

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se determine numărul natural x din egalitatea $1+5+9+\dots+x=231$.
- 5p** 2. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale inecuația $2x^2-5x+3\leq 0$.
- 5p** 3. Să se determine inversa funcției bijective $f:(0,\infty)\rightarrow(1,\infty)$, $f(x)=x^2+1$.
- 5p** 4. Se consideră mulțimea $A=\{1,2,3,\dots,10\}$. Să se determine numărul submulțimilor cu trei elemente ale mulțimii A , care conțin elementul 1.
- 5p** 5. Să se determine $m\in\mathbb{R}$, astfel încât distanța dintre punctele $A(2,m)$ și $B(m,-2)$ să fie 4.
- 5p** 6. Să se calculeze $\cos\frac{23\pi}{12}\cdot\sin\frac{\pi}{12}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, cu $a,b\in\mathbb{R}$ și $b\neq 0$.
- 5p** a) Să se arate că dacă matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ verifică relația $AX=XA$, atunci există $u,v\in\mathbb{R}$, astfel încât $X=\begin{pmatrix} u & v \\ v & u \end{pmatrix}$.
- 5p** b) Să se arate că $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $A^n=\begin{pmatrix} x_n & y_n \\ y_n & x_n \end{pmatrix}$, unde $x_n=\frac{(a+b)^n+(a-b)^n}{2}$, $y_n=\frac{(a+b)^n-(a-b)^n}{2}$.
- 5p** c) Să se rezolve în mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuația $X^3=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
2. Se consideră $a\in\mathbb{Z}_7$ și polinomul $f=X^6+aX+\hat{5}\in\mathbb{Z}_7[X]$.
- 5p** a) Să se verifice că, pentru orice $b\in\mathbb{Z}_7$, $b\neq\hat{0}$, are loc relația $b^6=\hat{1}$.
- 5p** b) Să se arate că $x^6+\hat{5}=(x^3-\hat{4})(x^3+\hat{4})$, $\forall x\in\mathbb{Z}_7$.
- 5p** c) Să se demonstreze că pentru orice $a\in\mathbb{Z}_7$, polinomul f este reductibil în $\mathbb{Z}_7[X]$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră numărul real $a>0$ și funcția $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-ax$.
- 5p** a) Să se determine asimptota oblică la graficul funcției f către $-\infty$.
- 5p** b) Să se determine punctele de extrem local ale funcției f .
- 5p** c) Să se determine $a\in(0,\infty)$, știind că $f(x)\geq 1$, $\forall x\in\mathbb{R}$.
2. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\rightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.
- 5p** a) Să se arate că funcția $F:(0,\infty)\rightarrow\mathbb{R}$, $F(x)=2\sqrt{x}(\ln x-2)$, este o primitivă a funcției f .
- 5p** b) Să se arate că orice primitivă G a funcției f este crescătoare pe $[1,\infty)$.
- 5p** c) Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x=\frac{1}{e}$ și $x=e$.

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se arate că numărul $(1-i)^{24}$ este real.
- 5p** 2. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\frac{3x-1}{x+1} + \frac{x+1}{2x-1} = 3$.
- 5p** 3. Să se determine inversa funcției bijective $f : \mathbb{R} \rightarrow (1, \infty)$, $f(x) = e^x + 1$.
- 5p** 4. Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr \overline{ab} din mulțimea numerelor naturale de două cifre, să avem $a \neq b$.
- 5p** 5. Să se calculeze lungimea medianei din A a triunghiului ABC, unde A(-2, -1), B(2, 0), C(0, 6).
- 5p** 6. Fie vectorii $\vec{u} = m\vec{i} + 3\vec{j}$ și $\vec{v} = (m-2)\vec{i} - \vec{j}$. Să se determine $m > 0$ astfel încât vectorii \vec{u} și \vec{v} să fie perpendiculari.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
- 5p** a) Să se arate că există $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $A^2 = aA$.
- 5p** b) Să se calculeze $(A - A^t)^{2009}$.
- 5p** c) Să se rezolve ecuația $X^5 = A$, $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Pentru a, b din mulțimea $M = [0, \infty)$ se definește operația $a * b = \ln(e^a + e^b - 1)$.
- 5p** a) Să se arate că dacă $a, b \in M$, atunci $a * b \in M$.
- 5p** b) Să se arate că legea de compoziție „ $*$ ” este asociativă.
- 5p** c) Pentru $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, să se determine $a \in M$ astfel încât $\underbrace{a * a * \dots * a}_{\text{de } n \text{ ori } a} = 2a$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră sirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dat de $a_1 \in (0, 1)$ și $a_{n+1} = a_n \left(1 - \sqrt{a_n}\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
- 5p** a) Să se arate că $a_n \in (0, 1)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
- 5p** b) Să se demonstreze că sirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este strict descrescător.
- 5p** c) Să se arate că sirul $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, dat de $b_n = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, este mărginit superior de a_1 .
2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}$.
- 5p** a) Să se arate că funcția $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right)$, $x \in \mathbb{R}$, este o primitivă a funcției f .
- 5p** b) Să se calculeze aria suprafeței delimitată de dreptele $x=0, x=1, Ox$ și graficul funcției $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = (2x+1)f(x)$.
- 5p** c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n f(x)dx$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

Varianta 3

SUBIECTUL I (30p)

- 5p 1. Să se ordoneze crescător numerele $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[4]{5}$.
- 5p 2. Să se determine valoarea minimă a funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4x^2 - 8x + 1$.
- 5p 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\lg(x-1) + \lg(6x-5) = 2$.
- 5p 4. Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie pătrat perfect.
- 5p 5. Să se determine ecuația dreptei care trece prin punctul $A(6, 4)$ și este perpendiculară pe dreapta $d : 2x - 3y + 1 = 0$.
- 5p 6. Știind că $\sin \alpha = \frac{1}{3}$, să se calculeze $\cos 2\alpha$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
- 5p a) Să se verifice egalitatea $A^2 - A = 2I_3$.
- 5p b) Să se calculeze A^{-1} .
- 5p c) Să se arate că $A^{2009} + A^{2008} = 2^{2008}(A + I_3)$.
2. Se consideră cunoscut că $(\mathbb{Z}, *, \circ)$ este un inel comutativ, unde $x * y = x + y - 3$ și $x \circ y = x \cdot y - 3x - 3y + 12$, $\forall x, y \in \mathbb{Z}$.
- 5p a) Să se arate că elementul neutru al legii de compozitie „ \circ ” este 4.
- 5p b) Să se determine $a, b \in \mathbb{Z}$ astfel încât între inelele $(\mathbb{Z}, *, \circ)$ și $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ să existe un izomorfism de forma $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(x) = a \cdot x + b$.
- 5p c) Să se rezolve în mulțimea \mathbb{Z} ecuația $\underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{\text{de 2009 ori } x} = 2^{2009} + 3$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 18x^2 - \ln x$.
- 5p a) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției f .
- 5p b) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care $f(x) \geq a$, $\forall x \in (0, \infty)$.
- 5p c) Să se determine numărul de rădăcini reale ale ecuației $f(x) = m$, unde m este un parametru real.
2. Se consideră funcțiile $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_a(x) = \frac{1}{|x-a|+3}$, unde $a \in \mathbb{R}$.
- 5p a) Să se arate că, pentru orice $a \in \mathbb{R}$, funcția f_a are primitive strict crescătoare pe \mathbb{R} .
- 5p b) Să se calculeze $\int_0^3 f_2(x) dx$.
- 5p c) Să se calculeze $\lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^3 f_a(x) dx$.

Varianta 4

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se arate că numărul $\left(\frac{1}{1-i} - \frac{1}{1+i}\right)^2$ este real.
- 5p** 2. Să se arate că vârful parabolei $y = x^2 + 5x + 1$ este situat în cadranul III.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $9^x - 10 \cdot 3^{x-1} + 1 = 0$.
- 5p** 4. Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă exact două cifre egale.
- 5p** 5. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care vectorii $\vec{u} = a\vec{i} + (a+1)\vec{j}$ și $\vec{v} = -(5a-1)\vec{i} + 2\vec{j}$ sunt perpendiculari.
- 5p** 6. Să se calculeze lungimea laturii BC a triunghiului ascuțitunghic ABC știind că $AB = 6$, $AC = 10$ și că aria triunghiului ABC este egală cu $15\sqrt{3}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.
- 5p** a) Să se calculeze rangul matricei A .
- 5p** b) Să se demonstreze că $\det(A^t \cdot A) = 0$.
- 5p** c) Să se determine o matrice nenulă $B \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{Q})$ astfel încât $AB = O_2$.
2. Se știe că (G, \circ) este grup, unde $G = (3, \infty)$ și $x \circ y = (x-3)(y-3)+3$. Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow G$, $f(x) = x+3$.
- 5p** a) Să se calculeze $4 \circ 5 \circ 6$.
- 5p** b) Să se demonstreze că funcția f este un izomorfism de grupuri, de la $((0, \infty), \cdot)$ la (G, \circ) .
- 5p** c) Să se demonstreze că dacă H este un subgrup al lui G care conține toate numerele naturale $k \geq 4$, atunci H conține toate numerele rationale $q > 3$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}$.
- 5p** a) Să se determine asimptotele graficului funcției f .
- 5p** b) Să se demonstreze că funcția f nu are puncte de extrem local.
- 5p** c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(n))^{n^2}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Se consideră sirul $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $I_n = \int_1^2 \frac{x^n}{x^n + 1} dx$, $n \in \mathbb{N}^*$.
- 5p** a) Să se calculeze I_1 .
- 5p** b) Să se arate că $I_n \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
- 5p** c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$.

Varianta 5

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se calculeze $\frac{1}{1+2i} + \frac{1}{1-2i}$.
- 5p** 2. Să se rezolve în \mathbb{Z} inecuația $x^2 - 10x + 12 \leq 0$.
- 5p** 3. Să se determine inversa funcției bijective $f : (1, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, $f(x) = 3 \log_2 x$.
- 5p** 4. Să se determine numărul funcțiilor $f : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ cu proprietatea că $f(1) = f(4)$.
- 5p** 5. Să se determine coordonatele vârfului D al paralelogramului $ABCD$ știind că $A(-2, 9), B(7, -4), C(8, -3)$.
- 5p** 6. Triunghiul ABC are $B = \frac{\pi}{3}$ și lungimea razei cercului circumscris egală cu 1. Să se calculeze lungimea laturii AC .

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră punctele $A(0, 6), B(1, 4), C(-1, 8)$ și matricea $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & a \\ 6 & 4 & 8 & b \end{pmatrix}$, unde $a, b \in \mathbb{R}$.
- 5p** a) Să se arate că punctele A, B, C sunt coliniare.
- 5p** b) Să se determine rangul matricei M în cazul $a = 3, b = 0$.
- 5p** c) Să se arate că dacă unul dintre minorii de ordin trei ai lui M , care conțin ultima coloană, este nul, atunci $\text{rang}(M) = 2$.
2. Pe mulțimea \mathbb{Z} definim legea de compozиție $x * y = 5xy + 6x + 6y + 6$.
- 5p** a) Să se arate că legea “*” este asociativă.
- 5p** b) Să se determine elementele simetrizabile ale mulțimii \mathbb{Z} în raport cu legea “*”.
- 5p** c) Să se rezolve ecuația $\underbrace{x * x * x * \dots * x}_{\text{de 2009 ori } x} = -1$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln x - \frac{2(x-1)}{x+1}$.
- 5p** a) Să se calculeze derivata funcției f .
- 5p** b) Să se determine punctele graficului funcției f în care tangenta la grafic este paralelă cu dreapta de ecuație $9y = 2x$.
- 5p** c) Să se arate că, dacă $x > 1$, atunci $\ln x \geq \frac{2(x-1)}{x+1}$.
2. Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^2}$ și sirul $(a_n)_{n \geq 1}, a_n = f(1) + f(2) + \dots + f(n)$.
- 5p** a) Să se arate că $f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x) dx \leq f(k), \forall k \in (0, \infty)$.
- 5p** b) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n f(x) dx, n \in \mathbb{N}$.
- 5p** c) Să se arate că sirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este convergent.

Varianta 6

SUBIECTUL I (30p)

- 5p 1. Să se calculeze suma tuturor numerelor naturale de două cifre care se divid cu 11.
- 5p 2. Să se determine funcția f de gradul al doilea știind că $f(-1)=1$, $f(0)=1$, $f(1)=3$.
- 5p 3. Să se rezolve în mulțimea $(0, \pi)$ ecuația $\sin 3x = \sin x$.
- 5p 4. Câte numere naturale de trei cifre distințe se pot forma cu elemente ale mulțimii $\{2, 4, 6, 8\}$?
- 5p 5. Se consideră triunghiul ABC cu vârfurile în $A(1, 2)$, $B(2, -2)$ și $C(4, 6)$. Să se calculeze $\cos B$.
- 5p 6. Să se calculeze lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC știind că $C = \frac{\pi}{6}$ și $AB = 6$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \in S_5$.
- 5p a) Să se calculeze σ^{2009} .
- 5p b) Să se dea exemplu de o permutare $\tau \in S_5$ astfel încât $\tau\sigma \neq e$ și $(\tau\sigma)^2 = e$.
- 5p c) Să se demonstreze că, pentru orice $\tau \in S_5$, există $p \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\tau^p = e$.
2. Se consideră $a \in \mathbb{C}$, $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ rădăcinile ecuației $x^3 - 2x^2 + 2x - a = 0$ și determinantul
- $$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{vmatrix}.$$
- 5p a) Pentru $a = 1$, să se determine x_1, x_2 și x_3 .
- 5p b) Să se arate că, pentru orice $a \in \mathbb{R}$, ecuația are o singură rădăcină reală.
- 5p c) Să se arate că valoarea determinantului Δ nu depinde de a .

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{x \cdot \ln x}$.
- 5p a) Să se arate că $f'(x) = f(x)(1 + \ln x)$, $\forall x > 0$.
- 5p b) Să se determine valoarea minimă a funcției f .
- 5p c) Să se arate că funcția f este convexă pe $(0, \infty)$.
2. Se consideră, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$, funcțiile $f_n : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x^{2n}}{1+x}$ și $g_n : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g_n(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots - x^{2n-1} + f_n(x)$.
- 5p a) Să se calculeze $\int_0^1 g_2(x) dx$.
- 5p b) Să se arate că $0 \leq \int_0^1 f_n(x) dx \leq \frac{1}{2n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
- 5p c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \right)$, $n \in \mathbb{N}$.

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se calculeze modulul numărului complex $z = \frac{8+i}{7-4i}$.
- 5p** 2. Să se determine valoarea maximă a funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + 6x - 9$.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea $[0, 2\pi)$ ecuația $\sin x = -\frac{1}{2}$.
- 5p** 4. Să se determine $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care mulțimea $\{1, 2, \dots, n\}$ are exact 120 de submulțimi cu două elemente.
- 5p** 5. Se știe că, în triunghiul ABC , vectorii $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ și $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ au același modul. Să se demonstreze că triunghiul ABC este dreptunghic.
- 5p** 6. Să se calculeze lungimea razei cercului înscris în triunghiul ABC care are lungimile laturilor egale cu 3, 4 și 5.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și sistemul $\begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 3 \\ y + 2z + 3t = 2 \\ z + 2t = 1 \end{cases}$
- 5p** a) Să se determine rangul matricei A .
- 5p** b) Să se determine mulțimea soluțiilor sistemului.
- 5p** c) Să se demonstreze că ecuația $XA = B$ nu are soluții $X \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{C})$.
2. Se consideră mulțimea $G = \left\{ A(k) = \begin{pmatrix} 2^k & 2^k \\ 2^k & 2^k \end{pmatrix} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$, și pentru fiecare $t \in \mathbb{Z}$ notăm cu $H_t = \{A(kt-1) \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Se admite faptul că (G, \cdot) este un grup, unde „ \cdot ” este înmulțirea matricelor.
- 5p** a) Să se arate că $\forall n, p \in \mathbb{Z}$, $A(n) \cdot A(p) = A(n+p+1)$.
- 5p** b) Să se demonstreze că, pentru orice $t \in \mathbb{Z}$, H_t este un subgrup al grupului (G, \cdot) .
- 5p** c) Să se demonstreze că grupurile (G, \cdot) și $(\mathbb{Z}, +)$ sunt izomorfe.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$ și sirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
- 5p** a) Să se determine asimptotele graficului funcției f .
- 5p** b) Să se arate că, pentru orice $k > 0$, $\frac{1}{k+1} < f(k+1) - f(k) < \frac{1}{k}$.
- 5p** c) Să se arate că sirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este descrescător și are termenii pozitivi.
2. Se consideră funcțiile $f : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x}{(x+1)(x^2+1)}$ și $F : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = a \ln(x+1) + b \ln(x^2+1) + c \operatorname{arctg} x$, unde a, b, c sunt parametri reali.
- 5p** a) Să se determine a, b, c astfel încât F să fie o primitivă a funcției f .
- 5p** b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.
- 5p** c) Să se studieze monotonia funcției F , în cazul în care F este primitivă a funcției f .

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe ecuația $z^2 = -4$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + x + c$. Știind că punctele $A(1,2)$ și $B(0,3)$ aparțin graficului funcției f , să se determine numerele reale a și c .
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{7x+1} - x = 1$.
- 5p** 4. Câte numere naturale de patru cifre distințe se pot forma cu cifre din mulțimea $\{1,3,5,7,9\}$?
- 5p** 5. Se consideră paralelogramul $ABCD$ și punctele E și F astfel încât $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{DF} = 2\overrightarrow{FE}$. Să se demonstreze că punctele A , F și C sunt coliniare.
- 5p** 6. Fie triunghiul ABC . Să se calculeze lungimea înălțimii corespunzătoare laturii BC știind că $AB = 13$, $AC = 14$ și $BC = 15$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
- 5p** a) Să se calculeze $\det(A)$.
- 5p** b) Să se arate că $A^{2n} = \frac{2^{2n}-1}{3}A + \frac{2^{2n}+2}{3}I_3$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.
- 5p** c) Să se determine A^{-1} .
2. Se consideră $a \in \mathbb{R}$ și ecuația $x^3 - x + a = 0$, cu rădăcinile complexe x_1, x_2, x_3 .
- 5p** a) Să se calculeze $(x_1 + 1)(x_2 + 1)(x_3 + 1)$.
- 5p** b) Să se determine x_2 și x_3 știind că $x_1 = 2$.
- 5p** c) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care x_1, x_2, x_3 sunt numere întregi.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + \cos x$ și sirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $x_0 = 0$, $x_{n+1} = f(x_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
- 5p** a) Să se arate că funcția f este crescătoare pe \mathbb{R} .
- 5p** b) Să se arate că $0 \leq x_n \leq \frac{\pi}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
- 5p** c) Să se arate că sirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este convergent la $\frac{\pi}{2}$.
2. Se consideră sirul de numere reale $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$, definit de $I_0 = \frac{\pi}{2}$ și $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$, $n \in \mathbb{N}^*$.
- 5p** a) Să se calculeze I_1 .
- 5p** b) Să se arate că sirul $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este descrescător.
- 5p** c) Să se arate că $nI_n I_{n-1} = \frac{\pi}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se determine numărul natural x pentru care $1+3+5+\dots+x=225$.
- 5p** 2. Să se determine valorile parametrului real m știind că graficul funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + mx - 2m$ intersectează axa Ox în două puncte situate la distanță 3.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(2^{-x+1} + 1) = x$.
- 5p** 4. Să se arate că $C_{17}^3 > C_{17}^{15}$
- 5p** 5. Fie hexagonul regulat $ABCDEF$ de latură 4. Să se calculeze modulul vectorului $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$.
- 5p** 6. Să se arate că $\sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \dots + \sin^2 90^\circ = \frac{91}{2}$

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $C(x_C, y_C)$ trei puncte din plan și matricea $M = \begin{pmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
- 5p** a) Să se arate că, dacă A, B, C se află pe dreapta de ecuație $y=2x$, atunci $\det(M)=0$.
- 5p** b) Să se arate că, dacă triunghiul ABC este dreptunghic și are catetele de lungime 1, atunci $\det(M)=\pm 1$.
- 5p** c) Să se arate că, dacă matricea M este inversabilă, atunci suma elementelor matricei M^{-1} este 1.
2. Se consideră mulțimea de matrice $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -3b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$.
- 5p** a) Să se arate că, dacă $X \in A$ și $Y \in A$, atunci $X+Y \in A$.
- 5p** b) Să se arate că, dacă $X \in A, Y \in A$ și $XY = O_2$, atunci $X = O_2$ sau $Y = O_2$.
- 5p** c) Admitem cunoscut faptul că A este inel în raport cu adunarea și înmulțirea matricelor. Să se determine elementele inversabile ale acestui inel.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - \sin x$.
- 5p** a) Să se arate că funcția f este crescătoare.
- 5p** b) Admitem că pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$ ecuația $f(x) = n$ are o soluție unică x_n . Să se arate că sirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este nemărginit.
- 5p** c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n}$, unde sirul $(x_n)_{n \geq 1}$ a fost definit la b).
2. Fie funcțiile $f, g_n : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $g_n(x) = \frac{x^n}{1-x}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.
- 5p** a) Să se calculeze $\int_0^1 (f(x) - g_2(x)) dx$.
- 5p** b) Să se arate că $0 \leq \int_0^1 g_n(x) dx \leq \frac{1}{2^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
- 5p** c) Să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \dots + \frac{1}{n \cdot 2^n} \right) = \ln 2$.

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Știind că $z \in \mathbb{C}$ și că $z^2 + z + 1 = 0$, să se calculeze $z^4 + \frac{1}{z^4}$.
- 5p** 2. Să se determine funcția f de gradul întâi, pentru care $f(f(x)) = 2f(x) + 1$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\lg(x+1) - \lg 9 = 1 - \lg x$.
- 5p** 4. Să se determine numărul termenilor raționali din dezvoltarea $(3 + \sqrt[3]{3})^{10}$.
- 5p** 5. Să se determine coordonatele centrului de greutate al triunghiului ABC , știind că $A(-1, 0)$, $B(0, 2)$, $C(2, -1)$.
- 5p** 6. Să se arate că unghiul vectorilor $\vec{u} = 5\vec{i} - 4\vec{j}$ și $\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ este obtuz.

SUBIECTUL II (30p)

- 1.** Se consideră permutările $e, \alpha \in S_3$, $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- 5p a)** Să se calculeze α^3 .
- 5p b)** Să se rezolve ecuația $\alpha^{2009} \cdot x = e$, $x \in S_3$.
- 5p c)** Să se demonstreze că, oricare ar fi ordinea factorilor, produsul tuturor permutărilor din S_3 este permuatare impară.
- 2.** Fie inelul $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.
- 5p a)** Să se dea exemplu de un număr complex z astfel încât $z \notin \mathbb{Z}[i]$ și $z^2 \in \mathbb{Z}[i]$.
- 5p b)** Să se determine elementele inversabile ale inelului $\mathbb{Z}[i]$.
- 5p c)** Să se arate că mulțimea $H = \{(m+n) + (m-n)i \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ este parte stabilă a lui $\mathbb{Z}[i]$ în raport cu înmulțirea.

SUBIECTUL III (30p)

- 1.** Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \operatorname{arctg} x - \ln(1 + x^2)$.
- 5p a)** Să se arate că funcția f este convexă pe \mathbb{R} .
- 5p b)** Să se arate că funcția f' este mărginită.
- 5p c)** Să se demonstreze că $f(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
- 2.** Se consideră sirul $(I_n)_{n \geq 1}$, $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1 + x^{2n}} dx$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
- 5p a)** Să se calculeze I_1 .
- 5p b)** Să se arate că $I_n \leq \frac{1}{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
- 5p c)** Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$.

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ știind că numerele 2, a, b sunt în progresie geometrică și 2, 17, a sunt în progresie aritmetică.
- 5p** 2. Să se rezolve ecuația $f(f(x))=0$, știind că $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=-3x+2$.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea $[0, 2\pi)$ ecuația $\operatorname{tg}(-x)=1-2\operatorname{tg}x$.
- 5p** 4. Să se determine numărul funcțiilor $f : \{0,1,2\} \rightarrow \{0,1,2\}$ care verifică relația $f(2)=2$.
- 5p** 5. Se consideră triunghiul ABC și punctele D, E astfel încât $\overline{AD}=2\overline{DB}, \overline{AE}=2\overline{EC}$. Să se arate că dreptele DE și BC sunt paralele.
- 5p** 6. Să se calculeze lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC , dacă $A=\frac{\pi}{4}, B=\frac{\pi}{6}$ și $AB=6$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Pentru $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}$ și matricea transpusă A^t .

- 5p** a) Pentru $a=c=1$ și $b=d=0$, să se calculeze $\det(A)$.
- 5p** b) Să se arate că $A \cdot A^t = \alpha \cdot I_4$, unde $\alpha=a^2+b^2+c^2+d^2$.
- 5p** c) Să se demonstreze că dacă $A \neq O_4$, atunci A este inversabilă.
2. Se consideră $a, b, c \in \mathbb{R}$ și polinomul $f = X^3 + aX^2 + bX + c$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$, astfel încât $|x_1| \leq 1, |x_2| \leq 1, |x_3| \leq 1$.
- 5p** a) Să se demonstreze că $|a| \leq 3$.
- 5p** b) Să se arate că, dacă $c < 0$, polinomul are cel puțin o rădăcină reală în intervalul $(0, \infty)$.
- 5p** c) Să se arate că, dacă $a=1, c=-1$, atunci $b=-1$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} - \{-2\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x+2} e^{|x|}$.

- 5p** a) Să se studieze derivabilitatea funcției f în punctul $x_0=0$.
- 5p** b) Să se determine punctele de extrem local ale funcției f .
- 5p** c) Să se determine numărul de rădăcini reale ale ecuației $f(x)=m$, unde m este un parametru real.

2. Se consideră funcțiile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$ și $g : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \int_x^1 \frac{\sin t}{t} dt$.

Se admite cunoscut faptul că $f(x) \geq 0, \forall x \geq 0$.

- 5p** a) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.
- 5p** b) Să se arate că funcția g este strict descrescătoare.
- 5p** c) Să se arate că $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g(x) > 0,9$.

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se calculeze $\frac{1}{1+i} + \frac{1}{1-i}$.
- 5p** 2. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\frac{x+1}{x+2} + \frac{x+2}{x+3} = \frac{7}{6}$.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea $[0, 2\pi)$ ecuația $\cos 2x = \frac{1}{2}$.
- 5p** 4. Să se determine $a > 0$ știind că termenul din mijloc al dezvoltării $\left(\sqrt[3]{a} + \frac{1}{\sqrt[4]{a}}\right)^{12}$ este egal cu 1848.
- 5p** 5. Să se determine ecuația simetricei dreptei $d : 2x - 3y + 1 = 0$ față de punctul $A(-3, 4)$.
- 5p** 6. Știind că $\operatorname{ctg} x = 3$, să se calculeze $\operatorname{ctg} 2x$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră polinoamele $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^2 + X + 1$, cu rădăcinile complexe x_1, x_2 și

$$g = aX^2 + bX + c, \text{ cu } a \neq 0. \text{ Fie matricele } A, V \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}), A = \begin{pmatrix} c & b & a \\ a & c & b \\ b & a & c \end{pmatrix} \text{ și } V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x_1 & x_2 \\ 1 & x_1^2 & x_2^2 \end{pmatrix}.$$

- 5p** a) Să se arate că $\det(V) = 3(x_2 - x_1)$.
- 5p** b) Să se arate că $A \cdot V = \begin{pmatrix} g(1) & g(x_1) & g(x_2) \\ g(1) & x_1g(x_1) & x_2g(x_2) \\ g(1) & x_1^2g(x_1) & x_2^2g(x_2) \end{pmatrix}$.
- 5p** c) Să se arate că $\det(A) = 0$ dacă și numai dacă $a + b + c = 0$ sau $a = b = c$.
2. Se consideră funcția $f : \mathbb{Z}_5 \rightarrow \mathbb{Z}_5$, $f(x) = x^4 + \hat{4}x$.
- 5p** a) Să se calculeze $f(\hat{0})$ și $f(\hat{1})$.
- 5p** b) Să se arate că funcția f nu este surjectivă.
- 5p** c) Să se descompună polinomul $X^4 + \hat{4}X \in \mathbb{Z}_5[X]$ în factori ireductibili peste \mathbb{Z}_5 .

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x}$.

- 5p** a) Să se arate că sirul $(x_n)_{n \geq 1}$ unde $x_n = f(1) + \frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3}f\left(\frac{1}{3}\right) + \dots + \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)$ este divergent.
- 5p** b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.
- 5p** c) Să se arate că funcția f este descrescătoare.

2. Se consideră funcția $f : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt$.

- 5p** a) Să se calculeze $f(2)$.
- 5p** b) Să se demonstreze relația $f(x) \leq \frac{1}{x}$, $\forall x > 1$.
- 5p** c) Să se demonstreze relația $f(x+1) = xf(x) - \frac{1}{e}$, $\forall x > 1$.

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se arate că numărul $(1+i\sqrt{3})^2 + (1-i\sqrt{3})^2$ este număr întreg.
- 5p** 2. Să se rezolve în $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sistemul de ecuații $\begin{cases} x+y=4 \\ xy=3 \end{cases}$.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $x = 6(\sqrt{x-2} - 1)$.
- 5p** 4. Să se determine termenul care nu conține pe x din dezvoltarea $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^9$.
- 5p** 5. Să se calculeze distanța de la punctul $A(3,0)$ la dreapta $d: 3x - 4y + 1 = 0$.
- 5p** 6. Triunghiul ABC are $AB = 4$, $BC = 5$ și $CA = 6$. Să se arate că $m(\angle B) = 2m(\angle C)$.
-

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} x-y+z=1 \\ x+y+z=3 \\ mx+y+z=3m \end{cases}$, unde $m \in \mathbb{R}$. Pentru fiecare $m \in \mathbb{R}$, notăm cu S_m mulțimea soluțiilor reale ale sistemului.
- 5p** a) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul are soluție unică.
- 5p** b) Să se arate că pentru orice $m \in \mathbb{R}$ sistemul este compatibil.
- 5p** c) Să se determine $\min \{x^2 + y^2 + z^2 \mid (x, y, z) \in S_1\}$.
2. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = A \cdot B$ și mulțimea $G = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mid \det(X) = 1\}$.
- 5p** a) Să se verifice că $A^4 = B^6 = I_2$.
- 5p** b) Să se arate că (G, \cdot) este un subgrup al grupului multiplicativ al matricelor inversabile de ordin doi, cu elemente numere complexe.
- 5p** c) Să se demonstreze că $C^n \neq I_2$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 3x^2 - 4}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
- 5p** a) Să se determine asimptota oblică a graficului funcției f spre ∞ .
- 5p** b) Să se arate că $f^2(x)f'(x) = x^2 + 2x$, $\forall x \in \mathbb{R} - \{-2, 1\}$.
- 5p** c) Să se determine derivatele laterale ale funcției f în punctul $x_0 = -2$.
2. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ se consideră funcția $F_n: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $F_n(x) = \int_0^x t^n e^{-t} dt$, $x > 0$.
- 5p** a) Să se calculeze $F_1(x)$, $x > 0$.
- 5p** b) Să se determine punctele de inflexiune ale graficului funcției F_n .
- 5p** c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} F_2(x)$.

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se calculeze $\lg \frac{1}{2} + \lg \frac{2}{3} + \lg \frac{3}{4} + \dots + \lg \frac{99}{100}$.
- 5p** 2. Să se determine $a \in \mathbb{R}^*$ pentru care $(a-3)x^2 - ax - a < 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{8-x} = \sqrt[3]{9-4x}$.
- 5p** 4. Să se determine numărul elementelor unei mulțimi știind că aceasta are exact 45 de submulțimi cu două elemente.
- 5p** 5. Să se determine ecuația dreptei AB știind că $A(2,3)$ și $B(-5,4)$.
- 5p** 6. Triunghiul ABC ascuțitunghic are $AC = 2\sqrt{3}$ și lungimea razei cercului circumscris egală cu 2. Să se determine măsura unghiului B .

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2a & 2b & 2c \\ 3a & 3b & 3c \end{pmatrix}$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}^*$.
- 5p** a) Să se calculeze rangul matricei A .
- 5p** b) Să se arate că există $d \in \mathbb{R}$ astfel încât $A^2 = dA$.
- 5p** c) Să se arate că există matricele $K \in M_{3,1}(\mathbb{R})$ și $L \in M_{1,3}(\mathbb{R})$ astfel încât $A = K \cdot L$.
2. Se consideră numărul $a = \sqrt{3} - i \in \mathbb{C}$ și polinomul $f \in \mathbb{Q}[X]$, $f = X^4 - 4X^2 + 16$.
- 5p** a) Să se arate că $f(a) = 0$.
- 5p** b) Să se determine rădăcinile polinomului f .
- 5p** c) Să se arate că polinomul f este ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Pentru $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 3$ se consideră funcția $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sin^n x$ și se notează cu x_n abscisa punctului de inflexiune din intervalul $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, al graficului funcției f_n .
- 5p** a) Să se arate că $f_n''(x) = n(n-1)\sin^{n-2} x - n^2 \sin^n x$, $\forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 3$ și $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Să se arate că $\sin x_n = \sqrt{\frac{n-1}{n}}$, $n \geq 3$.
- 5p** c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n)$.
2. Se consideră $a \in \mathbb{R}$ și funcțiile $f, F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3 - 3x + a}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}$, $F(x) = \frac{x^2 + ax + 5}{\sqrt{x^2 + 1}}$.
- 5p** a) Să se arate că funcția F este o primitivă a funcției f .
- 5p** b) Pentru $a = 2$, să se determine aria suprafeței plane cuprinsă între graficul funcției f , axa Ox și dreptele $x=1$ și $x=2$.
- 5p** c) Să se determine a astfel încât $\int_0^2 f(x)dx - \int_{-2}^0 F(x)dx = 2$.

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se calculeze $\log_3(5-\sqrt{7}) + \log_3(5+\sqrt{7}) - \log_3 2$.
- 5p** 2. Să se determine funcția de gradul al doilea al cărei grafic este tangent la axa Ox în punctul $(1,0)$ și trece prin punctul $(0,2)$.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea $[0, 2\pi)$ ecuația $\sin x + \cos x = 0$.
- 5p** 4. Câte numere naturale de patru cifre se pot forma cu elemente ale mulțimii $\{1, 3, 5, 7, 9\}$?
- 5p** 5. Să se determine ecuația dreptei care conține punctul $A(-2, 2)$ și este paralelă cu dreapta determinată de punctele $C(2, 1), D(-1, -3)$.
- 5p** 6. Fie $\alpha \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ astfel încât $\cos \alpha = -\frac{5}{13}$. Să se calculeze $\sin \alpha$.

SUBIECTUL II (30p)

- 1.** Fie $a, b, c \in \mathbb{Z}$ și matricea $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$.
- 5p** a) Să se calculeze $\det(A)$.
- 5p** b) Să se arate că dacă $a+b+c \neq 0$ și A nu este inversabilă în $M_3(\mathbb{Q})$, atunci $a=b=c$.
- 5p** c) Să se arate că sistemul de ecuații liniare $\begin{cases} ax+by+cz=\frac{1}{2}x \\ cx+ay+bz=\frac{1}{2}y \\ bx+cy+az=\frac{1}{2}z \end{cases}$ admite numai soluția $x=y=z=0$.
- 2.** Se consideră polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^4 - 5X^2 + 5$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$.
- 5p** a) Să se calculeze $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}$.

SUBIECTUL III (30p)

- 1.** Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$, se consideră funcția $f_n : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n - nx + 1$.
- 5p** a) Să se arate că f_n este strict descrescătoare pe $[0; 1]$ și strict crescătoare pe $[1; \infty)$.
- 5p** b) Să se arate că ecuația $f_n(x) = 0$, $x > 0$ are exact două rădăcini $a_n \in (0, 1)$ și $b_n \in (1, \infty)$.
- 5p** c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, unde a_n s-a definit la punctul b).
- 2.** Se consideră sirul $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$, unde $I_0 = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx$ și $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2 + 1} dx$, $n \in \mathbb{N}^*$.
- 5p** a) Să se arate că $I_0 = \frac{\pi}{4}$.
- 5p** b) Să se arate că $I_{2n} = \frac{1}{2n-1} - I_{2n-2}$, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.
- 5p** c) Să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1} \right) = I_0$.

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se calculeze modulul numărului complex $z = \frac{2-i}{2+i}$.
- 5p** 2. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care $x^2 + ax + 2 \geq 0$, oricare ar fi numărul real x .
- 5p** 3. Să se rezolve în intervalul $[-1,1]$ ecuația $\arcsin \frac{1}{2} + \arcsin x = \frac{\pi}{3}$.
- 5p** 4. Să se rezolve ecuația $C_n^8 = C_n^{10}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 10$.
- 5p** 5. Să se afle măsura celui mai mare unghi al triunghiului ABC știind că $A(2,-2)$, $B(2,3)$, $C(-2,3)$.
- 5p** 6. Fie $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ astfel încât $\sin \alpha = \frac{3}{5}$. Să se calculeze $\sin 2\alpha$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră mulțimea $G = \left\{ X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, a > 0 \right\}$.
- 5p** a) Să se arate că dacă $A, B \in G$, atunci $AB \in G$.
- 5p** b) Să se găsească două matrice $C, D \in G$ pentru care $CD \neq DC$.
- 5p** c) Să se arate că dacă $A \in G$, atunci $I_2 - A + A^2 \in G$.
2. Se consideră $a, b, c \in \mathbb{Q}$ și polinomul $f = X^3 + aX^2 + bX + c$.
- 5p** a) Să se determine a, b, c astfel încât polinomul f să aibă rădăcinile $x_1 = x_2 = 1$ și $x_3 = -2$.
- 5p** b) Să se arate că dacă f are rădăcina $\sqrt{2}$, atunci f are o rădăcină rațională.
- 5p** c) Să se arate că dacă $a, b, c \in \mathbb{Z}$, iar numerele $f(0)$ și $f(1)$ sunt impare, atunci polinomul f nu are rădăcini întregi.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.
- 5p** a) Să se arate că funcția f este derivabilă pe \mathbb{R} .
- 5p** b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$.
- 5p** c) Să se demonstreze că funcția f este mărginită pe \mathbb{R} .
2. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ se consideră funcția $f_n : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = (1-x)^n$.
- 5p** a) Să se calculeze $\int_0^1 f_2(x) dx$.
- 5p** b) Să se arate că $\int_0^1 xf_n(x) dx = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.
- 5p** c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n\left(\frac{x}{n}\right) dx$.

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se arate că numărul $(1+i\sqrt{3})^3$ este întreg.
- 5p** 2. Să se determine imaginea funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - x + 2$.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{-2x+1} = 5$.
- 5p** 4. Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr \overline{ab} din mulțimea numerelor naturale de două cifre, să avem $a+b=4$.
- 5p** 5. Să se determine ecuația dreptei care trece prin punctul $A(-1,1)$ și este perpendiculară pe dreapta $d : 5x - 4y + 1 = 0$.
- 5p** 6. Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC știind că $AB = 6$, $B = \frac{\pi}{4}$ și $C = \frac{\pi}{6}$.

SUBIECTUL II (30p)

- 1.** Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} -3 & -8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.
- 5p a)** Să se calculeze $A^2 - B^2$.
- 5p b)** Să se calculeze $\det(I_2 + A + A^2 + A^3 + A^4)$.
- 5p c)** Să se arate că ecuația $X^2 = I_2$ are o infinitate de soluții în $M_2(\mathbb{Z})$.
- 2.** Se consideră polinoamele $f, g \in \mathbb{Q}[X]$, $f = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$ și $g = X^2 - 1$.
- 5p a)** Să se determine restul împărțirii polinomului f la polinomul g .
- 5p b)** Să se calculeze $(1-x_1) \cdot (1-x_2) \cdot (1-x_3) \cdot (1-x_4)$.
- 5p c)** Să se calculeze $g(x_1) \cdot g(x_2) \cdot g(x_3) \cdot g(x_4)$.

SUBIECTUL III (30p)

- 1.** Se consideră sirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, unde $x_1 \in (0,1)$ și $x_{n+1} = \frac{x_n^5 + 3x_n}{4}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
- 5p a)** Să se arate că $x_n \in (0,1)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
- 5p b)** Să se arate că sirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este convergent.
- 5p c)** Să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+2}}{x_n} = \frac{9}{16}$.
- 2.** Se consideră o funcție $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, cu proprietatea că $xf(x) = \sin x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
- 5p a)** Să se calculeze $\int_0^\pi x^2 f(x) dx$.
- 5p b)** Să se arate că funcția f este integrabilă pe intervalul $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
- 5p c)** Să se arate că $\int_1^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx \leq \cos 1$.

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe ecuația $x^2 - 2x + 4 = 0$.
- 5p** 2. Să se afle valoarea minimă a funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x + 2$.
- 5p** 3. Să se rezolve în intervalul $[-1,1]$ ecuația $\arcsin x + \arccos \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2}$.
- 5p** 4. Care este probabilitatea ca, alegând un număr k din mulțimea $\{0,1,2,\dots,7\}$, numărul C_7^k să fie prim.
- 5p** 5. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care vectorii $\vec{u} = a\vec{i} + 3\vec{j}$ și $\vec{v} = 4\vec{i} + (a+4)\vec{j}$ sunt coliniari.
- 5p** 6. Să se calculeze $\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC})$, știind că $A(-3,4)$, $B(4,-3)$ și $C(1,2)$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
- 5p** a) Să se calculeze A^3 .
- 5p** b) Să se afle rangul matricei $I_3 + A + A^t$.
- 5p** c) Să se determine inversa matricei $I_3 + A$.
2. Se consideră $a, b \in \mathbb{R}$ și polinomul $f = X^3 + 4aX^2 + 20X + b$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$.
- 5p** a) Să se determine x_1, x_2, x_3 în cazul $a = 2, b = 0$.
- 5p** b) Să se demonstreze că $(x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_3)^2 = 8(4a^2 - 15)$.
- 5p** c) Să se determine a, b astfel încât polinomul f să aibă o rădăcină dublă egală cu $-a$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $f(x) = \frac{2x+1}{x+2}$ și sirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dat de $x_0 = 2$, $x_{n+1} = f(x_n), \forall n \in \mathbb{N}$.
- 5p** a) Să se determine asimptotele graficului funcției f .
- 5p** b) Să se arate că sirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ are limită 1.
- 5p** c) Să se arate că sirul $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dat de $y_n = x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_n - n$, este convergent.
2. Se consideră funcțiile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + \cos x$ și $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = x \int_0^x f(t) dt$.
- 5p** a) Să se calculeze $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$.
- 5p** b) Să se arate că F este funcție pară.
- 5p** c) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției F .

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se ordoneze crescător numerele $\sqrt{3}, \sqrt[3]{5}, \sqrt[4]{8}$.
- 5p** 2. Să se determine funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ știind că graficul său și graficul funcției $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = -3x + 3$ sunt simetrice față de dreapta $x = 1$.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{2x+1} - 10 \cdot 3^{x+1} + 27 = 0$.
- 5p** 4. Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă toate cifrele pare.
- 5p** 5. Să se determine ecuația medianei duse din vârful A al triunghiului ABC , unde $A(1, 2)$, $B(2, 3)$ și $C(2, -5)$.
- 5p** 6. Să se arate că $\operatorname{ctg} 2 = \frac{\operatorname{ctg} 1 - \operatorname{tg} 1}{2}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ x - y + z + t = 0 \\ x + y - z + t = 0 \\ x + y + z - t = 0 \end{cases}$ și A matricea sistemului.
- 5p** a) Să se calculeze $\det(A)$.
- 5p** b) Să se rezolve sistemul.
- 5p** c) Să se determine A^{-1} .
2. Fie polinomul $f = X^4 + 2X^3 + aX^2 - 2X + 1 \in \mathbb{R}[X]$ și $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$ rădăcinile sale.
- 5p** a) Să se calculeze $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}$.
- 5p** b) Să se arate că $f(x) = x^2 \left[\left(x - \frac{1}{x} \right)^2 + 2 \left(x - \frac{1}{x} \right) + a + 2 \right]$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$.
- 5p** c) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care toate rădăcinile polinomului f sunt numere reale.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : (-2, 2) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln \frac{2+x}{2-x}$.
- 5p** a) Să se determine asimptotele graficului funcției f .
- 5p** b) Să se determine punctele de inflexiune ale graficului funcției f .
- 5p** c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} x^a f\left(\frac{1}{x}\right)$, unde a este un număr real.
2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{-x^3 + 2x^2 - 5x + 8}{x^2 + 4}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
- 5p** a) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.
- 5p** b) Să se calculeze $\int_1^4 (x + f(x) - 2)^2 dx$.
- 5p** c) Știind că funcția f este bijectivă, să se calculeze $\int_4^2 f^{-1}(x) dx$.

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se arate că $2 \in (\log_3 4, \sqrt{5})$.
- 5p** 2. Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe ecuația $x^2 - 2x + 2 = 0$.
- 5p** 3. Să se rezolve în $[0, 2\pi)$ ecuația $\sin x + \cos x = -1$.
- 5p** 4. Să se calculeze $C_4^4 + C_5^4 + C_6^4$.
- 5p** 5. Pe laturile AB și AC ale triunghiului ABC se consideră punctele M , respectiv N astfel încât $\overrightarrow{AM} = 4\overrightarrow{MB}$ și $MN \parallel BC$. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât $\overrightarrow{CN} = m\overrightarrow{AC}$.
- 5p** 6. Să se calculeze perimetrul triunghiului OAB , știind că $O(0,0)$, $A(-1,2)$ și $B(-2,3)$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră triunghiul ABC , cu laturile $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ și sistemul $\begin{cases} ay + bx = c \\ cx + az = b \\ bz + cy = a \end{cases}$

- 5p** a) Să se rezolve sistemul în cazul $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$.
- 5p** b) Să se demonstreze că, pentru orice triunghi, sistemul are soluție unică.
- 5p** c) Știind că soluția sistemului este (x_0, y_0, z_0) , să se demonstreze că $x_0, y_0, z_0 \in (-1, 1)$.
2. Se consideră mulțimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}_3 \right\}$.
- 5p** a) Să se determine numărul elementelor mulțimii G .
- 5p** b) Să se arate că $AB \in G$, pentru orice $A, B \in G$.
- 5p** c) Să se determine numărul matricelor din mulțimea G care au determinantul nul.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2e^x + 3x^2 - 2x + 5$.
- 5p** a) Să se demonstreze că funcția f este strict crescătoare pe $[0, \infty)$.
- 5p** b) Să se arate că funcția f nu este surjectivă.
- 5p** c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{f(x)}$.
2. Se consideră funcția $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = \frac{1}{(1+t^2)(1+t^3)}$.
- 5p** a) Să se calculeze $\int_0^1 (t^3 + 1)f(t)dt$.
- 5p** b) Să se arate că $\int_{\frac{1}{x}}^1 f(t)dt = \int_1^x t^3 f(t)dt$, $\forall x > 0$.
- 5p** c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{x}}^x f(t)dt$.

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe ecuația $x^2 - 8x + 25 = 0$.
- 5p** 2. Să se determine $a \in \mathbb{R}$, pentru care graficul funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (a+1)x^2 + 3(a-1)x + a - 1$, intersectează axa Ox în două puncte distincte.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1$.
- 5p** 4. Să se calculeze $C_8^4 - C_7^4 - C_7^3$.
- 5p** 5. Să se determine ecuația perpendicularei duse din punctul $A(1, 2)$ pe dreapta $d : x + y - 1 = 0$.
- 5p** 6. Știind că $\sin x = \frac{1}{3}$, să se calculeze $\cos 2x$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Pentru $a, b, c \in \mathbb{R}^*$, se consideră sistemul $\begin{cases} ax + by + cz = b \\ cx + ay + bz = a \\ bx + cy + az = c \end{cases}, x, y, z \in \mathbb{R}$.
- 5p** a) Să se arate că determinantul sistemului este $\Delta = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$.
- 5p** b) Să se rezolve sistemul în cazul în care este compatibil determinat.
- 5p** c) Știind că $a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = 0$, să se arate că sistemul are o infinitate de soluții (x, y, z) , astfel încât $x^2 + y^2 = z - 1$.
2. Se consideră mulțimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z}_4 \right\}$.
- 5p** a) Să se determine numărul elementelor mulțimii G .
- 5p** b) Să se dea un exemplu de matrice $A \in G$ cu proprietatea că $\det A \neq \hat{0}$ și $\det A^2 = \hat{0}$.
- 5p** c) Să se determine numărul soluțiilor ecuației $X^2 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$, $X \in G$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x-1)(x-3)(x-5)(x-7)$.
- 5p** a) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^4}$.
- 5p** b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)^{\frac{1}{x}}$.
- 5p** c) Să se arate că ecuația $f'(x) = 0$ are exact trei rădăcini reale.
2. Se consideră funcțiile $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{1}{n^2 + x^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$.
- 5p** a) Să se calculeze aria suprafeței cuprinse între graficul funcției f_1 , axele de coordonate și dreapta $x = 1$.
- 5p** b) Să se calculeze $\int_0^1 x(f_1(x))^2 dx$.
- 5p** c) Să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} n(f_n(1) + f_n(2) + f_n(3) + \dots + f_n(n)) = \frac{\pi}{4}$.

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se calculeze $1+i+i^2+\dots+i^{10}$.
- 5p** 2. Se consideră funcțiile $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x + 2$, $g(x) = 2x - 1$. Să se rezolve ecuația $(f \circ g)(x) = 0$.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\lg(x+9) + \lg(7x+3) = 1 + \lg(x^2 + 9)$.
- 5p** 4. Să se rezolve inecuația $C_n^2 < 10$, $n \geq 2$, n natural.
- 5p** 5. Se consideră dreptele paralele de ecuații $d_1 : x - 2y = 0$ și $d_2 : 2x - 4y - 1 = 0$. Să se calculeze distanța dintre cele două drepte.
- 5p** 6. Să se calculeze $\sin 75^\circ + \sin 15^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie sistemul $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ ax + by + cz = 0 \\ a^3x + b^3y + c^3z = 1 \end{cases}$, cu $a, b, c \in \mathbb{R}$, distințe două căte două și A matricea sistemului.
- 5p** a) Să se arate că $\det(A) = (a+b+c)(c-b)(c-a)(b-a)$.
- 5p** b) Să se rezolve sistemul în cazul $a+b+c \neq 0$.
- 5p** c) Să se demonstreze că dacă $a+b+c=0$, atunci sistemul este incompatibil.
2. Se consideră sirul de numere reale $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, cu $a_0 = 0$ și $a_{n+1} = a_n^2 + 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ și polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, cu $f(0) = 0$ și cu proprietatea că $f(x^2 + 1) = (f(x))^2 + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
- 5p** a) Să se calculeze $f(5)$.
- 5p** b) Să se arate că $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(a_n) = a_n$.
- 5p** c) Să se arate că $f = X$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x^4 + 3}$.
- 5p** a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Să se determine mulțimea valorilor funcției f .
- 5p** c) Să se arate că $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.
2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x + 2$.
- 5p** a) Să se calculeze $\int_2^3 \frac{f(x)}{x-1} dx$.
- 5p** b) Să se calculeze $\int_{-1}^0 \frac{x^2 - 13}{f(x)} dx$.
- 5p** c) Să se determine punctele de extrem ale funcției $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \int_0^{x^2} f(t)e^t dt$.

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se calculeze suma primilor 20 de termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$, știind că $a_4 - a_2 = 4$ și $a_1 + a_3 + a_5 + a_6 = 30$.
- 5p** 2. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\frac{2x+3}{x+2} = \frac{x-1}{x-2}$.
- 5p** 3. Să se calculeze $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)$.
- 5p** 4. Să se determine probabilitatea ca, alegând un element din mulțimea $\{1, 2, 3, \dots, 40\}$, numărul $2^{n+2} \cdot 6^n$ să fie pătrat perfect.
- 5p** 5. Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al triunghiului ABC , dacă $A(5, -3), B(2, -1), C(0, 9)$.
- 5p** 6. Știind că $\operatorname{tg}\alpha = 2$, să se calculeze $\sin 4\alpha$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ și mulțimea $C(A) = \left\{ X = \begin{pmatrix} a & 5b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{C} \right\}$.
- 5p** a) Să se arate că $\forall X \in C(A)$, $XA = AX$.
- 5p** b) Să se arate că dacă $Y \in C(A)$ și $Y^2 = O_2$, atunci $Y = O_2$.
- 5p** c) Să se arate că dacă $Z \in C(A), Z \neq O_2$ și Z are toate elementele raționale, atunci $\det Z \neq 0$.
2. Se consideră $a \in \mathbb{Z}_3$ și polinomul $f = X^3 + \hat{2}X^2 + a \in \mathbb{Z}_3[X]$.
- 5p** a) Să se calculeze $f(\hat{0}) + f(\hat{1}) + f(\hat{2})$.
- 5p** b) Pentru $a = \hat{2}$, să se determine rădăcinile din \mathbb{Z}_3 ale polinomului f .
- 5p** c) Să se determine $a \in \mathbb{Z}_3$ pentru care polinomul f este ireductibil în $\mathbb{Z}_3[X]$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x + 1$.
- 5p** a) Să se arate că, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, ecuația $f(x) = 3 + \frac{1}{n+1}$ are o unică soluție $x_n \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$, unde x_n este soluția reală a ecuației $f(x) = 3 + \frac{1}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.
- 5p** c) Să se determine $\lim_{n \rightarrow \infty} n(x_n - 1)$, unde x_n este soluția reală a ecuației $f(x) = 3 + \frac{1}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.
2. Se consideră funcția $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{1+t} dt$.
- 5p** a) Să se arate că $\int_0^a \frac{1}{1+t} dt = \ln(1+a)$, $\forall a > -1$.
- 5p** b) Să se arate că $f(x) < \ln(1+x)$, $\forall x > 0$.
- 5p** c) Să se arate că $f(\pi) > f(2\pi)$.

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se calculeze $z + \frac{1}{z}$ pentru $z = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.
- 5p** 2. Să se determine funcția de gradul al doilea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pentru care $f(-1) = f(1) = 0$, $f(2) = 6$.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = \frac{11}{6}$.
- 5p** 4. Să se demonstreze că dacă $x \in \mathbb{R}$ și $|x| \geq 1$, atunci $(1+x)^2 + (1-x)^2 \geq 4$.
- 5p** 5. Să se determine ecuația înălțimii duse din B în triunghiul ABC , știind că $A(0, 9)$, $B(2, -1)$ și $C(5, -3)$.
- 5p** 6. Să se calculeze $(2\vec{i} + 5\vec{j}) \cdot (3\vec{i} - 4\vec{j})$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră o matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Se notează cu A^t transpusa matricei A .
- 5p** a) Să se demonstreze că $\forall z \in \mathbb{C}$, $\forall X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, $\det(zX) = z^3 \det(X)$.
- 5p** b) Să se demonstreze că $\det(A - A^t) = 0$.
- 5p** c) Știind că $A \neq A^t$, să se demonstreze că $\text{rang}(A - A^t) = 2$.
2. Se consideră polinomul $f \in \mathbb{Q}[X]$, cu $f = X^4 - 5X^2 + 4$.
- 5p** a) Să se determine rădăcinile polinomului f .
- 5p** b) Să se determine polinomul $h \in \mathbb{Q}[X]$, pentru care $h(0) = 1$ și care are ca rădăcini inversele rădăcinilor polinomului f .
- 5p** c) Știind că g este un polinom cu coeficienți întregi, astfel încât $g(-2) = g(-1) = g(1) = g(2) = 2$, să se arate că ecuația $g(x) = 0$ nu are soluții întregi.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - \sin x$.
- 5p** a) Să se arate că funcția f este strict crescătoare.
- 5p** b) Să se arate că graficul funcției nu are asymptote.
- 5p** c) Să se arate că funcția $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt[3]{f(x)}$ este derivabilă pe \mathbb{R} .
2. Se consideră funcția $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x}, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$.
- 5p** a) Să se arate că funcția f are primitive pe $[0, \infty)$.
- 5p** b) Să se calculeze $\int_0^1 xf(x) dx$.
- 5p** c) Folosind eventual inegalitatea $e^x \geq x + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, să se arate că $0 \leq \int_0^x f(t) dt < 1$, $\forall x > 0$.

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se calculeze $(1-i)(1+2i) - 3(2-i)$.
- 5p** 2. Să se arate că pentru oricare $a \in \mathbb{R}^*$, dreapta $y = x + 4$ intersectează parabola $y = ax^2 + (a-2)x + 1$.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{2x} - 3 \cdot 2^{x+1} + 8 = 0$.
- 5p** 4. Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $\{10, 11, 12, \dots, 40\}$, suma cifrelor lui să fie divizibilă cu 3.
- 5p** 5. În triunghiul ABC punctele M, N, P sunt mijloacele laturilor. Fie H ortocentrul triunghiului MNP . Să se demonstreze că $AH = BH = CH$.
- 5p** 6. Să se calculeze $\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right)$.

SUBIECTUL II (30p)

1. În mulțimea S_3 a permutărilor de 3 elemente se consideră permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- 5p** a) Să se verifice că permutarea σ este pară.
- 5p** b) Să se determine toate permutările $x \in S_3$, astfel încât $x\sigma = \sigma x$.
- 5p** c) Să se rezolve ecuația $x^2 = \sigma$, cu $x \in S_3$.
2. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ și mulțimea $G = \{ X(a) = I_2 + aA \mid a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \}$.
- 5p** a) Să se arate că $\forall a, b \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $X(a)X(b) = X(ab + a + b)$.
- 5p** b) Să se arate că (G, \cdot) este un grup abelian, unde „ \cdot ” reprezintă înmulțirea matricelor.
- 5p** c) Să se determine $t \in \mathbb{R}$ astfel încât $X(1)X(2)\dots X(2009) = X(t-1)$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2} \ln^2 x$.
- 5p** a) Să se arate că funcția este convexă pe intervalul $(0, e]$.
- 5p** b) Să se determine asymptotele graficului funcției.
- 5p** c) Să se arate că sirul $(a_n)_{n \geq 3}$, dat de $a_n = \frac{\ln 3}{3} + \frac{\ln 4}{4} + \frac{\ln 5}{5} + \dots + \frac{\ln n}{n} - f(n)$, este descrescător.
2. Se consideră funcția $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$.
- 5p** a) Să se calculeze aria suprafeței cuprinse între graficul funcției f și axele de coordonate.
- 5p** b) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotirea graficului funcției f în jurul axei Ox .
- 5p** c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right) \left(f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + f\left(\frac{3}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{n}\right) \right)$.

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Fie z_1 și z_2 soluțiile complexe ale ecuației $2z^2 + z + 50 = 0$. Să se calculeze $|z_1| + |z_2|$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - 2x$. Să se arate că funcția $f \circ f \circ f$ este strict descrescătoare.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $3^x + 9^x = 2$.
- 5p** 4. Fie mulțimea $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ și o funcție bijectivă $f : A \rightarrow A$. Să se calculeze $f(-2) + f(-1) + f(0) + f(1) + f(2)$.
- 5p** 5. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(-1, 3)$ și $B(1, -1)$. Să se determine ecuația mediatoarei segmentului AB .
- 5p** 6. Fie $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ cu $\sin \alpha = \frac{1}{3}$. Să se calculeze $\tan \alpha$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$, cu $t \in \mathbb{R}$.
- 5p** a) Să se arate că dacă matricea $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ verifică relația $AX = XA$, atunci există $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât $X = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.
- 5p** b) Să se demonstreze că $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $B^n = \begin{pmatrix} \cos nt & -\sin nt \\ \sin nt & \cos nt \end{pmatrix}$.
- 5p** c) Să se rezolve în mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuația $X^2 = A$.
2. Se consideră $a \in \mathbb{R}$ și polinomul $f = 3X^4 - 2X^3 + X^2 + aX - 1 \in \mathbb{R}[X]$.
- 5p** a) Să se calculeze $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}$, unde $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$ sunt rădăcinile polinomului f .
- 5p** b) Să se determine restul împărțirii polinomului f la $(X - 1)^2$.
- 5p** c) Să se demonstreze că f nu are toate rădăcinile reale.

SUBIECTUL III (30p)

1. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \arctg x - \text{arcctg } x$.
- 5p** a) Să se determine asimptota la graficul funcției f spre $+\infty$.
- 5p** b) Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe \mathbb{R} .
- 5p** c) Să se arate că sirul $(x_n)_{n \geq 1}$, dat de $x_{n+1} = f(x_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ și $x_1 = 0$, este convergent.
2. Fie funcția $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \arcsin x$.
- 5p** a) Să se arate că funcția $g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = xf(x)$ are primitive, iar acestea sunt crescătoare.
- 5p** b) Să se calculeze $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx$.
- 5p** c) Să se arate că $\int_0^1 xf(x) dx \leq \frac{\pi}{4}$.

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se calculeze modulul numărului complex $z = 1 + i + i^2 + i^3 + \dots + i^6$.
- 5p** 2. Să se determine valoarea maximă a funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -2x^2 + x$.
- 5p** 3. Să se rezolve în intervalul $(0; \infty)$ ecuația $\lg^2 x + 5\lg x - 6 = 0$.
- 5p** 4. Să se determine numărul funcțiilor $f : \{0, 1, 2, 3\} \rightarrow \{0, 1, 2, 3\}$ care au proprietatea $f(0) = f(1) = 2$.
- 5p** 5. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $O(0, 0)$, $A(1, 2)$ și $B(3, 1)$. Să se determine măsura unghiului AOB .
- 5p** 6. Știind că $\alpha \in \mathbb{R}$ și că $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{3}$, să se calculeze $\sin 2\alpha$.

SUBIECTUL II (30p)

1. În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- 5p** a) Să se determine rangul matricei $A + I_2$.
- 5p** b) Să se demonstreze că dacă $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ astfel încât $AX = XA$, atunci există $x, y \in \mathbb{C}$ astfel încât $X = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & x \end{pmatrix}$.
- 5p** c) Să se demonstreze că ecuația $Y^2 = A$ nu are nicio soluție în mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
2. Pe mulțimea \mathbb{R} se definește legea de compozиție $x * y = x + y + xy$.
- 5p** a) Să se arate că legea „ $*$ ” este asociativă.
- 5p** b) Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$. Să se verifice relația $f(x * y) = f(x) \cdot f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.
- 5p** c) Să se calculeze $1 * \frac{1}{2} * \frac{1}{3} * \dots * \frac{1}{2008} * \frac{1}{2009}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Fie funcția $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x - 1)\arcsin x$.

- 5p** a) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2 - x}$.
- 5p** b) Să se determine punctele în care funcția f nu este derivabilă.
- 5p** c) Să se arate că funcția f este convexă.
2. Se consideră funcțiile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$ și $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.
- 5p** a) Să se arate că funcția F este strict crescătoare pe \mathbb{R} .
- 5p** b) Să se arate că funcția F este bijectivă.
- 5p** c) Să se calculeze $\int_0^a F^{-1}(x)dx$, unde F^{-1} este inversa funcției F și $a = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$.

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se calculeze $(1+i)^{10} + (1-i)^{10}$.
- 5p** 2. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 6x - 3x^2$. Să se ordoneze crescător numerele $f(\sqrt{2})$, $f(\sqrt{3})$ și $f(2)$.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{2x-1} = 3$.
- 5p** 4. Să se determine numărul funcțiilor $f : \{0,1,2,3\} \rightarrow \{0,1,2,3\}$ care au proprietatea că $f(0)$ este număr impar.
- 5p** 5. Fie triunghiul ABC și $M \in (BC)$ astfel încât $\frac{BM}{BC} = \frac{1}{3}$. Să se demonstreze că $\overline{AM} = \frac{2}{3}\overline{AB} + \frac{1}{3}\overline{AC}$.
- 5p** 6. Știind că $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ și că $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, să se calculeze $\tan \alpha$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$.
- 5p** a) Să se rezolve ecuația $\det(A - xI_2) = 0$.
- 5p** b) Să se arate că dacă matricea $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ verifică relația $AX = XA$, atunci există $a, b \in \mathbb{C}$ astfel încât $X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$
- 5p** c) Să se determine numărul de soluții ale ecuației $X^3 = A$, $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
2. Se consideră mulțimea de funcții $G = \left\{ f_{a,b} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f_{a,b}(x) = ax + b, a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R} \right\}$.
- 5p** a) Să se calculeze $f_{-1,2} \circ f_{-1,2}$, unde „ \circ ” este compunerea funcțiilor.
- 5p** b) Să se demonstreze că (G, \circ) este un grup.
- 5p** c) Să se arate că grupul G conține o infinitate de elemente de ordin 2.

SUBIECTUL III (30p)

1. Fie funcția $f : [0,3] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \{x\}(1 - \{x\})$, unde $\{x\}$ este partea fracționară a numărului x .

- 5p** a) Să se calculeze $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x)$.
- 5p** b) Să se determine domeniul de continuitate al funcției f .
- 5p** c) Să se determine punctele în care funcția f nu este derivabilă.

2. Se consideră funcțiile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2 - \sin x}$ și $F : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.

- 5p** a) Să se calculeze $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cos x dx$.
- 5p** b) Să se demonstreze că funcția F este strict crescătoare.
- 5p** c) Să se determine $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x)$.

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se demonstreze că numărul $a = \sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-2\sqrt{3}}$ este număr natural.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 - 5x + 2$. Să se rezolve inecuația $f(2x) \leq 0$.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $x = \sqrt{2-x}$.
- 5p** 4. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând o mulțime din mulțimea submulțimilor nevide ale mulțimii $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, aceasta să aibă toate elementele impare.
- 5p** 5. Fie punctele $A(2,0)$, $B(1,1)$ și $C(3,-2)$. Să se calculeze $\sin C$.
- 5p** 6. Știind că $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și că $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = 2$, să se calculeze $\sin 2\alpha$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ mx + y + z = m - 1, \quad m \in \mathbb{R} \\ x + my + 2z = -1 \end{cases}$ și matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 \\ 1 & m & 2 \end{pmatrix}$.
- 5p** a) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ pentru care $\det(A) = 0$.
- 5p** b) Să se arate că pentru orice $m \in \mathbb{R}$ sistemul este compatibil.
- 5p** c) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ știind că sistemul are o soluție (x_0, y_0, z_0) cu $z_0 = 2$.
2. Se consideră mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3)$, submulțimea $G = \left\{ X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3) \mid X = \begin{pmatrix} a & \hat{2}b \\ b & a \end{pmatrix} \right\}$ și matricile $O_2 = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$.
- 5p** a) Să se verifice că dacă $x, y \in \mathbb{Z}_3$, atunci $x^2 + y^2 = \hat{0}$ dacă și numai dacă $x = y = \hat{0}$.
- 5p** b) Să se arate că mulțimea $H = G \setminus \{O_2\}$ este un subgrup al grupului multiplicativ al matricelor inversabile din $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3)$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră $n \in \mathbb{N}^*$ și funcțiile $f_n, g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots - x^{2n-1} + x^{2n}$, $g_n(x) = x^{2n+1} + 1$.
- 5p** a) Să se verifice că $f'_n(x) = \frac{g'_n(x)}{x+1} - \frac{g_n(x)}{(x+1)^2}$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
- 5p** b) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n\left(\frac{1}{2}\right)$.
- 5p** c) Să se demonstreze că f_n are exact un punct de extrem local.
2. Se consideră sirul $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ definit prin $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^3} dx$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
- 5p** a) Să se calculeze I_2 .
- 5p** b) Să se demonstreze că sirul $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este strict descrescător.
- 5p** c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$.

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se demonstreze că numărul $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$ este natural.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - mx + 2$. Să se determine mulțimea valorilor parametrului real m pentru care graficul funcției f intersectează axa Ox în două puncte distincte.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(x+1) + \log_3(x+3) = 1$.
- 5p** 4. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând o mulțime din mulțimea submulțimilor nevide ale mulțimii $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, aceasta să aibă produsul elementelor 120.
- 5p** 5. Se consideră punctele $A(0,2)$, $B(1,-1)$ și $C(3,4)$. Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al triunghiului ABC .
- 5p** 6. Să se demonstreze că $\sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră numerele reale a, b, c , funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 2x + 3$ și determinanții

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} \text{ și } B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ f(a) & f(b) & f(c) \end{vmatrix}.$$

- 5p** a) Să se arate că $A = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$.
- 5p** b) Să se arate că $A = B$.
- 5p** c) Să se arate că, pentru orice trei puncte distincte, cu coordonate naturale, situate pe graficul funcției f , aria triunghiului cu vârfurile în aceste puncte este un număr natural divizibil cu 3.
2. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}$ și mulțimea $G = \{X(a) = I_2 + aA \mid a \in \mathbb{R}\}$.
- 5p** a) Să se arate că $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $X(a)X(b) = X(a+b-10ab)$.
- 5p** b) Să se arate că mulțimea $H = \left\{ X(a) \mid a \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{10} \right\} \right\}$ este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ în raport cu înmulțirea matricelor.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - \frac{x^3}{6} - \sin x$.

- 5p** a) Să se determine $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- 5p** b) Să se calculeze derivata a doua a două funcției f .
- 5p** c) Să se demonstreze că $f(x) \leq 0, \forall x \geq 0$.
2. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1+x}{1+x^2}$.
- 5p** a) Să se arate că funcția $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \arctg x + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1)$ este o primitivă a funcției f .
- 5p** b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.
- 5p** c) Să se arate că sirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, definit de $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{n+k}{n^2+k^2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, este convergent.

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Știind că $\log_3 2 = a$, să se arate că $\log_{16} 24 = \frac{1+3a}{4a}$.
- 5p** 2. Să se determine două numere reale care au suma 1 și produsul -1 .
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{2x+1} + 2^{x+2} = 160$.
- 5p** 4. Într-o clasă sunt 22 de elevi, dintre care 12 sunt fete. Să se determine în câte moduri se poate alege un comitet reprezentativ al clasei format din 3 fete și 2 băieți.
- 5p** 5. În sistemul cartezian de coordinate xOy se consideră punctele $A(2, -1)$, $B(-1, 1)$ și $C(1, 3)$.
Să se determine ecuația dreptei care trece prin punctul C și este paralelă cu dreapta AB .
- 5p** 6. Să se arate că $\sin 6 < 0$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Pentru $x \in \mathbb{C}$ se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} x+1 & x^2-1 \\ 1 & x-1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$.
- 5p** a) Să se verifice că $(A(x))^2 = 2xA(x)$.
- 5p** b) Să se determine toate numerele complexe x pentru care $(A(x))^4 + (A(x))^2 = O_2$.
- 5p** c) Să se arate că ecuația $X^2 = A(0)$, $X \in M_2(\mathbb{C})$ nu are soluții.
2. Se consideră polinomul $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = (X+i)^{100} + (X-i)^{100}$, care are forma algebraică $f = a_{100}X^{100} + a_{99}X^{99} + \dots + a_1X + a_0$.
- 5p** a) Să se calculeze $a_{100} + a_{99}$.
- 5p** b) Să se determine restul împărțirii polinomului f la $X^2 - 1$.
- 5p** c) Să se demonstreze că polinomul f are toate rădăcinile reale.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{|x^2 - x|}$.

- 5p** a) Să se arate că graficul funcției f admite asimptotă spre $-\infty$.
- 5p** b) Să se determine domeniul de derivabilitate al funcției f .
- 5p** c) Să se determine punctele de extrem local ale funcției f .

2. Se consideră sirul $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dat de $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2 + 1} dx$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

- 5p** a) Să se calculeze I_2 .
- 5p** b) Să se verifice că $I_{n+2} + I_n = \frac{1}{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
- 5p** c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n$.

Varianta 32

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Se consideră numărul real $s = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{2009}}$. Să se demonstreze că $s \in (1; 2)$.
- 5p** 2. Se consideră funcțiile $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$ și $g(x) = -4x + 1$. Să se determine coordonatele punctului de intersecție a graficelor celor două funcții.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sin x = 1 + \cos^2 x$.
- 5p** 4. Fie mulțimea $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Să se determine numărul funcțiilor pare $f : A \rightarrow A$.
- 5p** 5. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(2, -1)$, $B(-1, 1)$ și $C(1, 3)$. Să se determine coordonatele punctului D știind că patrulaterul $ABCD$ este paralelogram.
- 5p** 6. Știind că $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ și că $\sin x = \frac{3}{5}$, să se calculeze $\sin \frac{x}{2}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră în \mathbb{R}^3 sistemul $\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1, \quad a \in \mathbb{R} \\ x + y + az = a \end{cases}$
- 5p** a) Să se arate că determinantul matricei sistemului are valoarea $(a+2)(a-1)^2$.
- 5p** b) Să se rezolve sistemul în cazul în care este compatibil determinat.
- 5p** c) Să se rezolve sistemul în cazul $a = -2$.
2. Se consideră mulțimea $G \subset M_2(\mathbb{Q})$, $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 10b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Q}, a^2 - 10b^2 = 1 \right\}$.
- 5p** a) Să se verifice că $A = \begin{pmatrix} 19 & 60 \\ 6 & 19 \end{pmatrix} \in G$.
- 5p** b) Să se arate că $X \cdot Y \in G$, pentru oricare $X, Y \in G$.
- 5p** c) Să se demonstreze că mulțimea G este infinită.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{arctg}(x+2) - \operatorname{arctg} x$.
- 5p** a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Să se demonstreze că $0 < f(x) \leq \frac{\pi}{2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
- 5p** c) Să se demonstreze că funcția $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) + \operatorname{arctg} \frac{(x+1)^2}{2}$ este constantă.
2. Se consideră funcțiile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3}{3} - x + \operatorname{arctg} x$ și $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \operatorname{arctg} x$.
- 5p** a) Să se calculeze $\int_1^2 \frac{f'(x)}{x} dx$.
- 5p** b) Să se determine $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^3} \int_0^x f(t) dt$.
- 5p** c) Să se calculeze aria suprafeței cuprinse între graficele celor două funcții și dreptele $x=0$ și $x=1$.

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se arate că numărul $\log_4 16 + \log_3 9 + \sqrt[3]{27}$ este natural.
- 5p** 2. Să se determine valoarea minimă a funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 + 4x + 2$.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $16^x + 3 \cdot 4^x = 4$.
- 5p** 4. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un element din mulțimea $\{\sqrt{n} \mid n \in \mathbb{N}, n < 100\}$, acesta să fie număr rațional.
- 5p** 5. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(2, -1)$, $B(-1, 1)$, $C(1, 3)$ și $D(a, 4)$, unde $a \in \mathbb{R}$. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât dreptele AB și CD să fie paralele.
- 5p** 6. Știind că $x \in \mathbb{R}$ și că $\tan x = \frac{1}{2}$, să se calculeze $\tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $A = aI_3 + bB + cB^2$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.
- 5p** a) Să se calculeze B^3 .
- 5p** b) Să se calculeze B^{-1} .
- 5p** c) Să se demonstreze că $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, $(a+b+c)\det(A) \geq 0$.
2. Se consideră corpul $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$ și $H = \{x^2 \mid x \in \mathbb{Z}_7\}$.
- 5p** a) Să se arate că $H = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{4}\}$.
- 5p** b) Să se arate că, pentru orice $a \in \mathbb{Z}_7$ există $x, y \in \mathbb{Z}_7$ astfel încât $a = x^2 + y^2$.
- 5p** c) Să se arate că $\{x^{2000} \mid x \in \mathbb{Z}_7\} = H$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Fie funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ și sirul $(a_n)_{n \geq 1}$, $a_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{n\sqrt{n}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
- 5p** a) Să se arate că funcția f' este strict crescătoare pe intervalul $(0, +\infty)$.
- 5p** b) Să se demonstreze că $\frac{1}{2(k+1)\sqrt{k+1}} < \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} < \frac{1}{2k\sqrt{k}}$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$.
- 5p** c) Să se demonstreze că sirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este convergent.
2. Se consideră funcțiile $f_n: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \int_0^x t^n \operatorname{arctg} t dt$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
- 5p** a) Să se arate că $f_1(x) = \frac{x^2 + 1}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2}$, $\forall x \geq 0$.
- 5p** b) Să arate că $f_n(1) \leq \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{n+1}$, $\forall n \geq 1$.
- 5p** c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} nf_n(1)$.

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se calculeze modulul numărului complex $z = (3 + 4i)^4$.
- 5p** 2. Să se arate că vârful parabolei asociate funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 + 2x + 1$ se găsește pe dreapta de ecuație $x + y = 0$.
- 5p** 3. Să se determine numărul soluțiilor ecuației $\sin x = \sin 2x$ din intervalul $[0, 2\pi]$.
- 5p** 4. Fie mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Să se determine numărul funcțiilor bijective $f : A \rightarrow A$, cu proprietatea că $f(1) = 2$.
- 5p** 5. În sistemul cartezian de coordinate xOy se consideră punctele $A(2, -1)$, $B(-1, 1)$, $C(1, 3)$ și $D(a, 4)$, $a \in \mathbb{R}$. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care dreptele AB și CD sunt perpendiculare.
- 5p** 6. Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC în care are loc relația $\sin B + \cos B = \sin C + \cos C$.
Să se demonstreze că triunghiul ABC este isoscel.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $K = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_{1,3}(\mathbb{R})$, $L = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$ și $A = LK$.
- 5p** a) Să se calculeze suma elementelor matricei A .
- 5p** b) Să se arate că $A^2 = 32A$.
- 5p** c) Să se arate că rangul matricei A^n este 1, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Pe mulțimea \mathbb{R} se consideră legea de compoziție $x * y = axy - x - y + 6$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, unde a este o constantă reală.
- 5p** a) Pentru $a = \frac{1}{3}$, să se demonstreze că legea „ $*$ ” este asociativă.
- 5p** b) Să se arate că legea „ $*$ ” admite element neutru dacă și numai dacă $a = \frac{1}{3}$.
- 5p** c) Să se arate că, dacă intervalul $[0, 6]$ este parte stabilă a lui \mathbb{R} în raport cu legea „ $*$ ”, atunci $a \in \left[\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right]$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x+1} - \ln\left(x + \frac{3}{2}\right) + \ln\left(x + \frac{1}{2}\right)$ și sirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$,

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

- 5p** a) Să se demonstreze că funcția f este strict crescătoare pe intervalul $(0, +\infty)$.

- 5p** b) Să se arate că $f(x) < 0$, $\forall x \in (0, +\infty)$.

- 5p** c) Să se demonstreze că sirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este strict descrescător.

2. Se consideră funcțiile $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \int_0^x t^n \arcsin t dt$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

- 5p** a) Să se calculeze derivata funcției f_3 .

- 5p** b) Să se calculeze $f_1\left(\frac{1}{2}\right)$.

- 5p** c) Să se determine $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f_2(x)$.

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se calculeze modulul numărului $(2+i)^3 + (2-i)^3$.
- 5p** 2. Graficul unei funcții de gradul al doilea este o parabolă care trece prin punctele $A(1, -3)$, $B(-1, 3)$, $C(0, 1)$. Să se calculeze valoarea funcției în punctul $x = 2$.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $3 \cdot 4^x - 6^x = 2 \cdot 9^x$.
- 5p** 4. Se consideră mulțimea $A = \{0, 1, 2, \dots, 2009\}$. Să se determine probabilitatea ca, alegând un element din mulțimea A , acesta să fie divizibil cu 5.
- 5p** 5. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(0, -3)$ și $B(4, 0)$. Să se calculeze distanța de la punctul O la dreapta AB .
- 5p** 6. Să se calculeze aria unui paralelogram $ABCD$ cu $AB = 6$, $AD = 8$ și $m(\angle ADC) = 135^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.
- 5p** a) Să se arate că ecuația $AX = B$ are o infinitate de soluții $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$.
- 5p** b) Să se verifice că $A^3 = 10A$.
- 5p** c) Să se determine rangul matricei A^* , adjuncta matricei A .
2. Se consideră mulțimea $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$, funcția $f : \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(a + b\sqrt{2}) = a^2 - 2b^2$, $\forall a, b \in \mathbb{Z}$ și mulțimea $A = \{x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \mid f(x) = -1\}$.
- 5p** a) Să se arate că $7 + 5\sqrt{2} \in A$.
- 5p** b) Să se arate că, pentru orice $x, y \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, $f(xy) = f(x)f(y)$.
- 5p** c) Să se arate că mulțimea A este infinită.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - \ln(e^x + 1)$.
- 5p** a) Să se arate că funcția f' este strict descrescătoare pe \mathbb{R} .
- 5p** b) Să se arate că $\lim_{x \rightarrow \infty} x^a f(x) = 0$, $\forall a \in \mathbb{R}$.
- 5p** c) Să se determine asymptotele graficului funcției f .
2. Fie sirul $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dat de $I_n = \int_0^2 (2x - x^2)^n dx$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
- 5p** a) Să se calculeze I_1 .
- 5p** b) Să se demonstreze că $(2n+1)I_n = 2nI_{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$.
- 5p** c) Să se arate că sirul $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tinde descrescător către 0.

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Se consideră numărul rațional $\frac{1}{7}$ scris sub formă de fracție zecimală infinită $\frac{1}{7} = 0.a_1a_2a_3\dots$. Să se determine a_{60} .
- 5p** 2. Fie funcțiile $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2 - x$, $g(x) = 3x + 2$. Să se calculeze $(f \circ g)(x) - (g \circ f)(x)$.
- 5p** 3. Să se demonstreze că funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^3 + 1$ este injectivă.
- 5p** 4. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să fie divizibil cu 50.
- 5p** 5. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care punctele $A(1, -2)$, $B(4, 1)$ și $C(-1, a)$ sunt coliniare.
- 5p** 6. Fie ABC un triunghi care are $AB = 3$, $AC = 5$ și $BC = 7$. Să se calculeze $\cos A$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, cu proprietatea că $A^2 = O_2$.
- 5p** a) Să se arate că $a + d = 0$.
- 5p** b) Să se arate că matricea $I_2 + A$ este inversabilă.
- 5p** c) Să se arate că ecuația $AX = O_2$ are o infinitate de soluții în mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Se consideră polinomul $f = X^4 - 2X^2 + 9$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$, numărul $a = \sqrt{2} + i$ și mulțimile $A = \{g(a) \mid g \in \mathbb{Q}[X]\}$ și $B = \{h(a) \mid h \in \mathbb{Q}[X], \text{grad}(h) \leq 3\}$.
- 5p** a) Să se calculeze $f(a)$.
- 5p** b) Să se calculeze $|x_1| + |x_2| + |x_3| + |x_4|$.
- 5p** c) Să se arate că $A = B$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Fie funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{\sqrt{3}\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - x}$ și sirul $(a_n)_{n \geq 1}$ definit prin $a_1 = 2$, $a_{n+1} = f(a_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
- 5p** a) Să se demonstreze că funcția f este strict crescătoare pe $(-\infty, \sqrt{3})$ și pe $(\sqrt{3}, \infty)$.
- 5p** b) Să se determine asimptotele graficului funcției f .
- 5p** c) Să se demonstreze că sirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ nu este convergent.
2. Se consideră funcțiile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x^2}$ și $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \int_1^x f(t)dt$.
- 5p** a) Să se determine punctele de inflexiune ale graficului funcției F .
- 5p** b) Să se calculeze $\int_0^1 xf(x)dx$.
- 5p** c) Să se calculeze $\int_0^1 F(x)dx$.

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se calculeze suma $1 + 4 + 7 + \dots + 100$.
- 5p** 2. Să se determine imaginea funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x + 1$.
- 5p** 3. Să se arate că numărul $\sin\left(\arcsin\frac{1}{2}\right) + \sin\left(\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ este natural.
- 5p** 4. Să se determine numărul termenilor raționali din dezvoltarea binomului $(\sqrt{2} + 1)^5$.
- 5p** 5. Fie $ABCD$ un pătrat de latură 1. Să se calculeze lungimea vectorului $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$.
- 5p** 6. Să se arate că $\sin 105^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ b & b+1 & b+2 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$, cu $a, b \in \mathbb{R}$.
- 5p** a) Să se arate că $\det(A) = (a-b)(a-1)$.
- 5p** b) Să se calculeze $\det(A - A^t)$.
- 5p** c) Să se arate că $\text{rang } A \geq 2$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$.
2. Se consideră polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^3 + pX^2 + qX + r$, cu $p, q, r \in (0, \infty)$ și cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$.
- 5p** a) Să se demonstreze că f nu are rădăcini în intervalul $[0, \infty)$.
- 5p** b) Să se calculeze $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$ în funcție de p, q și r .
- 5p** c) Să se demonstreze că dacă a, b, c sunt trei numere reale astfel încât $a + b + c < 0$, $ab + bc + ca > 0$ și $abc < 0$, atunci $a, b, c \in (-\infty, 0)$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x + 3\arctg x$.

- 5p** a) Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe \mathbb{R} .
- 5p** b) Să se arate că funcția f este bijectivă.
- 5p** c) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^a}$ există, este finită și nenulă.

2. Se consideră sirul $(I_n)_{n \geq 1}$ dat de $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

- 5p** a) Să se calculeze I_1 .
- 5p** b) Să se demonstreze că sirul $(I_n)_{n \geq 1}$ este convergent.
- 5p** c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n$.

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se arate că $\log_2 3 \in (1, 2)$.
- 5p** 2. Să se determine valorile reale ale lui m pentru care $x^2 + 3x + m > 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sin x + \cos(-x) = 1$.
- 5p** 4. Să se arate că, pentru orice număr natural n , $n \geq 3$, are loc relația $C_n^2 + C_n^3 = C_{n+1}^3$.
- 5p** 5. Se consideră dreptele de ecuații $d_1 : 2x + 3y + 1 = 0$, $d_2 : 3x + y - 2 = 0$ și $d_3 : x + y + a = 0$.
Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care cele trei drepte sunt concurente.
- 5p** 6. Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC , știind că $AB = 4$, $AC = 3$ și $m(\angle BAC) = 60^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ și mulțimea de matrice $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & b & a \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{C} \right\}$.
- 5p** a) Să se calculeze A^3 .
- 5p** b) Să se arate că dacă $X \in M_3(\mathbb{C})$ și $AX = XA$, atunci $X \in M$.
- 5p** c) Să se arate că ecuația $X^2 = A$ nu are soluții în $M_3(\mathbb{C})$.
2. Se consideră polinomul $f = aX^4 + bX + c$, cu $a, b, c \in \mathbb{Z}$.
- 5p** a) Să se arate că numărul $f(3) - f(1)$ este număr par.
- 5p** b) Să se arate că, pentru orice $x, y \in \mathbb{Z}$, numărul $f(x) - f(y)$ este divizibil cu $x - y$.
- 5p** c) Să se determine coeficienții polinomului f știind că $f(1) = 4$ și $f(b) = 3$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + \ln(x^2 + x + 1)$.
- 5p** a) Să se demonstreze că funcția f este strict crescătoare.
- 5p** b) Să se demonstreze că funcția f este bijectivă.
- 5p** c) Să se arate că graficul funcției f nu are asymptotă oblică spre $+\infty$.
2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \{x\}(1 - \{x\})$, unde $\{x\}$ este partea fracționară a numărului real x .
- 5p** a) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.
- 5p** b) Să se demonstreze că funcția f admite primitive pe \mathbb{R} .
- 5p** c) Să se arate că valoarea integralei $\int_a^{a+1} f(x) dx$ nu depinde de numărul real a .

SUBIECTUL I (30p)

5p 1. Se consideră numărul complex $z = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$. Să se demonstreze că $z^2 = \bar{z}$.

5p 2. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale inecuația $-x^2 + 4x - 3 \geq 0$.

5p 3. Să se arate că funcția $f : (1; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + \frac{1}{x}$ este injectivă.

5p 4. Să se determine numărul funcțiilor $f : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{0, 1, 2, 3\}$ pentru care $f(1)$ este număr par.

5p 5. Fie ABC un triunghi care are $AB = 2$, $AC = 3$ și $BC = 2\sqrt{2}$. Să se calculeze $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$.

5p 6. Să se arate că $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ ax + by + cz = 0 \\ bcx + acy + abz = 0 \end{cases}$, cu $a, b, c \in \mathbb{R}^*$ și A matricea sistemului.

5p a) Să se calculeze $\det(A)$.

5p b) Să se rezolve sistemul, în cazul în care a, b, c sunt distințe două câte două.

5p c) Să se determine mulțimea soluțiilor sistemului, în cazul în care $a = b \neq c$.

2. Se consideră mulțimea $M = \left\{ a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Z}, a^2 - 5b^2 = 1 \right\}$.

5p a) Să se arate că $x = 9 + 4\sqrt{5} \in M$.

5p b) Să se demonstreze că M este grup în raport cu înmulțirea numerelor reale.

5p c) Să se demonstreze că mulțimea M are o infinitate de elemente.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \ln x$.

5p a) Să se studieze monotonia funcției f .

5p b) Să se determine asimptotele graficului funcției f .

5p c) Să se demonstreze că orice sir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cu proprietatea $x_0 \in (0, 1)$, $x_{n+1} = e^{f(x_n)}$ este convergent.

2. Se consideră sirul $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ definit prin $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{4x+5} dx$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p a) Să se calculeze I_2 .

5p b) Să se arate că sirul $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ verifică relația $4I_{n+1} + 5I_n = \frac{1}{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p c) Să se determine $\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n$.

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Se consideră $a \in \mathbb{R}$ și numărul complex $z = \frac{a+2i}{2+ai}$. Să se determine a pentru care $z \in \mathbb{R}$.
- 5p** 2. Să se demonstreze că dreapta de ecuație $y = 2x + 3$ intersectează parabola de ecuație $y = x^2 - 4x + 12$ într-un singur punct.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{2x-1} = x$.
- 5p** 4. Se consideră mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Să se determine probabilitatea ca, alegând o pereche (a, b) din produsul cartezian $A \times A$ să avem egalitatea $a + b = 6$.
- 5p** 5. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $M(2, -1)$, $A(1, 2)$ și $B(4, 1)$. Să se determine lungimea vectorului $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$.
- 5p** 6. Să se arate că $\sin(a+b) \cdot \sin(a-b) = \sin^2 a - \sin^2 b$, pentru oricare $a, b \in \mathbb{R}$.

SUBIECTUL II (30p)

- 1.** Se consideră matricele $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 9 & 6 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = I_3 + A$, $C = I_3 + aA$, cu $a \in \mathbb{R}$.
- 5p** a) Să se calculeze $S = A - XY$.
- 5p** b) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $BC = I_3$.
- 5p** c) Să se arate că $A^{n+1} = 14A^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
- 2.** Se consideră polinomul $f = X^3 - 1 \in \mathbb{R}[X]$ și numărul $\varepsilon \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, astfel încât $f(\varepsilon) = 0$.
- 5p** a) Să se demonstreze că $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$.
- 5p** b) Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe sistemul $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y\varepsilon + z\varepsilon^2 = 0 \\ x + y\varepsilon^2 + z\varepsilon = 0 \end{cases}$.
- 5p** c) Să se arate că, dacă f divide $f_1(X^3) + Xf_2(X^3) + X^2f_3(X^3)$, unde f_1, f_2, f_3 sunt polinoame cu coeficienți complecsi, atunci fiecare dintre polinoamele f_1, f_2, f_3 este divizibil cu $X - 1$.

SUBIECTUL III (30p)

- 1.** Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{x^2 + 1}$.
- 5p** a) Să se demonstreze că funcția f este strict crescătoare pe intervalul $(-\infty, 0]$.
- 5p** b) Să se arate că graficul funcției f are exact două puncte de inflexiune.
- 5p** c) Să se determine ecuația asymptotei la graficul funcției f spre $-\infty$.
- 2.** Se consideră funcțiile $F_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F_n(x) = \int_0^x t \sin^n t dt$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
- 5p** a) Să se calculeze $F_1(\pi)$.
- 5p** b) Să se demonstreze că $F_{n+1}(1) < F_n(1)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
- 5p** c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(1)$.

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se arate că numărul $100^{\lg 2} + \sqrt[3]{-27}$ este natural.
- 5p** 2. Să se determine imaginea funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{x+1} = -3^x + 8$.
- 5p** 4. Să se determine numărul funcțiilor $f : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ care au proprietatea că $f(1) + f(3) = 7$.
- 5p** 5. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(2, -1)$ și $B(-1, 1)$. Să se determine ecuația dreptei care trece prin originea axelor și este paralelă cu dreapta AB .
- 5p** 6. Fie a și b numere reale astfel încât $\sin a + \sin b = 1$ și $\cos a + \cos b = \frac{1}{2}$. Să se calculeze $\cos(a - b)$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Pentru $p, q, r \in \mathbb{C}$, se consideră sistemul $\begin{cases} x + py + p^2z = p^3 \\ x + qy + q^2z = q^3 \\ x + ry + r^2z = r^3 \end{cases}$.
- 5p** a) Să se arate că determinantul sistemului este $\Delta = (p - q)(q - r)(r - p)$.
- 5p** b) Dacă p, q, r sunt distințe, să se rezolve sistemul.
- 5p** c) Să se arate că, dacă sistemul are soluția $(-1, 1, 1)$, atunci cel puțin două dintre numerele p, q, r sunt egale.
2. Se consideră inelul $(A, +, \cdot)$ unde $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}_5 \right\}$.
- 5p** a) Să se determine numărul elementelor mulțimii A .
- 5p** b) Să se rezolve în mulțimea A ecuația $X^2 = I_2$.
- 5p** c) Să se arate că $(A, +, \cdot)$ nu este corp.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow (-\infty, 0)$, $f(x) = \ln(1+x) - x$.

5p a) Să se demonstreze că funcția f este strict descrescătoare pe intervalul $(0, +\infty)$.

5p b) Să se arate că funcția f este surjectivă.

5p c) Să se arate că graficul funcției f nu admite asymptote.

2. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

5p a) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.

5p b) Să se arate că $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_1^x f(\ln t) dt = \frac{\pi}{2}$.

5p c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + f\left(\frac{3}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{n}\right) \right)$.

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se calculeze partea întreagă a numărului $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3}$.
- 5p** 2. Să se rezolve în $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sistemul $\begin{cases} y = x^2 - 3x + 1 \\ y = 2x^2 + x + 4 \end{cases}$.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\arctg x + \operatorname{arcctg} \frac{1}{3} = \frac{\pi}{2}$.
- 5p** 4. Să se determine numărul termenilor raționali ai dezvoltării $(\sqrt[4]{5} + 1)^{100}$.
- 5p** 5. Să se arate că punctele $A(-1, 5)$, $B(1, 1)$ și $C(3, -3)$ sunt coliniare.
- 5p** 6. Să se calculeze lungimea razei cercului înscris în triunghiul care are lungimile laturilor 4, 5 și 7.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, cu $AB - BA = A$ și matricele $A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
- 5p** a) Să se determine rangul matricei A_0 .
- 5p** b) Să se arate că $A_0 B_0 - B_0 A_0 = A_0$.
- 5p** c) Să se demonstreze că $A^n B - BA^n = nA^n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.
2. Se consideră polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = 4X^3 - 12X^2 + aX + b$.
- 5p** a) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât polinomul f să se dividă cu polinomul $X^2 - 1$.
- 5p** b) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât ecuația $f(x) = 0$ să aibă soluția $x = i \in \mathbb{C}$.
- 5p** c) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât polinomul să aibă rădăcinile x_1, x_2, x_3 în progresie aritmetică și, în plus, $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 11$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \operatorname{arctg} x$ și sirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ definit de $x_1 = 1$, $x_{n+1} = f(x_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

- 5p** a) Să se demonstreze că funcția f' este strict crescătoare pe \mathbb{R} .
- 5p** b) Să se determine ecuația asymptotei la graficul funcției f spre $-\infty$.
- 5p** c) Să se arate că sirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este convergent.

2. Fie sirul $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, definit prin $I_n = \int_0^1 (x - x^2)^n dx$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

- 5p** a) Să se calculeze I_2 .
- 5p** b) Să se demonstreze că $I_n = \frac{n}{4n+2} I_{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.
- 5p** c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$.

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se determine valoarea de adevăr a propoziției: „Suma oricărora două numere iraționale este număr irațional.”
- 5p** 2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 2$. Să se rezolve ecuația $f(f(x)) = f^2(x)$.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $4^x - 2^x = 12$.
- 5p** 4. Fie mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând o pereche (a, b) din mulțimea $A \times A$, produsul numerelor a și b să fie impar.
- 5p** 5. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(1, 3)$ și $C(-1, 1)$. Să se calculeze aria pătratului de diagonală AC .
- 5p** 6. Să se arate că $\sin 105^\circ + \sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră mulțimea $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{N} \right\}$ și matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \in M$.
- 5p** a) Câte matrice din mulțimea M au suma elementelor egală cu 1?
- 5p** b) Să se arate că $A^{-1} \notin M$.
- 5p** c) Să se determine toate matricele inversabile $B \in M$ care au proprietatea $B^{-1} \in M$.
2. Se consideră ecuația $x^4 - 8x^3 + ax^2 + 8x + b = 0$, cu $a, b \in \mathbb{R}$ și cu soluțiile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$.
- 5p** a) Să se arate că $(x_1 + x_4)(x_2 + x_3) + x_1x_4 + x_2x_3 + (x_1 + x_4)x_2x_3 + (x_2 + x_3)x_1x_4 = a - 8$.
- 5p** b) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $x_1 + x_4 = x_2 + x_3$.
- 5p** c) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât x_1, x_2, x_3, x_4 să fie în progresie aritmetică.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + e^{-x}$.

- 5p** a) Să se demonstreze că funcția f este strict crescătoare pe intervalul $[0, +\infty)$.
- 5p** b) Să se arate că funcția f admite exact un punct de extrem local.
- 5p** c) Să se determine numărul de soluții reale ale ecuației $f(x) = m$, unde m este un număr real oarecare.
2. Fie funcțiile $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \int_1^{\operatorname{tg} x} \frac{t}{1+t^2} dt$ și $g : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \int_1^{\operatorname{ctg} x} \frac{1}{t(1+t^2)} dt$.
- 5p** a) Să se calculeze $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$.
- 5p** b) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.
- 5p** c) Să se arate că $f(x) + g(x) = 0$, $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se determine partea reală a numărului complex $z = \frac{1-i}{1+i}$.
- 5p** 2. Să se determine valorile reale ale lui m pentru care $x^2 + mx + 1 \geq 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\arcsin 2x = -\frac{1}{2}$.
- 5p** 4. Se consideră mulțimea $A = \{0, 1, 2, 3, \dots, 9\}$. Să se determine numărul submulțimilor mulțimii A care au 5 elemente, din care exact două sunt numere pare.
- 5p** 5. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $B(-1, 2)$ și $C(2, -2)$. Să se determine distanța de la punctul O la dreapta BC .
- 5p** 6. Știind că $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ și $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, să se calculeze $\operatorname{ctg} \alpha$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- 5p** a) Să se calculeze $AB + BA$.
- 5p** b) Să se arate că $\operatorname{rang}(A + B) = \operatorname{rang} A + \operatorname{rang} B$.
- 5p** c) Să se demonstreze că $(A + B)^n = A^n + B^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
2. Se consideră polinomul $f = X^4 + aX^3 + 4X^2 + 1 \in \mathbb{C}[X]$ cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$.
- 5p** a) Să se determine $a \in \mathbb{C}$ astfel încât polinomul f să se dividă cu $X + 1$.
- 5p** b) Să se arate că polinomul $g = X^4 + 4X^2 + aX + 1$ are rădăcinile $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3}, \frac{1}{x_4}$.
- 5p** c) Să se arate că, pentru orice $a \in \mathbb{C}$, polinomul f nu are toate rădăcinile reale.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{ax+b}{\sqrt{x^2+x+1}}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

- 5p** a) Să se calculeze $f'(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe \mathbb{R} dacă și numai dacă $a = 2b > 0$.
- 5p** c) Pentru $a = 2$ și $b = 1$, să se determine mulțimea valorilor funcției f .
2. Fie funcția $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \int_0^x e^{\arcsin t} dt$.
- 5p** a) Să se arate că funcția f este strict monotonă.
- 5p** b) Să se arate că $f(x) = \int_0^{\arcsin x} e^t \cos t dt$, $\forall x \in [-1, 1]$.
- 5p** c) Să se determine $f(1)$.

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se determine partea întreagă a numărului $\frac{7}{5\sqrt{2}-1}$.
- 5p** 2. Fie x_1 și x_2 soluțiile reale ale ecuației $x^2 + x - 1 = 0$. Să se arate că $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} \in \mathbb{Z}$.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $2 \cdot 3^x + 3^{1-x} = 7$.
- 5p** 4. Se consideră mulțimile $A = \{1, 2, 3, 4\}$ și $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Să se determine numărul funcțiilor strict crescătoare $f : A \rightarrow B$.
- 5p** 5. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(1, 3)$, $B(-2, 1)$ și $C(-3, -1)$. Să se calculeze lungimea înălțimii duse din vârful A în triunghiul ABC .
- 5p** 6. Să arate că $2 \cdot (\sin 75^\circ - \sin 15^\circ) = \sqrt{2}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ și mulțimea $C(A) = \left\{ X \in M_2(\mathbb{R}) \mid XA = AX \right\}$.
- 5p** a) Să se arate că $B \in C(A)$.
- 5p** b) Să se arate că dacă $X \in C(A)$, atunci există $x, y \in \mathbb{R}$, astfel încât $X = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & x \end{pmatrix}$.
- 5p** c) Să se rezolve ecuația $X + X^2 = A$.
2. Se consideră mulțimea $G = (-1, 1)$, funcția $f : G \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ și corespondența $(x, y) \rightarrow x * y$, unde $x * y = \frac{x+y}{1+xy}$, $\forall x, y \in G$.
- 5p** a) Să se arate că această corespondență definește o lege de compoziție pe G .
- 5p** b) Să se arate că $\forall x, y \in G$, $f(x * y) = f(x)f(y)$.
- 5p** c) Știind că operația "*" este asociativă, să se calculeze $\frac{1}{2} * \frac{1}{3} * \dots * \frac{1}{9}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + ax + 5}{\sqrt{x^2 + 1}}$, $a \in \mathbb{R}$.

- 5p** a) Să se calculeze $f'(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Știind că $a = 0$, să se determine ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p** c) Să se determine toate numerele reale a astfel încât funcția f să aibă trei puncte de extrem local.
2. Fie funcția $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.
- 5p** a) Să se calculeze $\int_{-1}^1 x \sqrt{1-x^2} dx$.
- 5p** b) Să se determine volumul corpului obținut prin rotirea graficului funcției f în jurul axei Ox .
- 5p** c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x^n f(x) dx$.

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ o progresie aritmetică. Știind că $a_3 + a_{19} = 10$, să se calculeze $a_6 + a_{16}$.
- 5p** 2. Să se determine valorile parametrului real m pentru care ecuația $x^2 - mx + 1 - m = 0$ are două rădăcini reale distințe.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\lg^2 x + \lg x = 6$.
- 5p** 4. Se consideră mulțimile $A = \{1, 2, 3\}$ și $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Să se determine numărul funcțiilor strict descrescătoare $f : A \rightarrow B$, cu proprietatea că $f(3) = 1$.
- 5p** 5. În sistemul cartezian de coordinate xOy se consideră punctele $M(2, -1)$, $N(-1, 1)$ și $P(0, 3)$. Să se determine coordonatele punctului Q astfel încât $MNPQ$ să fie paralelogram.
- 5p** 6. Să se calculeze lungimea medianei duse din A în triunghiul ABC , știind că $AB = 2$, $AC = 3$ și $BC = 4$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- 5p** a) Să se demonstreze că $\forall x \in \mathbb{R}$, $\det(A - xI_2) = x^2 - (a+d)x + ad - bc$.
- 5p** b) Dacă $A^2 = O_2$, să se demonstreze că $a+d=0$.
- 5p** c) Știind că $A^2 = O_2$, să se calculeze $\det(A + 2I_2)$.
2. Se consideră mulțimea $G = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a^2 - 3b^2 = 1\}$ și operația $(a, b) * (c, d) = (ac + 3bd, ad + bc)$.
- 5p** a) Să se determine $a \in \mathbb{Z}$ pentru care $(a, 15) \in G$.
- 5p** b) Să se arate că, pentru orice $(a, b), (c, d) \in G$, $(a, b) * (c, d) \in G$.
- 5p** c) Să se arate că $(G, *)$ este grup.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{|x-1|}{e^x}$.
- 5p** a) Să se arate că f nu este derivabilă în punctul $x_0 = 1$.
- 5p** b) Să se determine numărul soluțiilor reale ale ecuației $f(x) = m$, unde m este un parametru real.
- 5p** c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(n))$.
2. Se consideră funcția $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \sin x$.
- 5p** a) Să se arate că există numerele reale a, b, c astfel încât funcția $F : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = (ax^2 + b)\cos x + cx\sin x$ să fie o primitivă a funcției f .
- 5p** b) Să se calculeze $\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} f\left(\frac{1}{2x}\right) dx$.
- 5p** c) Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f și graficul funcției $g : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \pi x - x^2$.

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se arate că numărul $(2+i)^4 + (2-i)^4$ este întreg.
- 5p** 2. Să se determine coordonatele punctelor de intersecție dintre dreapta de ecuație $y = 2x + 1$ și parabola de ecuație $y = x^2 + x + 1$.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $2x + \sqrt{16+x^2} = 11$.
- 5p** 4. Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de patru cifre, acesta să fie divizibil cu 9.
- 5p** 5. În sistemul cartezian de coordinate xOy se consideră punctele $A(-1, 1)$, $B(1, 3)$ și $C(3, 2)$. Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC . Să se determine ecuația dreptei OG .
- 5p** 6. Să se arate că $2 \cdot (\cos 75^\circ + \cos 15^\circ) = \sqrt{6}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și funcția $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,

$$f(X) = AX - XA.$$
- 5p** a) Să se determine rangul matricei A .
- 5p** b) Să se calculeze $f(B)$.
- 5p** c) Să se arate că ecuația $f(X) = B$ nu are soluții.
2. Se consideră polinoamele $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^3 + a^2X - a$, $g = aX^3 - a^2X^2 - 1$, cu $a \in \mathbb{R}^*$ și $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ rădăcinile polinomului f .
- 5p** a) Să se calculeze $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.
- 5p** b) Să se arate că rădăcinile polinomului g sunt inversele rădăcinilor polinomului f .
- 5p** c) Să se arate că polinoamele f și g nu au rădăcini reale comune.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{1, -1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \arctg \frac{1}{x^2 - 1}$.

- 5p** a) Să se calculeze $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x)$.
- 5p** b) Să se arate că graficul funcției f admite asimptotă spre $+\infty$.
- 5p** c) Să se demonstreze că funcția f admite un singur punct de extrem local.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2$.

- 5p** a) Să se calculeze $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$.
- 5p** b) Să se determine $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} \int_0^x f(t) dt$.
- 5p** c) Să se demonstreze că $\int_0^1 \cos(x^2) dx \geq \frac{9}{10}$.

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se determine partea reală a numărului complex $(\sqrt{3} + i)^6$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$. Să se calculeze $(f \circ f)(512)$.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\cos 2x + \sin x = 0$.
- 5p** 4. Se consideră mulțimea $M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Să se determine numărul tripletelor (a, b, c) cu proprietatea că $a, b, c \in M$ și $a < b < c$.
- 5p** 5. Să se calculeze distanța dintre dreptele paralele de ecuații $x + 2y = 6$ și $2x + 4y = 11$.
- 5p** 6. Paralelogramul $ABCD$ are $AB = 1$, $BC = 2$ și $m(\angle BAD) = 60^\circ$. Să se calculeze produsul scalar $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$.

SUBIECTUL II (30p)

- 1.** Se consideră sistemul $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x - y + z = 1 \\ 7x - y + az = b \end{cases}$, unde a și b sunt parametri reali.
- 5p** a) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care determinantul sistemului este egal cu zero.
- 5p** b) Să se determine valorile parametrilor $a, b \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul este incompatibil.
- 5p** c) Să se arate există o infinitate de valori ale numerelor a și b pentru care sistemul admite o soluție (x, y, z) , cu x, y, z în progresie aritmetică.
- 2.** Se consideră mulțimea $G = \left\{ X(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$.
- 5p** a) Să se arate că $X(t) \cdot X(u) = X(t+u)$, $\forall t, u \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Să se determine $t \in \mathbb{R}$ știind că $X(t) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.
- 5p** c) Să se arate că mulțimea G formează grup abelian în raport cu înmulțirea matricelor.

SUBIECTUL III (30p)

- 1.** Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$.
- 5p** a) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- 5p** b) Să se determine domeniul de derivabilitate al funcției f .
- 5p** c) Să se demonstreze că funcția f are două puncte de extrem.
- 2.** Fie funcția $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ și sirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $a_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \sqrt{n^2 - k^2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
- 5p** a) Să se calculeze $\int_0^1 x f(x) dx$.
- 5p** b) Să se determine volumul corpului obținut prin rotirea graficului funcției f în jurul axei Ox .
- 5p** c) Să se demonstreze că sirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este convergent.

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se arate că numărul $\log_9 \sqrt{3} + \log_4 \sqrt[3]{2}$ este rațional.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = mx^2 - 2mx + m - 1$, $m \in \mathbb{R}^*$. Să se determine $m \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $f(x) \leq 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $2^x + 2^{x+1} + 2^{x-1} = 56$.
- 5p** 4. Fie mulțimea $A = \{1, 2, \dots, 1000\}$. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un element din mulțimea $\{\sqrt[3]{n} \mid n \in A\}$, acesta să fie număr rațional.
- 5p** 5. Fie triunghiul ABC și $M \in (BC)$ astfel încât $\overrightarrow{MC} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{CB}$. Să se demonstreze că $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{CA}$.
- 5p** 6. Știind că $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și $\tan x = 3$, să se calculeze $\sin 2x$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră $a \in \mathbb{R}$, sistemul $\begin{cases} x + ay = 1 \\ y + az = a \\ z + x = 1 \end{cases}$ și A matricea sa.
- 5p** a) Să se arate că $\det A \neq 0$.
- 5p** b) Să se arate că soluția sistemului este formată din trei numere în progresie geometrică.
- 5p** c) Să se determine inversa matricei A .
2. Se consideră pe \mathbb{R} legea de compoziție dată de relația $x * y = xy - 5x - 5y + 30$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ și mulțimea $G = (5, \infty)$.
- 5p** a) Să se arate că legea "*" are element neutru.
- 5p** b) Să se demonstreze că G este grup abelian în raport cu legea "*".
- 5p** c) Să se rezolve în grupul $(G, *)$ sistemul $\begin{cases} x * y = z \\ y * z = x \\ z * x = y \end{cases}$

Ministerul Educației, Cercetării și Inovației

Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{4-3x^2}{x^3}$.

- 5p** a) Să se demonstreze că graficul funcției f admite asimptotă spre $+\infty$.
- 5p** b) Să se determine mulțimea valorilor funcției f .
- 5p** c) Să se determine domeniul de derivabilitate al funcției $g : [2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \arccos f(x)$.
2. Se consideră funcțiile $f : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}$ și $F : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \ln \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$.
- 5p** a) Să se arate că funcția F este o primitivă a funcției f .
- 5p** b) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotirea graficului funcției f în jurul axei Ox .
- 5p** c) Să se calculeze aria mulțimii cuprinse între dreptele de ecuații $x=1$ și $x=2$, graficul funcției F și axa Ox .

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât numerele $2^{a-1}, 2^{-a+2} + 1, 2^{a+1} + 1$ să fie în progresie aritmetică.
- 5p** 2. Să se arate că vârful parabolei $y = x^2 + (2a-1)x + a^2$, $a \in \mathbb{R}$, este situat pe dreapta de ecuație $4x + 4y = 1$.
- 5p** 3. Să se arate că, dacă z este soluție a ecuației $z^2 + 2z + 4 = 0$, atunci $z^2 - \frac{8}{z} = 0$.
- 5p** 4. Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $\{11, 12, \dots, 50\}$, aceasta să fie divizibil cu 2 și cu 5.
- 5p** 5. Trapezul isoscel $ABCD$ are bazele $[AB]$ și $[CD]$ și lungimea înălțimii egală cu 4. Să se calculeze $|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}|$.
- 5p** 6. Să se calculeze $\operatorname{tg} 2\alpha$, știind că $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și $\sin \alpha = \frac{12}{13}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$, transpusa $A^t \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$, $B = AA^t$, și punctele $P_k(a_k, b_k)$, unde $k \in \{1, 2, 3\}$.
- 5p** a) Să se calculeze B știind că $P_1(1, 2), P_2(2, 4), P_3(-3, -6)$.
- 5p** b) Să se arate că $\det(B) \geq 0$, oricare ar fi punctele P_1, P_2, P_3 .
- 5p** c) Să se arate că $\det(B) = 0$ dacă și numai dacă punctele P_1, P_2, P_3 sunt coliniare pe o dreaptă care trece prin originea axelor.
2. Se consideră mulțimea $M = \left\{ \begin{pmatrix} \hat{1} & a & b \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}_5 \right\}$.
- 5p** a) Să se determine numărul elementelor mulțimii M .
- 5p** b) Să se arate că $AB \in M$, pentru orice $A, B \in M$.
- 5p** c) Să se arate că (M, \cdot) este un grup, unde „ \cdot ” este înmulțirea matricelor.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \cdot \sin \frac{1}{x}$.
- 5p** a) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.
- 5p** b) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}^*$.
- 5p** c) Să se determine ecuația asymptotei la graficul funcției f către $+\infty$.
2. Fie sirul $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $I_n = \int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
- 5p** a) Să se calculeze I_2 .
- 5p** b) Să se demonstreze că $I_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3} I_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
- 5p** c) Să se demonstreze că sirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, definit prin $a_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k C_n^k}{2k+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, are limita 0.

Varianta 51

SUBIECTUL I (30p)

- 5p 1. Să se determine numărul elementelor mulțimii $(A \setminus B) \cap \mathbb{Z}$ știind că $A = (-3; 4]$ și $B = (1; 5]$.
- 5p 2. Să se determine coordonatele punctelor de intersecție a dreaptei $y = 2x + 1$ cu parabola $y = x^2 - x + 3$.
- 5p 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x-1} + \sqrt{2-x} = 1$.
- 5p 4. Să se rezolve în mulțimea numerelor naturale inecuația $2^{x!} \leq 2048$.
- 5p 5. Să se calculeze distanța de la punctul $A(1; 1)$ la dreapta $d: 5x + 12y - 4 = 0$.
- 5p 6. Să se calculeze $\operatorname{tg}(a+b)$ știind că $\operatorname{ctg}a = 2$ și $\operatorname{ctg}b = 5$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie sirul $(F_n)_{n \geq 0}$, dat de $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ și matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
- 5p a) Să se verifice relația $A^2 = A + I_2$.
- 5p b) Să se arate că, dacă $X \in M_2(\mathbb{Q})$, $X \neq O_2$ și $AX = XA$, atunci X este inversabilă.
- 5p c) Să se arate că $A^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$, $\forall n \geq 1$.
2. Fie $\sigma, \pi \in S_5$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.
- 5p a) Să se demonstreze că $\sigma\pi \neq \pi\sigma$.
- 5p b) Să se determine numărul elementelor mulțimii $H = \{\pi^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$.
- 5p c) Să se arate că $H = \{\pi^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ este un subgrup al grupului (S_5, \cdot) .

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : [1, \infty) \rightarrow [1, \infty)$, $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x}$.
- 5p a) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - f(x))^x$.
- 5p b) Să se arate că funcția f este strict crescătoare.
- 5p c) Să se arate că funcția f este bijectivă.
2. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ și funcția $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \begin{cases} ax + b, & x < 1 \\ \ln^2 x + 1, & x \geq 1 \end{cases}$.
- 5p a) Să se determine numerele reale a și b astfel încât funcția F să fie primitiva unei funcții f .
- 5p b) Să se calculeze $\int_1^e \frac{1}{xF(x)} dx$.
- 5p c) Să se arate că, pentru funcția $h : [1, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = (F(x) - 1)\sin x$, are loc relația $\int_1^\pi h(x)h''(x) dx \leq 0$.

Varianta 52

SUBIECTUL I (30p)

- 5p 1. Să se arate că funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |4x - 8| - 2|4 - 2x|$ este constantă.
- 5p 2. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care parabola $y = x^2 - 2x + a - 1$ și dreapta $y = 2x + 3$ au două puncte distincte comune.
- 5p 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{x-1} + 1 = x$.
- 5p 4. Să se determine numărul termenilor iraționali ai dezvoltării $(\sqrt{3} + 1)^9$.
- 5p 5. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât vectorii $\vec{u} = (m+1)\vec{i} + 8\vec{j}$ și $\vec{v} = (m-1)\vec{i} - 4\vec{j}$ să fie coliniari.
- 5p 6. Triunghiul ABC are lungimile laturilor $AB = 5$, $BC = 7$ și $AC = 8$. Să se calculeze $m(\angle A)$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră permutarea $\sigma \in S_6$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$.
- 5p a) Să se determine σ^{-1} .
- 5p b) Să se arate că permutările σ și σ^{-1} au același număr de inversiuni.
- 5p c) Să se arate că ecuația $x^4 = \sigma$ nu are soluții în grupul (S_6, \cdot) .
2. Fie legea de compozиție „ \circ ”, definită pe \mathbb{R} prin $x \circ y = xy - x - y + 2$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, și funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$.
- 5p a) Să se arate că $(1, \infty)$ este parte stabilă în raport cu „ \circ ”.
- 5p b) Să se demonstreze că $f(xy) = f(x) \circ f(y)$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.
- 5p c) Știind că legea „ \circ ” este asociativă, să se rezolve în \mathbb{R} ecuația $\underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{\text{de 10 ori } x} = 1025$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{\pi}{x}, & x \in (0,1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.
- 5p a) Să se arate că funcția f este continuă pe $[0,1]$.
- 5p b) Să se determine domeniul de derivabilitate al funcției f .
- 5p c) Să se arate că, dacă $n \in \mathbb{N}^*$, atunci ecuația $f(x) = \cos \frac{\pi}{x}$ are cel puțin o soluție în intervalul $\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$.
2. Fie funcțiile $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1+x^2)$ și $g : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x \arctg x$.
- 5p a) Să se calculeze $\int_0^1 f(\sqrt{x}) dx$.
- 5p b) Să se calculeze $\int_0^1 g(x) dx$.
- 5p c) Să se calculeze aria suprafeței plane mărginită de graficele funcțiilor f și g și de dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$.

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se calculeze $\left[\sqrt{2009} \right] + 3 \cdot \left\{ -\frac{1}{3} \right\}$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui x și $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a lui x .
- 5p** 2. Să se determine imaginea intervalului $[2,3]$ prin funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x + 3$.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x+8} - \sqrt{x} = 2$.
- 5p** 4. Să se determine probabilitatea ca, alegând un element al mulțimii divizorilor naturali ai numărului 56, acesta să fie divizibil cu 4.
- 5p** 5. Fie vectorii $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j}$ și $\vec{u} = 6\vec{i} + 2\vec{j}$. Să se determine $p, r \in \mathbb{R}$ astfel încât $\vec{u} = p\vec{a} + r\vec{b}$.
- 5p** 6. Să se calculeze lungimea razei cercului circumscris unui triunghi care are lungimile laturilor 5, 7 și 8.

SUBIECTUL II (30p)

1. Pentru orice matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, se notează $C(A) = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mid AX = XA\}$. Se consideră matricele

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- 5p** a) Să se arate că dacă $X, Y \in C(A)$, atunci $X + Y \in C(A)$.
- 5p** b) Să se arate că dacă $E_1, E_2 \in C(A)$, atunci există $\alpha \in \mathbb{C}$ astfel încât $A = \alpha I_2$.
- 5p** c) Să se arate că dacă $C(A)$ conține trei dintre matricele E_1, E_2, E_3, E_4 , atunci o conține și pe a patra.
2. Fie $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ două permutări din grupul (S_5, \cdot) .
- 5p** a) Să se rezolve în S_5 ecuația $ax = b$.
- 5p** b) Să se determine ordinul elementului ab în grupul (S_5, \cdot) .
- 5p** c) Fie $k \in \mathbb{Z}$ cu $b^k = e$. Să se arate că 6 divide k .

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x$ și un număr real m din intervalul $(-2, \infty)$.

- 5p** a) Să se determine punctele de extrem ale funcției f .
- 5p** b) Să se demonstreze că ecuația $x^3 - 3x = m$ are soluție unică în mulțimea $(1, \infty)$.
- 5p** c) Să se determine numărul punctelor de inflexiune ale graficului funcției $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f^2(x)$.
2. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} xe^x, & x \leq 0 \\ \sin x, & x > 0 \end{cases}$.
- 5p** a) Să se arate că funcția f admite primitive pe \mathbb{R} .
- 5p** b) Să se determine primitiva F a funcției f care are proprietatea $F(0) = -1$.
- 5p** c) Să se calculeze $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x^2}$.

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se calculeze partea întreagă a numărului $(\sqrt{3} + \sqrt{7})^2$.
- 5p** 2. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale inecuația $\frac{2x-1}{1-x} \geq \frac{3x+2}{1-2x}$.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{2-x} + x = 2$.
- 5p** 4. Se consideră dezvoltarea $(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{y})^{49}$. Să se determine termenul care îi conține pe x și y la aceeași putere.
- 5p** 5. Fie $\vec{r}_A = 2\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{r}_B = \vec{i} + 3\vec{j}$ și $\vec{r}_C = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ vectorii de poziție ai vârfurilor triunghiului ABC . Să se determine vectorul de poziție al centrului de greutate a triunghiului ABC .
- 5p** 6. Să se calculeze lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC , știind că $BC = 3$ și $\cos A = \frac{1}{2}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
- 5p** a) Să se verifice că $AB \neq BA$.
- 5p** b) Să se arate că $A^4 + B^6 = 2I_2$.
- 5p** c) Să se arate că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $(AB)^n \neq I_2$.
2. Se consideră sirul $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, $\forall n \geq 1$ și polinoamele $P, Q_n \in \mathbb{Z}[X]$, $P = X^2 - X - 1$, $Q_n = X^n - F_n X - F_{n-1}$, $\forall n \geq 2$.
- 5p** a) Să se arate că polinomul $X^3 - 2X - 1$ este divizibil cu P .
- 5p** b) Să se determine rădăcinile reale ale polinomului Q_3 .
- 5p** c) Să se arate că, pentru orice $n \geq 2$, polinomul Q_n este divizibil cu P .

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - x$.
- 5p** a) Să se determine punctul în care tangenta la graficul funcției f este paralelă cu prima bisectoare.
- 5p** b) Să se arate că valoarea minimă a funcției f este 1.
- 5p** c) Să se arate că funcția $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{f(x) - 1}$ nu este derivabilă în $x_0 = 0$.
2. Se consideră funcțiile $f : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \int_2^x \frac{t^2}{t^2 - 1} dt$ și $g : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \int_0^{\ln \frac{x^2 - 1}{3}} \sqrt{3e^t + 1} dt$.
- 5p** a) Să se calculeze $f(3)$.
- 5p** b) Să se arate că $g'(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 1}$, $\forall x \in (1, \infty)$.
- 5p** c) Să se arate că $g(x) = 2f(x)$, $\forall x \in (1, \infty)$.

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se calculeze $[-\sqrt{8}] - \{-2,8\}$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui x și $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a lui x .
- 5p** 2. Să se rezolve în mulțimea $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sistemul $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ x + y = 5 \end{cases}$.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $4^x - 5 \cdot 2^{x+1} + 16 = 0$.
- 5p** 4. Să se determine $x \in \mathbb{N}$, $x \geq 2$ astfel încât $C_x^2 + A_x^2 = 30$.
- 5p** 5. Fie punctele $O(0;0)$, $A(2;1)$ și $B(-2;1)$. Să se determine cosinusul unghiului format de vectorii \overrightarrow{OA} și \overrightarrow{OB} .
- 5p** 6. Să se calculeze $\operatorname{tg} 2x$, știind că $\operatorname{ctg} x = 3$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Matricea $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ și sirurile $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ verifică $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
- 5p** a) Să se arate că $x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 = (a^2 + b^2)(x_n^2 + y_n^2)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
- 5p** b) Să se arate că, dacă $a^2 + b^2 \leq 1$, atunci sirurile $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sunt mărginite.
- 5p** c) Să se arate că, dacă $a = 1$ și $b = \sqrt{3}$, atunci $x_{n+6} = 64x_n$, $\forall n \geq 0$.
2. Se consideră corpul $(\mathbb{Z}_{11}, +, \cdot)$.
- 5p** a) Să se arate că ecuația $x^2 = 8$ nu are soluții în \mathbb{Z}_{11} .
- 5p** b) Să se determine numărul polinoamelor de grad doi din $\mathbb{Z}_{11}[X]$.
- 5p** c) Să se arate că polinomul $X^2 + X + 1$ este ireductibil în $\mathbb{Z}_{11}[X]$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x + 2}$.
- 5p** a) Să se calculeze $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{f(x)}{x-1}$.
- 5p** b) Să se determine punctele de extrem ale funcției f .
- 5p** c) Să se determine domeniul de derivabilitate al funcției f .
2. Fie funcția $f : (1; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x(x+1)(x+2)}$.
- 5p** a) Să se determine o primitivă a funcției f .
- 5p** b) Să se demonstreze că $\int_1^x f(t) dt \leq \frac{x-1}{6}$, $\forall x \in [1, \infty)$.
- 5p** c) Să se calculeze $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^6} dx$.

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe ecuația $2\bar{z} + z = 3 + 4i$.
- 5p** 2. Știind că x_1 și x_2 sunt rădăcinile ecuației $x^2 + 3x + 1 = 0$, să se calculeze $x_1^3 + x_2^3$.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $1 + 5^x - 2 \cdot 25^x = 0$.
- 5p** 4. Se consideră dezvoltarea $\left(a^2 + \frac{1}{\sqrt[3]{a}}\right)^9$, $a \neq 0$. Să se determine rangul termenului care-l conține pe a^4 .
- 5p** 5. Să se calculeze $\vec{u}^2 - \vec{v}^2$ știind că $\vec{u} - \vec{v} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ și $\vec{u} + \vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$.
- 5p** 6. Să se calculeze lungimea razei cercului circumscris unui triunghi dreptunghic care are catetele de lungimi 5 și 12.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ și funcția $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $f(X) = AX$.
- 5p** a) Să se arate că $f(A) = I_2$.
- 5p** b) Să se arate că $f(X + f(X)) = X + f(X)$, $\forall X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- 5p** c) Să se arate că funcția f este bijectivă.
2. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ și mulțimea $M = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid AX = XA\}$.
- 5p** a) Să se arate că dacă $X, Y \in M$, atunci $XY \in M$.
- 5p** b) Să se arate că $G = \{X \in M \mid \det X \neq 0\}$ este grup în raport cu înmulțirea matricelor.
- 5p** c) Să se determine elementele de ordin doi din grupul G , definit la punctul b).

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{4}{3}\right\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x+5}{3x+4}$.
- 5p** a) Să se determine asimptota la graficul funcției f spre $+\infty$.
- 5p** b) Să determine limita sirului $(a_n)_{n \geq 1}$, $a_n = f(1)f(2)\dots f(n)$.
- 5p** c) Să se determine punctele de inflexiune ale graficului funcției $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(e^x)$.
2. Fie funcția $f : [1, e] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{\ln x}$.
- 5p** a) Să se calculeze $\int_0^1 f(e^x) dx$.
- 5p** b) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotirea graficului funcției f în jurul axei Ox .
- 5p** c) Să se arate că $\int_0^1 e^{x^2} dx + \int_1^e f(x) dx = e$.

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se arate că numărul $\sqrt{7+4\sqrt{3}} - \sqrt{3}$ este natural.
- 5p** 2. Să se arate că $(x^2 + 4x + 5)(x^2 + 2x + 2) \geq 1$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2^2 x + \log_2(4x) = 4$.
- 5p** 4. Să se determine termenul care nu-l conține pe x , din dezvoltarea $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^{200}$, $x > 0$.
- 5p** 5. Se consideră dreapta $d: 4x - 8y + 1 = 0$ și punctul $A(2; 1)$. Să se determine ecuația dreptei care trece prin punctul A și este paralelă cu dreapta d .
- 5p** 6. Triunghiul ABC are $AB = 2$, $AC = 4$ și $m(\angle A) = 60^\circ$. Să se calculeze lungimea medianei duse din A .

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ și $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \in M_{2,1}(\mathbb{R})$, cu $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ și $x_0 = 1$, $y_0 = 0$.
- 5p** a) Să se determine x_1, x_2, y_1 și y_2 .
- 5p** b) Să se arate că $x_n + y_n\sqrt{2} = (3 + 2\sqrt{2})^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
- 5p** c) Să se arate că $x_{n+2} - 6x_{n+1} + x_n = 0$, $\forall n \geq 0$.
2. Se consideră mulțimile de clase de resturi $\mathbb{Z}_7 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}, \hat{5}, \hat{6}\}$ și $\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$.
- 5p** a) Să se rezolve în corpul $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$ ecuația $\hat{3}x^2 + \hat{4} = \hat{0}$.
- 5p** b) Să se determine ordinul elementului $\hat{3}$ în grupul (\mathbb{Z}_7^*, \cdot) .
- 5p** c) Să se arate că nu există niciun morfism de grupuri $f: (\mathbb{Z}_6, +) \rightarrow (\mathbb{Z}_7^*, \cdot)$ cu $f(\bar{2}) = \hat{3}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1$.
- 5p** a) Să se arate că sirul $(x_n)_{n \geq 1}$ definit prin $x_1 = \frac{1}{2}$ și $x_{n+1} = f(x_n)$, $\forall n \geq 1$ are limită.
- 5p** b) Să se arate că funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \begin{cases} xf(x), & x \leq 0 \\ \operatorname{arctg} x, & x > 0 \end{cases}$ este derivabilă pe \mathbb{R} .
- 5p** c) Să se determine cel mai mare număr real a care are proprietatea $f(x) \geq a + 2 \ln x$, $\forall x \in (0, \infty)$.
2. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x^2}$ și F o primitivă a sa.
- 5p** a) Să se calculeze $\int_0^1 xf(x) dx$.
- 5p** b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(\cos x) - F(1)}{x^2}$.
- 5p** c) Să se arate că funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = F(x) + f(x)$ are exact un punct de extrem local.

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se calculeze partea reală a numărului complex $\frac{1+4i}{4+7i}$.
- 5p** 2. Să se determine axa de simetrie a graficului funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{x+1} + 3^{1-x} = 10$.
- 5p** 4. Să se determine probabilitatea ca, alegând un element al mulțimii $A = \{1, 3, 5, \dots, 2009\}$, acesta să fie multiplu de 3.
- 5p** 5. Se consideră dreapta $d : 2x + y - 1 = 0$ și punctul $A(3, 2)$. Să se determine ecuația dreptei care trece prin punctul A și este perpendiculară pe dreapta d .
- 5p** 6. Fie triunghiul ABC care are $AB = AC = 5$ și $BC = 6$. Să se calculeze distanța de la centrul de greutate al triunghiului ABC la dreapta BC .

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie $a, b, c, d > 0$, matricea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ și funcția $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$.
 Se notează $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.
- 5p** a) Să se arate că dacă $\det A = 0$, atunci f este funcție constantă.
- 5p** b) Să se arate că, dacă $\det A \neq 0$, atunci funcția f este injectivă.
- 5p** c) Să se arate că $\underbrace{(f \circ f \circ f \circ \dots \circ f)}_{\text{de } n \text{ ori } f}(x) = \frac{a_n x + b_n}{c_n x + d_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
2. Se consideră matricile $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și mulțimea $G = \{I_2 + aA + bB \mid a, b \in \mathbb{R}, a \neq -1\}$.
- 5p** a) Să se arate că orice matrice din G este inversabilă.
- 5p** b) Să se arate că G este un subgrup al grupului multiplicativ al matricelor inversabile din $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- 5p** c) Să se arate că ecuația $X^2 = I_2$ are o infinitate de soluții în G .

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcțiile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ și $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \arctg x$.
- 5p** a) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x)g(x))$.
- 5p** b) Să se determine punctele de extrem local ale funcției f .
- 5p** c) Să se arate că $f(x) < g(x)$, pentru orice $x \in (0, \infty)$.
2. Fie $m \in \mathbb{R}$ și funcția $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x - m, & x \in [0, 1] \\ x \ln x, & x \in (1, 2] \end{cases}$.
- 5p** a) Să se arate că, pentru orice $m \in \mathbb{R}$, funcția f este integrabilă.
- 5p** b) Să se calculeze $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{\int_1^x t \ln t dt}{x-1}$.
- 5p** c) Pentru $m = 1$, să se demonstreze că, pentru orice $t \in (0, 2)$ există $a, b \in [0, 2]$, $a \neq b$, astfel încât $\int_a^b f(x) dx = (b-a)f(t)$.

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se arate că numărul $\lg\left(1-\frac{1}{2}\right) + \lg\left(1-\frac{1}{3}\right) + \lg\left(1-\frac{1}{4}\right) + \dots + \lg\left(1-\frac{1}{100}\right)$ este întreg.
- 5p** 2. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $|x-3| + |4-x| = 1$.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3 x + \frac{1}{\log_3 x} = \frac{5}{2}$.
- 5p** 4. Să se determine probabilitatea ca, alegând un element al mulțimii $A = \{2, 4, 6, \dots, 2010\}$, acesta să fie divizibil cu 4, dar să nu fie divizibil cu 8.
- 5p** 5. Se consideră punctele $A(2, m)$ și $B(m, -2)$. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât $AB = 4$.
- 5p** 6. Să se calculeze $\sin^2 x$ știind că $\operatorname{ctg} x = 6$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} mx + y + z = 0 \\ x + 3y + 2z = 0, \text{ cu } m \in \mathbb{R} \\ -x - y + 4z = 0 \end{cases}$
- 5p** a) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ pentru care matricea sistemului are determinantul nenul.
- 5p** b) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât sistemul să admită cel puțin două soluții.
- 5p** c) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ pentru care dreptele $d_1 : mx + y + 1 = 0$, $d_2 : x + 3y + 2 = 0$, $d_3 : -x - y + 4 = 0$ sunt concurente.
2. Se consideră mulțimea $H = \left\{ \begin{pmatrix} m & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid m, n \in \mathbb{Z}_5, m = \pm 1 \right\}$.
- 5p** a) Să se verifice că dacă $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, atunci $B \cdot A = A^{-1} \cdot B$.
- 5p** b) Să se arate că H este un grup cu 10 elemente în raport cu înmulțirea matricelor.
- 5p** c) Să se determine numărul elementelor de ordinul 2 din grupul H .

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x$.
- 5p** a) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{f(x+1)}$.
- 5p** b) Să se demonstreze că funcția f este inversabilă.
- 5p** c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f^{-1}(x)}{\sqrt[3]{x}}$.
2. Se consideră funcțiile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \sin x$ și F o primitivă a lui f .
- 5p** a) Să se calculeze $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$.
- 5p** b) Să se determine $c \in (1, 3)$ astfel încât $\int_1^3 \frac{f(x)}{\sin x} dx = 2c^2$.
- 5p** c) Să se arate că funcția F nu are limită la $+\infty$.

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se arate că $2(1+3+3^2+\dots+3^8) < 3^9$.
- 5p** 2. Fie x_1, x_2 soluțiile ecuației $x^2 + 5x - 7 = 0$. Să se arate că numărul $x_1^3 + x_2^3$ este întreg.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5 x + \log_x 5 = \frac{5}{2}$.
- 5p** 4. Să se determine $x \in \mathbb{N}$, $x \geq 3$ astfel încât $C_{2x-3}^2 = 3$.
- 5p** 5. Se consideră punctele $A(2,3)$ și $B(-3,-2)$. Să se scrie ecuația mediatoarei segmentului AB .
- 5p** 6. Fie vectorii \vec{u} și \vec{v} . Știind că $\vec{u} \cdot \vec{v} = 5$, $|\vec{u}| = 2$ și $|\vec{v}| = 3$ să se calculeze $\cos(\vec{u}, \vec{v})$.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării

Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$ și funcția $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $f(X) = AX$.
- 5p** a) Să se calculeze $f(A)$.
- 5p** b) Să se arate că $(f \circ f)(X) = O_2$, $\forall X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- 5p** c) Să se arate că $f(X) + f(Y) \neq I_2$, $\forall X, Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Se consideră mulțimea $P = \left\{ A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid AA^t = I_2 \right\}$, unde A^t este transpusa matricei A .
- 5p** a) Să se verifice dacă matricea $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ aparține mulțimii P .
- 5p** b) Să se arate că înmulțirea matricelor determină pe mulțimea P o structură de grup necomutativ.
- 5p** c) Să se arate că, dacă $A, B \in P$, $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ și $AX = B$, atunci $X \in P$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + \sqrt{1+x^2}$.
- 5p** a) Să se arate că mulțimea valorilor funcției f este $(0, \infty)$.
- 5p** b) Să se arate că, dacă $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \ln f(x)$, atunci $(f(x) - x) \cdot g'(x) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
- 5p** c) Să se demonstreze că $g(x) < x$, pentru orice $x > 0$, unde g este funcția definită la punctul b).
2. Fie mulțimea $M = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ este derivabilă și } \int_0^1 f(x) dx = f(0) = f(1) \right\}$.
- 5p** a) Să se arate că funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + x$ aparține mulțimii M .
- 5p** b) Să se arate că, dacă f este o funcție polinomială de grad trei care aparține lui M , atunci $f\left(\frac{1}{2}\right) = f(0)$.
- 5p** c) Să se arate că, pentru orice $f \in M$, ecuația $f'(x) = 0$ are cel puțin două soluții în intervalul $(0,1)$.

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se determine numărul real x știind că numerele $x+1, 1-x$ și 4 sunt în progresie aritmetică.
- 5p** 2. Să se determine punctele de intersecție a parabolei $y = x^2 + 5x - 6$ cu axele de coordonate.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea $[0, 2\pi]$ ecuația $2\sin x + 1 = 0$.
- 5p** 4. Fie mulțimea $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Să se determine probabilitatea ca, alegând una dintre submulțimile mulțimii M , aceasta să aibă 2 elemente.
- 5p** 5. Punctele A, B și G au vectorii de poziție $\vec{r}_A = 4\vec{i} + 7\vec{j}$, $\vec{r}_B = 2\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{r}_G = 4\vec{i} + 4\vec{j}$. Să se determine vectorul de poziție a punctului C astfel încât punctul G să fie centrul de greutate al triunghiului ABC .
- 5p** 6. Fie vectorii \vec{u} și \vec{v} . Dacă $|\vec{u}| = 1$, $|\vec{v}| = 2$ și măsura unghiului vectorilor \vec{u} și \vec{v} este $\frac{\pi}{3}$, să se calculeze $(2\vec{u} + \vec{v}) \cdot (2\vec{v} - \vec{u})$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră mulțimea $G = \left\{ M_{a,b} \mid M_{a,b} = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
- 5p** a) Să se arate că $M_{a,b} \cdot M_{c,d} = M_{a+c, b+d}$, $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Să se arate că orice matrice din G este inversabilă.
- 5p** c) Să se calculeze, în funcție de a și b , rangul matricei $M_{a,b} - M_{a,b}^t$ ($M_{a,b}^t$ este transpusa lui $M_{a,b}$).
2. Se consideră un grup (K, \cdot) , unde $K = \{e, a, b, c\}$, e este elementul neutru și $a^2 = b^2 = c^2 = e$.
- 5p** a) Să se rezolve în grupul K ecuația $x^3 = e$.
- 5p** b) Să se arate că $ab = c$.
- 5p** c) Să se arate că grupul (K, \cdot) nu este izomorf cu grupul $(\mathbb{Z}_4, +)$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Fie funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x-1}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$.
- 5p** a) Să se demonstreze că funcția f este continuă.
- 5p** b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-1}{x-1}$.
- 5p** c) Să se arate că funcția f este strict descrescătoare.
2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1 + \sin^2 x)$.
- 5p** a) Să se arate că orice primitivă a funcției f este crescătoare pe \mathbb{R} .
- 5p** b) Să se calculeze $\int_0^\pi f(x) \cos x dx$.
- 5p** c) Să se calculeze derivata funcției $g : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\arcsin x} f(t) dt$.

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se determine $x > 0$ știind că numerele x , 6 și $x - 5$ sunt în progresie geometrică .
- 5p** 2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x - 2$. Să se calculeze $f(2 \cdot (f(-1)))$.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.
- 5p** 4. Să se arate că $(n!)^2$ divide $(2n)!$, pentru oricare n natural.
- 5p** 5. Se consideră punctele $A(3, 2)$ și $B(6, 5)$. Să se determine coordonatele punctelor M și N știind că acestea împart segmentul $[AB]$ în trei segmente congruente, iar ordinea punctelor este A, M, N, B .
- 5p** 6. Să se determine numerele naturale a pentru care numerele a , $a + 1$ și $a + 2$ sunt lungimile laturilor unui triunghi obtuzunghic.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $A^2 = 2A$.
- 5p** a) Să se arate că matricea $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ verifică relația $B^2 = 2B$.
- 5p** b) Să se arate că, dacă $a + d \neq 2$, atunci $A = O_2$ sau $A = 2I_2$.
- 5p** c) Să se arate că, dacă $a + d = 2$, atunci $\det(A) = 0$.
2. Se consideră polinoamele $f, g \in \mathbb{Q}[X]$, $f = X^4 - 1$, $g = X^6 - 1$.
- 5p** a) Să se arate că un cel mai mare divizor comun al polinoamelor f și g este $X^2 - 1$.
- 5p** b) Să se determine numărul soluțiilor complexe distințe ale ecuației $f(x)g(x) = 0$.
- 5p** c) Să se descompună polinomul f în factori ireductibili în $\mathbb{Q}[X]$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră funcția $f_n : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n + \ln x$.
- 5p** a) Să se arate că funcția f_2 este strict crescătoare pe intervalul $(0, \infty)$.
- 5p** b) Să se arate că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, ecuația $f_n(x) = 0$ are exact o rădăcină reală, situată în intervalul $\left(\frac{1}{e}, 1\right)$.
- 5p** c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3}{f_2(x) - 1} - \frac{1}{x - 1} \right)$.
2. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \in (-\infty, 0] \\ 1 + \sin x, & x \in (0, \infty) \end{cases}$.
- 5p** a) Să se arate că funcția f este integrabilă pe intervalul $[-2\pi, 2\pi]$.
- 5p** b) Să se calculeze $\int_{-1}^{\pi} f(x) dx$.
- 5p** c) Să se arate că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^{2\pi} f^n(x) dx \leq 2^n \pi$.

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se arate că sirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, de termen general $a_n = \frac{4n}{n+3}$, este crescător.
- 5p** 2. Să se determine coordonatele punctelor de intersecție a parabolelor $y = x^2 + x + 1$ și $y = -x^2 - 2x + 6$.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$.
- 5p** 4. Suma coeficienților binomiali ai dezvoltării $(2x^2 - 5y)^n$ este egală cu 32. Să se determine termenul de rang patru.
- 5p** 5. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât dreptele $d_1: mx + 3y + 2 = 0$ și $d_2: 2x + y - 8 = 0$ să fie concurente.
- 5p** 6. Fie $ABCD$ un patrulater. Să se arate că dacă $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$, atunci $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră mulțimile $P = \{S \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) | S^t = S\}$ și $Q = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) | A^t = -A\}$.
- 5p** a) Să se arate că $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \in P$ și $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \in Q$.
- 5p** b) Să se arate că, dacă $A, B \in Q$, atunci $AB \in P$.
- 5p** c) Să se arate că $\det(X) \geq 0$, oricare ar fi $X \in Q$.
2. Se consideră polinoamele $f = X^3 + 2X^2 + 3X + 45 \in \mathbb{Z}[X]$ și $\hat{f} = X^3 + X + 1 \in \mathbb{Z}_2[X]$.
- 5p** a) Să se arate că rădăcinile din \mathbb{C} ale polinomului f nu sunt toate reale.
- 5p** b) Să se arate că polinomul \hat{f} nu are rădăcini în \mathbb{Z}_2 .
- 5p** c) Să se demonstreze că polinomul f nu poate fi scris ca produs de două polinoame neconstante, cu coeficienți întregi.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ x^3, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$.
- 5p** a) Să arate că $|f(x)| \leq |x|$, $\forall x \in [-1, 1]$.
- 5p** b) Să arate că funcția f este continuă în origine.
- 5p** c) Să se arate că funcția f nu este derivabilă în origine.
2. Se consideră $a, b \in \mathbb{R}$ și funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} axe^x - x, & x \leq 0 \\ x \cos x + b, & x > 0 \end{cases}$.
- 5p** a) Să se determine a și b știind că funcția f este primitivă pe \mathbb{R} a unei funcții.
- 5p** b) Știind că $a = 0$ și $b = 0$, să se calculeze $\int_{-1}^{\pi} f(x) dx$.
- 5p** c) Să se arate că, dacă $b = 0$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} x^n f(x) dx = -\infty$.

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se arate că sirul $(a_n)_{n \geq 1}$, de termen general $a_n = n^2 - n$, este strict monoton.
- 5p** 2. Se consideră funcțiile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definite prin $f(x) = x^2 + 2x + 1$ și $g(x) = x - 2009$.
Să se demonstreze că, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $(f \circ g)(x) \geq 0$.
- 5p** 3. Să se rezolve în $(0, \pi)$ ecuația $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.
- 5p** 4. Să se determine $x \in \mathbb{N}$, $x \geq 3$ știind că $C_x^{x-1} + C_{x-1}^{x-3} \leq 9$.
- 5p** 5. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ știind că dreptele $d_1 : mx + (m+2)y - 1 = 0$ și $d_2 : (m+2)x + 4my - 8 = 0$ sunt paralele.
- 5p** 6. Fie ABC un triunghi cu $\operatorname{tg} A = 2$, $\operatorname{tg} B = 3$. Să se determine măsura unghiului C .

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie mulțimea $M = \left\{ \begin{pmatrix} x & 3y \\ y & x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{Z} \right\}$ și matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- 5p** a) Să se arate că dacă $Y \in M_2(\mathbb{Z})$ și $AY = YA$, atunci $Y \in M$.
- 5p** b) Să se arate că dacă $X \in M$ și $\det(X) = 0$, atunci $X = O_2$.
- 5p** c) Să se arate că $A^n \in M, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
2. Se consideră polinomul $f = X^5 - X^4 + 3X^3 - X^2 - 2 \in \mathbb{C}[X]$.
- 5p** a) Să se determine o rădăcină întreagă a polinomului f .
- 5p** b) Să se calculeze $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_5^2$, unde x_1, x_2, \dots, x_5 sunt rădăcinile polinomului f .
- 5p** c) Să se arate că f are o singură rădăcină reală.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : (-\infty, -2) \cup (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)$.
- 5p** a) Să se arate că funcția f este concavă pe intervalul $(-\infty, -2)$.
- 5p** b) Să calculeze limita sirului $(a_n)_{n \geq 1}$, $a_n = f(1) + f(2) + \dots + f(n) - \ln\frac{n(n+1)}{2}$.
- 5p** c) Să se arate că există un punct $c \in (1, 2)$ astfel încât $(c-1)f'(c) + f(c) = f(2)$.
2. Fie funcția $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1+x^4}$.
- 5p** a) Să se calculeze $\int_0^1 xf(x)dx$.
- 5p** b) Să se arate că $\frac{\pi}{4} \leq \int_0^1 f(x)dx \leq 1$.
- 5p** c) Să se calculeze $\int_0^1 \frac{f(x)f''(x) - (f'(x))^2}{(f(x))^2} dx$.

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se determine primul termen al progresiei aritmetice $a_1, a_2, 13, 17, \dots$.
- 5p** 2. Să se arate că funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 2\sin x$ este impară.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $3\sin x + \sqrt{3}\cos x = 0$.
- 5p** 4. Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă suma cifrelor egală cu 2.
- 5p** 5. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ știind că dreptele $d_1: mx + 3y - 2 = 0$ și $d_2: 12x + 2y + 1 = 0$ sunt perpendiculare.
- 5p** 6. Știind că $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, să se calculeze $\sin \alpha$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} ax + y + z = 4 \\ x + 2y + 3z = 6, \text{ cu } a, b \in \mathbb{R} \\ 3x - y - 2z = b \end{cases}$
- 5p** a) Să se determine a, b pentru care sistemul are soluția $(1, 1, 1)$.
- 5p** b) Să se determine a, b astfel încât sistemul să fie incompatibil.
- 5p** c) Să se arate că pentru orice $a \in \mathbb{Z}$ există $b \in \mathbb{Z}$ astfel încât sistemul să admită soluții cu toate componente numere întregi.
2. Se consideră mulțimea de matrice $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & a & \hat{0} \\ b & c & a \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z}_2 \right\}$.
- 5p** a) Să se determine numărul elementelor mulțimii A .
- 5p** b) Să se arate că, pentru orice $X \in A$, $X^2 = I_3$ sau $X^2 = O_3$.
- 5p** c) Să se determine numărul matricelor X din mulțimea A care au proprietatea $X^2 = O_3$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + e^x$.
- 5p** a) Să se arate că funcția f este bijectivă.
- 5p** b) Să se arate că $f(x) \geq 2x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$.
- 5p** c) Să se demonstreze că, dacă $f(x) \geq mx + 1, \forall x \in \mathbb{R}$, atunci $m = 2$.
2. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin^3 x \cos x$ și F o primitivă a funcției f pe \mathbb{R} .
- 5p** a) Să arate că există $c \in \mathbb{R}$ astfel încât $4F(x) = \sin^4 x + c$.
- 5p** b) Să se calculeze aria subgraficului restricției funcției f la intervalul $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
- 5p** c) Să se arate că $\int_0^\pi f^{2n+1}(x) dx = 0$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se calculeze $(2+i)(3-2i)-(1-2i)(2-i)$.
- 5p** 2. Să se arate că $\frac{1}{3}$ este o perioadă a funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \{3x\}$, unde $\{a\}$ este partea fracționară a numărului a .
- 5p** 3. Să se rezolve în $[0, 2\pi]$ ecuația $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 1$.
- 5p** 4. Să se calculeze $\frac{C_{20}^{10}}{C_{20}^9}$.
- 5p** 5. Se consideră punctele $A(2,3)$, $B(4,n)$, $C(2,2)$ și $D(m,5)$. Să se determine $m, n \in \mathbb{R}$ astfel încât patrulaterul $ABCD$ să fie paralelogram.
- 5p** 6. Să se calculeze $\cos^2 x$, știind că $\operatorname{tg} x = 4$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie dreptele $d_1 : x + 2y = 3$, $d_2 : 3x - 4y = -1$, $d_3 : 4x + 3y = m$, unde $m \in \mathbb{R}$.
- 5p** a) Să se determine m astfel încât dreptele să fie concurente.
- 5p** b) Să se demonstreze că există o infinitate de valori ale lui m pentru care vârfurile triunghiului determinat de cele trei drepte au toate coordonatele întregi.
- 5p** c) Să se calculeze valorile lui m pentru care triunghiul determinat de cele trei drepte are aria 1.
2. Fie polinomul $f = 2X^3 - aX^2 - aX + 2$, cu $a \in \mathbb{R}$ și cu rădăcinile complexe x_1, x_2, x_3 .
- 5p** a) Să se calculeze $f(-1)$.
- 5p** b) Să se determine a pentru care polinomul are trei rădăcini reale.
- 5p** c) Să se determine a astfel încât $|x_1| + |x_2| + |x_3| = 3$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - \sqrt{|1-x^2|}$.
- 5p** a) Să se calculeze derivata funcției f pe intervalul $(-1, 1)$.
- 5p** b) Să se determine ecuația asymptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p** c) Să se arate că funcția $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^{-2} f(x)$ este mărginită.
2. Fie funcția $f : [0, 1] \rightarrow [1, 3]$, $f(x) = x^4 + x^2 + 1$. Se admite că funcția f are inversă g .
- 5p** a) Să se calculeze $\int_0^{\frac{3}{4}} \frac{2t+1}{f(\sqrt{t})} dt$.
- 5p** b) Să se arate că $\int_0^1 f(x) dx + \int_1^3 g(x) dx = 3$.
- 5p** c) Să se demonstreze că, dacă $\alpha \in [1, 3]$, atunci are loc inegalitatea $\int_0^1 f(x) dx + \int_1^\alpha g(x) dx \geq \alpha$.

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se determine primul termen al progresiei geometrice cu termeni pozitivi $b_1, 6, b_3, 24, \dots$.
- 5p** 2. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (3 - m^2)x + 3$, să fie strict crescătoare.
- 5p** 3. Să se calculeze $\sin \frac{\pi}{3} + \sin \frac{2\pi}{3} + \sin \frac{3\pi}{3} + \sin \frac{4\pi}{3}$.
- 5p** 4. Se consideră mulțimea M a tuturor funcțiilor definite pe $A = \{1, 2, 3\}$ cu valori în $B = \{5, 6, 7\}$. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând o funcție din mulțimea M , aceasta să fie injectivă.
- 5p** 5. Se consideră punctul G , centrul de greutate al triunghiului ABC . Prin punctul G se duce paralela la AB care intersectează dreapta BC în punctul P . Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât $\overline{GP} = m\overline{AB}$.
- 5p** 6. Să se calculeze $\cos 2\alpha$, știind că $\cos \alpha = \frac{1}{3}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie sistemul $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + my + z = 1 \\ x + my + mz = -2 \end{cases}$, cu $m \in \mathbb{R}$ și matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & m & m \end{pmatrix}$.
- 5p** a) Să se calculeze $\det(A)$.
- 5p** b) Să se arate că $\text{rang}(A) \neq 2$, oricare ar fi $m \in \mathbb{R}$.
- 5p** c) Să se determine valorile întregi ale lui $m \neq 1$, pentru care sistemul are soluție cu componente întregi.
2. Fie permutările $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, elemente ale grupului (S_4, \cdot) .
- 5p** a) Să se verifice că γ este soluție a ecuației $\alpha x = x\beta$.
- 5p** b) Să se arate că $\alpha^4 = \beta^4$.
- 5p** c) Să se determine o soluție a ecuației $x\beta^3 = \alpha^3 x$ în S_4 .

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră mulțimea de funcții $M = \{f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ este de două ori derivabilă și } f(0) = 0, f'(0) = 1\}$.
- 5p** a) Să se arate că funcția $u : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $u(x) = e^x \sin x$ aparține mulțimii M .
- 5p** b) Să se arate că, dacă $f \in M$ și $f(x) \neq 0$, $\forall x \in [-1, 1] \setminus \{0\}$, atunci $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + f(x))^{\frac{1}{x}} = e$.
- 5p** c) Să demonstreze că, dacă $f \in M$ și $n \in \mathbb{N}^*$, atunci $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^n(x) - x^n}{x^{n+1}} = \frac{nf''(0)}{2}$.
2. Fie funcțiile $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1+x}$ și $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \int_0^x f(t) dt$.
- 5p** a) Să se arate că $g(x) = \ln(1+x)$.
- 5p** b) Să se calculeze $\int_0^1 f^2(x) g(x) dx$.
- 5p** c) Să se demonstreze că $f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + f\left(\frac{3}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{n}\right) \leq n \ln 2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se arate că numărul $\frac{25}{4+3i} + \frac{25}{4-3i}$ este întreg.
- 5p** 2. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (m^2 - 2)x - 3$ să fie strict descrescătoare.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\arctg \frac{x}{3} + \arctg \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3}$.
- 5p** 4. Să se determine probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale pare de două cifre, acesta să fie divizibil cu 4.
- 5p** 5. Pe laturile AB și AC ale triunghiului ABC se consideră punctele M și respectiv N astfel încât $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{MB}$ și $\overrightarrow{AN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$. Să se demonstreze că vectorii \overrightarrow{MN} și \overrightarrow{BC} sunt coliniari.
- 5p** 6. Să se calculeze $\sin \frac{11\pi}{12}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ și $B = A + A^t$, unde A^t este transpusa matricei A .
- 5p** a) Să se arate că $B^t = B$.
- 5p** b) Să se demonstreze că, dacă $B = 2I_2$, atunci $\det(A) \geq 1$.
- 5p** c) Să se demonstreze că, dacă $x, y \in \mathbb{C}$ și matricea $xA + yA^t$ este inversabilă, atunci $x + y \neq 0$.
2. Se consideră ecuația $x^3 + px + q = 0$, $p, q \in \mathbb{R}$, și x_1, x_2, x_3 soluțiile complexe ale acesteia.
- 5p** a) Știind că $p = 1$ și $q = 0$, să se determine x_1, x_2, x_3 .
- 5p** b) Să se determine p și q știind că $x_1 = 1+i$.
- 5p** c) Să se arate că $12(x_1^7 + x_2^7 + x_3^7) = 7(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x+1} + \ln \frac{2x+1}{2x+3}$.
- 5p** a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (0, \infty)$.
- 5p** b) Să arate că $f(x) < 0$, $\forall x \in (0, \infty)$.
- 5p** c) Să demonstreze că sirul $(x_n)_{n \geq 1}$, $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln \left(n + \frac{1}{2} \right)$ este strict descrescător.
2. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$.
- 5p** a) Să se arate că funcția f este impară.
- 5p** b) Să se arate că $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.
- 5p** c) Să se arate că $\int_0^1 f(x) dx \leq e - 2$.

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se determine $z \in \mathbb{C}$ știind că $\frac{\bar{z} + 7i}{z} = 6$.
- 5p** 2. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$. Să se calculeze $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(50)$.
- 5p** 3. Se consideră funcția $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(x) = 3x + 1$. Să se demonstreze că funcția f este neinversabilă.
- 5p** 4. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând o cifră din multimea $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$, aceasta să verifice inegalitatea $(x+1)! - x! \leq 100$.
- 5p** 5. Să se arate că dreptele de ecuații $d_1 : 2x - y + 1 = 0$ și $d_2 : 2x + y - 1 = 0$ sunt simetrice față de axa Oy .
- 5p** 6. Să se calculeze $\cos \frac{7\pi}{12}$.

SUBIECTUL II (30p)

- 1.** Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
- 5p** a) Să se verifice relația $A^3 - A = A^2 - I_3$.
- 5p** b) Să se arate că $A^n - A^{n-2} = A^2 - I_3, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3$.
- 5p** c) Să se arate că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, suma elementelor matricei A^n este $n + 3$.
- 2.** Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ se definește polinomul $P_n = X^n - 1 \in \mathbb{C}[X]$.
- 5p** a) Să se determine rădăcinile complexe ale polinomului P_4 .
- 5p** b) Să se descompună polinomul P_3 în factori ireductibili în $\mathbb{C}[X]$.
- 5p** c) Să se descompună polinomul P_6 în factori ireductibili în $\mathbb{R}[X]$.

SUBIECTUL III (30p)

- 1.** Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2}$.
- 5p** a) Să se studieze derivabilitatea funcției f în origine.
- 5p** b) Să arate că, pentru orice $k \in (0, \infty)$, există $c \in (k, k+1)$ astfel încât $f(k+1) - f(k) = \frac{1}{\sqrt[3]{c}}$.
- 5p** c) Să se demonstreze că sirul $(a_n)_{n \geq 1}$, $a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{n}} - f(n)$, este strict descrescător.
- 2.** Fie funcția $f : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ln(1+x)$.
- 5p** a) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.
- 5p** b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x^5}$, unde funcția $F : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, $x \in [0, +\infty)$.
- 5p** c) Să se arate, folosind eventual funcția f , că $\int_0^1 \ln(1+x) dx \leq \frac{5}{12}$.

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se calculeze $(1+i)^{20}$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$. Să se calculeze suma $S = f(f(-10)) + f(f(-9)) + \dots + f(f(-1)) + f(f(1)) + \dots + f(f(9)) + f(f(10))$.
- 5p** 3. Să se arate că funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log_2(3^x + 1)$ este injectivă.
- 5p** 4. Să se calculeze $A_5^3 - 6C_5^3$.
- 5p** 5. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ știind că distanța de la punctul $A(m, m+1)$ la dreapta $d : 3x - 4y - 1 = 0$ este 1.
- 5p** 6. Să se calculeze $\cos 75^\circ - \cos 15^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Pentru orice două matrice $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se definește matricea $[A, B] = AB - BA$.
- 5p** a) Pentru $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, să se calculeze $[A, A^2]$.
- 5p** b) Să se arate că, pentru orice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $[A, A^*] = O_2$, unde A^* este adjuncta matricei A .
- 5p** c) Să se arate că, pentru orice $A, B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = O_2$.
2. Se consideră intervalul $H = (0, 1)$.
- 5p** a) Să se arate că relația $a \circ b = \frac{ab}{ab + (1-a)(1-b)}$ definește o lege de compoziție pe H .
- 5p** b) Să se arate că funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow (0, 1)$, $f(x) = \frac{x}{x+1}$ are proprietatea $f(xy) = f(x) \circ f(y)$, $\forall x, y > 0$, unde legea " \circ " este definită la punctul a).
- 5p** c) Știind că legea " \circ " definită la punctul a) este asociativă, să se rezolve în mulțimea (H, \circ) ecuația $x \circ x \circ x = \frac{1}{2}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se definește funcția $f_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_0(x) = e^{2x}$ și, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$, se definește funcția $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ prin $f_n(x) = f'_{n-1}(x)$.
- 5p** a) Să se arate că $f_3(x) = 8e^{2x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Să determine asymptotele graficului funcției f_n .
- 5p** c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_1(a) + f_2(a) + \dots + f_{n-1}(a)}{f_n(a)}$, unde a este un număr real.
2. Fie funcția $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x \ln^2 x & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$.
- 5p** a) Să se arate că funcția f este integrabilă pe intervalul $[0, 1]$.
- 5p** b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.
- 5p** c) Să se calculeze $\int_1^e f\left(\frac{1}{x}\right) dx$.

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se calculeze $\log_7 2009 - \log_7 287 - 1$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - \frac{1}{x^2}$. Să se arate că funcția f este pară.
- 5p** 3. Să se arate că valoarea maximă a funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3 - x^4$ este $f(0)$.
- 5p** 4. Să se determine $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, astfel încât $3C_n^1 + 2C_n^2 = 8$.
- 5p** 5. Se consideră triunghiul ABC și punctele A', B', C' astfel încât $\overrightarrow{A'C} = 2\overrightarrow{BA'}$, $\overrightarrow{B'C} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{C'A} = 3\overrightarrow{BC}$. Să se arate că dreptele AA' , BB' și CC' sunt concurente.
- 5p** 6. Să se determine ecuația medianei corespunzătoare laturii BC a triunghiului ABC , știind că $A(2, 2)$ și ecuațiile medianelor duse din B și C sunt $2x + y - 2 = 0$, respectiv $x - y + 2 = 0$.

SUBIECTUL II (30p)

- 1.** Se consideră determinantul de ordin $n \geq 2$, $D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix}$.
- 5p** a) Să se calculeze $D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.
- 5p** b) Să se verifice că $D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}$, $\forall n \geq 4$.
- 5p** c) Să se arate că $D_n = n+1$, $\forall n \geq 2$.
- 2.** Un grup (G, \cdot) , cu elementul neutru e , are proprietatea (p) dacă $x^2 = e$, $\forall x \in G$.
- 5p** a) Să se verifice că mulțimea $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, împreună cu legea de compozitie dată de $(a, b) \cdot (c, d) = (a+c, b+d)$, $\forall a, b, c, d \in \mathbb{Z}_2$ este un grup care are proprietatea (p).
- 5p** b) Să se arate că dacă un grup G are proprietatea (p), atunci $(xy)^2 = x^2y^2$, $\forall x, y \in G$.

SUBIECTUL III (30p)

- 1.** Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - \ln(1+x)$.
- 5p** a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (0, \infty)$.
- 5p** b) Să se arate că $f(x) > 0$, $\forall x \in (0, \infty)$.
- 5p** c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.
- 2.** Se consideră funcția $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \int_1^2 t^x dt$.
- 5p** a) Să se verifice că $1 + (x+1)F(x) = 2^{x+1}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow -1} F(x)$.
- 5p** c) Să se arate că există o funcție continuă $f : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, astfel încât $F(x) = 1 + \int_0^x f(y) dy$, $\forall x \in (-1, \infty)$.

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se arate că numărul $\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)^{100}$ este real.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - \frac{1}{x}$. Să se arate că funcția f este impară.
- 5p** 3. Să se determine imaginea funcției $f : [1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - x$.
- 5p** 4. Să se calculeze $C_{2009}^0 \cdot 5^{2009} - C_{2009}^1 \cdot 5^{2008} \cdot 4 + C_{2009}^2 \cdot 5^{2007} \cdot 4^2 - \dots - C_{2009}^{2009} \cdot 4^{2009}$.
- 5p** 5. Se consideră punctul $A(1, 2)$ și dreapta de ecuație $d : 4x - 2y + 5 = 0$. Să se determine ecuația perpendicularei duse din punctul A pe dreapta d .
- 5p** 6. Să se calculeze $\sin 75^\circ \cdot \cos 15^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
- 5p** a) Să se rezolve ecuația $\det(I_3 + xA^2) = 0$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Să se determine o matrice $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ cu proprietatea $B^2 = A$.
- 5p** c) Să se arate că $\forall C \in M_3(\mathbb{R})$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\det(C + xA)\det(C - xA) \leq (\det C)^2$.
2. Se consideră polinomul $p = X^3 - X + m$ cu $m \in \mathbb{R}$ și cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$.
- 5p** a) Știind că $m = -6$, să se determine x_1, x_2, x_3 .
- 5p** b) Să se calculeze $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4$.
- 5p** c) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ pentru care polinomul p are toate rădăcinile întregi.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$.
- 5p** a) Să se determine ecuația asymptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p** b) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
- 5p** c) Să se demonstreze că funcția f este concavă pe intervalul $(-\infty, -1)$.
2. Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ se consideră funcția $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = |\sin nx|$ și numărul $I_n = \int_{-\pi}^{2\pi} \frac{f_n(x)}{x} dx$.
- 5p** a) Să se calculeze $\int_0^\pi f_2(x) dx$.
- 5p** b) Să se arate că $I_n \leq \ln 2$.
- 5p** c) Să se arate că $I_n \geq \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right)$.

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se calculeze $|5 - 12i| - |12 + 5i|$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - x^4$. Să se calculeze $(f \circ f \circ f \circ f)(1)$.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $2^x + 4^x = 20$.
- 5p** 4. Să se determine probabilitatea ca, alegând un element al mulțimii $A = \{0, 5, 10, \dots, 2010\}$, acesta să fie divizibil cu 25.
- 5p** 5. Se consideră un triunghi ABC , cu lungimile laturilor $AB = c$, $AC = b$ și un punct D astfel încât $\overrightarrow{AD} = b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}$. Să se arate că semidreapta $[AD$ este bisectoarea unghiului BAC .
- 5p** 6. Fie $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ astfel încât $\cos 2\alpha = \frac{1}{2}$. Să se calculeze $\cos \alpha$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie matricea $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Se asociază fiecărui punct $A(x, y)$ punctul $A_M(x', y')$, unde $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

- 5p** a) Știind că $a = 1, b = 2, c = 3, d = 4$ și că $A(-1, 1)$, să se determine coordonatele punctului A_M .
- 5p** b) Știind că $a = 1, b = 2, c = 2, d = 4$, să se arate că toate punctele A_M se află pe dreapta $y = 2x$.
- 5p** c) Fie A, B, C trei puncte în plan. Dacă se notează cu S și S_M ariile triunghiurilor ABC , respectiv $A_M B_M C_M$, atunci $S_M = S \cdot |\det M|$.

2. Se consideră mulțimea $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ \hat{0} & a & d \\ \hat{0} & \hat{0} & a \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}_2 \right\}$.

- 5p** a) Să se determine numărul elementelor mulțimii A .
- 5p** b) Să se arate că mulțimea A este parte stabilă în raport cu înmulțirea matricelor din $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_2)$.
- 5p** c) Să se rezolve ecuația $X^2 = X$, cu $X \in A$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Fie $a \in \mathbb{R}$ și funcția $f : \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + x + a}{x^2 - 1}$.

- 5p** a) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)^x$.
- 5p** b) Să se determine valoarea numărului a știind că 3 este punct de extrem local al funcției f .
- 5p** c) Să se determine valoarea numărului a știind că graficul funcției f are exact o asimptotă verticală.
2. Se consideră funcția $f_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_0(x) = 1$ și, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, se definește funcția $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(t) dt$.
- 5p** a) Să se arate că $f_1^2(x) = 2f_2(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xf_n(x) + 1}{f_{n+1}(x) + 2}$.
- 5p** c) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotirea graficului funcției $g : [0, \pi] \rightarrow [0, \pi]$, $g(x) = f_1(x) \sin x$ în jurul axei Ox .

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe ecuația $z^2 + 3z + 4 = 0$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - 2m + 2$. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât graficul funcției f să nu intersecteze axa Ox .
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{2-x} + \sqrt[3]{x-2} = 0$.
- 5p** 4. Să se arate că $C_{a+b}^a = C_{a+b}^b$, pentru oricare $a, b \in \mathbb{N}^*$.
- 5p** 5. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât punctele $A(3, 3)$, $B(2, 4)$ și $C(2m, 1-m)$ să fie coliniare.
- 5p** 6. Fie $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ astfel încât $\cos 2\alpha = -\frac{1}{2}$. Să se calculeze $\sin \alpha$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.
- 5p** a) Să se calculeze $\det A$.
- 5p** b) Să se verifice relația $A(A^2 + 6I_3) = O_3$.
- 5p** c) Să se arate că $\det(I_3 + xA^2) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
2. Se consideră $a, b \in \mathbb{Z}$ și polinomul $p = X^3 + aX^2 + X + b$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$.
- 5p** a) Știind că $a = b = 1$, să se afle rădăcinile polinomului p .
- 5p** b) Să se determine a și b , știind că polinomul p are rădăcina dublă 1.
- 5p** c) În cazul $b = 1$, să se determine valorile lui a pentru care polinomul p are o rădăcină rațională.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : (-2, 2) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln \frac{2+x}{2-x}$.
- 5p** a) Să se determine ecuațiile asymptotelor la graficul funcției f .
- 5p** b) Să se studieze monotonia funcției f .
- 5p** c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} xf\left(\frac{1}{x}\right)$.
2. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = \int_1^2 \left(\frac{t}{x} - e^x\right)^2 dx$ și numerele $A = \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx$, $B = \int_1^2 \frac{e^x}{x} dx$.
- 5p** a) Să se arate că $f(t) = At^2 - 2Bt + \frac{e^4 - e^2}{2}$, $\forall t \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Să se arate că $f(2B-t) = f(2B+t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.
- 5p** c) Să se demonstreze că $\left(\int_1^2 \frac{e^x}{x} dx\right)^2 \leq \left(\int_1^2 e^{2x} dx\right) \left(\int_1^2 \frac{1}{x^2} dx\right)$.

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se ordoneze crescător numerele $a = -\sqrt[3]{27}$, $b = \log_2 \frac{1}{16}$ și $c = -2$.
- 5p** 2. Să se determine valorile parametrului real m știind că parabola asociată funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + mx - 2m$ se află situată deasupra axei Ox .
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2 \left(\sqrt{x^2 + x - 2} \right) = 1$.
- 5p** 4. Se consideră dreptele paralele d_1 , d_2 și punctele distincte $A, B, C \in d_1$, $M, N, P, Q \in d_2$. Să se determine numărul triunghiurilor care au toate vârfurile în mulțimea celor șapte puncte date.
- 5p** 5. Să se determine coordonatele simetricului punctului $A(-3; 2)$ față de mijlocul segmentului $[BC]$, unde $B(1; -4)$ și $C(-5, -1)$.
- 5p** 6. Să se calculeze aria triunghiului ABC în care $AM = BC = 4$, unde M este mijlocul lui (BC) , iar

SUBIECTUL II (30p)

- 1.** Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ și $M_x = \frac{x}{3}A + \frac{1}{3x^2}B$, cu $x \in \mathbb{R}^*$.
- 5p** a) Să se calculeze produsul AB .
- 5p** b) Să se arate că $M_x M_y = M_{xy}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^*$.
- 5p** c) Să se arate că, pentru orice x real nenul, $\det(M_x) \neq 0$.
- 2.** Se consideră polinomul $p = X^4 - aX^3 - aX + 1$, cu $a \in \mathbb{R}$ și cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$.
- 5p** a) Să se verifice că $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}$.
- 5p** b) Să se arate că polinomul p nu este divizibil cu $X^2 - 1$ pentru nicio valoare a lui a .
- 5p** c) Să se arate că dacă $a = \frac{1}{2}$, atunci toate rădăcinile polinomului p au modulul 1.

SUBIECTUL III (30p)

- 1.** Se consideră $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 1$ și funcția $f : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (1+x)^\alpha - \alpha x$.
- 5p** a) Să se studieze monotonia funcției f .
- 5p** b) Să se demonstreze că $(1+x)^\alpha > 1 + \alpha x, \forall x \in (-1, \infty) \setminus \{0\}, \forall \alpha \in (1, \infty)$.
- 5p** c) Să se demonstreze că $2f(x+y) \leq f(2x) + f(2y), \forall x, y \in [0, \infty)$.
- 2.** Fie funcția $f : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{1+x}$.
- 5p** a) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.
- 5p** b) Să se calculeze $\int_1^3 f^2(x)[x] dx$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x .
- 5p** c) Să se arate că sirul $(a_n)_{n \geq 1}$, dat de $a_n = f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(n) - \int_0^n f(x) dx$, este convergent.

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se verifice dacă numărul $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$ aparține mulțimii $\{a+b\sqrt{2} \mid a,b \in \mathbb{Z}\}$.
- 5p** 2. Se consideră ecuația $x^2 - 3x + 1 = 0$, cu rădăcinile x_1 și x_2 . Să se arate că $x_1^2 + x_2^2 \in \mathbb{N}$.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\arctg \sqrt{3} + \arctg x = \frac{\pi}{2}$.
- 5p** 4. Să se arate că oricare ar fi n natural, $n \geq 1$, are loc egalitatea $C_{2n}^n = 2 \cdot C_{2n-1}^n$.
- 5p** 5. Se consideră vectorii $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j}$ și $\vec{v} = 2\vec{i} + 4\vec{j}$. Să se calculeze modulul vectorului $\vec{u} + \vec{v}$.
- 5p** 6. Fie $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, astfel încât $\sin \alpha = \frac{3}{5}$. Să se calculeze $\tan \frac{\alpha}{2}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1+a^2 & ab & ac \\ ba & 1+b^2 & bc \\ ca & cb & 1+c^2 \end{pmatrix}$, cu $a,b,c \in \mathbb{R}$ și A^* adjuncta sa.
- 5p** a) Să se calculeze determinantul matricei A .
- 5p** b) Să se verifice că $\det(A^*) = (\det A)^2$.
- 5p** c) Să se arate că matricea $A - I_3$ are rangul cel mult 1.
2. Fie (G, \cdot) un grup. Pentru fiecare element $a \in G$ se definește funcția $f_a : G \rightarrow G$, $f_a(x) = ax$, $\forall x \in G$.
- 5p** a) Să se arate că f_a este bijectivă, pentru orice $a \in G$.
- 5p** b) Să se arate că $f_a \circ f_b = f_{ab}$, $\forall a, b \in G$.
- 5p** c) Fie $\mathcal{F}(G) = \{f_a : G \rightarrow G \mid a \in G\}$. Să se arate că $\mathcal{F}(G)$ împreună cu operația de compunere a funcțiilor formează un grup.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + \ln x$.
- 5p** a) Să se arate că graficul funcției f nu admite asimptotă spre $+\infty$.
- 5p** b) Să se arate că ecuația $f(x) = 0$ are o soluție unică $x_0 \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$.
- 5p** c) Să se demonstreze că $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{xe^x - 1}{x - x_0} = f'(x_0)$, unde x_0 este numărul definit la punctul b).
2. Se consideră sirul $(I_n)_{n \geq 1}$, definit prin $I_n = \int_0^1 \frac{\ln(x^n + 1)}{x + 1} dx$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.
- 5p** a) Să se determine I_1 .
- 5p** b) Să se arate că sirul I_n este strict descrescător.
- 5p** c) Să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$ (se consideră cunoscut faptul că $\ln(1+t) \leq t$, $\forall t \in (-1, \infty)$).

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n \geq 1}$ de rație 2 și cu $a_3 + a_4 = 8$. Să se determine a_1 .
- 5p** 2. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + x$. Să se calculeze $f(-1) + f(-2) + f(-3) + \dots + f(-10)$.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $4^x - 2^x = 56$.
- 5p** 4. Să se calculeze $A_4^3 - A_3^2 - C_4^2$.
- 5p** 5. Fie ABC un triunghi și G centrul său de greutate. Se consideră punctul M definit prin $\overline{MB} = -2\overline{MC}$. Să se arate că dreptele GM și AC sunt paralele.
- 5p** 6. Fie $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, astfel încât $\sin \alpha = \frac{3}{4}$. Să se calculeze $\tan \alpha$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x - y - mz = 1 \\ mx + y + mz = 1 - m, \quad m \in \mathbb{R}. \\ mx + 3y + 3z = -1 \end{cases}$
- 5p** a) Să se calculeze determinantul matricei sistemului.
- 5p** b) Să se arate că, pentru orice $m \in \mathbb{R}$, matricea sistemului are rangul cel puțin egal cu 2.
- 5p** c) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul este incompatibil.
2. Se consideră $\alpha > 0$ un număr real și mulțimea $G_\alpha = (\alpha, \infty)$. Pe \mathbb{R} se definește legea de compoziție $x * y = 3xy - 6(x + y) + 7\alpha$.
- 5p** a) Să se arate că pentru $\alpha = 2$, cuplul $(G_2, *)$ este grup abelian.
- 5p** b) Să se arate că grupurile $(G_2, *)$ și (\mathbb{R}_+^*, \cdot) sunt izomorfe, prin funcția $f : G_2 \rightarrow \mathbb{R}_+^*, f(x) = 3x - 6$.
- 5p** c) Să se arate că, pentru orice $\alpha \geq 2$, mulțimea G_α este parte stabilă a lui \mathbb{R} în raport cu operația „*”.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră o funcție $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, astfel încât $xf(x) = e^x - 1, \forall x \in \mathbb{R}$.
- 5p** a) Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 1$, situat pe graficul funcției f .
- 5p** b) Să se arate că funcția f este continuă în $x = 0$ dacă și numai dacă $f(0) = 1$.
- 5p** c) Să se arate că dacă funcția f este continuă în $x = 0$, atunci ea este derivabilă pe \mathbb{R} .
2. Se consideră sirul $(I_n)_{n \geq 1}$, $I_n = \int_1^2 ((x-1)(2-x))^n dx$.
- 5p** a) Să se calculeze I_1 .
- 5p** b) Să se arate că $2(2n+1)I_n = nI_{n-1}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.
- 5p** c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$.

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se calculeze $10^{\lg 7} - \sqrt[3]{343}$.
- 5p** 2. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale inecuația $2x^2 - 3x + 1 \leq 0$.
- 5p** 3. Să se arate că funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log_3 2^x - x$ este injectivă.
- 5p** 4. Să se calculeze numărul diagonalelor unui poligon convex cu 8 laturi.
- 5p** 5. Fie $ABCD$ un paralelogram și P un punct astfel ca $\overrightarrow{BP} = 2\overrightarrow{PD}$. Să se arate că $\overrightarrow{BP} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$.
- 5p** 6. Fie $a, b \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, astfel încât $a + b = \frac{\pi}{4}$. Să se arate că $\operatorname{tg} a \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b = 1$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} 2x - 3y + 4z - 5t = -1 \\ x + 9y + mz + t = 3 \\ 5x - 6y + 10z + nt = p \end{cases}$, $m, n, p \in \mathbb{R}$.
- 5p** a) Să se determine p astfel încât sistemul să admită o soluție (x_0, y_0, z_0, t_0) cu $z_0 = t_0 = 0$.
- 5p** b) Să se arate că, pentru orice $m, n \in \mathbb{R}$, rangul matricei sistemului este mai mare sau egal cu 2.
- 5p** c) Să se determine $m, n, p \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul este compatibil, iar matricea sistemului are rangul 2.
2. Fie mulțimea $Q_0 = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, m \text{ și } n \text{ sunt impare} \right\}$ și $G = Q_0 \times \mathbb{Z}$. Pe G se definește legea de compozitie $(q_1, k_1) * (q_2, k_2) = (q_1 q_2, k_1 + k_2)$, $\forall q_1, q_2 \in Q_0, \forall k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.
- 5p** a) Să se arate că $(G, *)$ este grup abelian.
- 5p** b) Să se calculeze $(1, 1) * (1, 2) * \dots * (1, 10)$.
- 5p** c) Să se arate că funcția $f : G \rightarrow \mathbb{Q}^*$, $f((q, k)) = q \cdot 2^k$ este un izomorfism între grupurile $(G, *)$ și (\mathbb{Q}^*, \cdot) .

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x + 2}$.
- 5p** a) Să se arate că graficul funcției f admite asimptotă spre $+\infty$.
- 5p** b) Să se determine punctele de extrem local ale funcției f .
- 5p** c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} x(2\operatorname{arctg} f(x) - \pi)$.
2. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{3 + \cos x}$.
- 5p** a) Să se calculeze $\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx$.
- 5p** b) Să se demonstreze că orice primitivă a funcției f este strict crescătoare.
- 5p** c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} \int_0^x f(t) dt$.

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se arate că $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right) \cap (\log_2 3, \infty) = \emptyset$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x + 3$. Să se determine abscisele punctelor de intersecție a graficului funcției f cu axa Ox .
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x} + \sqrt{1-x} = 1$.
- 5p** 4. Să se determine $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, astfel încât C_n^3 să dividă C_{n+1}^3 .
- 5p** 5. Fie punctele $A(1, 2)$, $B(-1, 3)$ și $C(0, 4)$. Să se calculeze lungimea înălțimii duse din vârful A al triunghiului ABC .
- 5p** 6. Fie $x \in \mathbb{R}$, astfel încât $\operatorname{tg}^2 x = 6$. Să se calculeze $\cos^2 x$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul

$$\begin{cases} x + my + 2z = 1 \\ x + (2m-1)y + 3z = 1 \\ x + my + (m-3)z = 2m-1 \end{cases}, \quad m \in \mathbb{R}.$$

- 5p** a) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul are soluție unică.
- 5p** b) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul este compatibil nedeterminat.
- 5p** c) Pentru $m = 1$ să se determine soluțiile reale (x_0, y_0, z_0) ale sistemului pentru care $2x_0^2 - y_0^2 + 3z_0^2 = 14$.
2. Pe mulțimea $G = [0, 1]$ se definește legea de compoziție $x * y = \{x + y\}$, unde $\{a\}$ este partea fracționară a numărului real a .
- 5p** a) Să se calculeze $\frac{2}{3} * \frac{3}{4}$.
- 5p** b) Să se arate că $(G, *)$ este grup abelian.
- 5p** c) Să se rezolve ecuația $x * x * x = \frac{1}{2}$, $x \in G$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{3x} + 2x + 1$.
- 5p** a) Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 0$, situat pe graficul funcției f .
- 5p** b) Să se arate că funcția f este inversabilă.
- 5p** c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(-1) + f(-2) + f(-3) + \dots + f(-n) + n^2)$.
2. Se consideră sirul $(a_n)_{n \geq 0}$ definit prin $a_0 = 1$ și $a_{n+1} = \int_0^{a_n} \sin \pi x dx$.
- 5p** a) Să se calculeze a_1 .
- 5p** b) Să se arate că sirul $(a_n)_{n \geq 0}$ este convergent.
- 5p** c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se calculeze $(1-i)(1-i^2)(1-i^3)\dots(1-i^{2009})$.
- 5p** 2. Se consideră funcțiile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1-x$ și $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 2x-1$. Să se arate că funcția $f \circ g$ este descrescătoare.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale inecuația $\sqrt[3]{2-x^2} \geq 1$.
- 5p** 4. Să se calculeze numărul funcțiilor injective $f : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$ cu proprietatea că $f(1) \neq 1$.
- 5p** 5. Să se determine ecuația dreptei care trece prin punctul $P(4, -1)$ și este paralelă cu dreapta $x-2y+1=0$.
- 5p** 6. Fie $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $\sin x = \frac{1}{2} + \cos x$. Să se calculeze $\sin 2x$.

SUBIECTUL II (30p)

- 1.** Fie permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in S_5$ și mulțimea $A = \{\sigma^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$.
- 5p** a) Să se determine numărul inversiunilor lui σ .
- 5p** b) Să se determine numărul elementelor mulțimii A .
- 5p** c) Fie $\tau \in S_5$ astfel încât $\tau\sigma^2 = \sigma^2\tau$. Să se arate că $\tau\sigma = \sigma\tau$.
- 2.** Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție și mulțimea $H = \{T \in \mathbb{R} \mid f(x+T) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}\}$.
- 5p** a) Să se arate că, dacă $T \in H$, atunci $-T \in H$.
- 5p** b) Să se demonstreze că H este subgrup al grupului $(\mathbb{R}, +)$.
- 5p** c) Să se determine mulțimea H pentru funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \{x\}$.

SUBIECTUL III (30p)

- 1.** Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.
- 5p** a) Să se studieze monotonia funcției f .
- 5p** b) Să se arate că $(x^2 + 1)f''(x) + xf'(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** c) Să se arate că graficul funcției f admite asimptotă spre $-\infty$.
- 2.** Se consideră sirul $(I_n)_{n \geq 1}$, $I_n = \int_0^1 \frac{nx^n}{x^n + 1} dx$.
- 5p** a) Să se calculeze I_1 .
- 5p** b) Să se arate că $I_n = \ln 2 - \int_0^1 \ln(1+x^n) dx$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
- 5p** c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$.

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se calculeze partea întreagă a numărului $\log_2 500$.
- 5p** 2. Se consideră ecuația $x^2 - 2x + m = 0$, $m \in \mathbb{R}$, care are rădăcinile reale x_1 și x_2 . Știind că $|x_1 - x_2| = 1$, să se determine m .
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{1-x} = 1+x$.
- 5p** 4. Să se calculeze $C_{16}^0 + C_{16}^2 + C_{16}^4 + \dots + C_{16}^{16}$.
- 5p** 5. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ știind că dreptele $x+y=1$ și $3x-ay=2$ sunt paralele.
- 5p** 6. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât $a+b = \frac{\pi}{2}$. Să se arate că $\sin 2a + \sin 2b = 2\cos(a-b)$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie $m \in \mathbb{R}$ și punctele $A(m, 1)$, $B(1-m, 2)$, $C(2m+1, 2m+1)$. Se consideră matricea

$$M = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1-m & 2 & 1 \\ 2m+1 & 2m+1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- 5p** a) Să se calculeze $\det(M)$.
- 5p** b) Să se arate că punctele A, B, C sunt coliniare, oricare ar fi $m \in \mathbb{R}$.
- 5p** c) Să se arate că aria triunghiului ABC este mai mare sau egală cu $\frac{15}{32}$.

2. Fie mulțimea de matrice $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}_5 \right\}$.

- 5p** a) Să se dea un exemplu de matrice nenulă din mulțimea A care are determinantul $\hat{0}$.
- 5p** b) Să se arate că există o matrice nenulă $M \in A$ astfel încât $\begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{1} \\ -\hat{1} & \hat{2} \end{pmatrix} \cdot M = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$.
- 5p** c) Să se rezolve ecuația $X^2 = \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{1} \\ -\hat{1} & \hat{2} \end{pmatrix}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x-1)e^{-\frac{1}{x}}$.
- 5p** a) Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f .
- 5p** b) Să se arate că funcția admite două puncte de extrem.
- 5p** c) Să se determine ecuația asymptotei la graficul funcției f spre $+\infty$.
2. Se consideră funcția $f : [0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \int_0^x t^3 \sqrt{t^2 + 1} dt$.
- 5p** a) Să se arate că funcția f este strict crescătoare.
- 5p** b) Să se calculeze $f(1)$.
- 5p** c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^5}$.

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se verifice că numărul $1+i$ este rădăcină a ecuației $z^4 + 4 = 0$.
- 5p** 2. Să se arate că vârful parabolei asociate funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x + 9$ se află pe dreapta de ecuație $x + y = 7$.
- 5p** 3. Fie $f : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{4, 5, 6\}$ o funcție injectivă. Să se arate că $f(1) + f(2) + f(3) = 15$.
- 5p** 4. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă ambele cifre impare.
- 5p** 5. Se consideră punctele $A(1, 0), B(2, 3)$ și $C(-1, 4)$. Să se calculeze $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
- 5p** 6. Fie $a \in \mathbb{R}$, astfel încât $\sin a = \frac{1}{4}$. Să se calculeze $\sin 3a$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul de ecuații liniare cu coeficienți reali $\begin{cases} x + ay + (b+c)z = 0 \\ x + by + (c+a)z = 0 \\ x + cy + (a+b)z = 0 \end{cases}$
- 5p** a) Să se calculeze determinantul matricei sistemului.
- 5p** b) Să se arate că, pentru orice $a, b, c \in \mathbb{R}$, sistemul admite soluții nenule.
- 5p** c) Să se rezolve sistemul, știind că $a \neq b$ și că $(1, 1, 1)$ este soluție a sistemului.
2. Se consideră mulțimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} x & iy \\ iy & x \end{pmatrix} \middle| x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 \neq 0 \right\}$.
- 5p** a) Să se demonstreze că G este parte stabilă în raport cu înmulțirea matricelor din $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
- 5p** b) Să se arate că (G, \cdot) este grup abelian.
- 5p** c) Să se arate că funcția $f : (\mathbb{C}^*, \cdot) \rightarrow (G, \cdot)$ cu $f(x+iy) = \begin{pmatrix} x & iy \\ iy & x \end{pmatrix}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ este izomorfism de grupuri.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră sirul $(a_n)_{n \geq 0}$, definit prin $a_0 = \sqrt{3}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
- 5p** a) Să se arate că $(a_n)_{n \geq 0}$ este strict crescător.
- 5p** b) Să se arate că sirul $(a_n)_{n \geq 0}$ este convergent.
- 5p** c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+2} - a_{n+1}}{a_{n+1} - a_n}$.
2. Fie funcția $f : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow (0, \infty)$, $f(x) = \int_0^x \frac{(\sin t + \cos t) \sin t}{\cos^2 t} dt$.
- 5p** a) Să se calculeze $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$.
- 5p** b) Să se arate că funcția f este strict crescătoare.
- 5p** c) Să se calculeze $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x)}{x^2}$.

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se arate că numărul $\sqrt[3]{3}$ aparține intervalului $(\sqrt{2}, \log_2 5)$.
- 5p** 2. Să se determine valorile reale ale lui m știind că $x^2 + 3x + m \geq 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 1$.
- 5p** 4. Într-o urnă sunt 49 de bile, inscripționate cu numerele de la 1 la 49. Să se calculeze probabilitatea ca, extrăgând o bilă din urnă, aceasta să aibă scris pe ea un pătrat perfect.
- 5p** 5. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ știind că vectorii $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ și $\vec{v} = m\vec{i} + 4\vec{j}$ sunt perpendiculari.
- 5p** 6. Să se arate că $\tan 1^\circ \cdot \tan 2^\circ \cdot \tan 3^\circ \cdots \tan 89^\circ = 1$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie sistemul de ecuații liniare $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + (m^2 - m - 1)y + (m + 1)z = 2 \\ 2x + (m^2 - m - 2)y + 2(m + 1)z = 3 \end{cases}$, unde $m \in \mathbb{R}$.

- 5p** a) Să se demonstreze că sistemul are soluție unică dacă și numai dacă $m \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.
- 5p** b) Să se arate că pentru $m \in \{0, 1\}$ sistemul este incompatibil.
- 5p** c) Să se arate că dacă $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ este soluție a sistemului, atunci $x_0 - y_0 + 2009 \cdot z_0 = 1$.
2. Se consideră mulțimile $H = \{a^2 \mid a \in \mathbb{Z}_7\}$ și $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}_7, a \neq \hat{0} \text{ sau } b \neq \hat{0} \right\}$.
- 5p** a) Să se determine elementele mulțimii H .
- 5p** b) Fie $x, y \in H$ astfel încât $x + y = \hat{0}$. Să se arate că $x = y = \hat{0}$.
- 5p** c) Să se arate că G este grup abelian în raport cu operația de înmulțire a matricelor.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \sqrt{\left| \frac{x+1}{x-1} \right|}$.

- 5p** a) Să se arate că dreapta de ecuație $x=1$ este asimptotă verticală la graficul funcției f .
- 5p** b) Să se arate că graficul funcției f admite asimptotă spre $+\infty$.
- 5p** c) Să se studieze derivabilitatea funcției f .
2. Se consideră funcțiile $f_n : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{1}{\cos^n x + \sin^n x}$, $n \in \mathbb{N}^*$.
- 5p** a) Să se calculeze $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{f_1(x)} dx$.
- 5p** b) Să se arate că, dacă F este o primitivă a funcției f_4 , atunci $F''(x) = (f_4(x))^2 \sin 4x$, $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
- 5p** c) Să se arate că $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x f_1(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x f_1(x) dx = \frac{\pi-1}{4}$.

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Fie $z \in \mathbb{C}$. Să se arate că dacă $2z + 3\bar{z} \in \mathbb{R}$, atunci $z \in \mathbb{R}$.
- 5p** 2. Să se determine funcția de gradul al doilea al cărei grafic conține punctele $(0,4), (1,-2)$ și $(-1,1)$.
- 5p** 3. Se se arate că funcția $f : (0, \infty) \rightarrow (1,3)$, $f(x) = \frac{x+3}{x+1}$ este bijectivă.
- 5p** 4. Să se determine numerele naturale n , $n \geq 5$, astfel încât $C_n^3 = C_n^5$.
- 5p** 5. Se consideră punctele A, B, C, D astfel încât $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Să se arate că $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} = \vec{0}$.
- 5p** 6. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât $a - b = \pi$. Să se arate că are loc relația $\cos a \cdot \cos b \leq 0$.

SUBIECTUL II (30p)

- 1.** Se consideră sistemul de ecuații liniare $\begin{cases} x + 2y - 3z = 3 \\ 2x - y + z = m \\ nx + y - 2z = 4 \end{cases}$, unde $m, n \in \mathbb{R}$.
- 5p** a) Să se determine m și n pentru care sistemul admite soluția $x_0 = 2, y_0 = 2, z_0 = 1$.
- 5p** b) Să se determine $n \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul are soluție unică.
- 5p** c) Să se determine m și n pentru care sistemul este compatibil nedeterminat.
- 2.** Se consideră multimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} \hat{1} & a & b \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}_3 \right\}$.
- 5p** a) Să se determine numărul de elemente ale mulțimii G .
- 5p** b) Să se arate că G este grup în raport cu operația de înmulțire a matricelor din $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_3)$.
- 5p** c) Să se arate că $X^3 = I_3$, oricare ar fi $X \in G$.

SUBIECTUL III (30p)

- 1.** Se consideră funcția $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^x}{x}$.
- 5p** a) Să se studieze monotonia funcției f .
- 5p** b) Să se determine asimptotele graficului funcției f .
- 5p** c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 (f(n) - f(n+1))$.
- 2.** Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \int_0^x e^{-t} (t^2 - 3t + 2) dt$.
- 5p** a) Să se arate că $f(1) > 0$.
- 5p** b) Să se arate că funcția f admite două puncte de extrem.
- 5p** c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(-x)}{x^2}$.

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Fie $z \in \mathbb{C}$. Să se arate că numărul $i(z - \bar{z})$ este real.
- 5p** 2. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ pentru care parabola asociată funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + (m+1)x + m$ este tangentă la axa Ox .
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x+1} = 5 - x$.
- 5p** 4. Câtă termeni ai dezvoltării $(1+2)^7$ sunt divizibili cu 14?
- 5p** 5. Fie ABC un triunghi echilateral de arie $\sqrt{3}$. Să se calculeze $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
- 5p** 6. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât $a+b = \frac{3\pi}{2}$. Să se arate că $\sin 2a - \sin 2b = 0$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie A matricea coeficienților sistemului $\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ 3x - y + mz = 0, \text{ unde } m \in \mathbb{R} \\ -x + 2y + z = 0 \end{cases}$
- 5p** a) Să se calculeze $\det(A)$.
- 5p** b) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât sistemul să admită soluții nenule.
- 5p** c) Să se arate că, dacă $m = 0$, atunci expresia $\frac{z_0^2 + y_0^2 + x_0^2}{z_0^2 - y_0^2 - x_0^2}$ este constantă, pentru orice soluție nenulă (x_0, y_0, z_0) a sistemului.
2. Se consideră $a, b \in \mathbb{R}$ și polinomul $f = X^4 - 4X^3 + 6X^2 + aX + b$, care are rădăcinile complexe x_1, x_2, x_3, x_4 .
- 5p** a) Să se determine a și b știind că f are rădăcina i .
- 5p** b) Să se calculeze $(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 + (x_3 - 1)^2 + (x_4 - 1)^2$.
- 5p** c) Să se determine valorile reale ale numerelor a și b știind că toate rădăcinile polinomului f sunt reale.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$.
- 5p** a) Să se determine asimptotele la graficul funcției f .
- 5p** b) Să se determine punctele de inflexiune ale graficului funcției f .
- 5p** c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 (f(x+1) - f(x))$.
2. Fie sirul $(I_n)_{n \geq 1}$ definit prin $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^{2n} t dt$, $n \in \mathbb{N}^*$.
- 5p** a) Să se calculeze I_1 .
- 5p** b) Să se arate că $I_{n+1} + I_n = \frac{1}{2n+1}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.
- 5p** c) Să se arate că sirul $(I_n)_{n \geq 1}$ este convergent la 0.

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se arate că numărul $\frac{1+3i}{1-3i} + \frac{1-3i}{1+3i}$ este real.
- 5p** 2. Numere reale a și b au suma 5 și produsul 2. Să se calculeze valoarea sumei $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.
- 5p** 4. Câte elemente ale mulțimii $A = \{x \mid x = C_7^k, k \in \mathbb{N}, k \leq 7\}$ sunt divizibile cu 7?
- 5p** 5. Fie $ABCD$ un dreptunghi cu $AB = 3$ și $AD = 6$. Să se calculeze modulul vectorului $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$.
- 5p** 6. Să se calculeze suma $\cos 1^\circ + \cos 2^\circ + \cos 3^\circ + \dots + \cos 179^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x + ay + (a+b)z = a+b \\ x + a^2y + (a^2 + b^2)z = a^2 + b^2 \\ x + a^3y + (a^3 + b^3)z = a^3 + b^3 \end{cases}$, unde $a, b \in \mathbb{R}$.

- 5p** a) Să se calculeze determinantul matricei sistemului.
- 5p** b) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât sistemul să fie compatibil determinat.
- 5p** c) Să se arate că, pentru orice valori reale ale parametrilor a și b sistemul are soluție.
2. Se consideră polinomul $f = \hat{2}X + \hat{1} \in \mathbb{Z}_4[X]$.
- 5p** a) Să se determine gradul polinomului f^2 .
- 5p** b) Să se arate că polinomul f este element inversabil al inelului $(\mathbb{Z}_4[X], +, \cdot)$.
- 5p** c) Să se determine toate polinoamele $g \in \mathbb{Z}_4[X]$ de gradul 1 cu proprietatea că $g^2 = \hat{1}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} - \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^3 + 1}$.
- 5p** a) Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 0$, situat pe graficul funcției f .
- 5p** b) Să se determine asimptotele graficului funcției f .
- 5p** c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{2} f(2)f(3)\dots f(n) \right)^{n^2}$.
2. Se consideră sirul $(I_n)_{n \geq 1}$, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$.
- 5p** a) Să se calculeze I_2 .
- 5p** b) Să se arate că $nI_n = (n-1)I_{n-2}$, $\forall n \geq 3$.
- 5p** c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$.

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Fie $z \in \mathbb{C}$ o rădăcină de ordin 3 a unității, diferită de 1. Să se calculeze $1+z+z^2$.
- 5p** 2. Să se determine soluțiile întregi ale inecuației $x^2+x-6 \leq 0$.
- 5p** 3. Fie funcția $f : (1, \infty) \rightarrow (2, \infty)$, $f(x) = x^2 + 1$. Să se arate că funcția f este bijectivă.
- 5p** 4. Câte numere naturale de la 1 la 100 sunt divizibile cu 6 și cu 8?
- 5p** 5. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care vectorii $\vec{v}_1 = a\vec{i} + (a+1)\vec{j}$ și $\vec{v}_2 = 3\vec{i} + 5\vec{j}$ sunt coliniari.
- 5p** 6. Triunghiul ABC are laturile $AB = 3$, $BC = 5$ și $AC = 7$. Să se calculeze lungimea razei cercului inscris în triunghiul ABC .

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie matricea $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, care are toate elementele egale cu 1.
- 5p** a) Să se demonstreze că $A^2 = 3A$.
- 5p** b) Să se calculeze $\det(I_3 + A^3)$.
- 5p** c) Să se demonstreze că dacă $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ este o matrice cu proprietatea $AB = BA$, atunci suma elementelor de pe fiecare linie și de pe fiecare coloană ale lui B este aceeași.
2. Fie $\varepsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ și $\mathbb{Q}(\varepsilon) = \{a + b\varepsilon \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$.
- 5p** a) Să se arate că $\varepsilon^2 \in \mathbb{Q}(\varepsilon)$.
- 5p** b) Să se demonstreze că inversul oricărui element nenul din $\mathbb{Q}(\varepsilon)$ aparține mulțimii $\mathbb{Q}(\varepsilon)$.
- 5p** c) Să se arate că mulțimea $M = \{a^2 - ab + b^2 \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ este parte stabilă a lui \mathbb{Z} în raport cu înmulțirea.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$.
- 5p** a) Să se arate că funcția f este strict crescătoare.
- 5p** b) Să se studieze convergența sirului $(x_n)_{n \geq 1}$ definit prin $x_1 = 1$ și $x_{n+1} = f(x_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
- 5p** c) Să se demonstreze că $f(x+1) - f(x) \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
2. Se consideră funcțiile $f, g : (0, 3) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{3-x}$ și $g(x) = \frac{\ln(3-x)}{x}$, $\forall x \in (0, 3)$.
- 5p** a) Să se calculeze $\int_1^e (3-x)f(x)dx$.
- 5p** b) Să se arate că $\int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 g(x)dx$.
- 5p** c) Să se arate că $\lim_{t \searrow 0} \int_t^1 f(x)dx = +\infty$.

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se ordoneze crescător numerele $a = \lg 2 - \lg 20$, $b = C_3^2 - C_4^2$ și $c = -\sqrt[3]{4\sqrt{4}}$.
- 5p** 2. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ știind că distanța de la vârful parabolei de ecuație $y = x^2 + 2x + a$ la axa Ox este egală cu 1.
- 5p** 3. Numerele reale x și y verifică egalitatea $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \frac{\pi}{2}$. Să se arate că $x \cdot y = 1$.
- 5p** 4. Să se arate că numărul A_n^3 , $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ este divizibil cu 3.
- 5p** 5. Punctele E, F, G, H sunt mijloacele laturilor $[BC], [DA], [AB]$, respectiv $[CD]$ ale patrulaterului $ABCD$. Să se demonstreze că $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{HG} = \overrightarrow{CA}$.
- 5p** 6. Să se calculeze $\operatorname{tg} x$, știind că $x \in \left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$ și $\sin 2x = -\frac{3}{5}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie $m \in \mathbb{R}$ și $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & m & -1 \\ 3m+4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

- 5p** a) Să se calculeze $\det(A)$.
- 5p** b) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât matricea A să fie inversabilă.
- 5p** c) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât $A^{-1} = A^*$.
2. Se consideră corpul $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ și polinoamele $f, g \in \mathbb{Z}_3$, $f = X^3 - X$, $g = X^3 + \hat{2}X + \hat{2}$.
- 5p** a) Să se determine rădăcinile din \mathbb{Z}_3 ale polinomului f .
- 5p** b) Să se arate că polinomul g este ireductibil în $\mathbb{Z}_3[X]$.
- 5p** c) Să se determine toate polinoamele $h \in \mathbb{Z}_3[X]$ de gradul trei, astfel încât $h(x) = g(x)$, oricare ar fi $x \in \mathbb{Z}_3$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{arctg} x$.
- 5p** a) Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 1$, situat pe graficul funcției f .
- 5p** b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - f(x)}{x^3}$.
- 5p** c) Să se arate că funcția $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = (x-1)f(x)$ admite exact un punct de extrem.
2. Se consideră sirul $(I_n)_{n \geq 1}$, $I_n = \int_0^1 x^n \sin x dx$.
- 5p** a) Să se calculeze I_1 .
- 5p** b) Să se arate că sirul $(I_n)_{n \geq 1}$ este convergent.
- 5p** c) Să se demonstreze că $I_{2n} + 2n(2n-1)I_{2n-2} = 2n \sin 1 - \cos 1$, $\forall n \geq 2$.

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se determine numerele complexe z care verifică relația $z + 3i = 6 \cdot \bar{z}$.
- 5p** 2. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $|1 - 2x| = |x + 4|$.
- 5p** 3. Să se determine imaginea funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{1+4x^2}$.
- 5p** 4. Să se determine numărul funcțiilor strict monotone $f : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{5, 6, 7, 8\}$.
- 5p** 5. Să se demonstreze că pentru orice punct M din planul paralelogramului $ABCD$ are loc egalitatea $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$.
- 5p** 6. Fie a și b numere reale, astfel încât $a + b = \frac{\pi}{3}$. Să se arate că $\sin 2a - \sin 2b - \sin(a - b) = 0$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul de ecuații liniare $\begin{cases} x_1 - x_2 = a \\ x_3 - x_4 = b \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$, unde $a, b \in \mathbb{R}$.

- 5p** a) Să se arate că, pentru orice valori ale lui a și b , sistemul este compatibil.
- 5p** b) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât sistemul să admită o soluție (x_1, x_2, x_3, x_4) cu proprietatea că x_1, x_2, x_3, x_4 și $x_1 + x_2$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
- 5p** c) Să se demonstreze că, dacă sistemul are o soluție cu toate componentele strict pozitive, atunci $a + b < 1$.
2. Fie polinomul $f = X^3 - 3X^2 + 5X + 1 \in \mathbb{R}[X]$ și $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ rădăcinile sale.
- 5p** a) Să se calculeze $(1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3)$.
- 5p** b) Să se arate că polinomul f nu are nicio rădăcină întreagă.
- 5p** c) Să se calculeze $x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + x_2^2 x_1 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1 + x_3^2 x_2$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Pentru fiecare $a > 0$ se consideră funcția $f_a : (0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f_a(x) = (x + a) \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)$.

- 5p** a) Să se calculeze $f'_a(x)$, $x > 0$.
- 5p** b) Să se determine a astfel încât funcția f_a să fie convexă.
- 5p** c) Să se arate că graficul funcției f_a admite asimptotă spre $+\infty$.
2. Se consideră sirul $(I_n)_{n \geq 1}$, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx$.
- 5p** a) Să se calculeze I_2 .
- 5p** b) Să se arate că $nI_n = (n-1)I_{n-2}$, $\forall n \geq 3$.
- 5p** c) Să se demonstreze că sirul $(I_n)_{n \geq 1}$ este convergent.

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n \geq 1}$ cu rația 3. Știind că suma primilor 10 termeni ai progresiei este 150, să se determine a_1 .
- 5p** 2. Să se determine toate perechile (a,b) de numere reale pentru care $a^2 + b^2 = a + b = 2$.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\lg x + \lg(9 - 2x) = 1$.
- 5p** 4. Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $\{1, 2, 3, \dots, 100\}$, acesta să nu fie divizibil cu 7.
- 5p** 5. Se consideră punctele $A(0,2)$, $B(1,-1)$ și $C(5,1)$. Să se determine ecuația dreptei duse din vârful A , perpendiculară pe dreapta BC .
- 5p** 6. Să se arate că $1 + \cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} + \cos \frac{6\pi}{5} + \cos \frac{8\pi}{5} = 0$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie M mulțimea matricelor de ordin 3 cu elemente reale având proprietatea că suma elementelor fiecărei linii este 0.
- 5p** a) Să se arate că, dacă $A, B \in M$, atunci $A + B \in M$.
- 5p** b) Să se arate că orice matrice din M este neinversabilă.
- 5p** c) Să se demonstreze că, dacă $A \in M$, atunci $A^2 \in M$.
2. Se consideră inelele $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ și $\mathbb{Z}[\sqrt{3}] = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.
- 5p** a) Să se arate că, dacă $x \in \mathbb{R}$ și $x^2 = 3 + 2\sqrt{2}$, atunci $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.
- 5p** b) Să se arate că $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] \cap \mathbb{Z}[\sqrt{3}] = \mathbb{Z}$.
- 5p** c) Să se demonstreze că nu există morfisme de inele de la $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ la $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcțiile $f_n : (0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n + \ln x$, $n \in \mathbb{N}^*$.
- 5p** a) Să se determine asimptotele graficului funcției f_1 .
- 5p** b) Să se demonstreze că funcțiile $g_n : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g_n(x) = f_n(x) + f_n\left(\frac{1}{x}\right)$ sunt convexe.
- 5p** c) Admitem că ecuația $f_n(x) = 2^n$ are soluția unică x_n . Să se arate că sirul $(x_n)_{n \geq 1}$ converge la 2.
2. Fie $a \in [0,1]$ și $I_n = \int_0^a \frac{t^n}{t+1} dt$, $n \in \mathbb{N}^*$.
- 5p** a) Să se calculeze I_2 .
- 5p** b) Să se demonstreze că $I_n + I_{n-1} = \frac{a^n}{n}$, $\forall n \geq 2$.
- 5p** c) Să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$.

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se calculeze modulul numărului complex $z = (\sqrt{2} - 1 + i(\sqrt{2} + 1))^2$.
- 5p** 2. Să se determine numerele reale x și y știind că $x + 2y = 1$ și $x^2 - 6y^2 = 1$.
- 5p** 3. Să se arate că funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x + 1$ nu este injectivă.
- 5p** 4. Să se calculeze $C_{10}^3 - C_9^3$.
- 5p** 5. Fie $ABCD$ un paralelogram. Știind că vectorii $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ și $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$ au același modul, să se arate că $ABCD$ este dreptunghi.
- 5p** 6. Să se arate că $\sin 40^\circ \cdot \sin 140^\circ = \cos^2 130^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

- 1.** Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ x & 4 \end{pmatrix}$, unde $x \in \mathbb{R}$.
- 5p a)** Să se determine $x \in \mathbb{R}$ știind că $A^2 = 5A$.
- 5p b)** Pentru $x = 2$ să se calculeze A^{2009} .
- 5p c)** Să se determine $x \in \mathbb{R}$ pentru care $\text{rang}(A + A^t) = 1$.
- 2.** Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ și polinomul $f = 2X^4 + 2(a-1)X^3 + (a^2 + 3)X^2 + bX + c$.
- 5p a)** Să se determine a, b, c , știind că $a = b = c$, iar restul împărțirii lui f la $X + 1$ este 10.
- 5p b)** Știind că $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$ sunt rădăcinile lui f , să se calculeze $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$.
- 5p c)** Să se determine $a, b, c \in \mathbb{R}$ și rădăcinile polinomului f în cazul în care f are toate rădăcinile reale.

SUBIECTUL III (30p)

- 1.** Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x^3}{x^2 + 1}$.
- 5p a)** Să se arate că graficul funcției f admite asimptotă spre $+\infty$.
- 5p b)** Să se arate că funcția f este inversabilă.
- 5p c)** Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(e^x))^{\frac{1}{x}}$.
- 2.** Fie funcțiile $F, f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{\sin^2 x}$, $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.
- 5p a)** Să se demonstreze că funcția F este strict crescătoare.
- 5p b)** Să se calculeze $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2xF(x)dx$.
- 5p c)** Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x}$.

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Numerele reale pozitive a, b, c, d sunt în progresie geometrică. Știind că $d - a = 7$ și $c - b = 2$, să se determine rația progresiei.
- 5p** 2. Să se determine valorile reale nenule ale lui m știind că $mx^2 + x - 2 \leq 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** 3. Să se rezolve în intervalul $(0, 5)$ ecuația $\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$.
- 5p** 4. Să se determine numărul $n = C_{10}^0 - C_{10}^2 + C_{10}^4 - C_{10}^6 + C_{10}^8$.
- 5p** 5. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care vectorii $\vec{u} = (a-1)\vec{i} - (2a+2)\vec{j}$ și $\vec{v} = (a+1)\vec{i} - \vec{j}$ sunt perpendiculare.
- 5p** 6. Fie $\alpha \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ astfel încât $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$. Să se calculeze $\sin 2\alpha$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ și mulțimea $G = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid AXA^t = O_2\}$, unde A^t este transpusa matricei A .
- 5p** a) Să se arate că dacă $X, Y \in G$, atunci $X + Y \in G$.
- 5p** b) Să se arate că, dacă $X \in G$, atunci suma elementelor lui X este egală cu 0.
- 5p** c) Să se arate că dacă $X \in G$ și $\det X = 0$, atunci $X^n \in G$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Se consideră polinomul $f = X^4 - 6X^3 + 18X^2 - 30X + 25 \in \mathbb{C}[X]$.
- 5p** a) Să se arate că polinomul f se divide cu $X^2 - 2X + 5$.
- 5p** b) Să se arate că polinomul f nu are nicio rădăcină reală.
- 5p** c) Să se arate că rădăcinile polinomului f au același modul.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : (1; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(\ln x)$.
- 5p** a) Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = e$, situat pe graficul funcției f .
- 5p** b) Să se demonstreze că funcția f este concavă.
- 5p** c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x+1) - f(x)}{f'(x)}$.
2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x}$.
- 5p** a) Să se calculeze $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$.
- 5p** b) Să se arate că orice primitivă a funcției f este strict crescătoare pe intervalul $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
- 5p** c) Să se calculeze $\int_0^{2\pi} xf(x) dx$.

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se calculeze modulele rădăcinilor complexe ale ecuației $z^2 + 2z + 4 = 0$.
- 5p** 2. Să se determine funcțiile de gradul întâi $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, care sunt strict crescătoare și îndeplinesc condiția $f(f(x)) = 4x + 3$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $2^x + 4^{\frac{x+1}{2}} = 12$.
- 5p** 4. Care este probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de la 1 la 1000, acesta să fie cub perfect?
- 5p** 5. Se consideră punctele $A(1, 2)$ și $B(3, 4)$. Să se calculeze distanța de la originea axelor la dreapta AB .
- 5p** 6. Să se determine $\alpha \in (0, 2\pi)$ astfel ca $\operatorname{tg} \alpha = \sin \alpha$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- 5p** a) Să se calculeze A^3 .
- 5p** b) Să se determine $(A \cdot A^t)^{-1}$.
- 5p** c) Să se rezolve ecuația $X^2 = A$, $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ și polinomul $f = X^{30} - 3X^{20} + aX^{10} + 3X^5 + aX + b \in \mathbb{R}[X]$.
- 5p** a) Să se arate că restul împărțirii polinomului f la $X + 1$ nu depinde de a .
- 5p** b) Să se determine a și b astfel încât restul împărțirii polinomului f la $X^2 - X$ să fie X .
- 5p** c) Să se determine a și b astfel încât polinomul f să fie divizibil cu $(X - 1)^2$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Pentru fiecare $t \in \mathbb{R}$, se consideră funcția $f_t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_t(x) = x^3 + t^2 x$.
- 5p** a) Să se calculeze $f'_t(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Să se arate că fiecare funcție f_t este inversabilă.
- 5p** c) Să se arate că funcția $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(t) = f_t^{-1}(1)$ este continuă în punctul 0.
2. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \int_0^x (t^2 + 1) \sqrt{|t|} dt$.
- 5p** a) Să se calculeze $f(1)$.
- 5p** b) Să se arate că f este funcție impară.
- 5p** c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x+1) - f(x)}{x^2 \sqrt{x}}$.

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se calculeze $\left(\frac{(1-2i)(3i-1)}{5}\right)^4$.
- 5p** 2. Să se arate că funcția $f : (-1,1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$ este impară.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $5^x + 5^{-x} = 2$.
- 5p** 4. Care este probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, prima sa cifră să fie număr prim?
- 5p** 5. Fie ABC un triunghi și O centrul cercului circumscris lui. Știind că $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OC}$, să se arate că triunghiul ABC este dreptunghic.
- 5p** 6. Fie $\alpha \in \mathbb{R}$, astfel încât $\sin \alpha + \cos \alpha = 1$. Să se calculeze $\tan 2\alpha$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie $a,b,c \in \mathbb{R}^*$ și matricea $A = \begin{pmatrix} a & a-b & a-b \\ 0 & b & b-c \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.
- 5p** a) Să se arate că A este matrice inversabilă.
- 5p** b) Să se demonstreze că $A^n = \begin{pmatrix} a^n & a^n - b^n & a^n - b^n \\ 0 & b^n & b^n - c^n \\ 0 & 0 & c^n \end{pmatrix}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.
- 5p** c) Să se calculeze A^{-1} .
2. Fie $f \in \mathbb{R}[X]$ un polinom astfel încât $f(X^2 + 3X + 1) = f^2(X) + 3f(X) + 1$ și $f(0) = 0$.
- 5p** a) Să se determine $f(-1)$.
- 5p** b) Să se determine restul împărțirii polinomului f la $X - 5$.
- 5p** c) Să se demonstreze că $f = X$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcțiile $f_n : [0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^{n+1} - (n+2)x + n$, $n \in \mathbb{N}^*$.
- 5p** a) Să se arate că graficele funcțiilor f_n nu admit asimptotă spre $+\infty$.
- 5p** b) Să se arate că, pentru oricare $n \in \mathbb{N}^*$, f_n are exact un punct de extrem x_n .
- 5p** c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^{n^2}$, unde x_n este definit la punctul b).
2. Se consideră sirul $(I_n)_{n \geq 1}$, $I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx$.
- 5p** a) Să se calculeze I_1 .
- 5p** b) Să se arate că $I_{n+1} + I_n = \frac{1}{2n+1}$, $\forall n \geq 1$.
- 5p** c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$.

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se calculeze partea întreagă a numărului $\frac{10}{\sqrt{2}-1}$.
- 5p** 2. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $x + \frac{1}{|1+x|} = 1$.
- 5p** 3. Să se studieze monotonia funcției $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2009^x + \log_{2009} x$.
- 5p** 4. Care este probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, produsul cifrelor să fie impar?
- 5p** 5. Să se demonstreze că vectorii $\vec{u} = 3\vec{i} + a\vec{j}$ și $\vec{v} = (a+1)\vec{i} + a\vec{j}$ nu pot fi perpendiculari pentru nicio valoare reală a numărului a .
- 5p** 6. Să se arate că $\sin x + \sin 3x + \sin 5x = (1 + 2\cos 2x) \cdot \sin 3x$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră $n \in \mathbb{N}^*$ și matricea $A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, care are elementele de pe diagonala principală egale cu 2 și restul elementelor egale cu 1.
- 5p** a) Să se calculeze $\det(2A_2)$.
- 5p** b) Să se determine $x \in \mathbb{R}$ pentru care $\det(A_3 + xI_3) = 0$.
- 5p** c) Să se arate că A_4 are inversă, aceasta având elementele de pe diagonala principală egale cu $\frac{4}{5}$ și restul elementelor egale cu $-\frac{1}{5}$.
2. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ și polinomul $f = X^3 - aX^2 + bX - c \in \mathbb{R}[X]$ cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$.
- 5p** a) Să se determine a, b, c pentru care $x_1 = 2$ și $x_2 = 1+i$.
- 5p** b) Să se arate că resturile împărțirii polinomul f la $(X-1)^2$ și la $(X-2)^2$ nu pot fi egale, pentru nicio valoare a parametrilor a, b, c .
- 5p** c) Să se arate că, dacă toate rădăcinile polinomului f sunt reale și a, b, c sunt strict pozitive, atunci x_1, x_2, x_3 sunt strict pozitive.

SUBIECTUL III (30p)

1. Fie funcțiile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \arctg x$ și $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x+1) - f(x) - f\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right)$.
- 5p** a) Să se arate că graficul funcției f admite asimptotă spre $+\infty$.
- 5p** b) Să se arate că $g(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
- 5p** c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\arctg \frac{1}{1+1+1^2} + \arctg \frac{1}{1+2+2^2} + \arctg \frac{1}{1+3+3^2} + \dots + \arctg \frac{1}{1+n+n^2} \right)$.
2. Se consideră sirul $(I_n)_{n \geq 1}$, $I_n = \int_0^1 e^{-x} x^n dx$.
- 5p** a) Să se calculeze I_1 .
- 5p** b) Să se arate că $I_n = nI_{n-1} - \frac{1}{e}$, pentru orice $n \geq 2$.
- 5p** c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$.

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Fie a, b, c numere naturale nenule în progresie geometrică. Știind că $a + b + c$ este un număr par, să se arate că numerele a, b, c sunt pare.
- 5p** 2. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 3x + 2$. Să se arate că $f(a) + f(a+1) \geq 0$, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale inecuația $\log_2 x + \log_4 x > 3$.
- 5p** 4. Să se determine numerele naturale n , $n \geq 2$, pentru care $C_n^1 + C_n^2 = 120$.
- 5p** 5. Să se arate că unghiul vectorilor $\vec{u} = 2\vec{i} - a\vec{j}$ și $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j}$ este obtuz dacă și numai dacă $a > 2$.
- 5p** 6. Fie ABC un triunghi cu $\sin A = \frac{1}{2}$, $\sin B = 1$ și $BC = 4$. Să se calculeze aria triunghiului ABC .

SUBIECTUL II (30p)

1. Pentru orice matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se notează $tr(A) = a + d$.
- 5p** a) Să se verifice că $A^2 - tr(A) \cdot A + (\det A) \cdot I_2 = 0_2$.
- 5p** b) Să se demonstreze că, dacă $tr(A) = 0$, atunci $A^2B = BA^2$, pentru orice matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- 5p** c) Să se arate că dacă $tr(A) \neq 0$, $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ și $A^2B = BA^2$, atunci $AB = BA$.
2. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ și polinomul $f = X^4 - 6X^3 + 13X^2 + aX + b \in \mathbb{R}[X]$.
- 5p** a) Să se calculeze suma pătratelor celor 4 rădăcini complexe ale polinomului f .
- 5p** b) Să se determine a, b astfel încât polinomul f să fie divizibil cu $(X - 1)(X - 3)$.
- 5p** c) Să se determine a, b astfel încât polinomul f să aibă două rădăcini duble.

SUBIECTUL III (30p)

1. Fie mulțimea $A = \mathbb{R} \setminus \{1, 2, 3, \dots, 2009\}$ și funcția $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} + \dots + \frac{1}{x-2009}$.
- 5p** a) Să se determine asimptotele graficului funcției f .
- 5p** b) Știind că $a \in \mathbb{R}^*$, să se determine numărul soluțiilor reale ale ecuației $f(x) = a$.
- 5p** c) Să se determine numărul punctelor de inflexiune ale graficului funcției f .
2. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$.
- 5p** a) Să se arate că funcția f este strict crescătoare.
- 5p** b) Să se arate că funcția f este concavă pe intervalul $[0, \infty)$.
- 5p** c) Să se arate că sirul $(f(n))_{n \geq 1}$ este convergent.

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se ordoneze crescător numerele $3!$, $\sqrt[3]{100}$, $\log_2 32$.
- 5p** 2. Să se arate că $x^2 + 3xy + 4y^2 \geq 0$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sin 2x = \cos x$.
- 5p** 4. Să se calculeze $A_5^3 - 4C_6^2$.
- 5p** 5. În sistemul de coordonate xOy se consideră punctele A, B, C astfel încât $A(1,3), B(2,5)$ și $\overline{AC} = 2AB$.
Să se determine coordonatele punctului C .
- 5p** 6. Fie ABC un triunghi care are $BC = 8$ și $\cos A = \frac{3}{5}$. Să se calculeze lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC .

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.
- 5p** a) Să se arate că $\det(A \cdot A^t) \geq 0$.
- 5p** b) Să se arate că, dacă $A \cdot A^t = A^t \cdot A$, atunci $(a-d)(b-c) = 0$.
- 5p** c) Să se demonstreze că, dacă $(A - A^t)^{2009} = A - A^t$, atunci $|b - c| \in \{0,1\}$.
2. Se consideră corpul $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$.
- 5p** a) Să se rezolve în \mathbb{Z}_7 ecuația $\hat{2}x = \hat{3}$.
- 5p** b) Să se arate că polinomul $p = \hat{2}X^2 + \hat{4} \in \mathbb{Z}_7[X]$ nu are rădăcini în \mathbb{Z}_7 .
- 5p** c) Să se demonstreze că funcția $f : \mathbb{Z}_7 \rightarrow \mathbb{Z}_7$, $f(x) = \hat{2}x$ este un automorfism al grupului $(\mathbb{Z}_7, +)$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{arctg} x$.
- 5p** a) Să se arate că funcția f este concavă pe intervalul $[0, \infty)$.
- 5p** b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 (f(x+1) - f(x))$.
- 5p** c) Să se rezolve inecuația $f(x) < x - \frac{x^3}{3}$, $x \in \mathbb{R}$.
2. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}$.
- 5p** a) Să se calculeze $\int_0^1 x(1+x^2)f(x)dx$.
- 5p** b) Să se arate că funcția $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^x t^4 f(t)dt$ este strict crescătoare.
- 5p** c) Să se arate că, pentru orice $a \in \mathbb{R}$, are loc relația $\int_1^a f(x)dx < \frac{1}{4}$.

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Fie $z \in \mathbb{C}$ astfel încât $z + 2\bar{z} = 3 + i$. Să se calculeze modulul numărului z .
- 5p** 2. Să se dea un exemplu de ecuație de gradul al doilea cu coeficienți întregi care are o soluție egală cu $\sqrt{3}$.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_x 2 + \log_{\sqrt{x}} 2 = 9$.
- 5p** 4. Să se determine numărul submulțimilor cu trei elemente ale mulțimii $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ care conțin cel puțin un număr par.
- 5p** 5. Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC . Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât să aibă loc egalitatea $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GC}$.
- 5p** 6. Știind că $a \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ și $\sin a = \frac{3}{5}$, să se calculeze $\tan a$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie sistemul de ecuații liniare $\begin{cases} mx + y - z = 1 \\ x + y - z = 2, \text{ unde } m \in \mathbb{R}. \\ -x + y + z = 0 \end{cases}$
- 5p** a) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât matricea sistemului să aibă rangul 2.
- 5p** b) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât sistemul să aibă soluții $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ care verifică relația $x_0 + y_0 + z_0 = 4$.
- 5p** c) Să se determine $m \in \mathbb{Z}$ astfel încât sistemul să aibă o soluție unică $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{Z}^3$.
2. Fie $p \in \mathbb{R}$ și polinomul $f = X^4 - 4X + p \in \mathbb{R}[X]$.
- 5p** a) Să se determine p astfel încât polinomul f să fie divizibil cu $X + 1$.
- 5p** b) Să se determine p astfel încât polinomul f să aibă o rădăcină reală dublă.
- 5p** c) Să se arate că, pentru orice $p \in \mathbb{R}$, polinomul f nu are toate rădăcinile reale.

SUBIECTUL III (30p)

1. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ se definește funcția $f_n : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n - nx - 1$.
- 5p** a) Să se arate că, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, funcția f_n este convexă.
- 5p** b) Să se arate că, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, ecuația $f_n(x) = 0$ are soluție unică.
- 5p** c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, unde x_n este unica soluție a ecuației $f_n(x) = 0$.
2. Fie funcțiile $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$, $g(x) = \int_{-x}^x f(t) \cos t dt$.
- 5p** a) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.
- 5p** b) Să se studieze monotonia funcției g pe intervalul $[0, \pi]$.
- 5p** c) Să se calculeze $g\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se calculeze partea întreagă a numărului $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$.
- 5p** 2. Fie f o funcție de gradul întâi. Să se arate că funcția $f \circ f$ este strict crescătoare.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $3^x + 9^x = \frac{4}{9}$.
- 5p** 4. Câte funcții $f : \{1, 2, 3, \dots, 10\} \rightarrow \{0, 1\}$ au proprietatea că $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(10) = 2$?
- 5p** 5. Se consideră punctele $M(1, 2), N(2, 5)$ și $P(3, m)$, $m \in \mathbb{R}$. Să se determine valorile reale ale lui m astfel încât $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP} = 5$.
- 5p** 6. Să se determine cel mai mare element al mulțimii $\{\cos 1, \cos 2, \cos 3\}$.

SUBIECTUL II (30p)

- 1.** Fie matricele $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ și funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \det(AA^t + xB)$.
- 5p a)** Să se calculeze AA^t .
- 5p b)** Să se arate că $f(0) \geq 0$.
- 5p c)** Să se arate că există $m, n \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) = mx + n$, pentru oricare $x \in \mathbb{R}$.
- 2.** Se consideră mulțimea de numere complexe $G = \{\cos q\pi + i \sin q\pi \mid q \in \mathbb{Q}\}$.
- 5p a)** Să se arate că $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \in G$.
- 5p b)** Să se arate că G este parte stabilă a lui \mathbb{C} în raport cu înmulțirea numerelor complexe.
- 5p c)** Să se arate că polinomul $f = X^6 - 1 \in \mathbb{C}[X]$ are toate rădăcinile în G .

SUBIECTUL III (30p)

- 1.** Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 2x + 1} - \sqrt[3]{x^3 - x + 1}$.
- 5p a)** Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 0$, situat pe graficul funcției f .
- 5p b)** Să se arate că graficul funcției admite asimptotă spre $+\infty$.
- 5p c)** Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{f(1) + f(2) + \dots + f(n)}{n} \right)^n$.
- 2.** Se consideră funcțiile $f_n : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \int_{\frac{1}{e}}^x t^n \ln t dt$, $n \in \mathbb{N}^*$.
- 5p a)** Să se calculeze $f_1(e)$.
- 5p b)** Să se arate că funcțiile f_n sunt descrescătoare pe intervalul $(0, 1)$.
- 5p c)** Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(1)$.

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se arate că $\sqrt{6+4\sqrt{2}} \in \{a+b\sqrt{2} \mid a,b \in \mathbb{Z}\}$.
- 5p** 2. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $|1+x|=1-x$.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[6]{x^2-2x+1}=\sqrt[3]{3-x}$.
- 5p** 4. Să se arate că 11 divide numărul $C_{11}^1 + C_{11}^2 + \dots + C_{11}^{10}$.
- 5p** 5. Fie ABC un triunghi și G centrul său de greutate. Știind că $A(1,1)$, $B(5,2)$ și $G(3,4)$, să se calculeze coordonatele punctului C .
- 5p** 6. Fie $a \in \mathbb{R}$ cu $\operatorname{tg} a = \frac{2}{5}$. Să se calculeze $|\sin a|$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$.
- 5p** a) Să se demonstreze că $(I_2 + A)^2 = I_2 + A$.
- 5p** b) Să se demonstreze că mulțimea $\{A^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ este finită.
- 5p** c) Să se rezolve ecuația $X^3 = A$, $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ și polinomul $f = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$.
- 5p** a) Să se arate că $f(1) + f(-1)$ este număr par.
- 5p** b) Să se arate că, dacă $f(2)$ și $f(3)$ sunt numere impare, atunci polinomul f nu are nicio rădăcină întreagă.
- 5p** c) Să se arate că polinomul $g = X^3 - X + 3a + 1$, $a \in \mathbb{Z}$, nu poate fi descompus în produs de două polinoame neconstante, cu coeficienți întregi.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x + x^3 - x^2 + x$.
- 5p** a) Să se arate că funcția f este strict crescătoare.
- 5p** b) Să se arate că funcția f este inversabilă.
- 5p** c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f^{-1}(x)}{\ln x}$.
2. Se consideră sirul $(I_n)_{n \geq 1}$, $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2 + 3x + 2} dx$.
- 5p** a) Să se calculeze I_1 .
- 5p** b) Să se arate că $I_{n+2} + 3I_{n+1} + 2I_n = \frac{1}{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
- 5p** c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n$.