Fernando Teodoro de Cillo
RA 197029

a) Conhecendo os vértices de polígonos como quadrados, trapézios e pentágonos é possível calcular a sua área através de algumas fórmulas bem simples.

Mas e quando não sabemos uma fórmula específica para aquele polígono específico? Uma técnica simples e efetiva que é ensinada na educação básica é dividir a figura em triângulos, o polígono com menos lados que sabemos calcular a área, e somar as áreas destes triângulos menores.

A área de um triângulo pode ser calculada a partir das coordenadas dos seus vértices $P_1 = (X_1, Y_1)$, $P_2 = (X_2, Y_2)$ e $P_3 = (X_3, Y_3)$ pelo determinante da matriz M

$$M = \begin{pmatrix} X_1 & Y_1 & 1 \\ X_2 & Y_2 & 1 \\ X_3 & Y_3 & 1 \end{pmatrix}$$

em que a área é $A = \frac{|M|}{2}$.

Note que o determinante de uma matriz é o mesmo da sua transposta e que cada linha da matriz M (coluna da transposta M') representa um vértice.

Assim, podemos adicionar mais vértices ao polígono (o que representaria a soma da área de outro triângulo) adicionando colunas na matriz transposta M'.Também é importante notar que a última coluna de M (última linha de M') contém somente 1s e, portanto, excluí-la não afeta o resultado da conta. Como a matriz resultante (tanto com a inclusão de um vértice quanto com a exclusão dos 1s) não é quadrada, usar o termo "determinante"seria incorreto, mas, por questão de simplicidade, o utilizaremos aqui.

Com tudo isso em mente, podemos encontrar a área A do polígono de N lados por

$$2A = M' = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & ... & X_N & X_1 \\ Y_1 & Y_2 & ... & Y_N & Y_1 \end{bmatrix}$$

Perceba que a última coluna (c_{N+1}) é igual à primeira (c_1) e contém as coordenadas de P_1, o que representa a soma de um último triângulo, que fecha a figura. Essa adição é importante tanto para a conta quanto para a análise geométrica do que ela representa.

b) (i) Imaginando um captador plano na forma de um coelho e um campo magnético $\vec{B}$ constante que o atravessa, podemos representar o campo como setas de mesmo tamanho, direção e sentido *plotados* ao longo do plano que contém a figura, como vemos na figura 1.

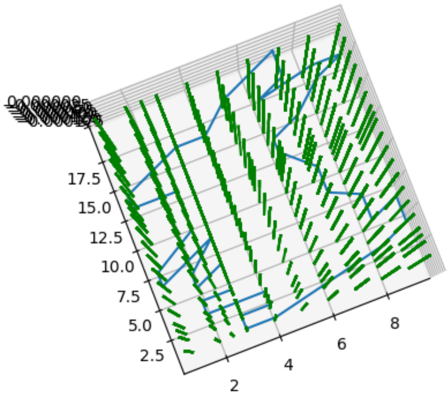

Figura 1: Campo magnético atravessando o captador

(ii) O fluxo magnético pode ser calculado por:

$$\phi_B = -\frac{d}{dt}\int\int_S \vec{B}\cdot\hat{n}\cdot dS$$

$$\phi_B = -\int\int_S \frac{\partial}{\partial t}\vec{B}\cdot\hat{n}\cdot dS$$

e, pela Equação de Maxwell,

$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}$$

, temos:

$$\phi_B = \int\int_S \nabla\times\vec{E}\cdot\hat{n}\cdot dS$$

Aplicando o Teorema de Stokes, encontramos:

$$\phi_B = \oint_C \vec{E}\cdot r(\dot{\vec{c}})\cdot dc$$

Como estamos resolvendo um problema com um polígono de N lados, resolver essa integral de linha significaria resolver N integrais. Apesar de que algumas delas seriam nulas, podemos utilizar uma expressão mais simples.

Como o campo magnético $\vec{B}$ é constante, podemos encontrar o fluxo magnético por

$$\phi_B = |\vec{B}|\cdot A\cdot cos(\theta)$$

em que θ é o ângulo entre o campo $\vec{B}$ e o vetor normal à superfície A.

Já que o captador roda ao longo do tempo, alterando o ângulo θ o valor de ϕ varia como um cosseno, o que pode ser visto na figura 2. Isso só é válido porque os valores de $|\vec{B}|$ e de A são constantes.

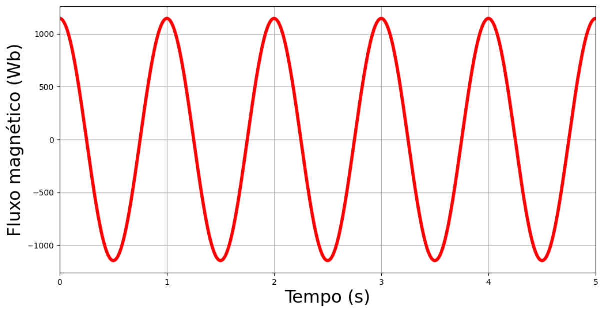

Figura 2: Variação do fluxo ao longo do tempo