

PORTADA ...



*Bla bla bla,*

*Bla bla bla,*

*Bla bla bla,*

*Bla bla bla*



*Frase de libro,*



# Agradecimientos

Agradecimientos

dadsadsad

as dasdas d sa dsad

sd as dsa d

adsasda

Texto ...





# Índice general

<b>Aportaciones</b>	<b>v</b>
<b>Resumen</b>	<b>vii</b>
<b>1 Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2 Preliminares</b>	<b>15</b>
2.1 Análisis de conceptos formales . . . . .	17
2.2 Lógica de Simplificación . . . . .	24
<b>I Claves y Generadores Minimales</b>	<b>35</b>
<b>3 Claves Minimales</b>	<b>37</b>
3.1 Aplicaciones . . . . .	42
3.2 El problema de la búsqueda de claves . . . . .	44
3.3 Algoritmos para el cálculo de claves . . . . .	48
3.4 Implementación . . . . .	55
3.5 Experimentos y resultados . . . . .	58
<b>4 Generadores Minimales</b>	<b>67</b>
4.1 Implicaciones y generadores minimales . . . . .	71
4.2 Métodos para calcular los generadores minimales . . . . .	72
4.2.1 Método MinGen . . . . .	73
4.2.2 Método MinGenPr . . . . .	77

4.2.3	Método GenMinGen . . . . .	79
4.3	Experimentos y resultados . . . . .	80
4.4	Computación paralela y generadores minimales . . . . .	85
<b>II</b>	<b>Sistemas de Recomendación Conversacionales</b>	<b>91</b>
<b>5</b>	<b>Sistemas de Recomendación</b>	<b>93</b>
5.1	Técnicas de recomendación . . . . .	96
5.2	Problemas comunes . . . . .	99
5.3	Evaluación de los sistemas de recomendación . . . . .	101
<b>6</b>	<b>Desarrollo de SR conversacional</b>	<b>103</b>
6.1	Presentación: <i>sicumaRS</i> . . . . .	105
6.2	Funcionamiento . . . . .	107
6.3	Medidas de evaluación . . . . .	114
<b>7</b>	<b>Experimentos realizados</b>	<b>117</b>
7.1	MovieLens <i>datasets</i> . . . . .	121
7.2	Hoteles Costa del Sol <i>dataset</i> . . . . .	125
7.3	POIs Mundial <i>dataset</i> . . . . .	129
7.4	Enfermedades y Síntomas <i>dataset</i> . . . . .	132
<b>8</b>	<b>Conclusiones y Trabajos Futuros</b>	<b>137</b>
	<b>Índice alfabético</b>	<b>147</b>
	<b>Lista de figuras</b>	<b>148</b>
	<b>Lista de tablas</b>	<b>150</b>

# Aportaciones

Carlos:

A continuación se expone una lista de los trabajos que han sido publicados como resultado de la investigación llevada a cabo a lo largo de esta tesis doctoral. Estas publicaciones avalan el trabajo realizado poniendo de manifiesto tanto su interés como su validez científica.

Carlos: ¿Se suele poner ahora una sección de aportaciones?

- (i) Fernando Benito-Picazo, Manuel Enciso, Carlos Rossi, Antonio Guevara. *Enhancing the conversational process by using a logical closure operator in phenotypes implications*. Mathematical Methods in the Applied Sciences, John Wiley & Sons Ltd. DOI: 10.1002/mma.4338, 2017.

Factor de impacto en J.C.R. 2016: 1,017. Posición 108 de 255 (Q2) en la categoría: ‘Mathematics, Applied’.

- (ii) Fernando Benito-Picazo, Pablo Cordero, Manuel Enciso, Ángel Mora. *Reducing the search space by closure and simplification paradigms. A parallel key finding method*. The Journal of Supercomputing, Springer. DOI: 10.1007/s11227-016-1622-1, 2016.

Factor de impacto en J.C.R. 2016: 1,326. Posición 52 de 104 (Q2) en la categoría: ‘Computer Science, Theory & Methods’.

- (iii) Fernando Benito-Picazo, Pablo Cordero, Manuel Enciso, Ángel Mora. *Closed sets enumeration: a logical approach*. Proceedings of the Seventeenth International Conference on Computational and Mathe-

mathematical Methods in Science and Engineering, CMMSE 2017. Cádiz, Spain, July 4-8, pp. 287-292, ISBN: 978-84-617-8694-7.

- (iv) Fernando Benito-Picazo, Manuel Enciso, Carlos Rossi, Antonio Guevara. *Conversational recommendation to avoid the cold-start problem*. Proceedings of the Sixteenth International Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering, CMMSE 2016. Cádiz, Spain, July 4-8, pp. 184-190, ISBN: 978-84-608-6082-2.
- (v) Fernando Benito-Picazo, Pablo Cordero, Manuel Enciso, Ángel Mora. *Keys for the fusion of heterogeneous information*. Proceedings of the Fifteenth International Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering, CMMSE 2015. Cádiz, Spain, July 6-10, pp. 201-211, ISBN: 978-84-617-2230-3.

# Resumen

Los sistemas de información están experimentando una gran expansión debido, en gran medida, al enorme crecimiento de la cantidad de información que se genera en la sociedad actual. Es por tanto un reto el investigar técnicas que permitan sacar partido y gestionar tales cantidades de información. En este marco, existen numerosos campos de conocimiento como pueden ser: sistemas inteligentes, big data [81], cloud computing, etc. Concretamente, esta tesis doctoral se sitúa en el ámbito del tratamiento de la información desde el punto de vista del análisis de conceptos formales (FCA), con la intención de aplicarlo en ámbitos diferentes de la ingeniería informática como son las bases de datos y los sistemas de recomendación.

FCA es una teoría matemática y un método para el análisis de datos en cuanto a sus relaciones y estructura. El cometido principal de FCA es definir un método basado en las matemáticas y la lógica que corresponda al pensamiento conceptual del ser humano. Es una técnica con una sólida base formal [43] que puede ser aplicable a un conjunto variado de disciplinas como pueden ser: data mining [119], sistemas inteligentes, machine learning [85], web semántica [127], desarrollo software, etc. FCA se ha establecido como una alternativa sólida al proceso de la adquisición y tratamiento de la información para su posterior uso en aplicaciones usando técnicas de razonamiento automático. Más concretamente, se ha visto reconocido mediante un aumento muy significativo de aplicaciones en áreas muy diversas entre las que podemos destacar la biomedicina, turismo, educación, web semántica, desarrollo de software, biología, redes sociales, etc. Gran parte de este creciente interés radica en disponer de un marco único en el que

poder desarrollar de principio a fin el ciclo que nos lleva de la información al conocimiento y, sobre él, poder realizar tareas de razonamiento automático.

Hay diversas técnicas usadas con mucho éxito en tareas de minería de datos, clasificación, etc. Pero una vez llevadas a cabo estas tareas, debemos hacer uso de otras áreas para trabajar con el conocimiento adquirido. Sin embargo, una gran diferencia entre gran parte de tales aproximaciones y FCA es que ésta última busca recopilar todo el conocimiento existente en el sistema. Así, mientras en otras áreas el término aproximado es habitual, aquí nos encontramos con un requerimiento importante en cuanto a la completitud semántica. Evidentemente, este objetivo conlleva una gran complejidad y es natural que el sistema se vea representado por retículos de conceptos de gran tamaño o por sistemas de implicaciones igualmente grandes. Sin embargo, se ha hecho un gran esfuerzo últimamente en el desarrollo de técnicas y métodos eficientes que han allanado el terreno en el marco del FCA clásico.

A partir de la información disponible, las relaciones lógicas que se obtienen son aquellas que vengan confirmadas por nuestros contextos formales, que podemos considerar como tablas de datos que relacionan la información existente entre un conjunto de objetos y un conjunto de atributos. Principalmente, existen dos formas básicas para representar el conocimiento extraído de estas tablas: los retículos de conceptos y los conjuntos de implicaciones.

Desde hace años, existen en la literatura estudios [67] donde se han investigado y comparado diferentes algoritmos para obtener el retículo de conceptos a partir del conjunto de datos. La dificultad de utilizar retículos de conceptos se debe a que su tamaño puede alcanzar cotas que, en el peor de los casos, supongan un coste computacional muy elevado para los métodos encargados de su construcción, lo cual constituye una limitación en la aplicación de FCA.

Por otro lado, las implicaciones pueden considerarse como reglas del tipo *si-entonces*, que reflejan un concepto muy intuitivo: cuando se verifica una premisa, entonces se cumple una conclusión. Consecuentemente, en FCA podemos formalizarlo de la siguiente forma: dados  $A$  y  $B$  subconjuntos

tos de atributos, diremos que se tiene la implicación  $A \rightarrow B$  si se verifica  $A' \in B'$ , es decir, todos los objetos que tienen cada atributo de  $A$  también tienen cada atributo de  $B$ . Con esta definición, las implicaciones obedecen los Axiomas de Armstrong [3] (reflexivo, aumentativo y transitivo) comunes en las dependencias funcionales que se dan entre los atributos de una base de datos y considerados como el primer sistema de inferencia para dependencias funcionales completo. Trabajar con conjuntos de implicaciones nos permite aplicar técnicas automáticas basadas en la lógica. Este hecho se alza como el objetivo principal de esta tesis doctoral, que principalmente consiste en aplicar mecanismos lógicos sobre conjuntos de implicaciones que nos permitan desarrollar métodos para realizar un tratamiento eficiente de la información.

La aproximación a través de la lógica es posible, en nuestro caso, gracias a sistemas axiomáticos válidos y completos como los mencionados Axiomas de Armstrong [3] y la Lógica de Simplificación [87]. Serán estos métodos los que, aplicados sobre conjuntos de implicaciones, nos proporcionen la base para trabajar sobre los siguientes tres campos de conocimiento: claves minimales, generadores minimales y sistemas de recomendación conversacionales.

## Objetivos

Se ha pretendido que la tesis implique unas contribuciones que reflejen la importancia de la información contenida dentro de los datos, la necesidad de su tratamiento eficiente y cómo los mecanismos teóricos de FCA y la lógica de simplificación son herramientas ideales para abordar estos problemas. Concretamente, nos hemos centrado en el estudio de sistemas de implicaciones basados en FCA que permiten mejorar el tratamiento de la información contenida en repositorios de datos, bases de datos, etc., y en cómo las técnicas así desarrolladas permiten mejorar aspectos relacionados con las bases de datos y los sistemas de recomendación. En concreto, respecto a las bases de datos, este conjunto de técnicas nos van a facilitar el descubrimiento de las claves y generadores minimales de un conjunto de

datos. Por otro lado, respecto a los sistemas de recomendación, mediante el uso de estas técnicas de tratamiento inteligente del conjunto de implicaciones de un determinado bloque de información, vamos a ser capaces de aligerar el proceso de recomendación y mejorar la interacción con el usuario aliviando la sobrecarga de información.

Por tanto, a lo largo de la tesis, se han investigado e implementado los métodos teóricos con el objetivo de verificar su eficiencia y su adaptabilidad a modelos reales en bases de datos y sistemas de recomendación. En particular, podemos decir que el objetivo fundamental de esta tesis consiste en aproximar problemas candentes en el ámbito de la manipulación de información mediante métodos que aprovechen el concepto de sistema de implicaciones. Estos sistemas presentan las siguientes características generales:

- Son una herramienta óptima en cuanto al ratio expresividad/coste computacional.
- Permiten utilizar mecanismos de lógica.
- Pueden ser extendidos (difusos [8], etc.).
- Permiten ser tratados en el ámbito de FCA.

En este sentido, tenemos que indicar que el desarrollo de la tesis ha conllevado la consecución de objetivos de forma teórica y práctica de forma simultánea. Podemos desglosarlos de la siguiente manera:

- Teóricos.
  - Obtención de nuevos métodos de tratamiento de la información mediante implicaciones y FCA, así como realizar avances sobre los ya existentes, que permiten realizar una gestión más inteligente y eficaz de la información.
  - Investigación y propuesta de nuevas estrategias para la extracción de claves y generadores minimales a partir de tablas de datos.



- Investigación y propuesta de nuevas estrategias de recomendación que mejoren la calidad de las recomendaciones y la interacción con el usuario.
- Prácticos.
  - Desarrollar las implementaciones y pruebas necesarias con los métodos teóricos de tratamiento de información basados en implicaciones que permitan verificar su funcionamiento sobre grandes cantidades de información.
  - Desarrollar SR que se beneficien de estos métodos y sean aplicables al entorno tecnológico actual.

Dada la naturaleza de los métodos desarrollados, para la realización de grandes pruebas de carga como son las necesarias para probar las implementaciones desarrolladas, será necesario contar con unos recursos inusualmente elevados en términos computacionales. Por esa razón, se ha efectuado una profunda labor de interacción con el Centro de Supercomputación y Bioinnovación de la Universidad de Málaga, de forma que los recursos allí presentes nos han permitido realizar las pruebas necesarias.

Previamente a entrar a describir de forma general el balance de aportaciones conseguidas, en este punto, creemos adecuado establecer un breve compendio de las disciplinas que han tenido que confluir para dar lugar a la elaboración de esta tesis doctoral. En primer lugar, aparece la Lógica como base fundamental donde sustentar el estudio. Además, existe una considerable intervención de las Matemáticas, no sólo como pilar para la base lógica, sino también como mecanismo para llevar a cabo gran cantidad de cálculos y aproximaciones a la hora de preparar los experimentos realizados. A las dos anteriores, y de forma evidente dada la naturaleza de la tesis, se suma la Ingeniería Informática, interviniendo de forma global en los diversos aspectos que han conducido la investigación a la práctica. Por un lado, existe una importante labor de ingeniería del software que ha permitido desarrollar los códigos necesarios para poner en el práctica los métodos teóricos y para conseguir los resultados que han conducido a las

aportaciones. En especial, debemos mencionar la labor de programación desarrollada en entornos de computación de alto rendimiento utilizando lenguajes de bajo nivel. Adicionalmente, se ha producido una profunda inmersión en el campo de los Sistemas de Información, en concreto, aquellos relacionados tanto a bases de datos como a sistemas de recomendación. Por tanto, la interacción conjunta de aspectos provenientes de todas estas disciplinas ha sido lo que ha conducido a culminar esta investigación con los resultados que se presentan en esta tesis doctoral reflejados en el apartado de aportaciones.

### **Contribuciones al campo de las claves y los generadores minimales**

En la primera parte de la tesis, vamos a estudiar dos campos de conocimiento que, si bien diferentes, están fuertemente relacionados: claves minimales y generadores minimales. Comenzamos por el tema de las claves minimales.

Encontrar todas las claves minimales en una tabla es un problema difícil que proporciona muchos beneficios en el diseño y la optimización de las bases de datos. Identificar adecuadamente las claves de un esquema relacional es una tarea crucial para muchas áreas actuales de gestión de la información como pueden ser el modelado de datos, optimización de consultas, indexado, etc. El concepto de clave es fundamental en cualquier modelo de datos, incluyendo el modelo de datos relacional de Codd [24].

Las claves nos especifican conjuntos de atributos de una relación tal que su proyección identifica unívocamente cada tupla de la relación. Una característica muy importante de las claves es su minimalidad. Denotamos una clave como minimal cuando cada atributo contenido en su conjunto de atributos es necesario para mantener la propiedad de clave, es decir, son claves sin atributos superfluos. Por lo tanto, en la literatura, el problema de las claves minimales consiste en encontrar todos los subconjuntos de atributos que conforman una clave minimal dado un conjunto de dependencias funcionales que se producen dentro de una tabla relacional.

Desde hace años existen varios algoritmos que utilizan diferentes técni-

cas clásicas para abordar este problema [3, 75, 138, 142]. Más recientemente, han aparecido métodos alternativos utilizando la lógica. En esta tesis nos concentraremos en esos algoritmos guiados por la lógica, en especial por la lógica  $SL_{FD}$  [27], y más específicamente, aquellos que usan el paradigma de Tableaux [88, 103] para encontrar las claves de un esquema relacional utilizando sistemas de inferencia.

En trabajos anteriores, se han introducido varios métodos basados en Tableaux [128, 129]. Sin embargo, estos métodos generan amplios espacios de búsqueda y, en muchos casos, la misma solución (la misma clave minimal) aparece al final de varias ramas del árbol que representa el espacio de búsqueda. Estas características intrínsecas de los métodos basados en Tableaux generan una fuerte limitación respecto al tamaño de los problemas que pueden tratarse, ya que para problemas grandes, los espacios de búsqueda pueden ser inmanejables como se ha demostrado en trabajos anteriores [26].

Sin embargo, una propiedad muy interesante dentro de los espacios de búsqueda inducidos por los métodos de Tableaux, es la total independencia de sus ramas, por lo que cada nodo del árbol de búsqueda podemos considerarlo como un subproblema independiente del problema original. Gracias a ello, trabajar con estos árboles de búsqueda nos proporciona un camino óptimo para construir algoritmos paralelos capaces de encontrar todas las claves minimales de una tabla mediante un procesamiento paralelo e independiente.

De esta forma, nuestro objetivo ha sido diseñar e implementar algoritmos de búsqueda de claves minimales basados en Tableaux que admitieran cantidades considerables de información a la entrada. Para ello, se han implementado códigos capaces de funcionar sobre arquitecturas de recursos hardware de forma paralela. Para realizar esta tarea de computación paralela hemos necesitado utilizar recursos computacionales especiales. En concreto, hemos hecho uso de los recursos disponibles en el Centro de Supercomputación y Bioinnovación de la Universidad de Málaga<sup>1</sup> sin los cuales

---

<sup>1</sup><https://www.scbi.uma.es/>

hubiera sido imposible realizar la gran mayoría de experimentos ya que, en muchos casos, las soluciones se han obtenido tras grandes periodos de tiempo de computación masiva como podemos apreciar en [11, 14].

En este sentido, nuestra contribución principal se produce de la siguiente forma. Basándonos en el sistema axiomático de la lógica  $SL_{FD}$  2.2, proponemos un nuevo método para la búsqueda de claves minimales, denominado *Closure Keys* (CK) 3.3, que incorpora un mecanismo eficiente de poda que utiliza el método de cierre basado en  $SL_{FD}$  para mejorar el método SST [28]. El nuevo método se basa en la relación fuerte entre la noción de clave y el operador de cierre definido en [86], el cual nos permite reducir el espacio de búsqueda realizando reducciones en el camino hacia las hojas, donde finalmente se obtienen las claves. Además, se llevan a cabo varios experimentos entre las implementaciones paralelas del método SST y del método CK (en entornos de supercomputación), para confirmar las mejoras que se han alcanzado, que principalmente son una significativa reducción del número de nodos del árbol de búsqueda y de los tiempos de ejecución como podemos apreciar en las contribuciones realizadas en [12, 14].

Pasamos ahora a recopilar las contribuciones realizadas en referencia al campo de los generadores minimales.

Los conjuntos cerrados y los generadores minimales son elementos fundamentales para construir una representación completa del conocimiento en FCA. Nuestra intención ha sido mostrar cómo utilizar el sistema de inferencia de  $SL_{FD}$  [27, 29] y la salida del algoritmo del cierre Cls como alternativa para enumerar todos los conjuntos cerrados y todos los generadores minimales de un conjunto de atributos y de implicaciones de entrada.

Para ello, se han realizado las implementaciones del método de cálculo de generadores minimales y de dos evoluciones de éste, en las que una nueva estrategia de poda va a propiciar que los resultados obtenidos en relación al tiempo de ejecución y la magnitud del árbol de búsqueda mejoren sobremanera. Además, de forma análoga al caso de las claves minimales en cuanto a poder tratar con cantidades sustanciales de información, se han realizado versiones de los métodos de forma que puedan resolverse

mediante técnicas de computación masiva basadas en estrategias paralelas en el entorno de computación de alto rendimiento que nos ofrece el Centro de Supercomputación y Bioinnovación de la Universidad de Málaga<sup>2</sup>.

El cálculo de los generadores minimales es un problema que no se reduce al ámbito teórico sino que se utiliza para resolver multitud de problemas. Como consecuencia, existen en la literatura amplios estudios sobre generadores minimales de los que podemos destacar [84, 97, 100].

Para  $X, Y \subseteq M$  que satisface  $X = Y_{\Sigma}^+$ , se dice que  $Y$  es un generador del conjunto cerrado  $X$ . Como consecuencia, cualquier subconjunto de  $X$  que contenga  $Y$  es también un generador de  $X$ . Como vamos a trabajar con conjuntos de atributos finitos, el conjunto de los generadores de un conjunto cerrado se pueden caracterizar por aquellos que sean minimales. Sin embargo, la enumeración de todos los conjuntos cerrados y sus generadores minimales a partir de un conjunto implicaciones constituye un problema complejo con un coste exponencial.

Por nuestra parte, vamos a hacer uso de los conjuntos de implicaciones como base de un método para enumerar todos los conjuntos cerrados y sus generadores minimales. Este método utiliza la lógica  $SL_{FD}$  y constituye una mejora considerable del mostrado en [29]. El método genera un árbol de búsqueda, utilizando la misma filosofía de Tableaux de las claves minimales, donde se van reflejando los conjuntos cerrados y sus generadores minimales. Este método recibe el nombre de MinGen y es la semilla para elaborar dos nuevas versiones mejoradas. En primer lugar, el método MinGenPr incorpora un mecanismo de poda para evitar la generación de generadores minimales y cierres redundantes, y en segundo lugar, GenMinGen propone una generalización de la estrategia de poda anterior al considerar el test de inclusión del subconjunto no sólo con la información de los nodos del mismo nivel, sino también con todos los generadores minimales calculados hasta ese momento.

Para demostrar el rendimiento de los métodos, se han implementado los códigos necesarios para cada uno de ellos y se ha procedido a resolver

---

<sup>2</sup><https://www.scbi.uma.es/>

una batería de problemas de entrada para poder el rendimiento logrado por cada uno de ellos. Para evaluar esta comparación, vamos a utilizar las mismas dos métricas que para el caso de las claves minimales, es decir, el tiempo de ejecución del algoritmo y el número de nodos en el árbol de búsqueda generado; y la justificación es idéntica que para claves minimales.

Después de realizar estos experimentos que se pueden resolver de forma local en una máquina convencional debido a la baja cantidad de información que contiene los ficheros originales, los resultados nos dicen que MinGen es superado por MinGenPr, y a su vez GenMinGen mejora este último.

Los números obtenidos para las resoluciones secuenciales de los algoritmos son muy prometedores. Sin embargo, al igual que en el caso de claves minimales, queremos ser capaces de aumentar el tamaño de los problemas de entrada y para ello, volvemos a introducirnos en tareas de computación paralela. De esta forma, se realizan versiones paralelas de los códigos de los métodos y se prueban en entornos de supercomputación, demostrando cómo el paralelismo es claramente apropiado para resolver este tipo de problemas y cómo nos permite trabajar con ficheros con una mayor cantidad de información. Para sustentar estas declaraciones sobre los resultados obtenidos, se incluye una serie de tablas y figuras donde poder apreciar fácilmente las mejoras alcanzadas. Las contribuciones realizadas para esta parte las podemos encontrar en [13].

## **Contribuciones al campo de los sistemas de recomendación conversacionales**

En la segunda parte de la tesis, vamos a introducirnos en el campo de los SR, y en especial, en el tipo de SR denominado conversacional [47, 69]. Haremos uso de los conceptos de FCA y en especial de los conjuntos de implicaciones y los operadores de cierre para lograr un desarrollo de SR y abordar uno de los problemas más comunes que aparecen en estos sistemas.

De forma muy básica, podríamos considerar a los SR como herramientas que agrupan un amplio abanico de técnicas y aplicaciones de los sistemas de información con la intención de potenciar y favorecer la experiencia de

usuario mediante recomendaciones. Es un campo de conocimiento con un amplio recorrido desde décadas [1, 56] pero que actualmente está consiguiendo una relevancia muy considerable debido sobre todo a la expansión de las nuevas tecnologías que está propiciando un mayor acercamiento a la mayoría de la sociedad debido a su capacidad para realizar todo tipo de recomendaciones sobre diversos elementos al alcance de todos (libros, música, empleos, etc.).

Existe una gran cantidad de tipos de SR, normalmente agrupados según la estrategia de recomendación que utilizan. Entre estos tipos podemos nombrar los SR: basados en contenido, basados en conocimiento, contextuales, grupales, conversacionales, de filtrado colaborativo, entre varios otros. Podemos apreciar una clasificación más detallada en el libro de Adomavicius y Tuzhilin [2], el cual podemos considerar como una de las referencias más importantes del campo.

Del mismo modo que existe tal abanico de posibilidades en cuanto a los tipos de SR que existen, es natural que la cantidad de problemas a los que tienen que enfrentarse estos sistemas, tanto en su fase de desarrollo como de aplicación, sea numerosa. Podemos recopilar una lista con los más comunes tales como: arranque en frío, privacidad, oveja-negra, escasez, diversidad, etc. En esta lista podemos incluir un problema muy común del que adolecen gran parte de los SR, es el denominado problema de la alta dimensionalidad [90, 106]. Este problema aparece en los SR cuando es necesario trabajar sobre *datasets* con un alto número de elementos. Básicamente, podemos decir que este problema refleja la dificultad existente para elaborar una recomendación cuando son muchos los elementos entre los que hay que decidir, pero también cuando son muchas las características que cada elemento puede cumplir.

Como ejemplo intuitivo, supongamos que queremos elegir un restaurante para cenar pero tenemos una lista de 100 locales disponibles, de los cuales cada uno de ellos además puede ofrecer una lista enorme de servicios diferentes (tipo de cocina, terraza al aire libre, comedor, música en directo, acceso minusválidos, precio, etc.).

Para abordar este problema, podemos encontrar muchos trabajos en la

literatura sobre la reducción de la dimensión de la información que pueden ayudarnos a descartar aquellas características que no son merecedoras de ser considerados según diferentes criterios. En [22, 60, 124], se establecen enfoques basados en el conocimiento para los procesos conversacionales, se tiene en cuenta el número de pasos de la conversación, se demuestra que si el usuario es el encargado de la selección de atributos, los resultados son mejores que si es el sistema mismo el encargado de dicha selección. Este hecho respalda nuestro enfoque en el cual el humano experto guía la conversación y el proceso de selección de características.

Por nuestra parte, el objetivo ha sido abordar el problema de la alta dimensionalidad en los SR a través de un proceso de selección de atributos por parte del usuario mediante un SR conversacional que utilice características de los SR basados en contenido y en conocimiento. Para ello el SR desarrollado (denominado *sicumaRS*) hará un tratamiento eficiente de la información haciendo uso de FCA, las implicaciones y los operadores de cierre. En concreto haremos uso de la  $SL_{FD}$  [27] y del algoritmo del cierre Cls.

Para poder utilizar *sicumaRS*, hay que tener en cuenta que lo primero que vamos a necesitar son *datasets* con elementos sobre el que poder hacer recomendaciones. Pero además, estos *datasets* tendrán que contener la información según una representación binaria, es decir, el valor de cada uno de los atributos asociados a cada elemento del sistema será un valor binario que representará si ese elemento verifica ese atributo o no lo hace. Una vez tengamos un *dataset* en ese formato, necesitamos el conjunto de implicaciones que se verifican en los datos y para ello se hará uso de herramientas ya existentes como son [57, 136, 137]. Una vez tengamos tanto *dataset* como conjunto de implicaciones, ya proceder a utilizar *sicumaRS*.

Dada la naturaleza conversacional de *sicumaRS*, el proceso de recomendación para el usuario se desarrolla por medio de un diálogo. En éste, el usuario irá solicitando características que quiere que cumpla el elemento que busca (e.g. precio moderado, si busca una bicicleta; cocina sueca, para un restaurante; resolución en megapíxels, si busca un cámara de fotos, etc.).



Tras la selección de característica por parte del usuario, el sistema ejecuta su algoritmo que realiza dos tareas fundamentales, calcular el conjunto cierre correspondiente a la selección del usuario y calcular el conjunto de implicaciones restante. Al terminar y tras lanzar una consulta a base de datos, el SR propone una recomendación. El usuario puede aceptar la recomendación o continuar el proceso añadiendo nuevas características que refinen el resultado. Sin embargo, a cada paso, no tendrá que decidir sobre todo el conjunto de posibilidades original, sino que ahora, sólo tendrá que navegar entre aquellas que vayan quedando tras la aplicación del algoritmo, es decir, las que no estén lógicamente implícitas por la selección actual; aliviando la sobrecarga de información al usuario.

El gran logro de usar *sicumaRS* con el algoritmo CIs es que estamos reduciendo el número de características o atributos y el número de implicaciones *simultáneamente*, y por tanto, en cada nuevo paso del diálogo no necesitamos volver a extraer el nuevo conjunto de implicaciones, lo cual es una tarea de *data-mining* con coste exponencial, sino que podemos continuar la interacción a partir de aquí, donde tanto atributos como implicaciones han sido reducidas, y por tanto con coste *lineal*.

Desde que se inició la investigación de los SR, la evaluación de las predicciones y recomendaciones se ha convertido en un aspecto muy importante [21, 54]. La investigación en el campo de los SR requiere medidas de calidad y métricas de evaluación [49] para conocer la calidad de las técnicas, métodos y algoritmos para las predicciones y recomendaciones. Las métricas de evaluación [55] y los frameworks de evaluación [17] facilitan la comparación de varias soluciones para el mismo problema. Teniendo en cuenta la gran variedad de factores que pueden intervenir en el funcionamiento de los SR, la primera tarea a llevar a cabo es evaluar las opciones para averiguar qué métricas son las que mejor se adaptan al SR que queremos evaluar.

En nuestro caso, dado que estamos tratando con un SR conversacional, puede ser evidente que la primera medida que podemos aplicar es calcular el número de pasos que se producen en la conversación [80]. Por contra, otras métricas tan populares en los SR como son *Precision*, *Recall* [50], MAE, RMSE, etc., no son adecuadas de aplicar en nuestro caso porque

obtendríamos siempre valores máximos en ambas métricas. Esto se debe a que estamos tratando con implicaciones, y por tanto, no estamos ante un método aproximando sino que se está asegurando que la fiabilidad es del 100 %.

Por ello, además de calcular el número de pasos de la conversación, se han definido dos medidas de evaluación adicionales para medir el rendimiento del sistema, con lo que la lista de medidas de evaluación utilizadas sobre *sicumaRS* queda como sigue:

- (i) **Número de pasos.** Registra el número de pasos que se dan en el diálogo y en consecuencia, el número de atributos seleccionados por el usuario. Nos proporciona una visión clara de si el sistema ha necesitado mucha o poca interacción para satisfacer la demanda del usuario.
- (ii) **Velocidad de poda en cada paso del diálogo.** Evalúa el porcentaje de atributos que el sistema libera al usuario de tener en cuenta a lo largo de la conversación y de forma acumulativa de un paso al siguiente. Refleja si los ratios de poda del algoritmo son mejores al principio de la conversación o en los pasos posteriores
- (iii) **Reducción de atributos.** Informa de la reducción global de atributos que ha realizado el sistema al terminar el diálogo.

Una vez tuvimos el sistema definido junto con su funcionamiento y las métricas de evaluación que se van a usar, pasamos a la elaboración de una amplia serie de experimentos con los que comprobar la viabilidad, la utilidad y el beneficio que obtenemos con el trabajo desarrollado 7.

El capítulo de experimentos 7 es realmente importante por varias razones. La primera es, obviamente, dar validez al estudio y el desarrollo realizado; pero los experimentos llevados a cabo también nos sirven para poner de manifiesto el recorrido efectivo desde la parte teórica hasta la práctica que ha finalizado con una aplicación real de ingeniería.

Se han efectuado experimentos que incluyen tanto información, podríamos llamar de prueba, como información real. Los resultados demuestran cómo

el sistema desarrollado cumple con su cometido y además, sobrepasa otras propuestas existentes en la literatura [124]. En este sentido, se ha trabajado y evaluado *sicumaRS* sobre *datasets* que han sido un referente a la hora de probar el funcionamiento de estos sistemas como son los *datasets* de MovieLens.

Adicionalmente, ya que muchos de los *datasets* disponibles en la web necesitaban un cierto tratamiento previo para poder adaptarse al formato aceptado por *sicumaRS*, se optó por construir *datasets* propios a partir de información disponible en la web. Para ello se crearon *datasets* como son Hoteles Costa del Sol 7.2, POIs Mundial 7.3, o Enfermedades y Síntomas 7.4, este último utilizado en una de las contribuciones que avalan la tesis [15].

Sobre cada uno de ellos se realizó un test consistente en simular 100 diálogos entre el usuario y el sistema donde se aplicaron las métricas mencionadas y se recogieron los resultados obtenidos. En cada caso, se hace un breve compendio a modo de conclusión donde se recoge las mejoras alcanzadas y se justifica el progreso sobre otras alternativas.

Principalmente, podemos afirmar que hemos conseguido dar un paso adelante para abordar el problema de la alta dimensionalidad que aparece en los SR gracias al tratamiento que realizamos sobre los datos mediante el uso de los conjuntos de implicaciones y los operadores de cierre.



# Overview

Information systems are experiencing a great expansion due, to a large extent, to the growth of the amount of information generated in today's society. It is therefore a challenge to investigate techniques that allow us to take advantage of and manage such amounts of information. In this framework, there exist numerous fields of knowledge such as: intelligent systems, big data [81], cloud computing, etc. Specifically, this doctoral thesis concerns to the field of information processing from the point of view of the analysis of formal concepts (FCA), with the intention of applying it in different areas of computer engineering such as databases and recommender systems.

FCA is a mathematical theory and a method for data analysis in terms of its relationships and structure. The main task of FCA is to define a method based on mathematics and logic that corresponds to the conceptual thinking of the human being. It is a technique with a solid formal basis [43] that can be applicable to a varied set of disciplines such as: data mining [119], intelligent systems, machine learning [85], semantic web [127], software development, etc. FCA has established itself as a solid alternative to the process of acquiring and processing information for later use in applications using automatic reasoning techniques. More specifically, it has been recognized through a very significant increase of applications in very diverse areas, among which we can highlight biomedicine, tourism, education, semantic web, software development, biology, social networks, etc. Much of this growing interest lies in having a unique framework in which to develop, from the beginning to the end, the cycle that takes us from information to

knowledge and, on it, to be able to perform tasks of automatic reasoning.

There are several techniques used with great success in tasks of data mining, classification, etc. But once these tasks are carried out, we must make use of other areas to work with the acquired knowledge. However, a big difference between a large part of such approaches and FCA is that the latter seeks to collect all the existing knowledge in the system. Thus, while in other areas the approximate term is habitual, here we find an important requirement in terms of semantic completeness. Obviously, this objective entails a great complexity and it is natural that the system is represented by reticles of large concepts or by systems of equally large implications. However, a great effort has been made lately in the development of efficient techniques and methods that have drawn the way in the framework of the classic FCA.

From the information available, the logical relationships obtained are those that are confirmed by our formal contexts, which can be considered as data tables that relate the existing information between a set of objects and a set of attributes. Mainly, there are two basic ways to represent the knowledge drawn from these tables: the concept grids and the implication sets.

For years, there have been studies in the literature [67] where different algorithms have been researched and compared to obtain the concept grid from the data set. The difficulty of using concept grids is due to the fact that their size can reach levels that, in the worst case, suppose a very high computational cost for the methods in charge of their construction, which constitutes a limitation in the application of FCA.

Furthermore, the implications may be considered as rules of type *if-then*, reflecting a very intuitive concept: when a premise is proved, a conclusion is met. Consequently, in FCA can be formalized as follows: Given  $A$  and  $B$  subsets of attributes, we would have the implication  $A \rightarrow B$  if it is verified that  $A' \in B'$ , i.e. all objects that have each attribute of  $A$  also have each attribute of  $B$ . With this definition, the implications obey the Armstrong's axioms [3] (reflective augmentative and transitive) common in functional dependencies that exist between the attributes of a database and considered

as the first complete inference system for functional dependencies. Working with sets of implications allows us to apply automatic techniques based on logic. This stands as the main goal of this thesis, which mainly consists of applying logical mechanisms on sets of implications which allow us to develop methods for efficient data processing.

The approximation through logic is possible, in our case, thanks to valid and complete axiomatic systems such as the Armstrong's axioms [3] and the Simplification Logic [87]. It will be these methods that, applied on sets of implications, provide us with the basis to work on the following three fields of knowledge: minimal keys, minimal generators and conversational recommender systems.

## Aims and goals

It has been intended that the thesis involves contributions that reflect the importance of the information contained within the data, the need for efficient treatment and how the theoretical mechanisms of FCA and the Simplification Logic are ideal tools to address these problems. Specifically, we have focused on the study of systems of implications based on FCA that allow improving the treatment of the information contained in data repositories, databases, etc., and how the techniques developed in this way allow improving aspects related to the bases of data and recommender systems. In particular, with respect to databases, this set of techniques will facilitate the discovery of keys and minimum generators of a data set. On the other hand, regarding recommender systems, by using these techniques of intelligent treatment of the set of implications of a given block of information, we will be able to lighten the recommendation process and improve the interaction with the user, alleviating the information overload.

Therefore, throughout the thesis, the theoretical methods have been researched and implemented in order to verify their efficiency and their adaptability to real models in databases and recommender systems. Concretely, we can say that the fundamental objective of this thesis is to approach hot problems in the field of information manipulation through methods that

take advantage of the concept of implications system. These systems have the following general characteristics:

- They are an optimal tool in terms of the expressiveness/computational cost ratio.
- They allow to use logic mechanisms.
- They can be extended (fuzzy systems [8], etc.).
- They allow to be faced by means of FCA.

In this sense, we have to indicate that the development of the thesis has led to the achievement of objectives in a theoretical and practical way simultaneously. We can list them down as follows:

- Theoretical aims.
  - Obtaining new methods of information processing through implications and FCA, as well as making progress on existing ones, which allow a more intelligent and efficient management of information.
  - Research and proposal of new strategies for the discovery of keys and minimum generators from data tables.
  - Research and proposal of new recommendation strategies that improve the quality of the recommendations and the interaction with the user.
- Practical aims.
  - Develop the necessary implementations and tests with the theoretical methods of information processing based on implications that allow to verify its performance on large amounts of information.
  - Develop SR that benefit from these methods and are applicable to the current technological environment.



Given the nature of the methods developed, in order to carry out large load tests such as those necessary to test the developed implementations, it will be necessary to have unusually high resources in computational terms. For this reason, a deep interaction work has been carried out with the Supercomputing and Bioinnovation Center of the University of Malaga, so that the resources available have allowed us to carry out the necessary tests.

Before going on to describe in a general way the balance of contributions obtained, at this point, we believe it is appropriate to establish a brief compendium of the disciplines that have had to come together in order to produce this doctoral thesis. In the first place, Logic appears as the fundamental basis to sustain the study. In addition, there is a considerable intervention of Mathematics, not only as a pillar for the logical basis, but also as a mechanism to carry out a large number of calculations and approximations when preparing the experiments. To the two previous ones, and of evident form given the nature of the thesis, the Computer Engineering is added. This last one takes part in a global form in the diverse aspects that have led the investigation to the practice. On the one hand, there is an important work of software engineering that has allowed to develop the necessary codes to put into practice the theoretical methods and to achieve the results that have led to the contributions. In particular, we must mention the programming work developed in high performance computing environments using low level languages. Additionally, there has been a deep immersion in the field of Information Systems, specifically, those related to both databases and recommender systems. Therefore, the joint interaction of aspects from all these disciplines has been what has led to culminate this research with the results presented in this doctoral thesis reflected in the section of contributions .

### **Contributions to the field of keys and minimal generators**

In the first part of the thesis, we will study two fields of knowledge that, although different, are strongly related: minimal keys and minimal generators. We begin with the topic of minimal keys.

Finding all the minimal keys in a table is a difficult problem that provides many benefits in the design and optimization of the databases. Identifying properly the keys of a relational scheme is a crucial task for many current areas of information management, such as data modeling, query optimization, indexing, etc. The key concept is fundamental in any data model, including the relational data model of Codd [24].

Keys specify sets of attributes of a relation such that its projection uniquely identifies each tuple of the relation. A very important characteristic of the keys is their minimality. We denote a key as minimal when each attribute contained in its set of attributes is necessary to maintain the key property, that is, they are keys without superfluous attributes. Therefore, in the literature, the problem of minimal keys is to find all subsets of attributes that make up a minimal key given a set of functional dependencies that occur within a relational table.

For years, there are several algorithms that use different classical techniques to address this problem [3, 75, 138, 142]. More recently, alternative methods have appeared using logic. In this thesis we will concentrate on those algorithms guided by logic, especially by the logic  $SL_{FD}$  [27], and more specifically, those that use the paradigm of Tableaux [88, 103] to find the keys of a relational scheme using inference systems. The Tableaux paradigm can be considered a flexible and powerful framework for designing automated deduction methods to solve complex problems in an efficient way.

In previous works, several methods based on Tableaux [128, 129] have been introduced. However, these methods generate extensive search spaces and, in many cases, the same solution (the same minimal key) appears at the end of several branches of the tree that represents the search space. These intrinsic characteristics of the Tableaux-based methods generate a strong limitation regarding the size of the problems that can be addressed, since for large problems, the search spaces can be unmanageable as has been demonstrated in previous works [26].

However, a very interesting property within the search spaces induced by the Tableaux methods, is the total independence of its branches, so that

each node of the search tree can be considered as a subproblem independent of the original problem. Thanks to this, working with these search trees provides us with an optimal way to build parallel algorithms capable of finding all the minimum keys of a table through parallel and independent processing.

In this way, our goal has been to design and implement search algorithms for minimal keys based on Tableaux that allow considerable amounts of information at the input. For this, codes have been implemented capable of operating on large quantities of hardware resources in parallel. To perform this task of parallel computing we have needed to use special computational resources. Specifically, we have made use of the resources available at the Supercomputing and Bioinnovation Center of the University of Malaga<sup>3</sup> without which it would have been impossible to carry out the vast majority of experiments since, in many cases, the solutions have been obtained after large periods of time of massive computing as we can see in [11, 14].

In this sense, our main contribution is produced in the following way. Based on the axiomatic system of logic  $SL_{FD}$  2.2, we propose a new method called *Closure Keys* 3.3 that incorporates an efficient pruning mechanism that uses the method of closure based in  $SL_{FD}$  to improve the SST method [28]. The new method is based on the strong relationship between the notion of key and the closing operator defined in [86], which allows us to reduce the search space by making reductions on the way to the leaves, where we finally obtain the keys. In addition, several experiments are carried out between the parallel implementations of the SST method and the CK method (in supercomputing environments), to confirm the improvements that have been achieved, which are mainly a significant reduction in the number of search tree nodes and of the execution times as we can see in the contributions made in [12, 14].

We now go on to gather the contributions made in reference to the field of minimal generators.

The closed sets and the minimal generators are fundamental elements

---

<sup>3</sup><https://www.scbi.uma.es/>

to build a complete representation of knowledge in FCA. Our intention has been to show how to use the inference system of  $SL_{FD}$  [27, 29] and the output of the algorithm CIs as an alternative to list all the closed sets and all the minimal generators of a set of attributes and implications at the input.

In this way, the implementations of the method to calculate the minimal generators and two evolutions of this one have been made, in which a new pruning strategy is going to propitiate that the results obtained in relation to the execution times and the magnitude of the search tree improve greatly. In addition, analogous to the case of minimal keys in dealing with substantial amounts of information, versions of the methods have been made so that they can be solved by masive computing techniques based on parallel strategies in the high computing environment offered by the Supercomputing and Bioinnovation Center of the University of Malaga<sup>4</sup>.

The calculation of the minimal generators is a problem that is not reduced to the theoretical field but is used to solve a multitude of problems. As a result, there are extensive studies in the literature on minimal generators, of which we can highlight [84, 97, 100].

For  $X, Y \subseteq M$  satisfying  $X = Y_{\Sigma}^+$ , it is said that  $Y$  is a generator of the closed set  $X$ . As a consequence, any subset of  $X$  containing  $Y$  is also a generator of  $X$ . Since we are going to work with finite sets of attributes, the set of generators of a closed set can be characterized by those that are minimal. However, the enumeration of all closed sets and their minimal generators from a set of implications constitutes a complex problem with an exponential cost.

On our part, we are going to make use of the sets of implications as the basis of a method to list all the closed sets and their minimum generators. This method uses the logic  $SL_{FD}$  and constitutes a considerable improvement of the one shown in [29]. The method generates a search tree, using the same Tableaux philosophy of the minimal keys, where the closed sets and their minimal generators are reflected. This method is called

---

<sup>4</sup><https://www.scbi.uma.es/>

MinGen and is the seed for two new improved versions. First, the method MinGenPr incorporates a pruning mechanism to avoid the generation of minimal generators and redundant closures, and secondly, GenMinGen proposes a generalization of the previous pruning strategy when considering the inclusion test of the subset not only with the information of the nodes of the same level, but also with all the minimal generators calculated up to that moment.

To demonstrate the performance of the methods, the necessary codes have been implemented for each one of them and a battery of input problems has been solved in order to show the performance achieved by each one of them. To evaluate this comparison, we will use the same two metrics as for the case of the minimal keys, that is, the execution time of the algorithm and the number of nodes in the generated search tree; and the justification is certainly the same.

After performing these experiments that can be solved locally in a conventional machine due to the low amount of information that contains the original files, the results tell us that MinGen is surpassed by MinGenPr, and in turn GenMinGen improves the latter.

The numbers obtained for the sequential resolutions of the algorithms are very promising. However, as in the case of minimal keys, we want to be able to increase the size of the input problems and to do this, we return to parallel computing tasks. In this way, parallel versions of the codes of the methods are made and tested in supercomputing environments, demonstrating how parallelism is clearly an appropriate strategy to solve this type of problems and how it allows us to work with files with a greater amount of information. To support these statements about the results obtained, a series of tables and figures are included to easily appreciate the improvements achieved. The contributions made for this part can be found in [13].

## Contributions to the field of conversational recommender systems

In the second part of the thesis, we are going to introduce ourselves into the field of SR, and especially in the SR type called conversational [47, 69]. We will make use of the concepts of FCA and especially of the sets of implications and closing operators to achieve the development of a SR and address one of the most common problems that appear in these systems.

In a very basic way, we could consider SR as tools that group a wide range of information system techniques and applications with the intention of enhancing and favoring the user experience through recommendations. It is a field of knowledge with a broad trajectory since decades [1, 56] but which is currently achieving a very considerable relevance due mainly to the expansion of new technologies that is favoring a greater approach to the majority of society due to its ability to make all kinds of recommendations on various elements available to everyone (books, music, jobs, etc.).

There are a large number of SR types, usually grouped according to the recommendation strategy they use. Among these types we can name the SR: content-based, knowledge-based, contextual, group, conversational, collaborative filtering, among several others. We can appreciate a more detailed classification in the book of Adomavicius and Tuzhilin [2], which we can consider as one of the most important references in the field.

In the same way that there is such a wide range of possibilities as regards the types of SR that exist, it is natural that the number of problems that these systems have to face, both in their development and application phases, are numerous. We can compile a list with the most common such as: cold start, privacy, black sheep, scarcity, diversity, etc. In this list we can include a very common problem that a lot of SRs suffer from, it is the so-called problem of high dimensionality [90, 106]. This problem appears in the SR when it is necessary to work on *datasets* with a high number of elements. Basically, we can say that this problem reflects the difficulty existing to elaborate a recommendation when there are many elements to decide between, but also when there are many characteristics that each

element can fulfill.

As an intuitive example, suppose we want to choose a restaurant for dinner but we have a list of 100 places available, of which each of them can also offer a huge list of different services (type of kitchen, outdoor terrace, dining room, music live, handicapped access, price, etc.).

To address this problem, we can find many works in the literature on the reduction of the information dimension that can help us discard those characteristics that are not worthy of being considered according to different criteria. In [22, 60, 124], knowledge-based approaches are established for conversational processes, the number of steps in the conversation is taken into account, it is shown that if the user is in charge of the selection of attributes, the results are better than if the system itself rules such selection. This fact supports our approach in which the human expert guides the conversation and the process of feature selection.

For our part, the objective has been to address the problem of high dimensionality in SR through a process of selection of attributes by the user through a conversational SR that uses SR characteristics based on content and knowledge. For this, the developed SR (named *sicumaRS*) will make an efficient treatment of the information making use of FCA, the implications and closing operators. Specifically, we will use the  $SL_{FD}$  [27] and the closure algorithm Cls.

In order to use *sicumaRS*, we must keep in mind that the first thing we will need are *datasets* with elements on which we can make recommendations. But in addition, these *datasets* will have to contain the information according to a binary representation, that is, the value of each of the attributes associated with each element of the system will be a binary value that will represent if that element verifies that attribute or not. Once we have a *dataset* in that format, we need the set of implications that are verified in the data and for this we will use already existing tools such as [57, 136, 137]. Once we have both *dataset* as a set of implications, we are ready to proceed with *sicumaRS*.

Given the conversational nature of *sicumaRS*, the recommendation pro-

cess for the user is developed through a dialogue. In this, the user will request features that he wants the item he is looking for (e.g. moderate price, if he is looking for a bicycle, Swedish cuisine, for a restaurant, resolution in megapixels, if he looks for a camera, etc.). After the feature selection by the user, the system executes its algorithm that performs two fundamental tasks, calculate the closure set corresponding to the user's selection and calculate the remaining set of implications. Upon completion and after launching a database query, the SR proposes a recommendation. The user can accept the recommendation or go ahead with the dialogue by adding new features that refine the result. Fortunately, at each step, you will not have to decide on the original set of possibilities, but now you only have to navigate between those that remain after the application of the algorithm, that is, those that are not logically implied by the current selection; relieving the information overload to the user.

The great achievement of using *sicumaRS* with the algorithm Cls is that we are reducing the number of characteristics or attributes and the number of implications *simultaneously*, and therefore, in each new step of the dialog we do not need to extract the new set of implications, which is a task of *data-mining* with exponential cost, but we can continue the interaction from here, where both attributes and implications have been reduced, and therefore with cost *linear*.

Since SR research began, the evaluation of predictions and recommendations has become a very important aspect [21, 54]. Research in the field of SR requires quality measures and evaluation metrics [49] to know the quality of techniques, methods and algorithms for predictions and recommendations. The evaluation metrics [55] and the evaluation frameworks [17] facilitate the comparison of several solutions for the same problem. Taking into account the wide variety of factors that can intervene in the functioning of SR, the first task to be carried out is to evaluate the options to find out which metrics are the ones that best adapt to the SR that we want to evaluate.

In our case, since we are dealing with a conversational SR, it may be evident that the first measure we can apply is to calculate the number of



steps that occur in the conversation [80]. On the other hand, other metrics so popular in SR as *Precision*, *Recall* [50], MAE, RMSE, etc., are not suitable to apply in our case because we would always obtain maximum values in both metrics. This is because we are dealing with implications, and therefore, we are not dealing with an approximate but ensuring that the reliability is 100 %.

Therefore, in addition to calculate the number of steps of the conversation, two additional evaluation measures have been defined to measure the performance of the system, so that the list of evaluation measures used on *sicumaRS* goes as follows:

- (i) **Number of steps.** Shows the number of steps that are given in the dialog and consequently, the number of attributes selected by the user. It provides us with a clear vision of whether the system has required much or little interaction to satisfy the user's demand.
- (ii) **Pruning velocity.** Evaluates the percentage of attributes that the system frees the user to take into account throughout the conversation and cumulatively from one step to the next. Reflects if pruning ratios of the algorithm are better at the beginning of the conversation or in later steps.
- (iii) **Attributes reduction.** Reports the overall reduction of attributes that the system has made at the end of the dialogue.

Once we had the defined system together with its operation and the evaluation metrics that are going to be used, we went on to elaborate a wide series of experiments to verify the viability, the utility and the benefit that we obtain with the work developed 7.

The experiments chapter is really important for several reasons. The first is obvious, to validate the study and the development carried out; but the experiments carried out also serve to show us the effective journey from the theoretical part to the practice that has ended with a real application of engineering.

There have been experiments developed over information, we could call test, and others over real information. The results show how the developed system fulfills its mission and also surpasses other existing proposals in the literature [124]. In this sense, we have worked and evaluated *sicumaRS* on *datasets* that have been a reference when testing the operation of these systems such as MovieLens' *datasets*.

Additionally, since many of the *datasets* available on the web needed some pre-treatment to adapt to the accepted *sicumaRS* format, we chose to build our own *datasets* from information available on the web. For this, *datasets* were created, such as Costa del Sol Hotels 7.2, World POIs 7.3, or Diseases and Symptoms 7.4, the latter used in one of the contributions that support the thesis [15].

A test consisting of simulating 100 dialogues between the user and the system was carried out and the aforementioned metrics were applied to each of them so the results obtained were collected. In each case, a brief compendium is made as a conclusion where the improvements are recorded and progress is justified over other alternatives. Mainly, we can say that we have managed to take a step forward to address the problem of the high dimensionality that appears in the SR thanks to the treatment we perform on the data through the use of the implication sets and the closing operators.

## Capítulo 1

# Introducción



La gestión de la información es uno de los pilares fundamentales de la Ingeniería Informática. No es de extrañar, por tanto, que conforme un amplio campo de investigación y conocimiento donde diversas disciplinas como las Matemáticas, la Lógica y la Ingeniería actúen conjuntamente para alcanzar mejores sinergias.

Carlos:

Dentro de esta filosofía de la gestión de la información, en este trabajo de investigación nos vamos a centrar en el Análisis Formal de Conceptos (FCA, por sus siglas en inglés: *Format Concept Analysis*). Podemos considerar FCA como una teoría matemática y una metodología para derivar una jerarquía de conceptos a partir de una colección de objetos y las relaciones que verifican. De esta forma, el propósito es poder representar y organizar la información de manera más cercana al pensamiento humano sin perder rigor científico. En este sentido se enmarca la cita de Rudolf Wille: “*El objetivo y el significado del FCA como teoría matemática sobre conceptos y sus jerarquías es apoyar la comunicación racional entre seres humanos mediante el desarrollo matemático de estructuras conceptuales apropiadas que se puedan manipular con la lógica.*”

El término FCA fue acuñado por Wille en 1984 culminando años más tarde con la publicación más citada al respecto en colaboración con Bern-

Carlos: En mi opinión aquí entra muy brusco FCA. Creo que queda mejor si se indica de forma más específica el problema que se intenta resolver (lo de la gestión de la información es demasiado amplio). Una vez claro el problema (los problemas), entonces se describe la solución que aporta la tesis, es decir, los resultados teóricos y las aplicaciones. Habría que explicar por qué el problema es un problema (es decir, explicar qué carencias tenían las soluciones que había hasta ahora en la literatura), para más adelante describir cómo los resultados de la tesis solucionan el problema (es decir, cómo se mejoró lo que ya existía). Me parece adecuada la propuesta de Manolo a darle protagonismo a las implicaciones y sus diferentes interpretaciones como conductor de la tesis.

hard Ganter [43]. Desde entonces FCA se ha aplicado con éxito en diferentes disciplinas de la Ciencia, como por ejemplo: minería de datos, biología celular [38], genética [63], economía, ingeniería del software [115], medicina [89], derecho [82], gestión de la información [99], etc.

La motivación principal de FCA aboga por representar conjuntos de objetos y atributos por medio de tablas de datos. Estas tablas se denominan contextos formales y representan las relaciones binarias entre esos objetos y atributos. Principalmente, existen dos formas básicas para representar el conocimiento: los retículos de conceptos y los conjuntos de implicaciones.

Desde hace años, existen en la literatura estudios [67] donde se han investigado y comparado diferentes algoritmos para obtener el retículo de conceptos a partir del conjunto de datos (en adelante *dataset* por su nomenclatura habitual en el campo). Sin embargo, debido a que el tamaño del retículo de conceptos es, en el peor de los casos,  $2^{\min(|G|, |M|)}$ , siendo  $G$  el conjunto de objetos y  $M$  el conjunto de atributos, el coste computacional de los métodos encargados de su construcción constituye una limitación de la aplicación de FCA.

Por otro lado tenemos el conjunto de implicaciones. Las implicaciones pueden considerarse *grosso modo* como reglas del tipo *si-entonces*, o en inglés: *if-then rules*, cuya noción principal es un concepto muy intuitivo: cuando se verifica una premisa, entonces se cumple una conclusión. Esta idea básica se refleja en numerosos campos de conocimiento bajo diferentes nombres. Así, en base de datos relacionales se denominan dependencias funcionales [24], en FCA son implicaciones [43], en programación lógica son reglas lógicas de programación [91]. No obstante, al igual que en el caso del retículo de conceptos, también existen ciertas desventajas a la hora de trabajar con implicaciones, de hecho, la propia extracción del conjunto completo de implicaciones de un dataset es una tarea que presenta una complejidad exponencial [25].

En cualquier caso, ambas formas (retículos e implicaciones) son capaces de representar la misma información contenida en un dataset y es posible pasar una representación a la otra. Ahora bien, trabajar con conjuntos de implicaciones nos permite aplicar técnicas automáticas basadas en la lógica.

Con esta última mención, llegamos al momento donde podemos avanzar el propósito principal de esta tesis doctoral, que principalmente consiste en aplicar mecanismos lógicos sobre conjuntos de implicaciones que nos permitan desarrollar métodos para realizar un tratamiento eficiente de la información.

En virtud de ello, en este trabajo de investigación nos vamos a centrar en la utilización del conjunto de implicaciones que se verifique en un dataset como semilla para los métodos de tratamiento eficiente de la información basados en la lógica que se han desarrollado. La aproximación a través de la lógica es posible gracias a sistemas axiomáticos válidos y completos como los Axiomas de Armstrong [3] y la Lógica de Simplificación [87] (SL por sus siglas en inglés: *Simplification Logic*), entre otros.

Estos métodos aplicados sobre conjuntos de implicaciones nos proporcionan la base para trabajar en esta tesis doctoral fundamentalmente sobre los siguientes tres campos de conocimiento: claves minimales, generadores minimales y sistemas de recomendación conversacionales.

Antes de entrar con mayor detalle en los anteriores tres campos, es necesario hacer una importante declaración previa. Tal y como se ha mencionado anteriormente, vamos a trabajar con el conjunto de implicaciones que se verifican en un dataset. Sin embargo, hay que dejar claro que no es competencia de este trabajo el estudiar técnicas para la extracción de estas implicaciones (lo cual es más una tarea de minería de datos), sino que la intención es partir del punto en el que ya contamos con el conjunto de implicaciones para trabajar con él. A este respecto, podemos mencionar los trabajos más citados en la literatura en relación a la extracción del conjunto de implicaciones a partir de datasets [57, 136, 137]. Son trabajos de suma importancia desde el punto de vista teórico pero también desde el punto de visto práctico, pues incluyen las implementaciones de las aplicaciones que realizan la extracción de las implicaciones.

Sin perjuicio de lo anterior, dado que hemos llegado a crear datasets propios sobre los que poder realizar experimentos como veremos más adelante, si bien no entramos en las técnicas de extracción de implicaciones que utilizan esas aplicaciones, sí hemos tenido que convertirnos en usuarios de

estas aplicaciones para poder obtener el conjunto atributos e implicaciones que se verifican. Dicho esto, retomamos el texto pasando a introducir los tres campos de aplicación donde hemos utilizado los conjuntos de implicaciones.

## Claves Minimales

En primer lugar, se presenta el tema de las claves minimales. El concepto de clave es fundamental en cualquier modelo de datos, incluyendo el modelo de datos relacional de Codd [24]. Una clave de un esquema relacional está compuesta por un subconjunto de atributos que representan el *dominio* de una determinada función cuya *imagen* es la totalidad del conjunto de atributos. Estas funciones se pueden representar por medio de Dependencias Funcionales (FD, por sus siglas en inglés: *Functional Dependencies*) que especifican una relación entre dos subconjuntos de atributos, e.g.  $A$  y  $B$ , asegurando que para cualesquiera dos tuplas de una tabla de datos, si verifican  $A$ , entonces también verifican  $B$ . Nótese el cambio de denominación de implicación a dependencia funcional por estar en el entorno de los sistemas de base de datos relacionales.

La identificación de las claves minimales de una determinada relación es una tarea crucial para muchas áreas de tratamiento de la información: modelos de datos [113], optimización de consultas [64], indexado [79], etc. El problema consiste en el descubrimiento de todos los subconjuntos de atributos que componen una clave minimal a partir de un conjunto de FD que se cumplen en un esquema de una tabla del modelo relacional.

Las claves no sólo son parte fundamental a considerar durante la fase de diseño de sistemas de base de datos relacionales, sino que también se consideran una poderosa herramienta para resolver multitud de problemas referentes a diversos aspectos del tratamiento de la información. Como muestras de la relevancia de este problema, encontramos numerosas citas en la literatura, entre las que podemos destacar las siguientes. En [114], los autores afirman que: “*identification of keys is a crucially important task in many areas of modern data management, including data modeling,*



*query optimization (provide a query optimizer with new access paths that can lead to substantial speedups in query processing), indexing (allow the database administrator to improve the efficiency of data access via physical design techniques such as data partitioning or the creation of indexes and materialized views), anomaly detection, and data integration*". Más recientemente, en referencia a áreas emergentes como el *linked-data*, en [96], los autores delimitan el problema manifestando: *"establishing semantic links between data items can be really useful, since it allows crawlers, browsers and applications to combine information from different sources."*

En la actualidad, existen diversos algoritmos capaces de resolver el problema de averiguar las claves minimales utilizando diferentes técnicas clásicas como veremos en el Capítulo 3, sin embargo, ya adelantamos que para averiguar el conjunto de claves minimales, en este trabajo nos centraremos en aquellos algoritmos guiados por la lógica, y más concretamente, por aquellos basados en el paradigma de Tableaux [88, 103].

El problema de estos métodos de búsqueda de claves surge a la hora de tratar con grandes cantidades de información ya que el procedimiento de construcción del Tableaux produce una explosión tal del árbol del espacio de búsqueda que nos lleva a sobrepasar las capacidades de la máquina, incluso para problemas pequeños como se ha demostrado en [26].

Sin embargo, una propiedad muy interesante de los métodos basados en Tableaux es su generación de subproblemas independientes los unos de los otros a partir del problema original. De esta forma, el uso del paradigma de Tableaux nos permite abordar estos problemas aplicando técnicas de supercomputación o de computación de alto rendimiento (HPC, por sus siglas en inglés: *High Performance Computing*) mediante las cuales seremos capaces de tratar con grandes cantidades de información y obtener resultados en tiempo razonable. Entraremos más en detalle de estas técnicas, sus implementaciones y sus resultados en el Capítulo 3.

Para esta labor de computación de alto rendimiento, hay que indicar que a lo largo de este trabajo de investigación se han adquirido y aplicado las competencias necesarias para poder trabajar en entornos de supercomputación; en concreto, durante los últimos años, se ha trabajado

fervientemente con el Centro de Supercomputación y Bioinnovación de la Universidad de Málaga<sup>1</sup>. La posibilidad de tratar con este Centro nos ha proporcionado dos beneficios fundamentales: por un lado, se ha alcanzado una elevada pericia para trabajar en entornos de HPC y para realizar implementaciones que aprovechen una alta cantidad de recursos, y por otro lado, se han podido obtener resultados empíricos sobre experimentos utilizando estrategias de paralelismo, que han desembocado en contribuciones científicas [11, 14] y que habría sido imposible conseguir en la actualidad sin contar con tales recursos computacionales.

## Generadores Minimales

Como se ha mencionado anteriormente, una forma de representar en FCA el conocimiento es el retículo de conceptos. Esta representación otorga una visión global de la información con un formalismo muy fuerte, abriendo el puerta para utilizar la teoría de retículos como una metateoría para gestionar la información [16].

Los conjuntos cerrados son la base para la generación del retículo de conceptos ya que éste puede ser construido a partir de los conjuntos cerrados, considerando la relación de subconjuntos como la relación de orden. En este punto nace el concepto de generadores minimales como aquellas representaciones de los conjuntos cerrados que no contengan información supérflua, es decir, representaciones canónicas de cada conjunto cerrado [43].

Los conjuntos cerrados junto con los generadores minimales son esenciales para obtener una representación completa del conocimiento en FCA, pero no sólo son interesantes desde un punto de visto teórico. La importancia de los generadores minimales puede apreciarse claramente a través de citas tales como: *“Minimal generators have some nice properties: they have relatively small size and they form an order ideal”*, existente en importantes estudios como el de Poelmans et al. [97] o [100]. Además, los generadores minimales se han usado como punto clave para generar bases,

---

<sup>1</sup><http://www.scbi.uma.es/>

las cuales constituyen una representación compacta del conocimiento que facilita un mejor rendimiento de los métodos de razonamiento basados en reglas. Missaoui et al. [83,84] presentan el uso de generadores minimales para calcular bases que impliquen atributos positivos y negativos cuyas premisas son generadores minimales.

La contrapartida es que la obtención de todos los conjuntos cerrados y sus respectivos generadores minimales es un problema con complejidad exponencial. Sin embargo, dado que nuestro objetivo es explotar las posibilidades de operar con conjuntos de implicaciones, en este trabajo vamos a combinar ambos aspectos enumerando todos los conjuntos cerrados a partir de un conjunto dado de implicaciones. De hecho, iremos un paso más allá, calculando no sólo todos los conjuntos cerrados, sino que para cada uno de ellos produciremos sus respectivos generadores minimales. El método propuesto es una continuación del trabajo llevado a cabo en [29] sobre un método basado en la  $SL_{FD}$ . Ese método opera sobre un conjunto de implicaciones aplicando un conjunto de reglas de inferencia construyendo un espacio de búsqueda en forma de árbol.

Respecto a la producción de los generadores minimales, el problema de fondo que vamos a encontrar es similar al que sucedía con las claves minimales, y es que, al tratar con grandes cantidades de información, los métodos realizados para producir los generadores minimales, conllevan unas necesidades de cómputo que sobrepasan los límites de la máquina. Por tanto, una vez más, tenemos que trasladar las implementaciones de los métodos a versiones paralelas que nos permitan funcionar bajo arquitecturas de HPC. La consecución de este punto ha constituido otra fase del desarrollo de este trabajo de investigación que ha culminado con contribuciones científicas [13].

## Sistemas de Recomendación Conversacionales

La última aplicación que se ha llevado a cabo en esta tesis doctoral haciendo uso de los conjuntos de implicaciones y los conjuntos cerrados se produce en el campo de los sistemas de recomendación (SR).

Carlos: Creo que esto lo voy a describir de forma más general (y no guiado sólo por nuestro campo de trabajo. Los SR no sólo filtran, también predicen. Apartir de aquí hay que ir aclarando que nuestro trabajo se centra en la primera fase, la de filtrado)

El objetivo principal de los SR es ayudar al usuario a elegir entre un número alto de alternativas. Carlos:

De forma muy básica, podríamos considerar a los SR como herramientas que agrupan un amplio abanico de técnicas y aplicaciones de los sistemas de información con la intención de potenciar y favorecer la experiencia de usuario. Estos sistemas están presentes en muchas áreas diferentes de la sociedad actual (comercio electrónico, turismo, redes sociales, películas, música, noticias, etc.) en las que es bastante frecuente contar con gran cantidad de información. Por tanto, es comprensible el tremendo crecimiento y la importancia de los SR en nuestra sociedad actual. De forma evidente, la tecnología y la ciencia han colaborado en el desarrollo y la expansión de los SR hasta el punto de ~~llevar a estos sistemas a un lugar privilegiado en la comunidad científica estableciendo un claro campo de conocimiento respecto a la gestión de la información~~ Carlos: convertirse en un área de investigación bien consolidada en los últimos años.

La mayoría de los SR basan sus recomendaciones en predecir cuán adecuado es un ítem para satisfacer la necesidad de un usuario. Para lograrlo, se aplican diferentes ~~estrategias~~ Carlos: técnicas de recomendación que dan nombre a los diferentes tipos de SR ue existen, entre los que ~~destacamos los siguientes~~ Carlos: : basados en contenido, basados en conocimiento, filtrado colaborativos, basados en el contexto, conversacionales. ~~Podemos apreciar~~ Carlos: Se puede consultar una clasificación más detallada en el libro de Adomavicius y Tuzhilin [2] que, junto con la contribución de Bo-badilla et al. [18], ~~constituyen las mayores referencias en el campo.~~ Carlos:

Sin embargo, si bien es cierto que los SR están alcanzando una enorme importancia en muchos de los aspectos relacionados con el tratamiento de la información para mejorar la experiencia de usuario, existen numerosas dificultades que han de afrontarse a la hora de diseñar e implementar un SR. En la lista de problemas relacionados con los SR [109] podemos encontrar: ~~el arranque en frío (cold-start), privacidad, oveja-negra, escasez, etc.~~ Carlos: Cada SR puede adolecer de uno o varios de estos problemas de forma simultánea, y normalmente cada problema suele estar más ~~empare-~~

Carlos: convertirse en un  
área de investigación bien  
consolidada en los últimos  
años

Carlos: técnicas  
Carlos: indicar que estos  
tipos se describirán más  
adelante en Preliminares  
Carlos: Se puede  
consultar

Carlos: Actualizar  
referencias!!

Carlos: Describir muy  
brevemente cada  
problema, si no queda  
como muy de pasada.  
Como creo que ya he  
comentado, en al  
introducción deben  
quedar muy claros los  
problemas que existe en el  
área, y sobre todo cuando  
nosotros vamos a  
trabajar una aproximación  
a ellos  
Carlos: vinculado a

jado con Carlos: vinculado a unos tipos de SR que con otros. Sin embargo, un problema común de los SR aparece cuando es necesario trabajar sobre conjuntos de datos con un alto número de características (variables o atributos). Esta situación se conoce como el fenómeno de la *maldición de la dimensionalidad*. En estos casos, tratar de aplicar técnicas de minería de datos (clasificación, regresión, agrupamiento, análisis de reglas de asociación, etc.) se convierte en una tarea muy compleja Carlos: .

Abordar la generación de recomendaciones haciendo uso de FCA es un problema Carlos: una aproximación existente en la literatura desde hace años. En [34], los autores utilizan FCA para agrupar elementos y usuarios en conceptos Carlos: . Más recientemente, en [108], los autores introducen un modelo para el filtrado colaborativo basado en FCA para generar correlaciones entre datos a través de un diseño del retículo. En [70,71], se utilizan relaciones difusas e implicaciones ponderadas para especificar el contexto y  $SL_{FD}$  para desarrollar un proceso lineal de filtrado que permite a los SR podar el conjunto original de elementos y así mejorar su eficiencia. Todos estos trabajos subrayan claramente cómo FCA puede usarse con éxito en el campo de los SR. Carlos:

Desde el punto de vista de este trabajo, centramos nuestros esfuerzos en la aplicación de técnicas de tratamiento de implicaciones y conjuntos cerrados sobre la vertiente de SR denominada: SR conversacionales [23,123]. Pero no nos ocuparemos únicamente de la estrategia de recomendación sino también del proceso de cómo obtener una recomendación.

En estos sistemas, se aplica un proceso iterativo en el cual el usuario va seleccionando características que quiere que los ítems verifiquen. A través de este intercambio y usando diferentes técnicas, el sistema progresa eligiendo (o incluso prediciendo) subconjuntos de elementos que concuerdan con las preferencias del usuario, hasta alcanzar un resultado final con un número de opciones adecuado. El problema principal en estos sistemas es que, si el conjunto de datos presenta una alta dimensionalidad, el número de pasos hasta alcanzar una recomendación razonable puede ser muy alto.

La solución que hemos realizado consiste en gestionar el problema de la alta dimensionalidad mediante un proceso de selección de características

Carlos: Explicar por qué

Carlos: una aproximación

Carlos: Creo que hay que detallar un poco más la relación entre DCA y recomendación. Por ejemplo, en este artículo citado, una vez que se agrupan elementos y usuarios ¿qué se hace? ¿cómo se recomienda?

Carlos: En general hay que actualizar bibliografía, en la introducción y sobre todo en el estado del arte de haber referencias posteriores al 2013

guiado por el usuario (experto humano) dentro de un sistema conversacional [139]. Para ello, una vez más haremos uso de una gestión inteligente de las implicaciones y de los conjuntos cerrados que nos va a permitir reducir sustancialmente el número de pasos necesarios en el diálogo entre el usuario y la aplicación para conseguir una recomendación adecuada en tiempo y forma. Para ello contaremos con el apoyo de la  $SL_{FD}$ , ~~presentada en varios trabajos anteriores~~ Carlos: , que fue diseñada para desarrollar métodos de deducción. En particular, utilizaremos el algoritmo del cierre de atributos  $SL_{FD}$  [86] como núcleo de un marco de selección de atributos que será el que nos permita reducir el número de etapas del diálogo.

Además, se han realizado numerosas pruebas de aplicación sobre la propuesta que se ha desarrollado. En concreto, hemos realizado pruebas en las que se han Carlos: ha utilizado información real sobre enfermedades y fenotipos como podemos apreciar en una de las contribuciones que avalan este trabajo de investigación [15]. Pero además, el punto principal del trabajo es que la propuesta que hemos desarrollado permite actuar sobre diferentes datasets. De esta forma, podemos utilizar el mismo procedimiento para mejorar las recomendaciones conversacionales en diversos entornos como veremos más adelante. Esta versatilidad es una característica especialmente importante del trabajo realizado, ya que suele ser habitual que el desarrollo y la utilización de un SR esté muy limitado a los datos concretos que va a manejar. Este hecho conlleva muy poca libertad de maniobra en el caso de que se quieran introducir ciertos cambios, o simplemente que los datos sean diferentes. Nuestra propuesta supera esta barrera de adaptabilidad y longevidad del SR ya que el funcionamiento es independiente de la información de base con la que trabaje, sólo necesitamos conocer el conjunto de atributos e implicaciones subyacente a los datos. Carlos:

Finalmente, antes de llegar a las últimas líneas del capítulo que dedicaremos a establecer el contenido del documento y las contribuciones producidas, cabe resaltar ya en este punto la naturaleza dual de la tesis, en el sentido de que mantendremos una ~~vía de investigación teórica y otra práctica de forma simultánea~~ Carlos: línea de investigación en fundamentos teóricos complementada con la aplicación de dichos resultados. ~~De modo~~

Carlos: ¡¡¡OJO!! Debes decir de quién son esos trabajos. La tesis es un trabajo individual tuyo y no del “grupo” (ojo con copiar y pegar de los artículos...)

Carlos: ha

Carlos: Esta afirmación hay que decirla con mucho cuidado: creo que la mayoría de los SR trabajan de forma independiente al contenido del dataset. La cosa es el número de atributos o el volumen del dataset. Lo que quería decir es que para venderlo como punto fuerte de la tesis hay que mostrarlo (o demostrar que los otros no lo hacen). Si no lo tenemos claro se quita, ya que nuestro trabajo tiene otros puntos fuertes incontestables)

Carlos: línea de investigación en fundamentos teóricos complementada con la aplicación de dichos resultados

que vamos a tener una tarea teórica de investigación y asimilación de los conceptos teóricos y las técnicas necesarias, y otra empírica, en la que llevaremos a la práctica los mecanismos desarrollados hasta alcanzar resultados visibles en los dos campos de conocimiento mencionados anteriormente, bases de datos y sistemas de recomendación. Haremos especial hincapié en la parte ~~práctica~~ Carlos: aplicada del estudio con la intención de seguir la idea inicial de realizar un trabajo que nos permita tanto alcanzar resultados de investigación satisfactorios, como dejar la puerta abierta a posibles oportunidades de transmisión Carlos: facilitar la transferencia de conocimiento en Carlos: a entornos diferentes del ámbito académico como el mercado empresarial. Pasamos entonces ahora a desglosar la estructura del documento y la producción conseguida. Carlos:

Carlos: aplicada  
Carlos: facilitar la  
transferencia

Carlos: a  
Carlos: Actualizar en l  
versión final

## Estructura de la Tesis

En este primer capítulo introductorio, hemos fijado los puntos fundamentales de la tesis, como son: el marco de trabajo sobre el que vamos a actuar, las técnicas que utilizaremos y los principales objetivos que se pretenden alcanzar. Concretamente, hemos estipulado la utilización de FCA y los conjuntos de implicaciones como base del estudio sobre la que aplicar técnicas basadas en la lógica para mejorar el tratamiento de la información.

A continuación, entraremos en el Capítulo 2, en el que hemos recopilado un conjunto de conceptos previos necesarios relacionados con: FCA, la lógica de simplificación, los sistemas de implicaciones y los operadores de cierre. Tras estos dos primeros capítulos, ya contaremos con el conocimiento previo necesario para abordar las dos partes principales de la tesis.

La primera parte, dedicada a las claves y los generadores minimales, consta a su vez de dos capítulos principales, uno dedicado al estudio y las contribuciones relacionadas con las claves minimales 3, y otro análogo para los generadores minimales 4. En cuanto a las claves minimales, se incluye sección con diferentes casos de aplicación donde su conocimiento es muy beneficioso. Además, se introduce el problema de la búsqueda de claves y los algoritmos que se han investigado al respecto. Cierran el capítulo dos

secciones principales, en la primera se detalla la implementación realizada de los métodos de claves, tanto en su versión secuencial como paralela, y en la segunda, se detallan los experimentos y resultados alcanzados en ambos casos.

En el capítulo dedicado a los generadores minimales 4 se procede de forma análoga al de claves. Así, se presenta el problema de calcular los generadores minimales y los métodos que se han investigado y desarrollado a lo largo del trabajo realizado. A continuación, se detallan los experimentos llevados a cabo para probar el rendimiento de estos métodos. Finalmente, se presentan implementaciones paralelas de los métodos y sus respectivos resultados.

La segunda parte de la tesis estará dedicada al estudio realizado sobre el campo de los sistemas de recomendación y las contribuciones alcanzadas. En este sentido, se incluye una primera introducción al campo de conocimiento y al estado del arte en el Capítulo 5. Seguidamente, en el Capítulo 6 se detalla el proceso llevado a cabo para desarrollar un SR conversacional, incluyendo explicaciones concretas sobre su funcionamiento y las medidas de evaluación utilizadas para calcular su rendimiento. Tras ello, llegaremos al Capítulo 7 donde se exponen los experimentos llevados a cabo haciendo uso del SR conversacional junto con los resultados obtenidos. Podemos considerar este capítulo de importancia superior pues recoge el resultado de aplicar los conceptos teóricos en aras de obtener una aplicación real de ingeniería.

Para finalizar, cerraremos la tesis con un último capítulo 8 dedicado a recopilar las principales conclusiones obtenidas y a proponer caminos por los que seguir ahondando en la investigación en esta materia. Además, se incluye una relación de las referencias consultadas y los respectivos índices de figuras, términos y tablas.



## Capítulo 2

# Preliminares



**A** lo largo de este capítulo vamos a introducir las principales ideas, definiciones y propiedades de FCA como marco de investigación principal sobre el que se sustenta el trabajo de investigación desarrollado. Procederemos de forma que consigamos que el texto sea autocontenido en la medida de lo posible. Más concretamente, se introducen los principales conceptos sobre conjuntos de implicaciones y conjuntos cerrados que serán necesarios a lo largo del documento para poder plasmar en detalle las contribuciones realizadas. La referencia principal de este campo de conocimiento viene de la mano de Wille y Ganter en [43].

## **2.1 Análisis de conceptos formales**

De forma general, podemos considerar FCA como un método de análisis de datos que facilita la extracción de conocimiento y la posibilidad de poder razonar al respecto. Es un marco conceptual con el que: analizar, estructurar, visualizar y sobre todo, revelar el conocimiento subyacente a los datos utilizando, generalmente, técnicas de minería de datos. Existen varias de estas técnicas para actuar sobre conjuntos de objetos, conjuntos de atributos y las relaciones que se establecen entre ellos [119, 120].

La característica principal de FCA es que, basado en sólidos funda-

mentos matemáticos, cubre una amplia gama de áreas de aplicación. Su motivación original fue la representación de retículos completos de objetos y sus propiedades por medio de contextos formales, que son tablas de datos que representan relaciones binarias entre objetos y atributos. Por otro lado, FCA puede verse como una alternativa razonable a la Teoría de Retículos en términos epistemológicos [132].

El punto de partida de FCA es un **contexto formal**, lo cual nos conduce necesariamente a las dos siguientes definiciones.

**Definición 2.1.1** (Atributo). *Un atributo  $A$  es un identificador para un elemento en un dominio  $D$ .*

**Definición 2.1.2** (Contexto formal). *Un contexto formal es una tripleta  $\mathbf{K} := (G, M, I)$  que consiste en dos conjuntos no vacíos,  $G$  y  $M$ , y una relación binaria  $I$  entre ellos. Los elementos de  $G$  se llaman objetos del contexto, y los elementos de  $M$  se llaman atributos del contexto. Para  $g \in G$  y  $m \in M$ , escribimos  $\langle g, m \rangle \in I$  o  $gIm$  si el objeto  $g$  posee el atributo  $m$ .*

De forma más específica, un contexto formal se puede considerar como un grafo bipartito que refleje las relaciones entre los conjuntos  $G$  y  $M$ , o también, como una una tabla donde los objetos se sitúan en las filas de la tabla y los atributos en las columnas, de forma que un valor lógico en cada celda nos indica si un objeto  $g \in G$  posee un atributo  $m \in M$ .

**Ejemplo 2.1.3.** *Consideremos un ejemplo de contexto formal en el cual los objetos ( $G$ ) son hoteles, los atributos ( $M$ ) son diferentes servicios que ofrece el establecimiento y en cada celda de la tabla encontraremos una equis siempre y cuando el correspondiente hotel ofrezca el correspondiente servicio. Por tanto, tendremos el contexto formal  $\mathbf{K} := (G, M, I)$  en el cual:*

$G = \{\text{Fuerte Estepona Suites, Hotel Buenavista, Hotel Paraíso, Apts Marriot Playa, Hotel Piedra Paloma, Hostal Hospedería V Cent}\}$

$M = \{AC, Bar, Gym, Internet, Masajes, Parking\}$

*La Tabla 2.1 muestra la relación binaria  $I$  del contexto formal  $K$  utilizando información real de varios hoteles de la Costa del Sol.*

Cuadro 2.1: Ejemplo de contexto formal utilizando datos reales del sector hotelero

Nombre del Hotel	AC	Bar	Gym	Internet	Masajes	Parking
Fuerte Estepona Suites	X	X	X	X	X	X
Hotel Buenavista		X				X
Hotel Paraiso	X	X				X
Apts Marriot Playa				X		
Hotel Piedra Paloma		X				X
Hostal Hospederia V Cent	X	X		X		X
...						

*Por tanto, vemos como el hotel Fuerte Estepona Suites ofrece todos los servicios disponibles en el contexto, mientras que los Apts Marriot Playa únicamente ofrecen el servicio de Internet.*

A partir del contexto formal, se definen dos operadores llamados operadores de derivación.

**Definición 2.1.4** (Operadores de derivación). *Dado un contexto formal  $\mathbf{K} := (G, M, I)$ , a continuación se definen dos funciones, denominadas operadores de derivación:*

$$\begin{aligned}
 ( )' : 2^G &\rightarrow 2^M & ( )' : 2^M &\rightarrow 2^G \\
 A' = \{m \in M \mid g I m \quad \forall g \in A\} & & B' = \{g \in G \mid g I m \quad \forall m \in B\}
 \end{aligned}$$

Ambas funciones se denotan con el mismo símbolo porque no hay lugar a confusión. El primero asigna a cada conjunto de objetos, el conjunto de atributos comunes a todos los objetos, y el segundo asigna, a cada conjunto de atributos, el conjunto de objetos que tienen todos estos atributos.

El par de operadores de derivación constituye una conexión anti-monótona de Galois [93] con las consecuencias correspondientes, como que ambas composiciones son operadores de cierre, una de ellas en  $(2^G, \subseteq)$  y la otra en  $(2^M, \subseteq)$ .

**Definición 2.1.5** (Mapeo anti-monótono). *Sean  $G$  y  $M$  dos conjuntos no vacíos. Un mapeo de la forma  $f : 2^G \rightarrow 2^M$  se dice anti-monótono si  $A_1 \subseteq A_2$  implica que  $f(A_2) \subseteq f(A_1)$   $\forall A_1, A_2 \subseteq G$ .*

**Definición 2.1.6** (Conexión de Galois). *Sean  $G$  y  $M$  dos conjuntos no vacíos. Un par  $(f, g)$  de dos mapeos  $f : 2^G \rightarrow 2^M$  y  $g : 2^M \rightarrow 2^G$  es una conexión de Galois entre  $G$  y  $M$  si, para cada  $A \subseteq G$  y  $B \subseteq M$  se cumple que:  $A \subseteq g(B)$  si y sólo si  $B \subseteq f(A)$ .*

El operador de cierre  $''$  (i.e. aplicar el operador de derivación  $'$  dos veces) verifica algunas propiedades interesantes que serán fundamentales para poder desarrollar la teoría formal.

**Definición 2.1.7** (Operador de cierre). *Dado un conjunto no vacío  $M$ , un operador de cierre sobre  $M$  es una función  $( )'' : 2^M \rightarrow 2^M$  que satisface las siguientes propiedades:*

- *Idempotente (ítems):  $X''' = X'' \quad \forall X \in 2^M$*
- *Monótona (atributos):  $X \subseteq Y \rightarrow X'' \subseteq Y'' \quad \forall X, Y \in 2^M$*
- *Extensa:  $X \subseteq X'' \quad \forall X \in 2^M$*

En general no se verifica que  $X'' = X$ , no obstante, cuando un conjunto de objetos,  $X \subseteq G$  verifica  $X'' = X$ , se llama conjunto cerrado. De manera análoga a los conjuntos de objetos, podemos hablar de conjuntos de atributos cerrados. El par  $(M, '' )$  se denomina sistema cierre y un conjunto  $A \subseteq M$  se denomina conjunto cerrado para  $''$  si es un punto fijo para  $''$ , es decir,  $''(A) = A$ . La idempotencia de los operadores de cierre nos lleva al hecho de que, para todo sistema de cierre  $(M, '' )$  y todo  $A \subseteq M$ , el conjunto  $''(A)$  es cerrado para  $''$ .

Además, los conjuntos cerrados definen lo que se denominan *conceptos formales*. De forma general, un concepto formal, que constituye un punto clave en FCA, permite describir formalmente un hecho del modelo y caracterizar un conjunto de objetos por medio de los atributos que comparten y viceversa.

De forma más intuitiva, un par  $(X, Y)$  es un concepto si se verifica que:

- Cada objeto en  $X$  tiene todos los atributos de  $Y$ .

- Para cada objeto en  $G$  que no está en  $X$ , existe un atributo en  $Y$  que el objeto no tiene.
- Para cada atributo en  $M$  que no está en  $Y$ , hay un objeto en  $X$  que no tiene ese atributo.

En otras palabras,  $(X, Y)$  es un concepto formal si  $X$  contiene todos los objetos cuyos atributos están en  $Y$  y, análogamente,  $Y$  contiene todos los atributos verificados por los objetos en  $X$ .

De esta forma, conseguimos introducir en la definición las dos partes esenciales: en primer lugar, el conjunto de objetos con propiedades comunes, y en segundo lugar, el conjunto de atributos que caracterizan a dichos objetos. Únicamente aquellos pares de conjuntos  $(X, Y)$  que tienen un cierre completo, establecen un concepto por sí mismos. En esta situación, los conjuntos  $X$  e  $Y$  son cerrados y se llaman, respectivamente, la *extensión* y la *intensión* del concepto. Para un conjunto de objetos  $X$ , el conjunto de sus atributos comunes  $X'$ , describe la similitud de los objetos de  $X$ , mientras que el conjunto  $X''$  es la agrupación de aquellos objetos que tienen como atributos comunes a  $X'$ , en particular, todos los objetos de  $X$ , es decir,  $X \subseteq X''$ .

Más formalmente:

**Definición 2.1.8** (Concepto formal). Sea  $\mathbf{K} := (G, M, I)$  un contexto formal y  $X \subseteq G$ ,  $Y \subseteq M$ . El par  $(X, Y)$  se denomina concepto formal si  $X' = Y$  y  $Y' = X$ . El conjunto de objetos  $X$  se denomina extensión del concepto  $(X, Y)$  mientras que el conjunto de atributos  $Y$  será la intensión del concepto.

El conjunto de todos los conceptos formales de un contexto formal  $K$  constituye el denominado *retículo de conceptos* con la relación de inclusión que se muestra a continuación.

Si  $(X_1, Y_1)$  y  $(X_2, Y_2)$  son conceptos, se define un orden parcial,  $\leq$ , de forma que  $(X_1, Y_1) \leq (X_2, Y_2)$  si  $X_1 \subseteq X_2$ , o equivalentemente, si  $Y_2 \subseteq Y_1$ .

Los pares de conceptos en este orden parcial tienen una única máxima cota inferior, que es el concepto generado por  $X_1 \cap X_2$ . De forma análoga,

poseen una única mínima cota superior, el concepto generado por los atributos  $Y_1 \cap Y_2$ . Por medio de estas operaciones de cálculo del máximo y del mínimo de dos conceptos, se satisfacen los axiomas que definen un retículo. La Figura 2.1 muestra un ejemplo básico de contexto formal y retículo de conceptos asociado.

	adulto	joven	femenino	masculino
niño		X		X
niña		X	X	
hombre	X			X
mujer	X		X	

Cuadro 2.2: Ejemplo de contexto formal básico

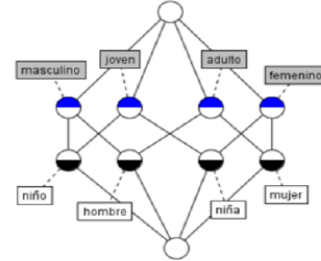


Figura 2.1: Retículo de conceptos

A partir del retículo de conceptos podemos obtener el contexto formal que representa. Los nodos del diagrama representan los objetos y atributos del contexto formal. Cada atributo del contexto corresponde a un elemento del retículo que tiene el conjunto de atributos minimal que contiene ese atributo, y un conjunto de objetos formado por todos los objetos con ese atributo. Por tanto, en la Figura 2.1 estaríamos hablando de: masculino, joven, adulto y femenino. Análogamente, cada objeto del contexto corresponde a un elemento del retículo que está formado por el conjunto de objetos minimal que contiene ese objeto, y un conjunto de atributos que consta de todos los atributos de dicho objeto. Esta vez, en la Figura 2.1 nos referimos a: niño, hombre, niña y mujer.

Una alternativa gráfica de definir los conceptos formales es la siguiente. Desde la representación del contexto formal, un concepto formal se puede reconocer por medio de una submatriz de tal manera que todas las celdas de la submatriz son verdaderas (no es necesario que la submatriz esté formada por celdas contiguas). De esta forma, en la Tabla 2.3, vemos como podemos extraer un concepto formal como el par  $(\{Plymouth\ Satellite, Chevrolet\ Malibu\}, \{Consumo, Cilindrada, Movilidad, Aceleración\})$  a partir del contexto formal.



Cuadro 2.3: Conceptos formales a partir de la representación del contexto formal.

Modelo de coche	Consumo	Cilindrada	Movilidad	Potencia	Peso	Aceleración
Chevrolet Vega				X		X
Toyota Corolla				X		
Ford Pinto			X		X	
Volkswagen Beetle	X		X	X	X	X
Plymouth Satellite	X	X	X			X
Chevrolet Malibu	X	X	X			X

Otra alternativa aparece en la representación como grafo bipartito, donde un concepto formal aparece como un subgrafo bipartito completo, es decir, aquel que tiene todas las aristas posibles. Las conexiones que se establecen en el retículo nos indican que el objeto  $X$  tiene un atributo  $Y$  si y sólo si existe un camino estrictamente creciente o estrictamente decreciente que permite ir de  $X$  a  $Y$  en el retículo.

Por otro lado, otro concepto equivalente a las conexiones de Galois y los operadores de cierre en el marco de FCA es el denominado sistema de implicaciones [43]. Como ya se adelantó en el Capítulo 1, las implicaciones constituyen el eje fundamental de trabajo en esta Tesis doctoral pues serán el mecanismo que nos permita abordar el problema del tratamiento eficiente de la información por medio de la lógica. Reflejan una forma relativamente sencilla de trasladar las relaciones lógicas que encontramos entre los atributos que poseen los objetos de nuestros datasets ya que combinan una forma muy simple y natural de escribir reglas del tipo *si-entonces* con una gestión muy eficiente y automatizada de la información.

Un ejemplo básico del uso de implicaciones para reflejar información contenida en los datos podemos verlo utilizando la información de la Tabla 2.1. En ese ejemplo vemos que en ese dataset hay una relación que siempre se cumple y es la siguiente. Si el hotel provee servicio de aire acondicionado (AC) entonces tiene servicio de Parking. He ahí un claro ejemplo de regla *si-entonces*, o en nuestro caso, de implicación, que se verifica en el contexto.

Este concepto de implicación es el que guía este trabajo otorgándonos un potencial para automatizar técnicas de razonamiento, con el beneficio que eso conlleva. Además, las implicaciones son elemento fundamental pa-

ra el desarrollo de formas más eficientes que el retículo de conceptos de representación del conocimiento.

Por tanto, a partir de las implicaciones y de las propiedades básicas que verifican, podemos definir un cálculo lógico que nos permita realizar sistemas de deducción completos sobre el contexto actual. En cierto sentido, podríamos decir que hemos pasado de tener un conocimiento basado en ejemplos a disponer de un conocimiento abstracto que introduce sistemas de razonamiento más elaborados, partiendo únicamente de las observaciones concretas que hemos realizado, es decir, hemos aprendido reglas generales a partir de ejemplos.

Para finalizar, podemos considerar a las implicaciones, las conexiones de Galois y los operadores de cierre, como distintas alternativas de tratar la información que se puede extraer de un contexto formal. No obstante, las conexiones de Galois y los retículos de conceptos permiten una representación gráfica, mientras que los operadores de cierre y los sistemas implicacionales nos facilitan el razonamiento por medio de la lógica.

En definitiva, todas estas nociones y propiedades son los fundamentos sobre los cuales se consolida FCA. Recordamos que la motivación original de FCA es la reestructuración de esta teoría utilizando la teoría matemática de conceptos y jerarquías con la intención de acercarse al raciocinio humano y facilitar las conexiones con las Lógicas Filosóficas del pensamiento [130,131].

## 2.2 Lógica de Simplificación

Introducimos la lógica  $SL_{FD}$  [27] describiendo sus cuatro pilares fundamentales: su lenguaje, su semántica, su sistema axiomático y su método de razonamiento automático.

### Lenguaje

**Definición 2.2.1.** *Dado un conjunto  $M$  finito de símbolos (denominados atributos) no vacío, el lenguaje sobre  $M$  se define como:*

$$\mathcal{L}_M := \{A \rightarrow B \mid A, B \subseteq M\}$$

Las fórmulas  $A \rightarrow B$  se denominan *implicaciones* y los conjuntos  $A$  y  $B$  reciben el nombre de *premisa* y *conclusión* de la implicación respectivamente. Los conjuntos  $\Sigma \subseteq \mathcal{L}_M$  se denominan *sistemas de implicaciones* sobre  $M$ .

Para simplificar la notación:

- Usaremos letras minúsculas para denotar los elementos en  $M$ , mientras que las mayúsculas denotan sus subconjuntos.
- Omitimos las llaves en premisas y conclusiones, es decir,  $abcde$  denota el conjunto  $\{a, b, c, d, e\}$ .
- Escribimos sus elementos por yuxtaposición, es decir, para  $X \cup Y$  escribiremos  $XY$ .
- Para la diferencia, cambiamos  $X - Y$  por  $X \setminus Y$ .

**Definición 2.2.2** (Implicación). *Una implicación sobre un conjunto de atributos  $M$  es una expresión de la forma  $X \rightarrow Y$ , donde  $X$  e  $Y$  son conjuntos de atributos, i.e.  $X \subseteq M$  y  $Y \subseteq M$ .*

**Definición 2.2.3** (Implicación trivial). *Una implicación  $X \rightarrow Y$  es trivial si  $Y \subseteq X$ .*

**Definición 2.2.4** (Implicación unitaria). *Sea  $X$  un conjunto de atributos y  $a$  un atributo del conjunto,  $a \in X$ , una implicación se dice unitaria si su conclusión es un conjunto unitario, i.e.  $X \rightarrow a$ .*

**Ejemplo 2.2.5.** *Sea  $M = \{a, b, c, d\}$  un conjunto de atributos. Se cumple que  $\{a \rightarrow b, a \rightarrow c\} \equiv \{a \rightarrow bc\}$  porque para cada contexto formal  $\mathbf{K} := (G, M, I)$ , se verifica que  $\{b, c\}' = \{b\}' \cup \{c\}'$ . Por tanto,  $\{a\}' \subseteq \{b\}'$  y  $\{a\}' \subseteq \{c\}'$  si y sólo si  $\{a\}' \subseteq \{b, c\}'$ . Este ejemplo nos permite asegurar que cualquier sistema de implicaciones es equivalente a un sistema de implicaciones unitarias.*

**Proposición 2.2.6.** *Sea  $M$  un conjunto de atributos y  $\Sigma \subseteq \mathcal{L}_M$ . Se verifica que:*

$$\Sigma \equiv \bigcup_{A \rightarrow B \in \Sigma} \{A \rightarrow b \mid b \in B\}$$

## Semántica

Tras la definición del lenguaje pasamos ahora a introducir la semántica utilizada, para lo cual utilizamos el concepto de *operador de cierre* que reescribimos a continuación.

Un operador de cierre en  $M$  es una función  $c: 2^M \rightarrow 2^M$  que es *extensivo* ( $X \subseteq c(X) \forall X \subseteq M$ ), *monótono* ( $X_1 \subseteq X_2$  implica que  $c(X_1) \subseteq c(X_2) \forall X_1, X_2 \subseteq M$ ), e *idempotente* ( $c(c(X)) = c(X) \forall X \subseteq M$ ). Los puntos fijos para  $c$  (i.e.  $X \subseteq M$  tales que  $c(X) = X$ ) se denominan *conjuntos cerrados*.

Un operador de cierre  $c$  en  $M$  recibe el nombre de *modelo* para una implicación  $A \rightarrow B \in \mathcal{L}_M$  si  $B \subseteq c(A)$ ; se denota  $c \models A \rightarrow B$ . Además, dado un sistema de implicaciones  $\Sigma \subseteq \mathcal{L}_M$  y un operador de cierre  $c$  en  $M$ ,  $c \models \Sigma$  denota que  $c \models A \rightarrow B$  para todo  $A \rightarrow B \in \Sigma$ .

Decimos que  $A \rightarrow B$  se *deriva semánticamente* de  $\Sigma$ , denotado  $\Sigma \models A \rightarrow B$ , si cualquier modelo para  $\Sigma$  también es un modelo para  $A \rightarrow B$ , i.e.  $c \models \Sigma$  implica que  $c \models A \rightarrow B$  para todo operador de cierre  $c$  en  $M$ .

## Sistema Axiomático

Los conocidos Axiomas de Armstrong es el primer sistema descrito para tratar sistemas de implicaciones utilizando la lógica. Tiene su origen en [3] donde se utilizó para estudiar las propiedades de las dependencias funcionales en el modelo relacional de Codd [24]. Este sistema ha tenido una clara influencia en el diseño de varias lógicas sobre implicaciones, todas ellas construidas alrededor del paradigma de la transitividad. Con el paso de los años, otros trabajos han propuesto sistemas axiomáticos equivalentes [5, 58, 94].

Estos axiomas son válidos al generar sólo implicaciones dentro del cierre del conjunto de implicaciones (denotado como  $F^+$ ) cuando se actúa sobre el conjunto  $F$ . También son completos ya que la aplicación repetitiva de las reglas generarán todas las implicaciones en el conjunto cerrado  $F^+$ .

Este sistema axiomático está formado por un axioma, denominado *Reflexivo*, y dos reglas de inferencia, *Aumentativa* y *Transitiva* que se definen a continuación

Sean  $A, B, C$  subconjuntos de atributos de  $M$ . Entonces, tenemos:

$$[\text{Ref}] \frac{}{AB \rightarrow A} \quad [\text{Aug}] \frac{A \rightarrow B \cup C}{AC \rightarrow BC} \quad [\text{Tran}] \frac{A \rightarrow B, B \rightarrow C}{A \rightarrow C}$$

Si bien es cierto que el sistema de Armstrong es un trabajo que acumula innumerables citas en diferentes trabajos a lo largo de los años, su utilidad práctica se ve mermada debido a la dificultad que conlleva a la hora de plasmar las demostraciones. Es por ello que su uso está enfocado al estudio teórico de las implicaciones en vez de al desarrollo de nuevos algoritmos. No obstante, como se ha mencionado, es un buen punto de partida para el desarrollo de nuevas lógicas para el tratamiento de las implicaciones.

En este punto es donde aparece la  $SL_{FD}$  [87], que constituye un marco mucho más adecuado en términos de la automatización del razonamiento utilizando implicaciones. De hecho,  $SL_{FD}$  será el núcleo fundamental de los métodos y las aplicaciones que se han llevado a cabo a lo largo de esta tesis doctoral.

$SL_{FD}$  constituye una lógica válida y completa [27] en la que el principal elemento del lenguaje son las implicaciones. Se define formalmente como:

**Definición 2.2.7.** *Sea  $M$  un conjunto finito, la formulación de  $SL_{FD}$  son expresiones, denominadas implicaciones, de la forma  $X \rightarrow Y$ , donde  $X$  e  $Y$  son subconjuntos de  $M$ .*

Las implicaciones se interpretan de forma conjuntiva, es decir, corresponden a las fórmulas  $a_1 \wedge \dots \wedge a_n \rightarrow b_1 \wedge \dots \wedge b_m$  donde las proposiciones  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m$  son elementos del conjunto  $M$ . La interpretación es la siguiente:

**Definición 2.2.8.** *Sea  $O$  y  $M$  dos conjuntos finitos, que representan objetos y atributos respectivamente, y  $I$  una relación en  $O \times M$ . Una implicación de  $SL_{FD}$ ,  $X \rightarrow Y$ , donde  $X$  y  $Y$  son subconjuntos de  $M$ , es válida en  $I$  si y sólo si*

$$\{o \in O \mid (o, x_i) \in I \ \forall x_i \in X\} \subseteq \{o \in O \mid (o, y_j) \in I \ \forall y_j \in Y\}$$

Además de su forma natural de expresar el conocimiento como regla, las implicaciones proporcionan un sistema de razonamiento lógico y de inferencia. Su tratamiento simbólico se propuso como hemos mencionado anteriormente en [3], sin embargo, debido al rol central que desempeña la transitividad en ese sistema axiomático, el desarrollo de métodos ejecutables para resolver problemas de implicaciones se basa en métodos indirectos.  $SL_{FD}$  evita el uso de la transitividad y se guía por la idea de simplificar el conjunto de implicaciones mediante la eliminación atributos redundantes de manera eficiente [86]. Por consiguiente, la introducción de  $SL_{FD}$  abrió la puerta al desarrollo de métodos de razonamiento automatizados directamente basados en su novedoso sistema axiomático [28, 30] que resumimos a continuación.

$SL_{FD}$  se define como el par  $(L_{FD}, S_{FD})$  donde  $S_{FD}$  tiene el siguiente esquema axiomático:

$$[\text{Ref}] \quad \frac{}{A \cup B \rightarrow A}$$

junto con las siguientes reglas de inferencia, denominadas *fragmentación*, *composición* y *simplificación* respectivamente.

$$[\text{Frag}] \quad \frac{A \rightarrow B \cup C}{A \rightarrow B} \quad [\text{Comp}] \quad \frac{A \rightarrow B, C \rightarrow D}{A \cup C \rightarrow B \cup D} \quad [\text{Simp}] \quad \frac{A \rightarrow B, C \rightarrow D}{A \cup (C \setminus B) \rightarrow D}$$

Remarcamos que el lenguaje  $SL_{FD}$  considera como fórmulas válidas aquellas en donde cualquiera de sus dos partes puede ser el conjunto vacío, denotado  $A \rightarrow \emptyset$  y  $\emptyset \rightarrow A$ . Sus significados fueron discutidos en [27]. En ese trabajo, también presentamos el siguiente resultado donde la derivación de una implicación  $A \rightarrow B$  se reduce a la derivación de la fórmula  $\emptyset \rightarrow B$  teniendo  $\emptyset \rightarrow A$ . Este resultado se usará más adelante en el diseño de nuestro novedoso método de cierre.

**Proposición 2.2.9.** *Para cualquier  $\Gamma$  y  $\forall X, Y \subseteq M$ ,  $\Gamma \vdash X \rightarrow Y$  si y sólo si  $\Gamma \cup \{\top \rightarrow X\} \vdash \top \rightarrow Y$*

**Definición 2.2.10.** *Se dice que una implicación  $A \rightarrow B$  se deriva sintácticamente de un sistema de implicaciones  $\Sigma$ , y se denota por  $\Sigma \vdash A \rightarrow B$ , si*

existe una secuencia de implicaciones  $\sigma_1, \dots, \sigma_n \in \mathcal{L}_M$  tal que  $\sigma_n = (A \rightarrow B)$  y, para todo  $1 \leq i \leq n$ , la implicación  $\sigma_i$  satisface una de las siguientes condiciones:

- $\sigma_i$  es un axioma, es decir, verifica el esquema [Ref].
- $\sigma_i \in \Sigma$ .
- $\sigma_i$  se obtiene a partir de implicaciones pertenecientes a  $\{\sigma_j \mid 1 \leq j < i\}$  aplicando las reglas de inferencia [Frag], [Comp] o [Simp].

La secuencia  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$  constituye una *demostración* para  $\Sigma \vdash A \rightarrow B$ .

La derivación sintáctica proporciona una gestión automatizada de las implicaciones. En particular, se puede usar para resolver el denominado problema de las implicaciones: dado un conjunto de implicaciones  $\Gamma$  y una implicación  $A \rightarrow B$ , queremos responder si  $A \rightarrow B$  se deduce de  $\Gamma$ . Este problema se puede abordar utilizando el operador de cierre.

El sistema axiomático es válido y completo, es decir, se cumple que la derivación sintáctica y semántica coinciden. Esto significa que cada regla que se puede deducir con este sistema puede derivarse semánticamente (el sistema axiomático es válido) y viceversa (el sistema axiomático es completo).

**Teorema 2.2.11.** *Sea  $M$  un conjunto finito no vacío de atributos,  $\Sigma \subseteq \mathcal{L}_M$  y  $A \rightarrow B \in \mathcal{L}_M$ . Entonces,  $\Sigma \models A \rightarrow B$  si y sólo si  $\Sigma \vdash A \rightarrow B$ .*

La derivación sintáctica nos conduce a un nuevo operador de cierre denominado *cierre sintáctico*.

**Definición 2.2.12.** *Dado un sistema de implicaciones  $\Sigma \subseteq \mathcal{L}_M$ , un conjunto  $X \subseteq M$  se dice cerrado respecto de  $\Sigma$  si  $A \subseteq X$  implica  $B \subseteq X$  para toda  $A \rightarrow B \in \Sigma$ . Debido a que  $M$  es cerrado con respecto a  $\Sigma$  y cualquier intersección de conjuntos cerrados es cerrada, podemos definir el siguiente operador de cierre:*

$$(\cdot)_{\Sigma}^+ : 2^M \rightarrow 2^M \quad X_{\Sigma}^+ = \bigcap \{Y \subseteq M \mid Y \text{ es cerrado con respecto a } \Sigma \text{ y } X \subseteq Y\}$$

El siguiente teorema es esencial para calcular cierres y a su vez también para introducir un método de razonamiento automático.

**Teorema 2.2.13** (Teorema de deducción). *Sea  $A \rightarrow B \in \mathcal{L}_M$  y  $\Sigma \subseteq \mathcal{L}_M$ . Entonces,*

$$\Sigma \vdash A \rightarrow B \quad \text{sii} \quad B \subseteq A_{\Sigma}^{+} \quad \text{sii} \quad \{\emptyset \rightarrow A\} \cup \Sigma \vdash \{\emptyset \rightarrow B\}$$

**Corolario 2.2.14.** *Sea  $\Sigma \subseteq \mathcal{L}_M$ .  $\forall X \subseteq M$ , se tiene que*

$$X_{\Sigma}^{+} = \text{máx}\{Y \subseteq M \mid \Sigma \vdash X \rightarrow Y\}.$$

La principal ventaja de  $SL_{FD}$  radica en que las reglas de inferencia pueden considerarse reglas de equivalencia. Como consecuencia,  $SL_{FD}$  se ha podido utilizar como núcleo principal para el desarrollo de métodos automáticos para diversas aplicaciones (e.g. obtener claves minimales, cálculos del cierre) como veremos más adelante. Un estudio más detallado al respecto, incluyendo teoremas y demostraciones, puede verse en [86].

## Método de Razonamiento Automático

El problema de las implicaciones se ha abordado tradicionalmente utilizando un método básico que recibe  $A \subseteq M$  como entrada y utiliza de forma exhaustiva la relación de subconjuntos recorriendo iterativamente  $\Gamma$  y agregando nuevos elementos al cierre. Este método, propuesto en la década de 1970 [76] y puede considerarse la base principal donde se han sustentado tantos otros. Podemos verlo detallado en el Algoritmo 2.1.

Más tarde, varios autores han desarrollado otros métodos mediante el uso de diferentes técnicas, resolviendo eficientemente este problema en tiempo lineal. En [95], los autores muestran que la complejidad del problema de cierre es  $O(|\mathcal{A}| |\Gamma|)$ . En [86], presentamos un método de cierre de atributos estrechamente relacionado con el sistema axiomático  $SL_{FD}$ . También demostramos que nuestro método tiene un mejor rendimiento que aquellos basados en el cierre clásico.

Por nuestra parte, el método de razonamiento automático en  $SL_{FD}$  se basa en el Teorema de Deducción y un conjunto de equivalencias. Siguiendo



**Algorithm 2.1:** Cierre clásico

---

**Data:**  $\Gamma, A$   
**Result:**  $A_\Gamma^+$   
**begin**  
     $A_\Gamma^+ := A$   
    **repeat**  
         $A' := A_\Gamma^+$   
        **foreach**  $X \rightarrow Y \in \Gamma$  **do**  
            **if**  $X \subseteq A_\Gamma^+$  **and**  $Y \not\subseteq A_\Gamma^+$  **then**  
                 $A_\Gamma^+ := A_\Gamma^+ \cup \{Y\}$   
    **until**  $A_\Gamma^+ = A'$ ;  
    **return**  $A_\Gamma^+$

---

la forma habitual, dos sistemas de implicaciones  $\Sigma_1, \Sigma_2 \subseteq \mathcal{L}_M$  se dicen equivalentes si sus modelos coinciden, es decir, se cumple que para todo operador de cierre en  $M$ ,  $c \models \Sigma_1$  sii  $c \models \Sigma_2$ .

La siguiente proposición proporciona las tres equivalencias, denominadas también: *Fragmentación*, *Composición* y *Simplificación*, que se aplican y justifican el nombre de la lógica  $SL_{FD}$  porque, si las leemos de izquierda a derecha, eliminan la información redundante en el sistema de implicaciones (cf. [86]).

**Proposición 2.2.15.** Sean  $A, B, C, D \subseteq M$ . Se verifican las siguientes equivalencias:

- (i)  $\{A \rightarrow B\} \equiv \{A \rightarrow B \setminus A\}$
- (ii)  $\{A \rightarrow B, A \rightarrow C\} \equiv \{A \rightarrow B \cup C\}$
- (iii)  $A \cap B = \emptyset$  y  $A \subseteq C$  implica  $\{A \rightarrow B, C \rightarrow D\} \equiv \{A \rightarrow B, C \setminus B \rightarrow D \setminus B\}$

Basándonos en el Teorema de Deducción y las equivalencias anteriores, en [86], los autores presentan un novedoso algoritmo para calcular cierres

utilizando  $SL_{FD}$ , denominado **Cls** que actúa según el siguiente procedimiento.

Dado un conjunto  $A \subseteq M$  y un conjunto de implicaciones  $\Sigma$ , **Cls** calcula el par  $(A_{\Sigma}^+, \Gamma)$ , siendo  $A_{\Sigma}^+$  el cierre sintáctico de  $A$  con respecto a  $\Sigma$  y  $\Gamma$  el conjunto residual de implicaciones respecto a  $\emptyset \rightarrow A_{\Sigma}^+$ . Esto permite determinar si una implicación  $A \rightarrow B$  puede deducirse de  $\Sigma$ .

Los pasos del algoritmo desglosados en lenguaje natural y de forma más detallada son:

- En primer lugar, se incluye la fórmula  $\emptyset \rightarrow A$  en  $\Sigma$  y se usa como semilla por el método de razonamiento mediante las equivalencias mencionadas en la proposición anterior.
- A continuación, el algoritmo entra en un proceso iterativo en el cual se irán aplicando las siguientes equivalencias mientras no se alcance la condición de parada.
  - **Eq. I:** Si  $B \subseteq A$  entonces  $\{\emptyset \rightarrow A, B \rightarrow C\} \equiv \{\emptyset \rightarrow A \cup C\}$ .
  - **Eq. II:** Si  $C \subseteq A$  entonces  $\{\emptyset \rightarrow A, B \rightarrow C\} \equiv \{\emptyset \rightarrow A\}$ .
  - **Eq. III:** En otro caso  $\{\emptyset \rightarrow A, B \rightarrow C\} \equiv \{\emptyset \rightarrow A, B \setminus A \rightarrow C \setminus A\}$ .
- En el momento en el que no sea posible aplicar ninguna de las equivalencias anteriores, el algoritmo termina dando como resultado el conjunto cierre  $A_{\Sigma}^+$ , es decir, el cierre sintáctico de  $A$  con respecto a  $\Sigma$ , y además, el conjunto residual de implicaciones  $\Gamma$ .

Formalmente, el algoritmo **Cls** puede verse en la Función **Cls**.

Aunque es cierto que existen en la literatura numerosas propuestas de algoritmos para calcular el cierre (la mayoría de ellas como modificaciones del cierre clásico de Maier [76]), la principal novedad y ventaja que aporta **Cls** es que, de manera simultánea, también reducimos el número de implicaciones, guardando el conocimiento complementario que describe la información que no pertenece al cierre. Este hecho nos coloca sin lugar a dudas en una posición privilegiada, ya que nos evita el elevado coste de un

---

<b>Function</b> $\text{Cls}(A, \Sigma)$
<b>input</b> : $A$ , conjunto de atributos sobre los que se quiere calcular el cierre; $\Sigma$ , un sistema de implicaciones; <b>output</b> : $A_{\Sigma}^+$ , cierre sintáctico de $A$ con respecto a $\Sigma$ ; $\Gamma$ , el sistema de implicaciones residual; <b>repeat</b> $\Gamma := \Sigma$ $\Sigma := \emptyset$ <b>foreach</b> $B \rightarrow C \in \Gamma$ <b>do</b> <b>if</b> $B \subseteq A$ <b>then</b> $A := A \cup B$ <b>else if</b> $C \not\subseteq A$ <b>then</b> $\Sigma := \Sigma \cup \{B \setminus A \rightarrow C \setminus A\}$ <b>until</b> $\Gamma = \Sigma$ <b>return</b> $(A, \Gamma)$

---

proceso de minería de datos para extraer el nuevo conjunto de implicaciones para el conjunto de datos reducido después de cada aplicación del método, algo imprescindible cuando se utilizan las implementaciones clásicas. En consecuencia, el proceso supera los costos de minería de datos preservando una complejidad lineal a lo largo del proceso.

Finalizamos este apartado mostrando un ejemplo de aplicación del algoritmo del cierre propuesto.

**Ejemplo 2.2.16.** Sean  $\Sigma = \{a \rightarrow c, bc \rightarrow d, c \rightarrow ae, d \rightarrow e\}$  y  $A = \{c, e\}$ . El algoritmo  $\text{Cls}$  devuelve  $A^+ = \{a, c, e\}$ . La siguiente tabla muestra la traza de ejecución paso a paso del algoritmo.

<i>Guide</i>	$\Sigma$			
$\emptyset \rightarrow ce$	$a \rightarrow c$	$bc \rightarrow d$	$c \rightarrow ae$	$d \rightarrow e$
$\emptyset \rightarrow ce$	$a \rightarrow \cancel{c}$	$b\cancel{c} \rightarrow d$	$\cancel{c} \rightarrow a\cancel{e}$	$d \rightarrow \cancel{e}$
$\emptyset \rightarrow ace$		$b \rightarrow d$		

Por tanto, una vez finalizado la ejecución del algoritmo, obtenemos:  $\text{Cls}(\{c, e\}, \{a \rightarrow c, bc \rightarrow d, c \rightarrow ae, d \rightarrow e\}) = (\{a, c, e\}, \{b \rightarrow d\})$ , donde el cierre es  $\{c, e\}_{\Sigma}^+ = \{a, c, e\}$  y el conjunto residual de implicaciones queda

*como:*  $\Gamma = \{b \rightarrow d\}$ .

Parte I

# Claves y Generadores Minimales



## Capítulo 3

# Claves Minimales





Identificar las claves de un esquema relacional es una tarea imprescindible dentro de numerosas áreas diferentes de la gestión de la información. Ejemplos de ello nos remontan incluso décadas atrás, donde podemos ver que las claves constituyen un elemento fundamental en acciones como pueden ser: la optimización de consultas [64], el indexado [64] o el modelado de datos [113], pero el concepto y sus aplicaciones son igualmente extensibles a sistemas actuales.

Generalmente, es tarea de ingeniería establecer y elegir las claves como parte de la normalización del esquema. El reto es encontrar esos atributos del esquema que nos permitan identificar de forma única cada tupla de la relación.

Técnicamente, una clave de un esquema relacional está compuesta por un subconjunto de atributos que actúan como el dominio de una función cuya imagen es el propio conjunto de atributos. Estas funciones se describen como dependencias funcionales (en adelante FD, por sus siglas en inglés, *Functional Dependencies*), las cuales especifican una restricción entre los dos conjuntos de atributos, que denotamos como  $A \rightarrow B$ , y que nos asegura que para cualquier tupla de la relación, si la tupla verifica el antecedente  $A$ , entonces también verifica el consecuente  $B$ . Tal y como hemos visto en los capítulos introductorios, esta definición coincide exactamente con el concepto de *if-then rules* que hasta ahora hemos introducido según la

denominación de implicación por hallarnos en el marco de FCA, sin embargo, esta vez, la diferencia de nombre se debe simplemente al entorno en el que ahora vamos a trabajar, esto es, las bases de datos relacionales, donde se habla de dependencias funcionales para este tipo de reglas. Se expone formalmente en las siguientes definiciones.

**Definición 3.0.1** (Atributo). *Un atributo  $A$  es un identificador para un elemento en un dominio  $D$ .*

**Definición 3.0.2** (Dependencia funcional). *Sea  $\Omega$  un conjunto de atributos. Una dependencia funcional (FD) sobre  $\Omega$  es una expresión de la forma  $X \rightarrow Y$ , donde  $X, Y \subseteq \Omega$ . Se satisface en una tabla  $R$  siempre y cuando para cada dos tuplas de  $R$ , si verifican  $X$ , entonces también verifican  $Y$ .*

**Definición 3.0.3** (Dependencia funcional trivial). *Sea  $\Omega$  un conjunto de atributos. Una dependencia funcional (FD)  $X \rightarrow Y$  sobre  $\Omega$ , se denomina trivial si  $Y \subseteq X$ .*

**Definición 3.0.4** (Dependencia funcional unitaria). *Sea  $\Omega$  un conjunto de atributos. Una dependencia funcional (FD)  $X \rightarrow Y$  sobre  $\Omega$ , se denomina unitaria si  $Y$  es un conjunto unitario.*

Las claves nos permiten identificar de forma unívoca cada una de las tuplas que existan en una relación y podemos definirlas por medio de FD como sigue:

**Definición 3.0.5** (Clave). *Dada un tabla  $R$  sobre un conjunto de atributos  $\Omega$ , decimos que  $K$  es un clave de  $R$  si se verifica la dependencia funcional  $K \rightarrow \Omega$  en  $R$ .*

Una característica muy importante de la claves es su minimalidad. Una clave se considerará minimal cuando todos y cada uno de los atributos que la forman son imprescindibles para mantener su naturaleza de clave, es decir, no contiene ningún atributo superfluo. Formalmente:

**Definición 3.0.6** (Clave minimal). *Dada un tabla  $R$  sobre un conjunto de atributos  $\Omega$ , decimos que  $K$  es una clave minimal de  $R$  si se verifica la dependencia funcional  $K \rightarrow \Omega$  en  $R$  y  $\nexists a \in K$  tal que  $K \setminus \{a\} \rightarrow \Omega$ .*

**Nota 3.0.7.** *Es de vital importancia mencionar que aunque para averiguar el conjunto de claves vamos a trabajar sobre FDs, no es objetivo de esta Tesis extraerlas a partir de un esquema relacional. Para ello, existen desde hace tiempo numerosas técnicas en la literatura que se ocupan de realizar esta tarea [57, 136, 137]. Por tanto, haremos uso de estas técnicas a la hora de enfrentarnos con un esquema relacional para obtener el conjunto de FD que se verifican sobre esos datos de forma que tengamos la semilla sobre la que aplicar las técnicas de búsqueda de claves que son motivo de estudio en esta tesis.*

Para ilustrar de forma básica el concepto de clave, vamos a utilizar el siguiente Ejemplo 3.0.8.

**Ejemplo 3.0.8.** *Supongamos que disponemos de la Tabla 3.1. Es una pequeña tabla donde se refleja información que relaciona títulos de películas, actores, países, directores, nacionalidad y años de estreno.*

*De esta información, utilizando los métodos comentados anteriormente, podemos extraer el siguiente conjunto de FDs:*

$\Gamma = \{\text{Titulo, Año} \rightarrow \text{Pais}; \text{Titulo, Año} \rightarrow \text{Director}; \text{Director} \rightarrow \text{Nacionalidad}\}.$

Cuadro 3.1: Tabla de películas

Título	Año	País	Director	Nacionalidad	Actor
Pulp Fiction	1994	USA	Quentin Tarantino	USA	John Travolta
Pulp Fiction	1994	USA	Quentin Tarantino	USA	Uma Thurman
Pulp Fiction	1994	USA	Quentin Tarantino	USA	Samuel Jackson
King Kong	2005	NZ	Peter Jackson	NZ	Naomi Watts
King Kong	2005	NZ	Peter Jackson	NZ	Jack Black
King Kong	1976	USA	De Laurentiis	IT	Jessica Lange
King Kong	1976	USA	De Laurentiis	IT	Jeff Bridges
Django Unchained	2012	USA	Quentin Tarantino	USA	Jamie Foxx
Django Unchained	2012	USA	Quentin Tarantino	USA	Samuel Jackson

*Esta tabla tiene una sola clave minimal:  $\{\text{Titulo, Año, Actor}\}$  que corresponde con el conjunto de atributos necesario para identificar cualquier tupla de la relación.*

Aquellos lectores que no estén familiarizados con las nociones formales de FD, claves y tablas relacionales pueden consultar uno de los trabajos más citados al respecto en [37].

Es conveniente aclarar que el trabajo llevado a cabo no es una cuestión de minería de datos [40]. De forma muy general podríamos decir que la minería de datos puede considerarse un proceso computacional para descubrir patrones en grandes volúmenes de datos con el objetivo de extraer información de un conjunto de datos y transformarla en estructuras para diversos usos [133]. Sin embargo, nuestra labor consiste en desarrollar, a partir de la información ya extraída de los datos, los mecanismos y algoritmos necesarios para encontrar las claves de los conjuntos de datos, y en general, descubrir el conocimiento implícito, que nos permitan realizar un tratamiento más inteligente y eficiente de la información.

En este capítulo, analizaremos el problema de la búsqueda de claves 3.2 y el estado del arte 3.3, pero antes vamos a mostrar algunas situaciones donde la existencia de este problema es relevante 3.1. Cerrarán este capítulo dos secciones más; la primera es realmente importante ya que presenta la implementación de los métodos y la filosofía de computación paralela que se ha utilizado 3.4 y en la última se recogen en diversas tablas los resultados obtenidos por cada uno de los métodos 3.5.

### 3.1 Aplicaciones

Antes de seguir avanzando, es momento de apoyar el valor intrínseco de los datos mostrando una situaciones de ejemplo donde conocer las claves del sistema es fundamental.

**Ejemplo 3.1.1.** *Sea el caso en que tenemos almacenados los datos personales de los empleados de una determinada empresa (e.g. nombre, edad, DNI, teléfono, etc.). Se podría pensar que una forma de identificar a uno de los empleados podría ser a través de su nombre y apellidos. Sin embargo, esto no sería correcto puesto que hay personas diferentes cuyos nombres y apellidos pueden coincidir. Tal podría ser el caso de nombres más habituales*

*tanto dentro del territorio nacional como Antonio Fernández o fuera, como Peter Williams. Otra alternativa podría ser elegir el número de teléfono, pero también podría ser un fallo en tanto en cuanto una misma familia o compañeros de trabajo pueden compartir el mismo número de línea fija de teléfono.*

En este ejemplo, el elemento que nos permite identificar de forma única a un empleado es el DNI, y por tanto, ésta debe ser la clave de nuestro esquema. Y además, puesto que solamente contiene la información necesaria para ser clave, estamos ante una clave minimal. Sin embargo, no es la única clave que existe. Pensemos que si tomamos combinaciones de valores como *DNI* y *Apellidos*, también estaríamos obteniendo una clave válida del esquema, pero en este caso, puesto que tenemos información que no es imprescindible (e.g. *Apellidos*), no estaríamos ante una clave minimal.

**Ejemplo 3.1.2** (Optimización de consultas). *Dependiendo del sistema de información con el que estemos tratando, la complejidad que pueden alcanzar algunas consultas puede ser tal que su tiempo de respuesta no sea admisible. Un ejemplo de una consulta de cierta complejidad dentro de un hipotético modelo sanitario a nivel nacional, podría consistir en solicitar al sistema la lista de los varones mayores de 40, que hayan tenido al menos una intervención quirúrgica, estén casados, posean vivienda propia, tengan al menos dos hijos, ...*

Este tipo de consultas pueden necesitar acceder a tal cantidad de recursos que a la hora de obtener una respuesta del sistema, el tiempo de espera puede ser intratable. Por tanto, tener el sistema bien diseñado de manera que las consultas se puedan hacer de forma eficiente será un aspecto fundamental del sistema; una de las formas principales de conseguir esto es mediante un buen diseño que nos permita decidir a través de qué elementos dirigir la búsqueda, es decir, conocer las claves del modelo de datos [36].

Un aspecto muy importante en las tecnologías de la información es tener mecanismos que nos permitan detectar errores que pueden producirse en la gestión y almacenamiento de la información. Estos errores pueden

deberse a multitud de causas y no sólo se producen a la hora de diseñar un nuevo sistema, sino que pueden aparecer a lo largo del tiempo de vida de un sistema ya sea por el uso prolongado, cambios en las tecnologías, la intervención de diferentes personas, etc. En estos casos, es imprescindible tener mecanismos para encauzar la búsqueda del error y para ello, es fundamental conocer las claves del sistema [4]. Para mostrar una situación en la que conocer las claves nos puede ayudar en la detección de errores supongamos la siguiente situación.

**Ejemplo 3.1.3** (Detección de errores). *Suele ser común que se produzcan errores en bases de datos debido a las peculiaridades de algunos nombres personales. Los más comunes suelen ser la repetición de registros. Por ejemplo, pensemos una editorial que tenga una base de datos enorme de artículos científicos donde se almacena simplemente el nombre de los autores y el de las publicaciones. Ahora, pongamos por caso que en una publicación el nombre de uno de los autores es Aurora Manjón Ramos, mientras que en otra perteneciente a la misma autora, el nombre registrado es Aurora Manjón-Ramos. Si queremos obtener las aportaciones de este autor en este sistema, habrá que tener en cuenta la sutil diferencia en la forma de los apellidos pues de lo contrario la lista de artículos no será consistente.*

Esto ocurre porque el sistema está abierto al fallo humano al no tener mecanismos para bloquear la posible duplicidad de registros. Actualmente y en relación a este caso particular, el sistema de control DOI elaborado por la Corporación Nacional para Iniciativas de Investigación (CNRI) es un claro ejemplo de una forma de clave con la que identificar los trabajos. En definitiva, poseer una clave que nos determine cómo se introduce nueva información en el sistema será esencial para evitar este tipo de situaciones de error.

## 3.2 El problema de la búsqueda de claves

El problema de la búsqueda de claves consiste en encontrar todos los subconjuntos de atributos que componen una clave mínima a partir de un

conjunto de FD que se verifican en un esquema de una tabla de de datos relacional. Es un campo de estudio con décadas de antigüedad en el que podemos remontarnos a un primer estudio preliminar en [39], donde las claves se estudiaron dentro del ámbito de la matriz de implicaciones u otros tantos trabajos como [44, 105] que se centran en averiguar estas claves minimales.

Las claves constituyen un elemento crucial en cualquier modelo de datos, incluyendo el modelo de datos relacional de Codd [24]. Sin embargo, la dificultad al enfrentarnos con el problema de la búsqueda de claves surge debido a que, dado un conjunto de atributos  $A$ , la cardinalidad del conjunto  $2^A$  hace que haya que abordar el problema aplicando técnicas que guíen la búsqueda de los conjuntos candidatos a ser claves minimales.

El cálculo de todas las llaves minimales representa un problema complejo. En [75, 138] se incluyen resultados interesantes acerca de la complejidad del problema; los autores demuestran que el número de claves minimales para un sistema relacional puede ser exponencial respecto al número de atributos, o factorial respecto al número de dependencias. Además, establecieron que el número de claves está limitado por el factorial del número de dependencias, por tanto, no existe un algoritmo que resuelva el problema en tiempo polinómico. Hay otros resultados que apoyan la complejidad del problema; es un problema NP-completo decidir si existe una clave de tamaño a lo sumo  $k$  dado un conjunto de FD [75].

Las principales referencias sobre este problema apuntan a los trabajos de Lucchesi y Osborn en [75] que muestran un algoritmo para calcular todas las claves candidatas. Por otro lado, Saiedian y Spencer [104] presentaron un algoritmo usando grafos con atributos para encontrar todas las claves posibles de un esquema de base de datos relacional. No obstante, demostraron que sólo podía aplicarse cuando el grafo de FDs no estuviera fuertemente conectado. Otro ejemplo lo encontramos en el trabajo de Zhang [142] en el cual se utilizan mapas de Karnaugh [62] para calcular todas las claves. También existen trabajos más recientes sobre el cálculo de las claves minimales como son [114, 134] y otra contribución actual que aborda el problema en un estilo lógico [28]. Asimismo, en [72, 125, 126] los autores propusieron el uso de FCA [43] para abordar problemas relacionados con la búsqueda y

la gestión de las implicaciones, que pueden considerarse complementarios a nuestro trabajo.

Es significativo como el problema de la búsqueda de claves aparece en diversos campos de conocimiento. Por ejemplo, en [12] se hace mención a la importancia de conocer las claves en áreas emergentes como el *linked-data*. Por otro lado, en [28], mostramos cómo el problema de las claves mínimas en las bases de datos tiene su análogo en FCA, donde el papel de las FDs se manifiesta, como ya hemos comentado, como implicaciones de atributos. En ese artículo, el problema de las claves mínimas se presentó desde un punto de vista lógico y para ello se empleó un sistema axiomático para gestionar las FDs y las implicaciones; este sistema es el que en apartados anteriores hemos presentado como  $SL_{FD}$  [27].

En nuestro objetivo de esta parte de la Tesis nos vamos a concentrar en los algoritmos de búsqueda de claves basados en la lógica, y más específicamente, en aquellos que utilizan el paradigma de Tableaux [88] para determinar las claves de un esquema relacional utilizando un sistema de inferencia.

De forma muy general, podemos decir que los métodos tipo Tableaux representan el espacio de búsqueda como un árbol, donde sus hojas contienen las soluciones (claves). El proceso de construcción del árbol comienza con una raíz inicial y desde allí, las reglas de inferencia generan nuevas ramas etiquetadas con nodos que representan instancias más simples del nodo padre. La mayor ventaja de este proceso es su versatilidad, ya que el desarrollo de nuevos sistemas de inferencia nos permiten diseñar un nuevo método. Las comparaciones entre estos métodos se pueden realizar fácilmente ya que su eficiencia va de la mano con el tamaño del árbol generado.

Esto nos lleva a un punto de partida fundamental, los estudios de R. Wastl (Universidad de Wurzburg, Alemania) [128, 129] donde se introduce por primera vez un sistema de inferencia de tipo Hilbert para averiguar todas las claves de un esquema relacional. A modo de ejemplo básico, en la Figura 3.1 podemos ver un ejemplo de árbol de búsqueda según el paradigma de Tableaux desarrollado según las reglas de inferencia del sistema de inferencia  $\mathbb{K}$  de Wastl.



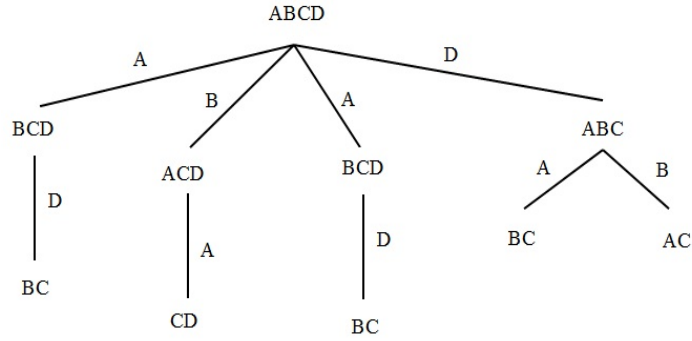


Figura 3.1: Ejemplo de Tableaux utilizando el sistema de inferencia  $\mathbb{K}$  de Wastl.

Siguiendo esta línea, en [26] los autores abordan el problema de la búsqueda de claves utilizando un sistema de inferencia basado en la lógica de simplificación para dependencias funcionales [27]. En [86] los autores muestran la equivalencia entre  $SL_{FD}$  y los axiomas de Armstrong [3] junto con un algoritmo para calcular el cierre de un conjunto de atributos. Los autores también exponen una comparación con otros algoritmos del cierre que aparecen en la literatura para demostrar la orientación práctica del sistema lógico.

Más tarde, en [28], los autores introdujeron el método SST, basado en la introducción del test de minimalidad que evita la apertura de ramas adicionales del árbol, por lo que el espacio de búsqueda se vuelve más reducido, logrando un gran rendimiento en comparación con sus predecesores.

Recordemos que para abordar el problema de la búsqueda de claves en grandes sistemas, nuestro objetivo era utilizar las técnicas lógicas sobre una implementación paralela de los métodos que, mediante el uso de recursos de supercomputación, nos permitan alcanzar resultados en un tiempo razonable. En esta línea, son varios los trabajos que han utilizado la paralelización para afrontar problemas relacionados con implicaciones o FCA. Un algoritmo paralelo para el tratamiento de implicaciones enmarcado en el campo

de los hipergrafos lo podemos encontrar en [118]. A su vez, Krajca et al. [66] presentan un algoritmo paralelo para el cálculo de conceptos formales. Por nuestra parte, una primera aproximación a la paralelización del método de Wastl [128, 129] y el algoritmo de claves [26] fue presentado en [11], donde se muestra cómo el paralelismo puede integrarse de forma natural en los métodos basados en tableaux. Fue este el punto de partida para el desarrollo de los nuevos métodos más eficientes que vemos a continuación.

### 3.3 Algoritmos para el cálculo de claves

Nuestra contribución principal en relación a esta parte de la tesis se produce de la siguiente forma. Basándonos en el sistema axiomático de la lógica  $SL_{FD}$  2.2, proponemos un nuevo método llamado *Closure Keys (CK)* que incorpora un mecanismo eficiente de poda que utiliza el método de cierre basado en  $SL_{FD}$  para mejorar el método SST. El nuevo método se basa en la relación fuerte entre la noción de clave y el operador de cierre, no sólo a nivel de definición, sino también en cuanto a su construcción.

El operador de cierre definido en [86] y que hemos introducido previamente en el capítulo de Preliminares 2 como  $Cl$ , nos permite reducir el espacio de búsqueda realizando reducciones en el camino hacia las hojas, donde finalmente se obtienen las claves. Además, se ha desarrollado una implementación paralela tanto del método SST como del método CK junto con varios experimentos, los cuales necesitan llevarse a cabo en entornos de supercomputación, para confirmar las mejoras que se han alcanzado.

#### Método SST

En [28] se presentó un nuevo algoritmo, denominado SST, para calcular todas las claves minimales usando una estrategia de estilo tableaux, abriendo la puerta a incorporar el paralelismo en su implementación. SST se basa en la noción de cierre de conjunto, una noción básica en la teoría de base de datos que permite caracterizar el conjunto máximo de atributos que se puede alcanzar, desde un determinado conjunto de atributos  $A$  con respecto

a un conjunto de FD, utilizando el sistema axiomático. Por lo tanto, si el cierre de  $A$  se denota como  $A_{\Gamma}^+$ , el sistema de inferencia para FD nos permite inferir la FD  $A \rightarrow A_{\Gamma}^+$ . El enfoque con estilo lógico para el problema de las claves minimales consiste en la enumeración de todos los conjuntos de atributos  $A$  tales que se verifique la FD:  $A \rightarrow \Omega$ .

El método SST presenta dos mejoras fundamentales con respecto a sus predecesores. En primer lugar, consigue una reducción en el número de ramas y la segunda mejora consiste en el desarrollo de potentes reglas de inferencia que reducen la profundidad de las ramas, lo cual acelera significativamente la búsqueda de las claves. Estas dos nuevas reglas de inferencia, denominadas [sSimp] y [lSimp] y que se muestran a continuación son dos extensiones concretas de la regla de simplificación de la  $SL_{FD}$ .

$$[sSimp] \quad \frac{A \rightarrow B \quad C \rightarrow D}{A(C \setminus B) \rightarrow D \setminus AB} \quad [lSimp] \quad \frac{A \rightarrow B \quad C \rightarrow D}{A(C \setminus B) \rightarrow D}$$

Estas reglas guían la construcción del espacio de búsqueda para descubrir todas las claves minimales [28]. El método avanza paso a paso construyendo un árbol desde el problema original hasta llegar a las hojas donde encontramos las soluciones, es decir, las claves. Las reglas se aplican a cada par (conjunto de atributos, conjunto de implicaciones) correspondiente a cada nodo del árbol para producir nuevos nodos en un nivel inferior, que serán el origen de nuevas ramas del árbol de búsqueda.

Al aplicar [lSimp] sobre el subconjunto de atributos en cada nodo y la implicación en el borde correspondiente, obtenemos la nueva raíz en la rama. Por ejemplo, en la Figura 3.2, a partir de  $\Omega$  y  $A_1 \rightarrow B_1$ , obtenemos el nuevo subconjunto  $\Omega_1$ .

Por otra parte, la aplicación de [sSimp] sobre la implicación establecida en cada nodo se hace tomando cada implicación como pivote y aplicando la regla al resto de las implicaciones para generar nuevas ramas. Podemos verlo en la Figura 3.2, donde la primera rama se genera tomando  $A_1 \rightarrow B_1$  como pivote y aplicándolo al resto de implicaciones  $A_2 \rightarrow B_2, \dots, A_n \rightarrow B_n$ . Cuando el conjunto de implicaciones en un nodo es el conjunto vacío,

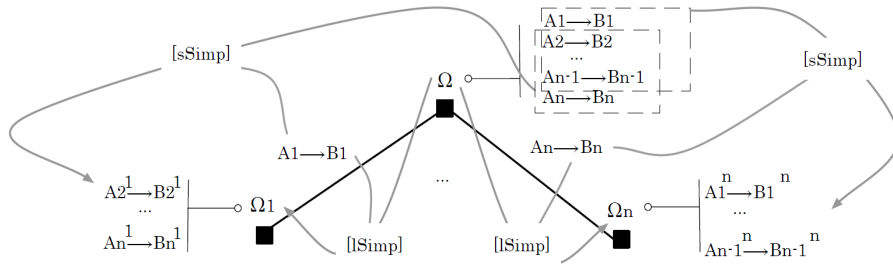


Figura 3.2: Aplicación de las reglas [sSimp] y [lSimp] en el algoritmo *Closure Keys*.

hemos llegado a una hoja del árbol y por tanto, a una clave, que agregamos a la solución global. A continuación mostramos un ejemplo completo de aplicación.

**Ejemplo 3.3.1.** Sea un conjunto de atributos  $U = \{a, b, c, d, e, g\}$  y un conjunto de implicaciones  $\Gamma = \{ab \rightarrow c, bc \rightarrow d, be \rightarrow c, cg \rightarrow b, c \rightarrow a, d \rightarrow eg, ce \rightarrow g\}$ . El conjunto  $K$  de todas las claves minimales que se extraen es  $K = \{cd, bc, ce, cg, bd, ab, be\}$  y el *Tableaux* que se genera podemos verlo en la Figura 3.3.

Obsérvese que el primer nivel del árbol tiene sólo cuatro hijos, que corresponden a las cuatro fórmulas minimales en  $\Gamma$ . En el caso del método  $SL_{FD}$  estaríamos hablando de 7 hijos en este primer nivel. La eficaz estrategia proporcionada por el método SST y sus nuevas reglas de inferencias redundan en el éxito en la construcción de todo el árbol. De esta forma, el árbol final tiene 21 nodos mientras que en el caso del método  $SL_{FD}$  hablamos de 244.

SST muestra un gran rendimiento en comparación con sus predecesores como hemos visto hasta ahora y como puede comprobarse en el amplio estudio realizado sobre el método en [10]. El beneficio principal en la reducción del espacio de búsqueda debe a la introducción del test de inclusión para evitar la apertura de ramas extra. Gracias a ello, SST no abre algunas ramas que sabemos que van a producir las mismas claves que se calculan en otra rama. Poder identificar que tales ramas resultarán en hojas con infor-

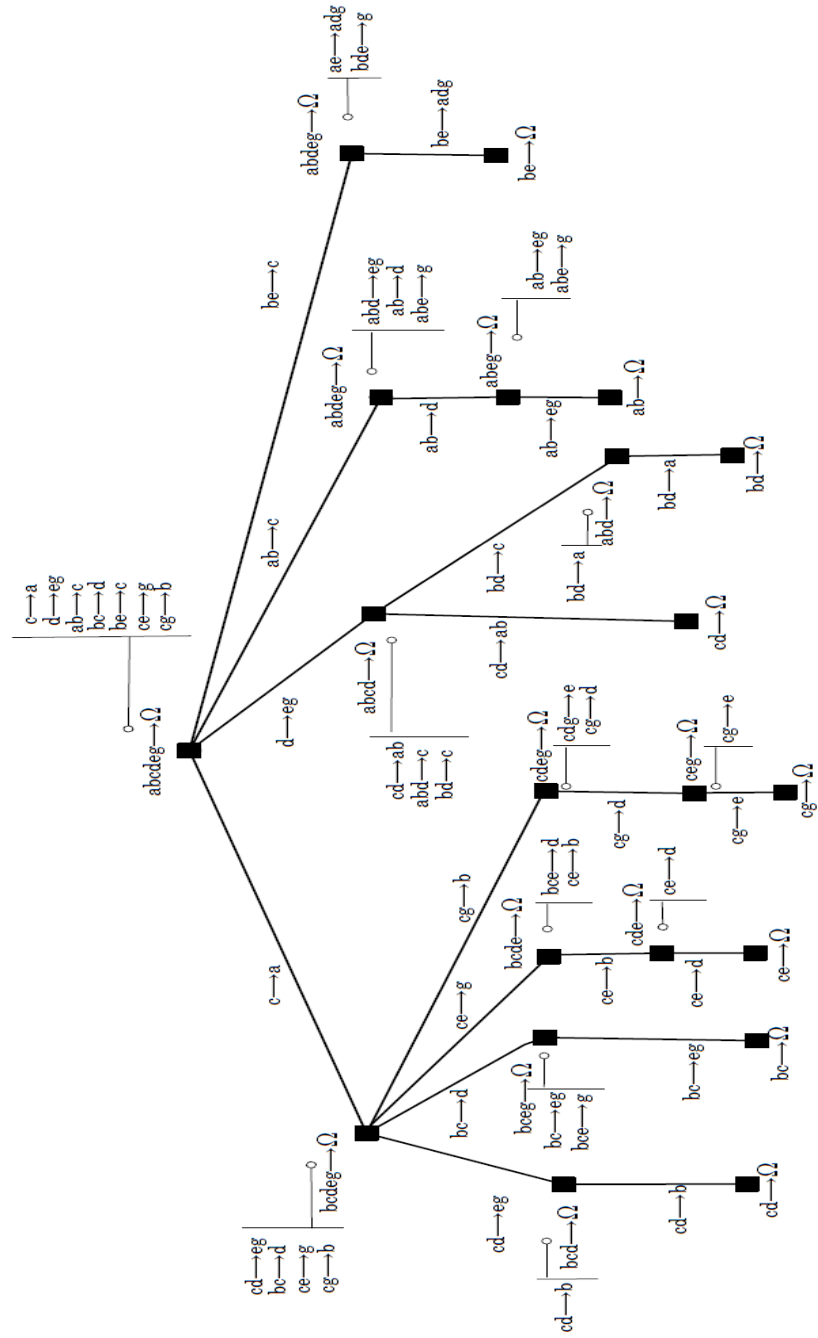


Figura 3.3: Tableaux completo para los datos del ejemplo 3.3.1.

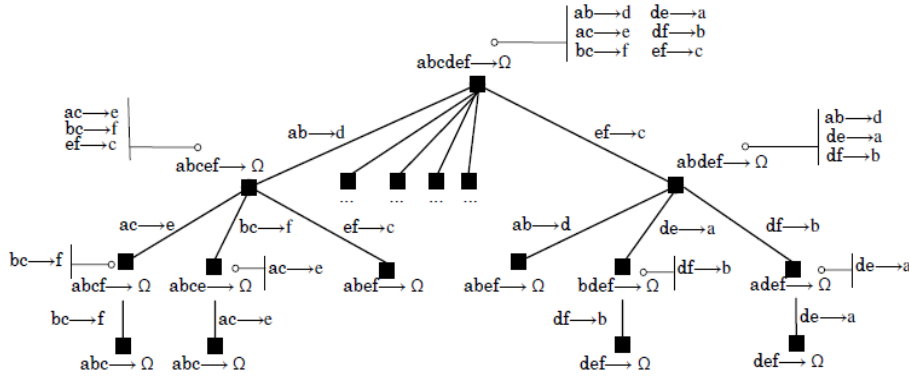


Figura 3.4: Método  $SL_{FD}$ . Tableaux de 3 niveles. 37 nodos. 18 hojas.

mación duplicada no es una tema trivial. Para abordarlo, hemos definido la noción de implicación minimal con respecto a un conjunto de implicaciones.

**Definición 3.3.2.** Sea  $\Gamma$  un conjunto de implicaciones. La implicación  $A \rightarrow B \in \Gamma$  es minimal si  $\forall C \rightarrow D \in \Gamma$ , se cumple que  $C \not\subseteq A$ .

Podemos apreciar un ejemplo básico de cómo SST supera a su predecesor en la  $SL_{FD}$ , comparando los resultados obtenidos entre las Figuras 3.4 y 3.6, para  $SL_{FD}$  y SST respectivamente.

## Método CK

El objetivo principal para seguir progresando en esta línea es la reducción del espacio de búsqueda que se puede cuantificar a través del número de nodos en el árbol. Con esta intención, hemos estudiado cómo reducir aún más el tamaño del árbol al acortar su profundidad. El resultado es este nuevo método  $CK$  cuyo núcleo es el algoritmo del cierre lógico publicado en [86] y que ya hemos visto como Cls puede considerarse un novedoso enfoque a los métodos clásicos de cierre, ya que proporciona una nueva característica: además del conjunto de atributos que constituye la salida del operador de cierre, el método proporciona un subconjunto de implicaciones del conjunto  $\Gamma$  original. Este nuevo subconjunto de implicaciones reúne el

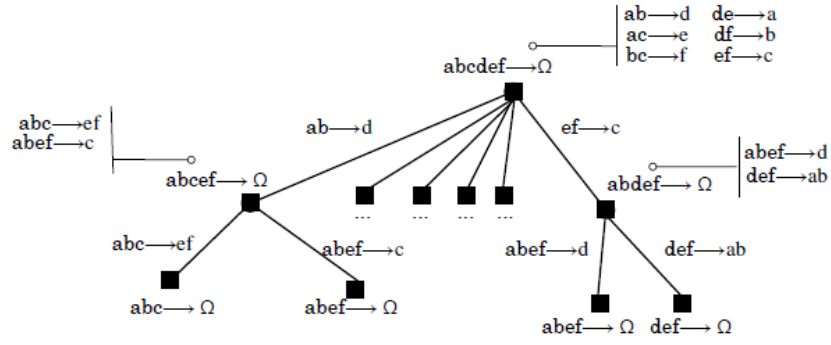


Figura 3.5: Método SST. Tableaux de 2 niveles. 19 nodos. 12 hojas.

conocimiento que puede considerarse como el complemento del cierre y se puede usar de una manera inteligente para encontrar claves minimales por medio del operador de cierre.

La ventaja principal del método es que recibe un conjunto de implicaciones  $\Gamma$  y un subconjunto de atributos  $X \subseteq \Omega$ . Calcula el conjunto cierre  $X^+$  respecto a  $\Gamma$ , y además, un nuevo conjunto  $\Gamma'$  que contiene el conjunto de implicaciones que guarda la semántica que queda fuera del cierre  $X^+$ . Si  $\Gamma' = \emptyset$ , entonces  $X^+ = \Omega$  (véase [86] para más detalles).

Por tanto, proponemos aplicar el Cls a cada implicación minimal del conjunto  $\Gamma$  en cada nodo para abrir nuevas ramas con el resultado producido por el cierre Cls. La definición de nuestro nuevo método de claves minimales se presenta en el Algoritmo 3.1.

La llamada principal del Algoritmo 3.1 debe ser  $\text{Closure\_Keys}(\Omega, \Gamma, \emptyset, \emptyset)$ . A continuación, para obtener todas las claves minimales, recogemos los elementos minimales del cuarto parámetro (que actúa como un acumulador en modo de entrada/salida) de esta llamada a procedimiento con respecto a  $(2^\Omega, \subseteq)$ . El siguiente teorema asegura que el Algoritmo 3.1 proporciona un método válido y completo.

**Teorema 3.3.3.** *Sea  $\Omega$  un conjunto de atributos y  $\Gamma$  un sistema de implicaciones sobre  $M$ . Entonces, el Algoritmo 3.1 devuelve todas las claves*

**Algorithm 3.1:** Closure Keys (CK)

---

**Data:**  
 $\Omega$  un conjunto de atributos.  
 $\Gamma$  un conjunto de implicaciones.  
 $\mathcal{C}$  una variable acumuladora con un subconjunto de atributos.  
 $\mathcal{K}$  una variable acumuladora con conjuntos de atributos.

**begin**  
 $\mathcal{A} := \Omega$   
**if**  $\Gamma = \emptyset$  **then**  
     $\text{Add}(\mathcal{K}, \{\mathcal{A} \cup \mathcal{C}\})$  ;  
**else**  
    **foreach**  $X \rightarrow Y \in [\text{IM}](\Gamma)$  **do**  
         $\langle X', \Gamma' \rangle := \text{Cls}(X, \Gamma)$   
         $\mathcal{C} := \mathcal{C} \cup X$   
         $\text{Closure\_Keys}(X', \Gamma', \mathcal{C}, \mathcal{K})$   
**end**  
    /\* Donde  $[\text{IM}](\Gamma)$  denota las implicaciones en  $\Gamma$  que son minimales. \*/

---

*minimales.*

**Demostración 1.** En primer lugar, la terminación del algoritmo está garantizada porque, en cada llamada recursiva de *Closure\_Keys*, la cardinalidad del sistema de implicaciones se reduce estrictamente. Además, el número de llamadas recursivas está limitado por la cardinalidad de  $\Gamma$ . El núcleo del método es el cierre *Cls* [86] que proporciona un resultado compuesto, es decir,  $\text{Cls}(X, \Gamma) = \langle X^+, \Gamma' \rangle$ .

Este método genera todas las claves minimales porque, en cada paso produce el cierre  $X^+$  y si resulta que ese cierre no es el conjunto  $\Omega$  completo, procedemos seleccionando un nuevo antecedente del conjunto de implicaciones  $\Gamma'$ . En virtud de esto, una vez que alcanzamos una hoja, la unión de los antecedentes en el camino conforma una clave y por lo tanto, el método es válido.

Con respecto a la completitud, cualquier clave del sistema se va a encontrar ya que el espacio de búsqueda inducido por nuestro método realiza una búsqueda exhaustiva.

□

Al igual que en el apartado anterior donde mostramos un ejemplo de comparación entre el árbol generado por el método *SL<sub>FD</sub>* y el método *SST*



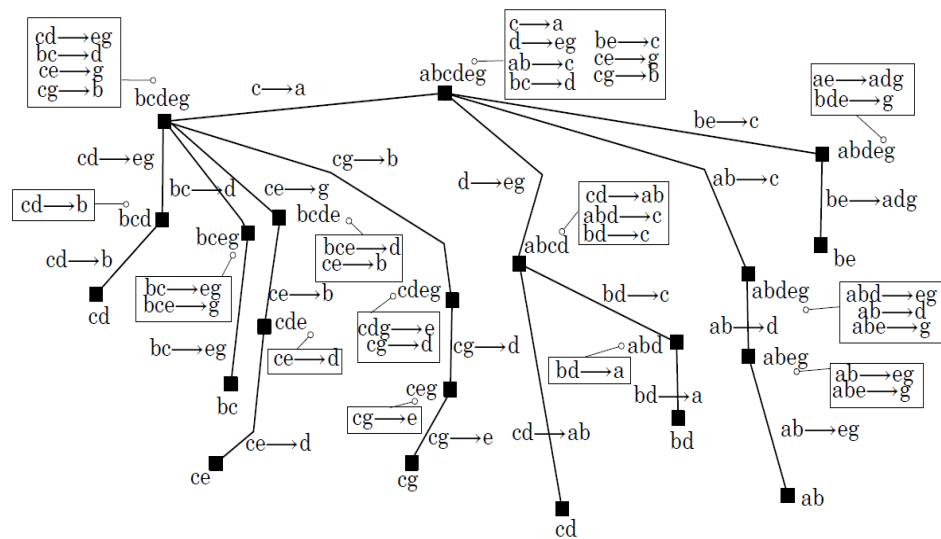


Figura 3.6: Ejemplo completo de aplicación utilizando el método SST.

(Figura 3.4 y 3.6, respectivamente), un ejemplo ilustrativo que muestra la reducción en el árbol proporcionado por CK con respecto al método SST se muestra en las figuras 3.7 y 3.6 respectivamente.

### 3.4 Implementación

Como conclusión de los ejemplos presentados en la sección anterior, vemos que incluso para ejemplos básicos, el árbol de búsqueda va alcanzando dimensiones considerables. De hecho, podemos consultar estudios previos donde el método  $SL_{FD}$  llega a construir árboles de millones de nodos [11]. Por tanto, para poder salvar este escollo y utilizar los métodos sobre grandes cantidades de datos, vamos a utilizar estrategias de paralelismo sobre arquitecturas hardware con altos recursos.

Nuestra intención es aprovechar el diseño del Tableaux en nuestros métodos para dividir el problema original en instancias atómicas que pueden resolverse por separado en un tiempo razonable y con los recursos disponibles. El resultado con todas las claves minimales lo obtenemos a



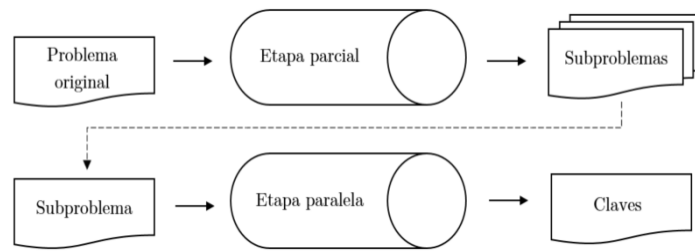


Figura 3.8: Esquema del funcionamiento en dos etapas del código paralelo.

para de estas técnicas; podemos enviar una gran cantidad de problemas a diferentes núcleos de computación de manera que pueden ser resueltos simultáneamente. En virtud de esto, el tamaño de los problemas en la entrada puede ser mucho mayor de lo que la literatura nos muestra hasta ahora sin exceder las limitaciones de la máquina; hemos alejado el límite de una manera sustancial por el momento.

Como hemos mencionado, mediante la aplicación del código parcial, dividimos el problema de entrada en varios sub-problemas, sin embargo, es necesario aclarar cuál es el valor que decide ese punto de parada (BOV, en inglés, *break-off value*).

### Valor de parada

Decidir el BOV es una labor crucial de la investigación actual debido a las siguientes consideraciones. Por un lado, si decidimos parar en un nivel cercano a la raíz del árbol seleccionando un BOV bajo, ciertamente estamos reduciendo el tiempo de ejecución de la etapa de división y sólo se crearán unos pocos subproblemas. Dado que el árbol no habría podido expandirse todavía, entonces no contaremos con suficiente material para ser gestionado en paralelo usando diferentes núcleos. Por otro lado, si detenemos la división de la etapa parcial llegados a un nivel más profundo del árbol y lejos de la raíz, la división seguramente creará una gran cantidad de subproblemas. Esta situación nos va a permitir resolver esos subproblemas usando múltiples núcleos pero, el tiempo de ejecución de la primera etapa

seguramente sea mayor. Por lo tanto, hemos tendido que seleccionar BOV de forma empírica, ya que es realmente difícil averiguar el valor más adecuado simplemente analizando la información de entrada.

En nuestro caso, como valor de parada que determina el nivel en el que la rama se considera atómica para ser tratada por la etapa paralela, usamos el cardinal del conjunto de implicaciones del nodo actual, ya que hemos observado que, cuanto mayor es, más larga *suele ser* la rama. Sin embargo, en la etapa actual de la investigación, sólo podemos considerar eso como una tendencia, nunca una certeza.

Una vez que tenemos todos estos subproblemas, y debido a que todos ellos conforman un estado individual del algoritmo, pueden ser resueltos por el código paralelo. Sin embargo, si estamos tratando con problemas con una cantidad considerable de atributos e implicaciones, el número de subproblemas generados podría ser enorme (hemos realizado experimentos con más de 50,000 subproblemas [10]). Por lo tanto, su gestión es una tarea que solo está al alcance de una gran cantidad de recursos, como los ofrecidos por el Centro de Supercomputación y Bioinnovación de la Universidad de Málaga <sup>1</sup>.

### 3.5 Experimentos y resultados

Llegamos a la sección donde vamos a mostrar una serie de experimentos y resultados para determinar cómo los algoritmos estudiados e implementados en la sección anterior 3.3 tratan con problemas más complejos de forma que se aprovechen los beneficios del paralelismo.

Hemos elaborado de forma aleatoria un conjunto de problemas variando la cantidad de atributos e implicaciones. En primer lugar, comenzamos con problemas que contienen 100 implicaciones, cada una de ellas construida a partir de 100 atributos diferentes posibles. Y en segundo lugar, avanzamos un paso más, considerando problemas con 150 implicaciones y 150 atributos. Hay que tener en cuenta que estos números van más allá de las capacidades

---

<sup>1</sup><http://www.scbi.uma.es>

de la máquina, como se ha demostrado en estudios previos de este trabajo [26], e incluso mejoran sustancialmente los resultados dados en [11], donde ya se aplicaron técnicas paralelas.

Obviamente, ambos métodos obtienen las mismas claves de forma que se valida experimentalmente el método. Por lo tanto, hemos omitido este parámetro en tablas de resultados para mejorar la legibilidad ya que en gran parte de las ocasiones el conjunto de claves puede llegar a ser considerablemente grande. Ahora bien, para comparar los números alcanzados mediante el uso de SST y de CK, nos centramos en dos parámetros fundamentales, tiempos de ejecución y la cantidad de nodos del árbol. La elección de estos dos parámetros se debe al siguiente razonamiento.

Cuando nos planteamos la idea de la comparación de resultados, lo primero que consideramos fueron los tiempos que necesitaba cada uno de los métodos para obtener los resultados: era lo más evidente. No obstante, este parámetro está íntimamente ligado a la arquitectura que estemos utilizando para ejecutar el algoritmo, lo cual hace que el resultado dependa en gran medida de los recursos que se están utilizando y no tanto de la calidad o eficiencia del propio algoritmo. En este sentido, se oscurecía la utilidad teórica de los resultados obtenidos. Esto nos llevó a añadir como segundo parámetro de la comparación, el número de nodos del árbol como medida de la dimensión alcanzada por el problema. Además, si alguien hiciera otro método, utilizara otro código o empleara recursos hardware diferentes que desembocaran en una mejora del tiempo, siempre podríamos atenernos al tamaño del árbol pudiendo defender si realmente es una mejora en el método o en la ejecución debido a la arquitectura.

El número de nodos siempre será el mismo para un experimento individual sin importar la cantidad de veces que realicemos el test, sin embargo, los tiempos de ejecución no coincidirán exactamente con esta circunstancia; podrían ser ligeramente diferentes debido a su naturaleza intrínseca. Las diferencias con respecto al número de nodos mostrarán cómo los nuevos métodos han mejorado el algoritmo reduciendo drásticamente la profundidad del árbol, y en consecuencia, los tiempos de ejecución. Además, hemos incluido una última columna para mostrar el ratio entre el número de no-

dos y el tiempo de ejecución. Finalmente, cada tiempo de ejecución que se muestra es el fruto de un estudio *a posteriori* de los resultados obtenidos de cada ejecución, de forma que conservamos los más fiables [144].

Como hemos mencionado anteriormente, la arquitectura hardware que se ha utilizado para desarrollar cada prueba que se muestra en la tesis se puede visitar en <sup>2</sup>. En particular, hemos desarrollado cada experimento usando 32 nodos cluster SL230, utilizando 32 núcleos y 64Gb de memoria RAM. Las comunicaciones se realizan a través de una red Infiniband FDR. Durante los experimentos, estos núcleos están reservados sólo para nuestro uso, de manera que podamos evaluar resultados fiables con respecto a los tiempos de ejecución.

Puede parecer que conseguir mejores resultados con la estrategia paralela descrita es simplemente un problema referente a la cantidad de recursos que tengamos disponibles, sin embargo, esto no es del todo cierto. Si bien es cierto que en la mayoría de los casos hemos obtenidos mejores resultados gracias a utilizar más recursos, algunos experimentos para los que se aumentó el número de núcleos disponibles no alcanzaron las expectativas esperadas en términos de tiempos de ejecución, como se muestra brevemente en la Tabla 3.2. Incrementar el número de núcleos para favorecer el paralelismo dentro de este tipo de problemas es una cuestión en la que aún queda mucho por investigar.

Cuadro 3.2: Intentos de mejorar los tiempos de ejecución en base a aumentar el número de núcleos disponibles para la implementación paralela.

Problema & Método	Implicaciones 150	Attrib 150	Parada 140		
	Parcial <sub>t</sub> (s)	Total <sub>t</sub> (s)	Nodos	Cores	Ratio
150150-4- <i>SST</i>	581	885	55.211	32	62
150150-4- <i>CK</i>	48	65	25.477	32	391
150150-4- <i>SST</i>	576	880	55.211	64	62
150150-4- <i>CK</i>	46	64	25.477	64	398

<sup>2</sup><http://www.scbi.uma.es>

Entrando ya en los experimentos realizados, el primero resuelve una batería de problemas con 100 atributos y 100 implicaciones y los resultados podemos verlos en la Tabla 3.3 que está formada por dos partes. Una cabecera en la que se indica la configuración del experimento, y un cuerpo principal donde se recogen los valores alcanzados para cada problema por parte de cada método. Este cuerpo principal consta de 6 columnas que desglosamos a continuación:

- (i) Nombre del problema y el método utilizado para resolverlo.
- (ii) Número de subproblemas generados en la etapa primera del algoritmo.
- (iii) Tiempo transcurrido para la etapa primera.
- (iv) Tiempo total de ejecución (etapa parcial + etapa paralela).
- (v) Número de nodos del árbol.
- (vi) Ratio entre nodos y tiempo de ejecución.

Incluso para una cantidad tan grande de atributos y dependencias, sólo han sido necesarios alrededor de 10 minutos para que el algoritmo más lento finalice (problema 100100-3). Además, el tamaño máximo alcanzado del árbol (problema 100100-7) ronda los 300k nodos. Sería totalmente descabellado pensar en resolver estos problemas usando versiones secuenciales de los algoritmos, ya que los tiempos de ejecución se irían de las manos. No obstante, estos son resultados son altamente alentadores ya que hubiera sido impensable tratar de reproducir estos experimentos con los métodos previos [11]. Por tanto, es evidente cómo el paralelismo es una opción muy acertada para abordar este tipo de problemas.

Se obtienen resultados especialmente notables como son los problemas 100100- $\{1,5,9\}$ . En estos casos, hay que notar que CK no crea ningún subproblema. Por ello, la mejora que se produce es doble:

Cuadro 3.3: Métodos paralelos aplicados a problemas grandes (I)

	Attrib 100	Implicaciones 100	Parada 90	Cores 32	
Problema & Método	Subp	Parcial <sub>t</sub> (s)	Total <sub>t</sub> (s)	Nodos	Ratio
100100-1- <i>SST</i>	14	0	1	33	33
100100-1- <i>CK</i>	0	0	0	15	15
100100-2- <i>SST</i>	1.354	36	105	25.621	244
100100-2- <i>CK</i>	212	4	15	12.715	847
100100-3- <i>SST</i>	8.602	183	644	192.574	299
100100-3- <i>CK</i>	1.286	37	99	94.255	952
100100-4- <i>SST</i>	400	7	26	1.704	65
100100-4- <i>CK</i>	15	1	2	751	375
100100-5- <i>SST</i>	39	0	2	119	59
100100-5- <i>CK</i>	0	0	1	42	42
100100-6- <i>SST</i>	1.808	37	123	7.856	63
100100-6- <i>CK</i>	115	4	9	3.698	410
100100-7- <i>SST</i>	6.167	182	489	275.429	563
100100-7- <i>CK</i>	1.378	24	90	118.884	1.320
100100-8- <i>SST</i>	5.104	146	415	182.167	438
100100-8- <i>CK</i>	1.014	19	68	81.632	1.200
100100-9- <i>SST</i>	314	11	25	868	34
100100-9- <i>CK</i>	0	1	1	341	341
100100-10- <i>SST</i>	1.130	27	84	12.541	149
100100-10- <i>CK</i>	136	4	10	6.128	612



- (i) En algunos casos, con el mismo valor de parada, el nuevo método ni siquiera necesita avanzar en la implementación paralela, la parcial es suficiente para resolver estos problemas.
- (ii) Para aprovechar esta circunstancia, llegado el caso en el que tengamos que trabajar con problemas aún más complejos, podemos establecer un valor de parada más cercano a la raíz del árbol de forma que el tiempo parcial se reducirá significativamente.

Para el segundo experimento, seguimos la misma línea que el anterior y desarrollamos una nueva batería de 10 problemas, aumentando esta vez el número de implicaciones y atributos disponibles hasta 150. Cuanto mayor es la complejidad de estos problemas, mayor es la mejora lograda por el nuevo método CK. Los tiempos de ejecución y la cantidad de nodos han sido drásticamente reducido como se muestra en la Tabla 3.4. Esta vez, decidimos agregar un experimento adicional (problema 150150-EXTRA) debido a los notables resultados que alcanzó.

Igual que en el caso anterior, hay varios experimentos que merecen ser discutidos por separado. Por ejemplo, si fijamos nuestra atención en los problemas 150150- $\{3,7\}$ , el número de subproblemas generados es mucho menor para el método CK que para SST. La diferencia, que no es ni mucho menos trivial, también propicia la gran reducción de los tiempos de ejecución de la etapa parcial. Los tiempos totales de ejecución van en la misma dirección. En cuanto al tamaño del árbol, los beneficios al introducir el cierre son bastante llamativos; en la mayoría de los casos, la cantidad de nodos se reduce en torno al 50 %. Podemos apreciar las diferencias y las mejoras obtenidas más cómodamente de forma gráfica en las Figuras 3.9 y 3.10.

Cuadro 3.4: Métodos paralelos aplicados a problemas grandes (II)

	Attrib 150	Implicaciones 150	Parada 140	Cores 32	
Problema & Método	Subp	Parcial <sub>t</sub> (s)	Total <sub>t</sub> (s)	Nodos	Ratio
150150-1- <i>SST</i>	165	6	14	911	65
150150-1- <i>CK</i>	11	2	3	374	124
150150-2- <i>SST</i>	2.949	229	394	116.517	295
150150-2- <i>CK</i>	347	25	44	54.375	1.235
150150-3- <i>SST</i>	12.968	1.049	1.716	157.947	92
150150-3- <i>CK</i>	822	125	165	68.531	415
150150-4- <i>SST</i>	5.352	581	885	55.211	62
150150-4- <i>CK</i>	344	48	65	25.477	391
150150-5- <i>SST</i>	5.361	211	484	32.377	66
150150-5- <i>CK</i>	168	27	36	12.522	347
150150-6- <i>SST</i>	771	72	155	17.298	111
150150-6- <i>CK</i>	79	7	11	8.110	737
150150-7- <i>SST</i>	9.473	638	1.252	576.912	460
150150-7- <i>CK</i>	1.754	97	187	262.621	1.404
150150-8- <i>SST</i>	5.466	424	857	510.627	595
150150-8- <i>CK</i>	966	57	104	257.267	2.473
150150-9- <i>SST</i>	235	25	45	3.632	80
150150-9- <i>CK</i>	24	3	4	1.726	431
150150-10- <i>SST</i>	3.403	348	555	102.537	184
150150-10- <i>CK</i>	277	31	46	45.962	999
150150-EXTRA- <i>SST</i>	31.401	2.950	30.983	21.404.732	690
150150-EXTRA- <i>CK</i>	8.049	354	1.320	10.614.386	8.041

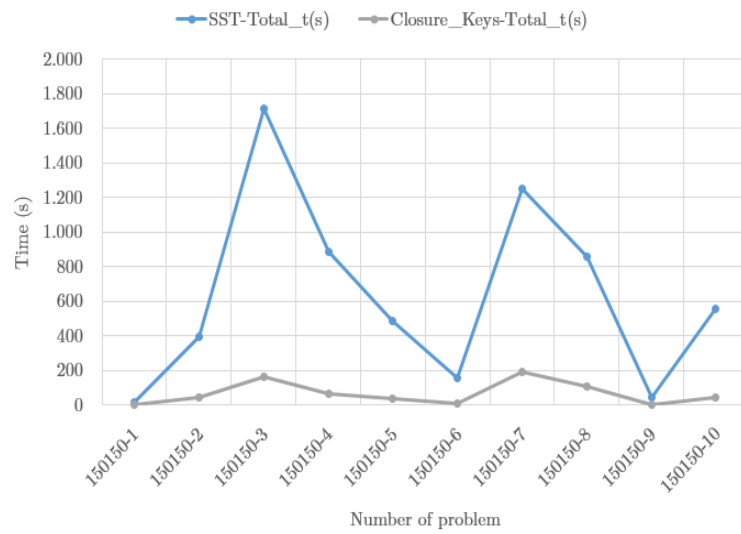


Figura 3.9: Tiempos de ejecución de los métodos paralelos aplicados a problemas grandes (II).

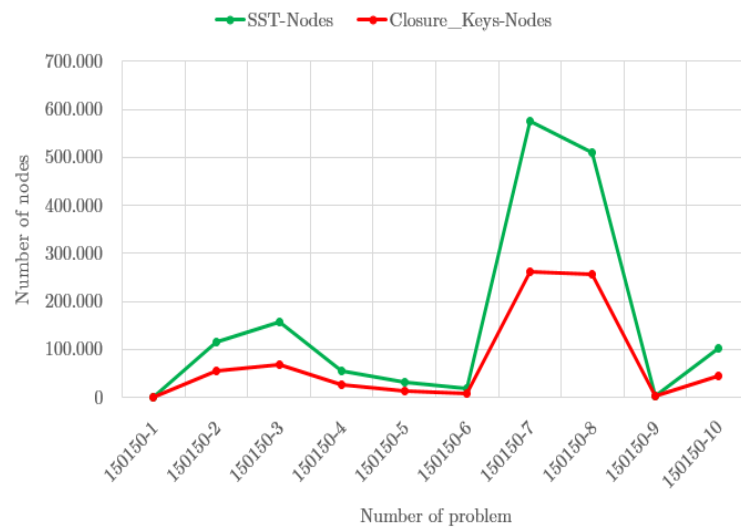


Figura 3.10: Tiempos de ejecución de los métodos paralelos aplicados a problemas grandes (II).



## Capítulo 4

# Generadores Minimales



**E**l sistema de inferencia de  $SL_{FD}$  [27, 29] y la salida del algoritmo Cls se pueden usar para enumerar todos los conjuntos cerrados y todos los generadores minimales a partir de un conjunto de implicaciones y de atributos. Por tanto, el contenido de este capítulo va a estar muy ligado al anterior y muchos de los conceptos van a aparecer nuevamente.

En el capítulo de introducción 1 hablábamos de dos formas de representación del conocimiento: los sistemas de implicaciones y los retículos de conceptos. Asimismo, vimos que existen varios problemas y soluciones en cuanto a extraer ambas representaciones a partir de un *dataset* de entrada. Sin embargo, en este momento vamos a tratar con un problema complementario que permite conectar ambas representaciones del conocimiento: la enumeración de todas los conjuntos cerrados de un conjunto dado de implicaciones. Además, proponemos un método para producir no sólo todos los conjuntos cerrados, sino también, para cada uno de ellos, su representante canónico, denominados generadores minimales.

La importancia de los generadores mínimos está bien justificada por trabajos notables como el profundo estudio de Poelmans et al. [97] o el de Qu et al. [100]. Por otra parte, han sido utilizados como punto fundamental para construir bases, las cuales constituyen una representación compacta del conocimiento que permite un mejor rendimiento de los métodos de

razonamiento basados en reglas [83, 84]. Todos los autores mencionados han considerado el *dataset* como la entrada del problema, es decir, los generadores minimales y los conjuntos cerrados se infieren a partir de la información original. En [52, 92] se proponen algunos métodos para resolver este problema.

En nuestro caso, centrándonos una vez más en el tratamiento inteligente de los conjuntos de implicaciones, vamos a utilizarlas como los elementos para describir la información y además, como base del diseño de un método para enumerar todos los conjuntos cerrados y sus generadores minimales a partir de esta información, y no del *dataset* original (como en los trabajos mencionados), lo cual, hasta donde sabemos, no existe trabajo previo al respecto. El nuevo método propuesto utiliza la  $SL_{FD}$  y es una evolución de [29]. Este método trabaja sobre el conjunto de implicaciones aplicando unas reglas de inferencia y construyendo un espacio de búsqueda de árbol, lo cual como ya adelantamos al principio del capítulo, va a ser muy parecido a los árboles del caso de las claves minimales.

La generación del sistema de implicaciones asociado a un operador de cierre es un problema difícil y el inverso también, teniendo una complejidad exponencial. Por lo tanto, nos vamos a enfocar en la definición de un método para resolver este problema y en el diseño de una implementación más eficiente, particularmente acercándonos al problema utilizando computación paralela.

Por tanto, en este capítulo, tras una relacionar brevemente las implicaciones con los generadores minimales 4.1, pasaremos a una sección fundamental donde se exponen cada uno de los métodos analizados e implementados 4.2. Para cada uno de ellos se presenta su definición en forma de algoritmo y se acompaña de un ejemplo ilustrativo de su funcionamiento. Una vez presentados los métodos, en la sección 4.3 se presenta de forma más detallada las pruebas realizadas y los resultados obtenidos por cada método. De forma similar a lo que se presentó para el capítulo de claves, cerrarán el capítulo los experimentos y los resultados obtenidos, esta vez, sobre la arquitectura de computación paralela 4.4.



## 4.1 Implicaciones y generadores minimales

Se dice que un sistema de implicaciones es completo para un operador de cierre si captura todo el conocimiento relacionado con ese operador (contexto), es decir, el sistema de implicaciones expresa en el lenguaje de la lógica todo el conocimiento relativo al cierre. Formalmente:

**Definición 4.1.1.** Sea  $c: 2^M \rightarrow 2^M$  un operador de cierre sobre  $M$  y  $\Sigma \subseteq \mathcal{L}_M$ . El sistema de implicaciones  $\Sigma$  se dice que es completo para  $c$  si se verifica la siguiente equivalencia:

$$\forall A \rightarrow B \in \mathcal{L}_M, \quad c \models A \rightarrow B \quad \text{si y sólo si} \quad \Sigma \models A \rightarrow B$$

De forma inmediata, cuando un sistema de implicaciones  $\Sigma$  es completo para un operador de cierre  $c$ , su operador de cierre sintáctico coincide con  $c$ , es decir,  $X_\Sigma^+ = c(X) \quad \forall X \subseteq M$ .

Como hemos mostrado, cualquier operador de cierre  $c$  en  $M$  puede asociarse con un sistema de implicaciones. Esta conexión establece una forma de gestionar el trabajo del operador de cierre  $c$  por medio de su derivación sintáctica y, como consecuencia, se puede elaborar un método para realizar esta gestión. Pero, ¿qué pasa con la conexión inversa? Es decir, dado un conjunto de implicaciones, ¿es posible generar el operador de cierre  $c$  asociado a él? Tal pregunta es el núcleo de esta parte de la tesis y su solución implica enumerar todos los conjuntos cerrados.

Si tenemos que  $X, Y \subseteq M$  satisfacen que  $X = Y_\Sigma^+$ , es habitual decir que  $Y$  es un generador del conjunto cerrado  $X$ . Observe que cualquier subconjunto de  $X$  que contiene  $Y$  es también un generador de  $X$ . Dado que trabajamos con conjuntos finitos de atributos, el conjunto de los generadores de un conjunto cerrado se pueden caracterizar por sus generadores minimales.

**Definición 4.1.2** (Generador minimal). Sea  $c: 2^M \rightarrow 2^M$  un operador de cierre, sea  $C \subseteq M$  un conjunto cerrado, i.e.  $c(C) = C$ , y sea  $A \subseteq M$ . El conjunto  $A$  se denomina generador minimal (en adelante, *mingen*) para  $C$  con respecto a  $c$  si  $c(A) = C$  y,  $\forall X \subseteq A$ , si  $c(X) = C$ , entonces  $X = A$ .

## 4.2 Métodos para calcular los generadores minimales

En [29], se utilizó la  $SL_{FD}$  como herramienta para encontrar todos los generadores minimales a partir de un conjunto de implicaciones. El método emplea la función  $Cls$  para guiar la búsqueda de nuevos candidatos de generador minimal. Concretamente, dado un conjunto de atributos  $M$  y un sistema de implicaciones  $\Sigma$ , el método realiza un mapeo  $mg_{\Sigma}: 2^M \rightarrow 2^{2^M}$  que satisface la siguiente condición.

$$\forall X, Y \subseteq M$$

$X \in mg_{\Sigma}(C)$  si y sólo si  $C$  es cerrado para  $(\ )_{\Sigma}^+$  y  $X$  es un generador minimal para  $C$ .

**Ejemplo 4.2.1.** Sea  $\Sigma = \{a \rightarrow c, bc \rightarrow d, c \rightarrow ae, d \rightarrow e\}$ , el mapeo  $mg_{\Sigma}$  se describe como:

$X$	$\emptyset$	$b$	$e$	$be$	$de$	$ace$	$bde$	$acde$	$abcde$
$mg_{\Sigma}(X)$	$\emptyset$	$b$	$e$	$be$	$d$	$a$	$bd$	$ad$	$ab$
						$c$		$cd$	$bc$

En otro caso,  $X$  no es cerrado y  $mg_{\Sigma}(X) = \emptyset$ . Nótese que  $\emptyset$  es cerrado y  $mg_{\Sigma}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ , i.e.  $\emptyset$  es un generador minimal del conjunto cerrado  $\emptyset$ .

Los algoritmos que presentamos en esta sección deben usar la siguiente operación para este tipo de mapeos. Dados dos mapeos:  $mg_1, mg_2: 2^M \rightarrow 2^{2^M}$ , el mapeo  $mg_1 \sqcup mg_2: 2^M \rightarrow 2^{2^M}$  se define como:

$$(mg_1 \sqcup mg_2)(X) = \text{Minimals}(mg_1(X) \cup mg_2(X)) \quad \forall X \subseteq M$$

Por tanto,  $Y \in (mg_1 \sqcup mg_2)(X)$  sii  $Y$  es un conjunto minimal de  $mg_1(X) \cup mg_2(X)$  en  $(2^M, \subseteq)$ , i.e.  $Y \in mg_1(X) \cup mg_2(X)$  y no existe otro conjunto de atributos  $Z \in mg_1(X) \cup mg_2(X)$  tal que  $Z \subsetneq Y$ .

Finalmente, con lo mostrado en esta sección, ya tenemos todas las herramientas necesarias para definir el método *Minimal Generator*.

### 4.2.1 Método MinGen

El primer método de cálculo de los generadores minimales que hemos estudiado e implementado se introdujo originalmente en [29]. En nuestro caso, para la tesis lo describimos según la función MinGen y lo acompañamos de un ejemplo de aplicación en 4.2.2

---

**Function** MinGen( $M$ , Label, Guide,  $\Sigma$ )

---

**input** : Conjunto de atributos  $M$ .  
 Un conjunto auxiliar para construir un generador minimal, Label.  
 Un conjunto auxiliar para construir un conjunto cerrado, Guide.  
 Un sistema de implicaciones  $\Sigma$  en  $M$ .

**output**: El mapeo  $mg_\Sigma$ .

**begin**

**foreach**  $X \subseteq M$  **do**  
 |  $mg_\Sigma(X) := \emptyset$

( $\text{Guide}, \Sigma$ ) := **Cls**(Guide,  $\Sigma$ )  
 $M := M \setminus \text{Guide}$

Premises :=  $\{A \subseteq M \mid A \rightarrow B \in \Sigma \text{ for some } B \subseteq M\}$   
 ClosedSets :=  $\{X \subseteq M \mid A \not\subseteq X \text{ for all } A \in \text{Premises}\}$

**foreach**  $X \in \text{ClosedSets}$  **do**  
 |  $mg_\Sigma(\text{Guide} \cup X) := \{\text{Label} \cup X\}$

**foreach**  $A \in \text{Premises}$  **do**  
 |  $mg_\Sigma := mg_\Sigma \sqcup \text{MinGen}(M, \text{Label} \cup A, \text{Guide} \cup A, \Sigma)$   
**return**  $mg_\Sigma$

---

La entrada de MinGen es un subconjunto de atributos de  $M$  y un conjunto de implicaciones  $\Sigma$ . El resultado es el conjunto de conjuntos cerrados junto con todos los generadores minimlaes que los generan, es decir,  $\{\langle C, mg_\Sigma(C) \rangle : C \text{ es un conjunto cerrado}\}$  donde  $mg_\Sigma(C)$  es el conjunto de generadores minimales  $D$  que satisfacen  $D_\Sigma^+ = C$ .

**Ejemplo 4.2.2.** Sea el sistema de implicaciones  $\Sigma = \{a \rightarrow c, bc \rightarrow d, c \rightarrow ae, d \rightarrow e\}$ . La función  $\text{MinGen}(abcde, \emptyset, \emptyset, \Sigma)$  devuelve el siguiente resultado:

$X$	$\emptyset$	$b$	$e$	$be$	$ace$	$acde$	$abcde$	$de$	$bde$
$mg_{\Sigma}(X)$	$\emptyset$	$b$	$e$	$be$	$a$	$ad$	$ab$	$d$	$bd$
					$c$	$cd$	$bc$		

El árbol de búsqueda que se va generando lo podemos ver en la Figura 4.3 y la traza de ejecución la mostramos a continuación.

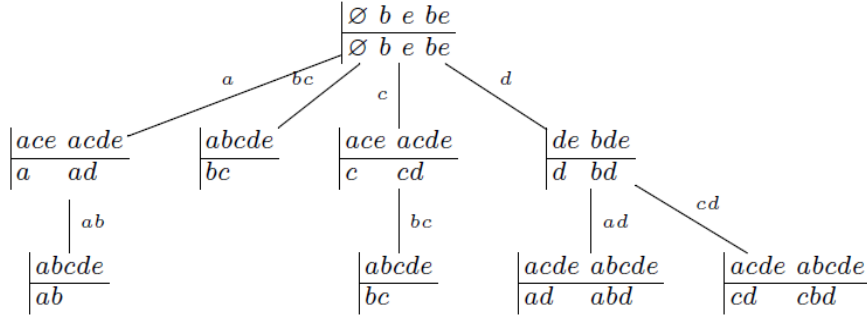


Figura 4.1: Árbol de búsqueda que genera el algoritmo MinGen para el Ejemplo 4.2.2.

$MinGen(abcde, \emptyset, \emptyset, \{a \rightarrow c, bc \rightarrow d, c \rightarrow ae, d \rightarrow e\})$ :

$Cls(\emptyset, \Sigma) = (\emptyset, \{a \rightarrow c, bc \rightarrow d, c \rightarrow ae, d \rightarrow e\})$  y

$X$	$\emptyset$	$b$	$e$	$be$
$mg_{\Sigma}(X)$	$\emptyset$	$b$	$e$	$be$

1  $MinGen(abcde, a, a, \{a \rightarrow c, bc \rightarrow d, c \rightarrow ae, d \rightarrow e\})$ :

$Cls(a, \{a \rightarrow c, bc \rightarrow d, c \rightarrow ae, d \rightarrow e\}) = (ace, \{b \rightarrow d\})$  y

$X$	$ace$	$acde$
$mg_{\Sigma_1}(X)$	$a$	$ad$

1.1  $MinGen(bd, ab, abce, \{b \rightarrow d\})$ :

$Cls(abce, \{b \rightarrow d\}) = (abcde, \emptyset)$  y

$X$	$abcde$
$mg_{\Sigma_{1,1}}(X)$	$ab$

Volvemos al nivel 1:  $mg_{\Sigma_1} := mg_{\Sigma_1} \sqcup mg_{\Sigma_{1,1}}$  y entonces

$X$	$ace$	$acde$	$abcde$
$mg_{\Sigma_1}(X)$	$a$	$ad$	$ab$

Volvemos al nivel raíz:  $mg_{\Sigma} := mg_{\Sigma} \sqcup mg_{\Sigma_1}$  y

$X$	$\emptyset$	$b$	$e$	$be$	$ace$	$acde$	$abcde$
$mg_{\Sigma}(X)$	$\emptyset$	$b$	$e$	$be$	$a$	$ad$	$ab$

2  $MinGen(abcde, bc, bc, \{a \rightarrow c, bc \rightarrow d, c \rightarrow ae, d \rightarrow e\})$ :

$$Cls(bc, \{a \rightarrow c, bc \rightarrow d, c \rightarrow ae, d \rightarrow e\}) = (abcde, \emptyset)$$

$X$	$abcde$
$mg_{\Sigma_2}(X)$	$bc$

Volvemos al nivel raíz:  $mg_{\Sigma} := mg_{\Sigma} \sqcup mg_{\Sigma_2}$  y

$X$	$\emptyset$	$b$	$e$	$be$	$ace$	$acde$	$abcde$
$mg_{\Sigma}(X)$	$\emptyset$	$b$	$e$	$be$	$a$	$ad$	$ab$
							$bc$

3  $MinGen(abcde, c, c, \{a \rightarrow c, bc \rightarrow d, c \rightarrow ae, d \rightarrow e\})$ :

$$Cls(c, \{a \rightarrow c, bc \rightarrow d, c \rightarrow ae, d \rightarrow e\}) = (ace, \{b \rightarrow d\}) \text{ anyd}$$

$X$	$ace$	$acde$
$mg_{\Sigma_3}(X)$	$c$	$cd$

3.1  $MinGen(bd, bc, abce, \{b \rightarrow d\})$ :

$$Cls(abce, \{b \rightarrow d\}) = (abcde, \emptyset) \text{ y}$$

$X$	$abcde$
$mg_{\Sigma_{3,1}}(X)$	$bc$

Volvemos al nivel 3:  $mg_{\Sigma_3} := mg_{\Sigma_3} \sqcup mg_{\Sigma_{3,1}}$  y entonces

$X$	$ace$	$acde$	$abcde$
$mg_{\Sigma_3}(X)$	$c$	$cd$	$bc$

Volvemos al nivel raíz:  $mg_{\Sigma} := mg_{\Sigma} \sqcup mg_{\Sigma_3}$  y

$X$	$\emptyset$	$b$	$e$	$be$	$ace$	$acde$	$abcde$
$mg_{\Sigma}(X)$	$\emptyset$	$b$	$e$	$be$	$a$	$ad$	$ab$
					$c$	$cd$	$bc$

4  $MinGen(abcde, d, d, \{a \rightarrow c, bc \rightarrow d, c \rightarrow ae, d \rightarrow e\})$ :

$Cls(d, \{a \rightarrow c, bc \rightarrow d, c \rightarrow ae, d \rightarrow e\}) = (de, \{a \rightarrow c, c \rightarrow a\})$  y

$X$	$de$	$bde$
$mg_{\Sigma_4}(X)$	$d$	$bd$

4.1  $MinGen(abc, ad, ade, \{a \rightarrow c, c \rightarrow a\})$ :

$Cls(ade, \{a \rightarrow c, c \rightarrow a\}) = (acde, \emptyset)$  y

$X$	$acde$	$abcde$
$mg_{\Sigma_{4,1}}(X)$	$ad$	$abd$

Volvemos al nivel 4:  $mg_{\Sigma_4} := mg_{\Sigma_4} \sqcup mg_{\Sigma_{4,1}}$  y entonces

$X$	$de$	$bde$	$acde$	$abcde$
$mg_{\Sigma_4}(X)$	$d$	$bd$	$ad$	$abd$

4.2  $MinGen(abc, cd, cde, \{a \rightarrow c, c \rightarrow a\})$ :

$Cls(cde, \{a \rightarrow c, c \rightarrow a\}) = (acde, \emptyset)$  y

$X$	$acde$	$abcde$
$mg_{\Sigma_{4,2}}(X)$	$cd$	$cbd$

Volvemos al nivel 4:  $mg_{\Sigma_4} := mg_{\Sigma_4} \sqcup mg_{\Sigma_{4,2}}$  y entonces

$X$	$de$	$bde$	$acde$	$abcde$
$mg_{\Sigma_4}(X)$	$d$	$bd$	$ad$	$abd$
			$cd$	$cbd$

Volvemos al nivel raíz:  $mg_{\Sigma} := mg_{\Sigma} \sqcup mg_{\Sigma_4}$  y efectivamente, obtenemos el resultado que habíamos adelantado

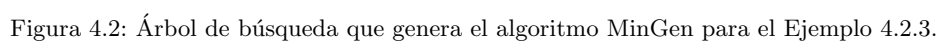
$X$	$\emptyset$	$b$	$e$	$be$	$ace$	$acde$	$abcde$	$de$	$bde$
$mg_{\Sigma}(X)$	$\emptyset$	$b$	$e$	$be$	$a$	$ad$	$ab$	$d$	$bd$
					$c$	$cd$	$bc$		

**Ejemplo 4.2.3.** Sea el conjunto de atributos  $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  y sea el sistema de implicaciones  $\Sigma = \{5 \rightarrow 4, 2 \ 3 \rightarrow 4, 2 \ 4 \rightarrow 3, 3 \ 4 \rightarrow 2, 1 \ 4 \rightarrow 2 \ 3 \ 5, 2 \ 5 \rightarrow 1 \ 3 \ 4, 3 \ 5 \rightarrow 1 \ 2 \ 4, 1 \ 5 \rightarrow 2 \ 4, 1 \ 2 \ 3 \rightarrow 4 \ 5\}$ . La función  $MinGen(M, \emptyset, \emptyset, \Sigma)$  genera el árbol de búsqueda que muestra la Figura 4.2 en el que los generadores minimales obtenidos están sombreados en color gris.

El punto clave del algoritmo MinGen recae en el uso del cierre Cls ya que utiliza las ventajas de la información adicional que proporciona, es decir, Cls se usa no sólo para calcular generadores de conjuntos cerrados sino también conjuntos de implicaciones más pequeños que nos guían en la búsqueda de nuevos subconjuntos que resulten en generadores minimales.

#### 4.2.2 Método MinGenPr

En esta sección presentamos una variante más avanzada del método MinGen anterior. Para ello, hemos incorporado un mecanismo de poda para evitar la generación de generadores minimales y cierres redundantes. El propósito de esta poda es verificar la información de cada nodo en el espacio de búsqueda, evitando la apertura de una rama completa. Esta reducción sólo puede llevarse a cabo si podemos garantizar que toda la información relativa a los generadores minimales se genera en otras ramas. En la función MinGenPr esta estrategia de poda se implementa en la línea número #1. Por lo tanto, para garantizar que la información generada en una rama sea supérflua, diseñamos una poda basada en el test de inclusión de conjuntos que involucra a todos los nodos del mismo nivel. En la Figura 2, se ilustra cómo funciona esta estrategia de poda aplicada al siguiente ejemplo:





---

**Function** MinGenPr( $M$ , Label, Guide,  $\Sigma$ )

---

**input** : Conjunto de atributos  $M$ .  
 Un conjunto auxiliar para construir un generador minimal, Label.  
 Un conjunto auxiliar para construir un conjunto cerrado, Guide.  
 Un sistema de implicaciones  $\Sigma$  en  $M$ .

**output**: El mapeo  $mg_\Sigma$ .

**begin**

```

  foreach  $X \subseteq M$  do
     $mg_\Sigma(X) := \emptyset$ 
  (Guide,  $\Sigma$ ) := Cls(Guide,  $\Sigma$ )
   $M := M \setminus \text{Guide}$ 

  Premises := Minimals $\{A \subseteq M \mid A \rightarrow B \in \Sigma \text{ for some } B \subseteq M\}$ 
  ClosedSets :=  $\{X \subseteq M \mid A \not\subseteq X \text{ for all } A \in \text{Premises}\}$ 

  foreach  $X \in \text{ClosedSets}$  do
     $mg_\Sigma(\text{Guide} \cup X) := \{\text{Label} \cup X\}$ 

  foreach  $A \in \text{Premises}$  do
     $mg_\Sigma := mg_\Sigma \sqcup \text{MinGenPr}(M, \text{Label} \cup A, \text{Guide} \cup A, \Sigma)$ 
  return  $mg_\Sigma$ 

```

---

**Ejemplo 4.2.4.** Supongamos el mismo árbol de búsqueda que obteníamos en el Ejemplo 4.2.2. La función MinGenPr ( $abcde, \emptyset, \emptyset, \{a \rightarrow c, bc \rightarrow d, c \rightarrow ae, d \rightarrow e\}$ ) aplica una estrategia de poda evitando abrir la rama cuya etiqueta es un superconjunto de otra rama en el mismo nivel. En concreto, la rama etiquetada  $bc$  no se abre porque no es minimal en el conjunto  $\{a, bc, c, d\}$ . La Figura 4.3 muestra el árbol de búsqueda delineando en gris la rama podada. En el Ejemplo 4.2.2 esta rama podada corresponde al ítem 2 de la traza mostrada.

### 4.2.3 Método GenMinGen

Finalmente, en este caso proponemos una generalización de la estrategia de poda anterior al considerar el test de inclusión del subconjunto no sólo con la información de los nodos del mismo nivel, sino también con todos los

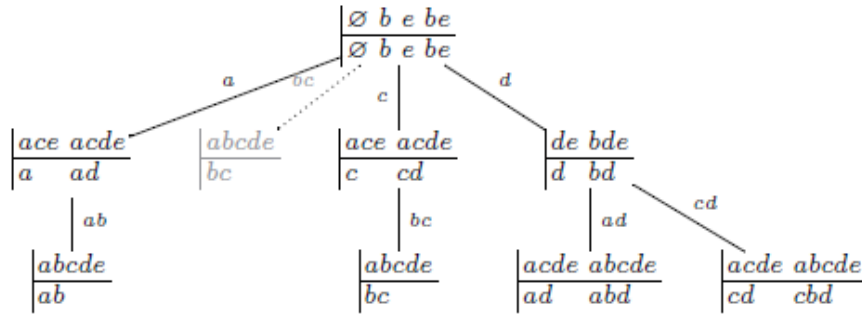


Figura 4.3: Árbol de búsqueda que genera el algoritmo MinGenPr para el Ejemplo 4.2.2.

generadores minimales calculados antes de la apertura de cada rama. Un paso más allá en esta estrategia de poda es aprovechar los generadores minimales ya calculados para aumentar el número de ramas que no es necesario abrir. Como muestra la función GenMinGen, consideramos esta poda general en la línea #1, y después, en la línea #2 se construye la lista de premisas minimales consideradas en cada etapa.

En la Figura 4.4 representamos el espacio de búsqueda correspondiente a la aplicación de la función GenMinGen sobre el Ejemplo 4.2.2. Hay que percatarse de que las ramas etiquetadas con  $ad$  y  $cd$  no se abren porque en el nivel anterior las etiquetas  $a$  y  $c$  ya se abrieron. En la salida de la función GenMinGen los generadores minimales  $ad$  y  $cd$  aparecen en ramas anteriores mientras que  $abd$  y  $cbd$  no se computan porque no son realmente generadores minimales. Para verificarlo, podemos fijarnos en los ítems 4.1 y 4.2 de la traza de ejecución del Ejemplo 4.2.2 que corresponden a ramas superfluas.

### 4.3 Experimentos y resultados

En las secciones anteriores hemos presentado el método original de cálculo de generadores minimales MinGen junto con las dos mejoras de poda, Min-

---

**Function** GenMinGen( $M$ , Label, Guide,  $\Sigma$ )

---

**input** : Conjunto de atributos  $M$ .  
 Un conjunto auxiliar para construir un generador minimal, Label.  
 Un conjunto auxiliar para construir un conjunto cerrado, Guide.  
 Un sistema de implicaciones  $\Sigma$  en  $M$ .

**output**: El mapeo  $mg_\Sigma$ .

**begin**

**foreach**  $X \subseteq M$  **do**  
 |  $mg_\Sigma(X) := \emptyset$

( $\text{Guide}, \Sigma$ ) := **cls**(Guide,  $\Sigma$ )  
 $M := M \setminus \text{Guide}$

Premises := **Minimals**{ $A \subseteq M \mid A \rightarrow B \in \Sigma$  for some  $B \subseteq M$ }  
 ClosedSets := { $X \subseteq M \mid A \not\subseteq X$  for all  $A \in \text{Premises}$ }

**foreach**  $X \in \text{ClosedSets}$  **do**  
 |  $mg_\Sigma(\text{Guide} \cup X) := \{\text{Label} \cup X\}$

**foreach**  $A \in \text{Premises}$  **do**

[**#1**] **if** *there no exists*  $Y \in \text{MinGenList}$  *such that*  $Y \subseteq A$  **then**  
 |  $mg_\Sigma :=$   
 | |  $mg_\Sigma \sqcup \text{MinGenPr}(M, \text{Label} \cup A, \text{Guide} \cup A, \Sigma, \text{MinGenList})$

[**#2**] **add**  $A$  **to** MinGenList

**return**  $mg_\Sigma$

---

GenPr y GenMinGen, y se ha mostrado un ejemplo completo de ejecución. Ahora, presentamos una comparación global del rendimiento logrado por cada uno de ellos.

Para ello, hemos desarrollado las implementaciones correspondientes para emplear los métodos sobre una batería de conjuntos de implicaciones generadas aleatoriamente. En aras de facilitar la legibilidad y el seguimiento de la comparativa realizada, acompañaremos los resultados obtenidos con varias tablas y gráficas.

Para evaluar esta comparación, vamos a utilizar dos métricas diferentes, el tiempo de ejecución del algoritmo y el número de nodos en el árbol de

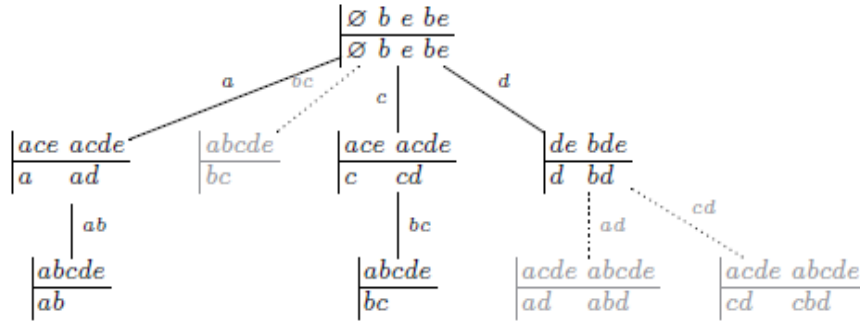


Figura 4.4: Árbol de búsqueda que genera el algoritmo GenMinGen para el Ejemplo 4.2.2.

búsqueda generado por el método. La razón de esta selección es idéntica a la expuesta para el caso de las claves minimales 3.5 y que resumimos brevemente. El tiempo de ejecución surge como la medida clásica para probar el rendimiento, pero siempre está estrechamente relacionado con los recursos con los que estamos trabajando. El número de nodos del árbol representa una medida de la magnitud del problema y es independiente de la arquitectura hardware utilizada. Asimismo, debido a la naturaleza intrínseca del tiempo de ejecución, cada experimento ha sido repetido varias veces para poder obtener valores medios fiables.

Para este experimento, en el que vamos a utilizar las implementaciones secuenciales de los algoritmos, todavía no es necesario hacer uso de recursos de supercomputación dado que los resultados se alcanzan en tiempos razonables. Entonces, la arquitectura hardware utilizada en este caso es: Intel(R) Core(TM) i7-6700HQ CPU 2.60Ghz, 8 Gb memoria RAM, ejecutándose sobre Windows 10.

Hemos generado una batería de pruebas con diferentes entradas para evaluar la implementación secuencial y poder mostrar las mejoras de la poda de los métodos desarrollados. En concreto, el experimento se va a realizar sobre los siguientes dos tipos de conjuntos de datos:

- Datos aleatorios. Hemos generado cinco ficheros de prueba, cada uno

de ellos con 50 implicaciones construidas usando 50 atributos diferentes posibles. Las implicaciones se generan aleatoriamente.

- Datos reales. Hemos generado un fichero con información real tomada a partir de los datos almacenados en *datasets* que podemos encontrar en la web como es el caso de los MovieLens *datasets*<sup>1</sup> que se han usado en otras ocasiones en campos como la educación, investigación o industria [53]. Entraremos en más detalles en relación a estos *datasets* cuando lleguemos a la sección 7.1, pero para completar la explicación de los ficheros de entrada de este experimento, podemos adelantar que vamos a tratar con un fichero cuyos atributos son los diferentes géneros cinematográficos almacenados en el *dataset* de MovieLens (e.g. Acción, Aventura, Thriller, Comedia, ...) con un total de 19 atributos, y cuyas implicaciones serán relaciones entre ellos que nos proporcionan un conjunto  $\Sigma$  final con un total de 245 implicaciones, lo cual supera sustancialmente el test aleatorio.

Dicho eso, podemos ver los resultados de los experimentos en la Figura 4.5 y en la Tabla 4.4, que está organizada en cuatro columnas cuya razón desglosamos a continuación:

- (i) Identificador del archivo de entrada y el método utilizado para resolver.
- (ii) Tiempo de ejecución (en segundos).
- (iii) Número de nodos del árbol generado; nos da una indicación del tamaño del problema.
- (iv) Número de generadores minimales obtenidos.

A la luz de los resultados obtenidos, se aprecia fácilmente como las estrategias de poda reducen significativamente tanto el número de nodos como el tiempo de ejecución. Mención especial requiere el experimento ‘secuencial-5’ ya que muestra cómo ambas métricas se han reducido drásticamente. El

---

<sup>1</sup><https://grouplens.org/datasets/movielens/>

Problema y Método	Total <sub>t</sub> (s)	Nodos	MinGens
sequential-1-MinGen	489	35.062	1.437
sequential-1-MinGenPr	108	7.734	1.437
sequential-1-GenMinGen	97	6.714	1.437
sequential-2-MinGen	53	32.408	271
sequential-2-MinGenPr	8	4.670	271
sequential-2-GenMinGen	7	3.922	271
sequential-3-MinGen	41	7.518	688
sequential-3-MinGenPr	9	1.642	688
sequential-3-GenMinGen	9	1.611	688
sequential-4-MinGen	693	52.067	1.444
sequential-4-MinGenPr	179	12.802	1.444
sequential-4-GenMinGen	148	11.014	1.444
sequential-5-MinGen	10.647	496.521	2.941
sequential-5-MinGenPr	1.897	72.470	2.941
sequential-5-GenMinGen	1.071	42.957	2.941
MovieLens10M-MinGen	980	254.170	2.681
MovieLens10M-MinGenPr	210	19.187	2.681
MovieLens10M-GenMinGen	198	18.926	2.681

Cuadro 4.1: Resultados obtenidos por los métodos de generadores minimales en su implementación secuencial.

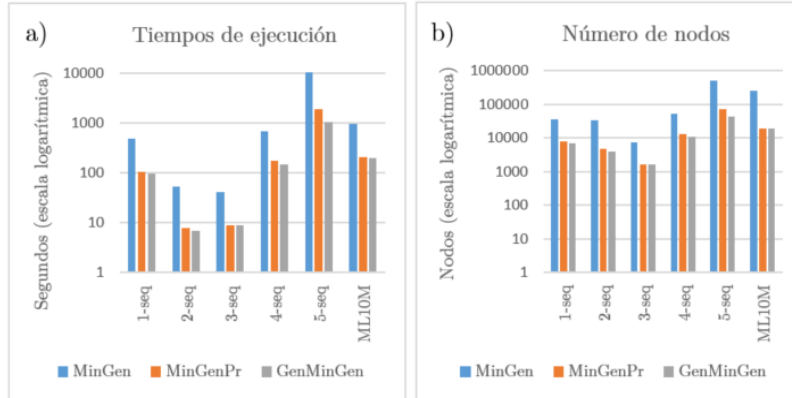


Figura 4.5: Resultados de tiempos de ejecución (a) y número de nodos (b) para el experimento con las implementaciones secuenciales de los métodos. Se ha aplicado escala logarítmica a los ejes con la intención de favorecer la visibilidad de los resultados.

tiempo de ejecución se ha reducido de más de 10.000 segundos a menos de 2.000 segundos. Además, también es considerable la reducción con respecto al número de nodos que conlleva una menor necesidad de recursos en términos de memoria y almacenamiento. Finalmente, como era de prever, MinGen es superado por MinGenPr, y a su vez GenMinGen mejora este último.

Los resultados obtenidos son prometedores, pero una vez más recordemos que estamos tratando con una cantidad de información de entrada que, en otras ocasiones puede ser mucho más abundante. Por tanto, al igual que en el caso de las claves minimales, vamos a dar un paso más allá abordando el problema del cálculo de los generadores minimales con una estrategia paralela que nos permita aumentar el tamaño de los *datasets* a la entrada.

## 4.4 Computación paralela y generadores minimales

Hasta ahora, ya hemos mostrado las mejoras alcanzadas por las estrategias de poda dentro de los métodos de generadores minimales. Sin embargo, una vez que llega el momento de utilizar estos métodos sobre entradas de mayor tamaño, podemos deducir, a la luz de los resultados obtenidos, que los tiempos de ejecución de los métodos secuenciales serían difícilmente admisibles. No obstante, teniendo en cuenta que cada rama del árbol creado por los métodos constituye un problema en sí mismo, podemos pensar en resolverlos simultáneamente utilizando diferentes recursos. Esta visión del problema sobre una ejecución paralela, proporcionada por nuestros métodos basados en la lógica, nos da lugar a desarrollar una nueva versión del método de generadores minimales.

Hemos desarrollado una implementación paralela de los métodos siguiendo el marco introducido por los autores en [14] y que es exactamente el mismo que el definido para el caso del cálculo de las claves minimales 3.4. De forma breve, la implementación paralela se lleva a cabo en dos etapas, siguiendo el paradigma *MapReduce* [33]. La primera etapa divide el

problema de entrada en varios subproblemas. Y la segunda, resuelve cada uno de los subproblemas de forma simultánea en los diferentes núcleos de computación y compone el resultado final combinando los resultados de los subproblemas. Podemos ver un esquema gráfico del proceso en la Figura 4.6.

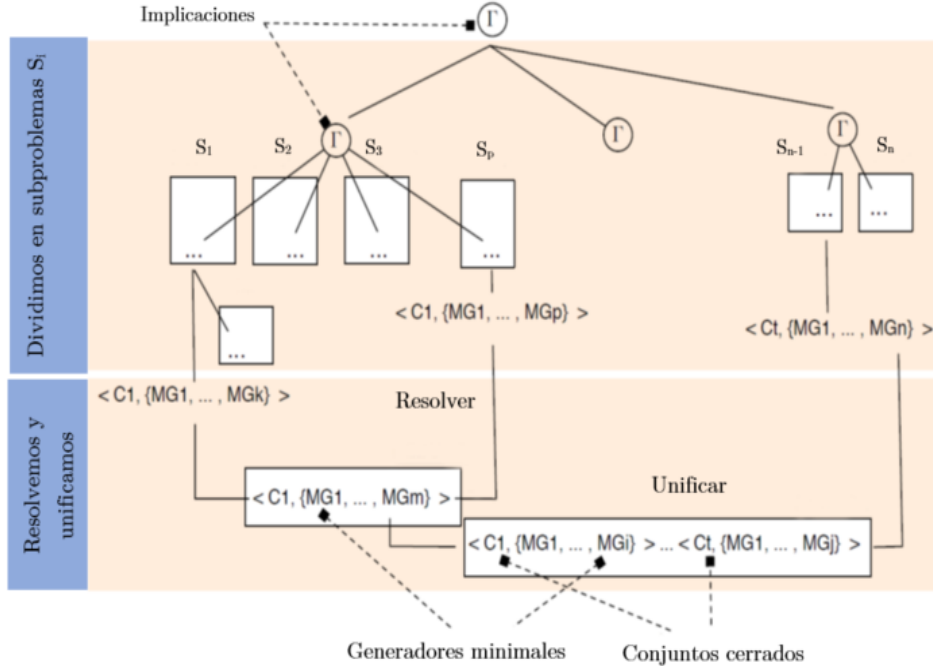


Figura 4.6: Esquema de funcionamiento de la implementación paralela de los métodos de generadores minimales utilizando el paradigma *MapReduce* [33].

Aunque GenMinGen ha demostrado tener un mejor rendimiento que MinGenPr (y ambos a su vez un mejor rendimiento que MinGen), sólo vamos a desarrollar una versión paralela del método MinGenPr. Esto se debe al hecho de que no hay necesidad de comunicación entre los subproblemas cuando se usa el método MinGenPr. Sin embargo, cuando se usa GenMinGen, recordemos que la poda aplicada depende de los resultados obtenidos previamente en cada subproblemas, ya que en cada paso, tenemos que com-



parar con el conjunto actual de generadores minimales generados hasta el momento. Esto rompe la filosofía *MapReduce* de nuestra implementación, donde cada nodo del árbol (es decir, cada subproblema) está destinado a ser resuelto de forma independiente y sin existir comunicación entre los nodos del árbol.

No obstante, incluso teniendo en cuenta que los mejores resultados entre los métodos de generadores minimales son los logrados por GenMinGen, al introducir ahora la estrategia paralela, cambian las tornas. En efecto, los resultados de los métodos en su forma secuencial, incluso para GenMinGen no pueden compararse con los números que podemos alcanzar cuando usamos computación paralela con MinGenPr. La computación paralela nos brinda la posibilidad de tratar con problemas de gran tamaño, lo cual es, en la mayoría de los casos, más valioso que posibles mejoras desarrolladas en versiones secuenciales.

En primer lugar, debemos señalar que los recursos y la arquitectura concreta que se ha utilizado para ejecutar los experimentos paralelos es, una vez más, la que nos aporta el Centro de Supercomputación y Bioinnovación de la Universidad de Málaga<sup>2</sup>. En particular, para este experimento, hemos utilizado 32 nodos cluster SL230, contando con 16 núcleos y 64Gb de memoria RAM. Las comunicaciones se realizan a través de una red Infiniband Net FDR y en el momento de ejecución, cada uno de los núcleos está reservado, de forma exclusiva, para nuestro experimento.

Centrándonos en los experimentos, esta vez, los archivos de entrada que vamos a usar van a alcanzar valores mucho mayores que para la prueba secuencial, concretamente, contarán con hasta 150 atributos y 150 implicaciones. Incluso con estos números, tres veces más altos que el experimento secuencial, pasar a la versión paralela nos reporta resultados en un tiempo admisible como podemos observar en los valores recogidos en la Tabla 4.2.

La información mostrada en la Tabla 4.2 sigue la misma estructura que la Tabla , pero esta vez, debido a la estrategia paralela, se introducen nuevos parámetros. Por un lado, el encabezado incluye el número de atributos

---

<sup>2</sup><https://www.scbi.uma.es/>

	Atrib 150	Implicaciones 150	BOV 140	Cores 32	
Problema y Método	Subp	Parcial <sub>t</sub> (s)	Total <sub>t</sub> (s)	Nodos	MinGens
MinGenPr-1-secuencial	-	-	43	374	216
MinGenPr-1-paralelo	11	2	3	374	216
MinGenPr-2-secuencial	-	-	17.352	54.375	6.273
MinGenPr-2-paralelo	347	140	179	54.375	6.273
MinGenPr-3-secuencial	-	-	31.882	68.531	6.529
MinGenPr-3-paralelo	822	1.638	1.665	68.531	6.529
MinGenPr-4-secuencial	-	-	4.612	25.477	2.478
MinGenPr-4-paralelo	344	350	364	25.477	2.478
MinGenPr-5-secuencial	-	-	1.585	12.522	1.159
MinGenPr-5-paralelo	168	235	237	12.522	1.159
MinGenPr-6-secuencial	-	-	1.653	8.110	1.436
MinGenPr-6-paralelo	79	20	25	8.110	1.436
MinGenPr-7-secuencial	-	-	107.238	262.621	9.113
MinGenPr-7-paralelo	1.754	758	967	262.621	9.113
MinGenPr-8-secuencial	-	-	61.381	257.267	5.538
MinGenPr-8-paralelo	966	253	464	257.267	5.538
MinGenPr-9-secuencial	-	-	372	1.726	683
MinGenPr-9-paralelo	24	4	6	1.726	683
MinGenPr-10-secuencial	-	-	7.484	45.962	2.969
MinGenPr-10-paralelo	277	131	169	45.962	2.969

Cuadro 4.2: Comparación de resultados obtenido por las versión secuencial y paralela del método refalgoritmo:MinGenPr aplicado a problemas grandes.

e implicaciones, el valor de parada (BOV) y la cantidad de núcleos utilizados. Por otro lado, el cuerpo de la tabla contiene seis columnas con la información de los valores del método que desglosamos a continuación:

- (i) Nombre del problema y el método utilizado para resolverlo.
- (ii) Número de subproblemas generados en la etapa primera del algoritmo.
- (iii) Tiempo transcurrido para la etapa primera.
- (iv) Tiempo total de ejecución (etapa parcial + etapa paralela).
- (v) Número de nodos del árbol.
- (vi) Número de generadores minimales obtenidos.

Optamos por mantener el número de nodos y la cantidad de generadores minimales en la tabla solamente con la intención de tener una idea del tamaño del problema, ya que es obvio que ambas implementaciones logran los mismos números.

Como conclusión, gracias a la aplicación de la implementación paralela, se han podido reducir los tiempos de ejecución de horas y días (experimentos ‘MinGenPr- $\{2,3,7,8,10\}$ -secuencial’) a sólo unos pocos minutos. En otras palabras, la computación paralela nos permite tratar con conjuntos de datos de gran tamaño dentro de unos márgenes de tiempo admisibles.



## Parte II

# Sistemas de Recomendación Conversacionales



## Capítulo 5

# Sistemas de Recomendación





**E**n la actualidad, suele ser difícil encontrar un día en el que no hayamos participado en situaciones donde intervenga algún tipo de recomendación. En este sentido, la ciencia y la tecnología han colaborado en el desarrollo y expansión de los sistemas de recomendación (SR) y a establecer un claro campo de conocimiento dentro de la gestión de la información.

Un SR es un sistema inteligente que proporciona a los usuarios una serie de sugerencias personalizadas (recomendaciones) sobre un determinado tipo de elementos (ítems). De forma general, los SR estudian las características de cada usuario e ítem, y mediante un procesamiento de los datos, encuentra un subconjunto de ítems que pueden resultar de interés para el usuario. Una de las referencias más notables en el campo de los SR la encontramos en el libro de Adomavicius y otros [2].

Desde que el primer SR hizo su aparición en el mundo de las tecnologías de la información [56, 102], los SR han estado en continua evolución durante los últimos años [1]. Sin embargo, es con la expansión de las nuevas tecnologías cuando han tenido un acercamiento más directo a la mayor parte de la sociedad debido a su capacidad para realizar todo tipo de recomendaciones sobre diversos elementos al alcance de todos (libros [31],

documentos [98], música [68], turismo [20], películas<sup>1</sup>, etc.).

En la actualidad, los SR constituyen un claro campo de investigación y estudio como demuestran el gran número de trabajos que se están realizando [35, 116] y cuya cantidad continúa aumentando día a día. Además, la relevancia de estos sistemas no se limita al ámbito investigador. Actualmente, muchos SR ya han sido implantados con éxito en fuertes entornos comerciales a nivel mundial. Este es el caso de empresas líderes en el sector como pueden ser Amazon [73], LinkedIn [101] o Facebook [122], que han realizado fuertes inversiones con el fin de generar mejores SR. Estas situaciones ponen de manifiesto la gran importancia de estos sistemas en ambas vertientes de la sociedad actual.

Tras esta introducción al concepto SR y la importancia que abarca en los sistemas actuales, durante el resto de este capítulo vamos a ahondar en las características que intervienen en este tipo de sistemas. En este sentido, nuestra intención es doble; por un lado conseguimos aumentar la naturaleza autocontenida de la tesis, y por otro introducimos una serie de conceptos que serán claves para razonar los capítulos posteriores. En concreto, en primer lugar, se presenta una breve clasificación de las diferentes técnicas de recomendación que existen y la justificación de la elegida para el desarrollo de un SR en nuestro caso particular 5.1. A continuación, se presenta una serie de problemas de los que suelen adolecer este tipo de sistemas 5.2. Finalmente, la última parte está dedicada a presentar las medidas que se utilizan para evaluar el rendimiento de estos sistemas 5.3.

## 5.1 Técnicas de recomendación

Existen numerosos tipos diferentes de SR que normalmente se clasifican atendiendo a cómo se llevan a cabo las recomendaciones. Los más conocidos y extendidos son los sistemas de filtrado colaborativo (denominados CF, por sus siglas en inglés: *Collaborative Filtering*) y los sistemas basados en contenido (denominados CB, por sus siglas en inglés: *Content-Based*).

---

<sup>1</sup><https://www.movielens.org>

Los primeros SR de filtrado colaborativo apuntan a GroupLens [65] o Video Recommender [56]. Este tipo de SR basa su funcionamiento fundamentalmente en las valoraciones que otros usuarios han otorgado a los elementos disponibles, y en realidad, la mayoría de los SR actuales utilizan técnicas de filtrado colaborativo en algún aspecto. Por su parte, los SR basados en contenido se basan en categorizar los ítems a recomendar, proporcionando resultados que tengan características similares a otros que han sido bien valorados anteriormente por el usuario. La mención de los SR basados en contenido es esencial por dos motivos; en primer lugar, es un tipo de SR que ha alcanzado una gran importancia en la actualidad debido a la tremenda expansión de las redes sociales, donde los usuarios introducen multitud de información de forma masiva, y en segundo lugar, aportará características al sistema desarrollado en esta tesis.

Además, en los últimos años ha habido un gran crecimiento de los SR contextuales [107], capaces de tener en cuenta información relevante para la recomendación como puede ser la hora, el lugar, la compañía, la ubicación, etc. Existe otro grupo denominado SR demográficos [7] que clasifican a los usuarios según diferentes parámetros personales (edad, localización, etc.) y realizan las recomendaciones teniendo en cuenta el grupo demográfico al que pertenece el usuario. Estos sistemas no requieren información histórica, sin embargo, requieren información que pueda ser sensible para la privacidad del usuario.

Por otro lado encontramos un tipo de recomendador de vital importancia para el trabajo de esta tesis, son los denominados SR basados en conocimiento (KB, por sus siglas en inglés: *Knowledge-Based*) [78]. Estos sistemas gestionan el conocimiento inherente a los datos y revelan cómo un ítem puede satisfacer la necesidad del usuario, es decir, utilizan un método de razonamiento para inferir la relación entre una necesidad y una posible recomendación.

Llegamos ahora a los SR más importantes desde el punto de vista de este trabajo, los denominados SR conversacionales [47, 69]. Estos están estrechamente relacionados con los conceptos de recomendador basado en críticas [23] y recomendaciones de información [124].

En estos sistemas, se aplica un proceso iterativo en el cual el usuario selecciona una o más características que desea que los ítems verifiquen. Esta forma de proceder a través de la interacción con el usuario, contrasta con la tendencia histórica de los SR de dar una recomendación con sólo una consulta. A partir de esta interacción y usando diferentes técnicas, el sistema progresa eligiendo (o incluso prediciendo) elementos que concuerdan con las preferencias del usuario. La ventaja principal de este tipo de SR es que a partir de las respuestas del usuario, el sistema es capaz de refinar la recomendación en cada ronda sucesiva del diálogo. Resaltamos este tipo de SR porque será la estrategia principal sobre el que se sustenta el desarrollo de SR realizado y que ha dado lugar a una de las contribuciones que avalan esta tesis [15].

Es posible estudiar más estrategias de recomendación; para ello, podemos encontrar una recopilación más detallada, junto con las principales tendencias, en dos de las referencias más importantes de este campo de conocimiento [1, 18].

En párrafos anteriores hemos podido apreciar que existen diferentes tipos de estrategias para los SR, sin embargo, la historia ha demostrado ampliamente que la mejor alternativa consiste en combinar características de diferentes tipos de SR para generar híbridos que se beneficien de las ventajas de cada uno de ellos [32]. Ésta ha sido exactamente nuestra intención principal, la cual, una vez introducidos los diferentes tipos de recomendadores, ya estamos en condiciones de establecer.

Nuestro trabajo ha culminado en un SR híbrido que combina las siguientes técnicas de recomendación:

- **SR basados en conocimiento.** En virtud de nuestro estudio de extracción de conocimiento de los datos utilizando FCA, los conjuntos de implicaciones y los operadores de cierre.
- **SR basados en contenido.** Necesario ya que para aplicar las técnicas lógicas empleadas necesitamos en primera instancia información sobre la que trabajar.

- **SR conversacionales.** Se presenta como estrategia central sobre la que aplicar y utilizar las dos anteriores respectivamente.

Como veremos a continuación, esta combinación de estrategias nos va a permitir abordar el denominado problema de la dimensionalidad que podemos encontrar frecuentemente al trabajar con SR.

## 5.2 Problemas comunes

Si bien es cierto el éxito que están alcanzando los SR, también tenemos que añadir que estos sistemas no están exentos de problemas y dificultades. En esta sección vamos a hacer una breve recopilación de aquellos que tienen una mayor presencia e importancia. Tal es el caso de uno de los problemas más comunes, el denominado arranque en frío o *cold-start* [41], que aparece cuando un nuevo usuario o ítem se incluye en el sistema. Estos nuevos elementos carecen de información propia y por tanto no es posible hacer predicciones sobre ellos. Un estudio muy completo al respecto de las soluciones propuestas a este problema puede verse en [117].

En otros casos, el problema del SR llega de la mano de la escasez de datos [51], ya que no siempre se posee la cantidad de información deseable para los ítems del sistema. Otros problemas pueden venir de la mano de la suplantación de la identidad (en inglés *Shilling attacks*). En estos problemas o ataques, el usuario puede hacer un uso malicioso del sistema para obtener beneficio propio. Es un problema muy difícil de detectar [135] o impedir, sin embargo, cada vez se desarrollan más técnicas para hacerle frente y es un gran campo de investigación dentro de los SR [141, 143].

Además, existen muchos otros problemas como son: privacidad [42], oveja gris/negra o *black-sheep* [46], sobreespecialización [74], escalabilidad [59], postergación (en inglés, *long-tail items*) [121], dimensionalidad [106], etc.

En concreto, nuestro trabajo ha estado orientado a resolver este último problema, la dimensionalidad cuando estamos trabajando sobre SR. Este problema, también conocido como *the curse of dimensionality phenome-*

*non* [90, 106] aparece cuando es necesario trabajar sobre datasets con un alto número de características (variables o atributos). De forma intuitiva, podríamos introducirlo de la siguiente manera. Cuando hay pocas columnas de datos, es relativamente fácil para los algoritmos realizar tareas de tratamiento inteligente de la información como: aprendizaje automático, *clustering*, clasificación, etc. Sin embargo, a medida que aumentan las columnas o características de nuestros ítems, se vuelve exponencialmente más difícil hacer labores predictivas con un buen nivel de precisión. El número de filas de datos necesarias para realizar cualquier modelado útil aumenta exponencialmente a medida que agregamos más columnas a una tabla.

La maldición de la dimensión representa un obstáculo importante a la hora de resolver problemas de gestión de la información que se plantean en el contexto del aprendizaje automático. Como ejemplo concreto encontramos el algoritmo de los *k*-vecinos, muy utilizado en SR [112], en el cual al aumentar la dimensión, la distancia al vecino más próximo crece.

Este problema también se hace latente en el campo de los SR al administrar grandes volúmenes de información sobre los que poder realizar recomendaciones al usuario teniendo en cuenta que el número de alternativas es muy elevado. Para abordar este problema, podemos encontrar muchos trabajos en la literatura sobre la reducción de la dimensión de la información, especialmente mediante selección de características (*feature selection*), que pueden ayudarnos a descartar aquellas características que no son merecedoras de ser considerados según diferentes criterios. De hecho, estas técnicas ya se aplican en otras áreas como son: algoritmos genéticos o redes neuronales, normalmente centrándose en la aplicación de un proceso automatizado que se aplique de una vez (*batch mode*) mediante selección de características.

Suele ser habitual que para realizar una selección de características por parte del SR, el usuario tenga que introducir y seleccionar información del sistema una y otra vez. Esto constituye un problema dado que pueden existir artículos para los cuales el número de características que los definen sea muy elevado y en consecuencia, incomode la correcta interacción del usuario con el sistema, poniendo de manifiesto de nuevo cómo la alta

dimensionalidad constituye un problema para los SR.

En definitiva, nuestro objetivo es abordar el problema de la alta dimensionalidad en los SR a través de un proceso de selección de atributos por parte del usuario mediante un SR conversacional que utilice características de los SR basados en contenido y en conocimiento.

Un trabajo interesante en esta área es [60], que establece la idoneidad de los enfoques basados en el conocimiento para los procesos conversacionales. En particular, estos autores utilizan el razonamiento basado en restricciones, en lugar de nuestro enfoque basado en la lógica. Además, este trabajo trata sobre concepto de optimización de consultas, análogo al aplicado en nuestra propuesta. Otro trabajo notable es [124], que comparte nuestro objetivo de disminuir el número de pasos de la conversación. Los autores proponen métricas acerca del número de pasos de la conversación y tasas de poda, ambos muy similares a los utilizados en nuestro trabajo como veremos más adelante. Por otro lado, en [22], los autores demuestran cómo la posibilidad de que sea el usuario el encargado de la selección de atributos supera al hecho de que sea el sistema mismo el encargado de dicha selección. Este hecho respalda nuestro enfoque en el cual el humano experto guía la conversación y el proceso de selección de características.

### 5.3 Evaluación de los sistemas de recomendación

Desde que se inició la investigación de los SR, la evaluación de las predicciones y recomendaciones se ha convertido en un aspecto muy importante [21, 54]. Los SR requieren medidas de calidad y métricas de evaluación [49] para conocer la calidad de las técnicas, métodos y algoritmos para las predicciones y recomendaciones. Las métricas de evaluación [55] y los *frameworks* de evaluación [17] facilitan la comparación de varias soluciones para el mismo problema.

No obstante, teniendo en cuenta la gran variedad de factores que pueden intervenir en el funcionamiento de los SR, la primera tarea a llevar a cabo es analizar qué tipo de métrica es la que mejor se adapta al SR que queremos evaluar. Con el fin de medir la calidad de los resultados de las

recomendaciones de un SR, es habitual utilizar el cálculo de algunas de las métricas de predicción de errores más comunes. El uso de estas métricas nos da una forma de comprobar la eficacia de SR calculando una medida del error en las predicciones. Entre estas métricas destacan el error absoluto medio (MAE) y sus métricas relacionadas: error cuadrático medio, raíz del error cuadrático medio (RMSE), el error medio absoluto normalizado (NMAE) [140].

También son muy comunes aquellas métricas aplicadas a la precisión en las clasificaciones [6]. Dado que gran parte de los SR basa su funcionamiento en el concepto de valoración, la aplicación de estas medidas para evaluar la precisión del recomendador es una tarea prácticamente imprescindible es gran cantidad de SR. Las métricas más destacadas en este grupo son Precisión, Memoria y F1 [110].

Además de las métricas mencionadas, existen otras tantas que también pueden ser de aplicación como el coeficiente de correlación de Pearson, (en inglés *Pearson Correlation Coefficient*, PCC), coeficiente de correlación de Spearman, estabilidad, fiabilidad, originalidad, diversidad, ...

No obstante, hay que tener en cuenta que dependiendo del SR con el que estemos trabajando, la evaluación habrá que llevarla a cabo utilizando aquellas métricas, que por su naturaleza y significado, tengan cabida en relación al SR que se desea evaluar. En este sentido, en el capítulo siguiente 6.3 aplicaremos una serie de métricas relacionadas con los SR conversacionales para evaluar el rendimiento del SR desarrollado y justificaremos el porqué otras métricas tales como algunas de las introducidas en esta sección, no son susceptibles de aplicación en nuestro marco concreto de trabajo.



## Capítulo 6

# Desarrollo de SR conversacional



**E**ste capítulo va a estar dedicado a mostrar el proceso, las mejoras conseguidas y los principales resultados que han acompañado a la consecución del SR desarrollado y que ha sido la parte fundamental de uno de los trabajos publicados que sustentan esta tesis [15]. Es por tanto intención principal de este capítulo el mostrar cómo se ha utilizado la base teórica adquirida para culminar en una aplicación de ingeniería, y en definitiva, para transmitir el conocimiento a las aplicaciones.

El texto va a estar repartido en tres secciones. La primera 6.1 y la segunda 6.2 están dedicadas a presentar el SR desarrollado y su funcionamiento respectivamente, mientras que en la última 6.3 presentaremos las medidas de evaluación utilizadas para el caso concreto del sistema desarrollado.

## 6.1 Presentación: *sicumaRS*

Si bien cronológicamente el último paso del desarrollo fue establecer un nombre para nuestro SR, por comodidad para con el texto, esta vez vamos a proceder al contrario; presentamos en primera instancia a *sicumaRS* como el SR creado a partir del trabajo de esta parte de la tesis.

Como hemos mencionado con anterioridad, *sicumaRS* va a ser un SR híbrido que va a combinar las estrategias de los SR conversacionales, basa-

dos en conocimiento y basados en contenido. Su finalidad va a ser abordar el problema de la dimensionalidad por medio un tratamiento eficiente de la información haciendo uso de FCA, las implicaciones y los operadores de cierre. En concreto haremos uso de la  $SL_{FD}$  y del algoritmo del cierre Cls.

Antes de entrar en el funcionamiento de *sicumaRS*, hay que tener en cuenta que lo primero que vamos a necesitar son *datasets* con elementos sobre el que poder hacer recomendaciones. Es necesario que estos *datasets* contengan la información según una representación binaria, es decir, el valor de cada uno de los atributos asociados a cada elemento del sistema será un valor binario que representará si ese elemento verifica ese atributo o no lo hace. Para entender este aspecto, veamos el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 6.1.1.** *Supongamos el dataset Auto MPG Data Set<sup>1</sup> accesible desde la página web de la Universidad de California, Irvine (UCI)<sup>2</sup> que básicamente contiene características del motor de un vehículo con la intención de predecir el consumo (las siglas MPG proceden del inglés Miles Per Gallon, o millas por galón.). Sobre este dataset se hace la adaptación necesaria para convertir la información multivaluada en información binaria, de forma que se establecieron unos umbrales que asignaban a cada característica del dataset un valor de 1 si superaba el umbral, 0 en otro caso. De esta forma *sicumaRS* ya puede utilizar este dataset modificado. La Tabla 6.1 muestra un extracto de la información original utilizada y su correspondiente adaptación.*

Una vez tengamos los *datasets* sobre los que vamos a trabajar, *sicumaRS* necesita conocer las relaciones que hay entre sus atributos por medio de implicaciones lógicas, pero para ello existen aplicaciones capaces de extraer el conjunto de implicaciones que se verifican en un determinado *dataset* [57, 136, 137].

---

<sup>1</sup><http://archive.ics.uci.edu/ml/datasets/Auto+MPG>

<sup>2</sup><http://archive.ics.uci.edu/ml/>

Cuadro 6.1: Extracto del *dataset* Auto MPG Data Set de la UCI

Nombre	MPG	Cilindrada	Potencia	Peso	Aceleración
Chevrolet Monte Carlo	15.0	8	150.0	3761	9.5
Buick Estate Wagon	14.0	8	225.0	3086	10.0
Toyota Corolla Mark II	24.0	4	95.00	2372	15.0
Plymouth Duster	22.0	6	95.00	2833	15.5
...					
Chevrolet Monte Carlo	1	1	0	1	0
Buick Estate Wagon	1	1	0	1	0
Toyota Corolla Mark II	0	0	1	0	1
Plymouth Duster	0	1	1	0	1
...					

## 6.2 Funcionamiento

Una vez presentado *sicumaRS* y la información de entrada que debe tener para funcionar, pasamos ahora a explicar el proceso conversacional junto con un esquemas conceptuales que faciliten su comprensión.

Fundamentalmente, la naturaleza de sistema conversacional que se manifiesta en *sicumaRS* nos lleva a que el proceso se desarrolle según una serie de etapas que pasamos a enumerar:

- (i) La interacción del usuario con el sistema comienza cuando el usuario elige un atributo con el que realizar la búsqueda. En principio, *sicumaRS* limita la elección de atributos a uno en cada paso de la conversación. De esta forma, podemos apreciar más fácilmente cómo funciona el sistema. No obstante, pruebas más avanzadas en las que hemos permitido la elección de múltiples atributos por cada paso han demostrado que el sistema mantiene su correcto funcionamiento e incluso aumenta más rápidamente la poda de información superflua.
- (ii) Una vez seleccionado el atributo, el proceso entra en el algoritmo Cls para calcular el cierre del conjunto de atributos y al mismo tiempo, el conjunto de implicaciones que quedan fuera del cierre.
- (iii) Una vez el Cls termina, se muestra una primera recomendación. Esta recomendación es una lista de resultados con los elementos del *da-*

*taset* que verifican el atributo seleccionado. Para conseguir esta lista el sistema realiza una consulta a base de datos solicitando aquellos elementos que verifiquen el atributo.

- (iv) En este punto, el usuario puede terminar el diálogo en caso de que ya esté satisfecho con el resultado o bien, puede continuar interactuando con el sistema por medio de la elección de un nuevo atributo. La ganancia en este momento se produce de la siguiente manera.

Para los sucesivos pasos del diálogo, hemos reducido el número de atributos disponibles eliminando aquellos que estén incluidos en el cierre debido a que son implícitos con respecto a la selección realizada. Como consecuencia, esos atributos implícitos no aparecerán en las sucesivas interacciones con el usuario, liberándolo así de tener que tratar con información redundante, lo cual actúa en beneficio directo a aliviar el problema de la alta dimensionalidad de la información.

No obstante, si bien es cierto que esta mejora puede alcanzarse con el algoritmo clásico del cierre [77], la mayor ventaja de usar el Cls es que *simultáneamente* estamos reduciendo el número de implicaciones, y por tanto, en cada nuevo paso del diálogo no necesitamos volver a extraer el nuevo conjunto de implicaciones, lo cual es una tarea de *data-mining* con coste exponencial, sino que podemos continuar la interacción a partir aquí, donde tanto atributos como implicaciones han sido reducidas, y por tanto con coste *lineal*.

- (v) Finalmente, el usuario puede decidir si queda satisfecho con la recomendación obtenida, o bien si quedan más atributos disponibles para elegir, puede volver al paso 1 para continuar el diálogo y refinar la recomendación; en caso contrario el diálogo termina por no quedar más atributos que seleccionar.

Las Figuras 6.2 y 6.1 nos ayudan a entender con mayor facilidad la sucesión de pasos que da el sistema conversacional para interactuar con el usuario y proponer recomendaciones. La primera representa el diagrama de

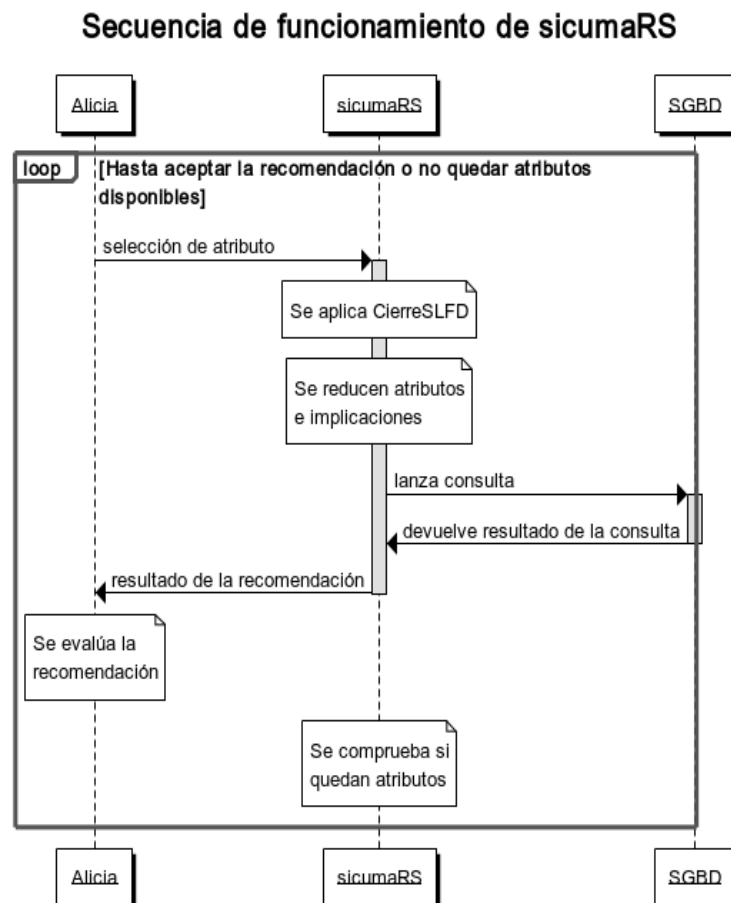


Figura 6.1: Diagrama de secuencia del funcionamiento de *sicumaRS*.

secuencia del proceso en el cual intervienen el usuario (Alicia), el SR (en este caso *sicumaRS*) y el sistema gestor de bases de datos (SGBD). Por otro lado, la Figura 6.2 nos muestra un esquema conceptual aplicado a un caso determinado de la investigación realizada. En concreto, ese esquema representa el funcionamiento de *sicumaRS* sobre un *dataset* que agrupa información sobre anomalías hematológicas y fenotipos. Por tanto en el esquema podemos ver como se desarrolla un hipotético diálogo hasta alcanzar una lista de anomalías aceptable. Esta figura tiene una importancia mayor añadida ya que además de servir para ilustrar el funcionamiento del SR, muestra la ganancia que obtenemos al utilizar el Cls frente a implementaciones clásicas. Los resultados de aplicación sobre este *dataset* concreto pueden verse con mayor detalle en [15].

Finalmente, vamos a terminar este apartado mostrando un ejemplo de aplicación del SR conversacional utilizando el *dataset* de restaurantes que muestran los autores en [70].

Este *dataset* va a contar con 6 tipos diferentes de establecimientos que se relacionan con 11 facilidades que pueden ofrecer. La Tabla 6.2 muestra un extracto del aspecto del *dataset*.

Cuadro 6.2: *Dataset* de restaurantes (extracto)

Tipo de local	Abierto	Cerrado	Tranquilo	Animado	Pintoresco	Barato
Restaurante común	✓	✓		✓		
Estrella Michelin		✓	✓			
Burger		✓		✓		✓
Bar Tapas		✓		✓	✓	✓
Pizzería		✓		✓		✓
Chiringuito Playa	✓			✓	✓	

Como consecuencia, vamos a tener un conjunto de atributos  $U = \{Abierto, Cerrado, Tranquilo, Animado, Pintoresco, Barato, Moderado, Caro, Aire Acondicionado (AC), Vistas, Terraza\}$ . Además, una vez que hayamos utilizado alguna de las técnicas existentes para extraer las implicaciones que se verifican en la Tabla 6.2 obtenemos el siguiente conjunto de implicaciones:

- $Terraza \rightarrow Animado$ ;



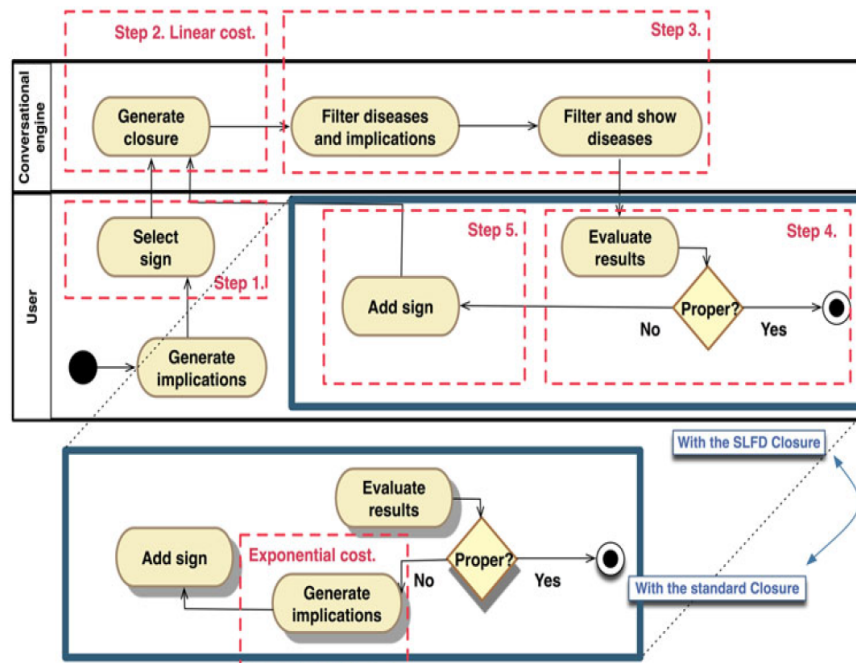


Figura 6.2: Diálogo entre el usuario y *sicumaRS* que muestra el funcionamiento del sistema y la ganancia obtenida por el algoritmo Cls frente al algoritmo clásico del cierre. Fuente [15].

- $Vistas \rightarrow Abierto, Animado, Píntoresco, Moderado, Terraza;$
- $AC \rightarrow Cerrado;$
- $Caro \rightarrow Cerrado, Tranquilo, AC;$
- $Moderado \rightarrow Píntoresco;$
- $Barato \rightarrow Cerrado, Animado;$
- $Animado, Píntoresco, Terraza \rightarrow Abierto, Moderado, Vistas;$
- $Animado, Píntoresco, Moderado \rightarrow Abierto, Vistas, Terraza;$
- $Tranquilo \rightarrow Cerrado, AC;$
- $Cerrado, Píntoresco, AC \rightarrow Tranquilo, Moderado;$
- $Cerrado, Píntoresco, Moderado \rightarrow Tranquilo, AC;$
- $Cerrado, Animado \rightarrow Barato;$
- $Cerrado, Animado, Barato, Terraza \rightarrow AC;$
- $Cerrado, Animado, Barato, AC \rightarrow Terraza;$
- $Abierto \rightarrow Animado, Píntoresco, Moderado, Vistas, Terraza;$

En definitiva, el SR conversacional va a contar con unos datos de partida formados por: un conjunto de 6 restaurantes, 11 posibles atributos y 15 implicaciones que se verifican en los datos. Por tanto, pasemos ahora a realizar una simulación de posible diálogo.

**Ejemplo 6.2.1.** *Supongamos que un usuario busca una recomendación sobre un restaurante para cenar. En primer lugar, busca que el lugar cuente con un atmósfera animada. Además, debido al buen clima reinante esta noche, es preferible que el establecimiento cuente con terraza. Para terminar, un precio moderado pondría la guinda al pastel.*

*De esta forma, el usuario comienza la interacción con el sistema introduciendo sus preferencias: Animado, Terraza y Moderado de forma sucesiva y los resultados que se obtienen los podemos ver desglosados en la Tabla 6.3.*

Cuadro 6.3: Desglose paso a paso del diálogo entre el usuario y *sicumaRS*.

Iter.	Selección	Cierre	Atributos	Implics.	Resultados
1	Animado	{Animado}	{CS, Píntoresco, Barato, OS, Tranquilo, Moderado, Caro, AC, Vistas, Terraza}	14	{Burguer, Pizzería, Tapas, Playa}
2	Terraza	{Animado, Terraza}	{CS, Píntoresco, Barato, OS, Tranquilo, Moderado, Caro, AC, Vistas}	13	{Pizzería, Playa}
3	Moderado	{Animado, Terraza, Moderado, OS, Píntoresco, Vistas}	{CS, Barato, Tranquilo, Caro, AC}	7	{ <b>Playa</b> }

De este ejemplo podemos extraer algunas conclusiones interesantes que recogemos en la lista siguiente:

- Primero y más importante; hemos conseguido que la interacción con el usuario sea más sencilla ya que no hay necesidad de tener que tratar con todos los atributos posibles a cada paso de la conversación. En cada momento, el sistema ha ido eliminando aquellos atributos que por la selección de otros se encuentran implícitamente incluidos. Gracias a ello, el diálogo entre el usuario y el sistema se hace más dinámico por dos razones:
  - (i) Se evita que los usuarios tengan que navegar entre atributos redundantes.
  - (ii) La lista de atributos disponible depende de las elecciones previas, por tanto, los resultados pueden diferir entre un acceso al sistema y otro, evitando de esta forma obtener siempre los mismos resultados una y otra vez.

- Gracias al algoritmo Cls, conseguimos que en cada paso de la conversación, una vez aplicado, se reduzcan tanto el número de atributos disponible como el número de implicaciones, lo que redundará en una reducción de los tiempos de respuesta del sistema.
- También hemos de comentar que puede ocurrir que el usuario obtenga una recomendación satisfactoria antes de que la lista de resultados tenga una longitud manejable. En estos casos, el diálogo entre el usuario y el sistema puede acabar con una lista de posibles alternativas todavía muy extensa, pero en cualquier caso el sistema habrá guiado de forma eficiente al usuario hasta este punto. De hecho, en caso de no estar del todo satisfecho todavía, la solución pasa por continuar eligiendo atributos hasta que la lista de resultados sea más tratable, pero en cualquier caso, el sistema depende de la iniciativa del usuario.

### 6.3 Medidas de evaluación

Como es razonable, todo sistema debe someterse a una serie de evaluaciones que confirmen su viabilidad y su utilidad. Con *sicumaRS* hemos realizado este tipo de evaluaciones y para ello vamos a pasar a definir qué medidas se han utilizado para llevar a cabo esta evaluación.

Recordemos que en apartados sucesivos se analizaron muchas de las diferentes métricas de evaluación de los SR que existen en la literatura. Sin embargo, no todas son adecuadas para todos los SR; dependiendo del SR habrá unas que sean razonables de aplicar y otras que no tengan cabida. En nuestro caso, dado que estamos tratando con un SR conversacional, puede ser evidente que la primera medida que podemos aplicar es calcular el número de pasos que se producen en la conversación [80] como hemos estado viendo en los ejemplos anteriores. Por contra, otras métricas tan populares como son *Precision* y *Recall* [50] no son adecuadas de aplicar en nuestro caso porque obtendríamos siempre valores máximos en ambas métricas y la razón es la siguiente:

- En primer lugar, cualquier ítem de la lista de resultados, verifica los

atributos seleccionados ya que la consulta que se lanza a la base de datos para obtener la lista de ítems contiene esas restricciones.

- Y en segundo lugar, a cada paso del diálogo, el sistema devuelve todos los ítems que verifiquen la selección de atributos establecida por el usuario.

Sucede una situación similar cuando estamos hablando de otras métricas muy utilizadas como son MAE o RMSE. Estas métricas basadas en valoraciones no tienen cabida en nuestro sistema puesto que no existen valoraciones con la que el sistema trabaje.

Asimismo, no existe la necesidad de de considerar métricas referentes a la exactitud de los resultados ya que *sicumaRS* no es un modelo de predicción, su funcionamiento está basado en implicaciones y eso nos asegura un 100 % de exactitud en las respuestas.

Afortunadamente, existen otras medidas que pueden reflejar los resultados de los experimentos. Las explicamos a continuación:

### Número de pasos ( $N$ )

Como su nombre indica, esta métrica registra el número de pasos que se dan en el diálogo y en consecuencia, el número de atributos seleccionados por el usuario. Nos proporciona una visión clara de si el sistema ha necesitado mucha o poca interacción para satisfacer la demanda del usuario. Hay que aclarar, sin pérdida de generalidad, que en los experimentos realizados, dependiendo del *dataset* sobre el que trabajemos, se ha establecido un tamaño máximo de la lista de resultados como indicador de aceptación por parte del usuario; por ejemplo, se establece que el usuario se considera satisfecho cuando una recomendación de hoteles contenga como máximo 10 hoteles.

$$N = |\text{Atributos seleccionados}|, \quad \text{donde } |A| \text{ representa el cardinal de } A.$$

### Velocidad de poda en cada paso $i$ ( $S_i$ )

Esta métrica evalúa el porcentaje de atributos que el sistema libera al usuario de tener en cuenta a lo largo de la conversación y de forma acumulativa de un paso al siguiente. Con esta métrica buscamos averiguar si los ratios de poda del algoritmo son mejores al principio de la conversación o en los pasos posteriores. Es una métrica para medir cuán rápido es el sistema reduciendo la sobrecarga de información.

$$S_i = \frac{|\text{Atributos del cierre}|_i - i}{|M|}$$

Siendo  $i = 1, \dots, N$ , y  $M$  el conjunto global de atributos.

### Reducción de atributos ( $P$ )

Esta última métrica nos informa de la reducción global de atributos que ha realizado el sistema al terminar el diálogo. La reducción de estos atributos es consistente ya que es fruto de la aplicación del algoritmo del cierre a partir de las selecciones realizadas por el usuario. Formalmente:

$$P = S_N$$

## Capítulo 7

# Experimentos realizados





A lo largo del texto, se han mostrado ejemplos 2.2.16 6.2.1 de aplicación del algoritmo Cls y en general del SR desarrollado, no obstante, en estos momentos en los que contamos con *sicumaRS* como un SR ya definido, abordamos en este capítulo una serie de experimentos más elaborados que nos permitan comprobar el funcionamiento de nuestro sistema y evaluar su rendimiento. La forma en que vamos a proceder con los experimentos la exponemos a continuación.

Para cada experimento vamos a realizar un test que consiste en simular 100 diálogos siguiendo al pie de la letra el proceso detallado en 6.2. No obstante, las simulaciones van a llevarse a cabo como diálogos aleatorios, es decir, cada diálogo se desarrollará eligiendo atributos de forma aleatoria del conjunto de atributos disponible a cada paso de la conversación. Esto puede verse desde diferentes perspectivas. En primera instancia, parece adecuada la estrategia aleatoria ya que así se garantiza la honestidad de los resultados al no haber posibilidad de inducir situaciones favorables para que el sistema obtenga mejores resultados. Sin embargo, proceder de manera aleatoria también puede oscurecer las virtudes de nuestro sistema.

Por un lado, imaginemos una situación en la que las elecciones aleatorias impliquen atributos que no guardan relación entre ellos en el *dataset*, entonces, el diálogo terminará rápidamente ya que puede que haya muy

pocos ítems (o incluso ninguno) que verifiquen tal selección de atributos y por tanto, el proceso terminará sin poder aplicar ninguna reducción de atributos. Ahora bien, supongamos un diálogo más realista en el que la elección de atributos tenga un relación más sensata. En este caso, durante el diálogo, el sistema será capaz de ir aplicando sucesivas podas para reducir la sobrecarga de información ya que existirá relación entre los atributos seleccionados. Por tanto, esta forma de proceder ensalzaría los beneficios de nuestro sistema.

En relación a la evaluación del sistema, las métricas que vamos a utilizar sobre cada simulación van a ser: número de pasos de la conversación, velocidad de poda de atributos en cada paso y reducción total de atributos; tal y como se han presentado en 6.3.

Finalmente, se realizan una serie de repeticiones sobre cada uno de los experimentos de manera que cada número mostrado es fruto de un estudio estadístico a partir de los resultados obtenidos en esas repeticiones que nos permite extraer los resultados más fiables [45].

Dicho eso, el capítulo va a estar dividido en 4 bloques principales. Comenzaremos con un experimento sobre un *dataset* muy conocido en el campo de los SR: MovieLens10M 7.1. Es un *dataset* que contiene una gran cantidad de información sobre películas de la que vamos a usar sólo los títulos y géneros. En virtud de esto, trabajamos sobre una cantidad importante de elementos, pero sin contar con demasiados atributos. Continuaremos con otro *dataset* que contiene un menor número de elementos pero muy definidos mediante muchos atributos (Costa del Sol Hotels) y que además contiene información real extraída directamente desde la red 7.2. Para culminar esta sección, el último experimento utiliza un *dataset* (World Wide POIs) que supera ampliamente a los anteriores en cuanto al número de elementos y atributos y que al igual que el anterior, la información que presenta también es real 7.3.

Finalmente, la última sección nos trae la presentación y los resultados obtenidos sobre el *dataset* 7.4 utilizado en una de las publicaciones que avalan esta tesis [15]. Varias tablas y figuras acompañarán cada experimento con la intención de ilustrar más fácilmente los resultados obtenidos.

## 7.1 MovieLens *datasets*

MovieLens<sup>1</sup> es un proyecto desarrollado por el equipo de investigación GroupLens<sup>2</sup> del Departamento de Ciencias de la Computación e Ingeniería de la Universidad de Minnesota especializado en SR, comunidades online, bibliotecas digitales, ... En su dirección web se ayuda a la gente a elegir películas que deseen ver; grosso modo es un SR de películas con un tinte evidente de CF. Cuenta con cientos de miles de usuarios y de películas almacenadas en una colección muy rica de *datasets* que han sido un referente a la hora de probar el funcionamiento de otros sistemas en diferentes entornos [53].

En nuestro caso, nos vamos a centrar en su MovieLens10M *dataset*. Es un *dataset* totalmente accesible de forma gratuita desde la página web y contiene información de más de 10.000 películas con sus respectivos géneros, duración, país, valoraciones, elenco, etc.

De toda esta información, vamos a generar un conjunto reducido para utilizarlo en nuestro *sicumaRS*. Concretamente, vamos a crear una tabla para emparejar cada una de las películas con todos los posibles géneros que existen en el *dataset* original. De esta forma, tendremos las películas en las filas de la tabla y los géneros como columnas; una película tendrá una marca de verificación en aquellos géneros en los que esté clasificada y nada en otro caso. La Tabla 7.1 muestra un pequeño extracto del conjunto final.

Cuadro 7.1: Extracto del *dataset* MovieLens 10M.

Título	Acción	Comedia	Crimen	Drama	Romance	...
Little City (1998)		✓			✓	
Driver, The (1978)	✓		✓			
Father of the Bride (1950)		✓				
Bio-Dome (1996)		✓				
Fast Runner, The (2001)				✓		
Overboard (1987)		✓			✓	
Get Rich or Die Tryin' (2005)	✓		✓	✓		
...						

<sup>1</sup><http://movielens.org>

<sup>2</sup><https://grouplens.org>

Para convertir esta información a valores de 1 ó 0 para nuestro SR sólo tenemos que cambiar los marcas de verificación por 1 y el resto por 0.

Los números de este *dataset* adaptado según se ha indicado, alcanzan los siguientes valores:

- Filas (items): 10.681 películas.
- Columnas (atributos): 19 géneros.
- Implicaciones: 245

Con esta información ya estamos en disposición de iniciar la interacción entre el usuario y *sicumaRS*. No obstante, antes de pasar al experimento general, veamos un ejemplo concreto de diálogo.

**Ejemplo 7.1.1.** *Supongamos en este caso que el usuario está buscando una película de acción, con experiencia IMAX y con algunos toques de misterio. Entonces, el usuario interactúa con el sistema introduciendo estas preferencias en la conversación. El resultado lo podemos apreciar viendo cuál ha sido diálogo que se ha producido en la Tabla 7.2.*

Cuadro 7.2: Resultados del diálogo entre *sicumaRS* y el usuario sobre el *dataset* MovieLens 10M.

Iter.	Selección	Cierre	Atribs.	Implics.	Items
1	Acción	{Acción, Thriller, Aventura}	16	121	1.473
2	IMAX	{Acción, Thriller, Aventura, Sci-Fi, IMAX, Comedia, Fantasía}	12	43	108
3	Misterio	{Acción, Thriller, Aventura, Sci-Fi, IMAX, Comedia, Fantasía, Misterio, Crimen, Romance, Cine-Negro}	8	1	6

En el ejemplo anterior, podemos darnos cuenta de que incluso cuando interactuamos con un *dataset* muy grande como MovieLens10M, se hace más cómodo para el usuario el obtener una recomendación, ya que en cada paso estamos reduciendo el espacio de búsqueda. Efectivamente, 3 pasos son suficientes para obtener la recomendación entre todo el *dataset*.

En este sentido, si nos centramos en la primera iteración en la que se introduce la preferencia *Acción*, el conjunto de cierre contiene dos atributos más aparte del seleccionado. La siguiente iteración sigue la misma línea y el cardinal del conjunto cierre aumenta sustancialmente. Como consecuencia, podemos liberar al usuario de tratar con esos atributos en las iteraciones sucesivas, y así estamos reduciendo la sobrecarga de información. Además, como hemos mencionado antes, al mismo tiempo, también reducimos el número de implicaciones involucradas de forma significativa, lo cual acelera las consultas subsiguientes.

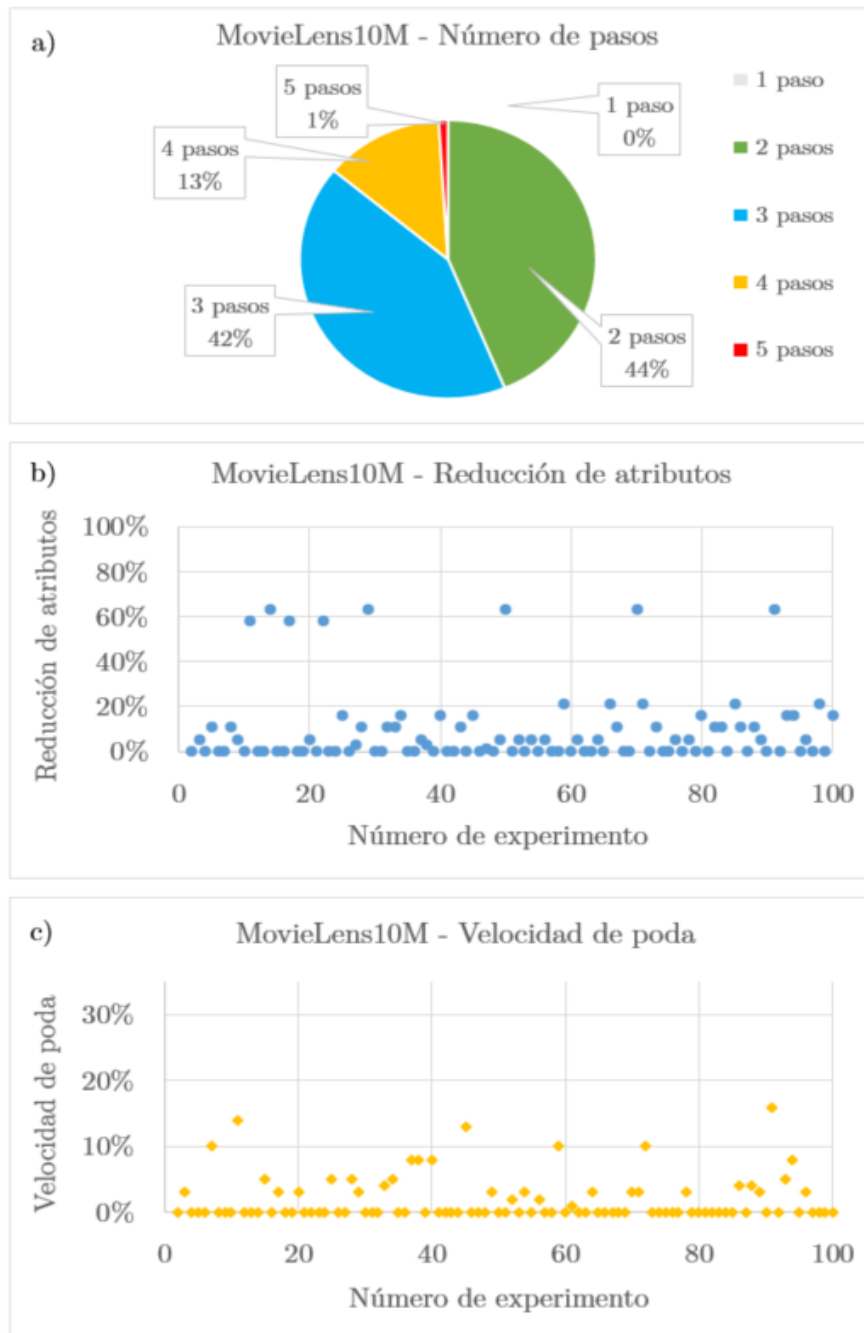
Una vez visto un caso concreto de diálogo con este *dataset*, pasamos ahora a realizar el experimento completo tal y como se ha establecido anteriormente, es decir, simulando 100 diálogos diferentes en los cuales los atributos se eligen de forma aleatoria. La Figura 7.1 muestra el resultado de este experimento dividido en 3 secciones:

- a) Representa por medio de un diagrama de sectores el porcentaje de experimentos que han necesitado un determinado número de pasos para alcanzar una recomendación admisible.
- b) Muestra el porcentaje total de atributos que se han reducido en el diálogo.
- c) Muestra el porcentaje de atributos que se ha reducido a cada paso de la conversación, es decir, la velocidad de poda.

Al analizar la Figura 7.1(a) podemos apreciar como *sicumaRS* es capaz de guiar al usuario hasta una recomendación aceptable en 2 ó 3 pasos en la mayoría de los casos. Si tenemos en cuenta el tamaño de este *dataset*, estos resultados son altamente prometedores.

Respecto a la reducción de atributos global, la Figura 7.1(b) muestra que el sistema ha liberado al usuario de tener que interactuar con el 5-20 % de los atributos. Incluso tenemos algunas pruebas en las que la reducción ha llegado a alcanzar el 60 % de los atributos.

La velocidad de poda acompaña el resultado anterior moviéndose en un rango de entre el 2-10 % como muestra la Figura 7.1(c).

Figura 7.1: Resultado del experimento sobre el *dataset* MovieLens10M.

A la luz de estos resultados, podemos concluir que *sicumaRS* se comporta de forma notable a la hora de aliviar la sobrecarga de información en la interacción con el usuario.

**Nota 7.1.2.** *Aparte de los dataset que podemos encontrar disponibles en la web, a la hora de realizar experimentos nos vimos en la necesidad de poder crear nuestros propios datasets, igualmente utilizando información real, pero ahorrando los pasos de análisis y preparación de la información al formato de sicumaRS.*

*A raíz de ello, se investigó el web-scraping como una de las técnicas disponibles para extraer información de la red [19, 61]. El aprendizaje de esta técnica nos abrió la puerta a crear datasets con los que poder trabajar. Como ejemplo de algunos de ellos, tenemos el dataset de Hoteles Costa del Sol cuyo experimento pasaremos a analizar, y el de puntos de interés turístico (POIs Mundial) que veremos en la sección 7.3.*

## 7.2 Hoteles Costa del Sol *dataset*

Este experimento tiene un gran interés para el usuario ya que la elección de un hotel, ya sea por vacaciones, trabajo o cualquier otro motivo, suele ser una decisión con un alto margen de maniobra en primera instancia. Por lo tanto, contar con un sistema que acelere la búsqueda de nuestras necesidades puede ser muy útil para ahorrar tiempo y esfuerzo. Para ello, presentamos un *dataset* que contiene más de 300 hoteles (extraídos del proyecto Costa del Sol Occidental<sup>3</sup>) cada uno de los cuales con 37 atributos diferentes. Aunque el *dataset* es muy disperso, la tabla final obtenida es digna de tener en consideración ya que está formada por información real que se utiliza actualmente por muchos turistas que visitan el sur de España.

Al igual que en el experimento anterior, vamos a generar una tabla que contiene los hoteles en las filas y las características o servicios en las columnas tal y como se muestra en la Tabla 7.3.

---

<sup>3</sup><http://www.costadelsoloccidental.org>

Cuadro 7.3: Hoteles Costa del Sol *dataset* (extracto)

Nombre Hotel	AC	Bar	Gym	Internet	Masajes	Parking	...
Fuerte Estepona Suites	✓	✓	✓	✓	✓	✓	
Hotel Buenavista		✓				✓	
Hotel Paraiso	✓	✓				✓	
Apts Marriot Playa				✓			
Hotel Piedra Paloma		✓				✓	
Hostal Hospederia V Cent	✓	✓		✓		✓	
...							

Si bien es cierto que este *dataset* no contiene tantos elementos como el de MovieLens10M 7.1, sí que lo supera en número de atributos para cada ítem, y aún más importante, en el cardinal del conjunto de implicaciones. Los números finales son:

- Filas (ítems): 361 hoteles.
- Columnas (atributos): 37 servicios.
- Implicaciones: 1.507

Al igual que en el experimento anterior, antes de entrar en el experimento general, veamos un caso concreto.

**Ejemplo 7.2.1.** *Supongamos que una pareja joven quiere pasar un fin de semana descansando en un hotel y están visitando sitios web en un teléfono móvil. Los requisitos que buscan por parte del hotel son Spa y servicio de Belleza. Al introducir estos parámetros en el sistema, se produce un resultado con 16 hoteles. Un resultado así puede ser incómodo para la pantalla de un teléfono móvil común. Sin embargo, consideran incluir una sesión de Masaje también, por tanto, añaden la nueva preferencia y obtienen una lista de recomendación con 7 hoteles, eso ya es aceptable. El proceso se representa en la Tabla 7.4.*

En este experimento se aprecia claramente cómo el mecanismo de poda hace que la interacción sea más rápida, más cómoda y dinámica, ya que podría ser una ardua tarea tratar de elegir por un hotel entre cientos de



Cuadro 7.4: Resultados del diálogo entre *sicumaRS* y el usuario sobre el *dataset* Hoteles Costa del Sol

Iter.	Selección	Cierre	Atribs.	Implics.	Items
1	Spa	{Spa, Bar, Restaurante, Cafetería, Piscina, Jardines, Parking, AC}	29	799	96
2	Belleza	{Spa, Bar, Restaurante, Cafetería, Piscina, Jardines, Parking, AC} Belleza, Reuniones, Deporte, Animación}	25	559	16
3	Masaje	{Spa, Bar, Restaurante, Cafetería, Piscina, Jardines, Parking, AC, Belleza, Reuniones, Deporte, Animación, Masaje, Médico, Lavandería, Internet}	21	126	7

posibilidades con más de 30 servicios posibles cada una. Por el contrario, 3 pasos son suficientes para guiar a la pareja a sus mejores opciones. Estos resultados superan con creces los estudios previos [124] donde, incluso contando con un *dataset* hotelero más pequeño, el número de pasos necesarios es mayor.

Con la intención de preservar la completitud con el experimento anterior, la Figura 7.2 muestra el resultado para el experimento completo.

Respecto a este experimento, podemos ver que los resultados son ligeramente diferentes a los alcanzados sobre MovieLens10M 7.1. El primer punto notable del experimento es que esta vez hay casos en que la duración de la conversación ha aumentado y esto se debe a que el número de atributos posibles es mucho mayor ahora. Aún así, en la mayoría de los casos son necesarios sólo 2-3 pasos una vez más para conseguir una recomendación admisible.

La reducción de atributos es mayor en este caso con respecto a MovieLens10M, alcanzando tasas de poda entre 10-40 % en la mayoría de los casos, y de entorno al 85 % en algunos otros.

Del mismo modo, la velocidad de poda también es mayor como podemos apreciar en la Figura 7.2(c); en definitiva, consiguiendo valores que reflejan la utilidad del mecanismo de conversacional.

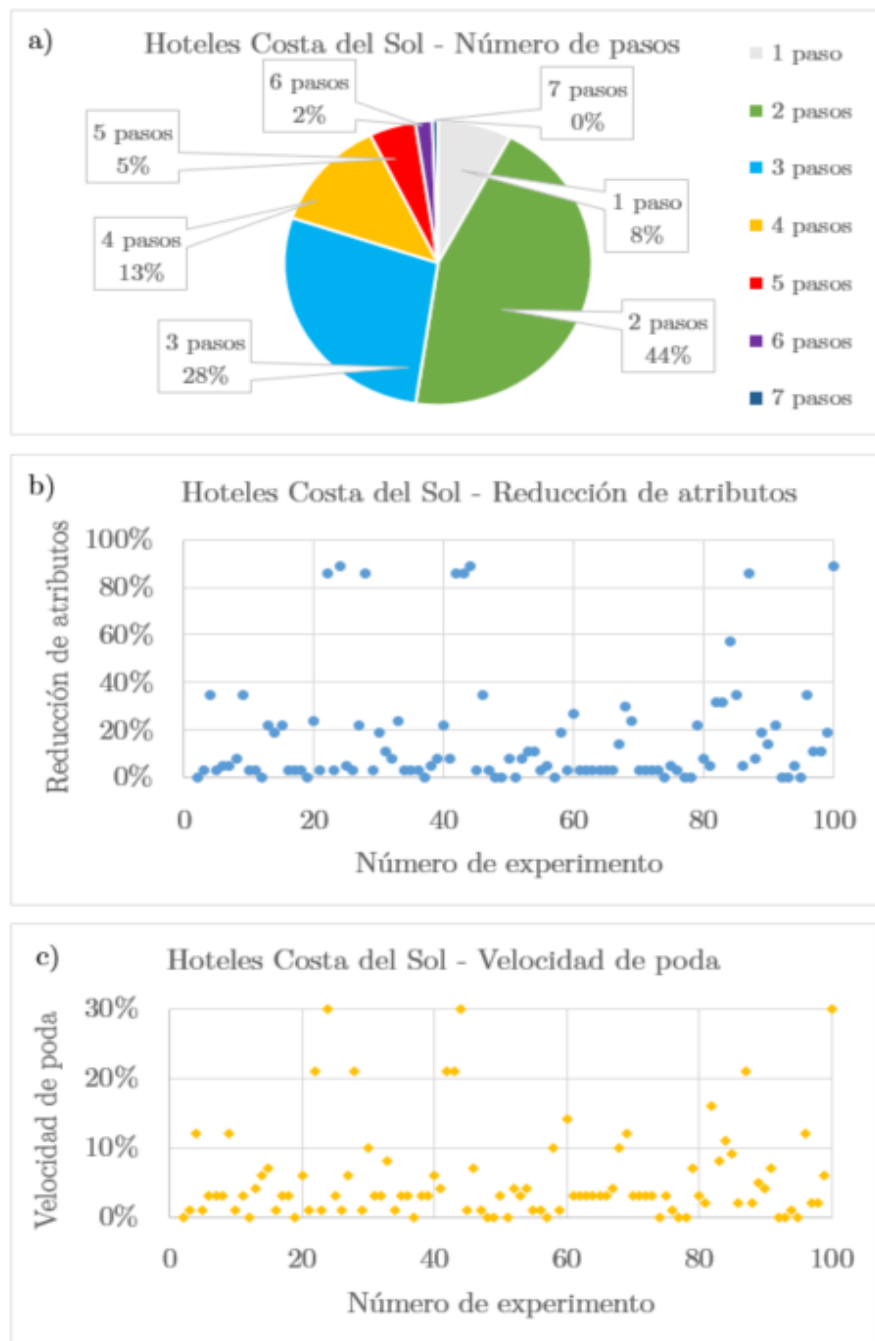


Figura 7.2: Resultado del experimento sobre el *dataset* Hoteles Costa del Sol.

## 7.3 POIs Mundial *dataset*

Finalmente, con la intención de crear un *dataset* más amplio que los anteriores tanto en el número de ítems como en el número de atributos, llegamos al último *dataset* generado, al cual hemos denominado POIs Mundial *dataset*. Manteniendo la idea de realizar pruebas más fidedignas, la información del *dataset* es información real, extraída del portal web Tripadvisor<sup>4</sup> con las técnicas mencionadas anteriormente. Este *dataset* va a contener información de multitud de puntos de interés (en inglés *Points Of Interest*) turístico de todo el mundo (Torre Eiffel, Estatua de la Libertad, Big Ben, Plaza Roja, Coliseo, etc.). En esta clasificación entran monumentos, parques, museos, iglesias, galerías de arte, teatros, complejos deportivos, ..., así hasta un total de más de 100 categorías diferentes. En la Figura 7.3 mostramos un ejemplo de algunos de los puntos de interés que podemos encontrar en Roma según la web y las categorías a las que pertenecen.

La generación de este *dataset* arrojó una serie de resultados muy satisfactorios. El primero fue constatar la capacidad adquirida para la generación de *datasets* de gran envergadura y con información real. De hecho POIs Mundial con un total de 17.400 puntos de interés (ítems), cantidad que sobrepasa notablemente a las 10.000 películas almacenadas en el histórico *dataset* de MovieLens10 analizado en 7.1. Además, cada elemento puede pertenecer a más de 100 categorías diferentes (en concreto 115 categorías diferentes), lo cual genera una tabla con un total de más de 2 millones de celdas. Aún así, el número de implicaciones generado no es excesivo debido a que el conjunto es altamente disperso.

En resumen, los números para este último *dataset* son:

- Filas (ítems): 17.400
- Columnas (atributos): 115
- Implicaciones: 675

---

<sup>4</sup><https://www.tripadvisor.es>

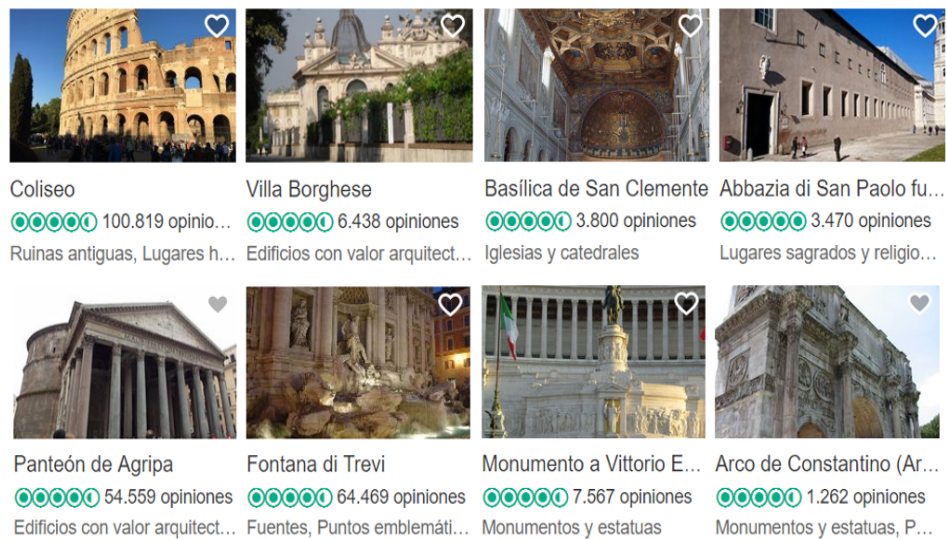


Figura 7.3: Ejemplo de puntos de interés de la ciudad de Roma que muestra el portal Tripadvisor. En la parte inferior de cada uno podemos ver a qué grupo pertenece (Iglesias, Monumentos, Estatuas, Fuentes, ...).

Pasamos ahora comprobar el resultado obtenido tras lanzar el test sobre el mayor de los *datasets* generados en esta investigación.

Recordemos ahora que estamos tratando con un *dataset* que contiene más de 17.000 puntos de interés que pueden verificar más de 100 atributos diferentes. Si bien los números de este *dataset* son mayores que los de el *dataset* MovieLens10M, vemos que los resultados obtenidos, *a priori* parecen aún más espectaculares (2 ó 3 pasos en la conversación). Sin embargo, en este caso tenemos que hacer unas aclaraciones.

Al principio de este apartado indicábamos que los tests se llevarían a cabo simulando diálogos donde los atributos se seleccionarían de forma aleatoria y analizamos los pros y contras de esta decisión. Bien, pues experimento pone en evidencia tales circunstancias. Por un lado, vemos como la mayoría de los test finalizan en 2 ó 3 pasos de conversación (ver Figura 7.4(a)). Esto puede considerarse un gran éxito del sistema al necesitar un diálogo tan corto a la hora de hacer una recomendación entre tantísimos elementos, y de hecho en muchos de los tests la situación se refleja fielmente.

Sin embargo, algunos otros experimentos que también han terminado tan rápido, se debe a que la selección de atributos no ha sido coherente. Por ejemplo, supongamos que entre todos los atributos se ha seleccionado que el punto de interés sea del tipo *Museo Histórico* y *Playas*, entonces a la hora de buscar elementos del *dataset* que verifiquen simultáneamente atributos tan dispares, el resultado contendrá muy pocos elementos y por tanto en pocos pasos habremos finalizado el diálogo. En definitiva, esto sucede debido a dos razones fundamentales:

- (i) La selección aleatoria de atributos.
- (ii) Y muy importante, el *dataset* es altamente disperso, ya que de entre los más de 100 atributos posibles, un punto de interés llega a verificar simultáneamente a la suma 7 de ellos.

Por otro lado, en la Figura 7.4(b) y (c) podemos apreciar que en este caso la reducción de atributos y la velocidad de poda alcanzan niveles aún más notables que en el caso de MovieLens10M, y es que aunque los valores

sean similares (reducción entre el 5-25 % y velocidad de poda entre el 2-10 %), hay que tener en cuenta que debido al tamaño de este *dataset*, esos porcentajes implican un número de elementos eliminados muy superior.

En resumen, podemos constatar que incluso con *datasets* tan ricos en contenido, *sicumaRS* es capaz de entablar un diálogo con el usuario brindándole unas reducciones de información muy importantes, aliviando de esta forma de manera notable la sobrecarga de información.

## 7.4 Enfermedades y Síntomas *dataset*

Otro de los *datasets* generados es el que hemos denominado por cuenta propia *Diseases & Symptoms dataset*. Este *dataset* tiene una importancia mayor ya que ha sido el utilizado en una de las publicaciones que avalan esta Tesis Doctoral [15]. A continuación, pasamos a describir la fuente de los datos y la estructura del *dataset* generado.

La fuente original de la cual se ha extraído la información es el Phenotype Ontology Consortium<sup>5</sup> (HPO). Como podemos leer en su página web: “HPO<sup>6</sup> pretende proveer un lenguaje estandarizado de las fenotipos encontrados por anomalías en enfermedades humanas. Cada término en HPO describe una anomalía fenotípica. HPO está en desarrollo utilizando literatura médica, Orphanet<sup>7</sup>, DECIPHER<sup>8</sup>, y Online Mendelian Inheritance in Man (OMIM)<sup>9</sup>.”. A partir de toda esta información pudimos generar un *dataset* sobre el que desempeñar nuestros experimentos.

Debido a que la cantidad de información en el HPO es enorme, en esta primera aproximación sólo vamos a utilizar un extracto de toda la información disponible. Haciendo uso de OMIM para diferenciar entre diferentes tipos de fenotipos que aparecen en el HPO, hemos generado una tabla que empareja anomalías hematológicas y fenotipos, consiguiendo un conjunto

---

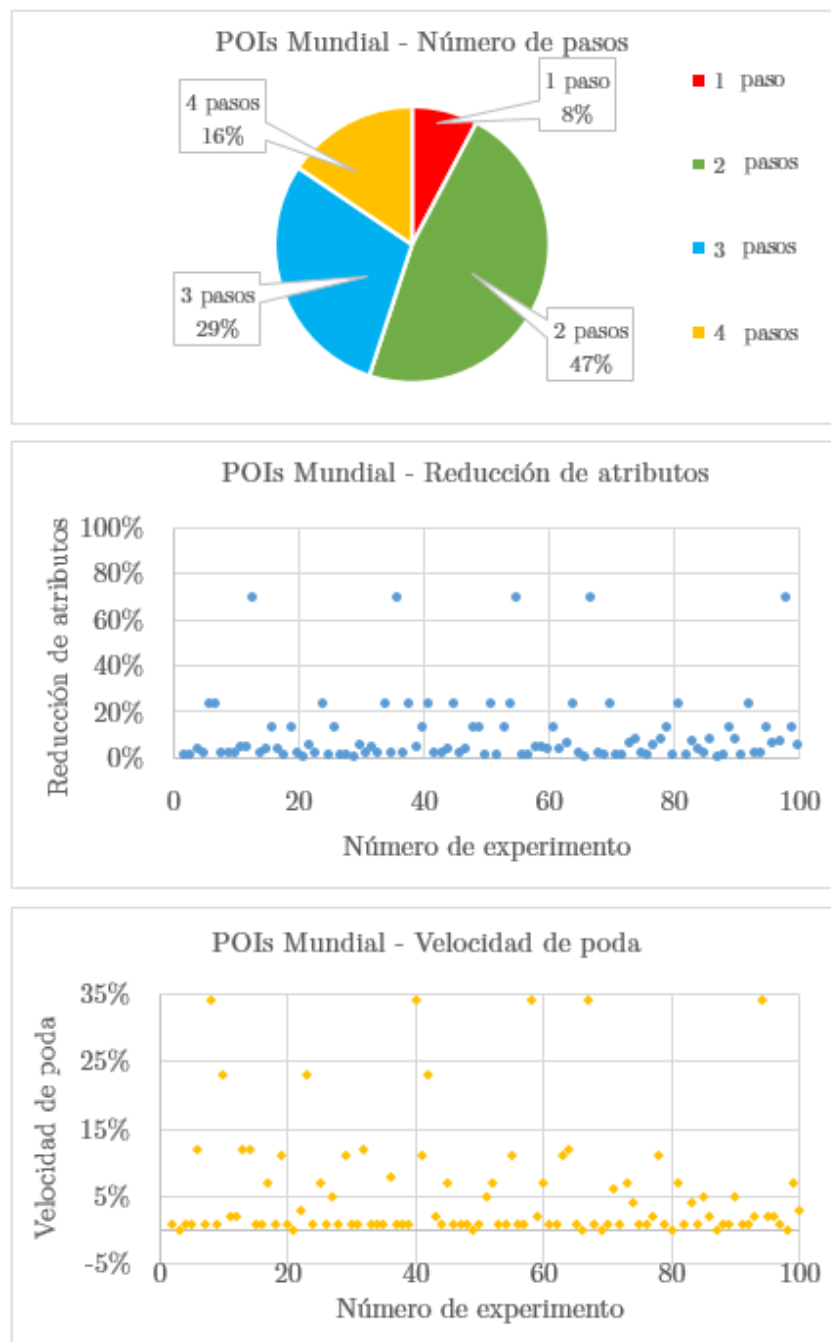
<sup>5</sup><http://www.human-phenotype-ontology.org>

<sup>6</sup>HumanPhenotypeOntology

<sup>7</sup><http://www.orpha.net/consor/cgi-bin/index.php>

<sup>8</sup><https://decipher.sanger.ac.uk>

<sup>9</sup><http://www.omim.org>

Figura 7.4: Resultado del experimento sobre el *dataset* POIs Mundial.

de datos considerable. Podemos ver un extracto de la información generada en la Tabla 7.5.

Cuadro 7.5: Diseases & Symptoms dataset (extract)

Disease ID	HPO_1249	HPO_1250	HPO_1251	HPO_1252	HPO_1254	...
274000		✓				
275630	✓		✓			
277380				✓	✓	
300884		✓		✓		
300322	✓			✓		
...						

En caso de que queramos obtener información detallada de cada anomalía que se muestra, encomendamos al lector a visitar la web de OMIM y utilizar su motor de búsqueda con el identificador mostrado en la columna *Disease ID*. Como ejemplo, la anomalía *Disease ID 275630* corresponde con el síndrome *Chanarin-Dorfman*.

En definitiva, vamos a trabajar sobre un *dataset* con 446 enfermedades, 100 fenotipos diferentes y todas las implicaciones que se verifican. Desgraciadamente, no podemos mostrarlas todas en el documento pues el conjunto alcanza un número superior a 6.000 implicaciones.

Este experimento además de su relevancia en cuanto a figurar en una de las publicaciones que avalan esta tesis [15], tiene una importancia añadida debido al alto número de implicaciones que contiene. Recordemos que en un *dataset* de referencia en el campo como lo es MovieLens10M 7.1 el número de implicaciones que obteníamos era 245, mientras que ahora *sicumaRS* trabajará y con resultados satisfactorios, con este *dataset* en el que el cardinal del conjunto de implicaciones es superior a 6.000 implicaciones.

A continuación recopilamos los números de este *dataset*:

- Filas (items): 446 anomalías.
- Columnas (atributos): 100 fenotipos.
- Implicaciones: 6.468



En este punto tenemos que hacer un inciso importante y que es de aplicación para todos los *datasets* y pruebas que se han realizado.

**Nota 7.4.1.** *Si nos centramos en el Enfermedades y Síntomas dataset y calculamos la llamada base Duquenne-Guigues [48] de implicaciones que se verifican en el contexto, el número de implicaciones asciende hasta las 8.811 implicaciones. Entonces, ¿por qué hablamos de que el sistema va a tratar unas 6.000 implicaciones con este dataset? Bien, pues la principal característica de la base Duquenne-Guigues de implicaciones es que esta base tiene el menor número de implicaciones posibles entre todas las posibles bases de implicaciones que se verifican en el contexto. Sin embargo, existirán algunas implicaciones para las que no haya ningún objeto que las verifique, y esas implicaciones significan que el conjunto de objetos que pueden cumplir con la premisa de la regla, no existen en el contexto. Además, esas implicaciones incluyen todos los atributos del contexto. Por tanto, el sentido de esas implicaciones es simplemente teórico y no presenta ningún valor cuando estamos tratando con aplicaciones reales; es por ello por lo que obviamos tales implicaciones.*

En este caso, los resultados del experimento y sus conclusiones pueden consultarse en [15].



## Capítulo 8

# Conclusiones y Trabajos Futuros



Fundamentalmente, podemos decir que esta Tesis ha englobado dos vertientes principales. Por un lado, se ha realizado un profundo estudio de los métodos basados en la lógica para el tratamiento eficiente de la información utilizando los conjuntos de implicaciones que se verifican en un determinado dataset. Y por otro lado, de forma más extensa, se han realizado las tareas de implementación necesarias para poder llevar estos métodos teóricos a la práctica. Hemos trabajado sobre tres campos diferentes: claves minimales, generadores minimales y sistemas de recomendación. Para cada uno de ellos se han realizado multitud de experimentos que demuestran la utilidad y la validez del trabajo realizado.

En esta tesis hemos podido apreciar el hecho de que contar con una sólida teoría basada en la lógica y las matemáticas nos concede la base para la creación de métodos automatizados con los que poder afrontar el desarrollo de aplicaciones de ingeniería. Como hemos podido comprobar, existe una gran cantidad de información implícita en los datos que solemos manejar. El descubrimiento de toda esta información y su gestión inteligente es sin duda un claro tema de investigación con fuerte actividad y repercusión en la actualidad. Esta ha sido nuestra intención a la hora de trabajar con FCA, los conjuntos de implicaciones y los operadores de cierre. Pasar de la teoría a la práctica y viceversa ha sido uno de los principales desafíos tanto

de esta tesis como lo es para el propio FCA si se pretende que se convierta en una herramienta fructífera para la representación, gestión y análisis del conocimiento en situaciones reales.

Antes de entrar plenamente en el apartado de conclusiones, queremos indicar la manera de certificar la validez de los resultados obtenidos a lo largo de la tesis. Como hemos podido advertir en los capítulos anteriores, nuestra labor se centra en actuar sobre conjuntos de implicaciones. En ese sentido, para los experimentos realizados hemos contado con unos ficheros de entrada que contenían la información necesaria, y sobre ellos hemos obtenido unos resultados. Ahora bien, la forma de verificar que esos resultados son correctos es la siguiente. En primer lugar y con respecto a los resultados de claves y generadores minimales, se han realizado y corregido numerosos ejercicios en papel intentando buscar casos límites donde la implementación pudiera no ser precisa y se ha comprobado que los resultados obtenidos en papel coincidían exactamente con los calculados por las implementaciones en la máquina. Además, dado que para muchos de los ejemplos probados en los que se llegaban a calcular millones de nodos de un árbol no era posible comprobar si cada uno de esos cálculos era correcto, para el caso concreto de los experimentos relacionados con claves minimales, la validez de los experimentos viene dada al haber cotejado los resultados con aquellos obtenidos sobre un amplio abanico de ficheros utilizados en trabajos anteriores [9,10] donde su validez quedó demostrada. Básicamente, la validez de los ejercicios más grandes se ha extrapolado de los resultados correctos obtenidos para los ejercicios más pequeños. Asimismo, los resultados se corroboran igualmente al alcanzar las mismas soluciones para diferentes métodos cuando cada uno de ellos hace un tratamiento de la información diferente con respecto al otro. En relación a los experimentos con SR conversacionales, dado que los experimentos no alcanzan números tan altos, la validez puede demostrarse de forma más asequible siguiendo un desarrollo explícito en papel.

Y el otro punto que queremos remarcar es el siguiente. A lo largo de todo el proyecto siempre hemos hablado de trabajar sobre sistemas de implicaciones. No obstante, queda fuera del ámbito de esta tesis el procedimiento

mediante el cual se obtiene esos elementos para un sistema de datos. Para ello, encomendamos al avezado lector a visitar [57, 136, 137]. En nuestro caso, nuestro cometido comienza con el tratamiento de la información una vez de ha extraído el conjunto de implicaciones de un sistema concreto.

Aclarados estos puntos, nos encontramos ahora en el último capítulo de la Tesis, en el cual vamos a recopilar la conclusiones más importantes que hemos alcanzado como resultado del trabajo de investigación realizado. Seguidamente, cerrarán el capítulo una serie de tareas con las que continuar a partir de este punto y que se introducen como trabajos futuros.

## Conclusiones

Como hemos mostrado anteriormente, conocer las claves es fundamental en cualquier modelo de datos. En este sentido, hemos presentado una serie de métodos que nos permiten averiguar el conjunto de claves a partir del conjunto de implicaciones y haciendo uso de métodos de razonamiento automatizado, en concreto, la  $SL_{FD}$ . Se ha investigado, pasando desde la teoría a la práctica, los diferentes métodos implementados haciendo uso del paradigma de Tableaux y se ha comprobado como, hasta donde sabemos, los resultados obtenidos superan las aproximaciones anteriores.

Por otro lado, enumerar todos los conjuntos cerrados y sus generadores minimales es un problema muy complejo pero esencial en varias áreas de conocimiento y una oportunidad para mostrar los beneficios de FCA cuando trabajamos para aplicaciones reales. Para abordar esta tarea, se han presentado dos métodos de poda para mejorar el rendimiento de la enumeración de los generadores minimales. Para ello se ha hecho un uso intensivo de la  $SL_{FD}$  sobre conjuntos de implicaciones. Finalmente, se han creado, analizado y probado enfoques diferentes (MinGen, MinGenPr, GenMinGen), mostrando claramente las mejoras alcanzadas por cada uno.

En ambas situaciones, es decir, tanto para claves minimales como para generadores minimales, se han desarrollado los códigos necesarios para poder actuar sobre grandes cantidades de información. No obstante, para resolver problemas reales donde la cantidad de información de entrada sea

considerable, es incuestionable la necesidad de unos recursos enormes tales como los que ha proporcionado el Centro de Supercomputación y Bioinnovación de la Universidad de Málaga; sin ellos habría sido inviable haber podido realizar gran parte de las pruebas. De acuerdo con esto, es absolutamente necesario que las implementaciones tengan en cuenta el correcto uso de recursos de memoria. Incluso para problemas pequeños, la cantidad de memoria que se puede necesitar puede dispararse escandalosamente.

Asimismo, el parecido y la cualidad de independencia que tiene cada nodo del árbol tanto para los métodos de claves minimales como para los de generadores minimales, ponen de manifiesto que la utilización de estrategias paralelas sea la mejor opción para abordar estos problemas. No obstante, el primer punto que queremos aclarar es que el concepto de paralelismo que hemos utilizado se refiere a un paralelismo de tipo *hardware*. Con esto nos referimos a que los beneficios que obtenemos del paralelismo se deben a la utilización de un conjunto de procesadores que se encargan de ir resolviendo cada uno de los subproblemas de forma simultánea. Por lo tanto, no estamos ante un caso de desarrollo de código paralelo desde una visión más purista, sino que es más acertado considerarlo como una aplicación basada en una estrategia *MapReduce* [33].

Para la mayoría de los casos, en relación a claves y generadores minimales, existe un serio inconveniente. En primera instancia es prácticamente imposible, por el momento, prever cuál va a ser la magnitud que va a alcanzar la resolución del problema a la vista de la información de entrada. Esto nos va a obligar a realizar una serie de experimentos previos de forma que podamos aproximar las necesidades que va a tener un determinado experimento.

Para cada una de las implementaciones realizadas, existía la necesidad de establecer criterios que nos permitieran evaluar el rendimiento de las pruebas de forma que pudiéramos comparar unos métodos con otros. En el caso de los experimentos relacionados con claves y generadores minimales, cuando nos planteamos la idea de la comparación de resultados, lo primero que se nos ocurrió fue la medición de los tiempos que necesitaba cada uno de los métodos para obtener los resultados. No obstante, advertimos como



este parámetro está íntimamente ligado a la arquitectura que estemos utilizando para ejecutar el experimento, lo cual hace que el resultado dependa en gran medida de los recursos que se están utilizando y no tanto de la calidad o eficiencia del propio algoritmo. En consecuencia, se oscurecía la utilidad teórica de los resultados obtenidos. Por tanto, se decidió contabilizar magnitud del árbol y la cantidad de resultados redundantes que se obtienen. De esta forma, si alguien hiciera otro método con un código en cualquier otro lenguaje o utilizase recursos *hardware* diferentes que desembocaran en una mejora del tiempo, siempre podríamos atenernos al tamaño del árbol pudiendo defender si realmente es una mejora en el método o en la ejecución debido a la arquitectura.

En cuanto a los SR conversacionales, también son varias las conclusiones a las que hemos llegado. La más importante es que, efectivamente, el tratamiento que realizamos de la información por medio de implicaciones y la  $SL_{FD}$  puede aplicarse con éxito en este campo de conocimiento. Esto ya quedaba patente, como hemos mencionado con anterioridad, por la existencia de multitud de trabajos en la literatura de SR que utilizan conceptos de FCA; nuestro trabajo viene a reforzar este hecho.

Concretamente, presentamos una novedosa aplicación del algoritmo de cierre Cls para afrontar el problema de la sobrecarga de la información que a menudo presentan los SR. Nuestra solución propone un proceso conversacional de selección de atributos por parte del usuario. Este trabajo combina características de sistemas basados en conteo con sistemas basados en conocimiento mediante una gestión inteligente de las implicaciones a través del cierre Cls. Nuestro sistema constituye un marco que puede integrarse en diversos datasets y los resultados siguen siendo admisibles. Esto es, ciertamente, una gran contribución de este trabajo, pues ofrece la posibilidad de aplicarse a aplicaciones en diferentes áreas.

Otra conclusión importante es que existen numerosas técnicas de recomendación. De esta forma, una tarea fundamental en el desarrollo o en el análisis de un SR será identificar qué técnica es la más adecuada para su funcionamiento según el contexto de uso esperado. Del mismo modo, es excepcionalmente difícil abarcar todos los aspectos que involucran a un SR

para evitar los diferentes problemas que pueden aparecer, por tanto, hay que tener presente con qué expectativas queremos que actúe. Además, hay que tener en cuenta que son muy pocos los SR que basan su funcionamiento en una única técnica de recomendación; lo habitual es que sean sistemas híbridos con la intención de poder beneficiarse de las ventajas que ofrecen unas estrategias de recomendación y otras. Nuestro caso es un claro ejemplo; el tipo de SR desarrollado mezcla las estrategias de recomendación basada en contenido, basada en conocimiento y conversacional.

Por otro lado, existen numerosas opciones a la hora de evaluar el funcionamiento de un SR. Esta es una conclusión razonable en tanto en cuanto el número de técnicas diferentes con las que trabajan los SR es igualmente alto. Es fundamental decidir qué métricas son oportunas de aplicar dependiendo del tipo de SR que queramos evaluar, pues evidentemente habrá casos en los que una métrica no tenga cabida para un tipo de SR determinado. Asimismo, es recomendable no pretender obtener valores óptimos en la mayoría de las métricas. Hay que ser realista y darse cuenta de que es extremadamente difícil cumplir plenamente con unas y otras simultáneamente. La clave está en decidir cuál es el cometido principal de nuestro sistema, aplicarle las métricas de evaluación apropiadas y sacar las conclusiones pertinentes dentro de ese marco de actuación.

Finalmente, queremos remarcar que el sistema desarrollado es capaz de ir más allá del ámbito académico o de investigación. Las pruebas realizadas sobre *datasets* reales demuestran la viabilidad y la utilidad que el sistema puede aportar en entornos empresariales. De esta forma, apostamos de nuevo por una eficaz transmisión de conocimiento que acerque la empresa a la academia.

## Trabajos Futuros

Finalmente, nuestros resultados motivan una serie de direcciones importantes para futuras investigaciones.

Respecto a las aportaciones referentes al tema de claves y generadores minimales existen varios aspectos con los que continuar a partir de este

trabajo de investigación. Los iremos introduciendo uno a uno sin perjuicio de que el orden implique una mayor o menos importancia.

En primera instancia es prácticamente imposible prever cuál va a ser la magnitud que va a alcanzar la resolución del problema a la vista de la información de entrada. Esto va a constituir en la mayoría de los casos un serio inconveniente.

Tanto en claves minimales como en generadores minimales hemos podido ver que existe un elemento fundamental en el diseño de las implementaciones paralelas: el valor de corte o BOV. Recordamos que el BOV es el valor a partir del cual la ejecución secuencial del código paralelo termina y se forman los diferentes subproblemas que serán resueltos en paralelo. Nos encontramos entonces con que establecer un valor de corte adecuado se convierte en una tarea realmente compleja. En primera instancia, hay que tener en cuenta la forma de expansión que tiene el *Tableaux* del experimento que estemos realizando y esto sólo lo podemos averiguar empíricamente. En definitiva, hay que buscar estrategias para encontrar un valor de corte tal que el aprovechamiento de los recursos computacionales sea óptimo.

Es necesario avanzar en el diseño de un *benchmark* que tenga en cuenta los diferentes aspectos y la naturaleza de estos problemas y algoritmos de manera que podamos dirigir las búsquedas de forma más eficiente.

Hay que profundizar en el hecho de que aumentar el número de cores para la resolución de un problema no siempre redundará en una mejora del rendimiento. Hay casos en los que aumentar los recursos utilizados puede ser incluso contraproducente como hemos comentado anteriormente.

Nuestra intención futura es aplicar el cálculo de claves y generadores minimales sobre datos reales, en especial a casos donde la información de entrada sea considerable, de forma que podamos valorar el rendimiento alcanzado gracias al paralelismo.

Otra tarea sobre la que continuar el trabajo consiste en investigar cómo realizar un nuevo diseño de los códigos paralelos que nos permita establecer comunicación entre las diferentes resoluciones paralelas de un mismo problema de forma que podamos mejorar en la reducción de los cálculos redundantes. Para el caso concreto del cálculo de los generadores minima-

les, este mismo objetivo nos serviría para obtener una versión paralela del mejor método secuencial estudiado (GenMinGen).

En relación a los SR conversacionales, aparecen dos aspectos interesantes a tener en cuenta en el futuro próximo. En primer lugar, sería muy valioso poder identificar desde un primer momento qué elementos del dataset presentan una importancia superior entre los demás, ya sea por aparecer con mayor frecuencia, ser único, tener relación con un mayor número de elementos del conjunto, etc. En segundo lugar y siguiendo la misma idea, sería sin duda crucial saber qué características del dataset (tamaño, escasez, etc.) son las más influyentes en el rumbo que toman las conversaciones con el usuario. Tener un mayor conocimiento de estos dos factores nos permitiría poder influir de manera positiva en la conversación del sistema con el usuario y de esta forma, deparar en una mejor experiencia de usuario.

Asimismo, hay aspectos de los SR que sería recomendable investigar si sería acertado incluir en el sistema conversacional; tal puede ser el caso de proporcionar explicaciones que justifiquen las recomendaciones que el usuario ha recibido. Este es un aspecto importante en un SR, ya que ayuda a mantener un mayor grado de confianza del usuario en los resultados generados por el sistema [111].

# Índice de figuras

2.1	Retículo de conceptos . . . . .	22
3.1	Ejemplo de Tableaux utilizando el sistema de inferencia $\mathbb{K}$ de Wastl. . . . .	47
3.2	Aplicación de las reglas [sSimp] y [lSimp] en el algoritmo <i>Closure Keys</i> . . . . .	50
3.3	Tableaux completo para los datos del ejemplo 3.3.1. . . . .	51
3.4	Método $SL_{FD}$ . Tableaux de 3 niveles. 37 nodos. 18 hojas. . . . .	52
3.5	Método SST. Tableaux de 2 niveles. 19 nodos. 12 hojas. . . . .	53
3.6	Ejemplo completo de aplicación utilizando el método SST. . . . .	55
3.7	Ejemplo completo de aplicación utilizando el método CK donde se aprecia la mejora obtenida por CK sobre SST en cuando a la reducción del árbol de búsqueda, pasando de 21 nodos en SST a 11 con CK. . . . .	56
3.8	Esquema del funcionamiento en dos etapas del código paralelo. . . . .	57
3.9	Tiempos de ejecución de los métodos paralelos aplicados a problemas grandes (II). . . . .	65
3.10	Tiempos de ejecución de los métodos paralelos aplicados a problemas grandes (II). . . . .	65
4.1	Árbol de búsqueda que genera el algoritmo MinGen para el Ejemplo 4.2.2. . . . .	74
4.2	Árbol de búsqueda que genera el algoritmo MinGen para el Ejemplo 4.2.3. . . . .	78

4.3	Árbol de búsqueda que genera el algoritmo MinGenPr para el Ejemplo 4.2.2. . . . .	80
4.4	Árbol de búsqueda que genera el algoritmo GenMinGen para el Ejemplo 4.2.2. . . . .	82
4.5	Resultados de tiempos de ejecución (a) y número de nodos (b) para el experimento con las implementaciones secuenciales de los métodos. Se ha aplicado escala logarítmica a los ejes con la intención de favorecer la visibilidad de los resultados.	84
4.6	Esquema de funcionamiento de la implementación paralela de los métodos de generadores minimales utilizando el paradigma <i>MapReduce</i> [33]. . . . .	86
6.1	Diagrama de secuencia del funcionamiento de <i>sicumaRS</i> . . .	109
6.2	Diálogo entre el usuario y <i>sicumaRS</i> que muestra el funcionamiento del sistema y la ganancia obtenida por el algoritmo Cls frente al algoritmo clásico del cierre. Fuente [15]. . . . .	111
7.1	Resultado del experimento sobre el <i>dataset</i> MovieLens10M.	124
7.2	Resultado del experimento sobre el <i>dataset</i> Hoteles Costa del Sol. . . . .	128
7.3	Ejemplo de puntos de interés de la ciudad de Roma que muestra el portal Tripadvisor. En la parte inferior de cada uno podemos ver a qué grupo pertenece (Iglesias, Monumentos, Estatuas, Fuentes, ...). . . . .	130
7.4	Resultado del experimento sobre el <i>dataset</i> POIs Mundial. .	133

# Índice de cuadros

2.1	Ejemplo de contexto formal utilizando datos reales del sector hotelero . . . . .	19
2.2	Ejemplo de contexto formal básico . . . . .	22
2.3	Conceptos formales a partir de la representación del contexto formal. . . . .	23
3.1	Tabla de películas . . . . .	41
3.2	Intentos de mejorar los tiempos de ejecución en base a aumentar el número de núcleos disponibles para la implementación paralela. . . . .	60
3.3	Métodos paralelos aplicados a problemas grandes (I) . . . .	62
3.4	Métodos paralelos aplicados a problemas grandes (II) . . . .	64
4.1	Resultados obtenidos por los métodos de generadores minimales en su implementación secuencial. . . . .	84
4.2	Comparación de resultados obtenido por las versión secuencial y paralela del método refalgoritmo:MinGenPr aplicado a problemas grandes. . . . .	88
6.1	Extracto del <i>dataset</i> Auto MPG Data Set de la UCI . . . .	107
6.2	<i>Dataset</i> de restaurantes (extracto) . . . . .	110
6.3	Desglose paso a paso del diálogo entre el usuario y <i>sicumaRS</i> .113	
7.1	Extracto del <i>dataset</i> MovieLens 10M. . . . .	121

7.2	Resultados del diálogo entre <i>sicumaRS</i> y el usuario sobre el <i>dataset</i> MovieLens 10M. . . . .	122
7.3	Hoteles Costa del Sol <i>dataset</i> (extracto) . . . . .	126
7.4	Resultados del diálogo entre <i>sicumaRS</i> y el usuario sobre el <i>dataset</i> Hoteles Costa del Sol . . . . .	127
7.5	Diseases & Symptoms dataset (extract) . . . . .	134



# Bibliografía

- [1] ADOMAVICIUS, G., AND TUZHILIN, A. Toward the next generation of recommender systems: A survey of the state-of-the-art and possible extensions. *IEEE Trans. on Knowl. and Data Eng.* 17, 6 (June 2005), 734–749.
- [2] ADOMAVICIUS, G., AND TUZHILIN, A. In *Recommender Systems Handbook*, F. Ricci, L. Rokach, B. Shapira, and P. B. Kantor, Eds. Springer, 2011, pp. 217–253.
- [3] ARMSTRONG, W. W. Dependency structures of data base relationships. In *IFIP Congress* (1974), pp. 580–583.
- [4] ATENCIA, M., DAVID, J., AND SCHARFFE, F. Keys and pseudo-keys detection for web datasets cleansing and interlinking. In *Knowledge Engineering and Knowledge Management* (Berlin, Heidelberg, 2012), A. ten Teije, J. Völker, S. Handschuh, H. Stuckenschmidt, M. d’Acquin, A. Nikolov, N. Aussenac-Gilles, and N. Hernandez, Eds., Springer Berlin Heidelberg, pp. 144–153.
- [5] ATZENI, P., AND DE ANTONELLIS, V. *Relational Database Theory*. Benjamin-Cummings Publishing Co., Inc., Redwood City, CA, USA, 1993.
- [6] AVAZPOUR, I., PITAKRAT, T., GRUNSKE, L., AND GRUNDY, J. *Dimensions and Metrics for Evaluating Recommendation Systems*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2014, pp. 245–273.

- [7] BEEL, J., LANGER, S., NURNBERGER, A., AND GENZMEHR, M. The impact of demographics (age and gender) and other user-characteristics on evaluating recommender systems. In *TPDL* (2013), vol. 8092 of *Lecture Notes in Computer Science*, Springer, pp. 396–400.
- [8] BELOHLAVEK, R., CORDERO, P., ENCISO, M., MORA, A., AND VYCHODIL, V. Automated prover for attribute dependencies in data with grades. *Int. J. Approx. Reasoning* 70, C (Mar. 2016), 51–67.
- [9] BENITO-PICAZO, F. *Minimal Key-Par. Una versión paralela de los algoritmos de búsqueda de claves minimales basados en Tableaux*. Dpto. Lenguajes y Ciencias de la Computación, Universidad de Málaga, 2013.
- [10] BENITO-PICAZO, F. *Study of minimal keys algorithms based on tableaux methods. Increasing the range of treated problems by means of parallelism and prune strategies based on minimal subsets*. Languages and Computer Science Department, Universidad de Málaga, 2014.
- [11] BENITO-PICAZO, F., CORDERO, P., ENCISO, M., AND MORA, A. Increasing the efficiency of minimal key enumeration methods by means of parallelism. In *ICSOFTEA 2014 - Proceedings of the 9th International Conference on Software Engineering and Applications, Vienna, Austria, 29-31 August, 2014* (2014), pp. 512–517.
- [12] BENITO-PICAZO, F., CORDERO, P., ENCISO, M., AND MORA, A. Keys for the fusion of heterogeneous information. In *Proceedings of the Fifteenth International Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering* (Cádiz, Spain, 2015), pp. 201–211.
- [13] BENITO-PICAZO, F., CORDERO, P., ENCISO, M., AND MORA, A. Closed sets enumeration: a logical approach. In *Proceedings of the Seventeenth International Conference on Computational and Mathe-*

*mathematical Methods in Science and Engineering* (Cádiz, Spain, 2017), pp. 287–292.

- [14] BENITO-PICAZO, F., CORDERO, P., ENCISO, M., AND MORA, A. Reducing the search space by closure and simplification paradigms. *Journal of Supercomputing* 73, 1 (Jan. 2017), 75–87.
- [15] BENITO-PICAZO, F., ENCISO, M., ROSSI, C., AND GUEVARA, A. Enhancing the conversational process by using a logical closure operator in phenotypes implications. *Mathematical Methods in the Applied Sciences* (2017).
- [16] BERTET, K., DEMKO, C., VIAUD, J.-F., AND GUÉRIN, C. Lattices, closures systems and implication bases: A survey of structural aspects and algorithms. *Theoretical Computer Science* (2016).
- [17] BOBADILLA, J., HERNANDO, A., ORTEGA, F., AND BERNAL, J. A framework for collaborative filtering recommender systems. *Expert Syst. Appl.* 38, 12 (Nov. 2011), 14609–14623.
- [18] BOBADILLA, J., ORTEGA, F., HERNANDO, A., AND GUTIÉRREZ, A. Recommender systems survey. *Knowledge-Based Systems* 46, 0 (2013), 109 – 132.
- [19] BONIFACIO, C., BARCHYN, T. E., HUGENHOLTZ, C. H., AND KIENZLE, S. W. Ccdst: A free canadian climate data scraping tool. *Computers and Geosciences* 75 (2015), 13 – 16.
- [20] BORRAS, J., DE LA FLOR, J., PÉREZ, Y., MORENO, A., VALLS, A., ISERN, D., ORELLANA, A., RUSSO, A., AND CLAVÉ, S. A. Sigtur/e-destination: A system for the management of complex tourist regions. R. Law, M. Fuchs, and F. Ricci, Eds., Springer Vienna, pp. 39–50.
- [21] BURKE, R. Evaluating the dynamic properties of recommendation algorithms. In *Proceedings of the Fourth ACM Conference on Recommender Systems* (New York, NY, USA, 2010), RecSys '10, ACM, pp. 225–228.

- [22] CHEN, L., AND PU, P. Hybrid Critiquing-based Recommender Systems. In *Proceedings of the 12th International Conference on Intelligent User Interfaces* (New York, NY, USA, 2007), IUI '07, ACM, pp. 22–31.
- [23] CHEN, L., AND PU, P. Critiquing-based recommenders: Survey and emerging trends. *User Modeling and User-Adapted Interaction* 22, 1-2 (Apr. 2012), 125–150.
- [24] CODD, E. F. A relational model of data for large shared data banks. *Commun. ACM* 13, 6 (1970), 377–387.
- [25] COHEN, E., DATAR, M., FUJIWARA, S., GIONIS, A., INDYK, P., MOTWANI, R., ULLMAN, J. D., AND YANG, C. Finding interesting associations without support pruning. *IEEE Trans. on Knowl. and Data Eng.* 13, 1 (Jan. 2001), 64–78.
- [26] CORDERO, P., ENCISO, M., AND MORA, A. Automated reasoning to infer all minimal keys. In *Proceedings of the Twenty-Third International Joint Conference on Artificial Intelligence* (2013), IJCAI'13, AAAI Press, pp. 817–823.
- [27] CORDERO, P., ENCISO, M., MORA, A., AND DE GUZMÁN, I. P. SLFD logic: Elimination of data redundancy in knowledge representation. In *IBERAMIA 2002: Proceedings of the 8th Ibero-American Conference on AI* (London, UK, 2002), Springer-Verlag, pp. 141–150.
- [28] CORDERO, P., ENCISO, M., MORA, A., AND DE GUZMÁN, I. P. A tableaux-like method to infer all minimal keys. *Logic Journal of the IGPL* 22, 6 (2014), 1019–1044.
- [29] CORDERO, P., ENCISO, M., MORA, A., AND OJEDA-ACIEGO, M. Computing minimal generators from implications: a logic-guided approach. In *Proceedings of The Ninth International Conference on Concept Lattices and Their Applications, Fuengirola (Málaga), Spain, October 11-14, 2012* (2012), pp. 187–198.

- [30] CORDERO, P., ENCISO, M., MORA, A., OJEDA-ACIEGO, M., AND ROSSI, C. Knowledge discovery in social networks by using a logic-based treatment of implications. *Knowledge-Based System 87* (2015), 16–25.
- [31] CRESPO, R. G., MARTÍNEZ, O. S., LOVELLE, J. M. C., GARCÍA-BUSTELO, B. C. P., GAYO, J. E. L., AND DE PABLOS, P. O. Recommendation system based on user interaction data applied to intelligent electronic books. *Computers in Human Behavior 27*, 4 (2011), 1445 – 1449. Social and Humanistic Computing for the Knowledge Society.
- [32] DE CAMPOS, L. M., FERNÁNDEZ-LUNA, J. M., HUETE, J. F., AND RUEDA-MORALES, M. A. Combining content-based and collaborative recommendations: A hybrid approach based on bayesian networks. *International Journal of Approximate Reasoning 51*, 7 (2010), 785 – 799.
- [33] DEAN, J., AND GHEMAWAT, S. Mapreduce: simplified data processing on large clusters. In *OSDI'04: Proceedings of the 6th Conference on Symposium on Operating Systems Design and Implementation* (2004), USENIX Association.
- [34] DU BOUCHER-RYAN, P., AND BRIDGE, D. Collaborative recommending using formal concept analysis. *Knowledge-Based Systems 19*, 5 (2006), 309 – 315. {AI} 2005 {SI}.
- [35] EIRINAKI, M., GAO, J., VARLAMIS, I., AND TSERPES, K. Recommender systems for large-scale social networks: A review of challenges and solutions. *Future Generation Computer Systems 78* (2018), 413 – 418.
- [36] ELMAGARMID, A. K., IPEIROTIS, P. G., AND VERYKIOS, V. S. Duplicate record detection: A survey. *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering 19*, 1 (Jan 2007), 1–16.

- [37] ELMASRI, R., AND NAVATHE, S. *Fundamentals of Database Systems*, 6 ed. Prentice Hall International, 2010.
- [38] ENDRES, D., ADAM, R., GIESE, M. A., AND NOPPENNEY, U. Understanding the semantic structure of human fmri brain recordings with formal concept analysis. In *Proceedings of the 10th International Conference on Formal Concept Analysis* (Berlin, Heidelberg, 2012), ICFCA'12, Springer-Verlag, pp. 96–111.
- [39] FADOUS, R., AND FORSYTH, J. Finding candidate keys for relational data bases. In *SIGMOD Conference* (1975), W. F. King, Ed., ACM, pp. 203–210.
- [40] FAYYAD, U., PIATETSKY-SHAPIO, G., AND SMYTH, P. From data mining to knowledge discovery in databases. *AI Magazine* (1996), 37–54.
- [41] FEIL, S., KRETZER, M., WERDER, K., AND MAEDCHE, A. Using gamification to tackle the cold-start problem in recommender systems. In *Proceedings of the 19th ACM Conference on Computer Supported Cooperative Work and Social Computing Companion* (New York, NY, USA, 2016), CSCW '16 Companion, ACM, pp. 253–256.
- [42] FRIEDMAN, A., KNIJNENBURG, B. P., VANHECKE, K., MARTENS, L., AND BERKOVSKY, S. *Privacy Aspects of Recommender Systems*. Springer US, Boston, MA, 2015, pp. 649–688.
- [43] GANTER, B., AND WILLE, R. *Formal Concept Analysis: Mathematical Foundations*, 1st ed. Springer-Verlag New York, Inc., Secaucus, NJ, USA, 1997.
- [44] GIANNELLA, C., AND WYSS, C. Finding minimal keys in a relation instance, 1999.
- [45] GOH, T. N. An information management paradigm for statistical experiments. *Quality and Reliability Eng. Int.* 26, 5 (2010), 487–494.

- [46] GRAS, B., BRUN, A., AND BOYER, A. Identifying grey sheep users in collaborative filtering: A distribution-based technique. In *Proceedings of the 2016 Conference on User Modeling Adaptation and Personalization* (New York, NY, USA, 2016), UMAP '16, ACM, pp. 17–26.
- [47] GRIOL, D., AND MOLINA, J. M. Building multi-domain conversational systems from single domain resources. *Neurocomputing* 271 (2018), 59 – 69.
- [48] GUIGUES, J. L., AND DUQUENNE, V. Familles minimales d'implications informatives résultant d'un tableau de données binaires. *Mathématiques et Sciences Humaines* 95 (1986), 5–18.
- [49] GUNAWARDANA, A., AND SHANI, G. A survey of accuracy evaluation metrics of recommendation tasks. *J. Mach. Learn. Res.* 10 (Dec. 2009), 2935–2962.
- [50] GUNAWARDANA, A., AND SHANI, G. *Evaluating Recommender Systems*. Springer US, Boston, MA, 2015, pp. 265–308.
- [51] GUO, G. Resolving data sparsity and cold start in recommender systems. In *Proceedings of the 20th International Conference on User Modeling, Adaptation, and Personalization* (Berlin, Heidelberg, 2012), UMAP'12, Springer-Verlag, pp. 361–364.
- [52] HAMROUNI, T., VALTCHEV, P., YAHIA, S. B., AND NGUIFO, E. M. About the Lossless Reduction of the Minimal Generator. *Lecture Notes in Computer Science* 4390 (2007), 130–150.
- [53] HARPER, F. M., AND KONSTAN, J. A. The movielens datasets: History and context. *ACM Trans. Interact. Intell. Syst.* 5, 4 (Jan. 2016), 19:1–19:19.
- [54] HERLOCKER, J. L., KONSTAN, J. A., TERVEEN, L. G., AND RIEDL, J. T. Evaluating collaborative filtering recommender systems. *ACM Trans. Inf. Syst.* 22, 1 (Jan. 2004), 5–53.

- [55] HERNÁNDEZ DEL OLMO, F., AND GAUDIOSO, E. Evaluation of recommender systems: A new approach. *Expert Syst. Appl.* 35, 3 (Oct. 2008), 790–804.
- [56] HILL, W., STEAD, L., ROSENSTEIN, M., AND FURNAS, G. Recommending and evaluating choices in a virtual community of use. In *Proceedings of the SIGCHI Conference on Human Factors in Computing Systems* (New York, NY, USA, 1995), CHI '95, ACM Press/Addison-Wesley Publishing Co., pp. 194–201.
- [57] HUHTALA, Y., KARKKAINEN, J., PORKKA, P., AND TOIVONEN, H. Tane: An efficient algorithm for discovering functional and approximate dependencies. *Comput. J.* 42, 2 (1999), 100–111.
- [58] IBARAKI, T., KOGAN, A., AND MAKINO, K. Functional dependencies in horn theories. *Artificial Intelligence* 108, 1 (1999), 1 – 30.
- [59] ISINKAYE, F., FOLAJIMI, Y., AND OJOKOH, B. Recommendation systems: Principles, methods and evaluation. *Egyptian Informatics Journal* 16, 3 (2015), 261 – 273.
- [60] JANNACH, D., ZANKER, M., AND FUCHS, M. Constraint-Based Recommendation in Tourism: A Multiperspective Case Study. *Information Technology & Tourism* 11, 2 (2009), 139–155.
- [61] JOHANSSON, L., EPITROPOU, V., KARATZAS, K., KARPPINEN, A., WANNER, L., VROCHIDIS, S., BASSOUKOS, A., KUKKONEN, J., AND KOMPATSIARIS, I. Fusion of meteorological and air quality data extracted from the web for personalized environmental information services. *Environmental Modelling and Software* 64 (2015), 143 – 155.
- [62] KARNAUGH, M. The map method for synthesis of combinational logic circuits. *American Institute of Electrical Engineers, Part I: Communication and Electronics, Transactions of the* 72, 5 (Nov. 1953), 593–599.



- [63] KAYTOUE, M., KUZNETSOV, S. O., NAPOLI, A., AND DUPLESSIS, S. Mining gene expression data with pattern structures in formal concept analysis. *Information Sciences* 181, 10 (2011), 1989 – 2001. Special Issue on Information Engineering Applications Based on Lattices.
- [64] KEMPER, A., AND MOERKOTTE, G. Query optimization in object bases: Exploiting relational techniques. In *Query Processing for Advanced Database Systems, Dagstuhl*. Morgan Kaufmann, 1991, pp. 63–98.
- [65] KONSTAN, J. A., MILLER, B. N., MALTZ, D., HERLOCKER, J. L., GORDON, L. R., AND RIEDL, J. Grouplens: Applying collaborative filtering to usenet news. *Commun. ACM* 40, 3 (Mar. 1997), 77–87.
- [66] KRAJCA, P., OUTRATA, J., AND VYCHODIL, V. Parallel recursive algorithm for fca. In *6th Int. Conf. on Concept Lattices and Their Applications (CLA)* (2008), vol. 433, CEUR WS, pp. 71–82. Olomouc (ZC).
- [67] KUZNETSOV, S., AND OBIEDKOV, S. Comparing performance of algorithms for generating concept lattices. *Journal of Experimental and Theoretical Artificial Intelligence* 14 (2002), 189–216.
- [68] LAMPROPOULOS, A. S., LAMPROPOULOU, P. S., AND TSIHRINTZIS, G. A. A cascade-hybrid music recommender system for mobile services based on musical genre classification and personality diagnosis. *Multimedia Tools Appl.* 59, 1 (2012), 241–258.
- [69] LEE, S., AND CHOI, J. Enhancing user experience with conversational agent for movie recommendation: Effects of self-disclosure and reciprocity. *International Journal of Human-Computer Studies* 103 (2017), 95 – 105.
- [70] LEIVA, J. L., ENCISO, M., ROSSI, C., CORDERO, P., MORA, A., AND GUEVARA, A. Context-aware recommendation using fuzzy for-

- mal concept analysis. In *ICSOFT* (2013), J. Cordeiro, D. A. Marca, and M. van Sinderen, Eds., SciTePress, pp. 617–623.
- [71] LEIVA, J. L., ENCISO, M., ROSSI, C., CORDERO, P., MORA, A., AND GUEVARA, A. Improving recommender systems with simplification logic to manage implications with grades. In *Software Technologies - 8th International Joint Conference, ICSOFT 2013, Reykjavik, Iceland, July 29-31, 2013, Revised Selected Papers* (2013), pp. 290–305.
  - [72] LÈVY, G., AND BAKLOUTI, F. A distributed version version of the ganter algorithm for general galois lattices. In *3rd. Int. Conf. on Concept Lattices and Their Applications (CLA)* (2005), vol. 162, CEUR WS, pp. 207–221. Olomouc (ZC).
  - [73] LINDEN, G., SMITH, B., AND YORK, J. Amazon.com recommendations: Item-to-item collaborative filtering. *IEEE Internet Computing* 7 (2003), 76–80.
  - [74] LOPS, P., DE GEMMIS, M., AND SEMERARO, G. Content-based recommender systems: State of the art and trends. In *Recommender Systems Handbook*, F. Ricci, L. Rokach, B. Shapira, and P. B. Kantor, Eds. Springer, 2011, pp. 73–105.
  - [75] LUCCHESI, C. L., AND OSBORN, S. L. Candidate keys for relations. *J. Comput. Syst. Sci.* 17, 2 (1978), 270–279.
  - [76] MAIER, D. *The Theory of Relational Databases*. Computer Science Press, Rockville, 1983.
  - [77] MAIER, D. *Theory of Relational Databases*. Computer Science Pr, 1983.
  - [78] MANDL, M., FELFERNIG, A., TEPPAN, E., AND SCHUBERT, M. Consumer decision making in knowledge-based recommendation. *Journal of Intelligent Information Systems* 37 (2011), 1–22.

- [79] MANOLOPOULOS, Y., THEODORIDIS, Y., AND TSOTRAS, V. J. *Advanced Database Indexing*, vol. 17 of *Advances in Database Systems*. Kluwer, 1999.
- [80] MCSHERRY, D. Minimizing dialog length in interactive case-based reasoning. In *Procs of the 17th Int Joint Conf on AI, IJCAI, Seattle, Washington, USA, August 4-10, 2001* (2001), pp. 993–998.
- [81] MIAO, X. Big data and smart grid. In *Proceedings of the 2014 International Conference on Big Data Science and Computing* (New York, NY, USA, 2014), BigDataScience '14, ACM, pp. 26:1–26:2.
- [82] MIMOUNI, N., NAZARENKO, A., AND SALOTTI, S. *A Conceptual Approach for Relational IR: Application to Legal Collections*. Springer International Publishing, Cham, 2015, pp. 303–318.
- [83] MISSAOUI, R., NOURINE, L., AND RENAUD, Y. An inference system for exhaustive generation of mixed and purely negative implications from purely positive ones. In *Proceedings of the 7th International Conference on Concept Lattices and Their Applications, Sevilla, Spain, October 19-21, 2010* (2010), pp. 271–282.
- [84] MISSAOUI, R., NOURINE, L., AND RENAUD, Y. Computing implications with negation from a formal context. *Fundam. Inf.* 115, 4 (Dec. 2012), 357–375.
- [85] MITCHELL, T. M. *Machine Learning*, 1 ed. McGraw-Hill, Inc., New York, NY, USA, 1997.
- [86] MORA, A., CORDERO, P., ENCISO, M., FORTES, I., AND AGUILERA, G. Closure via functional dependence simplification. *Int. J. Comput. Math.* 89, 4 (2012), 510–526.
- [87] MORA, Á., ENCISO, M., CORDERO, P., AND PÉREZ DE GUZMÁN, I. *An Efficient Preprocessing Transformation for Functional Dependencies Sets Based on the Substitution Paradigm*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2004, pp. 136–146.

- [88] MORGAN, C. G. An automated theorem prover for relational logic (abstract). In *Workshop Theorem Proving with Analytic Tableaux and Related Methods, Lautenbach. Universität Karlsruhe, Fakultät für Informatik, Institut für Logik, Komplexität und Deduktionssysteme, Interner Bericht 8/92, March 18-20, 1992* (1992), pp. 56–58.
- [89] MOTAMENY, S., VERSMOLD, B., AND SCHMUTZLER, R. Formal concept analysis for the identification of combinatorial biomarkers in breast cancer. In *Proceedings of the 6th International Conference on Formal Concept Analysis* (Berlin, Heidelberg, 2008), ICFCA'08, Springer-Verlag, pp. 229–240.
- [90] NAGLER, T., AND CZADO, C. Evading the curse of dimensionality in nonparametric density estimation with simplified vine copulas. *Journal of Multivariate Analysis* 151 (2016), 69 – 89.
- [91] NIEMELÄ, I. Logic programs with stable model semantics as a constraint programming paradigm. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence* 25, 3-4 (Feb. 1999), 241–273.
- [92] NISHIO, N., MUTOH, A., AND INUZUKA, N. On computing minimal generators in multi-relational data mining with respect to 0-subsumption. *CEUR Workshop Proceedings* 975 (2012), 50–55.
- [93] ORE, O. Galois connections. *Transactions of the American Mathematical Society* 55 (1944), 493–513.
- [94] PAREDAENS, J., BRA, P., GYSSENS, M., AND GUCHT, D. V., Eds. *The structure of the relational database model*. EATCS Monographs on Theoretical Computer Science, 1989.
- [95] PAREDAENS, J., BRA, P., GYSSENS, M., AND GUCHT, D. V., Eds. *The structure of the relational database model*. EATCS Monographs on Theoretical Computer Science, 1989.

- [96] PERNELLE, N., SAÏS, F., AND SYMEONIDOU, D. An automatic key discovery approach for data linking. *Web Semantics: Science, Services and Agents on the WWW 23* (2013), 16–30.
- [97] POELMANS, J., IGNATOV, D. I., KUZNETSOV, S. O., AND DEDENE, G. Formal concept analysis in knowledge processing: A survey on applications. *Expert Systems with Applications 40*, 16 (2013), 6538 – 6560.
- [98] PORCEL, C., TEJEDA-LORENTE, A., MARTÍNEZ, M. A., AND HERRERA-VIEDMA, E. A hybrid recommender system for the selective dissemination of research resources in a technology transfer office. *Inf. Sci. 184*, 1 (Feb. 2012), 1–19.
- [99] PRISS, U. Formal concept analysis in information science. *Annual Rev. Info. Sci. & Technol. 40*, 1 (Dec. 2006), 521–543.
- [100] QU, K., ZHAI, Y., LIANG, J., AND CHEN, M. Study of decision implications based on formal concept analysis. *International Journal of General Systems 36*, 2 (2007), 147–156.
- [101] REDA, A., PARK, Y., TIWARI, M., POSSE, C., AND SHAH, S. Metaphor: a system for related search recommendations. In *CIKM* (2012), X. wen Chen, G. Lebanon, H. Wang, and M. J. Zaki, Eds., ACM, pp. 664–673.
- [102] RESNICK, P., AND VARIAN, H. R. Recommender systems. *Commun. ACM 40*, 3 (Mar. 1997), 56–58.
- [103] RISCH, V., AND SCHWIND, C. Tableaux-based theorem proving and non-standard reasoning. In *Workshop Theorem Proving with Analytic Tableaux and Related Methods, Lautenbach. Universität Karlsruhe, Fakultät für Informatik, Institut für Logik, Komplexität und Deduktionssysteme, Interner Bericht 8/92, March 18-20, 1992* (1992), pp. 76–78.

- [104] SAEIDIAN, H., AND SPENCER, T. An efficient algorithm to compute the candidate keys of a relational database schema. *Comput. J.* 39, 2 (1996), 124–132.
- [105] SALI, A. *Minimal Keys in Higher-Order Datamodels*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2004, pp. 242–251.
- [106] SALIMI, A., ZIAH, M., AMIRI, A., ZADEH, M. H., KARIMPOULI, S., AND MORADKHANI, M. Using a feature subset selection method and support vector machine to address curse of dimensionality and redundancy in hyperion hyperspectral data classification. *The Egyptian Journal of Remote Sensing and Space Science* (2017).
- [107] SASSI, I. B., MELLOULI, S., AND YAHIA, S. B. Context-aware recommender systems in mobile environment: On the road of future research. *Information Systems* 72 (2017), 27 – 61.
- [108] SENATORE, S., AND PASI, G. Lattice navigation for collaborative filtering by means of (fuzzy) formal concept analysis. In *Proceedings of the 28th Annual ACM Symposium on Applied Computing* (New York, NY, USA, 2013), SAC '13, ACM, pp. 920–926.
- [109] SHAH KHUSRO, ZAFAR ALI, I. U. Recommender systems: Issues, challenges, and research opportunities. In *Information Science and Applications (ICISA) 2016* (2016), vol. 376, IEEE, pp. 1179–1189.
- [110] SHANI, G., AND GUNAWARDANA, A. *Evaluating Recommendation Systems*. Springer US, Boston, MA, 2011, pp. 257–297.
- [111] SHARMA, R., AND RAY, S. Explanations in recommender systems: An overview. *Int. J. Bus. Inf. Syst.* 23, 2 (Jan. 2016), 248–262.
- [112] SHIRUDE, S. B., AND KOLHE, S. R. *Machine Learning Using K-Nearest Neighbor for Library Resources Classification in Agent-Based Library Recommender System*. Springer Singapore, Singapore, 2016, pp. 17–29.

- [113] SIMSION, G. C., AND WITT, G. C. *Data modeling essentials*, 3rd ed. Amsterdam; Boston, 2005.
- [114] SISMANIS, Y., BROWN, P., HAAS, P. J., AND REINWALD, B. Gordian: efficient and scalable discovery of composite keys. In *In Proc. International Conference on Very Large Data Bases (VLDB (2006)*, pp. 691–702.
- [115] SNELTING, G., AND TIP, F. Reengineering class hierarchies using concept analysis. *SIGSOFT Softw. Eng. Notes* 23, 6 (Nov. 1998), 99–110.
- [116] SON, J., AND KIM, S. B. Academic paper recommender system using multilevel simultaneous citation networks. *Decision Support Systems* 105 (2018), 24 – 33.
- [117] SON, L. H. Dealing with the new user cold-start problem in recommender systems: A comparative review. *Information Systems* 58 (2016), 87 – 104.
- [118] SRIDHAR, R., AND IYENGAR, S. S. Efficient parallel algorithms for functional dependency manipulations. In *Procs of the 2nd Int. Symposium on Databases in Parallel and Distributed Systems* (1990), DPDS '90, pp. 126–137.
- [119] STUMME, G. *Efficient Data Mining Based on Formal Concept Analysis*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2002, pp. 534–546.
- [120] SUN, X. *Construction Data Mining Information Management System Based on FCA and Ontology*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2012, pp. 19–24.
- [121] SUNDARESAN, N. Recommender systems at the long tail. In *Proceedings of the Fifth ACM Conference on Recommender Systems* (New York, NY, USA, 2011), RecSys '11, ACM, pp. 1–6.

- [122] TIROSHI, A., KUFLIK, T., KAY, J., AND KUMMERFELD, B. Recommender systems and the social web. In *UMAP Workshops* (2011), L. Ardissono and T. Kuflik, Eds., vol. 7138 of *Lecture Notes in Computer Science*, Springer, pp. 60–70.
- [123] TRABELSI, W., WILSON, N., BRIDGE, D., AND RICCI, F. Preference Dominance Reasoning for Conversational Recommender Systems: a Comparison Between a Comparative Preferences and a Sum of Weights Approach. *International Journal on Artificial Intelligence Tools* 20, 04 (2011), 591–616.
- [124] TRABELSI, W., WILSON, N., BRIDGE, D. G., AND RICCI, F. Preference dominance reasoning for conversational recommender systems: a comparison between a comparative preferences and a sum of weights approach. *International Journal on Artificial Intelligence Tools* 20, 4 (2011), 591–616.
- [125] VALTCHEV, P., AND DUQUENNE, V. Towards scalable divide-and-conquer methods for computing concepts and implications. In *4th Int. Conf. Journées de l'Informatique Messine (JIM03): Knowledge Discovery and Discrete Mathematics. Metz (FR)* (2003), pp. 3–14.
- [126] VALTCHEV, P., AND DUQUENNE, V. On the merge of factor canonical bases. In *International Conference on Formal Concept Analysis (ICFCA)* (2008), vol. 4933 of *Lecture Notes in Computer Science*, Springer, pp. 182–198.
- [127] WANG, J., AND HE, K. Towards representing fca-based ontologies in semantic web rule language. In *The Sixth IEEE International Conference on Computer and Information Technology (CIT'06)* (2006), IEEE Computer Society, p. 41.
- [128] WASTL, R. Linear derivations for keys of a database relation schema. *Journal of Universal Computer Science* 4, 11 (1998), 883–897.



- [129] WASTL, R. On the number of keys of a relational database schema. *Journal of Universal Computer Science* 4, 5 (1998), 547–559.
- [130] WILLE, R. *Restructuring Lattice Theory: An Approach Based on Hierarchies of Concepts*. Springer Netherlands, Dordrecht, 1982, pp. 445–470.
- [131] WILLE, R. *Formal Concept Analysis as Mathematical Theory of Concepts and Concept Hierarchies*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2005, pp. 1–33.
- [132] WILLE, R. *Formal Concept Analysis as Applied Lattice Theory*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2008, pp. 42–67.
- [133] WITTEN, I., FRANK, E., AND HALL, M. *Data Mining: Practical Machine Learning Tools and Techniques: Practical Machine Learning Tools and Techniques*. Morgan Kaufmann, 2011.
- [134] WORLAND, P. B. An efficient algorithm for 3nf determination. *Information Sciences* 167, 1 (2004), 177 – 192.
- [135] YANG, Z., AND CAI, Z. Detecting abnormal profiles in collaborative filtering recommender systems. *Journal of Intelligent Information Systems* (2016), 1–20.
- [136] YAO, H., HAMILTON, H. J., AND BUTZ, C. J. Fd mine: Discovering functional dependencies in a database using equivalences. In *ICDM* (2002), IEEE Computer Society, pp. 729–732.
- [137] YEVTUSHENKO, S., TANE, J., KAISER, T. B., OBIEDKOV, S., HERETH, J., AND REPPE, H. Conexp - the concept explorer.
- [138] YU, C. T., AND JOHNSON, D. T. On the complexity of finding the set of candidate keys for a given set of functional dependencies. *Inf. Process. Lett.* 5, 4 (1976), 100–101.
- [139] YU, K. A Scalable and Accurate Online Feature Selection for Big Data.

- [140] ZHANG, F., GONG, T., LEE, V. E., ZHAO, G., RONG, C., AND QU, G. Fast algorithms to evaluate collaborative filtering recommender systems. *Knowledge-Based Systems 96* (2016), 96 – 103.
- [141] ZHANG, X.-L., LEE, T. M. D., AND PITSILIS, G. Securing recommender systems against shilling attacks using social-based clustering. *Journal of Computer Science and Technology 28*, 4 (2013), 616–624.
- [142] ZHANG, Y. Determining all candidate keys based on karnaugh map. *IEEE International Conference on Information Management, Innovation Management and Industrial Engineering 04* (2009), 226–229.
- [143] ZHOU, W., WEN, J., GAO, M., LIU, L., CAI, H., AND WANG, X. *A Shilling Attack Detection Method Based on SVM and Target Item Analysis in Collaborative Filtering Recommender Systems*. Springer International Publishing, Cham, 2015, pp. 751–763.
- [144] ZOBEL, J. How reliable are the results of large-scale information retrieval experiments? In *Proceedings of the 21st Annual International ACM SIGIR Conference on Research and Development in Information Retrieval* (New York, NY, USA, 1998), SIGIR '98, ACM, pp. 307–314.

