TESTUL nr. 3

1. Să se raționalizeze numitorul fracției $\dfrac{1}{2-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6}}$

a) $\sqrt{3}+2\sqrt{2}$; b) $\sqrt{3}+2$; c) $-\left(2+\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)$;

d) $2-\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{6}$; e) $2+\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{6}$; f) $2-\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{6}$.

2. Să se afle $k \in \mathbb{R}$ astfel încât pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ să aibă loc inegalitatea: $x^2 - xy + 2y^2 + x - 2y + h > 0$

a) $h \in (4, \infty)$; b) $h \in (0, 4)$; c) $h \in \left(\dfrac{1}{7}, \infty\right)$;

d) $h \in \left(\dfrac{4}{7}, \infty\right)$; e) $h \in \left[\dfrac{4}{7}, \infty\right)$; f) $h \in [7, \infty)$.

3. Să se rezolve inecuația $\log_{1/2}\left(5-2^x\right) > 2 - x$.

a) $x > \ln 5$; b) $2 < x < \dfrac{\ln 5}{\ln 2}$; c) $\ln 2 < x < 2$;

d) $\ln 5 < x < 2$; e) $x > \ln 2$; f) nici un răspuns din cele anterioare nu este corect.

4. Să se aducă la forma cea mai simplă expresia $E = \dfrac{C_n^k}{C_n^k + C_n^{k+1}}$

unde $1 < k < n$.

a) $\dfrac{k+1}{n+1}$; b) $\dfrac{k}{n+1}$; c) $\dfrac{k(k+1)}{n(n+1)}$;

d) $\dfrac{k+1}{n(n+1)}$; e) $\dfrac{k}{n(n+1)}$; f) $\dfrac{2k+1}{n+1}$.

5. Pentru ce valori ale parametrului real m ecuația $x^4 - mx^3 + mx - 1 = 0$ are toate rădăcinile reale?

a) $m \in [0, \infty)$; b) $m \in (2, \infty)$; c) $m \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$;

d) $m \in (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$; e) $m \in (-\infty, -2) \cup [1, \infty)$; f) $m \in [1, \infty)$.

6. Să se determine cel mai mare divizor comun al polinoamelor $P(X) = (X-1)^4 (X+1)^2 (X-3)(X+4)$ și $Q(X) = (X-1)(X+1)(X+4)^2$:

a) $(X-1)(X+4)(X+1)$; b) $(X-1)^4 (X+1)^2 (X+4)^2$;

c) $(X-1)(X+4)$; d) $(X-1)^4 (X+1)^2$;

e) $X-3$; f) $(X-1)^3 (X+1)(X+4)$.

7. Să se determine toate polinoamele $f \in \mathbb{R}[X]$ de gradul al doilea care verifică condiția: $f(X^2) = f^2(X)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

a) X^2-1; b) X^2+X; c) X^2+X-1; d) X^2+2X; e) X^2; f) $-X^2$.

8. Să se afle matricea $(A+B)^2$ dacă $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

a) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 11 & -4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 10 & -3 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

9. Să se găsească valorile parametrului real α pentru care sistemul liniar și omogen $\begin{cases} x - \alpha y + z = 0 \\ \alpha x + y - 2z = 0 \\ 3x + y + 3z = 0 \end{cases}$ admite și alte soluții în afară de soluția banală.

a) $\alpha = 2$; b) $\alpha = -\frac{1}{3}$; c) $\alpha = \frac{1}{2}$ și $\alpha = -\frac{1}{3}$;

d) $\alpha = -\frac{1}{2}$ și $\alpha = -\frac{1}{3}$; e) $\alpha = -2$ și $\alpha = -\frac{1}{3}$; f) $\alpha = 2$ și $\alpha = -\frac{1}{3}$.

10. Se consideră șirul de funcții $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definit prin relația de recurență: $f_n(x) = f_{n-1}\left(x + \frac{1}{2}\right) - f_{n-1}(x)$ cu $f_1(x) = e^x$. Să se determine termenul general $f_n(x)$ al șirului.

a) e^x; b) $(e^x-1)^n$; c) $e^x\left(\sqrt{e}-1\right)^{n-1}$;
d) $e^x(e-1)^{n-1}$; e) $\left(\sqrt{e}-1\right)^n e^x$; f) $\left(\sqrt{e}-1\right)^n$.

11. Se cere să se afle mulţimea în care funcţia $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}$ este derivabilă.

a) $(1,\infty)$; b) $(1,10)\cup(10,\infty)$; c) $(1,4)\cup(4,\infty)$;
d) $(4,\infty)$; e) $(10,\infty)$; f) $(1,4]$.

12. Să se afle $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{(x+1)(x+2)(x+3)}-x\right)$:

a) 2; b) ∞; c) 0; d) 1; e) $1/2$; f) $\frac{1}{3}$.

13. Să se determine toate asimptotele la graficul funcţiei $f(x)=x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$, $x\in(-\infty,-1)\cup(0,\infty)$.

a) $y=0$ şi $y=-1$; b) $x=-1$ şi $y=\frac{1}{2}$; c) $x=0$ şi $y=1$;
d) $y=2$; e) $x=-1$ şi $x=0$; f) $y=\frac{1}{2}$.

14. Să se determine mulţimea punctelor pe care funcţia $f(x)=x\ln(-x)$, $x<0$ este strict descrescătoare.

a) $\left(-\frac{1}{e},0\right)$; b) $(-e,0)$; c) $\left(-\infty,-\frac{1}{e}\right)$;
d) $(-\infty,-e)$; e) $(-\infty,-1)$; f) $(-1,0)$.

15. Fie $f(x)=\frac{1}{x}$, $x\neq 0$. Să se determine suma infinită

$$S=1+f(n)-\frac{1}{1}f'(n)+\frac{1}{2!}f''(n)-\ldots+\frac{(-1)^k}{k!}f^{(k)}(n)+\ldots$$

a) $\frac{2}{n-1}$; b) $\frac{1}{n-1}$; c) $\frac{n}{n-1}$;
d) $\frac{2}{n}$; e) $\frac{1}{n(n-1)}$; f) $\frac{n-1}{n}$.

16. Să se determine punctele intermediare ce apar în teorema lui Lagrange pentru funcţia $f(x)=\begin{cases} x^2-x, & x\in[0,1) \\ \ln x, & x\in[1,e] \end{cases}$.

a) $\frac{1}{2e}$; b) $\frac{1}{e}$ şi $\sqrt{e}$; c) $\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{e}\right)$;

d) $\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right)$; e) $\frac{e}{\sqrt{2}}$; f) $\frac{e}{2}$ şi $\frac{1}{e}$.

17. Să se afle valoarea integralei $\int_0^{\pi/2} x\sin^2 x\,dx$:

a) $\frac{\pi^2+4}{16}$; b) $\frac{\pi^2+4}{8}$; c) $\frac{\pi^2}{8}$;

d) $\frac{\pi^2+2}{16}$; e) $\frac{\pi^2+2}{8}$; f) $\frac{2\pi^2+1}{8}$.

18. Folosind definiţia integralei definite să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\ldots+\frac{1}{(n+n)^2}\right].$$

a) 1; b) $\frac{1}{2}$; c) $\frac{3}{2}$; d) $\frac{2}{3}$; e) $\frac{1}{3}$; f) $\frac{1}{4}$.