Universitatea din București Facultatea de Matematică și Informatică

Concursul de admitere iulie 2022

I. Algebră. Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

- (a) Arătați că determinantul matricei A este egal cu 0. Calculați rangul matricei A.
- (b) Demonstrați că $A^3 = -A$ și că $A^5 + A^3 = O_3$, unde $O_3 \in M_3(\mathbb{R})$ este matricea nulă.
- (c) Considerăm sistemul omogen

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + z = 0 \\ -y - z = 0 \end{cases}$$

a cărui matrice este A. Determinați acea soluție (x_0, y_0, z_0) a acestui sistem, cu toate componentele numere reale, pentru care suma $(x_0 - 1)^2 + (y_0 - 1)^2 + (z_0 - 1)^2$ ia cea mai mică valoare posibilă.

(d) Demonstrați că mulțimea $G = \{A, A^2, A^3, A^4\}$ este grup în raport cu operația de înmulțire a matricelor.

II. Analiză. Fie funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{-1, -3\} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \ln(|x^2 + 4x + 3|)$.

- (a) Demonstrați că dreapta de ecuație x = -1 este asimptotă verticală la graficul funcției f. Precizați dacă graficul funcției f mai are și alte asimptote.
- (b) Determinați intervalele de convexitate ale funcției f.
- (c) Calculați $\int_0^2 f(x)dx$.
- (d) Definim şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ prin

$$x_n = f'(1) - f'(2) + \ldots + f'(2n-1) - f'(2n).$$

Demonstrați că șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

III. Geometrie. În planul de coordonate xOy se consideră punctele $A(1,0), B(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ și $C(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$.

- (a) Arătați că triunghiul ABC este echilateral.
- (b) Determinați raza cercului circumscris triunghiului ABC precum și coordonatele centrului acestui cerc.
- (c) Calculați $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$ și $|2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}|$.
- (d) În interiorul triunghiului ABC se consideră cinci puncte. Arătați că există cel puțin două dintre ele aflate la distanța mai mică decât $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

INFORMATICĂ – Varianta 1

1. Fie A o matrice pătratică. Se consideră secvența scrisă în pseudocod (x div y reprezintă câtul împărțirii lui x la y):

```
n ← 22; val ← 0

pentru k ← 1, (n+1) div 2 execută

pentru i ← k, n-k execută

val ← val+1

A[k,i] ← val

pentru i ← k, n-k execută

val ← val+1

A[i,n-k+1] ← val

pentru i ← n-k+1, k, -1 execută

val ← val+1

A[n-k+1,i] ← val

pentru i ← n-k, k+1, -1 execută

val ← val+1

A[i,k] ← val
```

Ce valoare are elementul A[18][18] după executarea secvenței de cod date?

- A) 315
- B) 427
- C) 400
- D) 174
- 2. Considerăm vectorul v = [4, 3, -10, 3, -1, 2, 0, -3, 5, 7, -4, -8, -10, 4, 7, -30, -2, -6, 4, 7]. Care este suma maximă a unei secvențe v[i], v[i+1], ..., v[j] cu i și j doi indici valizi din v?

 A) 11
 B) 12
 C) 13
 D) 14
- 3. În următorul algoritm descris în pseudocod v este un vector de numere întregi, iar variabilele n, k, x, y, i, a și rez sunt de tip întreg:

Știind că valoarea citită pentru n este un număr natural mai mare strict decât 5, iar valorile citite pentru variabilele x și y sunt numere naturale din intervalul [1, n] și valoarea lui x este mai mică strict decât cea a lui y, cu cât va fi egală valoarea variabilei rez la finalul executării algoritmului?

A)
$$(n-1) \cdot (y+1)$$

B)
$$(n-1) \cdot (y-x)$$

C)
$$(n-1) \cdot (y-x+1)$$

D)
$$n \cdot (y-x+1)$$

4. În următorul algoritm descris în pseudocod variabilele rez, i și n sunt de tip întreg, iar v este un vector de numere întregi cu elementele aflate pe pozițiile de la 1 la n:

Dacă variabila n are valoarea 10, pentru câți vectori v cu 10 elemente din mulțimea {0, 1} cu elementele pe pozițiile 1, 2,..., 10 variabila rez va avea valoarea 0 la finalul executării algoritmului?

- A) 89
- B) 144
- C) 512
- D) 256

5. O adresă IP validă constă din patru numere întregi între 0 și 255 separate prin trei puncte. Un număr întreg nenul nu poate avea zerouri la început. De exemplu, "0.1.2.201" și "192.168.1.1" sunt adrese IP valide, dar "0.011.255.245" nu este validă. Fiind dat șirul s = "201057", care este numărul de adresele IP valide posibile care pot fi formate prin inserarea de puncte în s, fără a rearanja sau elimina cifre din s?

- A) 5
- B) 3
- C) 4
- D) 6

6. Fie v un vector cu pozițiile numerotate de la 1 și n un număr natural strict mai mic decât numărul de elemente al vectorului. Se consideră următoarea secvență de pseudocod:

pentru
$$i \leftarrow 1$$
, n execută $V[i] \leftarrow V[i] + 1$

Care din următoarele secvențe de pseudocod produc o schimbare identică a vectorului v cu cea produsă de secvența de mai sus?

- (1) $i \leftarrow 0$ cât timp $i \le n$ execută $i \leftarrow i + 1$ $v[i] \leftarrow v[i] + 1$
- (2) i ← 1

 cât timp i < n execută

 v[i] ← v[i] + 1

 i ← i + 1
- (3) $i \leftarrow 0$ cât timp i < n execută $v[i+1] \leftarrow v[i+1] + 1$ $i \leftarrow i + 1$
- (4) $i \leftarrow 0$ repetă $v[i+1] \leftarrow v[i+1] + 1$ $i \leftarrow i + 1$ până când i > n

- A) 1 și 2
- B) 2 și 3
- C) 3
- D) 4

7. Considerăm următoarea funcție recursivă:

```
Limbajele C/C++
                                                                 Limbajul Pascal
int f(int n, int a, int b)
                                               function f(n,a,b:longint):integer;
                                               begin
{
                                                   if n = 0 then f := 0
    if(n == 0)
        return 0;
                                                   else
                                                     begin
    if(a > n % 10)
                                                       if a > n mod 10 then
        a = n \% 10;
                                                          a := n \mod 10;
    if(b < n % 10)
                                                        if b < n mod 10 then</pre>
        b = n \% 10;
                                                          b := n \mod 10;
                                                        f := b - a + f(n div 10, a, b);
    return b - a + f(n/10, a, b);
                                                    end;
}
                                               end;
```

Ce valoare va furniza funcția în urma apelului f(214354322, 10, -1) ?

- A) 20
- B) 7
- C) 15
- D) 19

8. Fie $G_1 = (V, E_1)$ și $G_2 = (V, E_2)$ două grafuri neorientate, ambele având mulțimea nodurilor $V = \{1, 2, ..., n\}$ cu n > 4, care verifică următoarea proprietate: pentru fiecare nod i∈{1, 2,..., n-2} lista nodurilor adiacente cu i în G₁ coincide cu lista nodurilor adiacente cu i în G2. Care este cea mai mare valoare pe care o poate avea cardinalul mulțimii $(E_1 \setminus E_2) \cup (E_2 \setminus E_1)$?

A) 0

B) 1

C) 2n-3

D) 2n-4

- 9. Fie v un vector format din n numere întregi și indexat de la 1, având următoarele proprietăți:
 - v are elementele ordonate strict crescător;
 - numărul 22 nu se află în vectorul v;
 - dacă se execută algoritmul de tip căutare binară de mai jos pentru vectorul v si valoarea x = 22, atunci la terminarea algoritmului valoarea variabilei cnt va fi egală cu 10 (x div y reprezintă câtul împărțirii lui x la y).

```
st \leftarrow 1; dr \leftarrow n; x \leftarrow 22
cnt ← 0
rcât timp st <= dr execută
        cnt ← cnt+1
        mij ← (st+dr) div 2
         rdacă v[mij] = x
                 atunci
                          st \leftarrow dr+1
                 altfel
                          <sub>「</sub>dacă x < v[mij]
                                  atunci
                                           dr ← mij-1
                                  altfel
                                           st ← mij+1
```

Care este valoarea maximă a lungimii n a unui vector de acest tip?

A) $2^{10}-1$

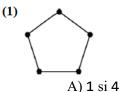
B) 2¹⁰

(2)

C) $2^{11} - 2$

D) $2^{10}+2^9-2$

10. Fie afirmația: "Orice graf conex conține cel puțin un nod ce are gradul 2". Care din următoarele grafuri constituie contraexemplu/contraexemple pentru această afirmație?





B) 1 și 2



C) 3

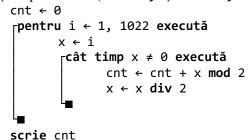


D) 5





11. Fie secvenţa în pseudocod (x div y şi x mod y reprezintă câtul şi restul împărţirii lui x la y):



Ce valoare va fi afișată?

A) 4956

B) 5106

C) 4868

D) 5110

12. Considerăm următorul algoritm, în care A este o matrice pătratică cu elemente numere întregi (x mod y reprezintă restul împărțirii lui x la y):

```
citește n (număr natural nenul)

pentru i ← 1,n execută

pentru j ← 1,n execută

dacă i ≥ j

atunci

A[i,j] ← i mod j

altfel

A[i,j] ← j mod i

pentru i ← 1,n execută

pentru j ← 1,n execută

scrie A[i,j]
```

Dacă pentru n se va citi valoarea 12, câte valori nule vor fi afișate?

- A) 58
- B) 70
- C) 12
- D) 46

13. Fie funcția definită astfel:

```
Limbajele C/C++
                                                                 Limbajul Pascal
int f(int x)
                                                  function f(x:integer):integer;
                                                 begin
{
   if(x == 0)
                                                     if x = 0 then f:=0
     return 0;
                                                     else
   if(x \% 2 == 0)
                                                       if x \mod 2 = 0 then
     return f(x/10) + 1;
                                                         f:=f(x div 10) + 1
     return f(x/10) - 1;
                                                         f:=f(x div 10) - 1;
                                                 end;
```

Pentru câte numere naturale nenule mai mici strict decât 1207 funcția returnează valoarea 0?

- A) 125
- B) 124
- C) 118
- D) 123
- 14. Considerăm următoarele cinci afirmații pentru un graf neorientat G:
 - G este conex
 - Numărul de componente conexe ale lui G este mai mare sau egal cu 1012
 - G are cel putin un nod de grad 0
 - G are cel putin un nod de grad 1
 - G are cel putin un nod de grad mai mare strict decât 1

Câte dintre cele 5 afirmații sunt adevărate pentru orice graf neorientat G având 2023 noduri cu proprietatea că matricea sa de adiacentă are exact 2022 de valori egale cu 1?

- A) 1
- B) 2
- C
- D) 4

15. Considerăm următorul algoritm scris în pseudocod:

```
citeste n (număr natural nenul)
i ← 0; p ← 1
cât timp i <= n execută
j ← 1
cât timp j <= p execută
scrie j
j ← j + 1
i ← i + 1; p ← p * 2</pre>
```

Complexitatea algoritmului de mai sus este egală cu:

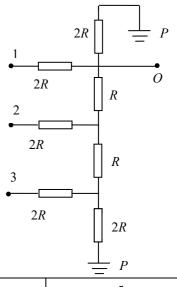
- A) $0(2^{n})$
- $B) O(n \cdot p)$
- C) $0(n^2)$
- $D) O(n \cdot log_2 n)$

FIZICĂ – Varianta 1

1. Doi rezistori fabricați din același metal au formă cubică, masele lor fiind m_1 , $m_2 = 8m_1$. Valoarea raportulului R_1/R_2 al rezistențelor electrice măsurate între fețe opuse este:

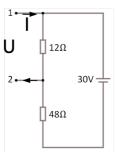
A) $\frac{R_1}{R_1} = \frac{1}{R_1}$	B) $\frac{R_1}{R_1} = 2$	$(C)^{\frac{R_1}{2}} = 4$	D) $\frac{R_1}{R_1} = \frac{1}{R_1}$
R_2 2	R_2	R_2	R_2 4

2. În circuitul electric din figura alăturată, tensiunile electrice între punctele 1, 2, 3 ale circuitului și referința P (reprezentată în figură prin simbolul \equiv) au valorile U_{1P} , U_{2P} , respectiv U_{3P} , cu $U_{1P} = U_{2P} = U_{3P} = 1$ V. Tensiunea electrică U_{OP} între punctul O și referința P are valoarea:



_				-	
	A) $\frac{7}{12}$ V	B) $\frac{5}{12}$ V	C) $\frac{3}{8}$ V	$D)\frac{5}{9}V$	

3. Între bornele 1 și 2 circuitul electric din figură are aceeași caracteristică *I-U* ca o baterie cu tensiunea electromotoare *E* și rezistența internă *r*. Reamintim că prin caracteristică *I-U* pentru două borne se înțelege dependența intensității curentului *I* prin cele două borne (vezi notația I și săgeata asociată schițată în figură) de tensiunea *U* între cele două borne. În circuitul din figură bateria este ideală. Valorile lui *E* și *r* sunt:

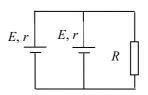


A) E 4 ET	D) E OU	C) E 211	D) E (V
A) E = 4.5V	B) $E = 9V$	E = 3V	D) $E = 6V$
$r = 0.5\Omega$	$r=2\Omega$	$r=1\Omega$	$r = 9.6\Omega$

4. Puterea disipată pe o rezistență $R_1=10\Omega$ conectată la o baterie are valoarea $P_1=2,5$ W. Pe o rezistență $R_2=90\Omega$, conectată la aceeași baterie, puterea disipată are valoarea $P_2=0,9$ W. Tensiunea electromotoare E a bateriei și rezistența internă r a acesteia au valorile:

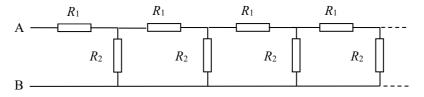
A) E=10	V B) $E=2$	(20V) C) $E=2$	10V D) E=10V
r=109	r=1	r=2	$r=5\Omega$

5. Două baterii identice, cu tensiunea electromotoare E și rezistența internă r, sunt legate în paralel, ca în figura alăturată, pe o rezistență R. Puterea disipată pe rezistență este maximă pentru o valoare a rezistenței egală cu:



A) R = r B) $R = \frac{r}{2}$ C) R = 2r D) $R = \frac{r}{4}$

6. Rezistența echivalentă R a circuitului infinit din figura alăturată între punctele A și B, pentru $R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 2\Omega$ are valoarea:



A) $R = \sqrt{3}\Omega$	B) $R=3\Omega$	C) $R=2\Omega$	D) $R = \sqrt{2}\Omega$

7. Valoarea rezistenței electrice a unui rezistor este de 100Ω iar intensitatea curentului prin rezistor este de 2mA. Tensiunea între capetele rezistorului are valoarea:

A) 0,2V B) 200V	C) 50V	D) 0,02V
-----------------	--------	----------

8. Un conductor are lungimea l, aria secțiunii transversale S constantă și rezistivitatea electrică ρ . Rezistența electrică a conductorului are expresia:

A) $R = \frac{\rho l}{S}$ B) $R = \frac{\rho S}{l}$	C) $R = \frac{l}{\rho S}$	D) $R = \frac{s}{\rho l}$
---	---------------------------	---------------------------

9. La bornele unei baterii cu tensiunea electromotoare E și rezistența internă r se conectează un rezistor cu rezistența R. În aceste condiții, dacă unim suplimentar capetele rezistorului cu un conductor de rezistență neglijabilă, tensiunea U între electrozii bateriei devine:

A)
$$U = E - r \frac{E}{R+r}$$
 B) $U = \frac{Er}{R+r}$ C) $U = E$ D) $U = 0V$

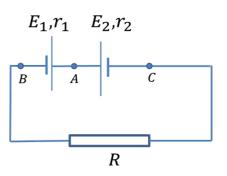
10. Secțiunea unui conductor prin care trece un curent electric continuu este străbătută de o sarcină electrică de 10C într-un interval de timp de 2s. Valoarea medie a intensității curentului electric prin conductor este:

A) I=20A B) I=5A	C) I=0,2A	D) I=12A
------------------	-----------	----------

11. Două becuri electrice sunt legate în paralel, gruparea fiind alimentată de o sursă de tensiune electromotoare. Becul care consumă mai multă energie electrică este:

sticla D) Cel cu rezistența
mată electrică mai mare

12. În circuitul din figură se cunosc tensiunile electromotoare ale bateriilor E_1 , $E_2 = 3E_1$ și rezistențele lor interne r_1 , r_2 . Ce expresie are tensiunea $U_{AB} = V_A - V_B$ între punctele A și B? Se neglijează rezistența conductoarelor de legătură.



A) $E_1 \frac{R - r_1 + r_2}{R + r_1 + r_2}$	B) $E_1 \frac{R+3r_1+r_2}{R+r_1+r_2}$	C) <i>E</i> ₁	D) - <i>E</i> ₁
--	---------------------------------------	--------------------------	----------------------------

13. Rezistențele electrice pentru patru rezistori au valorile R_1 =10 Ω , R_2 =20 Ω , R_3 =50 Ω și R_4 =60 Ω . Rezistența electrică echivalentă a grupării serie are valoarea:

Α) 140Ω	Β) 28Ω	C) 200Ω	D) 100Ω

14. Un reostat cu rezistență variabilă R este conectat la un generator cu tensiunea electromotoare E și rezistența internă r. Generatorul transferă aceeași putere reostatului atunci când valorile rezistenței variabile devin R_1 și, respectiv, R_2 . În aceste condiții, este adevărată relația:

15. Un rezistor este răcit de la temperatura de 100°C până la 0°C. Coeficientul de variație a rezistivității cu temperatura pentru materialul din care este confecționat rezistorul are valoarea $\alpha = 4 \times 10^{-3} \text{grad}^{-1}$. Care dintre afirmațiile de mai jos este corectă?

A) Rezistența rezistorului crește de 1,4 ori	B) Rezistenţa rezistorului scade de 1,4 ori	C) Rezistenţa rezistorului ramâne neschimbată	D) Rezistenţa rezistorului scade până la valoarea de 0,4 Ω
--	---	---	---



Concursul de admitere iulie 2022 ${\bf Barem}$

Ι.	Alg	ebră. Din oficiu
	(a)	Calculul determinantului matricei A , utilizând proprietăți ale determinanților,
		sau o formulă de calcul
		Evidențierea unui minor de ordinul 2, nenul al matricei A
		Formularea concluziei: rang(A) = 2
	(b)	Calculul matricelor A^2 şi A^3
		Evidenţierea egalității $A^3 = -A$
		Argumentarea (prin calcul direct, sau prin utilizarea relației anterioare) a
		egalității $A^5 + A^3 = O_3$
	(c)	Descrierea mulțimii soluțiilor sistemului dat (de exemplu $S = \{(t, t, -t) \mid t \in \mathbb{R}\}$)0,5 p
		Exprimarea într-o formă echivalentă a condiției din enunț, folosind un singur parametru
		(de exemplu $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(t) = (t-1)^2 + (t-1)^2 + (-t-1)^2 = 3t^2 - 2t + 3) \dots 0,5$ p
		Identificarea punctului de minim (pentru funcția de mai sus este $\frac{1}{3}$)
		Formularea răspunsului (scrierea soluției (x_0, y_0, z_0) pentru care se realizează minimul):
		$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ 0,5 p
	(d)	Demonstrarea faptului că înmulțirea este lege internă pe G ,
		eventual prin alcătuirea tablei operației
		Justificarea proprietății de asociativitate (prin demonstrație directă,
		sau prin transfer de la $(M_3(\mathbb{R}),\cdot)$ la $G)$
		Justificarea faptului că A^4 este elementul neutru al înmulțirii pe G
		Demonstrarea faptului că orice element din G are un invers în G
II.	An	naliză. Din oficiu
	(a)	Calculul corect a cel puţin unei limite laterale în $x_0 = -1$
	()	Concluzionarea că dreapta de ecuație $x=-1$ este asimptotă verticală
		Demonstrația faptului că că dreapta de ecuație $x=-3$ este asimptotă verticală
		Graficul lui f nu are asimptote orizontale
		Graficul lui f nu are asimptote oblice
	(b)	Calculul lui $f'(x)$ $(f'(x) = \frac{2x+4}{x^2+4x+3}$ sau sub forma $f'(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+3}, x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -3\}) \dots 0,5$ p
	(0)	Calculating $f(x)$ $f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x + 3}$ satisfies formary $f(x) = \frac{1}{x + 1} + \frac{1}{x + 3}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -0\}$ 0,0 p
		Calculul lui $f''(x)$ $(f''(x) = \frac{-2(x^2+4x+5)}{(x^2+4x+3)^2}$
		sau sub forma $f''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+3)^2}, x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -3\})$
		Determinarea semnului lui $f''(x)$ (semnul este minus pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -3\}$)0,5 p
		Determinarea intervalelor de convexitate, i.e. f este concavă pe $(-\infty, -3)$,
		respectiv pe $(-3, -1)$, respectiv $(-1, +\infty)$
	(c)	Utilizarea unei metode de calcul care să conducă la rezultat
	(-)	
		Finalizarea calculului integralei $\int_0^2 f(x)dx = 5 \ln 5 - 4$
	(d)	· •
		Şirul este mărginit
		Şirul este convergent

III. Geometrie. D	Din oficiu	1 p
(a) Scrierea corec	ctă a formulei distanței dintre două puncte	1 p
Calculul cored	ect al lungimilor segmentelor $AB = AC = BC = \sqrt{3}$	1,5 p
ABC triungh	ni echilateral pentru că $AB = AC = BC$	0,5 p
(b) Coordonatele	e centrului cercului circumscris $(0,0)$	1 p
Raza cercului	i circumscris $R=1$	1 p
(c) $ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} =$	= 3	1 p
$ 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} $	$ =\sqrt{57}$	1 p
(d) Ideea de a îm	npărți triunghiul în patru triunghiuri congruente	
(cele patru tri	riunghiuri determinate de mijloacele laturilor)	0,5 p
Distanța cea i	mai mare dintre două puncte aflate într-un triunghi echilateral	
este lungimea	a laturii și se realizează când punctele sunt vârfuri ale triunghiului .	1 p
Observarea fa	aptului că există cel puțin două puncte într-unul din cele patru triu	nghiuri
și concluzia .		0,5 p

Concursul de admitere iulie 2022

Domeniile de licență - Matematică, Informatică, Calculatoare și Tehnologia Informației

Informatică / Fizică

Barem (toate variantele)

Varianta	1
----------	---

	I	F
1	A	В
2	A C C	A
3 4 5	C	D
4	В	A
	A C	В
6	C	С
7	A	A
8	B C C	A
9	C	D
10	C	В
11	D	В
12	Α	В
13	D	A C
14	В	
15	A	В

Varianta 2

	I	F
1	В	C
2	C	В
3	В	D
4	C	С
5	В	D
6	В	A
7	D	A
8	D	В
9	D	В
10	D	C C
11	D	C
12	С	В
13	A	C C
14	В	С
15	A	В

Varianta 3

I	F
1 D I)
)
3 B (\Box
4 A	4
5 A I)
0 0 0	\Box
7 C	4
8 A 1	В
8 A D 9 C D)
10 D 1	В
11 B I)
12 D	\mathbb{C}
13 C I)
14 A (O
15 A	\mathbb{C}^{-}

Varianta 4

	I	F
1	D	A
2 3 4 5	C	D
3	D	Α
4	D	A C
5	В	Α
6	В	В
7	В	В
8	B C	D
9	C	A
10	D	D
11	D	A C
12	В	
13	A	D
14	A A	D
15	A	A