Universitatea din Bucureşti **21.07.2016**
Facultatea de Matematică şi Informatică

Concursul de admitere iulie 2016
Domeniul de licenţă – *Informatică*

I. Algebră. Fie mulţimea $A = \{a + ib\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.

(a) Să se arate că $(5 + 2i\sqrt{3})^2 = 13 + 20i\sqrt{3}$.

(b) Să se calculeze $|5 + 2i\sqrt{3}|$.

(c) Să se arate că A este parte stabilă în raport cu adunarea şi înmulţirea numerelor complexe şi A este inel împreună cu aceste operaţii.

(d) Dacă $u, v \in A$ şi $uv = 5+2i\sqrt{3}$, atunci să se arate că unul dintre numerele u şi v este 1 sau -1.

(e) Să se determine $u \in A$ pentru care $u^2 = 13 + 8i\sqrt{3}$.

II. Analiză. Fie funcţia $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arcsin(1 - 2x^2)$.

(a) Să se determine punctele din domeniul de definiţie al funcţiei f în care aceasta nu este derivabilă.

(b) Studiaţi convexitatea funcţiei f.

(c) Calculaţi $I = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} f(x)\, dx$.

(d) Demonstraţi că funcţia $g : \left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \to \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$, $g(x) = f(x)$ este bijectivă şi determinaţi

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{6}} g^{-1}(x)\, dx.$$

III. Geometrie. Pe laturile (AB) şi (AC) ale triunghiului ABC se consideră punctele D respectiv E astfel încât $\frac{AD}{DB} = k$ şi $\frac{AE}{EC} = p$.

(a) Dacă $p = k$, să se găsească valoarea lui k pentru care $\frac{DE}{BC} = \frac{2}{3}$.

(b) Dacă $p = k$ iar $(CD$ şi $(BE$ sunt bisectoarele unghiurilor $\angle BCA$ şi $\angle CBA$, să se arate că triunghiul ABC este isoscel.

(c) Să se arate că mijloacele segmentelor $(AB), (AC)$ şi (DE) sunt coliniare dacă şi numai dacă $p = \frac{1}{k}$.

Timp de lucru 3 ore.

IV. Informatică.

Ionuț tocmai a terminat liceul și susține examenul de admitere la facultate. Știind că s-a pregătit foarte bine pentru examen, el dorește să își anunțe reușita după examen printr-o postare pe Facebook. Iounț cunoaște n utilizatori reprezentați de numerele de la 1 la n, între care există m relații de prietenie de forma i j, unde i și j sunt utilizatori, iar n și m sunt numere naturale nenule. Un utilizator nu poate fi prieten cu el însuși, iar o relație de prietenie între doi utilizatori ne spune că fiecare dintre ei este prieten cu celălalt.

Întrucât dorește ca postarea lui să fie cât mai răspândită, Ionuț vrea să afle care sunt utilizatorii cei mai bine conectați din mulțimea sa de cunoscuți, pentru ca eventual să le ceară prietenia. Pentru aceasta, Ionuț trebuie să găsească cea mai mare submulțime de utilizatori cunoscuți, în care fiecare utilizator din această submulțime are cel puțin k prieteni aflați la rândul lor în submulțime, unde k este un număr natural nenul.

Fiind date la intrare numerele n, m și k, pe aceeași linie, separate prin spațiu, precum și $2m$ numere naturale cuprinse între 1 și n, pe o linie nouă, separate prin spațiu, reprezentând în ordine cele m relații de prietenie între cei n utilizatori, ajutați-l pe Ionuț să găsească o soluție la problema sa, rezolvând următoarele subpuncte:

a) Să se determine și să se afișeze, în ordine de la 1 la n, numărul de prieteni al fiecăruia dintre cei n utilizatori, conform relațiilor de prietenie date.

b) Să se determine și să se afișeze, printr-o soluție de complexitate timp cât mai bună, în funcție de datele de intrare, membrii celei mai mari submulțimi de utilizatori, cu proprietatea că fiecare utilizator din această submulțime are cel puțin k prieteni aflați la rândul lor în submulțime. În cazul în care nu există o astfel de submulțime pentru k dat, răspunsul va fi cuvântul NU.

Exemple:

Date de intrare	Date de ieșire
5 5 2 1 2 5 1 3 2 4 5 1 4	a) 3 2 1 2 2 b) 1 4 5
5 5 3 1 2 5 1 3 2 4 5 1 4	a) 3 2 1 2 2 b) NU
11 18 3 1 8 4 7 7 10 11 10 2 1 2 3 8 9 8 3 9 3 9 2 5 6 5 11 1 4 10 6 7 6 2 8 11 7 11 6	a) 3 4 3 2 2 4 4 4 3 3 4 b) 2 3 6 7 8 9 10 11

Note:

1. Programele vor fi scrise într-unul dintre limbajele de programare studiate în liceu (Pascal,C,C++). Pentru fiecare soluție se vor descrie informal detaliile algoritmului folosit și ale implementării sub formă de program: semnificația variabilelor, a structurilor de date, a structurilor repetitive, a instrucțiunilor condiționale.
2. Programele vor folosi doar instrucțiunile de bază ale limbajului de programare ales, inclusiv cele de intrare/ieșire, dar nu și alte funcții din biblioteci specializate.
3. Se va considera că datele de intrare ale programelor sunt oricât de mari, dar fără a pune probleme de reprezentare în memorie cu ajutorul tipurilor de date standard.

Universitatea din Bucureşti
Facultatea de Matematică şi Informatică **22.07.2016**

Concursul de admitere iulie 2016
Domeniul de licenţă - *Matematică*

I. Algebră. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

(a) Să se calculeze $2A^2 - 3A$.
(b) Să se arate că $(2A^2 - 3A)A = A(2A^2 - 3A)$.
(c) Să se determine toate matricele $X \in M_2(\mathbb{R})$ pentru care $AX = XA$.
(d) Să se arate că mulţimea $C = \{X \in M_2(\mathbb{R}) |\ AX = XA\}$ este parte stabilă în raport cu adunarea şi înmulţirea matricelor şi că C este inel împreună cu aceste operaţii.
(e) Să se arate că $A^n \neq I_2$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

II. Analiză. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x(x^2 - 5x + 7)$.

(a) Determinaţi ecuaţia asimptotei spre $-\infty$ la graficul funcţiei f şi punctele de extrem local ale acestei funcţii.
(b) Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ ecuaţia $f^{(n)}(x) = 0$ are două soluţii reale, unde $f^{(n)}$ este derivata de ordinul n a funcţiei f.
(c) Calculaţi $I = \int\limits_0^1 f(x)\, dx$.
(d) Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{9^n} \int\limits_1^2 (f(x))^n\, dx = 0$.

III. Geometrie. Fie $ABCDEF$ un hexagon regulat de latură 2.

(a) Calculaţi aria triunghiului ACE.
(b) Calculaţi $|\ \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}\ |$.
(c) Pe segmentele (AC) şi (CE) se consideră punctele M respectiv N astfel încât $\frac{AM}{AC} = \frac{CN}{CE} = k$. Determinaţi numărul k astfel încât punctele B, N şi M să fie coliniare.

IV. Informatică.

Se dă un şir de n numere întregi, cu n număr natural nenul, mai mic decât 32000. Se elimină primul element din şir şi toate elementele şirului aflate pe poziţii care reprezintă numere prime, în ordinea crescătoare a poziţiilor. Operaţia se repetă cu elementele rămase în şir, repoziţionate după eliminarea celorlalte, până când este eliminat şi ultimul element rămas. Să se scrie un program care afişează elementele şirului iniţial, în ordinea în care au fost eliminate conform algoritmului descris mai sus.

Exemplul 1. Pentru $n = 10$ şi şirul $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ programul va afişa 1 2 3 5 7 4 6 8 10 9.

Exemplul 2. Pentru $n = 20$ şi şirul 4, 23, 16, -7, 89, 115, 23, 11, 15, 2, -8, -9, 21, 0, 75, 23, 32, -1, 4, 5 programul va afişa 4 23 16 89 23 -8 21 32 4 -7 115 11 2 0 5 15 -9 75 -1 23.

Notă: Programele vor fi scrise într-unul dintre limbajele de programare studiate în liceu (Pascal, C, C++). Pentru fiecare soluţie se vor descrie informal detaliile algoritmului folosit şi ale implementării sub formă de program: semnificaţia variabilelor, a structurilor de date, a structurilor repetitive, a instrucţiunilor condiţionale.

Timp de lucru 3 ore.

Universitatea din Bucureşti **21.07.2016**

Facultatea de Matematică şi Informatică

Concursul de admitere iulie 2016

Domeniul de licență - *Informatică*

Barem

I. Algebră. Oficiu .... 1 p

(a) Verificarea identităţii .... 1 p

(b) $|5 + 2i\sqrt{3}| = \sqrt{37}$ .... 1 p

(c) A e parte stabilă .... 2 p

$(A, +, \cdot)$ inel .... 2 p

(d) Demonstrarea faptului că $uv = 5 + 2i\sqrt{3}$ implică $u \in \{\pm 1\}$ sau $v \in \{\pm 1\}$ .... 2 p

(e) Determinarea soluţiilor $u_1 = 4 + i\sqrt{3}$ şi $u_2 = -4 - i\sqrt{3}$ .... 1 p

II. Analiză. Oficiu .... 1 p

(a) Calculul lui $f'(x)$ pentru $x \neq -1$, $x \neq 0$ şi $x \neq 1$ .... 1 p

f nu este derivabilă în $-1, 0, 1$ .... 2 p

(b) f este concavă pe $(-1, 0)$ şi pe $(0, 1)$ .... 1 p

f este concavă pe $[-1, 1]$ .... 1 p

(c) $I = \sqrt{3} - \sqrt{2} - \dfrac{\pi}{12}$ .... 2 p

(d) Demonstrarea bijectivităţii .... 1 p

$J = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ .... 1 p

III. Geometrie. Oficiu .... 1 p

(a) $DE \| BC$ .... 1 p

$DE/BC = 2/3$ implică $k = 2$ .... 2 p

(b) Teorema bisectoarei .... 1 p

Finalizare .... 2 p

(c) Orice soluţie: analitică (de exemplu axa Ox dată de BC, axa Oy dată de înălţimea prin A), vectorială sau sintetică (Menelaus) .... 3 p

IV. Informatică. Oficiu .... 1 p

Modelarea enunţului sub formă de graf .... 1 p

(a) Orice soluţie corectă .... 2 p

(b) Implementarea corectă a relaţiilor de prietenie cu ajutorul unei structuri de adiacenţă .... 1 p

Orice soluţie corectă, indiferent de complexitate .... 1 p

la care se adaugă pentru o soluţie de complexitate $O(n^2)$ .... 1 p

şi pentru o soluţie de complexitate mai bună decât $O(n^2)$ .... 1 p

Programele nu au greşeli de limbaj .... 1 p

Claritatea rezolvărilor .... 1 p

Universitatea din Bucureşti **22.07.2016**

Facultatea de Matematică şi Informatică

Concursul de admitere iulie 2016

Domeniul de licenţă - *Matematică*

Barem

I. Algebră. Oficiu .... 1 p

(a) Calculul lui $2A^2 - 3A$: $\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 15 & 8 \end{pmatrix}$ .... 2 p

(b) Verificarea egalităţii .... 1 p

(c) Determinarea matricelor X: $\begin{pmatrix} x & y \\ 3y & x \end{pmatrix}$, cu $x, y \in \mathbb{R}$ .... 2 p

(d) C parte stabilă .... 1 p

$(C, +, \cdot)$ - inel .... 2 p

(e) $A^n \neq I_2$ .... 1 p

II. Analiză. Oficiu .... 1 p

(a) $y = 0$ asimptotă orizontală spre $-\infty$ .... 1 p

$x = 1$ şi $x = 2$ puncte de extrem local .... 2 p

(b) Calculul derivatei de ordinul n: $f^{(n)}(x) = e^x(x^2 + (2n-5)x + (n^2 - 6n + 7))$ .... 1 p

Ecuaţia $x^2 + (2n-5)x + (n^2 - 6n + 7) = 0$ are două rădăcini reale $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ .... 1 p

(c) $I = 8e - 14$ .... 2 p

(d) Demonstrarea inegalităţii $0 \leq f(x) \leq 3e$, $\forall\, x \in [1, 2]$ .... 1 p

Calculul limitei .... 1 p

III. Geometrie. Oficiu .... 1 p

(a) Calculul ariei triunghiului ACE $(3\sqrt{3})$ .... 3 p

(b) $|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}| = 6$. .... 3 p

(c) $k = \frac{1}{\sqrt{3}}$ .... 3 p

IV. Informatică. Oficiu .... 1 p

Generarea tuturor numerelor prime până la n .... 2 p

Eliminarea corectă a elementelor pentru o iteraţie .... 2 p

Efectuarea tuturor iteraţiilor pentru obţinerea soluţiei corecte .... 3 p

Programele nu au greşeli de limbaj .... 1 p

Claritatea rezolvărilor .... 1 p