Ondas Planas (Parte 2)

Propagação numa direção qualquer

Aula passada, estudamos a solução que representa uma onda plana que se propaga na direção z, no sentido positivo (z^+).
Vamos agora estudar uma onda plana que se propaga numa direção arbitrária.
As Eqs de Maxwell p/ os fasores num meio L.I.H sem perdas e sem fontes ($\rho_f = 0$ e $\vec{J}_f = 0$), com permissividade elétrica ε e permeabilidade magnética μ, são dadas por

$$
\begin{cases}
\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = 0 & (1) \\
\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) = -j\omega\mu \vec{H}(\vec{r}) & (2) \\
\vec{\nabla} \cdot \vec{H}(\vec{r}) = 0 & (3) \\
\vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{r}) = j\omega\varepsilon \vec{E}(\vec{r}), & (4)
\end{cases}
$$

de onde tiramos as Eqs de Helmholtz p/ $\vec{E}(\vec{r})$ e $\vec{H}(\vec{r})$:

$$\nabla^2 \vec{E}(\vec{r}) + k^2 \vec{E}(\vec{r}) = 0 \qquad (5)$$

$$\nabla^2 \vec{H}(\vec{r}) + k^2 \vec{H}(\vec{r}) = 0 \qquad (6)$$

com $k = \frac{\omega}{\tilde{c}}$ e $\tilde{c} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$

Vamos considerar a seguinte solução p/ a eq. (5):

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_0 e^{-jk\hat{k}\cdot\vec{r}} \hat{e} \quad , \quad (7)$$

onde $k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$ & $\hat{k}$ é um versor arbitrário, assim como $\hat{e}$.

~x~

Exercício: Demonstre que (7) é solução de (5).

dica: o versor arbitrário $\hat{k}$ pode ser escrito como $\hat{k} = (\cos\alpha_1)\hat{x} + (\cos\alpha_2)\hat{y} + (\cos\alpha_3)\hat{z}$, onde $\cos\alpha_1$, $\cos\alpha_2$ e $\cos\alpha_3$ são os cosenos diretores, satisfazendo a relação $(\cos\alpha_1)^2 + (\cos\alpha_2)^2 + (\cos\alpha_3)^3 = 1$.

~x~

Repare que na exponencial de (7) existe o produto escalar do versor $\hat{k}$ com o vetor posição $\vec{r}$. Você não deve se assustar com isso, pois, como veremos em breve, a interpretação de (7)

é muito simples.
Antes de prosseguirmos com a interpretação física da solução (7), vamos ver se ela satisfaz a lei de Gauss dada pela Eq (1):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = 0$$

usando (7)

$$\vec{\nabla} \cdot \left(E_0 e^{-jk\hat{k}\cdot\vec{r}} \hat{e} \right) = 0$$

$$\hat{e} \cdot \vec{\nabla}\left(E_0 e^{-jk\hat{k}\cdot\vec{r}} \right) + E_0 e^{-jk\hat{k}\cdot\vec{r}} \vec{\nabla} \cdot \hat{e} = 0$$

$\vec{\nabla} \cdot \hat{e} = 0$ pois $\hat{e}$ é cte

$$\vec{\nabla}\left(E_0 e^{-jk\hat{k}\cdot\vec{r}} \right) = E_0 e^{-jk\hat{k}\cdot\vec{r}} (-jk)\hat{k}$$

$$E_0 e^{-jk\hat{k}\cdot\vec{r}} (-jk)\, \hat{k} \cdot \hat{e} = 0$$

como a eq. acima deve ser satisfeita p/ todo $\vec{r}$, devemos ter $\hat{k}\cdot\hat{e} = 0$

$$\boxed{\hat{k} \cdot \hat{e} = 0} \qquad (8)$$

Assim, para que (7) obedeça a Eq (1), $\hat{e}$ e $\hat{k}$ devem ser perpendiculares.

Agora, vamos entender o significado da solução (7).
Algo bastante esclarecedor é verificar de que forma a solução (7) se reduz ao caso de uma onda plana que se propaga na direção z, no sentido positivo (z^+). É simples ver que isso ocorre quando, em (7),

$\hat{k} = \hat{z}$. Nesse caso, teremos

que $\hat{k} \cdot \vec{r} = \hat{z} \cdot (x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}) = z$,

de tal forma que (7) se reduz a:

$$E(\vec{r}) = E_0 e^{-jk\hat{k}\cdot\vec{r}} \hat{e} = E_0 e^{-jkz} \hat{e},$$

se $\hat{k} = \hat{z}$

com $\hat{e} \perp \hat{z}$

que é o fasor da onda plana que se propaga na direção "z", no sentido positivo.

Com isso, parece que o versor $\hat{k}$, em (7), fornece a direção e sentido de propagação da onda plana, $\Longrightarrow$

e isso é o que realmente ocorre.
Uma forma mais rigorosa de comprovar o que estamos dizendo é mostrada abaixo:

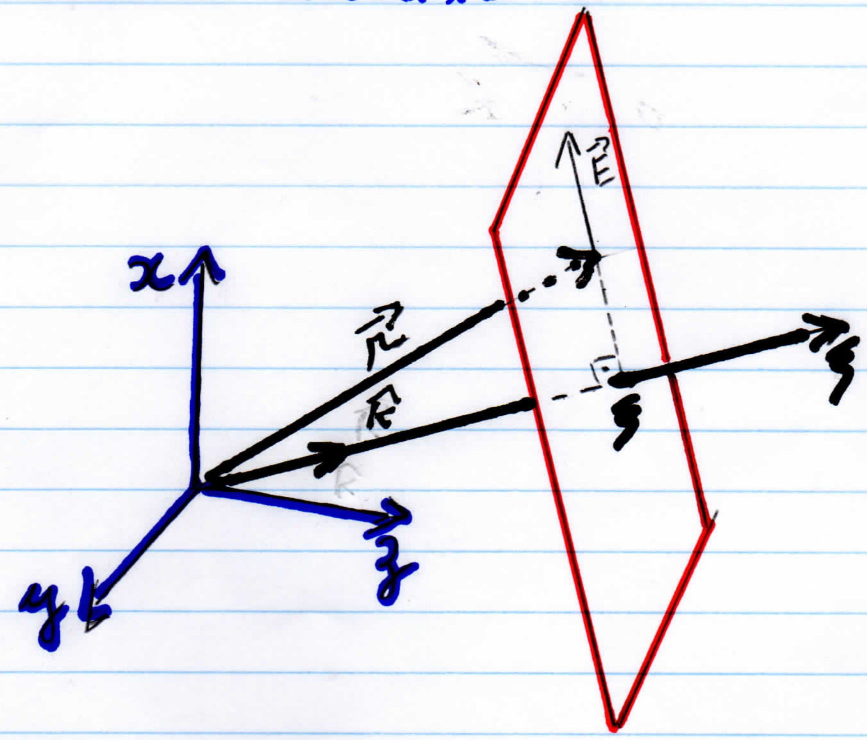


Fig 1

Repare que o versor $\hat{k}$ define um eixo, o qual chamaremos de eixo ξ, como mostra a Fig 1. Repare também que para cada valor fixo de ξ (sobre o eixo ξ) a equação $\hat{k} \cdot \vec{r} = \xi$ define um plano que é perpendicular ao versor $\hat{k}$ (e.: perpendicular ao eixo ξ)

e passa pelo ponto ξ em questão, como mostra a Fig 1. (Para aquele valor de ξ mostrado na Fig 1, todo ponto no espaço descrito pelo vetor posição $\vec{r}$, tal que $\hat{k} \cdot \vec{r} = \xi$, está localizado sobre a superfície do plano desenhado em vermelho na Fig 1.)

Portanto, para cada valor de ξ, temos um plano distinto ($\hat{k} \cdot \vec{r} = \xi$), perpendicular ao eixo ξ.

Então, escrevendo $\hat{k} \cdot \vec{r} = \xi$ na eq (7), temos:

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_0 e^{-jk\hat{k}\cdot\vec{r}}\,\hat{e} \underset{\hat{k}\cdot\vec{r}=\xi}{=} E_0 e^{-jk\xi}\,\hat{e}, \quad (9)$$

com $\hat{e} \perp \hat{k}$

que tem forma semelhante à onda plana que se propaga na direção z, só que agora na direção ξ. (sentido positivo ξ^+)

Sobre cada plano dado por um valor de ξ, o vetor campo elétrico é uniforme, com direção $\hat{e} \perp \hat{k}$.

Para o campo instantâneo:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left[E_0 e^{-jk\hat{k}\cdot\vec{r}} e^{j\omega t} \hat{e}\right]$$

$$= E_0 \cos(\omega t - k\hat{k}\cdot\vec{r})\,\hat{e}, \quad (10)$$

$$(\hat{e} \perp \hat{k})$$

onde assumimos E_0 real.

De acordo com aquilo que falamos acima, podemos colocar $\hat{k}\cdot\vec{r} = \xi$ e escrever:

$\Longrightarrow$

$$\vec{E}(\xi,t) = E_0 \cos(\omega t - k\xi)\,\hat{e}$$
$$= E_0 \cos\left[k\left(\xi - \frac{\omega}{k}t\right)\right]\hat{e}, \quad (11)$$

com $\xi = \hat{k}\cdot\vec{r}$
e $\hat{k} \perp \hat{e}$.

onde é simples constatar que se trata de uma onda plana que se propaga na direção ξ, sentido positivo, com velocidade $\bar{c} = \dfrac{\omega}{k} = \dfrac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$.

Com relação ao campo $\vec{H}(\vec{r})$, ele pode ser obtido a partir da lei de Faraday (Eq. 2):

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{j}{\omega\mu}\vec{\nabla}\times\vec{E}(\vec{r})$$

$\downarrow$ usando (7)

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{j}{\omega\mu}\vec{\nabla}\times\left(E_0 e^{-jk\hat{k}\cdot\vec{r}}\,\hat{e}\right)$$

$$= \frac{j}{\omega\mu}\left[\vec{\nabla}\left(E_0 e^{-jk\hat{k}\cdot\vec{r}}\right)\times\hat{e} + E_0 e^{-jk\hat{k}\cdot\vec{r}}\,\underbrace{\vec{\nabla}\times\hat{e}}_{0 \text{ pois } \hat{e} \text{ é cte.}}\right]$$

$\downarrow$

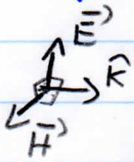
$$\vec{\nabla}(E_0 e^{-jk\hat{k}\cdot\vec{r}}) = E_0 e^{-jk\hat{k}\cdot\vec{r}}(-jk)\hat{k}$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{j}{\omega\mu}(-jk)\,\hat{k} \times \underbrace{E_0 e^{-jk\hat{k}\cdot\vec{r}}\,\hat{e}}_{\vec{E}(\vec{r})}$$

$$\boxed{\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{\eta}\,\hat{k} \times \vec{E}(\vec{r})} \quad , \quad (12)$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{E_0}{\eta} e^{-jk\hat{k}\cdot\vec{r}}\,\hat{k}\times\hat{e}$$

de onde vemos que $\vec{H}(\vec{r})$ é perpendicular ao campo elétrico $\vec{E}(\vec{r})$ e, assim como esse último, também é perpendicular ao versor $\hat{k}$, que dá a direção de propagação da onda plana.



$\vec{H} \perp \hat{k}$
$\vec{H} \perp \vec{E}$
$\vec{E} \perp \hat{k}$

Para o $\vec{H}$ instantâneo, temos:

$$\vec{H}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{\eta}\,\hat{k}\times\vec{E}(\vec{r})\,e^{j\omega t}\right]$$

$$= \mathrm{Re}\left[\frac{E_0}{\eta}\,e^{-jk\hat{k}\cdot\vec{r}}\,e^{j\omega t}\,\hat{k}\times\hat{e}\right]$$

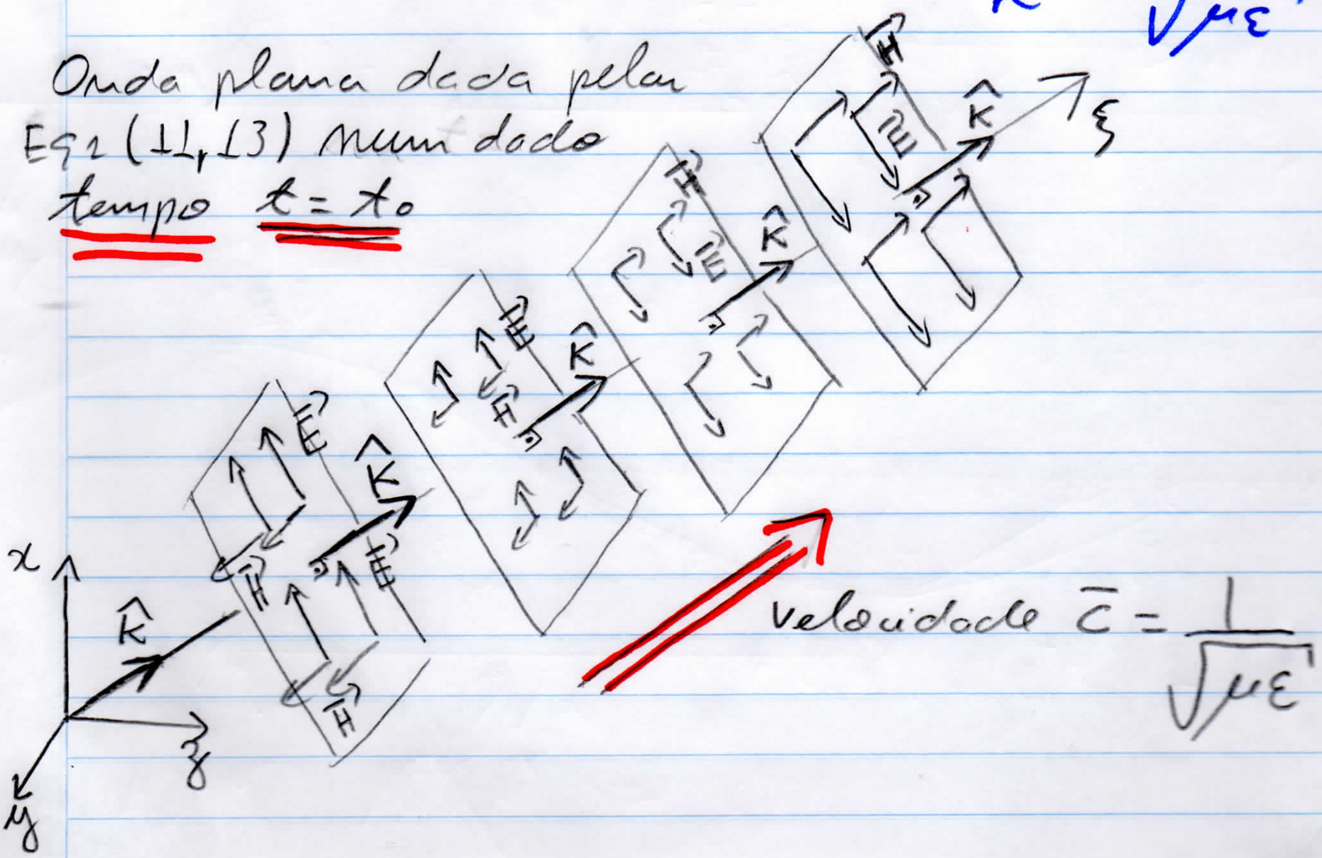
assumindo E_0 e η como reais

$$\vec{H}(\vec{r},t) = \frac{E_0}{\eta} \cos(\omega t - K\hat{k}\cdot\vec{r})\,\hat{k}\times\hat{e}, \quad (13)$$

com $\hat{k}\perp\hat{e}$

que, assim como $\vec{E}(\vec{r},t)$, representa uma onda plana que se propaga na direção e sentido de $\hat{k}$ com velocidade $\bar{c} = \frac{\omega}{K} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$.

Onda plana dada pelas Eqs (11, 13) num dado tempo $t = t_0$



Vetor de Poynting associado a uma onda plana uniforme linearmente polarizada que se propaga num meio L.I.H e sem perdas:

Vamos considerar a onda plana cujos fasores são

$$\begin{cases} \vec{E}(\vec{r}) = E_0 \, e^{-jk\hat{k}\cdot\vec{r}} \, \hat{e} \\ \vec{H}(\vec{r}) = \dfrac{E_0}{\eta} \, e^{-jk\hat{k}\cdot\vec{r}} \, (\hat{k}\times\hat{e}) \end{cases},$$

e cujos campos instantâneos são dados por (E_0 e η assumidos como reais)

$$\begin{cases} \vec{E}(\vec{r},t) = E_0 \cos(\omega t - k\hat{k}\cdot\vec{r}) \, \hat{e} \\ \vec{H}(\vec{r},t) = \dfrac{E_0}{\eta} \cos(\omega t - k\hat{k}\cdot\vec{r}) \, (\hat{k}\times\hat{e}) \end{cases}$$

$\Longrightarrow$

Nesse caso, temos que o vetor de Poynting é dado por:

$$\vec{S}(\vec{r},t) = \vec{E}(\vec{r},t) \times \vec{H}(\vec{r},t)$$

$$= \frac{E_0^2}{\eta} \cos^2(\omega t - k\hat{k}\cdot\vec{r})\, \hat{e} \times (\hat{k} \times \hat{e})$$

$$\hat{e} \times (\hat{k} \times \hat{e}) = \hat{k}\underbrace{(\hat{e}\cdot\hat{e})}_{1} - \hat{e}\underbrace{(\hat{k}\cdot\hat{e})}_{0 \text{ pois } \hat{k}\perp\hat{e}}$$

$$\vec{S}(\vec{r},t) = \frac{E_0^2}{\eta} \cos^2(\omega t - k\hat{k}\cdot\vec{r})\,\hat{k} \quad (14)$$

que também pode ser escrito como (usando que $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$)

$$\vec{S}(\vec{r},t) = \frac{E_0^2}{2\eta}\left[1 + \cos(2\omega t - 2k\hat{k}\cdot\vec{r})\right]\hat{k}, \quad (14')$$

de onde podemos ver que o vetor de Poynting possui uma frequência de oscilação (em torno de um valor fixo) duas vezes maior do que a frequência dos campos $\vec{E}(\vec{r},t)$ e $\vec{H}(\vec{r},t)$ da onda plana.

Também vemos que o vetor de Poynting da onda plana (que se propaga na direção e sentido dados por $\hat{k}$) possui direção e sentido dados por $\hat{k}$, o que significa que o fluxo de energia segue na direção de propagação da onda plana, como era de se esperar.

$\Longrightarrow$

Valor médio do vetor de Poynting

Muitas vezes estamos mais interessados no valor médio do vetor de Poynting, o qual é definido como:

$$\vec{S}_{av} = \frac{1}{T}\int_0^T \vec{S}(\vec{r},t)\,dt, \qquad (15)$$

ou seja, é a média temporal de $\vec{S}(\vec{r},t)$ tomada num período $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Usando (14') em (15), temos que o Poynting médio de uma onda plana uniforme com polarização linear, num meio L.I.H. e sem perdas é dado por

$\Longrightarrow$

$$\vec{S}_{av} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{E_0^2}{2\eta}\left[1+\cos(2\omega t - 2K\hat{k}\cdot\vec{r})\right]\hat{k}\,dt$$

$$\Big\downarrow \text{ como } T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\vec{S}_{av} = \frac{E_0^2}{2\eta}\hat{k} \qquad (16)$$

(Exercício: demonstre (16)).