Universidade Estadual de Campinas
Faculdade de Engenharia Elétrica
e de Computação

EE400 - Trabalho 3

Métodos da Engenharia Elétrica

Aluno: Fernando Teodoro de Cillo
RA: 197029

Campinas
Julho de 2021

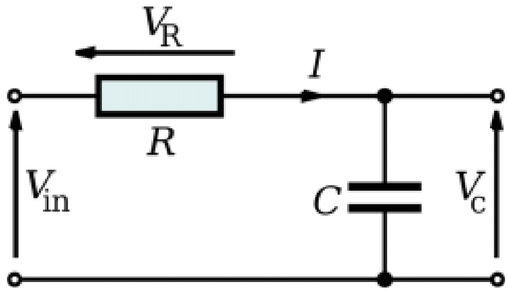


Figura 1: Circuito RC série

1 Introdução:

O estudo de circuitos RC série é importante no contexto de análise de sinais, pois esse tipo de circuito pode ser utilizado como um filtro passa-baixa [3], eliminando frequências altas do sinal. Esse tipo de aplicação também é interessante para música, e o filtro passa-baixa foi uma das primeiras aplicações da eletrônica analógica na música eletrônica [1].

Além disso, muitos circuitos elétricos e eletrônicos acarretam no surgimento de capacitâncias parasitas, que podem se comportar como circuitos RC série. Essa capacitância faz surgir uma corrente de fuga e pode apagar a informação armazenada em uma célula de memória [4], entre outras possíveis consequências, e deve, portanto, ser estudada e entendida.

2 Encontrando Vc(t) em funcão de Vin(t) com equações diferenciais:

O primeiro passo para entender o funcionamento de um circuito RC série, como o da figura 1, é encontrar a tensão do capacitor em função da tensão de entrada, porque isso nos permite entender quais as consequências da capacitância parasita ou o funcionamento de um filtro passa-baixa. Dessa forma, encontraremos a tensão Vc(t) do capacitor utilizando equações diferenciais.

Analisando a figura 1 vemos que a corrente I que passa pelo resistor R também passa pelo capacitor [2] e, por isso, temos:

$$I = I_R = I_C$$

$$I = \frac{V_R}{R} = C\frac{dVc(t)}{dt}$$

$$\frac{1}{RC} \cdot dt = \frac{1}{V_R} \cdot dVc(t)$$

Pela Lei de Kirchhoff das Tensões [2], encontramos a tensão no resistor $V_R = Vin(t) - Vc(t)$, que nos dá

$$\frac{1}{RC} \cdot dt = \frac{1}{Vin(t) - Vc(t)} \cdot dVc(t)$$

Reorganizando os termos,

$$\frac{1}{Vc(t) - Vin(t)} \cdot dVc(t) = -\frac{1}{RC} \cdot dt \tag{1}$$

Integrando os dois lados, obtemos

$$\int \frac{1}{Vc(t) - Vin(t)} \cdot dVc(t) = -\frac{1}{RC} \cdot \int dt$$

, cuja solução é

$$ln(Vc(t) - Vin(t)) = -\frac{t}{RC} + K \tag{2}$$

Com a condição inicial $Vc(0) = 0$ [2], obtemos $K = ln(-Vin(t))$. Substituindo na equação (2), temos

$$ln(Vc(t) - Vin(t)) = -\frac{t}{RC} + ln(-Vin(t))$$

$$ln\left(\frac{Vc(t) - Vin(t)}{-Vin(t)}\right) = -\frac{t}{RC}$$

$$\frac{Vc(t) - Vin(t)}{-Vin(t)} = e^{-t/RC}$$

$$\frac{Vc(t)}{-Vin(t)} + 1 = e^{-t/RC}$$

$$\frac{Vc(t)}{-Vin(t)} = -1 + e^{-t/RC}$$

$$Vc(t) = -Vin(t)(-1 + e^{-t/RC})$$

$$Vc(t) = Vin(t)(1 - e^{-t/RC}) \tag{3}$$

3 Ganho de tensão no domínio da frequência:

O ganho de tensão mostra a capacidade de um circuito de amplificar (ou reduzir) o valor de tensão da sua entrada na saída. Pela equação (3) encontramos o ganho de tensão no domínio do tempo [2].

$$g(t) = \frac{|Vc(t)|}{|Vin(t)|}$$

$$g(t) = \frac{|Vin(t)(1 - e^{-t/RC}|)}{|Vin(t)|}$$

$$g(t) = (1 - e^{-t/RC}) \tag{4}$$

Podemos também encontrar o ganho no domínio das frequências, g(w), analisando as impedâncias complexas do circuito [2].

Pela primeira Lei de Ohm, encontramos a corrente I:

$$V = Z \cdot I$$

$$I = \frac{Vin}{Zeq}$$

, em que $Zeq = Z_R + Z_C = R + 1/jwC$, que nos leva a

$$I = \frac{Vin}{R + 1/jwC}$$

De forma semelhante, a tensão do capacitor é dada por:

$$Vc = Zc \cdot I$$

$$Vc = \frac{1}{jwC} \cdot \frac{Vin}{R + 1/jwC}$$

$$Vc = \frac{Vin}{jwRC + 1} \tag{5}$$

Com os resultados da equação (5) podemos calcular g(w) por

$$g(w) = \frac{|Vc|}{|Vin|}$$

$$g(w) = \left|\frac{Vin}{jwRC + 1}\right| \cdot \frac{1}{|Vin|}$$

$$g(w) = \left|\frac{1}{jwRC + 1}\right|$$

$$g(w) = \frac{1}{\sqrt{1 + (jwRC)^2}} \tag{6}$$

É interessante notar que o ganho g(w) encontrado na equação (6) também pode ser calculado aplicando a transforamda de Laplace [5] na equação 4.

Como o circuito RC série é utilizado como filtro passa-baixa, espera-se que o seu ganho varie com a frequência e seja nulo em altas frequências. Isso é comprovado pela equação (6), que tende a 0 quando $w \to \infty$. Além disso, a equação (6) também mostra uma dependência dos termos R e C.

O produto R*C é conhecido como **constante de tempo** τ [2], e está ligado com o tempo de carga e descarga do capacitor. Por estar relacionado a esse processo, τ também determina a **frequência de corte** [2] do circuito, ou seja, a frequência limite que o filtro permite passar. Podemos ver nas figuras 2 e 3 o ganho de tensão g(w) do circuito em função da frequência angular w.

As figuras 2 e 3 mostram também que o que determina o comportamento do circuito é o produto $\tau = R * C$, pois a variação de R e de C independentemente nos dá as mesmas curvas. Por esse motivo faz sentido pensar na grandeza

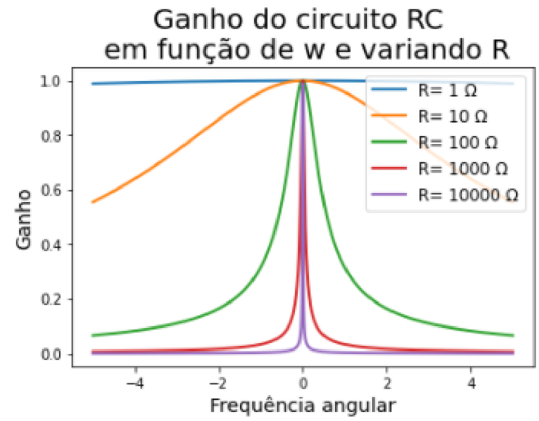


Figura 2: ganho variando R com C=0.5F

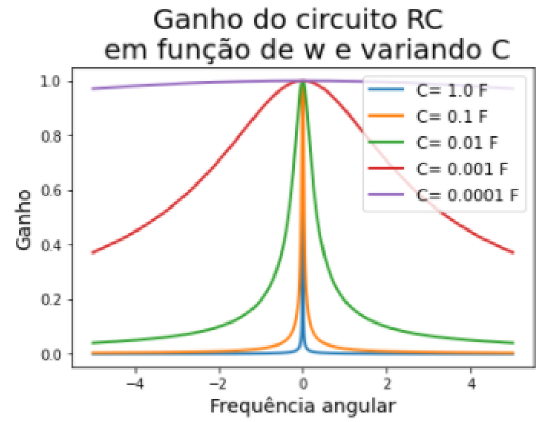


Figura 3: ganho variando C com R= 500Ω

τ, apesar de ela não ser vista no circuito real da figura 1. Quanto maior o valor de τ, menor é a largura da banda que o filtro permite a passagem.

3.1 Frequência de corte:

A frequência de corte é definida [2] como o ponto em que o ganho do circuito vale $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Nesse caso, usando a equação (6), chegamos à equação (7).

$$g(w) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 + (w_C RC)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$1 + (w_C RC)^2 = 2$$

$$(w_C RC)^2 = 1$$

$$w_C^2 = \frac{1}{R^2 C^2}$$

$$w_C = \frac{1}{RC} = \frac{1}{\tau} \tag{7}$$

4 Onda quadrada na entrada:

Agora que temos uma ideia de como se comporta a tensão de saída Vc e o ganho de tensão do circuito, podemos testar como uma entrada específica interage com o circuito RC série. Analisaremos uma onda quadrada com período $T = 2\pi$, como mostrada na figura 4. O fenômeno de Gibbs aparece na figura pois a onda foi formada a partir de uma aproximação por série de Fourier com 1000 elementos.

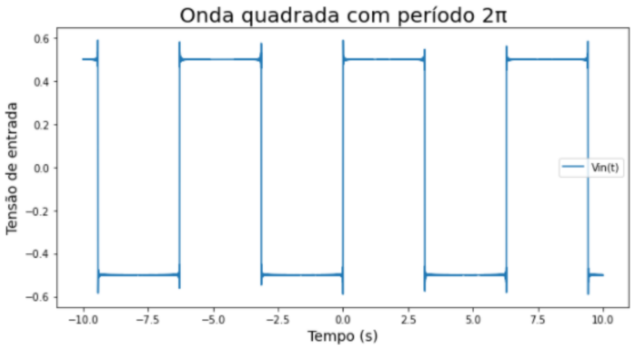


Figura 4: Onda quadrada de período T=2π como entrada

4.1 Cálculo da série de Fourier:

Para obter a figura 4 foi necessário calcular a Série de Fourier que aproxima uma onda quadrada de amplitude unitária, $A = 1$, e período $T = 2\pi$. Seguem os cálculos [5], que culminam na expressão da equação (13), que foi utilizada no código Python que gerou a figura 4.

Como a onda é quadrada, podemos descrever a função como:

f(t) = 1, para 0 < t ≤ T/2
e f(t) = 0, para T/2 < t ≤ T

A Série de Fourier decompõe a função ímpar ($a_n = 0$) f(t) em um somatório de exponenciais complexas, descrito pela equação (8) [5].

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot e^{jwnt} \tag{8}$$

O temo b_n, por sua vez, é descrito pela equação (9).

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t) \cdot e^{-jwnt} \tag{9}$$

Resolvendo a integral, obtemos

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(t) \cdot e^{-jwnt} + \frac{2}{T}\int_{T/2}^{T} f(t) \cdot e^{-jwnt}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} 1 \cdot e^{-jwnt} + \frac{2}{T}\int_{T/2}^{T} 0 \cdot e^{-jwnt}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} e^{-jwnt}$$

$$b_n = \left[\frac{2}{-jwnT} e^{-jwnt}\right]_0^{T/2}$$

$$b_n = \frac{2}{-jwnT}[e^{-jwnT/2} - e^0] \tag{10}$$

Substituindo $T = \frac{2\pi}{w}$ na equação (10), chegamos à equação (11).

$$b_n = \frac{1}{-jn\pi}[e^{-jn\pi} - 1] \tag{11}$$

Aplicando a fórmula encontrada para b_n da equação (11) no somatório da equação (8), obtêm-se a equação (12).

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{-jn\pi}[e^{-jn\pi} - 1] \cdot e^{jwnt} \tag{12}$$

4.2 Comportamento das tensões no circuito:

Para obter a tensão do capacitor, então, precisamos apenas aplicar o ganho da equação (6) elemento a elemento na função f(t).

$$Vc(t) = \sum_{n=0}^{\infty} g(w) \frac{1}{-jn\pi}[e^{-jn\pi} - 1] \cdot e^{jwnt}$$

$$Vc(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + (jwRC)^2}} \frac{1}{-jn\pi}[e^{-jn\pi} - 1] \cdot e^{jwnt}$$

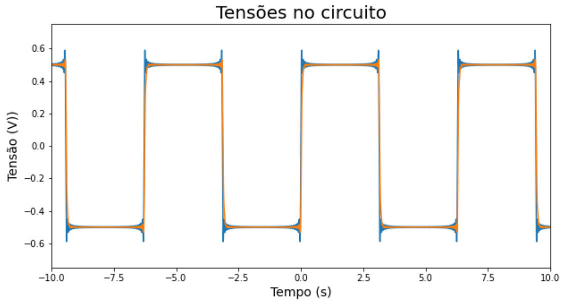
Lembrando que trocamos w por $nw = n \cdot 1$, chegamos à equação (13).

$$Vc(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + (jnRC)^2}} \cdot \frac{1}{-jn\pi}[e^{-jn\pi} - 1] \cdot e^{jwnt} \tag{13}$$

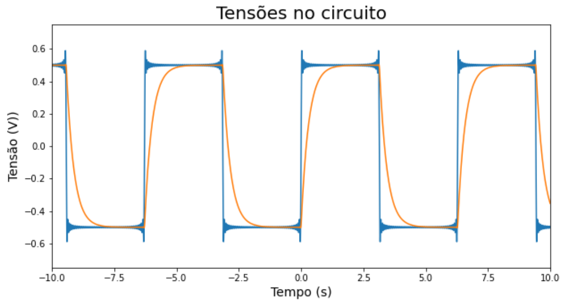
A partir da equação (13), é possível, utilizando um código em Python, chegar à figura 5. Vemos na figura 5 que, para valores muito baixos da constante de tempo τ (figura 5a), a tensão do capacitor tem a mesma forma de onda da tensão de entrada. Isso significa que o processo de carga/descarga do capacitor pode ser considerado instantâneo [2].

Quando $\tau = 0.3$ (figura 5b), a tensão do capacitor cresce e decresce exponencialmente, como já esperávamos pela equação (4).

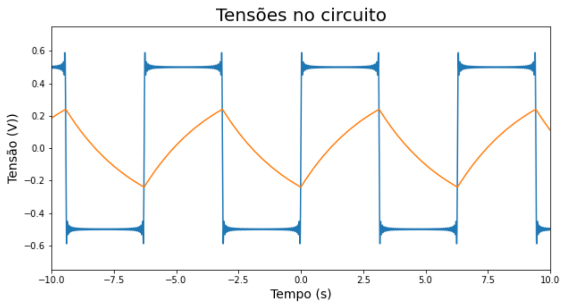
Com $\tau = 3$ (figura 5c) a curva se assemelha a uma onda triangular e com $\tau = 30$ (figura 5d) a tensão começa a se aproximar de uma reta com valor nulo. Isso occorre porque, para valores maiores de τ, o capacitor não tem tempo de carregar antes de iniciar o processo de descarga, e, por isso a sua tensão permanece praticamente constante.



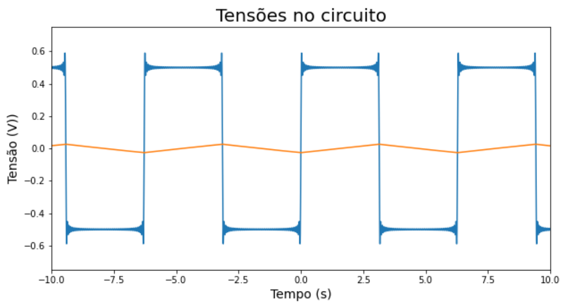
(a) $\tau = 0.03$



(b) $\tau = 0.3$



(c) $\tau = 3$



(d) $\tau = 30$

Figura 5: Tensão de entrada e do capacitor em função da variação de $\tau = R * C$

5 Simulações do circuito:

Para conferir a validade de nossos cálculos é possível simular o circuito em diversos softwares. Essas simulações, em ambiente virtual, mostram o comportamento do circuito sem a necessidade de construção de um circuito com os componentes físicos.

5.1 LTspice XVII:

Utilizando o LTspice XVII, o circuito RC série da figura 1, uma entrada de onda quadrada e os valores $R = 1k\Omega$ e $C = 0.3\mu F$, obtemos o circuito da figura 6. Podemos ver que a forma de onda é semelhante à da figura 5, o que mostra que os cálculos e a programação em Python estão corretos.

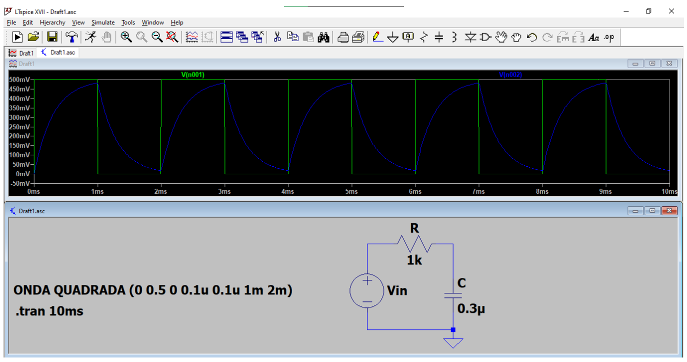
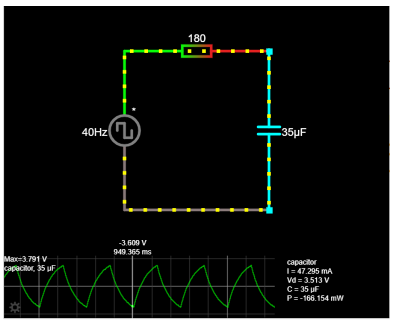


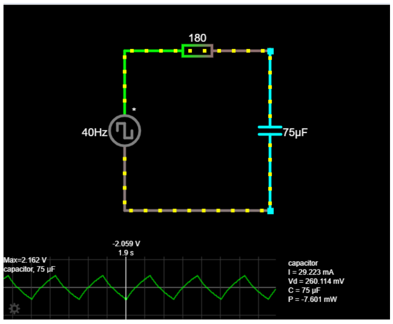
Figura 6: Circuito RC série

5.2 Falstad Circuit Simulator Applet:

Além de softwares SPICE, como o LTspice, podemos utilizar também simuladores de circuitos online para verificar o comportamento do circuito. Um desses simuladores online é o Circuit Simulator Applet da Falstad, disponível gratuitamente em https://www.falstad.com/circuit/.



(a) $C = 35\ \mu F$



(b) $C = 75\ \mu F$

Figura 7: Tensão do capacitor em função da variação de $\tau = R * C$ (nesse caso, variação em C)

A simulação do circuito RC série nos mostra curvas de tensão muito semelhantes às calculadas, o que podemos perceber comparando as figuras 5 e 7.

É interessante notar que, mantendo $C = 75\ \mu F$, podemos retornar à mesma forma de onda da figura 7a alterando a resistência. Podemos ver isso na figura 8, em que foi usada uma resistência $R = 84\Omega$. A forma de onda é a mesma pois $\tau_1 = 180 * 35\mu = 84 * 75\mu = \tau_2$, o que vai de acordo com o fato já explicado de que o que afeta o comportamento do circuito é a constante de tempo, e não R e C separadamente.

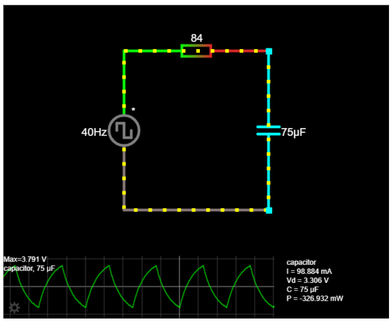


Figura 8: Circuito RC série simulado no Falstad

6 Conclusão:

Foi possível concluir, através dos cálculos, simulações e gráficos feitos, que os valores de R e C individualmente não definem o comportamento do circuito, mas sim o seu produto τ. Esse efeito ficou evidente comparando as figuras 2 e 3 e foi comprovado com as simulações das figuras 7 e 8.

Além disso, a constante de tempo τ também controla o processo de carga e descarga do capacitor, o que afeta a curva da tensão de saída, como foi observado na figura 5 e depois na figura 7. Esse efeito já era esperado, pois a constante de tempo caracteriza o tempo com que a resposta natural do circuito decresce [2], mas pudemos ver graficamente porque a definição faz sentido.

Por último, a constante de tempo τ também tem papel importante na aplicação de filtros passa-baixa, pois define a largura da banda de frequências que o filtro permite que passe, visto nas figuras 2 e 3. Isso é, essa constante define a frequência de corte do circuito, como visto na equação (7).

Assim sendo, o conhecimento do valor da constante de tempo τ é essencial para entender o funcionamento de um circuito RC série. O número significativo de aplicações de τ no estudo desse tipo de circuito justifica a definição e uso dessa grandeza, ao invés de utilizar apenas R e C, como seria natural de imaginar.

Referências

[1] William M Hartmann. *Principles of musical acoustics*. Springer, 2013.

[2] David E Johnson, Johnny R Johnson, John L Hilburn, and Peter D Scott. *Electric circuit analysis*. Prentice-Hall, Inc., 1997.

[3] Behzad Razavi. *RF microelectronics*, volume 2. Prentice Hall New York, 2012.

[4] Adel S Sedra, Dean Emeritus Adel S Sedra, Kenneth Carless Smith, et al. *Microelectronic circuits*. New York: Oxford University Press, 1998.

[5] Marcio Gomes Soares. *Cálculo em uma variável complexa*. Impa, 2012.