Maxwell's Equations - Review Notes

BasiCS Physics Program

2022 - 2023

1 Revisao de analise vetorial

1.1 O operador $\vec{\nabla}$

Note 1. Neste texto, ate que se mencione diferentemente, consideraremos o conjunto de coordenadas cartesianas ($\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$). Para as operacoes vetoriais, utilizaremos $\cdot$ para o produto escalar e $\times$ para o produto vetorial.

Como comumente apresentado nos cursos introdutorios de calculo, uma das primeiras atuacoes do operador $\vec{\nabla}$ e vista por meio do **gradiente**. Que, supondo um escalar A, possui a seguinte forma:

$$\vec{\nabla} A = \left(\frac{\partial A}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial A}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial A}{\partial z} \hat{z} \right) \tag{1}$$

Que e o gradiente de A

Isto pode ser reescrito de um modo mais interessante como:

$$\vec{\nabla} A = \left(\hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right) A \tag{2}$$

O termo entre parentesis e chamado de "del' e assim o denotamos como operador $\vec{\nabla}$:

$$\vec{\nabla} = \left(\hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \tag{3}$$

1.2 Divergente e Rotacional

Nesta subsecao, considere um vetor $\vec{A} = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z}$

Divergente

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \left(\hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z}) = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \tag{4}$$

Rotacional

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \hat{x}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \hat{y}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \hat{z}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) \tag{5}$$

1.3 O Laplaciano - Δ

O laplaciano consiste, basicamente, no operador ‘del’, porem, no lugar das derivadas primeiras, utilizamos as derivadas segundas. Voces podem ter visto, ao longo de seu percurso ate aqui, diversas notacoes, contudo, as mais usadas sao Δ ou ∇^2. Entretanto, a notacao mais utilizada ao longo dos cursos da CentraleSupelec e Δ e manteremos a mesma aqui neste texto.

1.3.1 Laplaciano de um escalar

Considere ϕ uma quantidade escalar, calculemos, então, o laplaciano deste escalar:

$$\Delta\phi = \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla}\phi\right) = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} \tag{6}$$

1.3.2 Laplaciano de um vetor

Considere $\vec{E}$ uma quantidade vetorial, tal que $\vec{E} = E_x\hat{x} + E_y\hat{y} + E_z\hat{z}$. O laplaciano deste vetor é, simplesmente, o vetor com os laplacianos de cada componente escalar:

$$\Delta\vec{E} = \begin{pmatrix} \Delta E_x & \Delta E_y & \Delta E_z \end{pmatrix} = \Delta E_x\hat{x} + \Delta E_y\hat{y} + \Delta E_z\hat{z} \tag{7}$$

Important relations
Consider the following four vectors: $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ and $\vec{E}$. Then one has:

$$\vec{A} \times \left(\vec{B} \times \vec{C}\right) = \left(\vec{A} \cdot \vec{C}\right)\vec{B} - \left(\vec{A} \cdot \vec{B}\right)\vec{C} \tag{8}$$

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}\right) - \Delta\vec{E} \tag{9}$$

Note 2. To make the relations easier to read, sometimes, we may use $\vec{grad}\phi = \vec{\nabla}\phi$, $\vec{div}\vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$ and $\vec{rot}\vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{E}$, where ϕ is a scalar quantity.