Universitatea din Bucureşti,
Facultatea de Matematică şi Informatică

Concursul de admitere iulie 2012,
Domeniul de licenţă - *Informatică*

I. Algebră

(I) Fie mulţimea $G = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbf{R}, a \neq 0\}$.
(i) Să se arate că împreună cu operaţia $*$ definită prin $(a,b)*(c,d) = (ac, ad+b)$, G este grup care nu este abelian.
(ii) Să se determine toate elementele (a,b) din G pentru care există $n \geq 2$ astfel încât $(a,b)*(a,b)*\ldots*(a,b) = (1,0)$, unde în membrul stâng apar n de (a,b).

(II) Fie $z \in \mathbf{R}$ astfel încât $z + \dfrac{1}{z} = 3$.
(i) Să se calculeze $z^n + \dfrac{1}{z^n}$ pentru $n \in \{2,3,4,5\}$.
(ii) Să se arate că $z^n + \dfrac{1}{z^n} \in \mathbf{Q}$ pentru orice număr natural $n \geq 1$.

II. Analiză

Fie funcţia $f : (0,\infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

1. Determinaţi ecuaţiile asimptotelor graficului funcţiei f.
2. Studiaţi monotonia şi determinaţi valoarea maximă a funcţiei f.
3. Să se arate că $\displaystyle\int_1^e f(x)\,\mathrm{dx} = 4 - 2\sqrt{\mathrm{e}}$.
4. Să se arate că şirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ definit prin $x_0 > 0$ şi $x_{n+1} = f\left(e^{x_n}\right)$, $\forall n \in \mathbf{N}$, este convergent la 0.

III. Geometrie

1. Fie $ABCD$ un paralelogram şi fie P, Q puncte astfel ca $\overrightarrow{PC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, respectiv $\overrightarrow{BQ} = 2\overrightarrow{QD}$. Să se determine $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ cu proprietatea că $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BQ} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AD}$ şi să se arate că dreptele PQ şi BA sunt paralele.
2. Fie $A(1,3), B(-1,-1), C(5,1)$. Să se determine ecuaţia dreptei suport a bisectoarei din A a triunghiului ABC.
3. Ştiind că $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{2}$, să se calculeze $\sin 2\alpha$.

IV. Informatică

Se consideră şirul de numere naturale $x = 1,2,2,3,3,3,4,4,4,4,\ldots$ (fiecare număr natural nenul apare, în ordine, de un număr de ori egal cu el însuşi). a) Se dă un număr natural nenul n. Să se scrie un program care afişează primii n termeni al şirului x. b) Se dă un număr natural nenul n. Să se scrie un program care afişează în timp constant (care nu depinde de n) al n-lea termen al şirului x. c) Se dă un număr natural nenul n şi n numere naturale nenule $y_1,\ldots,y_n$. Să se scrie un program care verifică (afişând "DA", respectiv "NU") dacă există o permutare a termenilor $y_1,\ldots,y_n$ care să fie identică cu primii n termeni ai şirului x. d) Daţi o soluţie în timp liniar (în funcţie de n) cerinţei de la punctul c).

Notă: Programele vor fi scrise într-unul dintre limbajele de programare studiate în liceu (Pascal,C,C++). Pentru fiecare soluţie se vor descrie informal detaliile algoritmului folosit şi ale implementării sub formă de program: semnificaţia variabilelor, a structurilor de date, a structurilor repetitive, a instrucţiunilor condiţionale.

Timp de lucru 3 ore.

Universitatea din Bucureşti
Facultatea de Matematică şi Informatică

Concursul de admitere iulie 2012
Domeniul de licenţă - *Matematică*

I. Algebră

1. Să se arate că:

(i) Mulţimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \middle| x, y \in \mathbf{R}, x^2 + y^2 = 1 \right\}$ este parte stabilă în raport cu înmulţirea matricelor şi că $(G, \cdot)$ este grup abelian.

(ii) Mulţimea $U = \{z \mid z \in \mathbf{C}, |z| = 1\}$ este parte stabilă în raport cu înmulţirea numerelor complexe şi $(U, \cdot)$ este grup.

(iii) Grupurile U şi G sunt izomorfe.

2. Fie polinomul cu coeficienţi reali $P(X) = X^4 + aX^2 + bX - 1$. Să se determine a şi b pentru care $P(X)$ se divide cu $X^2 + X + 1$ şi în acest caz să se determine toate rădăcinile complexe ale lui $P(X)$.

II. Analiză

Fie funcţia $f : \mathbf{R} \setminus \{-1\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{(x+1)^2}$.

(i) Determinaţi ecuaţiile asimptotelor graficului funcţiei f.

(ii) Studiaţi monotonia şi determinaţi punctele de extrem local ale funcţiei f.

(iii) Să se arate că $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{dx} = \ln 2 - \frac{1}{2}$.

(iv) Să se arate că şirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ definit prin $x_0 > 0$ şi $x_{n+1} = f(x_n)$, $\forall\, n \in \mathbf{N}$, este convergent la 0.

III. Geometrie

(i) Se consideră paralelogramul $ABCD$ şi punctele E şi F astfel încât $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EB}$ şi $\overrightarrow{DF} = 2\overrightarrow{FE}$. Să se demonstreze că punctele A, F şi C sunt coliniare.

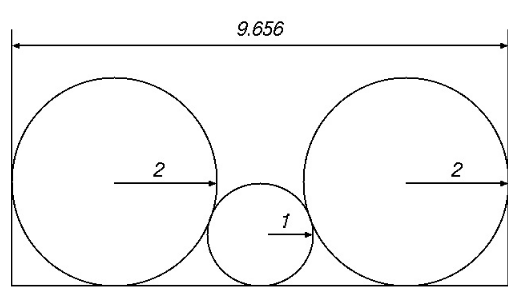
(ii) Să se determine ecuaţia simetricei dreptei $d : 2x - 3y + 1 = 0$ faţă de punctul $A(-3, 4)$.

(iii) Ştiind că $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{1}{3}$, să se calculeze $\sin 2\alpha$.

IV. Informatică

Se dau n cercuri de raze $r_1, r_2, \ldots, r_n$. Aceste cercuri sunt "împachetate" într-un dreptunghi astfel: toate cercurile sunt tangente la baza dreptunghiului, cercurile sunt aranjate în ordinea iniţială (cel mai din stânga fiind cercul de rază r_1, cel mai din dreapta cercul de rază r_n), iar cercurile consecutive (de raze r_i şi respectiv r_{i+1}) sunt tangente. Să se scrie un program care calculează lăţimea minimă a dreptunghiului în care încap cercurile. Rezultatul se va afişa cu trei zecimale exacte.

Spre exemplu, dacă $n = 3$, $r_1 = 2$, $r_2 = 1$ şi $r_3 = 2$, atunci rezultatul care trebuie afişat este 9.656.



Notă: Programul va fi scris într-unul dintre limbajele de programare studiate în liceu (Pascal,C,C++). Se vor descrie informal detaliile algoritmului folosit şi ale implementării sub formă de program: semnificaţia variabilelor, a structurilor de date, a structurilor repetitive, a instrucţiunilor condiţionale.

Timp de lucru 3 ore.

Universitatea din Bucureşti
Facultatea de Matematică şi Informatică 19 iulie 2012

Examen de Admitere
Domeniul de licenţă Informatică

Barem de corectură

- **Algebră - I**

Oficiu	1p
(I) (i) $(G, *)$ grup	3p
G neabelian	1p
(ii)	1p
(II) (i)	2p
(ii)	2p

- **Analiză - II**

Oficiu	1p
a) $x = 0$ asimptotă verticală	1p
$y = 0$ asimptotă orizontală	1p
b) Calculul lui $f'(x)$	1p
f crescătoare pe $(0, e^2]$ şi descrescătoare pe $[e^2, \infty)$	1p
Valoarea maximă egală cu $2/e$	1p
c) Calculul integralei	2p
d) Studiul convergenţei	1p
Calculul limitei	1p

- **Geometrie - III**

Oficiu	1p
1. Demonstrarea relaţiei	2p
Demonstrarea paralelismului	1p
2. Observaţia că triunghiul ABC este isoscel	1p
Determinarea coordonatelor mijlocului segmentului BC	1p
Ecuaţia bisectoarei	1p
3. $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$	1p
$\sin \alpha = \dfrac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad \cos \alpha = \dfrac{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}}$	1p
Finalizare	1p

- **Informatică - IV**

Oficiu	1p
a)	4p
b)	1p
c)	3p
d)	1p

Nota: Se pot scadea maxim 2 puncte pentru greseli de limbaj sau de implementare sub formă de program.

Universitatea din Bucureşti
Facultatea de Matematică şi Informatică 20 iulie 2012

Examen de Admitere
Domeniul de licenţă Matematică

Barem de corectură

• Algebră - I

Oficiu 1p
1. (i) 2,5p
   (ii) 1,5p
   (iii) 1p
2. Determinarea lui a şi b 2p
   Aflarea rădăcinilor 2p

• Analiză - II

Oficiu 1p
(i) $y = 0$ asimptotă orizontală 1p
   $x = -1$ asimptotă verticală 1p
(ii) Calculul lui $f'(x)$ 1p
   f crescătoare pe (-1,1] şi descrescătoare pe $(-\infty, -1)$ şi $[1, \infty)$ 1p
   $x = 1$ punct de maxim local 1p
(iii) Calculul integralei 2p
(iv) Studiul convergenţei 1p
   Calculul limitei 1p

• Geometrie - III

Oficiu 1p
(i) Exprimarea lui $\overrightarrow{AF}$ în funcţie de $\overrightarrow{AD}$ şi $\overrightarrow{AB}$ 2p
   Finalizare 1p
(ii) Alegerea unui punct pe d şi determinarea simetricului său faţă de A 1p
   Determinarea pantei simetricei lui d 1p
   Finalizare 1p
(iii) Ridicarea la pătrat a relaţiei date 1p
   Finalizare 2p

• Informatică - IV

Oficiu 1p
   Corectitudine algoritm 5p
   Sintaxa limbajului de programare 2p
   Detalii de algoritm şi de implementare 2p

Nota: Se pot scadea maxim 2 puncte pentru greseli de limbaj sau de implementare sub formă de program.