Equations de Maxwell microscopiques

$\vec{E}(M,t)$ champ électrique
$\vec{B}(M,t)$ champ magnétique

a) Equations de Maxwell : ♡

- $\boxed{\overrightarrow{rot}\ \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$ (Maxwell - Faraday)

- $\boxed{\mathrm{div}\ \vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}}$ (Maxwell- Gauss)

- $\boxed{\overrightarrow{rot}\ \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$ (Maxwell - Ampère)

- $\boxed{\mathrm{div}\ \vec{B} = 0}$ (Maxwell - flux)

avec
$$\begin{cases} \mu_0 \varepsilon_0 c^2 = 1 \\ \overrightarrow{rot}\ \vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \\ \mathrm{div}\ \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \end{cases}$$

$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$ en coordonnées cartésiennes

Rmq: On note parfois $\vec{j_D} = \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ = "courant de déplacement"

Maxwell - Ampère : $\overrightarrow{rot}\ \vec{B} = \mu_0 (\vec{j} + \vec{j_D})$

Réécrivons les équations de Maxwell avec $\vec{\nabla}$:

- $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
- $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$
- $\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$
- $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$

équations LINÉAIRES $\longrightarrow$ on peut appliquer le principe de superposition

Méthode : Obtenir $\vec{B}$ connaissant $\vec{E}$:

a) Écrire $\vec{\text{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

b) $\vec{B}(M,t) = \vec{B}(M,t_0) + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\, dt$

c) Vérifier que $\text{div}\,\vec{B} = 0$

Méthode : **Obtenir $\vec{E}$ connaissant $\vec{B}$ et $\vec{j}$:**

a) Ecrire $\vec{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

b) $\vec{E}(M,t) = \vec{E}(M,t_0) + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} dt$

c) Vérifier que $\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

Rapel : 1) Force de Lorentz : $\boxed{\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})}$

2) Vecteur densité volumique de courant : $\vec{j}$ en $A \cdot m^{-2}$

$$\vec{j} = \sum_{i=1}^{N} n_i q_i \vec{v_i}$$

si le milieu est constitué de N familles de porteurs de charges, chaque famille étant caractérisée en M à t par sa densité particulaire

en m^{-3} $n_i(M,t)$ et la vitesse d'ensemble $\vec{v_i}(M,t)$ de ses particules de charge q_i.

3) Loi d'Ohm locale : $\boxed{\vec{j} = \gamma \vec{E}}$ vrai dans un milieu conducteur ohmique (ex : plasma)

à γ = conductivité électrique en $\Omega^{-1} \cdot m^{-1}$
$= S \cdot m^{-1}$

Rappels d'analyse vectorielle :

- Laplacien scalaire :

$$\Delta \phi = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \phi)$$
$$= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$ en coordonnées cartésiennes

- Laplacien vectoriel : Si $\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$,

$$\Delta \vec{E} = \begin{pmatrix} \Delta E_x \\ \Delta E_y \\ \Delta E_z \end{pmatrix}$$

- $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$ (*)

- $\vec{\mathrm{rot}} (\vec{\mathrm{rot}} \, \vec{E}) = \vec{\mathrm{grad}} (\mathrm{div} \, \vec{E}) - \Delta \vec{E}$

car $\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \underbrace{(\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla})}_{\Delta} \vec{E}$

((*) avec $\vec{a} = \vec{b} = \vec{\nabla}$
$\vec{c} = \vec{E}$)

- Pour tout champ vectoriel $\vec{V}$, $\mathrm{div} (\vec{\mathrm{rot}} \, \vec{V}) = 0$

b) Equation locale de conservation de la charge : $\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0\right)$

D'après le rappel d'analyse vectorielle,

$\operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{B}) = 0$ ie $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) = 0$ (1)

Or, d'après l'équation de Maxwell - Ampère :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

En passant à la divergence dans l'équation :

$$(2) \quad \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) = \mu_0 (\vec{\nabla} \cdot \vec{j}) + \mu_0 \varepsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$$

Comme $\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \overset{\text{Maxwell-Gauss}}{=} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho}{\varepsilon_0}\right)$

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (3)$$

(1), (2), (3) $\Rightarrow$ $\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0}$

c) Equation de propagation,

Ondes planes

(- relation de dispersion $k = f(\omega)$

- polarisations : rectiligne, circulaire, uniforme)

Ondes sphériques

! A partir d'ici, on se place dans

LE VIDE !

■ 1 Équations de propagation des champs dans une région vide de charges et de courants

☐ **En quoi le couplage spatio-temporel entre champ électrique et champ magnétique vu dans le chapitre 7 est-il responsable du phénomène de propagation ?**

Pour le comprendre, commençons par écrire les équations de Maxwell dans un milieu vide de charges et de courants :

Équations de Maxwell dans le « vide »

Dans un milieu vide de charges et de courants, les équations de Maxwell deviennent :

- $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E}(M,t) = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}(M,t)$
- $\text{div}\,\vec{E}(M,t) = 0$
- $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B}(M,t) = \mu_0\varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}(M,t)$
- $\text{div}\,\vec{B}(M,t) = 0$

Découplons ces équations afin de faire apparaître une équation de propagation qui serait satisfaite uniquement par le champ électrique.

Prenons le rotationnel de l'équation de Maxwell-Faraday (on peut permuter l'opération de dérivée spatiale et temporelle) : $\overrightarrow{\text{rot}}\,(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E}) = -\overrightarrow{\text{rot}}\left(\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\dfrac{\partial(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B})}{\partial t}$.

Utilisons l'équation de Maxwell-Ampère pour remplacer $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B}$ par $\mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ ainsi que l'expression du laplacien vectoriel : $\overrightarrow{\text{rot}}\,(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E}) = \overrightarrow{\text{grad}}\,(\text{div}\,\vec{E}) - \Delta\,\vec{E}$. Or, d'après Maxwell-Gauss, $\text{div}\,\vec{E} = 0$.

On obtient ainsi $\Delta\,\vec{E} - \mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \Delta\,\vec{E} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$.

On peut procéder de manière analogue pour le champ magnétique.

Méthode 8.1 : Comment découpler les équations de Maxwell dans le « vide »

Pour déterminer l'équation de propagation d'un des deux champs $\vec{E}$ ou $\vec{B}$:

- Écrire l'équation de Maxwell-Faraday (pour $\vec{E}$) ou de Maxwell-Ampère (pour $\vec{B}$).
- En prendre le rotationnel et permuter l'ordre des opérations de dérivées spatiales et temporelles.
- Faire apparaître le laplacien vectoriel de $\vec{E}$ ou de $\vec{B}$ en utilisant la formule d'analyse vectorielle $\overrightarrow{\text{rot}}\,(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{G}) = \overrightarrow{\text{grad}}\,(\text{div}\,\vec{G}) - \Delta\,\vec{G}$. Simplifier par utilisation de l'équation de Maxwell-Gauss (pour $\vec{E}$) ou de Maxwell-Flux (pour $\vec{B}$).
- Utiliser l'équation de Maxwell-Ampère (pour $\vec{E}$) ou de Maxwell-Faraday (pour $\vec{B}$) pour finir de découpler les deux champs et obtenir l'équation de propagation.

➔ Exercice (8.1)

On aboutit ainsi aux équations de propagation identiques pour $\vec{E}$ et $\vec{B}$ dans un milieu vide de charges et de courants.

Équations de propagation dans le « vide »

Dans un milieu vide de charges et de courants, les champs électrique et magnétique vérifient les équations de propagation suivantes :

- $\Delta \vec{E} - \mu_0\varepsilon_0 \dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \Delta \vec{E} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$ avec $\operatorname{div} \vec{E} = 0$
- $\Delta \vec{B} - \mu_0\varepsilon_0 \dfrac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \Delta \vec{B} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$ avec $\operatorname{div} \vec{B} = 0$

Ces équations sont appelées équations de d'Alembert vectorielles à trois dimensions. Elles sont caractéristiques d'un phénomène de propagation à la célérité $c = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$.

Grâce à ces équations, Maxwell a prédit l'existence d'ondes électromagnétiques pouvant se propager à la célérité c dans le « vide », prédiction confirmée par l'expérience de Hertz.

La comparaison de cette célérité $\dfrac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$ avec la détermination expérimentale de plus en plus précise de la vitesse de propagation de la lumière dans le vide a conduit les physiciens du XIX^e siècle à assimiler la lumière à un phénomène électromagnétique.

□ Quelles sont les propriétés de cette équation de propagation ?

- Cette équation de propagation est une équation linéaire : on pourra utiliser le **principe de superposition** et **la notation complexe**.
- Cette équation couple les dépendances spatiales et temporelles des champs, ce qui est responsable du phénomène de propagation. C'est une équation du second ordre pour les variables spatiales et temporelles.
- Elle est valable dans tout référentiel galiléen ce qui implique l'invariance de la célérité c par changement de référentiel : la vitesse de propagation de la lumière dans le vide ne dépend pas du référentiel galiléen d'étude. Cette conséquence est en accord avec la théorie de la relativité restreinte.
- Contrairement aux ondes mécaniques abordées en première année, les ondes électromagnétiques possèdent la singularité de pouvoir se propager dans le vide sans support matériel.

□ Quelles sont les formes possibles des solutions de cette équation de propagation ?

Les solutions de cette équation de propagation vectorielle à trois dimensions sont très variées, de par leur structure et leur dépendance spatiale !

Revenons au texte introductif. Nous pouvons considérer que le champ électromagnétique rayonné par le Soleil au voisinage de ce dernier ne dépend que du temps et de la distance r du point M considéré au centre S du Soleil : $(\vec{E}(r,t), \vec{B}(r,t))$. Ce champ est, à t fixé, uniforme sur une sphère centrée sur S : nous parlerons alors d'onde **sphérique**. Nous pourrions ainsi chercher comme solutions de l'équation de d'Alembert des ondes sphériques.

En nous éloignant suffisamment du Soleil et en nous plaçant au voisinage d'un point O situé sur une surface d'onde, nous pouvons localement assimiler cette surface à un plan (figure 8.1) : c'est ce qu'il se passe au voisinage de la Terre. En choisissant le vecteur $\vec{u}_x$ du repère cartésien suivant la normale de cette surface au point O, le champ électromagnétique ne dépend plus que de la composante cartésienne x du point M considéré par rapport à l'origine O : $(\vec{E}(x,t), \vec{B}(x,t))$. Il est uniforme à t fixé dans tout plan orthogonal à $\vec{u}_x$: nous parlerons d'onde **plane**. Dans le cadre du programme, nous restreignons notre étude aux ondes planes solutions de l'équation de d'Alembert.

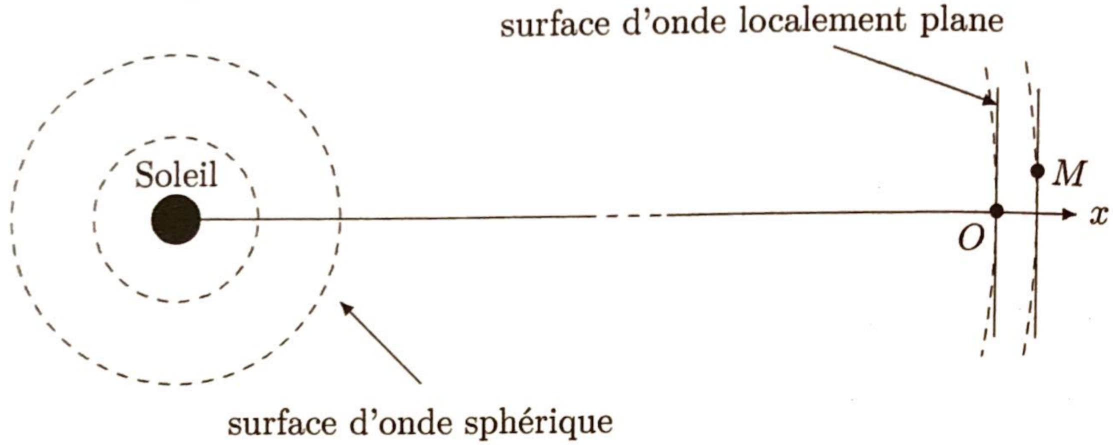


Figure 8.1. Nature de l'onde émise par le Soleil.

Définition : Onde plane

Une onde sera qualifiée d'**onde plane** si le champ de scalaires $f(M,t)$ ou de vecteurs $\vec{A}(M,t)$ caractérisant le signal physique correspondant reste uniforme dans tout plan perpendiculaire à une direction fixe de vecteur unitaire $\vec{u}$ à t fixé. Un tel plan constitue un **plan d'onde**.

Considérons $f(M,t) = f(x,t)$: la fonction f reste uniforme à t fixé dans tout plan $x =$ Cste perpendiculaire à la direction fixe $\vec{u}_x$: $f(x,t)$ est une onde plane et les plans $x =$ Cste sont ses plans d'onde.

2 Onde plane dans l'espace vide de charges et de courants

En coordonnées cartésiennes, les projections des équations de propagation donnent pour chacune des six composantes du champ électromagnétique une équation **scalaire** de la forme :

$$\Delta f(M,t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(M,t) = 0$$

avec f représentant une des six composantes du champ électromagnétique. L'équation ainsi obtenue est une équation de **d'Alembert scalaire à trois dimensions.**

Simplifions l'étude en supposant que $f(M,t)$ ne dépend que de la composante x : $f(x,t)$ représente une onde plane scalaire. On obtient une équation de **d'Alembert scalaire à une dimension** :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,t) = 0$$

□ **Peut-on trouver comme solutions de cette équation scalaire des ondes planes progressives ?**

Rappel : Onde progressive

Une onde progressive est la propagation de proche en proche dans l'espace, sans transport de matière, de variations temporelles d'un signal, générées au voisinage d'un point.
La forme mathématique d'une onde plane progressive se propageant sans déformation dans le sens et la direction de l'axe (Ox) à la célérité v est la suivante : $y(x,t) = g(t - x/v)$, comme vu en première année.

Pour répondre à la question posée, nous allons introduire le changement de variable suivant : $u = t - x/c$ et $w = t + x/c$. Nous avons ainsi $t = \frac{1}{2}(u+w)$ et $x = \frac{1}{2}c(w-u)$. La fonction $f(x,t)$ solution de l'équation de d'Alembert scalaire à une dimension peut alors s'écrire en fonction des variables u et w : $f(x,t) = F(u,w)$.

En utilisant les dérivées composées et en réinjectant leurs expressions dans l'équation de d'Alembert, nous pourrions montrer que F vérifie l'équation suivante :

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial F}{\partial w}\right) = 0$$

Cette équation se résout aisément en $F(u,w) = g(u) + h(w)$ avec g et h fonctions quelconques continues et deux fois dérivables.

Solution générale de l'équation de d'Alembert scalaire à une dimension x

La solution générale de l'équation $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,t) = 0$ s'écrit sous la forme :

$$f(x,t) = g(t - x/c) + h(t + x/c)$$

avec g et h deux fonctions quelconques continues et deux fois dérivables.
$f_{p+}(x,t) = g(t - x/c)$ représente une onde **plane progressive se propageant selon $\vec{u}_x$ à la célérité** c et $f_{p-}(x,t) = h(t + x/v)$ une onde **plane progressive se propageant selon $-\vec{u}_x$ à la célérité** c.

⚠ L'onde plane $f(x,t)$, superposition de ces deux ondes planes progressives se propageant en sens contraire à la même vitesse et selon le même axe, n'est pas une onde progressive (nous pouvons même obtenir une onde stationnaire, comme vu en première année). Elle vérifie cependant l'équation de propagation de d'Alembert.

Nous remarquons que $x = \overrightarrow{OM} \cdot \vec{u}_x$ avec O origine arbitraire du système de coordonnées cartésiennes. Nous pouvons ainsi généraliser la notion d'onde plane dans la direction d'un vecteur unitaire $\vec{u}$ ne correspondant pas aux directions des axes du trièdre cartésien.

Généralisation

La fonction $f(M,t) = g\left(t - \dfrac{\overrightarrow{OM}\cdot\vec{u}}{c}\right) + h\left(t + \dfrac{\overrightarrow{OM}\cdot\vec{u}}{c}\right)$, où g et h sont deux fonctions quelconques continues et deux fois dérivables et $\vec{u}$ un vecteur unitaire, est solution de l'équation de d'Alembert :

$$\Delta f(M,t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(M,t) = 0$$

C'est la superposition de deux ondes planes progressives se propageant selon $\pm\vec{u}$ avec la célérité c.

Parmi les ondes planes progressives et compte tenu de l'analyse de Fourier, la famille des ondes planes progressives harmoniques joue un rôle particulièrement important.

Rappel : Onde plane progressive monochromatique ou harmonique

Une onde plane progressive monochromatique, ou harmonique, de pulsation ω se propageant dans le sens et la direction du vecteur unitaire $\vec{u}$ à la célérité c est de la forme :

$$f_{p+}(M,t) = f_0\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\overrightarrow{OM} + \varphi)$$

avec $\vec{k} = k\vec{u}$, $k = \dfrac{\omega}{c} = \dfrac{2\pi}{\lambda}$. La phase de cette onde est $\phi(M,t) = \omega t - \vec{k}\cdot\overrightarrow{OM} + \varphi$. φ est ainsi la phase à l'origine O à $t=0$.
Cette onde est un cas particulier d'onde plane progressive ; elle vérifie l'équation de d'Alembert.

Les plans d'onde, d'équation $\overrightarrow{OM}\cdot\vec{u} = \text{Cste}$, sont également des plans équiphases.

☐ Comment passer de ces ondes scalaires aux champs vectoriels d'une onde plane électromagnétique ?

Nous allons déjà commencer par fixer quelques points de vocabulaires et définitions.

Définition : Onde électromagnétique plane

Les six composantes du champ électromagnétique $(\vec{E}(M,t), \vec{B}(M,t))$ d'une onde électromagnétique plane se propageant dans le sens et la direction du vecteur unitaire $\vec{u}$ sont des ondes planes scalaires ne dépendant que de la variable spatiale $\overrightarrow{OM}\cdot\vec{u}$:

$$\vec{E}(M,t) = E_x(\overrightarrow{OM}\cdot\vec{u},t)\vec{u}_x + E_y(\overrightarrow{OM}\cdot\vec{u},t)\vec{u}_y + E_z(\overrightarrow{OM}\cdot\vec{u},t)\vec{u}_z$$

$$\vec{B}(M,t) = B_x(\overrightarrow{OM}\cdot\vec{u},t)\vec{u}_x + B_y(\overrightarrow{OM}\cdot\vec{u},t)\vec{u}_y + B_z(\overrightarrow{OM}\cdot\vec{u},t)\vec{u}_z$$

où E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z sont des fonctions continues et deux fois dérivables de l'espace et du temps.

Ce champ électromagnétique vérifie donc les équations de d'Alembert vectorielles à trois dimensions puisque chacune de ses composantes vérifie l'équation de d'Alembert scalaire à trois dimensions.

Définition : Onde électromagnétique plane progressive dans le « vide »

Les six composantes du champ électromagnétique d'une onde électromagnétique plane progressive se propageant dans le vide dans le sens et la direction de $\vec{u}$ à la célérité c sont des ondes planes progressives scalaires se propageant toutes dans le sens et la direction $\vec{u}$ à la célérité c :

$$\vec{E}(M,t) = E_x\left(t - \frac{\overrightarrow{OM}\cdot\vec{u}}{c}\right)\vec{u}_x + E_y\left(t - \frac{\overrightarrow{OM}\cdot\vec{u}}{c}\right)\vec{u}_y + E_z\left(t - \frac{\overrightarrow{OM}\cdot\vec{u}}{c}\right)\vec{u}_z$$

$$\vec{B}(M,t) = B_x\left(t - \frac{\overrightarrow{OM}\cdot\vec{u}}{c}\right)\vec{u}_x + B_y\left(t - \frac{\overrightarrow{OM}\cdot\vec{u}}{c}\right)\vec{u}_y + B_z\left(t - \frac{\overrightarrow{OM}\cdot\vec{u}}{c}\right)\vec{u}_z$$

où E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z sont des fonctions continues et deux fois dérivables de la même variable $t - \dfrac{\overrightarrow{OM}\cdot\vec{u}}{c}$.

Retour au contexte : l'onde issue directement du Soleil et arrivant au voisinage d'un point O situé sur la surface du globe est localement une onde plane progressive de direction $\vec{u} \approx \dfrac{\overrightarrow{ST}}{\|\overrightarrow{ST}\|}$ avec T centre de la Terre et S centre du Soleil.

□ Peut-on aussi introduire la notion d'onde harmonique ou monochromatique ?

Bien sûr ! Si on reprend l'exemple du rayonnement solaire, son spectre est continu. Grâce à l'analyse de Fourier, le champ électromagnétique issu du Soleil s'écrit comme une somme intégrale de champs électromagnétiques monochromatiques de pulsations ω faisant partie du spectre d'émission. Chacune des composantes harmoniques de ce champ électromagnétique est une onde électromagnétique plane progressive harmonique (notée OemPPH dans toute la suite du cours). On peut alors à bon escient utiliser la notation complexe pour écrire une telle onde.

Définition : OemPPH dans le « vide »

Une onde électromagnétique plane progressive harmonique ou monochromatique (OemPPH) de pulsation ω se propageant dans le « vide » dans la direction $+\vec{u}$ à la célérité c est telle que les six composantes du champ électromagnétique sont des ondes planes progressives harmoniques scalaires de pulsation ω se propageant dans la direction $+\vec{u}$ à la célérité c.

□ Quels sont les intérêts de la notion d'OemPPH ?

Les OemPPH apparaissent comme une **base de décomposition** des ondes électromagnétiques planes progressives.

Nous pouvons écrire de façon générale, pour le champ réel électrique par exemple :

$$\vec{E}(M,t) = E_{0x}\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\overrightarrow{OM} + \varphi_x)\vec{u}_x + E_{0y}\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\overrightarrow{OM} + \varphi_y)\vec{u}_y + E_{0z}\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\overrightarrow{OM} + \varphi_z)\vec{u}_z$$

Nous pouvons donc utiliser la notation complexe et écrire :

$$\underline{\vec{E}}(M,t) = E_{0x}\exp(\mathrm{i}(\omega t - \vec{k}\cdot\overrightarrow{OM} + \varphi_x))\vec{u}_x + E_{0y}\exp(\mathrm{i}(\omega t - \vec{k}\cdot\overrightarrow{OM} + \varphi_y))\vec{u}_y + E_{0z}\exp(\mathrm{i}(\omega t - \vec{k}\cdot\overrightarrow{OM} + \varphi_z))\vec{u}_z$$

soit finalement :

$$\underline{\vec{E}}(M,t) = \underline{\vec{E}}_0\exp(\mathrm{i}(\omega t - \vec{k}\cdot\overrightarrow{OM}) \text{ avec } \underline{\vec{E}}_0 = E_{0x}\exp(\mathrm{i}\varphi_x)\vec{u}_x + E_{0y}\exp(\mathrm{i}\varphi_y)\vec{u}_y + E_{0z}\exp(\mathrm{i}\varphi_z)\vec{u}_z$$

De même, il vient :

$\underline{\vec{B}}(M,t) = \underline{\vec{B}}_0 \exp(\mathrm{i}(\omega t - \vec{k}\cdot\overrightarrow{OM}))$ avec $\underline{\vec{B}}_0 = B_{0x}\exp(\mathrm{i}\psi_x)\vec{u}_x + B_{0y}\exp(\mathrm{i}\psi_y)\vec{u}_y + B_{0z}\exp(\mathrm{i}\psi_z)\vec{u}_z$

Les grandeurs $\underline{\vec{E}}_0$ et $\underline{\vec{B}}_0$ sont les vecteurs amplitudes complexes pour les champs électrique et magnétique. Les grandeurs amplitudes réelles et phases sont toutes indépendantes du temps et de l'espace pour une OemPPH.

En ce qui concerne les composantes harmoniques formant le champ électromagnétique rayonné par le Soleil, les termes d'amplitude et de phase dépendent de la pulsation ω.

> Le vecteur d'onde $\vec{k}$ nous renseigne par sa direction sur la direction de propagation effective de l'OemPPH. Il est relié à la périodicité spatiale λ de l'onde par $k = \dfrac{\omega}{c} = \dfrac{2\pi}{\lambda}$.

Méthode 8.2 : Savoir écrire la forme d'une OemPPH dans le « vide »

Soit une OemPPH de pulsation ω se propageant dans le vide et de direction de propagation connue (vecteur unitaire $\vec{u}$) :

- Écrire le vecteur d'onde : $\vec{k} = k\vec{u}$ avec $k = \omega/c$.
- Écrire la forme complexe des champs associés :
  $\underline{\vec{E}}(M,t) = \underline{\vec{E}}_0 \exp(\mathrm{i}(\omega t - \vec{k}\cdot\overrightarrow{OM}))$ et $\underline{\vec{B}}(M,t) = \underline{\vec{B}}_0 \exp(\mathrm{i}(\omega t - \vec{k}\cdot\overrightarrow{OM}))$ où $\underline{\vec{E}}_0$ et $\underline{\vec{B}}_0$ sont des vecteurs amplitudes indépendants du temps et de l'espace.
- Trouver l'équation des plans d'onde : $\vec{k}\cdot\overrightarrow{OM} =$ constante.

➔ Exercice (8.2)

Une OemPPH considérée de manière isolée n'a aucune signification physique car elle **correspond à un signal physique ne présentant aucune limitation spatiale ou temporelle**. Seule la superposition de telles ondes peut décrire un phénomène physique réel, nécessairement limité dans le temps et dans l'espace. Il existe cependant des situations où cette notion peut être utilisée de façon locale et pendant une durée déterminée. Citons l'onde émise par une source sphérique située à très grande distance du point d'observation ou encore l'onde obtenue derrière une lentille éclairée par une source située en son foyer objet : les rayons émergeant sont parallèles entre eux ; l'onde est donc considérée comme plane dans la région éclairée.

☐ Le spectre des ondes électromagnétiques se limite-t-il au domaine du visible ?

Bien sûr que non ! Le spectre des ondes électromagnétiques est extrêmement large. Citons en les grands domaines du spectre ($\lambda = c/f$) :

- $\lambda < 10\,\mathrm{pm}$: les rayons gamma, utilisés en imagerie médicale (scintigraphie) ;
- $10\,\mathrm{pm} < \lambda < 10\,\mathrm{nm}$: les rayons X, utilisés en radiographie mais aussi en diffraction pour caractériser les structures cristallographiques ;
- $10\,\mathrm{nm} < \lambda < 400\,\mathrm{nm}$: les ultraviolets (C, B, A), utilisés dans l'éclairage, la microscopie, la dermatologie... ;
- $400\,\mathrm{nm} < \lambda < 800\,\mathrm{nm}$: le visible ;
- $800\,\mathrm{nm} < \lambda < 1\,\mathrm{mm}$: l'infrarouge, utilisé dans les caméras thermiques, le chauffage par infrarouge, la spectroscopie, le guidage... ;
- $1\,\mathrm{mm} < \lambda$: les ondes radioélectriques, utilisées dans la communication avec les sous-marins, la radionavigation, la radio FM, le Wi-Fi...

3 Structure et polarisation d'une onde électromagnétique plane progressive dans le « vide »

□ **Les équations de Maxwell imposent-elles des conditions plus restrictives aux champs électrique et magnétique d'une OemPPH ?**

Nous avons trouvé une forme générale pour les champs électrique et magnétique d'une OemPPH qui leur permet de vérifier l'équation de d'Alembert vectorielle tridimensionnelle. Il nous reste cependant à vérifier leur compatibilité avec les équations de Maxwell.

Considérons une OemPPH se propageant dans le sens et la direction du vecteur unitaire $+\vec{u}$. Ces équations étant linéaires, nous pouvons utiliser la notation complexe.

Introduisons $\vec{k} = k_x\vec{u}_x + k_y\vec{u}_y + k_z\vec{u}_z = k\vec{u}$ d'où $\vec{k}\cdot\overrightarrow{OM} = k_x x + k_y y + k_z z$.

$$\operatorname{div}\underline{\vec{E}} = \frac{\partial \underline{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \underline{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial z} = -\mathrm{i}k_x\underline{E}_x - \mathrm{i}k_y\underline{E}_y - \mathrm{i}k_z\underline{E}_z = -\mathrm{i}\vec{k}\cdot\underline{\vec{E}}.$$

On pourrait montrer de même que $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\underline{\vec{E}} = -\mathrm{i}\vec{k}\wedge\underline{\vec{E}}$ et $\dfrac{\partial\underline{\vec{E}}}{\partial t} = \mathrm{i}\omega\underline{\vec{E}}$.

⚠ Cette notation complexe n'est valable que lorsque les amplitudes vectorielles $\underline{\vec{E}}_0$ et $\underline{\vec{B}}_0$ de ces champs sont indépendantes du temps et de l'espace (ce qui est bien le cas pour une OemPPH dans le vide) et pour une convention d'écriture en $\exp(\mathrm{i}(\omega t - \vec{k}\cdot\overrightarrow{OM}))$. Si on choisit la forme équivalente en $\exp(\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\overrightarrow{OM} - \omega t))$, tous les signes sont inversés.

Nous pouvons écrire les équations de Maxwell dans le « vide » en utilisant la notation complexe, pour une OemPPH :

- $\operatorname{div}\vec{E} = 0 \implies -\mathrm{i}\vec{k}\cdot\underline{\vec{E}} = 0$
- $\operatorname{div}\vec{B} = 0 \implies -\mathrm{i}\vec{k}\cdot\underline{\vec{B}} = 0$
- $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} \implies -\mathrm{i}\vec{k}\wedge\underline{\vec{E}} = -\mathrm{i}\omega\underline{\vec{B}}$
- $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} \implies -\mathrm{i}\vec{k}\wedge\underline{\vec{B}} = \mathrm{i}\dfrac{\omega}{c^2}\underline{\vec{E}}$

En simplifiant les deux premières équations par i puis en prenant la partie réelle, nous obtenons, compte tenu du caractère réel du vecteur d'onde $\vec{k}$, les deux expressions suivantes :

$$\vec{k}\cdot\vec{E} = 0 \implies \vec{u}\cdot\vec{E} = 0 \text{ et } \vec{k}\cdot\vec{B} = 0 \implies \vec{u}\cdot\vec{B} = 0$$

Les champs électrique et magnétique d'une OemPPH se propageant dans un milieu vide de charge sont tous deux perpendiculaires à la direction de propagation $+\vec{u}$: cette onde est ainsi à la fois **transverse électrique** et **transverse magnétique**. On la qualifie tout simplement d'onde **transverse**.

En faisant le même travail sur les troisième et quatrième équations, nous obtenons :

$$\vec{B} = \frac{\vec{k}\wedge\vec{E}}{\omega} \implies \vec{B} = \frac{\vec{u}\wedge\vec{E}}{c} \text{ et } \vec{E} = -c^2\frac{\vec{k}\wedge\vec{B}}{\omega} \implies \vec{E} = -c\vec{u}\wedge\vec{B}$$

Le champ électrique et magnétique d'une OemPPH se propageant dans le « vide » sont donc perpendiculaires entre eux et le trièdre $(\vec{u}, \vec{E}, \vec{B})$ est direct. De plus $\|\vec{B}\| = \dfrac{\|\vec{E}\|}{c}$.

En remplaçant dans la dernière équation $\vec{B}$ par $\dfrac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c}$, on obtient **la relation de dispersion** des OemPPH dans le « vide » : $k^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2}$.

Structure d'une OemPPH se propageant dans le « vide »

Une OemPPH de pulsation ω se propageant dans le « vide » à la célérité c dans le sens et la direction du vecteur unitaire $\vec{u}$, de vecteur d'onde $\vec{k} = k\vec{u} = \dfrac{\omega}{c}\vec{u}$ possède la structure suivante :

- elle est **transverse** : $\vec{E} \perp \vec{u}$ et $\vec{B} \perp \vec{u}$;
- $(\vec{u}, \vec{E}, \vec{B})$ forme un trièdre direct et $\|\vec{B}\| = \dfrac{\|\vec{E}\|}{c}$: $\vec{B} = \dfrac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c}$;
- k et ω sont reliés par la **relation de dispersion** : $k^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2}$.

Cette structure (caractère transverse et trièdre direct) s'étend par superposition à toute onde électromagnétique plane progressive (OemPP) se propageant dans le sens et la direction $+\vec{u}$.

Cette structure est valable quelle que soit la direction de propagation de l'onde plane.

□ À quoi correspond la notion de polarisation mentionnée dans le contexte ?

Dans l'analyse qui précède, $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont perpendiculaires à $\vec{u}$ et entre eux mais rien n'est mentionné sur la direction qu'ils prennent au cours du temps. Pour caractériser entièrement le champ électromagnétique d'une OemPP, il faut une information supplémentaire sur la direction prise par le champ électrique $\vec{E}$ au cours du temps ($\vec{B}$ s'en déduisant par la relation de structure). Cette information supplémentaire constitue **la polarisation de l'onde**.

Pour décrire la polarisation d'une OemPP, on utilise la classification en différents états de polarisation, le plus simple et le seul au programme étant l'état de polarisation rectiligne.

Définition : État de polarisation rectiligne

Une OemPP se propageant dans le « vide » dans le direction et le sens du vecteur unitaire $\vec{u}$ est dite polarisée rectilignement lorsque le champ électrique reste au cours du temps toujours parallèle à une direction fixe de vecteur unitaire $\vec{u}_p$ perpendiculaire à $\vec{u}$.

Le champ électrique d'une OemPPH polarisée rectilignement dans la direction $\vec{u}_p$, se propageant dans le « vide » dans la direction et le sens du vecteur unitaire $\vec{u}$, se mettra sous la forme :

$$\vec{E}(M,t) = E_0 \vec{u}_p \cos(\omega t - k\vec{u} \cdot \overrightarrow{OM} + \varphi) \text{ avec } \vec{u}_\mathrm{p} \perp \vec{u}$$

Le champ magnétique s'en déduit ensuite par la relation de structure :

$$\vec{B} = \frac{\vec{u} \wedge E_0 \vec{u}_p \cos(\omega t - k\vec{u} \cdot \overrightarrow{OM} + \varphi)}{c} = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - k\vec{u} \cdot \overrightarrow{OM} + \varphi) \vec{u} \wedge \vec{u}_p$$

$\vec{B}$ et $\vec{E}$ sont en phase pour une OemPPH polarisée rectilignement. La figure 8.2 montre l'évolution dans l'espace à un instant donné des champs $\vec{B}$ et $\vec{E}$ d'une OemPPH se propageant selon (Ox), polarisée rectilignement selon (Oy).

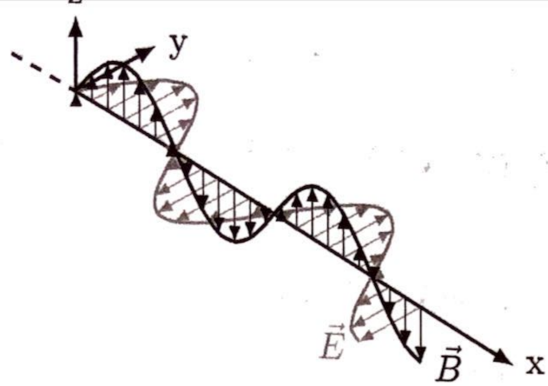


Figure 8.2. Champs électrique et magnétique d'une OemPPH polarisée rectilignement.

□ Comment vérifier qu'un champ électrique fourni correspond à celui d'une OemPPH et en déduire le champ magnétique associé ?

Méthode 8.3 : Caractériser une OemPPH dans le « vide »

- Vérifier que le champ électrique donné est transverse et qu'il s'écrit en notation complexe sous la forme $\underline{\vec{E}}(M,t) = \underline{\vec{E}_0} \exp(\mathrm{i}(\omega t - \vec{k}\cdot\overrightarrow{OM}))$ avec $\underline{\vec{E}_0}$ constant.
- Vérifier que $\|\vec{k}\| = k = \dfrac{\omega}{c}$.
- Obtenir alors la direction de propagation $\vec{u}$ par $\vec{k} = k\vec{u}$.
- Utiliser $\vec{B} = \dfrac{\vec{u}\wedge\vec{E}}{c}$ pour calculer le champ magnétique de l'OemPPH.
- Observer alors $\underline{\vec{E}_0}$: si $\underline{\vec{E}_0} = \underline{E_0}\vec{u}_p$, l'OemPPH est polarisée rectilignement selon $\vec{u}_p$.

Si l'expression du champ magnétique est donnée, reprendre les trois premiers points en remplaçant $\vec{E}$ par $\vec{B}$ puis en déduire le champ électrique par $\vec{E} = -c\vec{u}\wedge\vec{B}$ et déterminer si possible la nature de sa polarisation.

Exercices (8.3) (8.2) (8.4)

Ne pas confondre direction de propagation et direction de polarisation !

Les OemPPH polarisées rectilignement sont très importantes en pratique car toute OemPPH peut se décomposer sur une base d'OemPPH polarisées rectilignement.

□ Le Soleil émet une onde non polarisée : qu'est-ce que cela veut dire ?

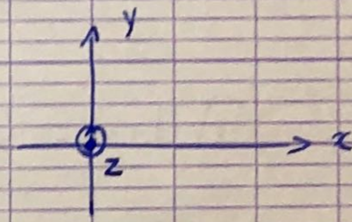
Une OemPP se propageant selon $\vec{u}$ est non polarisée si le champ électrique prend au cours du temps des directions aléatoires (à l'échelle de temps des récepteurs) dans un plan perpendiculaire à $\vec{u}$. Toutes les directions dans un tel plan sont ainsi équiprobables pour le champ électrique. C'est le cas pour les ondes issues des sources naturelles telles que le Soleil, les lampes spectrales ou lampes blanches utilisées en travaux pratiques (voir 11).

On peut, à partir d'une onde plane non polarisée, obtenir une onde polarisée rectilignement en utilisant un **polariseur** (P). C'est un instrument d'optique constitué d'un matériau dont les propriétés optiques dépendent de la direction du champ électrique (anisotropie), se présentant sous forme d'une lame à face parallèle. Lorsqu'une onde plane arrive en incidence normale sur (P),

III) Polarisation des OEM PPM :

1) Conventions :

$$\vec{E} = \begin{vmatrix} E_{0x} \cos(\omega t - kz + \varphi_x) \\ E_{0y} \cos(\omega t - kz + \varphi_y) \\ 0 \end{vmatrix}$$



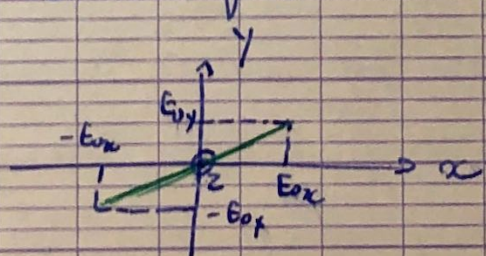
$$\vec{E} = \begin{vmatrix} E_{0x} \cos(\omega t - kz) \\ E_{0y} \cos(\omega t - kz + \varphi) \\ 0 \end{vmatrix}$$

2) Polarisation rectiligne :

$\varphi = 0$ ou $\varphi = \pi$

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \\ 0 \end{pmatrix} \cos(\omega t - kz)$$

$\vec{E}$ garde une direction fixe



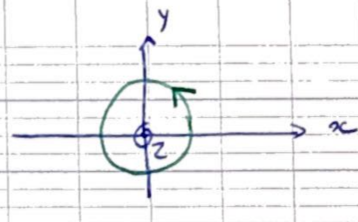
3) Polarisation circulaire :

$E_{0x} = E_{0y} = E_0$

$\varphi = +\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$

$\varphi = +\frac{\pi}{2}$

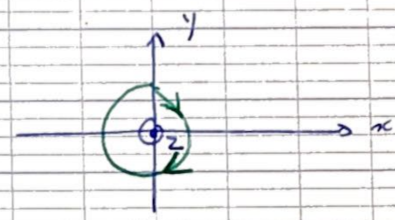
$\vec{E}_{(z=0)} = E_0 \begin{vmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \\ 0 \end{vmatrix}$



Polarisation circulaire gauche

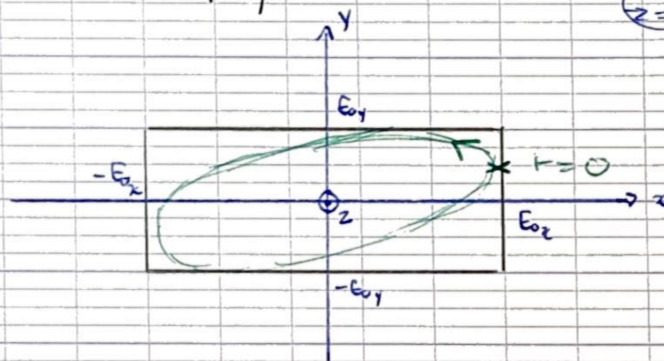
$\varphi = -\frac{\pi}{2}$

$\vec{E}_{(z=0)} = E_0 \begin{vmatrix} \cos \omega t \\ -\sin \omega t \\ 0 \end{vmatrix}$



Polarisation circulaire droite

4) Polarisation elliptique :



$z=0$

$\vec{E} = \begin{vmatrix} E_{0x} \cos \omega t \\ E_{0y} \cos(\omega t - \varphi) \\ 0 \end{vmatrix}$

$\frac{d}{dt}\left(E_{0y} \cos(\omega t - \varphi)\right) = -E_{0y}\, \omega \sin(\omega t - \varphi)$

à $t=0$: $\frac{d}{dt}\left(E_{0y} \cos(\omega t - \varphi)\right)_{t=0} = E_{0y} \sin \varphi$

$0 < \varphi < \pi$: elliptique gauche

$-\pi < \varphi < 0$: —— droite

5) Lumière naturelle :

La lumière naturelle est non polarisée.

Tous les τ_c l'état de polarisation change, les directions sont équiprobables.