Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Departamento de Matemática Aplicada

MS211 - Cálculo Numérico

Turma A - Prova 1

Fernando Teodoro de Cillo
RA: 197029

Campinas
Maio de 2021

1 Considere a função dada por $f(x) = sin[(x-0.23)^2] - e^{x2} + 3 \cdot x$ com $x \in [-2, 2]$. Aproxime a raiz ou as raízes justificando sua escolha de método, a precisão de sua aproximação da raiz ou de suas aproximações das raízes.

Plotando a função $f(x)$ no Wolfram Alpha, como na figura 1, podemos ver que a função $f(x)$ possui duas raízes, uma no intervalo [0,1] e outra no intervalo [1,2].

Aplicando o método da bisseção nesses dois intervalos, através da biblioteca python *scipy.optimize* e do método (*.bissect*), obtemos as raízes $x_1 = 0.37704867390311847$ e $x_2 = 1.228810039416203$.

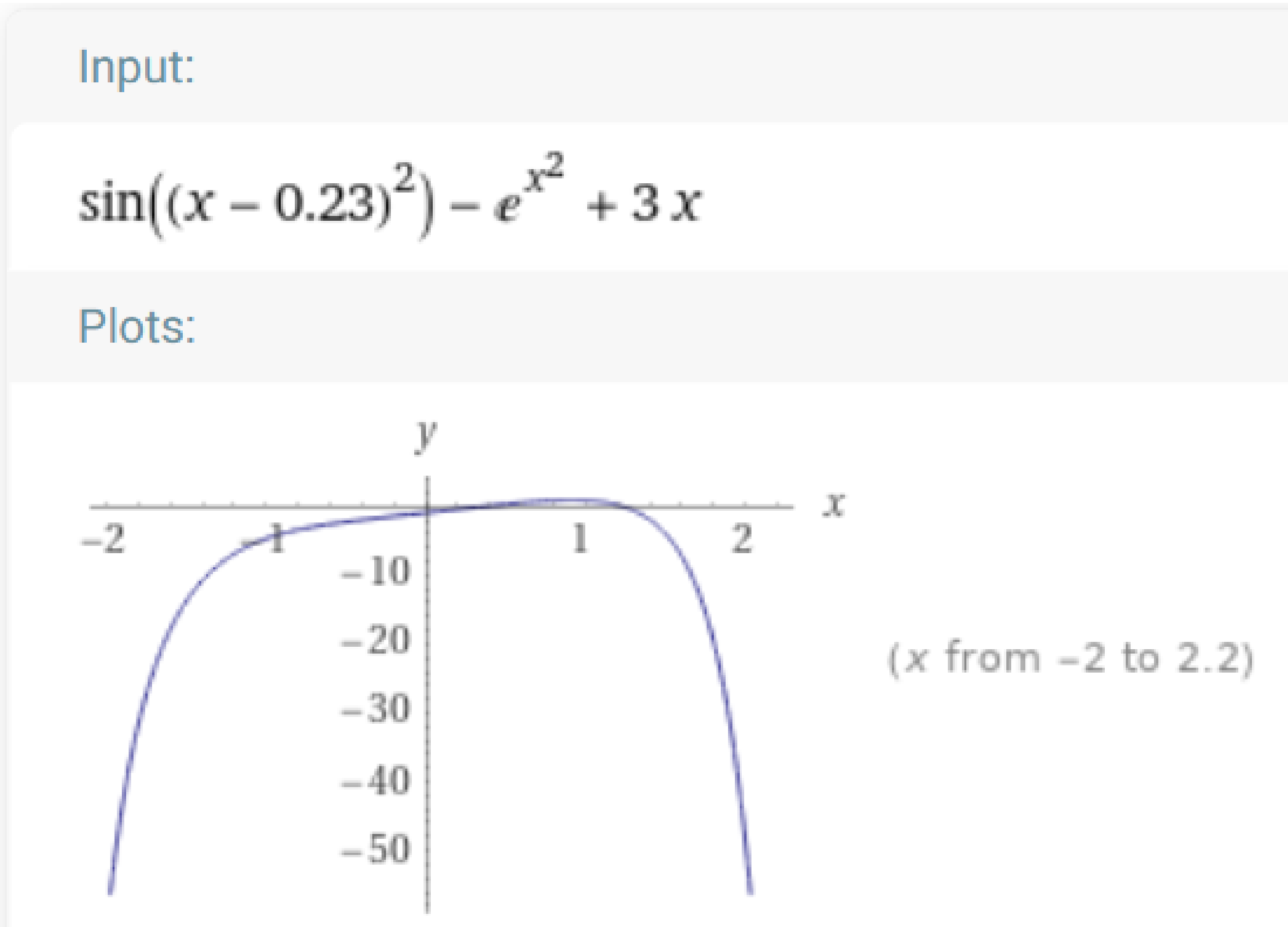

Figura 1: Gráfico de $f(x) = sin[(x - 0.23)^2] - e^{x2} + 3 \cdot x$ no Wolfram Alpha

Aplicando agora o método de Newton-Raphson (*.newton*), com as raízes obtidas pelo método da Bisseção como aproximação inicial, a derivada calculada pelo Wolfram Alpha e tolerância 10^{-15}, obtemos as raízes $x_1 = 0.377048673902708$ e $x_2 = 1.228810039417538$.

Chamando agora a função $f(x)$ aplicada em nossas raízes, vemos que o método da bisseção zerou a função nas 11 primeiras casas decimais, enquanto o método de Newton-Raphson conseguiu zeros até a décima quinta casa decimal. Logo, a aproximação do segundo método é melhor, justificando sua aplicação após o primeiro.

2 Considere a função $f(x) = x + e^{-x^2}$ na reta Real. Como identificar se esta função $f(x)$ tem raiz ou raízes reais? Qual seria o Método mais adequado para se identificar rapidamente uma boa aproximação dessa ou dessas raízes? Qual o controle de aproximação que você usaria?

Plotando o gráfico, visto na figura 2, verificamos se a função cruza o eixo das abscissas. Se ela cruza, esse ponto representa uma raiz da função. Para a função $f(x) = x + e^{-x^2}$, vemos que há uma raiz entre -0.5 e -1.0.

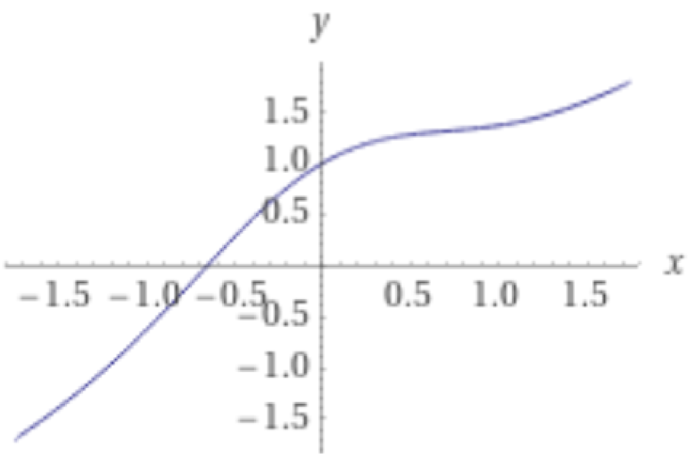

Figura 2: Gráfico de $f(x) = x + e^{-x^2}$ no Wolfram Alpha

Agora, como temos um intervalo que com certeza contém uma raiz, podemos aplicar o método da bisseção e encontrar uma aproximação para esse valor.

Qualquer tolerância menor que 10^{-10} já seria suficientemente boa, porque a ideia é obter uma resposta rapidamente, e não necessariamente a mais precisa. Por esse motivo, utilizei a tolerância $\delta = 10^{-12}$, o que retornou a raiz $x_0 = -0.6529186404204665$.

Obs.: O código utilizado nas questões 1 e 2 está no arquivo **p1_197029.py**.

3 Dos métodos apresentados para aproximar a raiz de uma função, qual ou quais os que lhe parecem mais úteis e por quê? Há algum método que você acredita que nunca vai usar? Justifique cuidadosamente todas as suas opiniões.

O método de Newton-Raphson me parece o mais útil, por convergir em poucas iterações e por chegar a resultados consistentes. O seu problema é a necessidade da derivada, que o Método da Secante elimina e, por isso, também é muito útil.

O método da Bisseção me parece bastante apropriado para encontrar uma aproximação inicial boa para os métodos já citados, tendo apenas o intervalo em que as raízes se encontram, e, portanto, também o considero valioso. Além disso, sua interpretação geométrica e código simples o fazem interessante em contextos didáticos, para introduzir os outros métodos posteriormente.

O método da Posição Falsa é, portanto, o que considero mais irrelevante, pois a Bisseção já cobre os casos em que a Posição Falsa poderia ser utilizada. Por isso, creio que nunca vou usá-lo, já que provavelmente vou usar o método da Bisseção no lugar e o método de Newton-Raphson ou da Secante posteriormente.

4 Considere a matriz e o vetor dados pelo programa abaixo e resolva um sistema do tipo m.x = b. Justifique cuidadosamente sua escolha de método e critique avaliativamente seu resultado.

```
%
n=251;
%
% Matriz
m=sparse(n);
for i=1:n
  m(i,i) = 2.35;
endfor
for i=1:n-1
  m(i,i+1) = -0.78;
  m(i+1,i) = -0.41;
endfor
for i=1:n-25
  m(i,i+25) = -0.51;
  m(i+25,i) = -0.28;
endfor
%
% Termo independente
for i=1:2:n
  b(i) = 1.5;
endfor
for i=2:2:n-1
  b(i)=0.75;
endfor
b=b';
```

Como sabemos, pelo código dado, que a matriz m é esparsa e que todos os elementos $m_{i,i}$ da sua diagonal principal são diferentes de zero (matriz não-singular), devemos escolher entre o método de Jacobi e o de Gauss-Seidel.

O código **p1_q4_197029.m**, feito em conjunto com o Guilherme Teodoro de Cillo, resolve o sistema $m \cdot x = b$ pelos métodos de Gauss-Seidel e de Jacobi para que comparemos. E, adicionalmente, também resolve pelo comando $x = A\backslash b$ do Octave.

Podemos ver na tabela 1 que o método de Jacobi é mais rápido, mas o de Gauss-Seidel possui um erro relativo e resíduo relativo menores. Como estamos buscando o resultado mais preciso, Gauss-Seidel é a escolha mais apropriada.

Tabela 1: Comparação entre os métodos numéricos

Método	Erro relativo	Resíduo relativo	Tempo (s)
Jacobi	$8.4665 \cdot 10^{-5}$	$2.1598 \cdot 10^{-4}$	$1.7982 \cdot 10^{-3}$
Gauss-Seidel	$7.3886 \cdot 10^{-5}$	$1.3440 \cdot 10^{-4}$	$7.1471 \cdot 10^{-3}$
$x = A\backslash b$	————	$5.5920 \cdot 10^{-16}$	$1.5850 \cdot 10^{-3}$

Note que o comando $x = A\backslash b$ retorna um resíduo muito menor que os outros métodos e em mais rapidamente, mas, como a ideia era escolher o método utilizado, seus resultados serão desconsiderados porque o comando é uma "caixa-preta". O cálculo do erro relativo neste caso não tem sentido e nem relevância para os resultados.

5 Se, em seu trabalho profissional, você tiver que orientar a compra de um *software* para resolver sistemas lineares, quais seriam suas três primeiras escolhas? Justifique...

Um *software* que pudesse aplicar os métodos da Eliminação de Gauss, da fatoração LU e de Gauss-Seidel seria o suficiente.

A Eliminação de Gauss realiza muitas operações por linha da matriz, mas não necessita realizar nenhuma operação com a matriz antes de começar a calcular. Portanto, para matrizes pequenas (até 10 linhas, talvez) pode ser aplicado sem prejuízo ao resultado e com custo computacional aceitável, já que sua implementação é muito simples.

Para matrizes maiores, o método da fatoração LU é mais indicado, pois possui custo computacional menor do que a eliminação de Gauss.

Quando a matriz é grande mas esparsa os métodos anteriores possuem custo computacional muito grande e, portando, o método de Gauss-Seidel é o mais apropriado. O de Jacobi também seria interessante, mas Gauss-Seidel geralmente tem convergência melhor, por isso a escolha.

6 Considere o sistema não linear dado por

$f(x, y, z) = 3 \cdot x^2 \cdot y^2 - z + 2,$
$g(x, y, z) = x - 2 \cdot y^2 - 3 \cdot z^2 + 12,$ e
$h(x, y, z) = x + y - 0.5.$

Identifique uma terna (x,y,z) para a qual f, g e h se anulam simultaneamente. Avalie seu resultado e comente a precisão.

Utilizando o método de Newton não-linear em Octave (baseado no código enviado pelo professor no classroom), disponível no arquivo **p1_q6_197029.m**, encontramos a terna **(x,y,z) = (0.2579, 0.2421, 2.0117)**. E, como visto no próprio arquivo, o Octave zera as funções $f(x, y, z)$, $g(x, y, z)$ e $h(x, y, z)$ e também a norma do vetor $F(f(x, y, z), g(x, y, z), h(x, y, z))$

Apesar disso, como a solução tem precisão de apenas 4 casas decimais, não é uma aproximação excelente e poderia gerar erros dependendo da aplicação. Como a ideia aqui era somente zerar as funções, porém, é um resultado aceitável.

7 Comente o que lhe pareceu mais útil no que foi visto até aqui de MS211.

A resolução de sistemas lineares na forma matricial é tema das disciplinas EA513 e EA611 (circuitos elétricos 1 e 2). Resolver esse tipo de problema em escala maior (mais do que 10 linhas) computacionalmente é muito mais prático e é o que, provavelmente, será utilizado no exercício da profissão de engenheiro.

Aprender o básico de Octave também foi importantíssimo para mim. No curso de engenharia elétrica temos pouquíssimas disciplinas dedicadas à programação, o que é, no meu ponto de vista, uma grande falha na grade do curso. E, por isso, aprender uma linguagem nova em uma disciplina do chamado "ciclo básico"é ótimo.

8 Comente algum tópico que não foi abordado nas questões anteriores e justifique o(s) motivo(s) de sua escolha.

Creio que a fatoração LU poderia ter sido abordada em alguma das questões, pois foi um tema bastante trabalhado em aulas e que é bastante útil. Além disso, é bem mais intuitivo que outros métodos, como de Gauss-Seidel e de Jacobi.