40 \\ 400x + 700y \leq 7000 &\rightarrow 4x + 7y \leq 70 \end{aligned}$$

2. Encontramos los puntos de intersección:
   - Para $2x + 3y = 40$:
     - Si $x = 0$: $y = \frac{40}{3} \approx 13{,}33$
     - Si $y = 0$: $x = 20$
   - Para $4x + 7y = 70$:
     - Si $x = 0$: $y = 10$
     - Si $y = 0$: $x = 17{,}5$

3. Punto de intersección entre las dos rectas:

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 40 \\ 4x + 7y &= 70 \end{aligned}$$

   Multiplicando la primera ecuación por 2:

$$\begin{aligned} 4x + 6y &= 80 \\ 4x + 7y &= 70 \end{aligned}$$

Restando:

$$-y = 10$$
$$y = 10$$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned} 2x + 3(10) &= 40 \\ 2x &= 10 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

4. Evaluamos la función objetivo en el punto $(5, 10)$:

$$C(5, 10) = 400(5) + 700(10) = 2000 + 7000 = 9000$$

Por lo tanto, la solución óptima es contratar **5 servidores tipo 1 y 10 servidores tipo 2**, con un costo total de **9000 soles**.

Ejercicio 10

Planteamiento

Se busca maximizar la ganancia total de almacenamiento:

- Función objetivo: $G(x, y) = 20x + 15y$
- Restricciones:

$$\begin{aligned} 3x + y &\leq 120 \text{ (capacidad)}, \\ x &\geq 10 \text{ (mínimo software)}, \\ x, y &\geq 0 \text{ (no negatividad)}. \end{aligned}$$

Resolución Paso a Paso

1. Identificamos los puntos críticos:
   - Por la restricción $x \geq 10$, empezamos desde $x = 10$
   - Para $x = 10$, de $3x + y \leq 120$:
   $$3(10) + y \leq 120 \rightarrow y \leq 90$$
   - El punto $(10, 90)$ es factible
2. Para $x > 10$:
   - De $3x + y \leq 120$:
   $$y \leq 120 - 3x$$
3. La función objetivo en términos de x:
$$G(x) = 20x + 15(120 - 3x) = 20x + 1800 - 45x = 1800 - 25x$$
4. Como el coeficiente de x es negativo (-25), la función decrece al aumentar x
5. Por lo tanto, el máximo se alcanza en $x = 10$
6. Para $x = 10$:
$$\begin{aligned} y &= 90 \\ G(10, 90) &= 20(10) + 15(90) \\ &= 200 + 1350 \\ &= 1550 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución óptima es almacenar **10 unidades de software local y 90 cursos virtuales**, generando una ganancia máxima de **1550 soles**.