A Lei de Ampère-Maxwell

No momento, as equações que temos para descrever os campos elétrico e magnético no espaço livre são:

$$
\begin{cases}
\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon_0 & (1)\\
\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} & (2)\\
\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 & (3)\\
\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} & (4)
\end{cases}
$$

Nessa aula, veremos que a lei de Ampère, Eq. (4), não pode estar correta quando consideramos campos, densidade de carga e densidade de corrente variando com o tempo, i.e, quando consideramos situações com variação temporal.

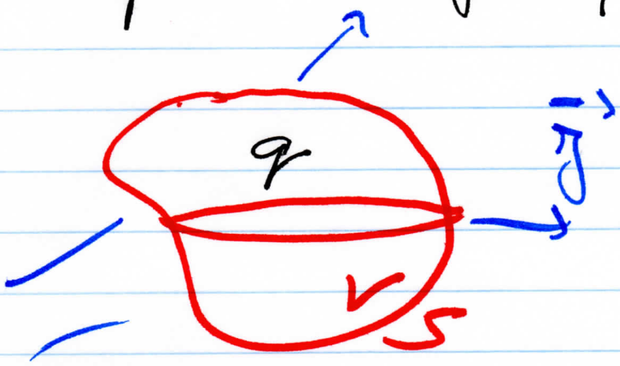
Para entendermos o problema que existe com a Eq (4), precisamos recordar da equação da continuidade, que expressa a conservação da carga elétrica:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{J} = -\frac{\partial\rho}{\partial t} \qquad (5)$$

(Eq. da continuidade)

obs: É fácil entender que a Eq (5) expressa a conservação da carga [redacted]. Veja:

Considere uma região do espaço delimitada pela superfície fechada S. Suponha que num dado tempo a carga contida no volume V delimitado por S seja q.



Experimentalmente verifica-se que a carga líquida dentro de S só se altera se houver carga atravessando essa superfície. Como o fluxo da densidade de corrente através da superfície S fornece a corrente que passa através de S, podemos escrever

$$\oint_S \vec{j}\cdot\vec{dS} = -\frac{dq}{dt}$$

mas $q = \iiint_V \rho \, dV$ portanto $\Longrightarrow$

$$\oiint_S \vec{J}\cdot d\vec{S} = \iiint_V -\frac{\partial}{\partial t}\rho \, dV$$

(Forma integral)

$\Big\downarrow$ Teor. Diverg.

$$\iiint_V \vec{\nabla}\cdot\vec{J}\, dV = \iiint_V -\frac{\partial}{\partial t}\rho\, dV$$

$\Big\downarrow$ como deve ser válido p/ Todo Volume V

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Eq. da continuidade na forma diferencial

---

continuando ...

Agora que já sabemos que a Eq(5) deve ser sempre respeitada, vamos olhar mais de perto a Eq. (4). Mais especificamente, vamos tomar o divergente em ambos os lados da Eq.(4):

$\Longrightarrow$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$ (Lei de Ampère)

$$\underbrace{\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B})}_{=0} = \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{J}$$

O divergente de um rotacional é sempre nulo

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$$

Isso significa que a lei de Ampère tem como consequência $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$, algo válido apenas para os casos de correntes estacionárias. Em outras palavras, a lei de Ampère, Eq (4), viola a lei de conservação da carga elétrica.

Maxwell resolveu esse problema de uma forma simples e genial, postulando que a lei de Ampère deveria ser substituída pela seguinte equação:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4')$$

(Lei de Ampère-Maxwell)

Antes de estudarmos as consequências da lei de Ampère-Maxwell, vamos mostrar que, agora, o ~~[illegible]~~ conjunto final das equações que descrevem o eletromagnetismo são coerentes com a equação da continuidade. As equações finais, que recebem o nome de equações de Maxwell, são:

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon_0 & (1') \\ \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} & (2') \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 & (3') \\ \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} & (4') \end{cases}$$

Tirando o divergente em ambos os lados da Eq(4')

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B}) = \mu_0\vec{\nabla}\cdot\vec{J} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\cdot\vec{E}$$

usando que $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B}) = 0$ e que $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon_0$, Eq(1')

$$0 = \vec{\nabla}\cdot\vec{J} + \frac{\partial}{\partial t}\rho$$

$\Longrightarrow$

$$\rightarrow \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t},$$

que é a equação da continuidade.
Assim, temos que a equação da continuidade passa a ser uma consequência das equações de Maxwell.

Como veremos no decorrer do curso, a lei de Faraday e a lei de Ampère-Maxwell, Eqs (2') e (4'), trazem consequências profundas para o campo elétrico e magnético, que são verificadas pelas experiências.
A primeira coisa que notamos no conjunto de Eqs (1'-4') é o acoplamento entre os campos elétrico e magnético. Um campo magnético que varia no tempo, gera, de acordo com a Eq. (2'), um campo elétrico, o qual, por também variar no tempo, gera um campo magnético de acordo com a Eq. (4'). Este processo ocorre em cadeia e gera o que chamamos de onda eletromagnética.

—x—

Obs: Devido ao acoplamento irremediável entre os campos elétrico e magnético (no caso dinâmico), passamos a chamá-los de campo eletromagnético.

—x—

Obs: A equação que nos diz como um campo eletromagnético age sobre uma carga elétrica é dada por:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} \,, \qquad (5')$$

que é chamada de força de Lorentz.

~~O fato do campo eletromagnético obedecer as equações de Maxwell, Eqs (1'-4'), tem consequências~~

Como estávamos dizendo, o fato do campo eletromagnético obedecer as equações de Maxwell, Eqs (1'-4'), tem consequências admiráveis. Por exemplo, veremos que é possível atribuir ao campo eletromagnético não apenas energia, mas também momento linear e momento angular (quantidades que até então você estava acostumado a associar às partículas).

⇒ O campo eletromagnético é tão real quanto as partículas.
(matéria)

Interessante: Maxwell mostrou que uma consequência dos campos elétrico e magnético obedecerem as Eqs (I'-IV') é que ambos se comportam como ondas (veremos isso em breve) e no espaço livre se propagam com velocidade dada por:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \simeq 3 \times 10^8 \, m/s,$$

que é a velocidade da luz no vácuo, ~~a qual~~ já era conhecida na época de Maxwell. Ao chegar nesse resultado surpreendente, Maxwell imediatamente inferiu que a luz era uma onda eletromagnética.

Dessa forma, podemos dizer que com as Eqs (I'-IV'), Maxwell unificou três setores da física que até então eram considerados completamente independentes: a eletricidade, o magnetismo e a óptica.

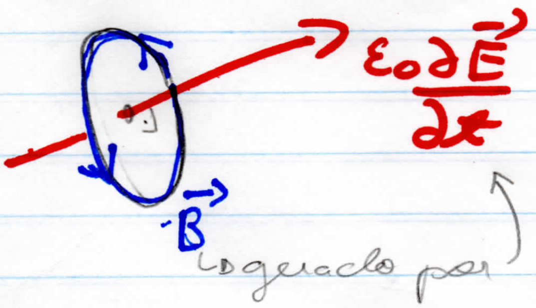
Interessante: Repare que na lei de Ampère-Maxwell,

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t},$$

o termo $\varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ age como se fosse uma densidade de corrente na geração de campo magnético. ~~Por~~

Por conta disso, o termo $\varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ às vezes é chamado de densidade de corrente de deslocamento.

Esquematicamente:



Abaixo, vamos escrever as equações de Maxwell nas formas diferencial e integral:

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon_0 & \longleftrightarrow \displaystyle\oint\!\!\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = q/\varepsilon_0 \quad (1') \\ \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} & \longleftrightarrow \displaystyle\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\iint_S \dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{s} \quad (2') \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 & \longleftrightarrow \displaystyle\oint\!\!\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{s} = 0 \quad (3') \\ \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} & \longleftrightarrow \displaystyle\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 i + \mu_0 i_d \quad (4') \end{cases}$$

onde $i = \displaystyle\iint_S \vec{J}\cdot d\vec{s}$

e

$$i_d = \iint_S \varepsilon_0 \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\cdot d\vec{s}$$

sendo i_d chamada de corrente de deslocamento.

Obs:

É interessante vermos a coerência da lei de Ampère-Maxwell, Eq(4'), quando a aplicamos à situação simples de um capacitor de placas paralelas sendo carregado de acordo com a figura abaixo:

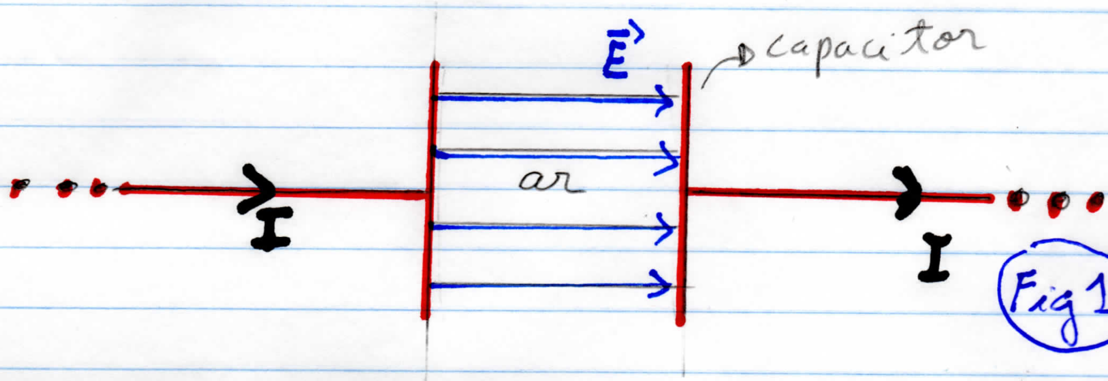


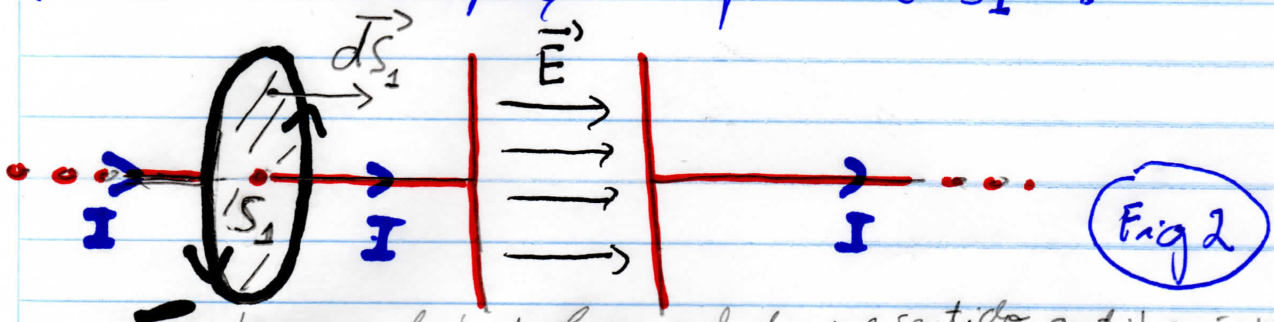
Fig 1

Você deve ter em mente qual o significado da lei de Ampère-Maxwell quando escrita na forma integral:

$$\oint_{C} \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 \underbrace{\iint_{S} \vec{J}\cdot d\vec{S}}_{i} + \mu_0 \underbrace{\iint \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\cdot d\vec{S}}_{i_d} \qquad (4')$$

A equação acima diz que a integral de linha de $\vec{B}$ sobre um caminho fechado C (circulação ou circuitação) deve ser igual a μ_0 vezes o fluxo de $\vec{J}$ mais o fluxo de $\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ através de qualquer superfície aberta S que esteja assentada sobre a curva C.

Vamos escolher então uma curva fechada $\mathcal{C}$ como a do desenho abaixo e a superfície S como sendo a superfície plana S_1:



$\mathcal{C}$ ↳ curva fechada $\mathcal{C}$ orientada no sentido anti-horário.

Usando a Eq (4') na situação desenhada acima:

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B}\cdot\vec{dl} = \mu_0 \underbrace{\iint_{S_1} \vec{J}\cdot\vec{dS}}_{I} + \mu_0 \underbrace{\iint_{S_1} \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\cdot\vec{dS}}_{=0},$$

repare que $\iint_{S_1} \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\cdot\vec{dS} = 0$ pois fora do capacitor (onde se encontra S_1) o campo $\vec{E}$ é nulo. Dessa forma, para a curva $\mathcal{C}$, quando escolhemos $S = S_1$ Teremos

→

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B}\cdot\vec{dl} = \mu_0 I \qquad (1°)$$

Agora, mantendo $\mathcal{C}$, vamos escolher como superfície S àquela desenhada abaixo e denominada de superfície S_2:

$$\vec{E} = \frac{Q}{\varepsilon_0 A}\,\hat{n} \qquad (2°)$$

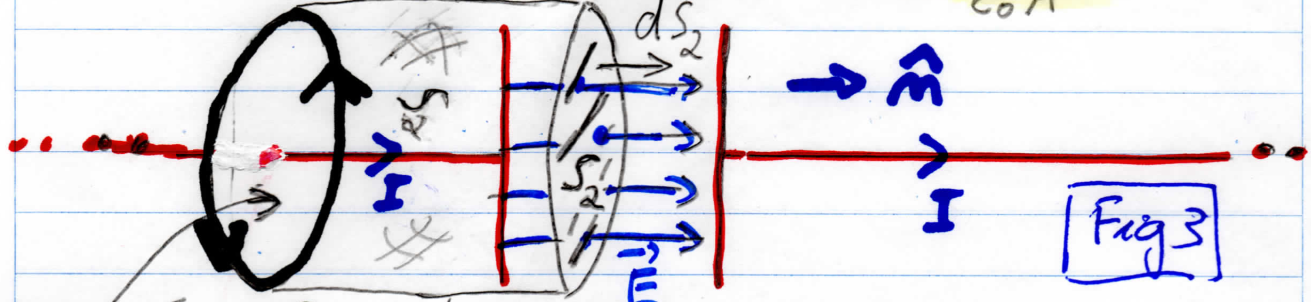


Fig 3

aqui é aberto (não tem tampa)

superfície aberta S_2 dada por um cilindro sem uma das tampas

Aplicando a Eq (4°) na situação desenhada acima (Fig 3):

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B}\cdot\vec{dl} = \mu_0 \underbrace{\iint_{S_2} \vec{j}\cdot\vec{dS}}_{=0} + \mu_0 \underbrace{\iint_{S_2} \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\cdot\vec{dS}}_{= \varepsilon_0 \iint_{\text{Tampa de } S_2} \frac{1}{\varepsilon_0 A}\frac{\partial Q}{\partial t}\, dS} \qquad (3°)$$

Na equação anterior, Eq (3°), usamos que entre as placas do capacitor $\vec{E} = \frac{Q}{\varepsilon_0 A}\hat{n}$, onde A é a área da placa, Q a carga sobre ela e $\hat{n}$ o versor mostrado na Fig 3.

Também usamos que $\iint_{S_2} \vec{J}\cdot d\vec{S} = 0$,

pois não existe corrente atravessando S_2, e $\iint_{S_2} \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\cdot d\vec{S} = \iint_{\text{Tampa } S_2} \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$,

pois só existe $\vec{E}$ entre as placas

(obs: na tampa de S_2 teremos que $d\vec{S} = dS\,\hat{n}$).

Assim, ficamos com:

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \frac{1}{A}\frac{\partial Q}{\partial t}\iint_{\text{Tampa de } S_2} dS \qquad (4°)$$

$\frac{\partial Q}{\partial t} = I$

e $\iint_{\text{Tampa de } S_2} dS = A$

$\longrightarrow$

$$\oint_{C} \vec{B} \cdot \vec{ds} = \mu_0 I \quad , \quad (5°)$$

↳ resultado da lei de Ampère-Maxwell quando a superfície aberta S assentada na curva C é escolhida como sendo S_2 (ver Fig 3).

Que é exatamente o mesmo resultado obtido quando escolhemos S dada por S_1 (ver Fig 2 e Eq 1°).