

INFORMATICĂ – Varianta 1

1. Într-un vector v de numere naturale nenegative se pot face sărituri de la o poziție la alta după următoarea regulă: dacă ne aflăm pe poziția i putem sări pe una din pozițiile $i+1, i+2, \dots, i+v[i]$. Care este numărul minim de sărituri necesar pentru a ajunge de la prima poziție la ultima poziție în vectorul $v = [4, 4, 1, 3, 1, 4, 2, 1, 1, 1]$.

(A) 3 ✓ B) 4 C) 5 D) 6

2. Considerăm următoarea secvență de program, în care a și b sunt două tablouri unidimensionale formate din câte n numere întregi și indexate de la 1, iar i și n sunt două variabile de tip întreg:

```

pentru i ← 1, n execută
    a[i] ← i
pentru i ← 1, n execută
    b[i] ← i + a[n-i+1]
pentru i ← 1, n execută
    a[i] ← a[i] + b[i]
    b[i] ← a[i] - b[i]

```

După rularea secvenței de mai sus, suma $a[n] + b[n]$ va fi egală cu:

A) $2n+1$ B) $3n+1$ C) $3n+2$ D) $4n+2$

3. Pentru un graf neorientat cu 10 noduri și mulțimea nodurilor $\{1, 2, \dots, 10\}$ numim secvența gradelor grafului vectorul v având ca elemente gradele nodurilor $1, 2, \dots, 10$ (adică $v = (d(1), d(2), \dots, d(10))$), unde cu $d(i)$ am notat gradul nodului i . Câți dintre următorii vectori pot reprezenta secvența gradelor unui graf neorientat **conex** cu 10 noduri:

~~(1, 1, 2, 2, 3, 3, 2, 2, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 4, 2, 1, 2, 2, 2, 2), (1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 9, 9), (2, 2, 2, 2, 3, 2, 2, 2, 2, 2)~~ ?

(A) 1 B) 2 C) 3 D) 4

4. Fie $G_1 = (V, E_1)$ și $G_2 = (V, E_2)$ două grafuri neorientate **conexe**, fiecare având mulțimea nodurilor $V = \{1, 2, \dots, n\}$ cu $n > 5$, care verifică următoarea proprietate: suma dintre matricea de adiacență a lui G_1 și matricea de adiacență a lui G_2 este tot o matrice de adiacență a unui graf neorientat cu n noduri. Câte dintre următoarele afirmații sunt adevărate? (cu $[x]$ am notat partea întreagă a numărului x)

- Mulțimile de muchii E_1 și E_2 sunt disjuncte.
- Atât graful G_1 , cât și graful G_2 au cel puțin $n-1$ muchii.
- Atât graful G_1 , cât și graful G_2 au cel mult $[n(n-1)/4]$ muchii.
- Nu există nod de gradul $n-1$ nici în graful G_1 nici în graful G_2 .

(A) 1 B) 2 C) 3 D) 4

5. Un șir x este un subșir al șirului a dacă toate caracterele lui x se găsesc în aceeași ordine, nu neapărat consecutiv, în a . De exemplu $x = "am"$ este subșir al șirului $a = "admis"$, dar nu și al șirului $"mare"$. Un șir x este o permutare comună a șirurilor a și b dacă există o permutare a lui x care să fie subșir al lui a și există o permutare a lui x care să fie subșir al lui b . De exemplu $x = "mia"$ este permutare comună a șirurilor $a = "admis"$ și $b = "matematica"$ deoarece permutarea $"ami"$ a lui x este subșir al lui a și permutarea $"mai"$ a lui x este subșir al lui b . Care este lungimea maximă a unui șir x care este cea mai lungă permutare comună a șirurilor: ~~marțadaremerepăreprune, mulțeciresesimereadrenind~~

A) 6 B) 10 C) 16 D) 19

6. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + 2 \cdot x + 3 \cdot x^2 + 4 \cdot x^3 + \dots + 2022 \cdot x^{2021}$. Considerând un algoritm care folosește numai operații de adunare și înmulțire, care este numărul minim de operații necesare unui asemenea algoritm pentru a calcula valoarea funcției f într-un punct x :

A) 2021 B) 4042 C) 2043231 D) 2045253

7. În următorul algoritm A este o matrice cu 12 linii și 12 coloane, cu liniile și coloanele numerotate de la 1, iar variabilele i, j, n sunt de tip întreg. Dacă inițial toate elementele matricei A sunt egale cu 0, care este valoarea afișată după executarea algoritmului?

```

A[1,1] ← 1
n ← 12

pentru j ← 2, n execută
    A[1,j] ← 2 * A[1,j-1]
    pentru i ← 2, j execută
        A[i,j] ← 2 * (A[i,j-1] + A[i-1,j-1])
scrie A[n-4,n-1]

```

- A) 112640 B) 245760 ☒ C) 122880 D) 168960

8. Fie funcția:

Limbaajele C/C++	Limbaajul Pascal
<pre> int f(int x) { if(x == 0) return 0; if(x % 2 == 0) return f(x/2) + (x + 1) % 2; else return f(x/2) - x % 2; } </pre>	<pre> function f(x:integer):integer; begin if x = 0 then f := 0 else if x mod 2 = 0 then f := f(x div 2) + (x + 1) mod 2 else f := f(x div 2) - x mod 2; end; </pre>

Pentru câte numere naturale nenule mai mici strict decât 2022 funcția returnează 0?

- ☒ A) 175 B) 350 C) 875 D) 1021

9. Un vector v cu n componente distincte (indexat de la 1) se numește 2-ordonat dacă $v[i-2] < v[i] < v[i+2]$ pentru orice i , $2 < i < n-1$. De exemplu: vectorul $[1, 4, 2, 6, 3, 7, 5, 8]$ este 2-ordonat. Într-un vector 2-ordonat cu $2n$ elemente care este numărul maxim de poziții la care un element se poate găsi față de poziția lui în vectorul ordonat? (de exemplu, pentru vectorul $[1, 4, 2, 6, 3, 7, 5, 8]$ față de vectorul $[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]$ poziția lui 1 este aceeași, poziția lui 2 diferă cu 1, poziția lui 3 diferă cu 2, etc.)

- A) 2 B) $\lfloor n/2 \rfloor$ ☒ C) n D) $2n-1$

10. Fie v_1 și v_2 doi vectori ordonați strict crescător, ce conțin n , respectiv m elemente, cu $n = m^2$. Care este complexitatea minimă a unui algoritm pentru a verifica dacă există o pereche de numere întregi (a, b) cu a din v_1 , b din v_2 astfel încât $a + b = k$, cu $1 \leq k \leq 10^{12}$?

- ☒ A) $O(\log m^m)$ B) $O(\log m)$ C) $O(n \log m)$ ☒ D) $O(n + m)$

11. Fie un arbore cu 2022 de noduri și 22 de niveluri (numerotate de la 0 la 21), cu toate frunzele aflate pe ultimul nivel (rădăcina este unicul nod al nivelului 0, fiii rădăcinii formează nivelul 1, fiii nodurilor de pe nivelul 1 formează nivelul 2, etc.). Fie F și f numărul maxim, respectiv minim de frunze pe care îl poate avea un astfel de arbore. Atunci $F \cdot f$ are valoarea:

- A) 1899 ☒ B) 2102 C) 1524 ☒ D) 1900

12. Considerăm următoarea funcție recursivă:

Limbaajele C/C++	Limbaajul Pascal
<pre>int f(int n, int k) { if(n == 0) return 0; if(k%2 == 0) return f(n/10, k/2) + n%10; else return f(n/10, (k-1)/2) - n%10; }</pre>	<pre>function f(x:longint):integer; begin if n = 0 then f := 0 else if k mod 2 = 0 then f := f(n div 10, k div 2) + n mod 10 else f := f(n div 10, (k-1) div 2) - n mod 10; end;</pre>

Ce valoare va furniza funcția în urma apelului $f(15092022, 133)$?

- A) -15 B) 13 C) 15 D) -17

13. Considerăm următoarea secvență de program, în care a , b și k sunt variabile de tip număr întreg:

```
a ← 15
b ← 2022
k ← 0
cât timp a ≠ b execută
    a ← a + 4
    b ← b - 5
    k ← k + 1
scrie k
```

După rularea secvenței de mai sus, se va afișa:

- A) nicio valoare B) 243 C) 245 D) 223 ✓

14. Ultima cifră a numărului $1^1 + 2^2 + 3^3 + 4^4 + \dots + 2021^{2021} + 2022^{2022}$ este:

- A) 3 B) 5 C) 7 D) 9

15. Considerăm următoarea secvență de cod, în care v este un tablou unidimensional format din n numere întregi nenule și indexat de la 1, iar i și k sunt două variabile de tip număr întreg:

```
k ← 1
pentru i ← 1, n execută
    dacă ... atunci
        k ← 0
```

Cu ce expresie trebuie înlocuite punctele de suspensie din secvența de cod dată astfel încât, după executarea ei, variabila k să aibă valoarea 1 dacă și numai dacă toate valorile din tabloul v au aceeași paritate și același semn?

- A) $v[i]*v[1] < 0$ sau $v[i] \bmod 2 \neq v[1] \bmod 2$ ~~B) $v[i]*v[1] < 0$ și $v[i] \bmod 2 \neq v[1] \bmod 2$~~
~~C) $v[i]*v[1] > 0$ și $v[i] \bmod 2 = v[1] \bmod 2$~~ D) $v[i-1]*v[i] < 0$ sau $v[i] \bmod 2 \neq v[i-1] \bmod 2$