Universitatea din Bucureşti **18.07.2019**
Facultatea de Matematică şi Informatică

Concursul de admitere iulie 2019
Domeniul de licenţă – *Informatică*

I. Algebră. Aşezăm succesiv toate numerele naturale impare într-un triunghi, astfel:

1			
3	5		
7	9	11	
13	15	17	19

....

(Aşezarea numerelor continuă în mod analog. În această aşezare, linia a treia a triunghiului este deci cea care conţine numerele 7, 9 şi 11.)

(a) Cu ce număr începe a 15-a linie a triunghiului?

(b) Pe ce linie a triunghiului se află numărul 501?

(c) Arătaţi că, pentru orice $n \geq 1$, suma tuturor numerelor de pe linia n a triunghiului este cub perfect.

(d) Demonstraţi că, oricum am alege două numere diferite de pe o aceeaşi linie a triunghiului de mai sus, ele nu se divid unul pe celălalt.

(e) Polinomul P are grad m (unde $m \geq 1$), iar coeficienţii săi sunt (într-o ordine oarecare) toate numerele din linia $m + 1$ a triunghiului de mai sus. Demonstraţi că, dacă t este o rădăcină întreagă a polinomului P, atunci $t = -1$.

II. Analiză. Fie funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{|\ln x|}{x}$.

(a) Comparaţi numerele $f(e)$ şi $f(e^2)$.

(b) Determinaţi punctele din intervalul $(0, \infty)$ în care funcţia f nu este derivabilă şi stabiliţi intervalele de convexitate şi intervalele de concavitate ale funcţiei f.

(c) Discutaţi, în funcţie de valoarea parametrului $m \in \mathbb{R}$, numărul de soluţii reale ale ecuaţiei $f(x) = m$.

(d) Calculaţi $\displaystyle\int_1^e (f(x))^2 dx$.

(e) Fie $P \in \mathbb{R}[X]$ un polinom de grad n, cu $n \geq 2$. Ştim că mulţimea soluţiilor reale ale ecuaţiei $P(f(x)) = 0$ are exact $3n - 1$ elemente. Demonstraţi că $P(-1) \cdot P'(\dfrac{1}{e}) \neq 0$.

III. Geometrie. În planul de coordonate xOy se consideră punctele $A(1, 5)$, $B(-1, -1)$, $C(7, 3)$ şi dreapta d de ecuaţie $d : x - 2y - 6 = 0$. Fie punctele B' şi C' date de $\{B'\} = BA \cap d$ şi $\{C'\} = CA \cap d$.

(a) Demonstraţi că dreptele BC şi d sunt paralele.

(b) Arătaţi că triunghiul ABC este dreptunghic isoscel.

(c) Determinaţi numerele reale α şi β pentru care are loc relaţia $\overrightarrow{B'C'} = \alpha \overrightarrow{AB} + \beta \overrightarrow{AC}$.

(d) Arătaţi că triunghiurile $B'BC$ şi $C'CB$ au arii egale.

(e) Fie δ o dreaptă arbitrară din plan care nu coincide cu niciuna dintre dreptele $AB, AC, BC, B'C'$, $B'C, BC'$. Considerăm mulţimea $\mathcal{M}_\delta$ a punctelor de intersecţie dintre δ şi cele şase drepte enumerate. Justificaţi care este numărul maxim posibil şi care este numărul minim posibil de elemente ale lui $\mathcal{M}_\delta$.

Subiectul de Informatică se găseşte pe verso.

IV. Informatică

Suntem în anul 2050. Resursele de apă de pe planeta noastră sunt limitate din cauza schimbărilor climatice. Ca aspirant la statutul de membru FMI (Formațiunea pentru Mediu Înconjurător) prima voastră sarcină este de a rezolva două probleme de distribuire a resurselor de apă către principalele orașe ale planetei.

a. Prima problemă pe care trebuie să o rezolvați este determinarea capacității maxime de stocare a apei a unui oraș. Sistemul de stocare al unui oraș a evoluat în timp, ajungându-se la o configurație flexibilă formată din n pereţi verticali paraleli $p_1, p_2, ..., p_n$. Fiecare perete p_i are forma unui dreptunghi cu înălţimea a_i şi lăţimea de 1 km, iar oricare doi pereţi alăturaţi p_i, p_{i+1} se află la distanţa de 1 km, faţă în faţă. Fiecare dintre aceşti pereţi poate fi coborât complet, prin culisare pe verticală, iar un bazin poate fi format din oricare doi pereţi p_i, p_j (rămaşi după coborârea tuturor celorlalţi) şi din pereţi laterali, care întregesc conturul de bazin. Capacitatea unui bazin este dată de produsul dintre înălţimea peretelui celui mai mic dintre cei doi p_i, p_j din care este format bazinul şi distanţa dintre aceşti doi pereți. Sistemul de stocare poate fi descris de un șir de numere naturale $a_1, a_2, ..., a_n$ strict pozitive, unde a_1 reprezintă înălțimea în kilometri a peretelui p_1, a_2 reprezintă înălțimea în kilometri a peretelui p_2 și așa mai departe. Scrieți un program care primește la intrare numărul de pereți $n \geq 2$ și înălțimile acestora $a_1, a_2, ..., a_n$, iar apoi determină și afișează capacitatea maximă de apă care poate fi stocată în acel oraș.

Exemplu:

Date de intrare	Date de ieșire	Observații
n = 9 a = [1, 8, 6, 2, 5, 4, 8, 3, 7]	49	Peretele al doilea de înălțime 8 km și cel de-al nouălea de înălțime 7 km rămân ridicați (toți ceilalți fiind coborâți), ei determinând astfel bazinul de capacitate maximă care poate reține 49 km^3 de apă.

b. Pentru ca toți locuitorii unui oraș să supraviețuiască în cazul unei catastrofe, orașul trebuie să aibă o rezervă de cel puțin 1 km^3 de apă. Pentru a face față mai ușor unor catastrofe, orașele pot forma alianțe în care se pot împrumuta reciproc cu apă. Astfel, într-o alianță formată din h orașe, fiecare oraș trebuie să aibă o rezervă de cel puțin h km^3 de apă (pentru a putea supraviețui toți locuitorii săi și a putea să împrumute cu câte 1 km^3 de apă fiecare dintre celelalte h - 1 orașe aliate). Cea de-a doua problemă a voastră este de a determina cel mai mare număr de orașe h care se pot alia. Fiind dat numărul m de orașe și un șir de m numere naturale strict pozitive, notate cu $c_1, c_2, ..., c_m$, unde fiecare număr c_i reprezintă capacitatea maximă de stocare a orașului i, să se determine numărul maxim de orașe h care pot forma o alianță, adică există cel puțin h orașe care pot reține fiecare o cantitate de apă cel puțin egală cu h km^3. Scrieți un program, cu o complexitate de timp cât mai bună, care primește la intrare numărul natural $m \geq 1$ și șirul de numere $c_1, c_2, ..., c_m$, după care determină și afișează numărul h. Specificați și justificați complexitatea algoritmului propus.

Exemplu:

Date de intrare	Date de ieșire	Observații
m = 5 c = [3, 1, 6, 1, 5]	3	Avem 5 orașe care pot reține cantitățile de apă 3, 1, 6, 1 și 5. Sunt cel puțin 3 orașe care pot reține o cantitate de apă mai mare sau egală cu 3, dar nu există 4 orașe care pot reține o cantitate de apă mai mare sau egală cu 4.

Note:

1. Programele vor fi scrise într-unul dintre limbajele de programare studiate în liceu (Pascal, C sau C++). Pentru fiecare soluție se vor descrie informal detaliile algoritmului folosit și ale implementării sale sub formă de program: semnificația variabilelor, a structurilor de date, a structurilor repetitive și a instrucțiunilor condiționale.
2. Programele vor folosi doar instrucțiunile de bază ale limbajului de programare ales și funcții din biblioteci pentru citirea și scrierea datelor.
3. Citirea datelor se poate face de la tastatură sau dintr-un fișier text. Afișarea se va face doar pe monitor.
4. Se va considera că datele de intrare ale programelor sunt oricât de mari, dar fără a pune probleme de reprezentare în memorie cu ajutorul tipurilor de date standard.

Timp total de lucru: 3 ore

Universitatea din Bucureşti **19.07.2019**
Facultatea de Matematică şi Informatică

Concursul de admitere iulie 2019
Domeniul de licenţă - *Matematică*

I. Algebră. Considerăm polinomul $P(X) = (X+i)^{12} + (X-i)^{12}$.

(a) Calculaţi $P(0)$.
(b) Arătaţi că suma pătratelor rădăcinilor polinomului P este 132.
(c) Demonstraţi că numărul $\text{ctg}(\frac{\pi}{24})$ este o rădăcină a lui P.
(d) Demonstraţi că toate rădăcinile polinomului P sunt reale.
(e) Fie $Q = (X+i)^{12} + m(X-i)^{12}$, unde m este un număr complex. Demonstraţi că polinomul Q are (cel puţin) o rădăcină reală dacă şi numai dacă $|m| = 1$.

II. Analiză. Fie funcţia

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

(a) Calculaţi $f(\frac{\pi}{2}) + f(\pi)$.
(b) Demonstraţi că f este derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi determinaţi asimptotele la graficul funcţiei f.
(c) Arătaţi că funcţia f are exact 3 puncte de extrem local în intervalul $(-2\pi, 2\pi)$.
(d) Calculaţi $\displaystyle\int_0^{\pi} x^3 f^2(x)dx$.
(e) Pentru orice număr natural $n \geq 1$, notăm $I_n = \displaystyle\int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} f(x)dx$. Demonstraţi că şirul $(I_n)_n$ este strict monoton şi calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

III. Geometrie. În planul de coordonate xOy fie punctele $A(1,1)$, $B(-1,3)$, $C(-a-1, a+5)$, $D(-a+1, a+3)$, unde $a \in \mathbb{R}$ este un parametru.

(a) Arătaţi că, pentru orice valoare a parametrului a, punctele C şi D se află pe dreapta de ecuaţie $x + y - 4 = 0$.
(b) Demonstraţi că pentru orice valoare a lui a, punctele A, B, C, D determină un paralelogram şi calculaţi aria acestuia.
(c) Fie $a = 0$. Considerăm B' simetricul lui B în raport cu C şi punctele M şi N astfel ca $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AN} = \lambda\overrightarrow{AB}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$). Determinaţi λ astfel încât vectorii $\overrightarrow{MN}$ şi $\overrightarrow{MB'}$ să fie coliniari.
(d) Fie $a = 0$. Notăm cu A_1 proiecţia lui A pe CD şi cu C_1 proiecţia lui C pe AB. Demonstraţi că dreptele A_1C_1, AC şi BD au un punct comun. Justificaţi dacă proprietatea rămâne valabilă pentru o valoare oarecare a lui a.
(e) Pentru ce valoare a lui a perimetrul paralelogramului $ABCD$ este minim? Justificaţi!

Subiectul de Informatică se găseşte pe verso.

IV. Informatică

Fie *v* un tablou unidimensional format din *n* numere naturale nenule ($n \geq 2$). Singura operație permisă asupra unui element al tabloului *v* constă în înlocuirea sa cu cel mai mare divizor comun dintre el și vecinul său din stânga sau vecinul său din dreapta, oricare dintre aceştia există. Scrieți un program care primeşte la intrare numărul *n* și cele *n* elemente ale tabloului *v*, iar apoi determină și afișează numărul minim de înlocuiri de tipul precizat, necesare pentru ca toate elementele tabloului să devină egale cu 1 sau mesajul "Imposibil" în cazul în care acest lucru nu se poate realiza.

Exemple:

Date de intrare	Date de ieșire	Observații
n = 5 *v* = (2, 6, 3, 1, 5)	4	Numărul minim de operații de înlocuire necesare este 4 și se poate obține, de exemplu, astfel: • înlocuim 3 cu cmmdc(3,1)=1, deci *v* = (2, 6, 1, 1, 5) • înlocuim 6 cu cmmdc(6,1)=1, deci *v* = (2, 1, 1, 1, 5) • înlocuim 2 cu cmmdc(2,1)=1, deci *v* = (1, 1, 1, 1, 5) • înlocuim 5 cu cmmdc(5,1)=1, deci *v* = (1, 1, 1, 1, 1)
n = 5 *v* = (3, 15, 5, 5, 10)	6	Numărul minim de operații de înlocuire necesare este 6 și se poate obține, de exemplu, astfel: • înlocuim 15 cu cmmdc(3,15)=3, deci *v* = (3, 3, 5, 5, 10) • înlocuim al doilea 3 cu cmmdc(3,5)=1, deci *v* = (3, 1, 5, 5, 10) • înlocuim primul 5 cu cmmdc(1,5)=1, deci *v* = (3, 1, 1, 5, 10) • înlocuim 5 cu cmmdc(1,5)=1, deci *v* = (3, 1, 1, 1, 10) • înlocuim 10 cu cmmdc(1,10)=1, deci *v* = (3, 1, 1, 1, 1) • înlocuim 3 cu cmmdc(3,1)=1, deci *v* = (1, 1, 1, 1, 1)

Note:

1. Programele vor fi scrise într-unul dintre limbajele de programare studiate în liceu (Pascal, C sau C++). Pentru fiecare soluție se vor descrie informal detaliile algoritmului folosit și ale implementării sale sub formă de program: semnificația variabilelor, a structurilor de date, a structurilor repetitive și a instrucțiunilor condiționale.
2. Programele vor folosi doar instrucțiunile de bază ale limbajului de programare ales și funcții din biblioteci pentru citirea și scrierea datelor.
3. Citirea datelor se poate face de la tastatură sau dintr-un fișier text. Afișarea se va face doar pe monitor.
4. Se va considera că datele de intrare ale programelor sunt oricât de mari, dar fără a pune probleme de reprezentare în memorie cu ajutorul tipurilor de date standard.

Timp total de lucru: 3 ore

Universitatea din Bucureşti **18.07.2019**

Facultatea de Matematică şi Informatică

Concursul de admitere iulie 2019

Domeniul de licenţă - *Informatică*

Barem

I. Algebră. Oficiu .... 1 p

(a) Scrierea formulei termenului de pe locul n al progresiei aritmetice, sau completarea următoarelor linii ale triunghiului .... 1 p
Determinarea termenului cu care începe linia 15, adică 211 .... 1 p

(b) Scrierea condiţiei $n^2 - n + 1 \leq 501 \leq n^2 + n - 1$, sau continuarea triunghiului până se ajunge la 501 .... 1 p
Explicitarea $n = 22$ .... 1 p

(c) Formularea unui rezultat sau scrierea formulei pentru suma progresiei aritmetice .... 0,5 p
Calculul sumei ($= n^3$) şi concluzia / demonstraţie prin inducţie .... 1,5 p

(d) Demonstraţia (în care apare, de exemplu, faptul că $(n^2 + n - 1)/(n^2 - n + 1) < 2$)
(Pentru analiza doar a unor cazuri particulare, de ex. verificarea proprietăţii pentru liniile ce apar scrise, se acordă 0,25 p) .... 2 p

(e) Numărul t este negativ, impar .... 0,25 p
Gradul m este număr impar .... 0,25 p
Concluzia problemei .... 0,5 p

II. Analiză. Oficiu .... 1 p

(a) $f(e) = \frac{1}{e}, f(e^2) = \frac{2}{e^2}$ .... 1 p
Concluzia (eventual, bazată pe calculul primei derivate) .... 1 p

(b) Calculul $f_s'(1) = -1; f_d'(1) = +1$ (folosind definiţia, sau teorema Lagrange) .... 0,5 p
Concluzia (f nu e derivabilă în 1, dar e derivabilă în rest) .... 0,5 p
Calculul $f''(x) = \begin{cases} \frac{3-2\ln x}{x^3}, & x \in (0,1) \\ \frac{2\ln x - 3}{x^3}, & x \in (1,+\infty) \end{cases}$ .... 0,5 p
Concluzia: f este convexă pe intervalele $(0,1]$ şi $[e\sqrt{e}, +\infty)$; f este concavă pe intervalul $[1, e\sqrt{e}]$ (se admit la răspunsuri şi intervale deschise) .... 0,5 p

(c) Calculul limitelor lui f în 0 şi la $+\infty$ (egale cu $+\infty$, respectiv cu 0) .... 0,5 p
Discuţia: ecuaţia nu are soluţii pentru $m \in (-\infty, 0)$; are o soluţie pentru $m \in \{0\} \cup (\frac{1}{e}, +\infty)$; are două soluţii pentru $m = \frac{1}{e}$; are trei soluţii pentru $m \in (0, \frac{1}{e})$ ... 1,5 p

(d) Aplicarea / enunţarea formulei de integrare prin părţi .... 0,5 p
$I = -\frac{1}{e} + 2\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx = 2 - \frac{5}{e}$ .... 1,5 p

(e) Ecuaţia este echivalentă cu ecuaţiile: $f(x) = a_i$, unde a_i sunt rădăcinile reale ale polinomului P .... 0,25 p
Ecuaţia are exact $3n-1$ soluţii dacă şi numai dacă P are n rădăcini reale, distincte, $n-1$ dintre ele în intervalul $(0, \frac{1}{e})$, o rădăcină $=\frac{1}{e}$ .... 0,5 p
Concluzia (dedusă din faptul că P nu are rădăcina -1, iar $\frac{1}{e}$ nu poate fi rădăcină dublă, deci $P'(\frac{1}{e}) \neq 0$). .... 0,25 p

III. Geometrie. Oficiu .... 1 p

(a) Verificarea condiţiei de paralelism (prin calculul pantei: ambele drepte au panta $\frac{1}{2}$ sau prin scrierea ecuaţiei dreptei $BC : x - 2y - 1 = 0$) .... 1 p
(b) Triunghiul ABC este isoscel ($AB = AC = 2\sqrt{10}$) .... 1 p
Triunghiul ABC este dreptunghic .... 1 p
(c) Determinarea coordonatelor punctelor $B'(-2, -4)$ şi $C'(10, 2)$ .... 1 p
Calculul $\alpha = -\frac{3}{2}, \beta = \frac{3}{2}$ .... 1 p
(d) Enunţarea / utilizarea unei formule pentru calculul ariei unui triunghi .... 0,5 p
Calculul ariei (ambele triunghiuri au aria egală cu 10) / demonstrarea egalităţii .... 1,5 p
(O soluţie în care se demonstrează că triunghiurile sunt congruente şi se deduce că au ariile egale va primi punctaj maxim)
(e) Numărul maxim de elemente este 6 (enunţare rezultat) .... 0,25 p
Numărul maxim de elemente este 6 (justificare rezultat) .... 0,25 p
Numărul minim de elemente este 3 (enunţare rezultat / exemplificare) .... 0,5 p
Numărul minim de elemente este 3 (justificare rezultat, demonstarea faptului că $\mathcal{M}_\delta$ nu poate avea mai puţin de 3 elemente) .... 1 p

IV. Informatică. Oficiu .... 1 p

(a) Citirea corectă a datelor de intrare şi afişarea rezultatului .... 0.5 p
Calculul corect a capacităţii unui bazin determinat de doi pereţi verticali .... 1 p
Determinarea capacităţii maxime .... 2 p
Corectitudinea limbajului .... 0.5 p
Explicaţii .... 0.5 p

(b) Găsirea unei soluţiei corecte, indiferent de complexitate .... 1 p
la care se adaugă pentru o soluţie de complexitate $\mathcal{O}(m^2)$ .... 0.5 p
şi pentru o soluţie de complexitate $\mathcal{O}(m \log m)$ .... 0.5 p
şi pentru o soluţie de complexitate $\mathcal{O}(m)$ .... 1 p
Specificarea şi justificarea complexităţii soluţiei prezentate .... 0.5 p
Corectitudinea limbajului .... 0.5 p
Explicaţii .... 0.5 p

Universitatea din Bucureşti **19.07.2019**

Facultatea de Matematică şi Informatică

Concursul de admitere iulie 2019

Domeniul de licenţă - *Matematică*

Barem

I. Algebră. Oficiu .... 1 p

(a) Calculul lui $P(0) = 2$ .... 1 p

(b) $s_1 = 0, s_2 = -66$ (relaţiile lui Viète) .... 1 p

Calculul sumei pătratelor $= 132$ .... 1 p

(c) Utilizarea sau enunţarea formulei lui Moivre .... 0,5 p

Demonstraţia .... 1,5 p

(Punctajul se poate acorda integral dacă la d) sunt determinate efectiv toate rădăcinile, iar una dintre acestea este scrisă în forma $\mathrm{ctg}(\frac{\pi}{24})$)

(d) Observaţia că numerele $\mathrm{ctg}\frac{(2k+1)\pi}{24}$, $k = 0, 1, \dots, 11$ sunt rădăcini ale lui P, sau scrierea ecuaţiei $P = 0$ în forma echivalentă $\left(\frac{X+i}{X-i}\right)^{12} = -1$, sau observaţia că, pentru o rădăcină x, avem $|x + i| = |x - i|$ .... 1 p

Demonstraţia faptului că polinomul are toate rădăcinile reale .... 1 p

(e) Implicaţia directă (dacă are o rădăcină reală, atunci $|m| = 1$) .... 1 p

Implicaţia inversă .... 1 p

II. Analiză. Oficiu .... 1 p

(a) Suma $= \frac{2}{\pi}$ .... 1 p

(b) Calculul derivatei în 0 ($f'(0) = 0$), folosind definiţia sau teorema Lagrange .... 0,5 p

Argumentarea faptului că f este derivabilă pe $\mathbb{R}$ .... 0,5 p

Calculul limitelor funcţiei la $\pm\infty$ (egale cu 0) .... 0,5 p

Concluzia (dreapta de ecuaţie $y = 0$ este asimptotă orizontală spre $\pm\infty$; nu există asimptote verticale sau oblice) .... 0,5 p

(c) Calculul derivatei $f'(x) = \begin{cases} \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ .... 0,5 p

(Acest punctaj se acordă şi în cazul în care derivata a fost deja calculată explicit la b))

Studiul ecuaţiei $f'(x) = 0$ pe intervalul $(-2\pi, 2\pi)$ .... 1 p

Concluzia .... 0,5 p

(d) Enunţarea / utilizarea metodei de integrare prin părţi, sau a metodei de schimbare de variabilă .... 0,5 p

Calculul integralei ($= \frac{\pi^2}{4}$) .... 1,5 p

(e) Demonstrarea monotoniei .... 1 p

Calculul limitei ($= 0$) .... 1 p

III. Geometrie. Oficiu .... 1 p

(a) Verificarea condiţiei .... 1 p
(b) Verificarea proprietăţii .... 1 p
Aria paralelogramului este egală cu 4 .... 1 p
(c) Coordonatele punctelor $B'(-1,7)$, $M(0,3)$, $N(1-2\lambda, 1+2\lambda)$ .... 0,5 p
Scrierea şi prelucrarea unei condiţii de coliniaritate .... 1 p
Finalizarea $\lambda = \frac{1}{3}$ .... 0,5 p
(d) Coordonatele punctelor $A_1(2,2), C_1(-2,4)$ .... 0,5 p
Dreptele au un punct comun ($M(0,3)$) .... 1 p
Justificarea faptului că proprietatea este valabilă pentru orice a .... 0,5 p
(e) Formularea şi justificarea unei condiţii de minim (patrulaterul este dreptunghi / expresia $a^2 + 2a + 2$ trebuie să aibă valoarea minimă) .... 1 p
Finalizarea $a = -1$ .... 1 p

IV. Informatică.

Oficiu .... 1 p
Citirea datelor de intrare şi afişarea rezultatului .... 0,5 p
Calculul cmmdc-ului a două numere naturale nenule .... 0,5 p
Rezolvarea cazului în care tabloul conţine cel puţin un element egal cu 1 .... 2 p
Rezolvarea cazului în care tabloul conţine cel puţin o pereche de elemente având cmmdc-ul egal cu 1 .... 2 p
Rezolvarea cazului în care tabloul conţine cel puţin o secvenţă formată din minim 3 elemente având cmmdc-ul egal cu 1 .... 2 p
Rezolvarea cazului în care problema nu are soluţie .... 1 p
Corectitudinea limbajului .... 0,5 p
Explicaţii .... 0,5 p