

**I. Algebra** 1. Se dă sistemul de ecuații lineare

$$\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2, \end{cases}$$

unde  $m$  este un parametru real.

a) Să se arate că determinantul matricei sistemului este egal cu  $(m-1)^2(m+2)$ .

b) Să se discute și să se rezolve sistemul în funcție de valorile lui  $m$ .

2. Definim pe  $\mathbb{R}$  legea de compoziție  $*$  prin  $x * y = xy - 2x - 2y + 6$  pentru orice  $x, y \in \mathbb{R}$ .

Fie  $G = (2, \infty)$ . Să se arate că:

a)  $x * y = (x-2)(y-2) + 2$  pentru orice  $x, y \in \mathbb{R}$ . Deduceți că  $G$  este parte stabilă în raport cu  $*$ .

b)  $(G, *)$  este grup comutativ.

c) Funcția  $f: G \rightarrow (0, \infty)$ ,  $f(x) = x - 2$ , este izomorfism între grupul  $(G, *)$  și grupul multiplicativ  $((0, \infty), \cdot)$ .

**II. Analiza** 1. Fie șirul  $(x_n)_n$  de numere reale  $x_n = 2 + (-1)^n \frac{1}{n}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Să se studieze:

a) monotonia șirului  $(x_n)_n$ ;

b) mărginirea șirului  $(x_n)_n$ ;

c) convergența șirului  $(x_n)_n$ .

2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{dacă } x \leq 0 \\ x^2 e^{-x} & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$$

a) Să se studieze continuitatea și derivabilitatea funcției  $f$ .

b) Să se determine asimptotele graficului funcției  $f$ .

c) Să se traseze graficul funcției  $f$ .

**III. Geometrie** 1. Fie  $ABCD$  un paralelogram în care  $BD = AD$ . Fie  $M$  mijlocul laturii  $CD$  și  $E$  un punct pe dreapta  $BM$ , astfel încât  $BM = ME$ . Să se arate că:

a)  $BM \perp CD$ ;

b) punctele  $A$ ,  $D$  și  $E$  sunt colineare;

c)  $AD = DE$ .

2. Fie  $ABCD$  un pătrat de latură 1.

a) Dacă  $P$  este un punct interior pătratului, să se arate că suma ariilor triunghiurilor  $PAB$  și  $PCD$  este jumătate din aria pătratului.

b) Să se determine punctele  $O$  din interiorul pătratului, cu proprietatea că ariile triunghiurilor  $OAB$ ,  $OBC$ ,  $OCD$ ,  $ODA$  sunt proporționale cu numerele 1, 2, 4 și 3 respectiv.

**IV. Informatica** Se dă un vector de dimensiune  $n$ ,  $n \geq 1$  dat, cu valori nenegative, care se citesc de la tastatură. Să se scrie un program, într-unul din limbajele de programare studiate în liceu (Pascal/C/C++), care listează secvența de lungime maximă de elemente din vectorul dat ce se obține conform algoritmului următor de vizitare a vectorului:

1. Se vizitează primul element al vectorului.

2. Următorul element vizitat se obține prin deplasarea spre dreapta cu un număr de poziții nevizitate egal cu valoarea ultimului element vizitat. Dacă în deplasarea spre dreapta se atinge capătul vectorului, deplasarea continuă cu primul element nevizitat din stânga vectorului.

Se vor explica informal detaliile de implementare a algoritmului sub formă de program: variabile, structuri de date, structuri iterative, instrucțiuni condiționale.

**I. Algebra** 1. Fie matricea  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ .

- a) Să se arate că  $A^2 = 3A - 2I_2$ , unde  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .
- b) Să se arate că  $A$  este inversabilă și să se calculeze  $A^{-1}$ .
- c) Să se calculeze  $A^n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .
- d) Să se determine matricele  $X \in M_2(\mathbb{R})$  astfel încât  $X^2 = A$ .

2. Pentru orice  $n \in \mathbb{Z}$  considerăm funcția  $f_n : (2, \infty) \rightarrow (2, \infty)$ ,  $f_n(x) = 2 + (x - 2)^{2^n}$ . Să se arate că:
- a)  $f_m \circ f_n = f_{m+n}$  pentru orice  $m, n \in \mathbb{Z}$ .
  - b) Mulțimea  $G = \{f_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$  împreună cu operația de compunere a funcțiilor este grup comutativ.
  - c) Grupul  $(G, \circ)$  este izomorf cu grupul aditiv  $(\mathbb{Z}, +)$  al numerelor întregi.

**II. Analiza** 1. Se consideră funcția  $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ .

- a) Să se calculeze  $f'$ .
- b) Să se afle maximumul funcției  $f$ .
- c) Să se studieze monotonia șirului  $(x_n)_{n \geq 3}$ ,  $x_n = n^{\frac{1}{n}}$ .

2. Se consideră funcția  $g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \in [-1, 0] \\ \sin x, & x \in (0, 1]. \end{cases}$$

- a) Să se studieze continuitatea funcției  $g$ .
- b) Să se studieze derivabilitatea funcției  $g$ .
- c) Să se arate că funcția  $g$  admite primitive, să se afle o primitivă a ei și să se calculeze  $\int_{-1}^1 g(x) dx$ .

**III. Geometrie** 1. Fie  $\mathcal{C}(O, R)$  un cerc fixat de centru  $O$  și rază  $R$  și două cercuri variabile  $\mathcal{C}(O_1, R_1)$  și  $\mathcal{C}(O_2, R_2)$ , tangente exterior între ele și ambele tangente interior cercului fixat.

Să se arate că triunghiul  $OO_1O_2$  are perimetru constant.

2. În planul  $xOy$ , se consideră ecuația  $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$ .

- a) Să se arate că această ecuație reprezintă un cerc căruia să i se determine raza și coordonatele centrului.
- b) Să se arate că dreapta de ecuație  $12x - 5y + 19 = 0$  este tangentă la cerc și să se determine coordonatele punctului de tangență.
- c) Să se scrie ecuațiile laturilor pătratului circumscris cercului, în care una dintre laturi este pe dreapta de la punctul b).

**IV. Informatica** 1. Se numește subsecvență a unui vector  $V$  cu  $n$  elemente întregi un vector cu cel puțin un element și cel mult  $n$  elemente care se găsesc pe poziții consecutive în vectorul  $V$ . Să se scrie un program în *Pascal/C/C++* care citește de la tastatură numărul natural  $n$  și vectorul  $V$  având  $n$  elemente întregi și afișează subsecvența lui  $V$  având suma elementelor maximă.

2. Se citesc de la tastatură numărul natural  $n$  și șirul de numere naturale  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Să se scrie un program în *Pascal/C/C++* care afișează indicii  $i$  și  $j$  care îndeplinesc simultan următoarele condiții:

- a)  $1 \leq i < j \leq n$ ;
- b)  $a_i > a_k$  și  $a_j > a_k$ , pentru orice  $k$ ,  $i + 1 \leq k \leq j - 1$ ;
- c) diferența  $j - i$  este maximă.

3. Să se calculeze complexitatea timp a programelor propuse pentru problemele de mai sus. În cazul în care nici una dintre soluțiile propuse nu are complexitatea liniară, să se scrie un program în *Pascal/C/C++* de complexitate timp liniară pentru una din cele doua probleme de mai sus, la alegere.

Precizări: Pentru toate problemele de mai se presupune că datele sunt valide, și  $3 \leq n \leq 1000$ . Se vor descrie informal detaliile implementării oricărui program: semnificația variabilelor, a structurilor de date, a blocurilor de program, a condițiilor.

**Timp de lucru: 3 ore.**