Ondas Planas (Parte 1)

Vamos considerar um meio L.I.H e sem fontes ($\rho_f = 0$ e $\vec{J}_f = 0$), com permissividade elétrica ε e permeabilidade magnética μ.
Nesse caso, as equações de Maxwell para os fasores $\vec{E}(\vec{r})$ e $\vec{H}(\vec{r})$ são:

$$
\begin{cases}
\vec{\nabla}\cdot\vec{E}(\vec{r}) = 0 & (1) \\
\vec{\nabla}\times\vec{E}(\vec{r}) = -j\omega\mu\vec{H}(\vec{r}) & (2) \\
\vec{\nabla}\cdot\vec{H}(\vec{r}) = 0 & (3) \\
\vec{\nabla}\times\vec{H}(\vec{r}) = j\omega\varepsilon\vec{E}(\vec{r}) & (4)
\end{cases}
$$

Procedendo de forma análoga ao que fizemos para obter as equações de onda para os campos elétrico e magnético (aula 11), podemos obter das eqs (1-4) as chamadas equações de Helmholtz para $\vec{E}(\vec{r})$ e $\vec{H}(\vec{r})$ (demonstre!):

$$\nabla^2\vec{E}(\vec{r}) + k^2\vec{E}(\vec{r}) = 0 \qquad (5)$$

$$\nabla^2\vec{H}(\vec{r}) + k^2\vec{H}(\vec{r}) = 0 \qquad (6)$$

onde $\boxed{K = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}}$.

Antes de continuarmos, um ponto muito importante precisa ser esclarecido.

Ao olhar as eqs (5,6), é simples constatar que elas são independentes e isso pode levar à conclusão ERRADA de que $\vec{E}$ e $\vec{H}$ também são.

Deve ficar claro que as eqs (5,6) são consequências das Eqs de Maxwell, essas, sim, as leis que regem o eletromagnetismo, as quais deixam claro que $\vec{E}$ e $\vec{H}$ não são independentes.

Então, tenha sempre em mente que Toda solução $\vec{E}(\vec{r})$ e $\vec{H}(\vec{r})$, das eqs (1-4), obedecem as Eqs (5,6), mas o inverso não é verdade.

Até mesmo uma solução $\vec{E}(\vec{r})$ para a eq. (5) pode não respeitar, por exemplo, a eq. (1)!

Então, para que vamos considerar as eqs (5,6)? Essas eqs. são importantes e interessantes porque nos dizem que os campos

$\vec{E}$ e $\vec{H}$ se comportam como ondas.

Iremos proceder da seguinte forma: primeiro buscamos uma solução para a Eq(5) e verificamos se a mesma é coerente com a Eq.(1) (Lei de Gauss), depois encontramos $\vec{H}(\vec{r})$ não a partir da Eq(6), mas, sim, a partir da Eq (2) (Lei de Faraday). Este procedimento garante que os fasores $\vec{E}$ e $\vec{H}$ encontrados satisfazem as Eqs. de Maxwell (1-4) (e portanto também satisfazem as eqs (5,6)).

Dito isso, passamos agora a obter as chamadas ondas planas.

Seja

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(z)\,\hat{e} \qquad (7)$$

com $\hat{e}$ um versor cte qualquer.
Usando (7) em (5) obtemos:

$$\frac{\partial^2 E(z)}{\partial z^2} + k^2 E(z) = 0 \qquad (8)$$

cuja solução é:

$$E(z) = E_0^+ e^{-jkz} + E_0^- e^{jkz} \quad (9)$$

com E_0^+ e E_0^- constantes complexas.

Assim, de (7) e (9):

$$\vec{E}(\vec{r}) = \left(E_0^+ e^{-jkz} + E_0^- e^{jkz}\right)\hat{e} \quad (10)$$

Antes de prosseguirmos, devemos nos perguntar se $\vec{E}(\vec{r})$, dado pela eq (10), é compatível com a lei de Gauss, dada pela Eq (1). Vejamos:

Usando (10) em (1):

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}(\vec{r}) = 0$$

$$\Downarrow \text{ usando } (10)$$

$$\vec{\nabla}\cdot\left[\left(E_0^+ e^{-jkz} + E_0^- e^{jkz}\right)\hat{e}\right] = 0$$

$$\Downarrow \ \vec{\nabla}\cdot(a\vec{b}) = \vec{\nabla}a\cdot\vec{b} + a\,\vec{\nabla}\cdot\vec{b}$$

$$\vec{\nabla}\left(E_0^+ e^{-jkz} + E_0^- e^{jkz}\right)\cdot\hat{e} + \left(E_0^+ e^{-jkz} + E_0^- e^{jkz}\right)\underbrace{\vec{\nabla}\cdot\hat{e}}_{0 \text{ pois } \hat{e} \text{ é cte}} = 0$$

$\longrightarrow$

$$\Downarrow$$

$$\left[E_0^+(-jk)\, e^{-jkz}\,\hat{z} + E_0^-(jk)\, e^{jkz}\,\hat{z}\right]\cdot \hat{e} = 0$$

A equação acima só se verifica para todo "z" se

$$\hat{z}\cdot\hat{e} = 0$$

$$\downarrow$$

$$\hat{e} \perp \hat{z} \qquad (11)$$

Portanto, em (10), $\hat{e}$ não pode ser um versor qualquer, mas deve ser um versor perpendicular à $\hat{z}$.

Agora, qual o significado da solução (10) p/ o fasor $\vec{E}(\vec{r})$?

Para entendermos melhor, vamos ver quem é o campo elétrico associado a esse fasor. Temos que:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left(\vec{E}(\vec{r})\, e^{j\omega t}\right) \qquad (12)$$

$$\Longrightarrow$$

Usando (10) em (12) e assumindo, por simplicidade, que E_0^+ e E_0^- são ctes reais,

$$\vec{E}(\vec{r},t) = E_0^+ \cos(\omega t - kz)\,\hat{e} + E_0^- \cos(\omega t + kz)\,\hat{e} \qquad (13)$$

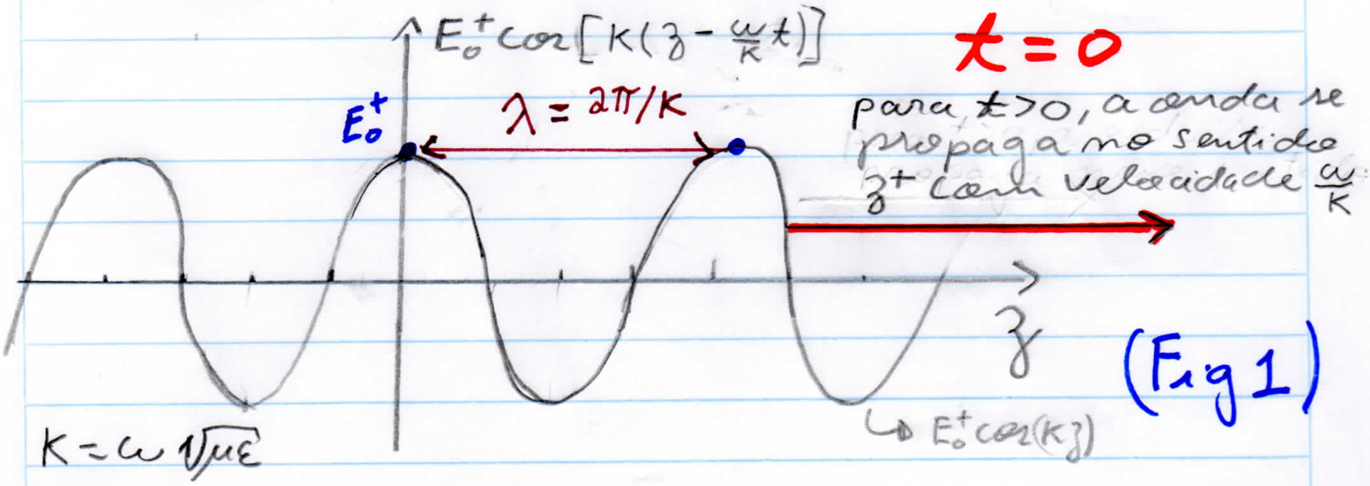
($\hat{e}$ pode ser $\hat{x}$, $\hat{y}$ ou uma combinação linear de $\hat{x}$ e $\hat{y}$) com $\hat{e} \perp \hat{z}$

É simples perceber que o campo elétrico dado por (13) é a soma de uma onda que se propaga no sentido positivo de "z" com uma onda que se propaga no sentido negativo de "z", ambas com velocidade $\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \equiv c$.

Para perceber isso, vamos escrever (13) como:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = E_0^+ \cos\left[k\left(z - \frac{\omega}{k}t\right)\right]\hat{e} + E_0^- \cos\left[k\left(z + \frac{\omega}{k}t\right)\right]\hat{e} \qquad (14)$$

Vamos plotar a amplitude do primeiro termo do lado direito da igualdade em (14) no tempo $t = 0$:



(Fig 1)

Vemos que, em $t=0$, o primeiro termo do lado direito de (14) será dado por $E_0^+ \cos(Kz)\,\hat{e}$, ou seja, será uma função coseno com comprimento de onda $\lambda = 2\pi/K$, lembrando que

$K = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$. Também é simples

de entender, da função $\cos[K(z-\frac{\omega}{K}t)]$,

que quando o tempo vai aumentando, a onda do desenho acima se desloca p/ a direita (sentido z^+) com velocidade $\frac{\omega}{K} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \equiv c$

Uma análise idêntica pode ser feita para o segundo termo do lado direito da eq (14), a saber $E_o^- \cos[k(z + \frac{\omega}{k}t)]\hat{e}$, levando

à conclusão que se trata de uma onda de $\lambda = 2\pi/k$ que se propaga para esquerda, i.e., no sentido z^-, com velocidade

$$\frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \equiv c.$$

Para simplificar, vamos, a partir de agora, considerar que $E_o^- = 0$, de tal forma que o campo $\vec{E}(\vec{r},t)$ é dado apenas pela onda que se propaga no sentido z^+:

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_o e^{-jkz}\hat{e} \qquad (16)$$

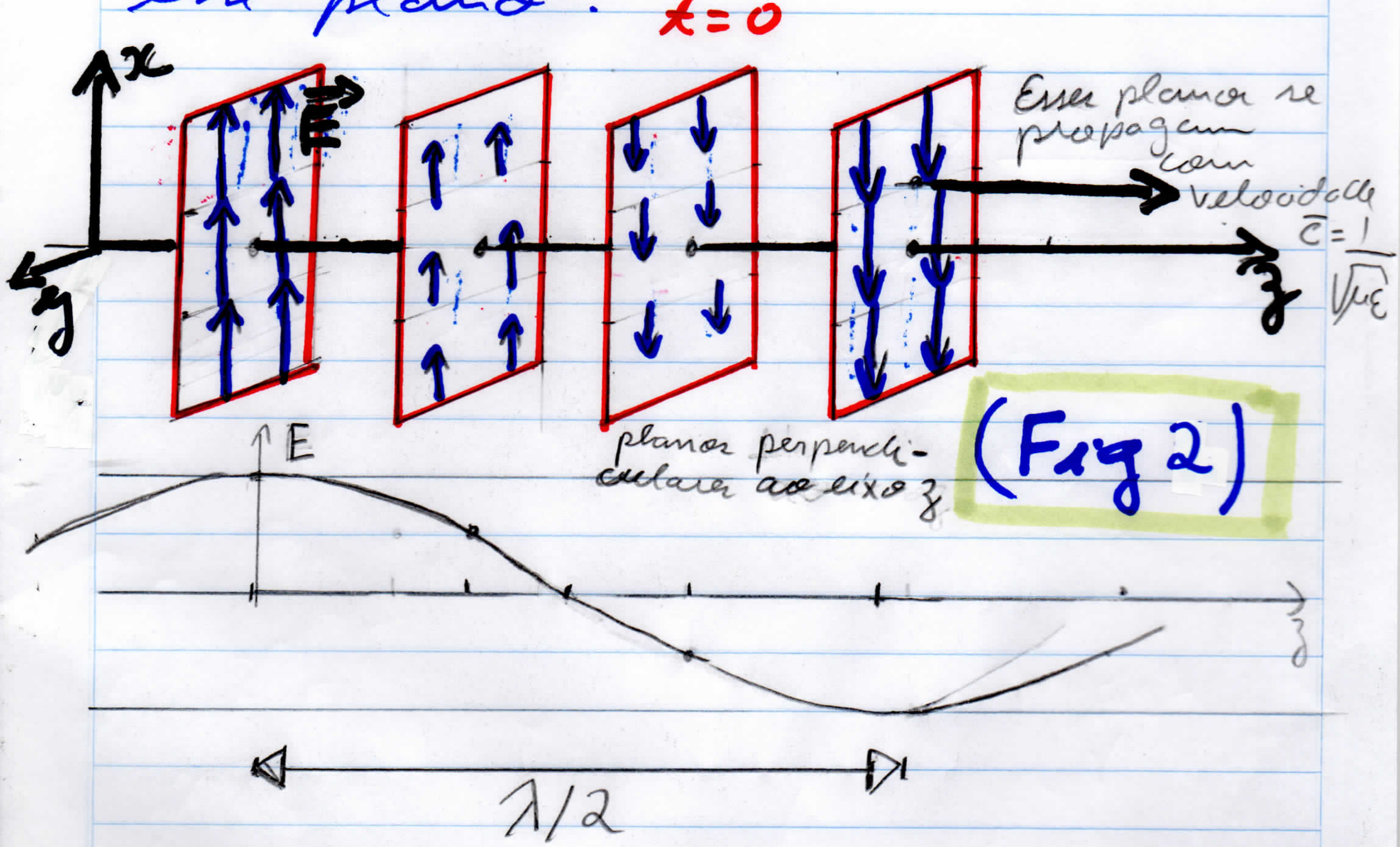
com $\hat{e} \perp \hat{z}$

$$\therefore \vec{E}(\vec{r},t) = E_o \cos(\omega t - kz)\hat{e} \qquad (17)$$

onde escrevemos $E_o^+ = E_o$ e o consideramos real.

Repare que, apesar da figura (desenho) Fig 1 da página anterior mostrar o

campo em função de "z", podemos "visualizar" o campo em 3D.
Para isso, basta perceber que $\vec{E}(\vec{r},t)$ em (17) depende apenas da coordenada espacial "z"; isso significa que, para um dado tempo t, sobre um plano ∀ dado por um valor ∀ de "z", o campo $\vec{E}$ será o mesmo (mesma amplitude, fase e direção) em todos os pontos sobre esse plano.



(Fig 2)

O desenho acima, onde consideramos $\hat{e} = \hat{x}$, explica a situação.
Esses planos de fase constante

se propagam no sentido z^+ com velocidade $\bar{c} = \dfrac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$.

Mas e o campo fasor $\vec{H}(\vec{r})$?

Vamos calculá-lo usando a lei de Faraday, Eq (2):

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}(\vec{r}) = -j\omega\mu\vec{H}(\vec{r})$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{j}{\omega\mu}\vec{\nabla}\times\vec{E}(\vec{r})$$

$$\Big\downarrow \text{ usando (16)}$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{j}{\omega\mu}\vec{\nabla}\times\left(E_0 e^{-jkz}\hat{e}\right)$$

$$\Big\downarrow \ \vec{\nabla}\times(a\vec{b}) = \vec{\nabla}a\times\vec{b} + a\vec{\nabla}\times\vec{b}$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{j}{\omega\mu}\Big[\vec{\nabla}(E_0 e^{-jkz})\times\hat{e} + E_0 e^{-jkz}\underbrace{\vec{\nabla}\times\hat{e}}_{\substack{0 \text{ pois} \\ \hat{e} \text{ é cte}}}\Big]$$

$$\Big\downarrow \ \vec{\nabla}(E_0 e^{-jkz}) = (-jk)E_0 e^{-jkz}\hat{z}$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{j}{\omega\mu}(-jk)E_0 e^{-jkz}\hat{z}\times\hat{e}$$

$\longrightarrow$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{k}{\mu\omega}\,\hat{z} \times \underbrace{E_0 e^{-jkz}\,\hat{e}}_{\vec{E}(\vec{r})}$$

$$\Big\downarrow \quad \frac{k}{\mu\omega} = \frac{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}}{\mu\omega} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}$$

$$\boxed{\vec{H}(z) = \frac{1}{\eta}\,\hat{z} \times \vec{E}(z)} \qquad (18)$$

onde $\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$ é a chamada impedância intrínseca do meio.

Da eq (18) vemos que $\vec{H}(\vec{r})$ é perpendicular ao campo $\vec{E}(\vec{r})$ e também à direção de propagação dada pelo versor $\hat{z}$.

Vamos agora obter o campo instantâneo $\vec{H}(\vec{r},t)$:

$$\vec{H}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left[\vec{H}(\vec{r})\,e^{j\omega t}\right] \qquad (19)$$

$$\Big\downarrow \text{ usando } (18)$$

$$\vec{H}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{\eta}\,\hat{z} \times \vec{E}(z)\,e^{j\omega t}\right]$$

$\longrightarrow$

$\downarrow$ usando (16)

$$\vec{H}'(z,t) = Re\left[\frac{1}{\eta}\hat{z}\times\hat{e}\,E_0 e^{-jkz}e^{j\omega t}\right]$$

$\downarrow$ assumindo E_0 e η como sendo reais.

$$\boxed{\vec{H}'(z,t) = \frac{E_0}{\eta}\cos(\omega t - kz)\,\hat{z}\times\hat{e},} \quad (20)$$

onde $\hat{e}\perp\hat{z}$.

e vemos que $\vec{H}'(z,t)$ também é uma onda, similar à $\vec{E}'(z,t)$, estando, porém, com direção em $\hat{z}\times\hat{e}$.

Se escolhermos $\hat{e}=\hat{x}$, então para os fasores $\vec{E}'(z)$ e $\vec{H}'(z)$ dados por (16) e (18), teremos:

$$\begin{cases} \vec{E}'(z) = E_0 e^{-jkz}\hat{x} & (16') \\ \vec{H}'(z) = \dfrac{E_0}{\eta} e^{-jkz}\hat{y} & (18') \end{cases}$$

que fornecem os campos instantâneos:

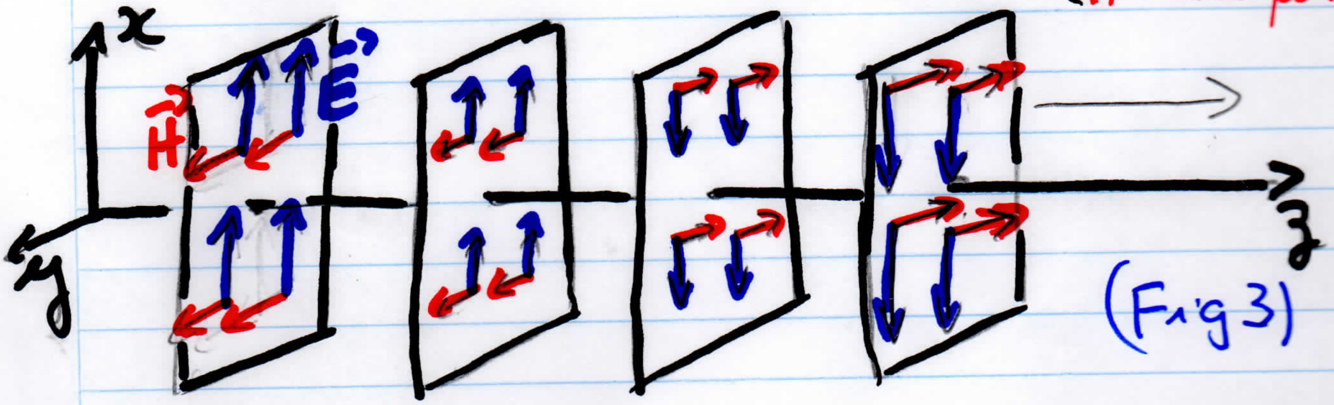
$\longrightarrow$

$$\begin{cases} \vec{E}(z,t) = E_0 \cos(\omega t - kz)\,\hat{x} & (17') \\ \vec{H}(z,t) = \dfrac{E_0}{\eta} \cos(\omega t - kz)\,\hat{y} & (20') \end{cases}$$

Podemos representar $\vec{H}(z,t)$, dado por (20'), na Fig 2 como vetores perpendiculares aos vetores de $\vec{E}$. ($\vec{H}$ na direção $\hat{y}$)

$\underline{t=0}$

$\begin{cases} \vec{E} \text{ dado por } (17') \\ \vec{H} \text{ dado por } (20') \end{cases}$



(Fig 3)

Num dado tempo, <u>sobre cada plano perpendicular ao eixo z</u> (nesse caso, a direção de propagação), os campos $\vec{E}$ e $\vec{H}$ são uniformes e sempre perpendiculares um ao outro. Quando o tempo "corre", esses planos viajam no sentido z^+

com velocidade $\bar{c} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$.

Por esta razão, essa onda é chamada de onda plana++, que nesse caso se propaga na direção z, sentido positivo.

++ Também chamada de onda plana uniforme.

Atenção: uma propriedade muito importante associada a uma onda eletromagnética, em particular a uma onda plana, é a sua **polarização** que, a grosso modo, é a direção do vetor campo elétrico da onda.
(Em breve estudaremos com mais detalhes a polarização de ondas planas)
Por exemplo, a onda plana dada pelas eqs. (16', 18') é linearmente polarizada na direção de $\hat{x}$.