Universitatea din Bucureşti,
Facultatea de Matematică şi Informatică

Concursul de admitere septembrie 2009,
Domeniul de licenţă - *Informatică*

I. Algebră

1. Să se determine $m \in \mathbf{R}$ pentru care ecuaţia $x^3+x^2+mx-3=0$ are rădăcina $x_1=1$. Să se arate că pentru această valoare a lui m celelalte două rădăcini x_2 şi x_3 ale ecuaţiei nu sunt reale şi că $x_1^n+x_2^n+x_3^n \in \mathbf{R}$ pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$.

2. Fie sistemul

$$\begin{cases} x+y+mz=0 \\ x-y+(m-2)z=2 \\ x+2y+3z=n, \end{cases}$$

unde m şi n sunt parametri reali.
a) Să se calculeze determinantul matricei sistemului.
b) Să se determine m şi n pentru care sistemul este compatibil determinat.
c) Să se rezolve sistemul dacă $m=2$ şi $n=-1$.

II. Analiză

1. Fie funcţia $f:(-1,\infty)\to\mathbf{R}$ cu

$$f(x)=\frac{e^x}{x+1}.$$

a) Studiaţi monotonia funcţiei f şi determinaţi punctul de extrem local.
b) Arătaţi că $e^{x^2} \geq x^2+1$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$.
c) Calculaţi $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x)\cdot \ln|x|$.

2. Fie $n \in \mathbf{N}^*$ şi $I_n = \displaystyle\int_0^1 (x^n+1)e^x dx$.
a) Să se calculeze I_1 şi I_2.
b) Să se arate că $I_{n+1}=(n+3)e-(n+2)-(n+1)I_n$, pentru orice număr natural $n \geq 1$.

III. Geometrie

1. Să se calculeze aria unui paralelogram $ABCD$ cu $AB=10$, $AD=6$ şi $m(\widehat{BAD})=30^0$.

2. Să se determine $m \in \mathbf{R}$ astfel încât punctele $A(3,3)$, $B(2,4)$ şi $C(2m,1-m)$ să fie coliniare.

3. Fie vectorii $\vec{u}=(2m-1)\,\vec{i}+m\,\vec{j}$ şi $\vec{v}=2\,\vec{i}+(m-3)\,\vec{j}$. Să se calculeze $\vec{u}\cdot\vec{v}$. Să se determine $m \in \mathbf{R}$ pentru care vectorii $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ sunt perpendiculari.

4. Fie $a,b \in \mathbf{R}$ astfel încât $\sin a+\sin b=1$ şi $\cos a+\cos b=\frac{1}{2}$. Să se calculeze $\cos(a-b)$.

IV. Informatică

Se citesc următoarele date:

- n număr natural $n \geq 1$.
- k număr natural $k \geq 1$.
- un vector de dimensiune n cu elemente numere întregi.

Se elimină elementele vectorului din k în k începând cu poziţia 1 până când vectorul conţine un singur element. Când numărătoarea ajunge la sfârşitul vectorului, se continuă cu primul element al său. Să se afişeze poziţia în vectorul dat a unicului element rămas după eliminare.

Notă: Cerinţa va fi rezolvată într-unul dintre limbajele de programare studiate în liceu (Pascal/C/C++). Se vor preciza informal complexitatea timp a soluţiei date şi detaliile de implementare sub formă de program: variabile, structuri de date, structuri iterative, instrucţiuni condiţionale.

Timp de lucru 3 ore.

Universitatea din Bucureşti,
Facultatea de Matematică şi Informatică

Concursul de admitere septembrie 2009,
Domeniul de licenţă - *Matematică*

I. Algebră

1. Să se rezolve în $\mathbf{R}$ ecuaţiile:

a) $x^3 - 2x^2 - 2x + 1 = 0$.

b) $2^{2x+1} - 3 \cdot 2^x + 1 = 0$;

c) $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 0$.

2. Fie mulţimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbf{Q} \right\}$. Să se arate că:

a) G este parte stabilă în $\mathrm{M}_2(\mathbf{Q})$ în raport cu operaţia de înmulţire a matricelor.

b) $(G, \cdot)$ este grup abelian.

c) Grupul $(G, \cdot)$ este izomorf cu grupul aditiv $(\mathbf{Q}, +)$.

II. Analiză

1. Fie $a, b \in \mathbf{R}$ şi funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ cu

$$f(x) = \begin{cases} x + \sqrt{x^2 - 1} & \text{pentru } x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty) \\ ax + b & \text{pentru } x \in (-1, 1). \end{cases}$$

a) Determinaţi a şi b astfel încât funcţia f să fie continuă.

b) Determinaţi ecuaţiile asimptotelor la graficul funcţiei f.

2. Fie funcţiile $f, g : (0, \infty) \to \mathbf{R}$ cu $f(x) = x^2 + x \ln x$ şi $g(x) = 2x + 1 + \ln x$.

a) Să se arate că funcţia f este o primitivă a funcţiei g.

b) Să se calculeze $\int\limits_e^{e^2} g(x)dx$.

c) Să se calculeze $\int\limits_1^{e} f(x)g(x)dx$.

III. Geometrie

1. Să se determine $x > 0$ pentru care $x, x + 7, x + 8$ sunt lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic.

2. Se consideră vectorii $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j}$ şi $\vec{v} = 2\,\vec{i} + 4\,\vec{j}$. Să se calculeze modulul vectorului $\vec{u} + \vec{v}$.

3. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2, -1)$ şi $B(-2, a)$, $a \in \mathbf{R}$. Să se determine $a \in \mathbf{R}$ astfel încât dreapta AB să conţină punctul $O(0, 0)$.

4. Fie $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ pentru care $\sin \alpha = \frac{1}{3}$. Să se calculeze $\cos(\alpha + \frac{\pi}{3})$.

5. Se consideră punctele $A(2, 3)$, $B(4, n)$, $C(2, 2)$ şi $D(m, 5)$. Să se determine $m, n \in \mathbf{R}$ astfel încât patrulaterul $ABCD$ să fie paralelogram.

IV. Informatică

Se citesc de la tastatură două numere naturale a şi b mai mici ca 30000. Să se determine şi să se afişeze numărul de zerouri în care se termină produsul $a \cdot b$, fără a efectua produsul.

Notă: Cerinţa va fi rezolvată într-unul dintre limbajele de programare studiate în liceu (Pascal/C/C++). Se vor explica informal detaliile de implementare sub formă de program: variabile, structuri de date, structuri iterative, instrucţiuni condiţionale.

Timp de lucru 3 ore.