FACULTATEA DE MATEMATICĂ

Str. Academiei nr. 14, tel. 314.35.08

Probe de concurs – pentru toate specializările – la alegere două din patru materii propuse:

- Algebră,
- Elemente de analiză matematică,
- Geometrie şi Trigonometrie,
- Informatică.

Concurenţa în anii anteriori (toate specializările):

- 2007 – 1,82 candidaţi/loc (matematică); 5,73 candidaţi/loc (informatică)
- 2006 – 2,41 candidaţi/loc (matematică); 6,456 candidaţi/loc (informatică)
- 2005 – 4,615 candidaţi/loc
- 2004 – 3,04 candidaţi/loc
- 2003 – 3,29 candidaţi/loc
- 2002 – 3,24 candidaţi/loc
- 2001 – 1,04 candidaţi/loc
- 2000 – 1,12 candidaţi/loc

Domeniul de licenţă „Matematică“

Prima medie/ultima medie:

- 2007 – 9,96/5,22 (buget); 10,00/5,39 (taxă)
- 2006 – 9,97/5,05 (buget); 10,00/6,51 (taxă)
- 2005 – 9,97/5,08 (buget); 9,92/6,05 (taxă); 10,00/7,37 (ID)
- 2004 – 9,93/8,83 (prima sesiune – zi);7,48 (prima sesiune – taxă); 9,23/6,78 (a doua sesiune)
- 2003 – 9,87/6,66 (zi); 9,42/6,50 (taxă)
- 2002 – 9,63/8,24
- 2001 – 9,77/5,03
- 2000 – 9,35/5,00

Domeniul de licenţă „Matematică-Mecanică“

Prima medie/ultima medie:

- 2004 (nu mai există)
- 2003 – 9,87/6,66 (zi); 9,42/6,50 (taxă)
- 2002 – 8,92/8,19
- 2001 – 8,36/5,50
- 2000 – 7,04/5,40

Domeniul de licenţă „Informatică“

Prima medie/ultima medie:

- 2007 – 9,98/8,03 (buget); 9,75/5,13 (taxă); 10,00 / 7,00 (ID)
- 2006 – 10,00/7,35 (buget); 9,84/5,13 (taxă)
- 2005 – 10,00/5,74 (buget); 9,62/5,00 (taxă); 9,70/7,00 (ID)
- 2004 – 9,99/9,5 (prima sesiune – zi); 8,98/5,36 (prima sesiune – taxă); 9,87/5,28 (a doua sesiune)
- 2003 – 9,61/7,54 (zi); 7,52/5,25 (taxă)
- 2002 – 9,98/9,17
- 2001 – 9,86/8,74
- 2000 – 9,07/7,12

Domeniul de licenţă „Matematică-Informatică“

Prima medie/ultima medie:

- 2004 – 10/9,05 (prima sesiune – zi); 9,61/7,93 (prima sesiune – taxă); 9,28/5,57 (a doua sesiune)
- 2003 – 9,76/7,02 (zi); 8,39/5,90 (taxă)
- 2002 – 9,97/8,93
- 2001 – 9,98/8,41
- 2000 – 9,14/6,94

Domeniul de licenţă „Matematici aplicate“

Prima medie/ultima medie:

- 2004 (nu mai există)
- 2003 – 9,87/6,66 (zi); 9,42/6,50 (taxă)
- 2002 – 9,10/8,23

Domeniu de licență MATEMATICĂ

I.1. Fie polinomul cu coeficienți reali $f = x^4 - 4x^3 + ax^2 + bx + c$.

a) Să se determine a, b *şi* c astfel încât restul împărțirii lui f la $x-1$ să fie -2, iar polinomul f să aibă rădăcina $1+i$.

b) Pentru valorile lui a, b *şi* c de la punctul a), să se afle rădăcinile polinomului.

2. Fie mulțimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \; n \in Z \right\}$.

Să se arate că:

a) G împreună cu înmulțirea matricelor este grup comutativ.

b) Grupul aditiv $(Z,+)$ este izomorf cu grupul G de la punctul a).

II.1. Fie a *şi* b două numere reale. Se defineşte funcția $f : R \to R$, prin

$$f(x) = \begin{cases} ax^3 + b, \; dacă \; x < 0 \\ \dfrac{a+b-1}{2}, \; dacă \; x = 0 \\ bx + a - 1, \; dacă \; x > 0 \end{cases}.$$

a) Să se arate că f este continuă dacă şi numai dacă $b = a - 1$.

b) Să se arate că f este derivabilă dacă şi numai dacă $a = 1$ *şi* $b = 0$.

2. Se consideră funcțiile $u : [-1, 1] \to R$, dată prin $u(x) = x^2 - x + 1$ şi $v : [-1, 1] \to R$, dată prin $v(x) = 1$. Se defineşte funcția $f : [-1, 1] \to R$ prin $f(x) = \max\,(u(x), v(x))$.

a) Să se arate că f este continuă.

b) Să se calculeze $\int_{-1}^{1} f(x)dx$.

III.1. Două cercuri $C(o_1, r_1)$ şi $C(o_2, r_2)$ sunt tangente exterior. Să se determine lungimea tangentelor exterioare.

2. Fie $ABCD$ un pătrat circumscris unui cerc de rază 1. Să se arate că, pentru orice punct P situat pe cerc, are loc relația $PA^2 \cdot PC^2 + PB^2 \cdot PD^2 = 10$.

IV.1. Fiecărui număr natural strict pozitiv K îi asociem valoarea impar (K) care reprezintă cel mai mare divizor impar al lui K. Pentru numerele naturale strict pozitive $a_1, a_2, ..., a_n$ date, se cere să se tipărească:

a) Valoarea impar (a_1).

b) Valoarea 1, respectiv 0, după cum numerele impar (a_1), impar (a_2), ..., impar (a_n) sunt sau nu în ordine crescătoare.

c) Numerele $a_1, a_2, ..., a_n$, în ordinea crescătoare a valorilor ataşate lor prin funcția impar.

2. Se dau n puncte în plan, prin coordonatele lor reale (x_i, y_i), $i = 1, 2, ..., n)$. Se cere să se tipărească:

a) Raza minimă a discului centrat în (x_1, y_1), care conține toate celelalte $n-1$ puncte.

b) Coordonatele centrului şi raza discului de rată minimă centrat într-unul din puncte şi care le conține pe toate celelate.

Pentru cel puțin unul dintre subpuncte se va scrie codul în Pascal, C sau C++, pentru celelalte fiind suficient ca soluția să fie redactată în pseudocod.

Timp de lucru: 3 ore.

Barem de coreactare:

Algebră (I)

I. Oficiu...1 p

1.a) Restul împărțirii lui f la $x-1$ este -2, $a+b+c=1$..1 p

Relațiile care se obțin din faptul că $1+i$ este rădăcină a lui f ....2 p

$a=5, b=-2, c=-2$ ....1 p

b) rădăcinile sunt: $1\pm i, 1\pm\sqrt{2}$ ....1 p

2.a) parte stabilă...0,5 p

asociativitate...0,5 p

comutativitate...0,5 p

element neutru I_2 ....0,5 p

element simetric $\begin{pmatrix}1 & n\\0 & 1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -n\\0 & 1\end{pmatrix}$ ....0,5 p

b) $f:\mathbb{Z}\to G,\quad f(n)=\begin{pmatrix}1 & n\\0 & 1\end{pmatrix}$..0,5 p

f morfism...0,5 p

f bijecție...0,5 p

Total 10 p

Proba scrisă la Analiză matematică

I. Oficiu...1 p

1.a) continuitatea în $x\neq 0$ ....0,5 p

$b=a-1\Rightarrow f$ continuă în 0 ....1 p

f continuă în $0\Rightarrow b=a-1$ ....1 p

b) derivabilitatea în $x\neq 0$ ....0,5 p

$a=1$ şi $b=0\Rightarrow f$ derivabilă în 0 ....1 p

f derivabilă în $0\Rightarrow a=1$ şi $b=0$ ....1 p

2. explicitarea funcției f ....2 p

a) ....1 p

b) ....1 p

Total 10 p

Geometrie (III)

I. Oficiu...1 p

1.

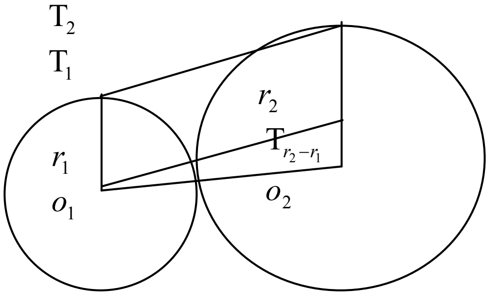

Figura..1 p

Construcția lui O_1T ....1 p

$T_1,T_2=O_1T$ ....1 p

$O_1T=\sqrt{(r_1+r_2)^2-(r_2-r_1)^2}=2\sqrt{r_1r_2}$ ....1 p

2. Figura...1 p

Ecuația cercului..1 p

Finalizare...3 p

Total 10 p

Informatică (IV)
I. Oficiu..1 p
1.a) ....1 p
b) ....1 p
c) ....2 p
2.a) ....1 p
b) ....2 p
Cunoştinţe programare...2 p
Total 10 p

Domeniul de licenţă INFORMATICĂ

I.1. Fie ecuaţia $x^3 - x^2 + 5x + 2 = 0$, cu rădăcinile x_1, x_2, x_3. Să se calculeze:

a) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ şi $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4$.

b) Determinantul $\begin{vmatrix} x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$.

2. Fie mulţimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in Q,\ a^2 + b^2 = 1 \right\}$.

Să se arate că:

a) G împreună cu înmulţirea matricelor este grup comutativ.

b) Dacă $a, b \in Q$ şi $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, atunci $A \in G$ dacă şi numai dacă există $r \in Q$ astfel încât $a = \dfrac{2r}{1+r^2}$ şi $b = \dfrac{1-r^2}{1+r^2}$.

c) Grupul G are o infinitate de elemente.

II.1. Pentru $a > 0$, considerăm şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ descris astfel: $x_1 = a$ şi $x_{n+1} = x_n^2 + x_n$, pentru orice $n \geq 1$.

a) Să se arate că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este crescător.

b) Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

c) Să se arate că $\dfrac{1}{1+x_k} = \dfrac{1}{x_k} - \dfrac{1}{x_{k+1}}$, pentru orice $k \geq 1$.

d) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{1+x_k}$.

2.a) Să se arate că $1 \leq \sin x + \cos x \leq \sqrt{2}$, pentru orice $x \in \left[o, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2^n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)^n \, dx$.

III.1. Fie ABC un triunghi echilateral înscris într-un cerc. Să se arate că, pentru orice punct $M \in \hat{BC}$, avem $MA = MB + MC$.

2. Fie $ABCD$ un pătrat de latură 2. Să se determine punctele P din interiorul său de pe laturile pătratului, cu proprietatea că suma $PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2$ este maximă şi, respectiv, minimă.

IV.1. Se consideră segmentele închise $[a_i, b_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$ cu extremităţile numere întregi.

a) Să se tipărească valoarea 1, respectiv 0, după cum intersecţia $[a_1, b_1] \cap [a_2, b_2]$ este sau nu vidă.

b) Să se tipărească valoarea 1, respectiv 0, după cum intersecţia celor n segmente este sau nu vidă.

c) În ipoteza că intersecţia segmentelor este nevidă, să se tipărească extremităţile segmentului care constituie reuniunea celor n segmente.

2. Un arbore cu vârfurile etichetate cu $1, 2, \ldots, n$ este bine determinat de tabloul TATA cu n elemente, unde $\mathrm{TATA}(i)$ reprezintă vârful care are printre descendenți vârful i sau este 0, dacă i este rădăcina arborelui. Se cer următoarele:

a) Dat fiind un tablou TATA, asociat unui arbore, să se determine frunzele arborelui; pentru fiecare frunză, să se determine drumul de la ea la rădăcină şi drumul de la rădăcină la ea.

b) Pentru un tablou dat TATA ale cărui elemente aparțin mulțimii $\{0, 1, \ldots, n\}$, să se determine dacă există un arbore al cărui tablou asociat este tocmai TATA.

Pentru cel puțin unul dintre subpuncte, se va scrie codul în Pascal, C sau C++, pentru celelalte fiind suficient ca soluția să fie redactată în pseudocod.

Timp de lucru: 3 ore.

Barem de coreactare:

Algebră

I. Oficiu..1 p

1.a) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -9$ ....1 p

$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 23$ ....1 p

b) Dezvoltarea determinantului în funcție de x_1, x_2, x_3 ....1 p

Determinantul este -25 ....1 p

2.a) parte stabilă..1 p

asociativitate..0,5 p

comutativitate..0,5 p

element neutru I_2 ....0,5 p

element simetric $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ ....0,5 p

b) „$\Rightarrow$”..1 p

„$\Leftarrow$”..0,5 p

c) G are o infinitate de elemente (de exemplu, scriem $b = 1 - \dfrac{2}{1 + r^2}$ ....0,5 p

Total 10 p

Analiză matematică

I. Oficiu..1 p

1.a) ....1 p

b) ....1 p

c) ....1 p

d) ....1 p

2.a) ....3 p

b) ....2 p

Total 10 p

Geometrie

I. Oficiu..1 p

1.

Soluția I-a

Figura..1 p