Universitatea din Bucuresti, Facultatea de Matematică şi Informatică
Concursul de admitere, iulie 2011. Domeniul de licenţă - *Informatică*

I. Algebră 1. (a) Fie $n \geq 1$ un număr natural. Să se demonstreze că suma cuburilor primelor n numere naturale nenule este $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$.
(b) Să se determine numerele naturale $x_1 < x_2 < \ldots < x_{10}$ pentru care $x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_{10}^3 = 2025$.

2. Fie matricea $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, cu $a, b \in \mathbf{R}$.
(i) Să se calculeze X^2.
(ii) Să se arate că X este inversabilă în $M_2(\mathbf{R})$ dacă şi numai dacă $a + b \neq 0$.
(iii) Să se determine a şi b pentru care $X^3 = O_2$.

II. Analiză matematică 1. Fie funcţia $f : (-\infty, -1) \bigcup (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$.
a) Să se calculeze $f'(x)$ şi să se studieze monotonia funcţiei f.
b) Să se determine ecuaţiile asimptotelor la graficul funcţiei f.
c) Fie şirul $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ cu $a_n = \dfrac{f(1) + f(2) + \cdots + f(n)}{n}$, $\forall\, n \in \mathbf{N}$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

2. Fie $I_n = \displaystyle\int_0^\pi x^n \sin^2 x\, dx$ şi $J_n = \displaystyle\int_0^\pi x^n \cos^2 x\, dx$, $\forall\, n \in \mathbf{N}$.
a) Să se calculeze I_0 şi J_0.
b) Să se arate că $I_n + J_n = \dfrac{\pi^{n+1}}{n+1}$, $\forall\, n \in \mathbf{N}$.

III. Geometrie 1. Se consideră punctele $A(2,3)$, $B(4,n)$, $C(2,2)$ şi $D(m,5)$. Să se determine $m, n \in \mathbf{R}$ astfel încât patrulaterul $ABCD$ să fie paralelogram.

2. Fie $a, b \in \mathbf{R}$ astfel în cât $\sin a + \sin b = 1$ şi $\cos a + \cos b = \frac{1}{2}$. Să se calculeze $\cos(a - b)$.

3. Se consideră vectorii $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j}$ şi $\vec{v} = 2\,\vec{i} + 4\,\vec{j}$. Să se calculeze modulul vectorului $\vec{u} + \vec{v}$.

IV. Informatică

Se dă un vector v de n elemente egale cu 1. Prin partiţie a vectorului v înţelegem o împărţire a vectorului în subvectori, astfel încât fiecare element al vectorului v apare exact o dată într-unul dintre subvectori. Pentru fiecare partiţie a vectorului v în k subvectori $v_{11}, \ldots, v_{1n_1}, v_{21} \ldots, v_{2n_2}, \ldots, v_{k1}, \ldots, v_{kn_k}$, se calculează produsul sumelor elementelor din fiecare subvector al partiţiei, adică $\prod_{i=1}^{k} n_i$.

a) Să se scrie un program care determină cel mai mare produs calculat în acest fel pentru toate partiţiile posibile ale vectorului v.

b) Există o soluţie la punctul a) care să nu calculeze toate produsele posibile? Justificaţi.

Notă. Programele vor fi scrise într-unul dintre limbajele de programare studiate în liceu (Pascal,C,C++). Pentru fiecare soluţie se vor descrie informal detaliile algoritmului folosit şi ale implementării sub formă de program: semnificaţia variabilelor, a structurilor de date, a structurilor repetitive, a instrucţiunilor condiţionale.

Timp de lucru - 3 ore.

Universitatea din Bucuresti, Facultatea de Matematică şi Informatică
Concursul de admitere, iulie 2011. Domeniul de licenţă - *Matematică*

I. Algebră (1) Să se rezolve ecuaţiile:
(a) $\sqrt{5x-1} = x+1$, unde $x \in \mathbf{R}$.
(b) $2^x + 4^x = 72$, unde $x \in \mathbf{R}$.
(c) $x^3 + 8x^2 + 8x + 1 = 0$, unde $x \in \mathbf{C}$.
(d) $\overline{z} = z^2$, unde $z \in \mathbf{C}$.
(2) Fie mulţimea $A = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbf{Z}\}$. Să se arate că:
(i) A este parte stabilă în raport cu adunarea şi înmulţirea numerelor reale.
(ii) $(A, +, \cdot)$ este inel comutativ.
(iii) Elementul $7 + 4\sqrt{3}$ este inversabil în inelul A.

II. Analiză matematică 1. Fie funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = (x^2 + x + 1)e^x$.
a) Să se calculeze $f'(x)$ şi să se determine punctele de extrem ale funcţiei f.
b) Să se determine asimptotele la graficul funcţiei f.
c) Să se arate că şirul

$$(a_n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ cu } a_0 \in \mathbf{R} \text{ şi } a_{n+1} = e^{-a_n} f(a_n), \quad \forall\, n \in \mathbf{N}$$

este crescător şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

2. Fie $f : [1, e] \to \mathbf{R}$, $f(x) = 3x^2 + \dfrac{1}{x}$.
a) Să se caluleze $\displaystyle\int_1^e f(x)dx$.
b) Să se determine primitivele funcţiei $g = f'f$ pe intervalul $(1, e)$.

III. Geometrie 1. Să se calculeze aria triunghiului echilateral ABC ştiind că $A(-1, 1)$ şi $B(3, -2)$.
2. Să se calculeze $|\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2$, ştiind că $\vec{u} + \vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ şi $\vec{u} - \vec{v} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$.
3. Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC ştiind că $AB = 6$, $\widehat{B} = \dfrac{\pi}{4}$, $\widehat{C} = \dfrac{\pi}{6}$.

IV. Informatică Fie $n, m, p \le 100$ numere naturale şi fie $\vec{x_i}$, cu $i = 1, \ldots, n$ si $\vec{y_j}$, cu $j = 1, \ldots, m$ vectori p-dimensionali de numere reale.
a) Să se scrie un program care să calculeze elementele $d(i, j) = \|\vec{x_i} - \vec{y_j}\|^2$ (norma euclidiană la pătrat).
b) Dacă oricare 2 vectori $(\vec{x_i}, \vec{y_j})_{i=1,\ldots,n}^{j=1,\ldots,m}$ sunt ortogonali, să se scrie un program care să calculeze elementele $d(i, j)$, cu efectuarea unui număr cât mai mic de operaţii.

Notă. Programele vor fi scrise într-unul dintre limbajele de programare studiate în liceu (Pascal, C, C++). Pentru fiecare soluţie se vor descrie informal detaliile algoritmului folosit şi ale implementării sub formă de program: semnificaţia variabilelor, a structurilor de date, a structurilor repetitive, a instrucţiunilor condiţionale.

Timp de lucru - 3 ore.

Universitatea din Bucuresti, Facultatea de Matematică şi Informatică
Concursul de admitere, iulie 2011. Domeniul de licenţă - *Informatică*
Barem de corectare

I. Algebră 1 p. din oficiu.

1. (a) Abordarea prin metoda inducţiei şi verificarea pentru n=1 .... 1p.
Pasul de inducţie .... 2p.
(b) Observaţia faptului că $1^3 + 2^3 + \cdots 9^3 = 2025$ .... 0,5p.
Deducerea faptului că $x_1 = 0, x_2 = 1, \ldots, x_{10} = 9$ .... 0,5 p.
2. (i) Calculul lui X^2 .... 1p.
(ii) $\det X = -a - b$ .... 0,5 p.
X inversabilă $\Leftrightarrow a + b \neq 0$ .... 0,5 p.
(iii) $X^3 = 0_2 \Rightarrow \det X = 0 \Rightarrow b = -a$ .... 1 p.
Calculul lui X^3 folosind $b = -a$ .... 1 p.
Deducerea faptului că $a = 1, b = -1$ .... 1p.
Variantă: Calculul lui X^3 .... 1 p.
Rezolvarea sistemului în a şi b astfel obţinut .... 2 p.

II. Analiză 1 p. din oficiu.

a) Calculul lui f' .... 1 p.
Monotonia lui f .... 1 p.
b) Asimptote orizontale .... 1 p.
Asimptote verticale .... 1 p.
c) Limita şirului .... 1 p.
2. a) I_0, J_0 .... câte 1 p.
b) .... 2 p.

III. Geometrie 1 p. din oficiu.

1. O condiţie ca cele patru puncte să formeze un paralelogram .... 2 p.
Finalizare .... 1 p.
2. Formula lui $\cos(a - b)$ .... 1 p.
Calculul pătratelor $(\sin a + \sin b)^2 = 1$ şi $(\cos a + \cos b)^2 = \frac{1}{4}$ .... 1 p.
Finalizare .... 1 p.
3. Calcul $u + v$ .... 1p.
Calculul normei .... 2 p.

IV. Informatică 1 p. din oficiu.

a) Corectitudine algoritm (inclusiv descriere) .... 5 p.
b) Soluţie directă 1 p.
c) Sintaxa limbajului de programare (inclusiv detalii de implementare) .... 3 p.

Universitatea din Bucuresti, Facultatea de Matematică şi Informatică
Concursul de admitere, iulie 2011. Domeniul de licenţă - *Matematică*
Barem de corectare

I. Algebră 1 p. din oficiu.

1. (a), (b), (c), (d) .... câte 1 p.
2. (i) .... 1 p.
(ii) Enunţarea axiomelor inelului .... 1 p.
Finalizare .... 2 p.
(iii) .... 1 p.

II. Analiză 1 p. din oficiu.

1. a) Calculul lui f' .... 1 p.
Punctele de extrem .... 1 p.
b) Asimptota orizontală la $-\infty$ .... 1 p.
c) Monotonia .... 1 p.
Limita .... 1 p.
2. a), b) .... câte 2 p.

III. Geometrie 1 p. din oficiu.

1. Calculul laturii AB sau aflarea coordonatelor lui C .... 1 p.
Finalizare .... 2 p.
2. Găsirea lui $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ .... 2 p.
Finalizare .... 1 p.
3. Determinarea laturilor AC, BC .... 3 p.

IV. Informatică 1 p. din oficiu.

a) Algoritm .... 4 p.
b) Algoritm .... 1 p.
Sintaxa limbajului de programare .... 2 p.
Detalii de algoritm şi de implementare .... 2 p.