



Universidade Estadual de Campinas
Faculdade de Engenharia Elétrica
e de Computação



EE400 - Trabalho 2

Métodos da Engenharia Elétrica

Aluno: Fernando Teodoro de Cillo

RA: 197029

Campinas
Junho de 2021

1 Introdução:

Uma série é uma forma de aproximar uma função desejada através de um somatório de funções mais simples, com as quais sabemos trabalhar melhor.

A série de Fourier faz essa aproximação através de senos e cossenos, ou seja, transforma uma função de interesse em uma soma de sinais senoidais. Isso é relevante para aplicações relacionadas à música e à audição, pois possibilita transformar um sinal periódico complexo (no sentido de que é composto, e não que trabalha com o conjunto \mathbb{C}) em diversas harmônicas de uma frequência fundamental [1].

A série de Taylor, por outro lado, transforma o sinal estudado em um polinômio, que é a família de funções que temos mais facilidade de trabalhar, o que possibilita a aplicação de diversos operadores sobre a função. Calcular derivadas e integrais de polinômios é muito simples, por exemplo, e, por isso, é uma forma interessante de representar uma função.

2 Aproximação por Série de Fourier:

Utilizaremos a série de Fourier para reescrever a função $f(t) = t^2$, com período $0 < t < 2\pi$, em forma de um somatório de sinais senoidais. Isso nos possibilita analisar individualmente cada frequência.

Podemos representar a série de Fourier na forma

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right) \right] \quad (1)$$

, em que o valor de L na equação (1) é $L = T/2 = 2\pi/2 = \pi$.

É necessário agora calcular os coeficientes a_0 , a_n e b_n . Nessa ordem, encontramos

2.1 Termo a_0 :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} t^2 dt \\ a_0 &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{(2\pi)^3}{3} \right] - 0 \\ a_0 &= \frac{4\pi^2}{3} \end{aligned} \quad (2)$$

2.2 Termo a_n :

O termo a_n pode ser calculado por

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L} \int_0^T f(t) \cdot \cos(nt) dt \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} t^2 \cdot \cos(nt) dt \end{aligned} \quad (3)$$

A equação (3) precisa ser resolvida por partes, utilizando

$$\int u \cdot dv = uv - \int v \cdot du \quad (4)$$

Fazendo $t^2 = u$ e $\cos(nt) dt = dv$, temos

$$du = 2t dt \quad \text{e} \quad v = \frac{\sin(nt)}{n}$$

Assim,

$$\pi a_n = \left[t^2 \frac{\sin(nt)}{n} \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{\sin(nt)}{n} 2t dt \quad (5)$$

Notamos que a equação (5) precisa ser resolvida por outra integração por partes. Escolhendo agora

$$u = 2t \quad \text{e} \quad dv = \frac{\sin(nt)}{n} dt,$$

chegamos a

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{\sin(nt)}{n} 2t dt &= \left[-2t \frac{\cos(nt)}{n^2} \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} -\frac{\cos(nt)}{n^2} \cdot 2 dt \\ \int_0^{2\pi} \frac{\sin(nt)}{n} 2t dt &= \left[-2t \frac{\cos(nt)}{n^2} + 2 \frac{\sin(nt)}{n^3} \right]_0^{2\pi} \end{aligned} \quad (6)$$

Substituindo (6) em (5), temos

$$\begin{aligned} \pi a_n &= \left[t^2 \frac{\sin(nt)}{n} \right]_0^{2\pi} - \left[-2t \frac{\cos(nt)}{n^2} + 2 \frac{\sin(nt)}{n^3} \right]_0^{2\pi} \\ \pi a_n &= \left[t^2 \frac{\sin(nt)}{n} + 2t \frac{\cos(nt)}{n^2} - 2 \frac{\sin(nt)}{n^3} \right]_0^{2\pi} \end{aligned}$$

Tendo em mente que $\sin(2\pi n) = \sin(0) = 0$ e que $\cos(2\pi n) = \cos(0) = 1$, chegamos a

$$\pi a_n = 0 + \frac{2 \cdot 2\pi}{n^2} - 0 - 0$$

e finalmente a

$$a_n = \frac{4}{n^2} \quad (7)$$

2.3 Termo b_n :

Já o termo b_n calcula-se por

$$b_n = \frac{1}{L} \int_0^T f(t) \cdot \sin(nt) dt$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cdot \text{sen}(nt) dt \quad (8)$$

Analogamente ao termo a_n , a equação (8) é resolvida através de duas integrações por partes. O procedimento é exatamente o mesmo, e nos leva a

$$\pi b_n = \left[-t^2 \frac{\cos(nt)}{n} + 2t \frac{\text{sen}(nt)}{n^2} + 2 \frac{\cos(nt)}{n^3} \right]_0^{2\pi}$$

Substituindo os valores dos senos e cossenos, chegamos em

$$\pi b_n = -(2\pi)^2 \frac{1}{n} + 0 + 2 \frac{1}{n^3} - 2 \frac{1}{n^3} = -\frac{4\pi^2}{n}$$

Dessa forma,

$$b_n = -\frac{4\pi}{n}$$

2.4 Determinando a série:

Com os resultados das equações (2),(7) e (9), podemos substituir os coeficientes na equação (1) e encontramos

$$f(t) = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{4}{n^2} \cdot \cos(nt) - \frac{4\pi}{n} \cdot \text{sen}(nt) \right] \quad (10)$$

Como queremos ver graficamente a aproximação por série de Fourier, é necessário fazer um truncamento, pois é impossível computacionalmente calcular a expressão com infinitos termos. Assim sendo, definimos o truncamento em N elementos como

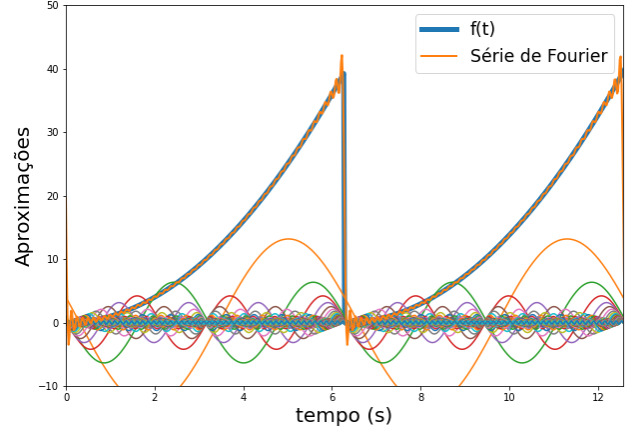
$$F(t, N) = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^N \left[\frac{4}{n^2} \cdot \cos(nt) - \frac{4\pi}{n} \cdot \text{sen}(nt) \right] \quad (11)$$

Com a equação (11), podemos *plotar* em Python figuras que nos ajudem a entender os cálculos que fizemos.

A figura 1 mostra como a soma de diversos sinais senoidais forma a função $f(t)$, como a teoria promete. É interessante notar também o surgimento do fenômeno de Gibbs nos pontos de descontinuidade do gráfico ($t = 2n\pi$) que, apesar de ser esperado, é indesejável.

Outro objeto de interesse quando se aproxima uma função por uma série é o erro entre o resultado obtido e o esperado. Esse erro aparece em verde na figura 2. Percebemos que o erro diminui com o aumento de N , mas continua relativamente alto onde ocorre o fenômeno de Gibbs.

Para evitar o fenômeno de Gibbs, podemos tentar aproximar nossa função através de outros tipos de séries, como a Série de Taylor.



(9) Figura 1: 50 harmônicos compondo a Série de Fourier (em laranja); função alvo $f(t)$ (em azul)

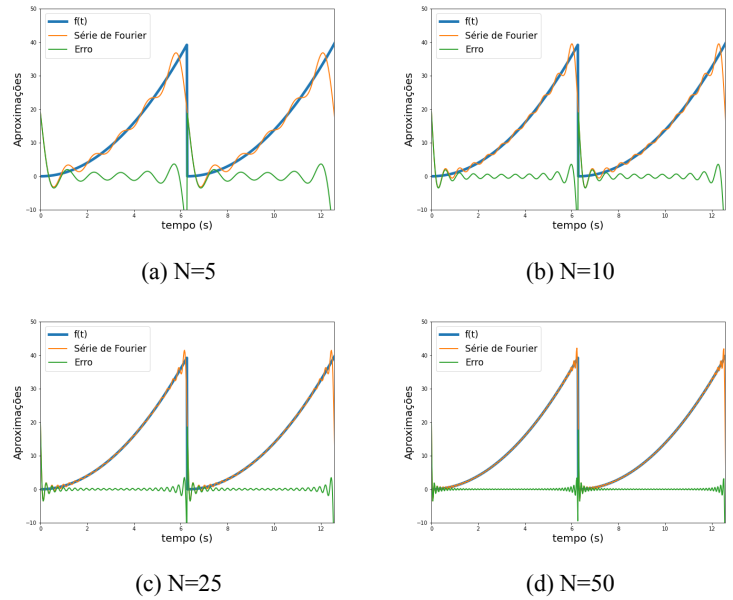


Figura 2: Série de Fourier com N harmônicos

3 Aproximação por Série de Taylor:

Agora aproximaremos a mesma função, $f(t) = t^2$, com período $0 < t < 2\pi$, mas utilizando a série de Taylor. Essa série transforma nossa função em um somatório de polinômios [3]. Representaremos esta aproximação por $L(t, N)$, em que N é o número de elementos da série.

Partindo da função que queremos aproximar

$$f(t) = t^2$$

e utilizando a Série de Taylor, definida como

$$L(t, N) = \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(t_0)}{n!} (t - t_0)^n$$

calculamos cada termo do somatório e encontramos

$$L(t, N) = \frac{t_0^2}{0!} \cdot (t - t_0)^0 + \frac{2t_0}{1!} \cdot (t - t_0)^1 + \frac{2}{2!} (t - t_0)^2 + 0$$

Notamos que o termo $f^{(n)}$ se torna uma derivada de constante e zero a partir de $N = 3$ e, portanto, a expressão da série de Taylor se reduz a:

$$L(t, N) = t_0^2 + 2t_0 \cdot (t - t_0) + (t - t_0)^2$$

Explicitando os termos fatorados, chegamos a:

$$L(t, N) = t_0^2 + 2t \cdot t_0 - 2t_0^2 + t^2 - 2t \cdot t_0 + t_0^2$$

, que se reduz a apenas

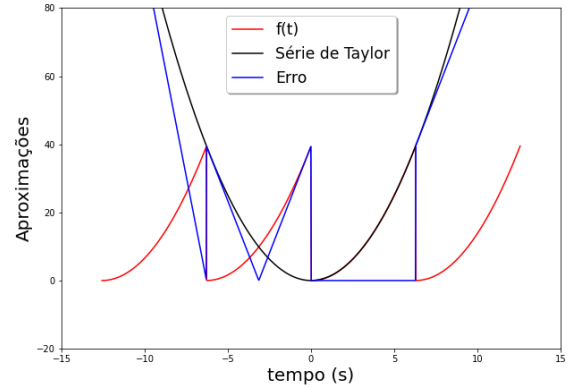
$$L(t, N) = t^2$$

Portanto, com $N \geq 3$ atingimos o valor exato para $L(t, N) = t^2 = f(t)$, então a aproximação tem erro nulo no intervalo $[0, 2\pi]$. Isso já era esperado, pois a função $f(t) = t^2$ é um polinômio de segundo grau (nesse intervalo) e a Série de Taylor aproxima $f(t)$ para um polinômio. O que podemos notar, além disso, é que quando a aproximação $L(t, N)$ está fora do intervalo $[0, 2\pi]$ ela se distancia muito da função alvo, ou seja, o erro cresce muito. Isso ocorre porque a aproximação não apresenta descontinuidades, e continua crescendo quadraticamente *ad infinitum*.

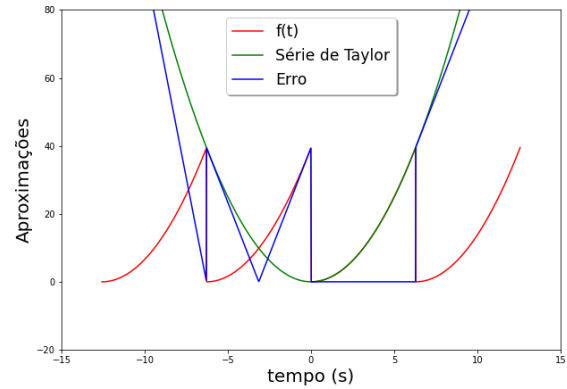
Notamos que, como calculado, $L(t, N)$ independe do valor de t_0 , porque a curva preta em 3a e a verde em 3b são exatamente iguais. Isso significa que poderíamos ter utilizado a série de MacLaurin e chegaríamos ao mesmo resultado (a série de MacLaurin é igual a de Taylor para $t_0 = 0$ e mostramos que a série de Taylor é igual nesse ponto e em qualquer outro). O erro, representado em azul, cresce mais do que a própria função $f(t)$ fora do intervalo $[0, 2\pi]$, como já esperávamos.

4 Comparando as duas aproximações:

Comparando as figuras 2 e 3, vemos que a aproximação $F(t, N)$ por série de Fourier segue muito bem a forma de onda da função alvo $f(t)$ para $t < 0$ ou $t > 2\pi$. A série de Taylor, por outro lado, evita o fenômeno de Gibbs e possui erro nulo em um intervalo delimitado por um período, mas só pode ser aplicado aí, ou a aproximação $L(t, N)$ perde o significado e o erro explode.



(a) $t_0 = 0$



(b) $t_0 = 5$

Figura 3: Série de Taylor em torno do ponto t_0

Seria interessante, então, combinar essas duas aproximações, a fim de diminuir o erro e evitar o fenômeno de Gibbs, com t no intervalo $[0, 2\pi]$, mas sem que o erro aumente para valores diferentes de t .

5 Aproximação da Série de Fourier por uma Série de Taylor:

Uma forma de diminuir o erro e o fenômeno de Gibbs da série de Fourier poderia ser aproximá-la por uma série de Taylor. Como a série de Taylor transforma nossa função em um polinômio, a forma de onda é muito mais suave nas descontinuidades, onde surge o maior problema da série de Fourier.

Essa aproximação será representada por $L(t, N, M)$, em M é o número de elementos da série de Fourier e N é o número de elementos da série de Taylor. Assim, temos

$$L(t, N, M) = \sum_{n=0}^N \frac{F(t, M)^{(n)}(t_0)}{n!} (t - t_0)^n \quad (12)$$

5.1 Derivada n-ésima da série de Fourier:

O termo $F(t, M)^{(n)}(t_0)$ da equação (12) se refere à derivada n-ésima da série de Fourier $F(t, M)$ aplicada no ponto $t = t_0$. Ou seja,

$$F(t, M)^{(n)}(t_0) = \frac{d^n(F(t_0, M))}{dt_0^n}$$

Substituindo o valor de $F(t, N)$ obtido na equação (11) e fazendo $t = t_0$ e $N = M$:

$$\begin{aligned} F(t, M)^{(n)}(t_0) &= \frac{d^n(F(t_0, M))}{dt^n} \\ &= \frac{d^n\left(\frac{4\pi^2}{3} + \sum_{m=1}^M \left[\frac{4}{m^2} \cdot \cos(mt) - \frac{4\pi}{m} \cdot \sin(mt)\right]\right)}{dt^n} \\ &= \frac{d^n\left(\frac{4\pi^2}{3}\right)}{dt^n} + \sum_{m=1}^M \left[\frac{4}{m^2} \frac{d^n(\cos(mt))}{dt^n} - \frac{4\pi}{m} \frac{d^n(\sin(mt))}{dt^n} \right] \end{aligned} \quad (13)$$

5.2 Derivada do seno:

A derivada de um seno é o cosseno e, pela regra da cadeia, multiplicamos pela frequência [4], ou seja,

$$\sin'(mt) = m \cdot \cos(mt) \quad (14)$$

É possível mostrar, através do seno de uma soma [2], que

$$\sin\left(mt + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(mt) \quad (15)$$

Substituindo a equação (15) na equação (14), obtemos

$$\sin'(mt) = m \cdot \sin\left(mt + \frac{\pi}{2}\right)$$

Assim, temos que a derivada do seno pode ser escrita como outro seno. Aplicando isso recursivamente, encontramos a derivada n-ésima como

$$\sin^{(n)}(mt) = m^n \cdot \sin\left(mt + \frac{n\pi}{2}\right) \quad (16)$$

Para calcular a derivada n-ésima do cosseno, o transformamos num seno, pela equação (15), pois já sabemos derivar o seno. Assim,

$$\begin{aligned} \cos^{(n)}(mt) &= \sin^{(n)}\left(mt + \frac{\pi}{2}\right) \\ \cos^{(n)}(mt) &= m^n \sin\left(mt + \frac{(n+1)\pi}{2}\right) \end{aligned} \quad (17)$$

Podemos então calcular a expressão (13), substituindo o que encontramos em (16) e (17), por

$$\begin{aligned} F(t, M)^{(n)}(t_0) &= \frac{d^n\left(\frac{4\pi^2}{3}\right)}{dt^n} + \sum_{m=1}^M \left[\frac{4}{m^2} m^n \sin\left(mt + \frac{(n+1)\pi}{2}\right) + \right. \\ &\quad \left. - \frac{4\pi}{m} m^n \sin\left(mt + \frac{n\pi}{2}\right) \right] \end{aligned} \quad (18)$$

5.3 Série de Taylor:

Retornando à série de Taylor, com o resultado da equação (13), obtemos

$$\begin{aligned} L(t, N, M) &= \frac{4\pi^2}{3} + \\ &+ \sum_{n=0}^N \frac{(t-t_0)^n}{n!} \cdot \sum_{m=1}^M \left[4 \cdot m^{(n-2)} \sin\left(mt + \frac{(n+1)\pi}{2}\right) + \right. \\ &\quad \left. - 4\pi \cdot m^{(n-1)} \sin\left(mt + \frac{n\pi}{2}\right) \right] \end{aligned} \quad (19)$$

Perceba que a derivada de uma constante é 0 e, por isso, não é necessário calcular a derivada do primeiro termo.

5.4 Variando os parâmetros da aproximação:

Além da variável t , a equação (19) possui as constantes t_0 , N e M , que mudam o comportamento do sinal gerado. Podemos ver na figura 4 o que ocorre quando variamos o ponto t_0 , ao redor do qual a série de Taylor é calculada. O valor N , alterado na figura 6, define quantas derivadas de $F(t, M)$ serão avaliadas na série de Taylor, enquanto as mudanças de M podem ser vistas na figura 5 e define o truncamento da série de Fourier.

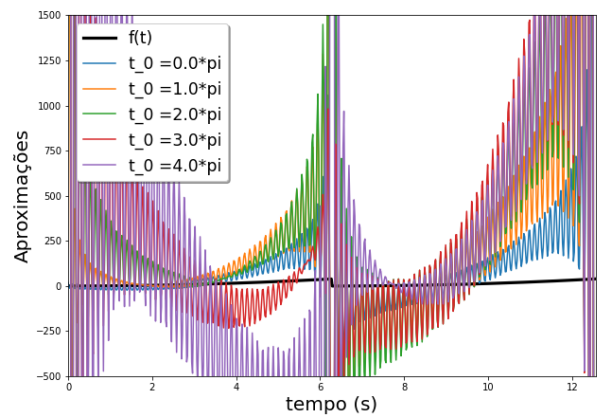


Figura 4: Variação de t_0 , com $N = 1$ e $M = 50$

Analisando a figura 4, percebemos que o ruído é grande para qualquer valor de t_0 , e a aproximação tem a forma de

$f(t)$ somente em regiões muito próximas do valor de t_0 escolhido. Por isso, $t_0 = 2\pi$ (curva verde na figura 4) é o valor que aproxima melhor a nossa função, não pela amplitude, mas pela forma de onda.

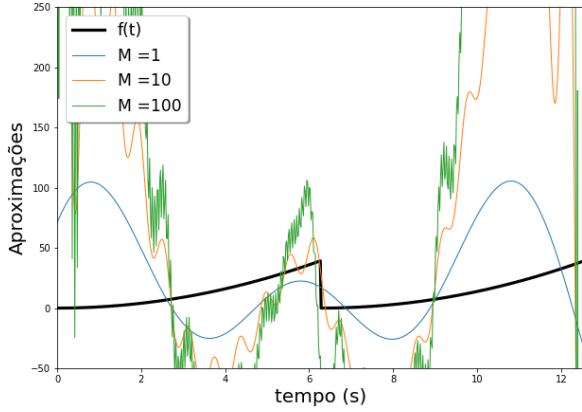


Figura 5: Variação de M , com $t_0 = 2\pi$ e $N = 1$

Avaliando a variação de M , mostrada na figura 5, percebemos que a amplitude do sinal assume valores absurdos, que aumentam fortemente com o aumento de M . Outro ponto notável é que surgem valores negativos com valor absoluto que acompanha o crescimento de M , o que não tem sentido físico para a nossa função alvo. Apesar disso, quanto maior o valor de M , melhor a aproximação da forma de onda de $f(t)$. O fenômeno de Gibbs também cresce e, por isso, $M = 100$ é um valor que aproxima suficientemente a função mas com um erro aceitável nas descontinuidades.

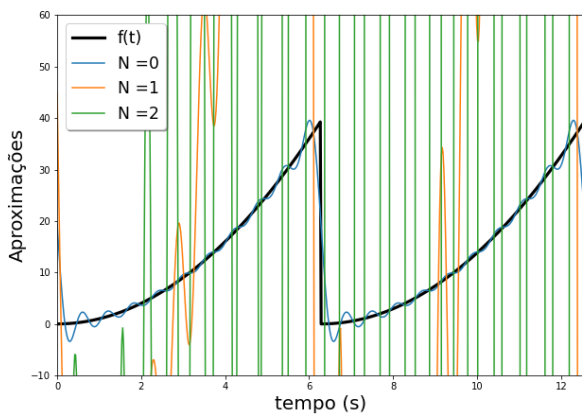


Figura 6: Variação de N , com $t_0 = 0$ e $M = 10$

A figura 6 mostra que valores pequenos de N aproximam melhor a função $f(t)$, e o seu aumento gera um erro muito grande. Isso pode ocorrer porque, neste caso, a série de Taylor está tentando transformar sinais senoidais periódicos em polinômios e, por isso, um aumento no número de sinais faz

com que os polinômios tenham grau muito grande, na tentativa de se aproximar a $f(t)$. Dessa forma, surgem diversas linhas "verticais" e um erro grande. Por esse motivo, $N = 1$ é o valor mais razoável ($N = 0$ significa que não estamos usando a série de Taylor, apesar de que visualmente percebemos que essa é a curva que mais se aproxima do desejado na figura 6).

5.5 Melhor aproximação possível:

Analisando visualmente as figuras 4, 5 e 6 encontramos que os valores ótimos da nossa aproximação são $t_0 = 2\pi$, $M = 100$ e $N = 1$. Utilizando esses valores devemos chegar à melhor aproximação, representada na figura 7.

Notamos na figura 7 que a nossa ideia inicial deu certo,

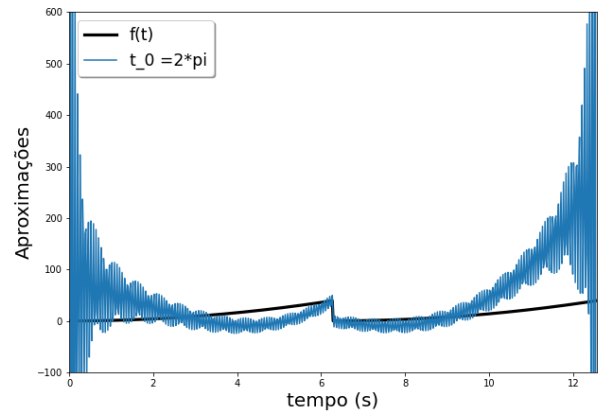


Figura 7: Aproximação com os valores ótimos encontrados ($t_0 = 2\pi$, $M = 100$ e $N = 1$)

pois o fenômeno de Gibbs no ponto t_0 praticamente desaparece. O efeito colateral, porém, é muito mais significativo, pois o fenômeno de Gibbs na descontinuidade que não coincide com t_0 é muito maior do que o da figura 2.

6 Conclusão:

Analisando a figura 7 em comparação com as figuras 2 e 3, percebemos que a aproximação da série de Fourier pela série de Taylor foi a pior de todas as aproximações (erro maior), independente dos valores escolhidos para cada parâmetro.

Localmente (no primeiro período), a série de Taylor teve o melhor resultado, sendo uma curva suave e com erro nulo, escapando totalmente do fenômeno de Gibbs. Fora do primeiro período, a série de Fourier atingiu uma forma de onda razoavelmente semelhante à da função alvo, mas o fenômeno de Gibbs torna o erro alto em pontos próximos a

$t = n \cdot T$, com $n \in \mathbb{Z}$. Utilizando as duas aproximações simultaneamente não temos as propriedades interessantes da série de Taylor localmente e nem as da série de Fourier ao longo de todos os valores de t .

Dessa forma, a opção por utilizar a série de Taylor ou a de Fourier depende do período que está sendo analisado. Para $t \in [0, 2\pi]$, a aproximação de Taylor é excelente e pode ser utilizada sem absolutamente nenhum prejuízo. Por outro lado, quando $t < 0$ ou $t > 2\pi$, a série de Fourier possui um erro muito menor e a forma de onda muito mais similar à buscada, apesar das singularidades no fim de cada período.

A aproximação da série de Fourier pela série de Taylor não alcança a similaridade da forma de onda da série de Fourier nem a suavidade e erro baixo da de Taylor. Portanto, aproximar uma série pela outra não tem muitas utilidades práticas (pelo menos para essa função), e não deveria ser utilizada.

Referências

- [1] William M Hartmann. *Principles of musical acoustics*. Springer, 2013.
- [2] David E Johnson, Johnny R Johnson, John L Hilburn, and Peter D Scott. *Electric circuit analysis*. Prentice-Hall, Inc., 1997.
- [3] Marcio Gomes Soares. *Cálculo em uma variável complexa*. Impa, 2012.
- [4] James Stewart. *Cálculo, Volume 1, 7ª edição*. Editora Cengage Learning, 2013.