

Concursul MateInfoUB 2021 — secțiunea Informatică

Exemple de probleme pentru etapa I

Etapa I va conține un număr de 20-30 de probleme de dificultăți diferite (ușoară, medie, crescută). Fiecare problemă va primi un punctaj corelat cu dificultatea ei. Vor fi aproximativ 50% probleme de dificultate ușoară, 30% probleme de dificultate medie și 20% probleme de dificultate crescută. Timpul de lucru va fi de 2 ore. Modelul conține o selecție de probleme de diverse dificultăți asemănătoare cu cele care vor fi utilizate pentru etapa I. Vom publica în curând soluțiile detaliate pentru problemele din acest model.

Exemple de probleme de dificultate scăzută

1. Se consideră definite două variabile întregi x și y și următoarele două expresii (în limbajele C/C++ și Pascal):

Varianta C/C++	Varianta Pascal
$u = !((x == y) \mid (x == z));$ $v = (x != y) \&\& (x != z);$	$u := \text{NOT } ((x = y) \text{ OR } (x = z));$ $v := (x <> y) \text{ AND } (x <> z);$

Care dintre următoarele afirmații este adevărată:

- A. există x, y, z astfel încât u diferit de v
- B. oricare ar fi x, y, z avem u egal cu v
- C. oricare ar fi x, y, z avem u diferit de v
- D. u egal cu v dacă și numai dacă x egal cu y
- E. u egal cu v dacă și numai dacă x diferit de y

2. Considerăm următorul algoritm, în care n și k sunt variabile de tip întreg:

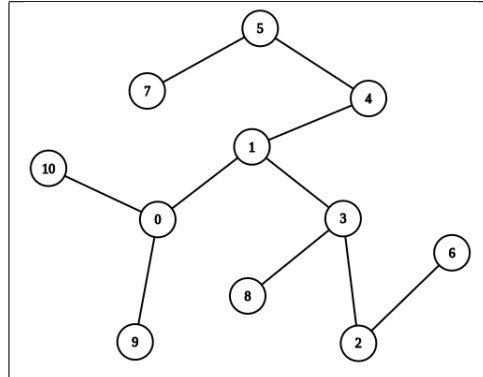
```
citește  $n$ 
 $k \leftarrow 0$ 
pentru  $i = 1, n$  execută
    pentru  $j = 1, n$  execută
        dacă  $i = j$  atunci
             $k \leftarrow k - 1$ 
        altfel
             $k \leftarrow k + 1$ 
scrie  $k$ 
```

Dacă pentru variabila n se va citi un număr natural nenul, care dintre următorii algoritmi este echivalent cu cel dat?

- A. **citește** $n; k \leftarrow n \cdot n - 2 \cdot n; \text{scrie } k$
- B. **citește** $n; k \leftarrow (n - 1) \cdot (n - 1) - n; \text{scrie } k$

- C. citește $n; k \leftarrow n \cdot n - n$; scrie k
 D. citește $n; k \leftarrow (n - 1) \cdot (n - 1) + n$; scrie k
 E. citește $n; k \leftarrow n \cdot (n - 1) + n$; scrie k

3. Considerăm arborele din imagine:



Asupra sa putem aplica oricâte operații de două tipuri:

1. ștergem o muchie;
2. adăugăm o muchie.

Care este numărul minim de operații care trebuie aplicate arborelui pentru a-l transforma într-un singur lanț care leagă cele 11 noduri?

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5 E. 6

4. Care sunt ultimele patru cifre ale produsului tuturor numerelor prime mai mici sau egale cu 50?

- A. 5100 B. 1410 C. 9825 D. 2190 E. 0030

5. Un șir de caractere este *plictisitor* dacă are lungime egală cu 7 și conține caractere din mulțimea $\{A, B\}$.

Care este al 85-lea șir de caractere *plictisitor* în ordine alfabetică?

- A. BAABBB B. BBBBAB C. ABBBAA D. BABABAA E. BABAAAB

Exemple de probleme de dificultate medie

1. Cristian este un copil neastâmpărat. De fiecare dată când iese afară cu tatăl său îi place să coboare pe scara cu 10 trepte de la bloc fie o singură treaptă, fie două trepte deodată.

În câte moduri diferite poate coborî Cristian cele 10 trepte?

A. 89 B. 90 C. 91 D. 92 E. 93

2. Ce valoare furnizează următorul subprogram, considerând faptul că n și x sunt două numere naturale nenule?

Varianta C/C++	Varianta Pascal
<pre>int test(int n, int x) { if (n == 0) return 1; else if (x > n) return 0; else return test(n - x, x + 1); }</pre>	<pre>function test(n, x:integer):integer; begin if (n = 0) then test := 1 else if (x > n) then test := 0 else test := test(n - x, x + 1); end;</pre>

- A. 1 dacă există un număr natural k astfel încât $n = \frac{k(2x+k+1)}{2}$ sau 0 în caz contrar
 B. 1 dacă există un număr natural k astfel încât $n = \frac{(k+1)(2x+k)}{2}$ sau 0 în caz contrar
 C. 1 dacă $\text{cmmdc}(x, n) = 1$ sau 0 în caz contrar
 D. 1 dacă n este divizibil cu x sau 0 în caz contrar
 E. 1 dacă este x divizibil cu n sau 0 în caz contrar

3. Se consideră un graf neorientat $G = (V, E)$ cu $|V| = n$ noduri și $|E| = m$ muchii, aciclic, fără muchii multiple și fără muchii de la un nod la el însuși.

Să se afle cea mai bună complexitate-timp a unui algoritm care testează dacă graful G este conex, primind ca input calea către un fișier text ce conține descrierea lui G în următorul format:

- pe prima linie numerele n și m , separate prin spațiu;
- pe următoarele m linii cele m muchii, reprezentate prin perechi de numere $u_i v_i$ ($1 \leq i \leq m$), separate prin spațiu.

Se garantează că descrierea din fișierul primit ca input este conformă cu restricțiile din enunț.

A. $O(n + m)$ B. $O(m)$ C. $O(n)$ D. $O(1)$ E. $O(nm)$

Exemple de probleme de dificultate ridicată

1. Considerăm următorul algoritm, unde $\lfloor x \rfloor$ indică partea întreagă a numărului real x :

```
citește  $n$   
 $sol \leftarrow 0$   
pentru  $i = 1, \overline{n}$  execută  
   $n' \leftarrow n$   
   $i' \leftarrow i$   
   $bad \leftarrow 0$   
  cât timp  $i' > 0$  și  $bad = 0$  execută  
    cât timp  $n' > 0$  și  $n' \not\equiv i' \pmod{10}$  execută  
       $n' \leftarrow \lfloor n'/10 \rfloor$   
    dacă  $n' = 0$  atunci  
       $bad \leftarrow 1$   
    altfel  
       $n' \leftarrow \lfloor n'/10 \rfloor$   
       $i' \leftarrow \lfloor i'/10 \rfloor$   
    dacă  $bad = 0$  atunci  
       $sol \leftarrow sol + 1$   
scrie  $sol$ 
```

Dacă pentru variabila n se va citi valoarea 1342722453654, care va fi restul valorii afișate la împărțirea cu 107?

- A. 17 B. 61 C. 39 D. 0 E. 89

2. Considerăm secvența de numere naturale x_1, x_2, \dots, x_n . Din această secvență se pot obține alte secvențe y_1, y_2, \dots, y_n folosind (de oricâte ori) următoarea operație:

- mai întâi, se extrage elementul de pe poziția i ($2 \leq i \leq n$);
- după aceea, se mută toate elementele situate la stânga poziției i cu o poziție la dreapta, iar elementul de pe poziția i se plasează pe prima poziție a secvenței.

De exemplu din secvența 1, 2, 3 folosind o singură operație se pot obține secvențele: 2, 1, 3 (se mută elementul de pe poziția 2) și 3, 1, 2 (se mută elementul de pe poziția 3).

Se dau următoarele două secvențe:

$$x = 30, 19, 4, 5, 3, 17, 15, 16, 2, 13, 20, 21, 23, 24, 22, 1, 10, 6, 7, 8, 9, 11, 25, 26, 27, 28, 29, 12, 14, 18$$

$$y = 30, 2, 19, 29, 25, 1, 5, 15, 22, 18, 27, 10, 4, 3, 17, 16, 13, 20, 21, 23, 24, 6, 7, 8, 9, 11, 26, 28, 12, 14$$

Numărul minim de operații necesare pentru a se obține secvența y din secvența x este egal cu:

- A. 13 B. 6 C. 12 D. 15 E. Nu se poate obține

Universitatea din București
Facultatea de Matematică și Informatică

Concursul MateInfoUB 23.05.2021
Secțiunea informatică

Răspunsuri subiect etapa 1

1. A
2. C
3. A
4. E
5. B
6. D
7. D
8. C
9. A
10. D
11. B
12. B
13. B
14. D
15. C
16. A
17. I
18. E
19. F
20. B

Concursul MateInfoUB 2021, secțiunea Informatică

23 Mai 2021

Concursul constă în obținerea unui punctaj cât mai mare prin rezolvarea celor 20 de probleme propuse. Fiecare problemă are un punctaj corespunzător gradului ei de dificultate. Cel mai probabil, nu veți avea suficient timp să rezolvați toate problemele.

1 Probleme de dificultate scăzută

Problema 1

(2 puncte) Care este ultima cifră a celui mai mare număr de 7 cifre, divizibil cu 7, care conține în componența sa doar cifre strict mai mici decât 7?

- A. 0
- B. 2
- C. 3
- D. 5
- E. 6

Problema 2

(2 puncte) Care expresie implementează corect $\lceil \frac{n}{k} \rceil$ pentru toate perechile n, k de numere naturale nenule? ($\lceil a \rceil$ reprezintă partea întreagă superioară a numărului real a , spre exemplu $\lceil 2.8 \rceil = 3$, $n \text{ **div** } k$ reprezintă câtul împărțirii lui n la k și $n \text{ **mod** } k$ reprezintă restul împărțirii lui n la k).

- A. $n \text{ **div** } k$
- B. $(n + k) \text{ **div** } k$
- C. $(n + k - 1) \text{ **div** } k$
- D. $n \text{ **div** } (k - 1)$
- E. $(n \text{ **div** } k) + (n \text{ **mod** } k)$

Problema 3

(2 puncte) Considerăm următorul cod scris în limbajul C++ / Pascal:

```

Type MyArray = array[0..9999] of Integer;

int f(int t[10000], int n) {
    int i = 0, s = 0;
    while (i < n) {
        int j = i + 1;
        while (j < n && t[i] == t[j])
            j += 1;
        s += 1;
        i = j;
    }
    return s;
}

function f(t : MyArray; n : Integer) : Integer;
var i, s, j : Integer;
begin
    i := 0; s := 0;
    while i < n do begin
        j := i + 1;
        while (j < n) and (t[i] = t[j]) do
            j := j + 1;
        s := s + 1;
        i := j;
    end;
    f := s;
end;

```

Definiții: O *subsecvență* a lui t este o listă de valori aflate pe poziții consecutive crescătoare, e.g., $[t[3], t[4], t[5]]$. Un *subșir* al lui t este o listă de valori aflate pe poziții ordonate crescător (nu neapărat consecutive), e.g., $[t[3], t[5], t[9]]$.

Presupunând că tabloul t este format din n numere **ordonate crescător**, precizați ce returnează $f(t, n)$:

- A. numărul valorilor distincte din tabloul t
- B. lungimea maximă a unei subsecvențe din tabloul t formată din valori egale
- C. numărul subsecvențelor strict crescătoare din tabloul t
- D. lungimea maximă a unui subșir din tabloul t format din valori egale
- E. numărul valorilor care se repetă de cel puțin două ori din tabloul t

Problema 4

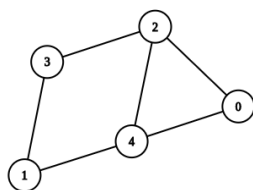
(2 puncte) Într-o sală de conferințe sunt mai multe persoane, fiecare având o rezervă suficient de mare de cărți de vizită. Știind că oricare două persoane pot să facă schimb de cărți de vizită **cel mult o dată** și s-au efectuat 23052021 de schimburi, care este numărul minim de persoane care se pot afla în sală?

- A. 4801
- B. 4802
- C. 4803
- D. 6790
- E. 6791

Problema 5

(2 puncte) Pentru un graf G , un *arbore parțial* este un graf conex, fără cicluri, conținând același număr de noduri ca G și doar muchii din G (dar nu neapărat toate).

Numărul de *arbori parțiali* ai grafului de mai jos este egal cu :



- A. 12
- B. 11
- C. 9
- D. 15
- E. 16

Problema 6

(2 puncte) Un număr natural se numește *palindrom* dacă se citește la fel de la stânga la dreapta și de la dreapta la stânga. Spre exemplu, 13231 și 2662 sunt *palindromuri*, dar 145 sau 1234322 nu sunt.

Un număr natural se numește *pseudo-palindrom* dacă cifrele sale pot fi reordonate astfel încât să devină *palindrom* (în particular orice *palindrom* este și *pseudo-palindrom*). Spre exemplu, 13321 și 2626 sunt *pseudo-palindromuri*.

Fie X cel mai mare număr *pseudo-palindrom* mai mic sau egal cu 1000465. Care este restul lui X la împărțirea cu 37?

- A. 36
- B. 4
- C. 1
- D. 35
- E. 25

Problema 7

(2 puncte) Se dă următoarea adunare $ERAM + MARE = MARET$, unde fiecare majusculă reprezintă o cifră (nu neapărat distinctă de celelalte). Fiind primele cifre ale numerelor, cifrele corespunzătoare lui M și E trebuie să fie diferite de 0. Care este valoarea sumei $M + A + R + E + T$?

- A. 21
- B. 7
- C. 16
- D. 18
- E. 30

Problema 8

(2 puncte) Ionel are 10 creioane. Lungimile fiecărui creion sunt:

$$4, 3, 7, 8, 7, 4, 5, 8, 13, 15$$

El își dorește să obțină creioane având doar două lungimi diferite. Pentru a realiza acest lucru, el poate scurta (prin ascuțire) unele creioane.

Care este suma maximă a lungimilor creioanelor pe care o poate obține Ionel, după ce efectuează operațiile?

- A. 46
- B. 50
- C. 54
- D. 56
- E. 62

Problema 9

(2 puncte) O mulțime de numere naturale se numește *13-liberă* dacă nu putem obține numărul 13 ca sumă a unor elemente **distincte** din mulțime. Spre exemplu, mulțimea 1, 5, 7, 11 nu este *13-liberă* fiindcă $1 + 5 + 7 = 13$, dar mulțimea 1, 5, 6 este *13-liberă* (notați că deși $1 + 6 + 6 = 13$, condiția descrisă nu este încălcată, 6 fiind folosit de două ori).

Care este cardinalul maxim al unei submulțimi *13-libere* a mulțimii 1, 2, 3...10?

- A. 5
- B. 4
- C. 3
- D. 6
- E. 8

Problema 10

(2 puncte) Fie n cel mai mare număr natural **prim** de 5 cifre cu toate cifrele distincte.

Care este restul împărțirii lui n la 37?

- A. 27
- B. 4
- C. 11
- D. 15
- E. 31

2 Probleme de dificultate medie

Problema 11

(3 puncte) Vă amintiți de Cristian cel neastâmpărat? Tatăl lui s-a hotărât să îl învețe puțină aritmetică.

El spune că de la un număr natural x se poate ajunge la un număr natural y ($y > x$) trecând prin numerele dintre ele utilizând o secvență de pași. Lungimea fiecărui pas este pozitivă și poate fi egală cu lungimea pasului anterior, mai mare cu 1 sau mai mică cu 1. **Lungimile primului și ultimului pas trebuie să fie egale cu 1.**

Problema dată lui Cristian este de a găsi numărul minim de pași prin care se poate ajunge de la 2021 la 3110. Ce să aleagă Cristian?

- A. 64
- B. 65
- C. 66
- D. 67
- E. 68

Problema 12

(3 puncte) Primarul P. are de acoperit un perete lung de 100 m și înalt de 1 m, pe care vrea să îl împânzească cu postere publicitare. În acest sens, a cumpărat 8 postere, de înălțime egală cu 1 m și lățimile (exprimate în metri):

12, 27, 13, 25, 26, 38, 28, 38

El va trebui să aranjeze posterele de-a lungul peretelui. Posterele nu au voie să se suprapună și nu pot depăși marginile peretelui. Care este aria maximă de perete pe care o poate acoperi folosind posterele cumpărate (exprimată în m^2)?

- A. 93
- B. 94
- C. 95
- D. 96
- E. 97

Problema 13

(3 puncte) Considerăm triunghiul infinit de mai jos, format din numere naturale, în care numărul 1 se află la nivelul 1, numerele 2 și 3 se află la nivelul 2, numerele 4, 5 și 6 se află la nivelul 3 și așa mai departe:

```

      1
    2 3
  4 5 6
7 8 9 10
11 12 13 14 15
16 17 18 19 20 21
22 22 23 24 25 26 27
.....
```

Pentru un anumit nivel k , vrem să calculăm suma numerelor din **interiorul** tringhiului care se oprește la nivelul k . Spre exemplu, pentru nivelul $k = 5$ numerele din interiorul triunghiului creat sunt 5, 8, 9,

și suma lor este 22; iar pentru $k = 7$ numerele din interiorul triunghiului creat sunt 5, 8, 9, 12, 13, 14, 17, 18, 19 și 20 și suma lor este 135.

Calculați suma numerelor din interiorul triunghiului care se oprește la nivelul $k = 2021$.

- A. 2076403516157
- B. 2080520640766
- C. 2080520640767
- D. 2084643884965
- E. 2084643884966

Problema 14

(2 puncte) Fie A o matrice binară cu 50 de linii și 50 de coloane (numerotate de la 1 la 50). Celula de pe rândul i și coloana j conține valoarea 1 dacă și numai dacă numărul $50 \cdot (i-1) + j$ se divide cu 7 **sau** cu 13 (altfel conține valoarea 0). Matricea se poate vizualiza aici: <https://i.ibb.co/k0tKWgT/img-5050.png> (celulele albe reprezintă pozițiile egale cu 0, iar celulele negre pozițiile egale cu 1).

Vrem să plasăm **un singur “domino”** (piesă de mărime 1×2 sau 2×1) în matrice. Domino-ul trebuie să acopere 2 celule vecine (pe orizontală sau verticală) de 0 ale matricei. În câte feluri putem face acest lucru?

- A. 1479
- B. 1480
- C. 1520
- D. 2959
- E. 3039

Problema 15

(3 puncte) Considerăm următorul algoritm de acoperire a unei sume de bani, folosind bancnotele disponibile în portofel:

Cât timp suma este neacoperită și avem în portofel o bancnotă de valoare mai mică sau egală cu suma, alegem cea mai mare bancnotă de acest tip, scoatem bancnota din portofel și reducem suma cu valoarea ei.

Dacă algoritmul se încheie cu suma 0, a reușit, altfel a eșuat.

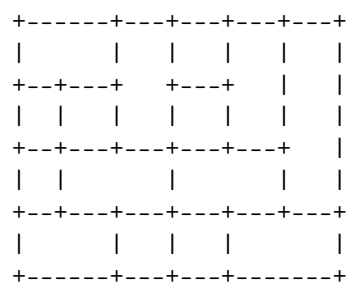
În funcție de configurația de bancnote disponibile și suma de acoperit, e posibil ca acest algoritm să nu găsească o soluție deși ea există. Spre exemplu, dacă avem bancnotele $\{1, 1, 4, 5, 6\}$ și trebuie să acoperim suma $S = 9$, algoritmul va selecta bancnotele 6, 1, 1, după care se va bloca, fiindcă nu mai poate acoperi suma rămasă (egală cu 1). Totuși, există soluția $\{4, 5\}$ care acoperă complet suma. Numim o astfel de configurație de bancnote disponibile, respectiv sumă de acoperit, un contraexemplu pentru algoritmul descris.

Fie S_{min} cea mai mică sumă de acoperit care apare într-un contraexemplu construit doar cu tipurile de bancnote românești aflate în circulație, anume: $\{1, 5, 10, 50, 100, 200, 500\}$. Fiecare tip de bancnotă poate fi folosit de oricâte ori (inclusiv deloc). Care este restul lui S_{min} la împărțirea cu 37?

- A. 13
- B. 3
- C. 8
- D. 18
- E. 23

Problema 16

(3 puncte) Câte dreptunghiuri distincte sunt în figura următoare?



- A. 43
- B. 44
- C. 45
- D. 46
- E. 47

3 Probleme de dificultate ridicată

Problema 17

(5 puncte) Pe masă este scrisă ecuația $a + b = c$. După un cutremur masiv, s-au permutat toate cifrele și semnele matematice între ele și s-a obținut o nouă “ecuație” (evident, greșită):

$$129129851 = 29552 + 1177003$$

Care ar fi putut fi valoarea inițială a lui c ?

- A. 8739191
- B. 3001892
- C. 3072104
- D. 3735094
- E. 5790835
- F. 7192195
- G. 8952530
- H. 15038950
- I. 15111922
- J. 15839920

Problema 18

(5 puncte) În această problemă ne vom referi la date calendaristice care țin cont de an, lună, zi, ora și minut.

Spunem că o astfel de dată este *robustă* dacă putem deduce în mod unic la ce dată validă se referă o mulțime de numere, fără să știm corespondența dintre valori și câmpurile datei.

Spre exemplu, având valorile $\{3, 20, 30, 53, 2021\}$, știm că nu poate fi vorba decât de 30.03.2021 20:53, deci această dată este *robustă*. Pe de altă parte, data 23.05.2021 20:53 nu este *robustă*, deoarece mulțimea $\{5, 20, 23, 53, 2021\}$ poate identifica și alte date (de exemplu, 20.05.2021 23:53).

Câte date între 01.01.2021 00:00 și 31.12.2021 23:59 sunt *robuste*?

O dată este validă dacă ora este în intervalul $[0, 23]$, minutul în $[0, 59]$, luna în $[1, 12]$, ziua în intervalul corespunzător lunii respective conform calendarului anului 2021.

- A. 27412
- B. 29568
- C. 35797
- D. 37409
- E. 44382
- F. 44516
- G. 46870
- H. 51260
- I. 525600
- J. 535680

Problema 19

(5 puncte) Considerăm 7 copii (identificați prin numere de la 1 la 7) și relațiile de prietenie (bidirecționale):

$$\{(1, 2), (4, 5), (4, 6), (6, 7), (7, 2), (4, 2), (3, 1), (5, 6), (4, 3), (3, 2)\}$$

În ziua 0, copilul 5 află de la profesoară un secret (că aceasta vrea să organizeze o onomastică pentru copilul 2 la sfârșitul celei de-a 4-a zi). În fiecare dintre următoarele 4 zile, se întâmplă următorul lucru:

Fiecare copil care știe secretul își alege exact un prieten aleator (echiprobabil din lista lui de prieteni) și îi comunică și lui secretul (se poate întâmpla ca un copil să comunice secretul de mai multe ori aceluiași prieten, în zile diferite).

Astfel, noi copii pot afla secretul, pe care îl vor comunica în continuare începând cu zilele următoare.

Care este probabilitatea pentru copilul 2 să afle secretul cel târziu la sfârșitul celei de-a 4-a zi?

(Alegeți varianta cea mai apropiată de răspunsul real)

- A. 0%
- B. 26%
- C. 32%
- D. 44%
- E. 58%
- F. 68%
- G. 76%
- H. 85%
- I. 94%
- J. 100%

Problema 20

(5 puncte) Compania *Grigorescu*: *Grile, grătare și grilaje* are 7 angajați. Ziua de mâine are un total de 1440 de minute. Fiecare angajat știe exact câte minute poate lucra mâine. Aceste valori sunt date de șirul:

480, 360, 333, 1000, 285, 560, 15

Un angajat care poate lucra X minute poate alege orice interval continuu de X minute care începe la minut fix și este inclus complet în cele 1440 de minute ale zilei. Angajații vor să-și coordoneze alegerile astfel încât oricare doi dintre ei să aibă cel puțin un minut comun în program. Câte configurații de alegeri satisfac această cerință? Răspunsul este foarte mare, deci suntem interesați de restul acestui număr la împărțirea cu 1 000 000 007.

O configurație A diferă de o configurație B dacă există cel puțin un angajat care și-a ales un anumit interval în A și un interval diferit în B .

- A. 82930407
- B. 195773645
- C. 231919841
- D. 353129100
- E. 371820425
- F. 469187746
- G. 715377483
- H. 67843200
- I. 802170567
- J. 918401827