Universitatea din Bucureşti, Facultatea de Matematică şi Informatică
Concursul de admitere iulie 2009, Domeniul de licenta - *Informatică*

I. Algebră 1. Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ din $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$.

a) Să se calculeze A^2 şi A^3.
b) Să se arate că A nu este inversabilă şi B este inversabilă. Să se calculeze B^{-1}.
c) Să se calculeze B^n, $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Fie A mulţimea numerelor complexe de forma $a + bi$, cu $a, b \in \mathbb{Z}$.
a) Să se arate că A este inel în raport cu adunarea şi înmulţirea numerelor complexe.
b) Să se determine elementele $u \in A$ cu $|\, u \,| = 1$.
c) Să se determine elementele $u \in A$ pentru care există $v \in A$ cu $uv = 1$.
d) Arătaţi că nu există $u \in A$ cu $|\, u \,|^2 = 100003$.

II. Analiză 1. Se consideră funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.
a) Să se studieze variaţia şi să se traseze graficul funcţiei precizând intervalele de convexitate.
b) Să se calculeze $\displaystyle\int_1^2 f(x)dx$.

2. Fie funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată astfel:

$$g(x) = \begin{cases} 3x - 2 & \text{dacă } x \leq 0 \\ 4x - 2 + \ln(x^2 - x + 1) & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$$

a) Să se studieze derivabilitatea funcţiei g pe $\mathbb{R}$.
b) Să se aplice teorema lui Lagrange funcţiei g pe intervalul $[-1, 1]$ şi să se găsească punctul intermediar din teorema lui Lagrange.

III. Geometrie 1. Fie ABC un triunghi echilateral, M un punct oarecare în interiorul triunghiului şi A_0, B_0, C_0 proiecţiile ortogonale ale lui M pe laturile $[BC]$, $[AC]$ respectiv $[AB]$.
a) Demonstraţi că valoarea sumei $MA_0 + MB_0 + MC_0$ este independentă de alegerea punctului M.
b) Demonstraţi egalităţile:

$$AB_0^2 + BC_0^2 + CA_0^2 = AC_0^2 + BA_0^2 + CB_0^2,$$
$$AB_0 + BC_0 + CA_0 = AC_0 + BA_0 + CB_0.$$

2. Într-un sistem cartezian xOy considerăm punctele $A(1, 3)$, $B(3, 4)$ şi $C(-2, 9)$.
a) Demonstraţi că triunghiul ABC este dreptunghic.
b) Calculaţi coordonatele centrului Q al cercului circumscris triunghiului ABC.
c) Calculaţi coordonatele punctului D pentru care $ABCD$ este paralelogram.
d) Pentru fiecare $m \in \mathbb{R}$ considerăm punctul $P_m(2m + 3, -3m + 4)$. Determinaţi m astfel încît distanţa P_mQ să fie minimă.

IV. Informatica Să se rezolve următoarele cerinţe într-unul dintre limbajele de programare studiate în liceu (Pascal/C/C++):
a) Dându-se două cuvinte reprezentate ca şiruri de caractere peste alfabetul $\{a, \ldots, z\}$ (litere mici, fără diacritice), să se verifice dacă unul dintre cuvinte este anagramă a celuilalt.
Un cuvânt este anagramă a altui cuvânt dacă este format din exact aceleaşi litere, aranjate într-o altă ordine. Exemplu: *caras* şi *scara*.
b) Dându-se o mulţime de n cuvinte peste alfabetul $\{a, \ldots, z\}$, să se verifice dacă printre elementele mulţimii date există anagrame.
c) Există o soluţie la punctul b) de complexitate timp $O(n \log n)$? Dacă da, daţi o astfel de soluţie.
Pentru fiecare soluţie se va preciza argumentat complexitatea timp a algoritmilor folosiţi şi se vor explica informal detaliile de implementare sub formă de program: variabile, structuri de date, structuri iterative, instrucţiuni condiţionale.

Timp de lucru: 3 ore.

Universitatea din Bucureşti, Facultatea de Matematică şi Informatică
Concursul de admitere iulie 2009, Domeniul de licenţă - *Matematică*

I. Algebră 1. Să se rezolve ecuaţiile:
a) $x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = 0$, unde $x \in \mathbb{C}$.
b) $4^x - 3 \cdot 2^x + 2 = 0$, unde $x \in \mathbb{R}$.
c) $x^2 + \widehat{2}x = \widehat{4}$, unde $x \in \mathbb{Z}_5$.
d) $\frac{1}{\sqrt{x-2}} = 2^{\sqrt{x-3}}$, unde $x \in [3, \infty)$.
e) $xy + y = 4$, unde $x, y \in \mathbb{Z}$.

2. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ din $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.
a) Să se determine matricele $X \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $AX = XA$.
b) Să se arate că mulţimea $\mathcal{M} = \{X \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \mid AX = XA\}$ este inel comutativ cu adunarea şi înmulţirea matricelor.

II. Analiză matematică 1. a) Determinaţi $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încît

$$\frac{2x+1}{x^2(x+1)^2} = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{(x+1)^2}, \quad \text{pentru} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}.$$

b) Arătaţi că şirul $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$ este convergent şi calculaţi limita sa.

2. Fie $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x\mathrm{arctg}x - \ln(1 + x^2)$, $x \in \mathbb{R}$.
a) Să se calculeze f'' şi să se arate că derivata funcţiei f este o funcţie crescătoare.
b) Să se stabilească monotonia şi punctele de extrem ale funcţiei f.
c) Să se rezolve inecuaţia $f(x) > 0$.
d) Să se traseze graficul funcţiei f.

III. Geometrie 1. Fie $ABCD$ un pătrat, $E \in [AC]$, $F \in [BC]$ astfel încît $[AE] \equiv [AB]$ şi $EF \perp AC$.
a) Demonstraţi că $[EC] \equiv [EF] \equiv [FB]$.
b) Determinaţi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ pentru care avem $\overrightarrow{AE} = \alpha \overrightarrow{AB} + \beta \overrightarrow{AD}$.

2. a) Determinaţi $m \in \mathbb{R}$ astfel ca distanţa dintre punctele $A(m, -1)$ şi $B(5, m + 1)$ să fie egală cu 5.
b) Arătaţi că punctele $M(-1, 2)$, $N(2, 5)$ şi $P(1, 3)$ nu sunt colineare şi scrieţi ecuaţia înălţimii din M a triunghiului MNP.
c) Fie vectorii $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ astfel încît să aibă loc relaţiile $|\vec{u}| = 3$, $|\vec{v}| = 4$ şi $\cos\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = \frac{1}{6}$. Calculaţi produsul scalar $(3\vec{u} - \vec{v}) \cdot (2\vec{u} + 4\vec{v})$.
d) Fie $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ pentru care $\sin\alpha = \frac{1}{5}$. Calculaţi $\cos 2\alpha$ şi $\sin 2\alpha$.

IV. Informatică Să se rezolve următoarele cerinţe într-unul dintre limbajele de programare studiate în liceu (Pascal/C/C++):
a) Să se scrie o procedură/funcţie care primeşte ca parametru un număr natural k, cuprins între 1 şi 100 şi returnează numărul de soluţii de forma (x, y), cu x, y numere naturale, ale ecuaţiei $x^2 - y^2 = k$.
b) Să se scrie o procedură/funcţie care primeşte ca parametru un număr natural k, cuprins între 1 şi 100 şi decide dacă numărul k poate fi scris ca sumă de numere impare consecutive.
Pentru fiecare soluţie se vor explica informal detaliile de implementare sub formă de program: variabile, structuri de date, structuri iterative, instrucţiuni condiţionale.