FACULTATEA DE MATEMATICĂ

Str. Academiei nr. 14, tel. 314.35.08

Probe de concurs – pentru toate specializările – la alegere două din patru materii propuse:
- Algebră,
- Elemente de analiză matematică,
- Geometrie şi Trigonometrie,
- Informatică.

Concurenţa în anii anteriori (toate specializările):
- 2006 – 2,41 candidaţi/loc (matematică); 6,456 candidaţi/loc (informatică)
- 2005 – 4,615 candidaţi/loc
- 2004 – 3,04 candidaţi/loc
- 2003 – 3,29 candidaţi/loc
- 2002 – 3,24 candidaţi/loc
- 2001 – 1,04 candidaţi/loc
- 2000 – 1,12 candidaţi/loc

Domeniul de licenţă „Matematică“

Prima medie/ultima medie:
- 2006 – 9,97/5,05 (buget); 10,00/6,51 (taxă)
- 2005 – 9,97/5,08 (buget); 9,92/6,05 (taxă); 10,00/7,37 (ID)
- 2004 – 9,93/8,83 (prima sesiune - zi);7,48 (prima sesiune – taxă); 9,23/6,78 (a doua sesiune)
- 2003 – 9,87/6,66 (zi); 9,42/6,50 (taxă)
- 2002 – 9,63/8,24
- 2001 – 9,77/5,03
- 2000 – 9,35/5,00

Domeniul de licenţă „Matematică-Mecanică“

Prima medie/ultima medie:
- 2004 (nu mai există)
- 2003 – 9,87/6,66 (zi); 9,42/6,50 (taxă)
- 2002 – 8,92/8,19
- 2001 – 8,36/5,50
- 2000 – 7,04/5,40

Domeniul de licenţă „Informatică“

Prima medie/ultima medie:
- 2006 – 10,00/7,35 (buget); 9,84/5,13 (taxa)
- 2005 – 10,00/5,74 (buget); 9,62/5,00 (taxă); 9,70/7,00 (ID)
- 2004 – 9,99/9,5 (prima sesiune – zi); 8,98/5,36 (prima sesiune – taxă); 9,87/5,28 (a doua sesiune)
- 2003 – 9,61/7,54 (zi); 7,52/5,25 (taxă)
- 2002 – 9,98/9,17
- 2001 – 9,86/8,74
- 2000 – 9,07/7,12

Domeniul de licenţă „Matematică-Informatică“

Prima medie/ultima medie:
- 2004 – 10/9,05 (prima sesiune – zi); 9,61/7,93 (prima sesiune – taxă); 9,28/5,57 (a doua sesiune)
- 2003 – 9,76/7,02 (zi); 8,39/5,90 (taxă)
- 2002 – 9,97/8,93
- 2001 – 9,98/8,41
- 2000 – 9,14/6,94

Domeniul de licenţă „Matematici aplicate“

Prima medie/ultima medie:
- 2004 (nu mai există)
- 2003 – 9,87/6,66 (zi); 9,42/6,50 (taxă)
- 2002 – 9,10/8,23

Domeniul de licență Informatică

Timp de lucru: 3 ore

I. 1. Fie polinomul $f = X^3 + mX^2 + X + 1 \in C[X]$.

a) Să se determine m, știind că rădăcinile sale x_1, x_2, x_3 satisfac relațiile $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -1$ și $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 4m - 1$.

b) Pentru m determinant la punctul a), să se afle rădăcinile polinomului.

2. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze A^n, unde $n \in N^*$.

b) Să se arate că A este inversabilă și să se calculeze inversa sa.

c) Să se arate că mulțimea lui $G = \{A, A^2, A^3, A^4\}$, împreună cu operația de înmulțire a matricelor este un grup izomorf cu $(Z_4, +)$.

II. 1. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} x(\pi - 2arctg\ x)$.

2. Fie $n \in N^*$. Să se calculeze $\int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1} dx$.

III. 1. Într-un plan raportat la un sistem de coordonate carteziene, se consideră punctele $A(1,0)$ și $B(2,1)$. Să se determine punctele C din plan cu proprietatea că triunghiul ABC este echilateral.

2. Să se demonstreze că dintre toate triunghiurile incluse în mulțimea formată dintr-un cerc dat, împreună cu interiorul său, cele de arie maximă sunt cele înscrise și echilaterale.

IV. 1. Se cunosc numărul natural $n \geq 1$ și două tablouri $X = (x_1, x_2, ...x_n)$ și $Y = (y_1, y_2, ...y_n)$ cu elemente cifre în baza 10. Spunem că $X \leq Y$ dacă $x_i \leq y_i$ pentru orice $i = 1,2,...n$. Să se scrie proceduri/funcții care să afișeze:

a) 1 sau 0, după cum $X \leq Y$ sau nu;

b) toate tablourile Z cu elemente cifre în baza 10 astfel încât $X \leq Z \leq Y$, precum și numărul lor, în ipoteza că $X \leq Y$.

2. Șirul lui Fibonacci este definit prin $x_0 = x_1 = 1$ și $x_k = x_{k-1} + x_{k-2}$, pentru orice $k \geq 2$. Se consideră date un număr natural P și numerele naturale $a_1, a_2, ...a_n (n \in N^*)$.

Să se scrie proceduri/funcții care să afișeze:

a) 1 sau 0, după cum P este sau nu un termen al șirului lui Fibonacci;

b) 1 sau 0, după cum $a_1, a_2, ...a_n$ sunt, într-o ordine convenabilă, termeni consecutivi ai șirului lui Fibonacci. La fiecare problemă, cel puțin una dintre proceduri/funcții va fi scrisă în Pascal, C sau $C++$, iar celelalte în pseudocod.

Notă: Timp de lucru 3 ore.

Barem de corectare

I. ALGEBRĂ

1. Oficiu — 1 p

a) $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -m^3 + 3m - 3$ — 2 p

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = \begin{cases} m^4 - 4m^2 + 4m + 2 \\ sau \\ -m^2 + 2m + 2,\ dacă\ se\ foloseste\ pe \\ parcurs\ ca\ x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -1 \end{cases}$$ — 2 p

$m = 1$ — 3 p

b) $x_1 = -1, x_2 = i, x_3 = -i$ — 2 p

2. Oficiu — 1 p

a) calculează A^2, A^3, $A^4 = I_4$ — 3 p

$A^{4k} = I_4$, $A^{4k+1} = A$, $A^{4k+2} = A^2$, $A^{4k+3} = A^3$ — 2 p

b) $A^{-1} = A^3$ — 1 p

c) G grup — 1 p

descrierea lui $(Z_4,+)$ — 1 p

izomorfismul — 1 p

II. ANALIZĂ MATEMATICĂ

1. Oficiu — 1 p

observație nedeterminare $\infty \cdot 0$ — 3 p

aducere la cazul $\frac{0}{0}\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)$ — 2 p

calcul $\frac{u'(x)}{v'(x)}$ (L'Hospital) — 2 p

finalizare (L'Hospital) — 2 p

2. Oficiu — 1 p

calculul integralei $\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx$ — 1 p

calculul integralei $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx$ — 1 p

calculul integralei $\int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1}dx$ $(n \in N, n \geq 2)$ în funcție de $\int_0^1 \frac{x^k}{x^2+1}dx$ $(k < n)$ — 3 p

cazul n par — 2 p

cazul n impar — 2 p

III. GEOMETRIE

1. Oficiu — 1 p

Figura — 2 p

Condiții pentru triunghi echilateral — 3 p

Finalizare — 4 p

2. Oficiu — 1 p

Figura — 2 p

Triunghiuri înscrise — 3 p

Triunghiuri echilaterale — 4 p

IV. INFORMATICĂ

1. Oficiu — 1 p

Cunoştințe pseudocod — 1 p

a) — 2 p

b) afişare tablouri — 3 p

număr tablouri — p

cunoştințe limbaj — 2 p

2. Oficiu — 1 p

cunoştințe pseudocod — 1 p

a) — 2 p

b) sortare şir — 2 p

verificare — 2 p

cunoştințe limbaj — 2 p

NOTĂ: La cele două subiecte tratate din subiectele I, II, III, IV se va acorda câte o notă $\in \{2, 3, 4,..., 20\}$. Nota finală se obține adunând cele două note de mai sus şi împărțind rezultatul la 4.

Domeniul de licență Matematică

Timp de lucru: 3 ore

I. 1. Fie polinomul cu coeficienți reali $f = X^4 - 2X^3 + X^2 + nX + p$.

a) Să se determine n şi p astfel încât $X^2 + 1$ să dividă pe f.

b) Dacă g este câtul împărțirii lui f la X^2+1, să se calculeze $g(1)+g(2)+...+g(n)$.

2. Fie mulțimea $G=\left\{\begin{pmatrix}1 & a & b\\ 0 & 1 & c\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \mid a,b,c\in Z\right\}$.

a) Să se arate că G, împreună cu operația de înmulțire a matricelor este grup.

b) Este G grup comutativ? Justificare.

II. 1. Să se determine $a\geq 0$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+a}-\sqrt{n}\right)=1$.

2. Fie $f:R\setminus\{1\}\to R,\ f(x)=\dfrac{x^2+x+2}{x-1}$.

a) Să se verifice că $f(x)=x+2+\dfrac{4}{x-1}$ pentru orice $x\in R\setminus\{1\}$.

b) Pentru $A>2$, să se calculeze $F(A)=\int_2^A f(x)dx$.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{A\to\infty}\dfrac{F(A)}{A^2}$.

III. 1. Fie ABC un triunghi și $M\in(BC)$. Bisectoarele unghiurilor $A\hat{M}B$ și $A\hat{M}C$ intersectează laturile AB și BC în P și respectiv Q. Să se arate că PQ este paralelă cu BC dacă și numai dacă M este mijlocul laturei BC.

2. Fie $ABCD$ un tetraedru cu $AC\perp BD$. Printr-un punct $M\in(AB)$ ducem un plan paralel cu AC și BD care intersectează BC în N, CD în P și AD în Q.

a) Să se demonstreze că $MNPQ$ este dreptunghi.

b) Presupunând că $MNPQ$ este pătrat, să se determine latura sa în funcție de lungimile laturilor lui $ABCD$.

IV. 1. Se consideră numărul natural $n>1$ și tabloul $P=(P_1, P_2,... P_n)$ cu elemente din $\{1, 2, ...n\}$. Să se scrie proceduri/funcții care să afișeze:

a) valoarea 1 sau valoarea 0, după cum P este sau nu o permutare a mulțimii $\{1, 2, ...n\}$;

b) numărul de perechi (i, j) care verifică $1\leq i<j\leq n$ și $P_1>P_j$.

2. Se cunosc numărul natural $n\geq 1$, coeficienții reali ai polinomului $P=a_0+a_1X+...+a_nX^n$, precum și numărul real b. Să se scrie proceduri/funcții care să afișeze:

a) valorile $P(-1)$ și $P(1)$;

b) valoarea 1 sau valoarea 0, după cum P se divide sau nu prin $X-b$. Cel puțin una dintre proceduri/funcții va fi scrisă în Pascal, C sau $C++$, iar celelalte în pseudocod.

Notă: Timp de lucru 3 ore.

Barem de corectare

I. ALGEBRĂ	
1. Oficiu	1 p
a) $n=-2,\ p=0$	4 p
b) $g=X^2-2X$ (câtul nu depinde de n și p)	1 p
$1+2+3+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$	1 p
$1^2+2^2+3^2+...+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$	2 p
2. Oficiu	1 p
a) parte stabilă	2 p
asociativitate	1 p
element neutru I_3	1 p

element simetric $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & -b+ac \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 2 p

b) nu este comutativ 3 p

(dacă se scrie ce înseamnă necomutativitatea 1 p

II. ANALIZĂ MATEMATICĂ

1. Oficiu 1 p

Amplificare cu $\sqrt{n+a}+\sqrt{n}$ 4 p

Calcul limită 4 p

$a=2$ 1 p

2. Oficiu 1 p

a) 3 p

b) Calcul $F(A)$ 4 p

c) limita $=1/2$ 2 p

II. GEOMETRIE

1. Oficiu 1 p

Figura 2 p

Aplicarea teoremei bisectoarei 3 p

M mijloc $\Rightarrow PQ$ paralela 2 p

Implicația reciprocă 2 p

2. Oficiu 1 p

Figura 3 p

a) 5 p

b) 1 p

IV. INFORMATICĂ

1. Oficiu 1 p

Cunoştinţe pseudocod 1 p

1 a) 3 p

1 b) 3 p

Cunoştinţe limbaj 2 p

2. Oficiu 1 p

Cunoştinţe pseudocod 1 p

2 a) 3 p

2 b) 3 p

Cunoştinţe limbaj 2 p

NOTĂ: La cele două subiecte tratate din subiectele I, II, III, IV se va acorda câte o notă $\in \{2, 3, 4, ..., 20\}$. Nota finală se obține adunând cele două note de mai sus şi împărțind rezultatul la 4.