Universitatea din Bucureşti **17.07.2015**
Facultatea de Matematică şi Informatică

Concursul de admitere iulie 2015
Domeniul de licenţă – *Informatică*

I. Algebră. Fie numărul complex $z = 1 + 2i$.

(a) Să se calculeze $|1 + z|$ şi $|z^3|$.
(b) Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ numărul z^n este de forma $a_n + ib_n$ cu $a_n, b_n \in \mathbb{Z}$.
(c) Să se arate că $b_{n+2} - 2b_{n+1} + 5b_n = 0$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.
(d) Arătaţi că $z^n \notin \mathbb{R}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

II. Analiză. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{3x^2 - 2x^3}$ şi $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{dx}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

(a) Studiaţi derivabilitatea funcţiei f şi determinaţi punctele sale de extrem local.
(b) Fie $m \in (0, 1)$. Determinaţi numărul de soluţii reale distincte ale ecuaţiei $f(x) = m$.
(c) Fie $x_0 \in (0, 1)$ şi $x_{n+1} = f(x_n)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Arătaţi că $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent şi determinaţi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.
(d) Arătaţi că $I_1 - I_2 = \frac{1}{8}$.
(e) Arătaţi că şirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este descrescător şi demonstraţi că $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$.

III. Geometrie. Pe laturile AB şi AC ale triunghiului ABC cu $AB = 1$, $AC = 2$, $m(\widehat{BAC}) = 30°$, se construiesc, spre exterior, triunghiurile echilaterale ABM şi ACN.

(a) Calculaţi lungimile segmentelor BC şi MN.
(b) Fie D, E, F mijloacele segmentelor AM, AN şi BC. Arătaţi că triunghiul DEF este echilateral.
(c) Calculaţi $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM}$ şi $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AN}$, apoi determinaţi numerele x şi y pentru care are loc relaţia: $\overrightarrow{MN} = x\,\overrightarrow{AB} + y\,\overrightarrow{AC}$.

IV. Informatică. Se citesc numerele naturale nenule a, b, c, n, urmate de o secvenţă de n numere naturale distincte, notată cu s.

(a) Să se scrie un program care afişează toate perechile (x, y) cu proprietatea că x şi y sunt numere diferite din secvenţa s, care verifică ecuaţia $ax^2 + by^2 = c$.
Exemplu: Dacă programul citeşte la intrare 1 1 25 5 3 18 5 0 4, atunci afişează perechile (3,4) (4,3) (0,5) (5,0), nu neapărat în această ordine.
(b) Dacă secvenţa s citită la intrare este formată din numere în ordine crescătoare, să se scrie un program cât mai eficient care afişează numărul de perechi (x, y) cu proprietatea de la punctul (a). Să se calculeze complexitatea timp a soluţiei prezentate.
Exemplu: Dacă programul citeşte la intrare 1 1 25 5 0 3 4 5 18, atunci afişează 4.

Notă: Programele vor fi scrise într-unul dintre limbajele de programare studiate în liceu (Pascal,C,C++). Pentru fiecare soluţie se vor descrie informal detaliile algoritmului folosit şi ale implementării sub formă de program: semnificaţia variabilelor, a structurilor de date, a structurilor repetitive, a instrucţiunilor condiţionale.

Timp de lucru 3 ore.

Universitatea din Bucureşti **18.07.2015**
Facultatea de Matematică şi Informatică

Concursul de admitere iulie 2015
Domeniul de licenţă - *Matematică*

I. Algebră. Fie ecuaţia $(m+1)x^2-(2m+1)x-2m=0$, unde $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

(a) Determinaţi rădăcinile reale ale ecuaţiei pentru $m=1$.

(b) Determinaţi valorile parametrului m astfel încât ecuaţia să aibă toate rădăcinile reale.

(c) Determinaţi valorile parametrului m astfel încât $x_1^2+x_2^2=-8$, unde x_1, x_2 sunt rădăcinile complexe ale ecuaţiei.

(d) Să se determine toate valorile întregi ale lui m pentru care ambele rădăcini ale ecuaţiei sunt întregi.

II. Analiză. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1-e^{-x}}{x}, & \text{dacă } x<0 \\ a & \text{dacă } x=0 \\ \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{dacă } x>0 \end{cases}$, $a\in\mathbb{R}$ şi $I_n=\int\limits_1^2 \dfrac{f(x)}{x^n}\,\mathrm{dx}$, $\forall\, n\in\mathbb{N}$.

(a) Determinaţi a astfel încât funcţia f să fie continuă.

(b) Arătaţi că dacă funcţia f este continuă, atunci ea este şi derivabilă.

(c) Demonstraţi că $f(x)\in(0,1)$, $\forall\, x>0$.

(d) Arătaţi că $I_1=\dfrac{3}{2}\ln\dfrac{4}{3}$.

(e) Demonstraţi că şirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este descrescător şi că $\lim\limits_{n\to\infty} I_n=0$.

III. Geometrie. Considerăm paralelogramul $ABCD$.

(a) Fie E un punct cu proprietatea că $\overrightarrow{CE}=2\overrightarrow{DE}$ şi fie F un punct cu proprietatea că $\overrightarrow{AF}=-2\overrightarrow{BF}$. Determinaţi $x,y\in\mathbb{R}$ pentru care $\overrightarrow{EF}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$.

(b) Demonstraţi că $AC^2+BD^2=2(AB^2+AD^2)$.

(c) Presupunem că există un punct M pentru care $MA^2+MC^2=MB^2+MD^2$. Demonstraţi că, în acest caz, $ABCD$ este dreptunghi.

IV. Informatică.

(a) Să se arate că orice număr natural nenul se poate scrie în mod unic ca o sumă de puteri ale lui 2 care nu se repetă (exemplu: $77=2^0+2^2+2^3+2^6$).

(b) Numerele naturale de la 1 la 255 se codifică astfel:

- puterile lui 2 se reprezintă prin literele: $a=1$, $b=2$, $c=4$, $d=8$, $e=16$, $f=32$, $g=64$, $h=128$;
- orice alt număr din intervalul menţionat va fi reprezentat ca o combinaţie de aceste litere, aranjate în ordine alfabetică, în care orice literă apare cel mult o singură dată, astfel încât suma valorilor acestor litere să fie egală cu valoarea numărului (exemplu: $acdg=77$).

Să se scrie un program care, citind două şiruri de caractere ce reprezintă numere în convenţia de mai sus, să scrie, la ieşire, şirul ce reprezintă suma numerelor astfel reprezentate (exemplu: dacă la intrare programul primeşte şirurile *acdg* şi *ac* atunci, la ieşire, va scrie *beg*). Şirurile de intrare sunt alese astfel încât suma numerelor pe care le reprezintă să fie mai mică sau egală cu 255.

Este posibil ca programul să calculeze şirul de ieşire fără a transforma şirurile în numere? Dacă da, daţi o astfel de soluţie.

Notă: Programele vor fi scrise într-unul dintre limbajele de programare studiate în liceu (Pascal, C, C++). Pentru fiecare soluţie se vor descrie informal detaliile algoritmului folosit şi ale implementării sub formă de program: semnificaţia variabilelor, a structurilor de date, a structurilor repetitive, a instrucţiunilor condiţionale.

Timp de lucru 3 ore.

Universitatea din Bucureşti **17.07.2015**

Facultatea de Matematică şi Informatică

Concursul de admitere iulie 2015

Domeniul de licenţă - *Informatică*

Barem

I. Algebră. Oficiu .... 1 p

(a) $|1+z| = 2\sqrt{2}$ .... 1 p

$|z^3| = 5\sqrt{5}$ .... 1 p

(b) .... 3 p

(c) .... 3 p

(d) .... 1 p

II. Analiză. Oficiu .... 1 p

(a) Calculul lui $f'(x)$ pentru $x \neq 0$ şi $x \neq 3/2$ .... 1 p

f nu este derivabilă în 0 şi în 3/2 .... 1 p

$x = 0$ şi $x = 1$ sunt puncte de extrem local .... 1 p

(b) Pentru $m \in (0, 1)$ ecuaţia $f(x) = m$ are 3 soluţii reale .... 1 p

(c) Monotonia şi mărginirea .... 1 p

Determinarea limitei .... 1 p

(d) Calculul integralei .... 1 p

(e) Monotonia .... 1 p

Calculul limitei .... 1 p

III. Geometrie. Oficiu .... 1 p

(a) $BC = \sqrt{5 - 2\sqrt{3}}$ .... 2 p

$MN = \sqrt{5 + 2\sqrt{3}}$ .... 2 p

(b) .... 3 p

(c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}$, $\quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AN} = 0$ .... 1 p

$x = -2 - 2\sqrt{3}$, $\quad y = 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}$ .... 1 p

IV. Informatică. Oficiu .... 1 p

(a) Afişarea a cel puţin unei perechi (dacă există) cu proprietatea din enunţ .... 1 p

Afişarea doar a unor perechi cu proprietatea din enunţ .... 1 p

Afişarea tuturor perechilor cu proprietatea din enunţ .... 1 p

(b) Afişarea corectă a numărului de soluţii, indiferent de complexitate .... 1 p

Afişarea corectă a numărului de soluţii în timp cel mult $O(n \log n)$ .... 1 p

Afişarea corectă a numărului de soluţii în timp cel mult $O(n)$ .... 1 p

Calculul corect al complexităţii timp .... 1 p

Programele nu au greşeli de limbaj .... 1 p

Claritatea rezolvărilor .... 1 p