

Concursul de admitere iulie 2017
Domeniul de licență – *Informatică*

I. Algebră. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

- (a) Să se calculeze A^2 și A^3 .
- (b) Să se determine toate matricele $X \in M_2(\mathbb{R})$ pentru care $AX = 2X$.
- (c) Să se determine valorile reale ale lui m pentru care există o matrice nenulă $B \in M_2(\mathbb{R})$ cu $AB = mB$.
- (d) Fie $n, p \in \mathbb{N}^*$, $n \neq p$. Să se arate că nu există $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât $A^n = \lambda A^p$.

II. Analiză. Fie funcția $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \arctg \frac{1}{x} - \operatorname{arccctg} \frac{1}{x}$.

- (a) Studiați monotonia și convexitatea funcției f .
- (b) Decideți și justificați dacă funcția $g : \mathbb{R}^* \rightarrow \left(-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $g(x) = f(x)$ este sau nu este bijectivă.
- (c) Arătați că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, ecuația $f(x) = \frac{1}{n}$ are o soluție reală unică, notată cu x_n .
Demonstrați că șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este convergent și determinați $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.
- (d) Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ și $x = \sqrt{3}$.

III. Geometrie. În sistemul de coordonate xOy se consideră punctul $M(3, 3)$ și triunghiul ABC determinat de dreptele $AB : x + 2y - 4 = 0$, $BC : 3x + y - 2 = 0$ și $CA : x - 3y - 4 = 0$.

- (a) Să se calculeze aria triunghiului ABC .
- (b) Fie P, Q și R proiecțiile punctului M pe dreptele OA , OB și respectiv AB . Să se demonstreze că punctele P, Q și R sunt coliniare.
- (c) Notăm cu m numărul punctelor din interiorul patrulaterului $BCAM$ care au ambele coordonate numere întregi și cu n numărul punctelor de pe reuniunea laturilor patrulaterului $BCAM$ care au ambele coordonate numere întregi. Să se verifice că aria patrulaterului $BCAM$ este $m + \frac{1}{2}n - 1$.

Subiectul de Informatică se găsește pe verso.

IV. Informatică.

Fie n un număr natural nenul. Fie v un vector cu n poziții numerotate de la 1 la n și elemente numere naturale diferite, de la 1 la n , într-o ordine oarecare. Pentru i și j numere naturale între 1 și n , numim $\text{FLIP}(n, v, i, j)$ operația care inversează ordinea elementelor din v situate pe pozițiile de la i la j .

- Să se scrie în limbaj de programare o procedură (sau funcție) care implementează operația $\text{FLIP}(n, v, i, j)$.
- Să se scrie un program care sortează crescător vectorul v , folosind pentru schimbarea ordinii elementelor în v doar operația $\text{FLIP}(n, v, 1, k)$, cu k de la 2 la n .
- Considerăm că n este o putere a lui 2 ($n = 2^m$, cu m număr natural nenul) și vectorul v are proprietatea că pentru orice i de la 1 la m și orice j de la 1 la 2^{m-i} , există k de la 1 la 2^{m-i} , astfel încât pe pozițiile din v de la $2^{i(j-1)+1}$ la $2^i j$ se află numerele naturale de la $2^{i(k-1)+1}$ la $2^i k$, într-o ordine oarecare. Să se scrie un program care sortează crescător vectorul v , folosind pentru schimbarea ordinii elementelor în v doar operația $\text{FLIP}(n, v, 2^{i(j-1)+1}, 2^i j)$, cu i de la 1 la m și j de la 1 la 2^{m-i} , printr-un algoritm mai eficient decât cel implementat la punctul b), care se bazează pe proprietatea vectorului v .

Exemple:

	Date de intrare	Date de ieșire
a)	$\text{FLIP}(9, [3\ 2\ 6\ 8\ 5\ 9\ 1\ 7\ 4], 1, 6)$	$v = [9\ 5\ 8\ 6\ 2\ 3\ 1\ 7\ 4]$
	$\text{FLIP}(4, [2\ 1\ 4\ 3], 1, 4)$	$v = [3\ 4\ 1\ 2]$
	$\text{FLIP}(16, [14\ 13\ 15\ 16\ 11\ 12\ 9\ 10\ 2\ 1\ 4\ 3\ 8\ 7\ 6\ 5], 5, 8)$	$v = [14\ 13\ 15\ 16\ 10\ 9\ 12\ 11\ 2\ 1\ 4\ 3\ 8\ 7\ 6\ 5]$
b)	$n = 9$ $v = [3\ 2\ 6\ 8\ 5\ 9\ 1\ 7\ 4]$	$v = [1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9]$
c)	$n = 4$ $v = [2\ 1\ 4\ 3]$	$v = [1\ 2\ 3\ 4]$
	$n = 16$ $v = [14\ 13\ 15\ 16\ 11\ 12\ 9\ 10\ 2\ 1\ 4\ 3\ 8\ 7\ 6\ 5]$	$v = [1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12\ 13\ 14\ 15\ 16]$

Note:

- Programele vor fi scrise într-unul dintre limbajele de programare studiate în liceu (Pascal, C, C++). La fiecare subpunct a), b), c), se va preciza complexitatea timp, în funcție de n , a soluției implementate și se vor descrie informal detaliile algoritmului folosit și ale implementării sub formă de program: semnificația variabilelor, a structurilor de date, a structurilor repetitive, a instrucțiunilor condiționale.
- Toate operațiile de tip FLIP se vor face în vectorul v , fără a se folosi alți vectori auxiliari.
- La subpunctul a), datele se transmit ca parametri ai procedurii/funcției $\text{FLIP}(n, v, i, j)$. La subpunctele b) și c), se citesc de la tastatură n și v , fiecare pe un rând separat și se afișează vectorul v sortat crescător, pe un singur rând. Se va considera că datele de intrare ale programelor sunt oricât de mari, dar fără a pune probleme de reprezentare în memorie cu ajutorul tipurilor de date standard.
- Programele vor folosi doar instrucțiunile de bază ale limbajului de programare ales, inclusiv cele de intrare/ieșire, dar nu și alte funcții din biblioteci specializate.

Concursul de admitere iulie 2017
Domeniul de licență - *Matematică*

I. Algebră. Fie mulțimea $A = \{a + b\sqrt[3]{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ și fie $z = 1 + \sqrt[3]{2}$. Să se arate că:

- (a) $z^3 - 3z^2 + 3z = 3$.
- (b) Toate rădăcinile reale ale ecuației $x^6 - 3x^3 + 2 = 0$ se găsesc în mulțimea A .
- (c) Mulțimea A este parte stabilă în raport cu adunarea numerelor reale și $(A, +)$ este grup abelian.
- (d) $z^2 \notin A$.

II. Analiză. Fie funcțiile $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sqrt[n]{x^n + (1-x)^n}$, unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

- (a) Să se determine ecuațiile asimptotelor la graficul funcției f_2 .
- (b) Să se determine punctele de extrem local ale funcției f_3 .
- (c) Să se studieze continuitatea funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$.

(d) Să se calculeze $I = \int_0^1 \frac{1}{f_2(x)} dx$.

III. Geometrie. În planul de coordonate xOy se consideră punctele $A(a, 0)$, $B(-a, 0)$, $C(0, a)$ și $D(0, b)$, unde $a, b > 0$ și pătratul $ADEF$, cu punctele E și F situate în cadranul I (ambele coordonate strict pozitive).

- (a) Exprimați vectorul \overrightarrow{OE} în funcție de vectorii \overrightarrow{OA} și \overrightarrow{OD} .
- (b) Arătați că punctele B, C, E sunt coliniare.
- (c) Arătați că ariile triunghiurilor FCO și EBO sunt egale.

IV. Informatică.

Considerăm triunghiul infinit de mai jos, format din numere naturale:

				1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																					</
--	--	--	--	---	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	----

Spunem că perechea de numere (x, y) este adiacență dacă x și y sunt vecini pe aceeași linie sau pe diagonală, pe linii consecutive. Spre exemplu, $(8,9)$, $(12,8)$ și $(8,13)$ sunt adiacențe, dar $(8,14)$ sau $(18,8)$ nu sunt adiacențe.

Numim drum de la x la y de lungime $p - 1$, cu $p \geq 1$, o secvență de numere $x_1 x_2 x_3 \dots x_p$, cu $x = x_1$ și $y = x_p$ și cu proprietatea că toate perechile (x_i, x_{i+1}) , cu i de la 1 la $p - 1$, sunt adiacențe.

Scrieți un program, într-unul dintre limbajele de programare studiate în liceu (Pascal, C, C++), care primește ca date de intrare 2 numere naturale nenule x și y și afișează un drum de la x la y de lungime minimă. Spre exemplu, 1 2 5 8 13 este un drum de lungime minimă de la 1 la 13.

Notă: Se vor descrie informal detaliile algoritmului folosit și ale implementării sub formă de program: semnificația variabilelor, a structurilor de date, a structurilor repetitive, a instrucțiunilor condiționale.

Timp de lucru 3 ore.

Concursul de admitere iulie 2017
Domeniul de licență - *Informatică*

Barem

- I. Algebră.** Oficiu 1 p
- (a) Calculul lui A^2 : $\begin{pmatrix} 14 & -5 \\ -25 & 9 \end{pmatrix}$ 1 p
- Calculul lui A^3 : $\begin{pmatrix} 67 & -24 \\ -120 & 43 \end{pmatrix}$ 1 p
- (b) Determinarea matricelor X : O_2 2 p
- (c) Scrierea sistemului care rezultă din $AB = mB$ 1 p
- Determinarea lui m : $m = \frac{5-\sqrt{21}}{2}$ sau $m = \frac{5+\sqrt{21}}{2}$ 2 p
- (d) Demonstrarea faptului că nu există $\lambda \in \mathbb{R}$ cu proprietatea din enunț 2 p
- II. Analiză.** Oficiu 1 p
- (a) f este descrescătoare pe $(-\infty, 0)$ și pe $(0, \infty)$ 1 p
- f este concavă pe $(-\infty, 0)$ și convexă pe $(0, \infty)$ 1 p
- (b) Imaginea funcției g este $(-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \setminus \{-\frac{\pi}{2}\}$, deci g nu este bijectivă 2 p
- (c) Ecuația $f(x) = \frac{1}{n}$ are o soluție unică x_n 1 p
- Șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este mărginit și crescător, deci convergent 1 p
- $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ 1 p
- (d) Aria este egală cu $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 f(x) dx - \int_1^{\sqrt{3}} f(x) dx = \frac{\pi\sqrt{3}}{9} + \ln \frac{3}{4}$ 2 p
- III. Geometrie.** Oficiu 1 p
- (a) Determinarea coordonatelor punctelor $A(4, 0)$, $B(0, 2)$ și $C(1, -1)$ 2 p
- Aria triunghiului ABC este 5 (formula ariei cu determinant sau observând că triunghiul ABC este dreptunghic) 1 p
- (b) Determinarea coordonatelor punctelor $Q(0, 3)$ și $P(3, 0)$ 1 p
- Punctul R are coordonatele $(2, 1)$ (analitic sau observând că R este intersecția diagonalelor pătratului $BCAM$) 2 p
- Demonstrarea coliniarității 1 p
- (c) $m = 9$, $n = 4$, patrulaterul $BCAM$ este pătrat cu aria egală cu 10 2 p

- (*) La punctul (b) soluția în care se folosește teorema lui Simson primește 4 puncte dacă sunt verificate condițiile (punctul M se află pe cercul circumscris triunghiului AOB). La punctul (c) pentru enunțarea teoremei Pick (fără verificare) se acordă 1 p.

IV. Informatică.	Oficiu	1 p
(a)	Folosirea corectă a noțiunii de procedură / funcție	1 p
	Implementarea fără vector auxiliar	1 p
	Corectitudinea soluției	1 p
	Corectitudinea limbajului	0,5 p
	Explicații	0,25 p
	Complexitate	0,25 p
(b)	Determinarea maximului dintr-un vector	0,5 p
	Utilizarea FLIP conform cerinței	1 p
	Corectitudinea soluției	1 p
	Corectitudinea limbajului	0,5 p
	Explicații	0,25 p
	Complexitate	0,25 p
(c)	Corectitudinea soluției	1 p
	Explicații	0,25 p
	Complexitate	0,25 p

Concursul de admitere iulie 2017
Domeniul de licență - *Matematică*

Barem

I. Algebră.	Oficiu	1 p
(a)	Verificarea egalității	2 p
(b)	Ecuatia are două rădăcini reale: $1, \sqrt[3]{2}$	2 p
(c)	A parte stabilă	1 p
	$(A, +)$ - grup abelian	2 p
(d)	$z^2 \notin A \Leftrightarrow \sqrt[3]{4} \notin A$	0,5 p
	Demonstrația $\sqrt[3]{4} \notin A$	1,5 p
II. Analiză.	Oficiu	1 p
(a)	$y = \sqrt{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}$ asimptotă oblică spre $+\infty$	1 p
	$y = -\sqrt{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}$ asimptotă oblică spre $-\infty$	1 p
(b)	Calculul lui f'_3	1 p
	$x = 1/2$ punct de extrem local	1 p
(c)	$f(x) = \begin{cases} 1-x & x \in (-\infty, 1/2] \\ x & x \in (1/2, \infty) \end{cases}$	2 p
	f este continuă	1 p
(d)	$I = \sqrt{2} \ln(\sqrt{2} + 1)$	2 p
III. Geometrie.	Oficiu	1 p
(a)	Determinarea coordonatelor punctului $E : (b, a + b)$	
	(analitic sau folosind congruențe de triunghiuri)	2 p
	Scrierea vectorului $\vec{OE} = \frac{b}{a} \vec{OA} + \frac{a+b}{b} \vec{OD}$ (dacă au fost determinate mai întâi coordonatele lui E)	2p
	Dacă se obține scrierea vectorului \vec{OE} direct prin metode vectoriale se acordă 4 puncte	
(b)	Scrierea condiției de coliniaritate (analitic, vectorial, etc)	1 p
	Demonstrarea coliniarității (finalizarea)	1 p
(c)	Determinarea coordonatelor punctului $F : (a + b, a)$	2 p
	Calculul ariilor celor două triunghiuri și demonstrarea egalității	1 p
(*)	Pentru o soluție care tratează corect doar cazul particular $a = b$ se acordă 7 puncte. Pentru o soluție care tratează corect și complet cazul general fără a aminti de cazul particular se va acorda punctajul maxim. Orice altă soluție completă (transformări geometrice, numere complexe, etc.) va fi notată cu punctaj maxim.	
IV. Informatică.	Oficiu	1 p
	Tratarea celor trei cazuri $x < y, x = y, x > y$	1 p
	Determinarea nivelului pe care se află un număr	1 p
	Determinarea corectă a tuturor vecinilor (adiacențelor) unui număr	1 p
	Afișarea unui drum corect pentru orice x și y	1 p
	Afișarea unui drum corect minim pentru orice x și y	3 p
	Corectitudinea limbajului	1 p
	Explicații	1 p