Ondas Planas (Parte 3)

Até agora, estudamos ondas planas em meios que não apresentam perdas, ou seja, meios não absorventes. Na verdade, o único meio que não apresenta perda alguma é o vácuo, sendo que todos os outros meios (materiais), sejam dielétricos, sejam condutores, absorvem energia da onda eletromagnética neles propagante e isso tem como conseqüência um decaimento exponencial na amplitude da onda plana ao longo de sua direção de propagação. Naturalmente essa absorção de energia da onda pelo meio pode ser grande ou muito pequena, dependendo da freqüência (da onda), do material, da temperatura..

O completo entendimento dos processos de dispersão e absorção de uma onda eletromagnética num meio material exige o uso da teoria quântica, porém, muita coisa pode ser entendida e descrita através da Teoria Clássica do eletromagnetismo.

Iremos iniciar nosso estudo considerando que o meio material em questão apresenta condutividade σ. Para tanto, vamos nos lembrar que em nossos estudos sobre ondas planas, consideramos as Eqs. de Maxwell para os fasores $\vec{E}(\vec{r})$ e $\vec{H}(\vec{r})$ em meios L.H.I e sem fontes, ou seja, colocamos a densidade de carga livre $\rho_f = 0$ e a densidade de corrente livre $\vec{J}_f = 0$:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \cancelto{0}{\frac{\rho_f(\vec{r})}{\varepsilon}} \qquad (1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) = -j\omega\mu \vec{H}(\vec{r}) \qquad (2)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H}(\vec{r}) = 0 \qquad (3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{r}) = \cancelto{0}{\vec{J}_f(\vec{r})} + j\omega\varepsilon \vec{E}(\vec{r}), \qquad (4)$$

e a partir das eqs(1-4) obtivemos as equações de Helmholtz p/ $\vec{E}(\vec{r})$ e $\vec{H}(\vec{r})$:

$$\nabla^2 \vec{E}(\vec{r}) + k^2 \vec{E}(\vec{r}) = 0 \qquad (5)$$

$$\nabla^2 \vec{H}(\vec{r}) + k^2 \vec{H}(\vec{r}) = 0 \qquad (6)$$

$$\text{com } k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} \qquad (7)$$

Agora, vamos assumir que o meio material em questão continua sendo L.I.H., porém possui condutividade σ.

Uma forma de levar essa condutividade em conta, apesar de pouco elegante++, é colocar $\vec{J}_f = \sigma\vec{E}$ na eq (4), ficando com as eqs (1-3) mais a eq (4') a seguir:

++ Em breve veremos que não é necessário assumir $\vec{J}_f = \sigma\vec{E}$, deixando $\rho_f = 0$ e $\vec{J}_f = 0$ (como é esperado p/ um meio sem densidade de carga livre e sem densidade de corrente livre), para tanto estudaremos o modelo de Lorentz p/ a permissividade elétrica ε.

$$\vec{\nabla}\times\vec{H}(\vec{r}) = \sigma\vec{E}(\vec{r}) + j\omega\varepsilon\vec{E}(\vec{r})$$

$$= j\omega\left(\varepsilon + \frac{\sigma}{j\omega}\right)\vec{E}(\vec{r})$$

$$= j\omega\underbrace{\left(\varepsilon - j\frac{\sigma}{\omega}\right)}_{\equiv\varepsilon_c}\vec{E}(\vec{r})$$

$$= j\omega\varepsilon_c\vec{E}(\vec{r}), \quad (4')$$

onde definimos a permissividade complexa $\varepsilon_c = \varepsilon - j\sigma/\omega$.

Como (4') tem forma semelhante à (4), com ε_c no lugar de ε, podemos usar as eqs (1,2,3) e (4') para obter eqs de Helmholtz p/ $\vec{E}(\vec{r})$ e $\vec{H}(\vec{r})$ semelhantes às eqs (5,6), só que agora com um "k" complexo dado por $k_c = \omega\sqrt{\mu\varepsilon_c}$:

$\Longrightarrow$

$$\nabla^2 \vec{E}'(\vec{r}') + k_c^2 \vec{E}'(\vec{r}') = 0 \quad (5')$$

$$\nabla^2 \vec{H}'(\vec{r}') + k_c^2 \vec{H}'(\vec{r}') = 0 \quad (6')$$

$$k_c = \omega\sqrt{\mu\varepsilon_c} = \omega\sqrt{\mu\left(\varepsilon - j\frac{\sigma}{\omega}\right)}, \quad (7')$$

portanto, as soluções de ondas planas p/ esse caso são semelhantes àquelas que estudamos, só que com $k_c = \omega\sqrt{\mu\varepsilon_c}$ no lugar de $k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$. e $\eta_c = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_c}}$ no lugar de $\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$.

Por exemplo, para uma onda plana que se propaga na direção e sentido dados por $\hat{k}$, num meio LIH com condutividade σ, teremos:

$$\vec{E}'(\vec{r}') = E_0 e^{-jk_c\hat{k}\cdot\vec{r}'}\hat{e} \qquad \underline{\underline{(\hat{e}\perp\hat{k})}}$$

$$\vec{H}'(\vec{r}') = \frac{E_0}{\eta_c} e^{-jk_c\hat{k}\cdot\vec{r}'}(\hat{k}\times\hat{e})$$

com $k_c = \omega\sqrt{\mu\varepsilon_c}$ e $\eta_c = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_c}}$ e $\varepsilon_c = \varepsilon - j\sigma/\omega$.

Repare que como k_c é complexo, sua parte imaginária em $e^{-jk_c \hat{k} \cdot \vec{r}}$ dará origem a um decaimento exponencial ao longo da direção e sentido dados por $\hat{k}$.

Não se preocupe, faremos tudo isso em detalhes nas próximas páginas, mas antes iremos fazer uma pequena mudança de notação. A partir de agora, no lugar de k_c, usaremos a chamada constante de propagação, γ, definida como:

$$\gamma \equiv j k_c \qquad (8)$$

Obviamente, essa nova notação não é realmente necessária e pode parecer (e em minha opinião, é...) uma perda de tempo. De fato, a única justificativa para seu uso aqui é que tal notação é frequentemente usada no curso de ondas guiadas, que você fará no próximo semestre (assim espero...).

Dito isso, passemos então ao assunto da aula.

⟹

ATENÇÃO, EM ALGUNS MOMENTOS, POR SIMPLICIDADE, ESCREVEMOS **E**(**r**) como **E.**

Ondas Planas em Meios Absorventes

Em meios absorventes $k \longrightarrow k_c$

$$\nabla^2 \vec{E} + k_c^2 \vec{E} = 0 \qquad (1)$$

onde $k_c = \omega\sqrt{\mu \varepsilon_c}$ (2) $\varepsilon_c = \varepsilon - j\dfrac{\sigma}{\omega}$ (3)

$$= \omega\sqrt{\mu\varepsilon}\left[1 - j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right]^{1/2}$$

É comum definir:

$$\gamma \equiv j k_c = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon_c}$$

$$= j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\left[1 - j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right]^{1/2} \qquad (4)$$

se usarmos $\varepsilon_c = \varepsilon' - j\varepsilon''$:

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon'}\left[1 - j\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}\right]^{1/2} \qquad (5)$$

$$\boxed{\gamma = \alpha + j\beta} \qquad (6)$$

se $\sigma = 0$ $(\varepsilon'' = 0) \longrightarrow \alpha = 0$ e $\beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = k$

Com isso:

$$\nabla^2 \vec{E} - \gamma^2 \vec{E} = 0 \qquad (7)$$

Solução de uma onda plana propagante na direção "+z":

$$\vec{E} = E_0 e^{-\gamma z} \hat{e} = E_0 e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} \hat{e} \qquad (8)$$

α : cte de atenuação (Np/m)

β : cte de fase (rad/m)

→ Repare em (8) o decaimento exponencial ao longo de "z"!

Das equações (4) e (6):

$$\begin{cases} \alpha = \omega \sqrt{\dfrac{\mu\varepsilon}{2}} \left[\sqrt{1 + \left(\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2} - 1 \right]^{1/2} & (9) \\ \beta = \omega \sqrt{\dfrac{\mu\varepsilon}{2}} \left[\sqrt{1 + \left(\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2} + 1 \right]^{1/2} & (10) \end{cases}$$

Usando as equação de Maxwell $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = 0$ (lei de gauss c/ $\rho_t = 0$)
(como antes)

$$\longrightarrow \boxed{\hat{e} \perp \hat{z}} \qquad (11)$$

e

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{\eta_c} \hat{z} \times \vec{E}(\vec{r}) \quad (12) \quad ; \quad \eta_c = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_c}} \qquad (13)$$

como η_c é complexo vemos que $\vec{H}$ e $\vec{E}$ não estão em fase.

Campos instantâneos:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = Re\left[E_o e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} e^{j\omega t} \hat{e}\right] \qquad (\hat{e} \perp \hat{z})$$

assumindo E_o real

$$= E_o e^{-\alpha z} \cos(\beta z - \omega t)\, \hat{e}$$

$$= E_o e^{-\alpha z} \cos[\beta(z - \bar{c}t)]\, \hat{e} \qquad (14)$$

$$\bar{c} = \frac{\omega}{\beta}$$ Velocidade de fase

$$\vec{H}(\vec{r},t) = Re\left[\frac{1}{\eta_c} \hat{z} \times \vec{E}(\vec{r}) e^{j\omega t}\right]$$

$$\eta_c = |\eta_c| e^{j\theta_\eta}$$

$$= Re\left[\frac{E_o}{|\eta_c|} e^{-j\theta_\eta} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} e^{j\omega t} \hat{z} \times \hat{e}\right]$$

assumindo E_o real

$$= \frac{E_o}{|\eta_c|} \cdot e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z - \theta_\eta)\, \hat{z} \times \hat{e} \qquad (15)$$

com $\hat{e} \perp \hat{z}$

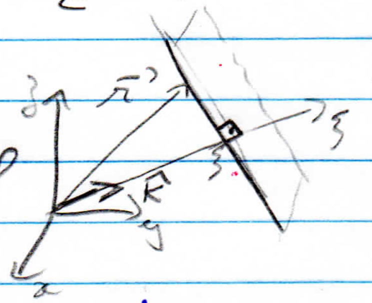
Onda plana propagando-se numa direcção qualquer num meio absorvente:

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_0\, e^{-\gamma \hat{k}\cdot\vec{r}}\, \hat{e} \qquad \gamma = \alpha + j\beta$$

$$= E_0\, e^{-\alpha \hat{k}\cdot\vec{r}}\, e^{-j\beta \hat{k}\cdot\vec{r}}\, \hat{e} \qquad \xi \equiv \hat{k}\cdot\vec{r}$$

$$= E_0\, e^{-\alpha\xi}\, e^{-j\beta\xi}\, \hat{e}$$

decaimento exponencial ao longo do eixo ξ (i.e, direcção $\hat{k}$)



com $\hat{e} \perp \hat{k}$ (pela lei de Gauss)

e

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{\eta_c}\, \hat{k} \times \vec{E}(\vec{r}) \qquad \eta_c = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_c}}$$

Campos instantâneos:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = E_0\, e^{-\alpha \hat{k}\cdot\vec{r}} \cos\left(\beta \hat{k}\cdot\vec{r} - \omega t\right) \hat{e}$$

$$= E_0\, e^{-\alpha\xi} \cos\left[\beta(\xi - \bar{c}\,t)\right] \hat{e}$$

onde $\xi = \hat{k}\cdot\vec{r}$ e $\bar{c} = \frac{\omega}{\beta}$

vel. de fase

$$\vec{H}(\vec{r},t) = \frac{1}{|\eta_c|}\, e^{-\alpha\xi} \cos\left(\omega t - \beta\xi - \theta_\eta\right) \hat{k} \times \hat{e}$$

com $\hat{e} \perp \hat{k}$

Passaremos agora a obter expressões aproximadas para α e β em casos de dielétricos de baixa perda e em casos de bons condutores.

Dielétricos com baixas perdas

Um dielétrico com baixa perda é um bom (mas imperfeito) isolante, com uma condutividade não nula:

$$\varepsilon'' << \varepsilon' \qquad \varepsilon = \varepsilon' - j\varepsilon''$$

$$\downarrow$$

$$\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} << 1$$

Temos que:

$$\gamma = \alpha + j\beta = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon'}\left(1 - j\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}\right)^{1/2}$$

se $\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} << 1$, mostra-se que:

$$\begin{cases} \alpha \simeq \dfrac{\omega\varepsilon''}{2}\sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon'}} & (Np/m) \\ \beta \simeq \omega\sqrt{\mu\varepsilon'}\left[1 + \dfrac{1}{8}\left(\dfrac{\varepsilon''}{\varepsilon'}\right)^2\right] & (rad/m) \end{cases}$$

A impedância intrínseca de um bom dielétrico é uma quantidade complexa:

$$\eta_c = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon'}}\left(1 - j\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}\right)^{-1/2}$$

$$\simeq \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon'}}\left(1 + j\frac{\varepsilon''}{2\varepsilon'}\right)$$

$\therefore$ $\vec{E}$ e $\vec{H}$ não estão em fase no tempo.

A velocidade de fase v_f (u_p no Cheng) vale:

$$\overline{\varepsilon} = \frac{\omega}{\beta} \simeq \frac{\omega}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon'}\left[1 + \frac{1}{8}\left(\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}\right)^2\right]}$$

$$\simeq \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon'}}\left[1 - \frac{1}{8}\left(\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}\right)^2\right]$$

Obs: Aqui, estamos usando o símbolo $\overline{\varepsilon}$ p/ designar a velocidade de fase, mas outras letras (símbolos) também são usadas, como v_f e u_p.

Bons Condutores

Nesse caso temos que:

$$\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \gg 1 \qquad (\varepsilon'' \gg \varepsilon')$$

Assim:

$$\gamma = \alpha + j\beta = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon'}\left[1 - j\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}\right]^{1/2}$$

$$= j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\left[1 + \frac{\sigma}{j\omega\varepsilon}\right]^{1/2}$$

$$\approx j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{\frac{\sigma}{j\omega\varepsilon}}$$

$$= \sqrt{j}\sqrt{\omega\mu\sigma}$$

$$= \frac{1+j}{\sqrt{2}}\sqrt{\omega\mu\sigma}$$

Portanto, em um bom condutor:

$$\alpha \approx \beta \approx \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = \sqrt{\pi f \mu \sigma}$$

α e β são aproximadamente iguais.

$$\varepsilon_c = \varepsilon' - j\varepsilon'' \approx -j\varepsilon'' = -j\frac{\sigma}{\omega}$$

A impedância intrínseca de um bom condutor vale:

$$\eta_c = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_c}} \simeq \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}} = (1+j)\sqrt{\frac{\pi f \mu}{\sigma}}$$

$$= \underbrace{(1+j)}_{e^{j\pi/4}\cdot\sqrt{2}} \frac{\alpha}{\sigma}$$

∴ o campo $\vec{H}$ está atrasado (defasado) de 45° com relação ao campo $\vec{E}$.

A velocidade de fase p/ um bom condutor vale:

$$\bar{c} = \frac{\omega}{\beta} \simeq \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}} \quad (m/s)$$

NÃO é linear com ω!! (Dispersão)

Exemplo: Caso do cobre

$$\sigma = 5{,}80 \times 10^7 \, S/m$$

$$\mu = 4\pi \times 10^{-7} \, H/m$$

$$\therefore \bar{c} = 720 \, m/s \text{ em } 3\,MHz.$$

O comprimento de onda:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = 2\sqrt{\frac{\pi}{f\mu\sigma}} \quad (m)$$

No cobre, em $f = 3\,MHz$, $\lambda = 0.24\,mm$

(sendo que no vácuo $\lambda \simeq 100\,m$ p/ $f = 3\,MHz$)

Repare que diferença!?

Importante: Para altas frequências α num bem condutor tende a ser muito grande.

Profundidade de penetração:

$$e^{-\alpha z} \xrightarrow{z=?} e^{-1} \longrightarrow \text{quando } z = \frac{1}{\alpha} \equiv \delta$$

(distância na qual a amplitude inicial da onda cai de $1/e$.)

Para o cobre em $3\,MHz$:

$$\alpha = \sqrt{\pi f \mu \sigma} = 2.62 \times 10^4\ Np/m$$

$$\therefore \delta = \frac{1}{\alpha} = 0.038\ mm.$$

Em $10\,GHz \longrightarrow \delta = 0.66\ \mu m$.

$$\rightarrow \boxed{\delta = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\beta} = \frac{\lambda}{2\pi}}$$

(para um bom condutor)