Universitatea din Bucureşti,
Facultatea de Matematică şi Informatică

Concursul de admitere iulie 2010,
Domeniul de licenţă - *Informatică*

I. Algebră

1. a) Să se arate că $\sqrt{2}+i$ este rădăcină a ecuaţiei $x^4-2x^2+9=0$ şi să se determine şi celelalte rădăcini complexe ale ecuaţiei.

b) Să se arate că $S_n=(\sqrt{2}+i)^n+(\sqrt{2}-i)^n$ este număr real pentru orice $n\in\mathbf{N}^*$ şi că S_n este număr întreg pentru orice $n\in\mathbf{N}^*$ par.

2. Pentru fiecare număr întreg k considerăm mulţimea $\mathcal{A}_k=\left\{\left(\begin{array}{cc} x & y\\ ky & x\end{array}\right)\middle| x,y\in\mathbf{Z}\right\}$. Să se arate că:

a) $\mathcal{A}_k$ este inel comutativ cu adunarea şi înmulţirea matricelor pentru orice $k\in\mathbf{Z}$;

b) există $X,Y\in\mathcal{A}_1$ nenule cu $XY=0$ (unde 0 este matricea nulă din $M_2(\mathbf{Z})$);

c) dacă $X,Y\in\mathcal{A}_2$ şi $XY=0$, atunci $X=0$ sau $Y=0$.

II. Analiză

1. Fie funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ cu $f(x)=x-1+e^{-x},\ \forall x\in\mathbf{R}$.

a) Calculaţi derivata funcţiei f şi $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{f'(x)}$.

b) Studiaţi monotonia funcţiei f şi arătaţi că$f(x)\geq 0$, pentru orice $x\in\mathbf{R}$.

c) Definim şirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ cu $x_0>0$ şi $x_{n+1}=f(x_n),\ \forall n\in\mathbf{N}$. Arătaţi că şirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este convergent şi aflaţi limita sa.

2. Fie funcţiile $f,g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ cu $f(x)=\dfrac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2}+\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right)$ şi $g(x)=\sqrt{1+x^2},\ \forall x\in\mathbf{R}$.

a) Să se arate că funcţia f este o primitivă a funcţiei g.

b) Să se calculeze $I_1=\displaystyle\int_0^\pi \sin x\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx$ şi $I_2=\displaystyle\int_0^\pi \cos x\sqrt{2-\cos^2 x}\,dx$.

III. Geometrie

1. Se dă patrulaterul convex ABCD şi M,N mijloacele diagonalelor AC şi respectiv BD. Să se arate că

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}=4\,\overrightarrow{MN}\ .$$

2. Pe cercul $\mathcal{C}$ de centru O şi rază R se consideră două puncte diametral opuse A şi B şi un punct M diferit de A şi de B. Fie N punctul de intersecţie al dreptei AM cu tangenta în B la cercul $\mathcal{C}$. Să se exprime distanţele NA, NB şi MN în funcţie de R şi de măsura unghiului $\widehat{MAB}$.

3. Să se determine $m\in\mathbf{R}$ pentru care punctele $A(2+m,m)$, $B(0,4)$ şi $C(5,3)$ sunt vârfurile unui triunghi dreptunghic cu ipotenuza BC.

4. Să se rezolve în $\mathbf{R}$ ecuaţia $\cos 2x-\sqrt{3}\cos x+1=0$.

IV. Informatică

Fie multimea de numere $H=\{2^x\cdot 3^y\cdot 5^z\mid x,y,z\in\mathbf{N}\}$. Să se rezolve următoarele cerinţe într-unul dintre limbajele de programare studiate în liceu (Pascal/C/C++):

a) Să se scrie o procedură care pentru un număr natural $a\leq 32000$ decide dacă a aparţine mulţimii H. Să se determine complexitatea timp a acestei proceduri în funcţie de a.

b) Dându-se un număr natural $n\leq 100$, să se afişeze primele n numere ale mulţimii H, în ordine crescătoare. De exemplu, pentru $n=8$ trebuie afişate numerele: $1,2,3,4,5,6,8,9$.

c) Daţi o soluţie în timp $O(n)$, liniar în funcţie de n, pentru cerinţa de la punctul b). Justificaţi.

Notă: Pentru fiecare soluţie se vor preciza detaliile algoritmului folosit şi ale implementării sub formă de program: variabile, structuri de date, structuri iterative, instrucţiuni condiţionale.

Timp de lucru 3 ore.

Universitatea din Bucureşti,
Facultatea de Matematică şi Informatică

Concursul de admitere iulie 2010,
Domeniul de licenţă - ***Matematică***

I. Algebră

1. Fie $x_1, x_2 \in \mathbf{C}$ rădăcinile ecuaţiei $x^2 + 2x + m = 0$, unde $m \in \mathbf{R}$.
a) Să se determine valorile lui m pentru care $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$.
b) Să se calculeze $x_1^2 + x_2^2$ şi $x_1^3 + x_2^3$ în funcţie de m.
c) Dacă $m = -2^{2p}$ cu $p \in \mathbf{N}$, arătaţi că ecuaţia nu are rădăcini întregi.

2. Fie $A = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbf{Z}\}$. Să se arate că:
a) A este inel comutativ fără divizori ai lui zero în raport cu operaţiile uzuale de adunare şi înmulţire a numerelor reale;
b) $2 + \sqrt{3}$ este un element inversabil al inelului A. Deduceţi că A are o infinitate de elemente inversabile.

II. Analiză

1. Fie funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}$ cu $f(x) = \dfrac{x \ln x - 1}{x}$, $\forall x > 0$.
a) Studiaţi monotonia funcţiei f.
b) Determinaţi asimptotele la graficul funcţiei f.
c) Definim şirul $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ cu $x_0 > e$ şi $x_{n+1} = x_n f(x_n) + 1$, $\forall n \in \mathbf{N}$. Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

2. Fie $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{x^n + 1}\, dx$, unde $n \in \mathbf{N}^*$.
a) Să se calculeze I_1 şi I_2.
b) Să se arate că $I_n < 1$ şi $I_{n+1} < I_n$ pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$.

III. Geometrie

1) Fie paralelogramul $ABCD$. Notăm cu $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AD}$. Fie E mijlocul lui AD şi punctele R, S astfel încât $\overrightarrow{CS} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$ şi $\overrightarrow{DR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$. Să se exprime vectorii $\overrightarrow{BE}$ şi $\overrightarrow{RS}$ în funcţie de $\overrightarrow{u}$ şi $\overrightarrow{v}$ şi să se arate că BE || RS.

2) Fie M un punct interior dreptunghiului $ABCD$. Să se arate că

$$MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2.$$

3) În sistemul cartezian de coordonate xOy considerăm punctele $A(3, -2)$, $B(2, 0)$ şi $C(4, 1)$. Să se scrie ecuaţia dreptei care trece prin punctul C şi este paralelă cu dreapta AB.

4) Ştiind că $\sin x - \cos x = \frac{1}{2}$, să se calculeze $\sin 2x$.

IV. Informatică

Fie $S(m)$ un sistem de triaj cu o stivă de dimensiune m şi două operaţii:
1. se introduce în stivă un număr citit de la tastatură
2. se afişează la consolă un număr extras din stiva nevidă,
oricare dintre cele două operaţii putând fi aplicată ori de câte ori este posibil.

Prin citirea de la tastatură a numerelor $1, \ldots, n$, în această ordine, cu $n \le m$ şi aplicarea operaţiilor descrise mai sus, $S(m)$ poate genera permutări cu n elemente, dar nu toate.

a) Daţi exemplu de permutare cu 3 elemente care nu poate fi generată de $S(m)$, ($n = 3$, $m \ge 3$).
b) Fie p o permutare arbitrară cu $n \le 100$ elemente, dată. Să se scrie un program într-unul dintre limbajele studiate în liceu (Pascal/C/C++) care să decidă dacă p poate fi generată de $S(m)$.

Notă: Se vor preciza detaliile algoritmului folosit şi ale implementării sub formă de program: variabile, structuri de date, structuri iterative, instrucţiuni condiţionale.

Timp de lucru 3 ore.