

Concursul de admitere iulie 2018  
Domeniul de licență – *Informatică*

**I. Algebră.** Fie polinomul  $P(X) = X^3 + mX^2 - 3X + 1$  cu  $m \in \mathbb{R}$ , care are rădăcinile  $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ .

- (a) Pentru  $m = -3$  calculați rădăcinile polinomului  $P$ .
- (b) Calculați în funcție de parametrul  $m$  expresia  $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$ .
- (c) Determinați  $m \in \mathbb{R}$  astfel încât rădăcinile polinomului  $P$  să fie în progresie geometrică.
- (d) Pentru  $m = 0$  arătați că  $2\cos(\frac{2\pi}{9})$  este o rădăcină a lui  $P$ .
- (e) Demonstrați că  $\cos(\frac{2\pi}{9}) + \cos(\frac{4\pi}{9}) + \cos(\frac{8\pi}{9}) = 0$ .

**II. Analiză.** Fie funcția  $f : \mathbb{R} \setminus \{-5\} \rightarrow \mathbb{R}$  dată prin  $f(x) = (x - 1)e^{\frac{-1}{x+5}}$  pentru orice  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-5\}$ .

- (a) Determinați asimptotele la graficul funcției  $f$ .
- (b) Aflați punctele de extrem local ale lui  $f$ .
- (c) Pentru  $m \in \mathbb{R}$  precizați numărul de soluții reale ale ecuației  $f(x) = m$ .
- (d) Calculați  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \int_0^1 x^n f(x) dx$ .

**III. Geometrie.** În sistemul de coordonate  $xOy$  se consideră punctele  $A(-2, 1)$ ,  $B(4, -1)$  și  $C(-2, -3)$ .

- (a) Găsiți ecuația mediatoarei segmentului  $AB$  și coordonatele centrului cercului circumscris triunghiului  $ABC$ .
- (b) Arătați că  $\sin(2\hat{A}) \cdot \overrightarrow{O'A} + \sin(2\hat{B}) \cdot \overrightarrow{O'B} + \sin(2\hat{C}) \cdot \overrightarrow{O'C} = \vec{0}$ , unde  $O'$  este centrul cercului circumscris triunghiului  $ABC$  iar  $\hat{A}, \hat{B}$  și  $\hat{C}$  sunt unghiurile triunghiului  $ABC$ .
- (c) Fie  $D$  mijlocul segmentului  $AB$  și  $M$  un punct variabil pe înălțimea din  $B$  a triunghiului  $ABC$ . Găsiți coordonatele lui  $M$  pentru care suma  $AM + MD$  este minimă.

#### IV. Informatică.

- (a) Se citește un număr natural  $L$  ( $20 \leq L \leq 1000$ ) și un șir de cel mult 10000 de caractere ce conține cuvinte despărțite între ele prin câte un spațiu. Fiecare cuvânt din șirul de caractere citit este format din cel mult  $L$  litere mari ale alfabetului englez. Să se scrie un program care afișează aceste cuvinte, în ordinea în care se citesc, pe linii de cel mult  $L$  caractere, astfel încât orice linie începe și se termină cu un cuvânt și oricare două cuvinte de pe aceeași linie sunt separate printr-un singur spațiu. Oricare linie este folosită la maxim, adică dacă un cuvânt are loc pe acea linie va fi pus acolo și nu va fi trecut pe linia următoare sau spart pe 2 linii.

**Exemplu:** se citește  $L = 22$  și șirul de caractere PROBLEMA DE LA EXAMEN NU MI SE PARE FOARTE GREU DE REZOLVAT IN TIMPUL ACORDAT. Programul va afișa:

```
PROBLEMA DE LA EXAMEN
NU MI SE PARE FOARTE
GREU DE REZOLVAT IN
TIMPUL ACORDAT
```

- (b) Într-un text formatat pe linii ca la punctul (a), două spații sunt *conectate* dacă se învecinează pe verticală sau pe diagonală. Pentru textul formatat mai sus avem mai multe exemple de spații *conectate*: spațiul de pe poziția 9, linia 1, ce separă literele A și D este *conectat* cu cel de pe poziția 9, linia 2; spațiul de pe poziția 15, linia 1, este *conectat* cu cel de pe poziția 14, linia 2. Spațiul de pe poziția 3, linia 2, nu este *conectat* cu niciun alt spațiu. Să se scrie un program care citește numerele naturale  $L, N$  și apoi un text formatat pe  $N$  linii de cel mult  $L$  caractere ca la punctul (a) și afișează mesajul DA dacă în tot textul există cel puțin o pereche de spații *conectate*, altfel afișează mesajul NU.
- (c) În arta tipografică un *râu* este o înșiruire de spații care se întinde pe verticală, pe liniile consecutive ale unui text. Mai precis, un *râu* este definit ca o secvență de cel puțin 2 spații în care oricare 2 spații de pe linii consecutive sunt conectate. Spre exemplu, pentru textul de la punctul (a), avem un *râu* de lungime 4 format din: spațiul de pe poziția 9, linia 1; spațiul de pe poziția 9, linia 2; spațiul de pe poziția 8, linia 3 și spațiul de pe poziția 7, linia 4. De remarcat, faptul că de pe poziția 17, linia 3, nu pornește nici un *râu* întrucât linia 4 se termină pe poziția 14. Să se scrie un program, cu o complexitate de timp cât mai bună, care citește numerele naturale  $L, N$  și apoi un text formatat pe  $N$  linii de cel mult  $L$  caractere ca la punctul (a) și afișează lungimea celui mai lung *râu* posibil, dacă acesta există sau mesajul NU, dacă nu există niciun *râu*.

#### Note:

1. Programele vor fi scrise într-unul dintre limbajele de programare studiate în liceu (Pascal, C, C++). Pentru fiecare soluție se vor descrie informal detaliile algoritmului folosit și ale implementării sub formă de program: semnificația variabilelor, a structurilor de date, a structurilor repetitive și a instrucțiunilor condiționale.
2. Programele vor folosi instrucțiunile de bază ale limbajului de programare ales, funcții din biblioteci de bază (inclusiv cele de intrare/ieșire), dar nu și alte funcții din biblioteci specializate.
3. Citirea datelor se poate face de la tastatură sau dintr-un fișier text. Afișarea se va face numai la monitor. Cele 3 subpuncte se pot rezolva independent, dar funcțiile descrise la un subpunct pot fi folosite și la subpunctele următoare.

**Timp de lucru: 3 ore**

Concursul de admitere iulie 2018  
Domeniul de licență - *Matematică*

**I. Algebră.** Fie matricea  $A(m) = \begin{pmatrix} m+2 & -2 & 3 \\ 0 & m & 3 \\ 0 & 0 & m+3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ , unde  $m$  este un parametru real.

- (a) Determinați  $m \in \mathbb{R}$  astfel încât  $A(m)$  să fie inversabilă.
- (b) Arătați că  $A(0)^3 - 5A(0)^2 + 6A(0) = O_3$ .
- (c) Calculați  $A(0)^{2018}$  și  $A(1)^{2018}$ .
- (d) Fie  $B \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$  și  $C \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$  astfel încât  $B \cdot C = A(0)$ . Calculați  $\det(CB)$  și  $\text{tr}(CB)$ , unde am notat cu  $\text{tr}(CB)$  suma elementelor de pe diagonala principală a matricei  $CB$ .

**II. Analiză.** Fie funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definită prin  $f(x) = \sqrt{|x^2 - 6x + 8|}$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .

- (a) Determinați asimptotele la graficul funcției  $f$ .
- (b) Determinați punctele în care funcția  $f$  nu este derivabilă și intervalele de convexitate ale lui  $f$ .
- (c) Calculați  $\int_2^4 f^2(x) dx$ .
- (d) Pentru orice număr natural  $n \geq 1$  notăm  $I_n = \int_3^4 (f(x))^n dx$ . Demonstrați că șirul  $(I_n)_n$  este convergent și calculați  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$ .

**III. Geometrie.** În planul de coordonate  $xOy$  se consideră punctele  $A(3, 0)$  și  $M(a, 0)$ , unde  $a \in (0, 3)$ . Pe segmentul  $OA$  se construiesc triunghiurile echilaterale  $OMP$  și  $MAQ$ , de aceeași parte a segmentului  $OA$ , cu punctele  $P$  și  $Q$  situate în cadranul I (ambele coordonate strict pozitive). Fie  $N$  mijlocul segmentului  $PQ$ .

- (a) Dacă  $a = 1$ , găsiți coordonatele punctelor  $P$  și  $Q$  și arătați că dreptele  $PQ$  și  $QA$  sunt perpendiculare.
- (b) Dacă  $a = 1$ , fie  $B$  punctul de intersecție al dreptelor  $OP$  și  $AQ$ . Arătați că punctele  $M$ ,  $N$  și  $B$  sunt coliniare.
- (c) Găsiți valoarea lui  $a$  pentru care dreptele  $PQ$  și  $OP$  sunt perpendiculare.
- (d) Arătați că pentru orice valoare a lui  $a \in (0, 3)$  dreptele  $MN$  trec printr-un punct fix.

**IV. Informatică.** Ionuț a fost admis la FMI și tatăl lui i-a făcut cadou o mașină la mâna a doua ca să călătorească cu ea în vacanță, împreună cu prietena sa Măriuca. Din păcate, mașina este veche și la scurt timp, acul vitezometrului se rupe. Descurcăreț de mic, Ionuț îl lipește cu adeziv, dar își dă seama că în urma reparației, acul nu mai indică viteza corectă. Făcând mai multe experimente, Ionuț realizează că viteza pe care o indică acul vitezometrului diferă de viteza reală a mașinii cu un număr real constant  $c$ , a cărui valoare absolută e mai mică decât 100 km/oră.

Pentru a calcula constanta  $c$ , Ionuț merge pe 3 segmente de drum succesive, pe fiecare dintre ele cu viteză constantă și își notează viteza indicată de acul defect al vitezometrului pe fiecare segment de drum:

- pe primul segment de drum, de 40 km, acul îi indică o viteză de 50 km/oră;
- pe al doilea segment de drum, tot de 40 km, parcurs la o altă viteză, acul îi indică 60 km/oră;
- pe al treilea segment de drum, de 100 km, acul îi indică 90 km/oră.

În acest timp, Măriuca înregistrează timpii în care sunt parcurse cele 3 segmente de drum, dar pentru că vrea să îl pună la încercare pe Ionuț, la final nu îi spune decât timpul total  $t$  de 5 ore în care a parcurs toate cele 3 segmente de drum cumulate. După ce își aduce aminte din liceu că viteza se calculează ca raportul dintre distanță și timp, Ionuț ajunge la concluzia că acul vitezometrului indică întotdeauna cu 30 km/oră mai mult decât viteza reală a mașinii.

Scrieți un program care citește numărul natural  $n$ , reprezentând numărul segmentelor succesive de drum pe care Ionuț le parcurge, numărul real  $t$ , reprezentând timpul total (în ore) în care acestea sunt parcurse, precum și  $n$  perechi de numere reale, fiecare reprezentând lungimea unui segment de drum (în km) și valoarea indicată de acul vitezometrului pe segmentul de drum respectiv (în km/oră), iar apoi afișează valoarea numerică a constantei reale  $c$  (în km/oră), calculată cu o precizie de 2 zecimale, cu care viteza indicată de acul defect diferă de viteza reală a mașinii.

**Note:**

1. Programele vor fi scrise într-unul dintre limbajele de programare studiate în liceu (Pascal, C, C++). Pentru fiecare soluție se vor descrie informal detaliile algoritmului folosit și ale implementării sub formă de program: semnificația variabilelor, a structurilor de date, a structurilor repetitive și a instrucțiunilor condiționale.
2. Programele vor folosi instrucțiunile de bază ale limbajului de programare ales, funcții din biblioteci de bază (inclusiv cele de intrare/ieșire), dar nu și alte funcții din biblioteci specializate.

**Timp de lucru 3 ore.**

Concursul de admitere iulie 2018  
Domeniul de licență - *Informatică*

Barem

<b>I. Algebră.</b>	Oficiu .....	1 p
(a)	$x_1 = -1$ .....	0,5 p
	Descompunerea $(x+1)(x^2-4x+1)$ .....	1 p
	$x_{2,3} = 2 \pm \sqrt{3}$ .....	0,5 p
(b)	Scrierea relațiilor lui Viète (cel puțin o relație) .....	0,5 p
	Finalizarea și obținerea expresiei $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -m^3 - 9m - 3$ .....	1,5 p
(c)	$x_2^3 = -1$ sau sistem în care apare rația .....	1 p
	Finalizarea și $m = -3$ .....	1 p
(d)	Verificarea faptului că $2 \cos(\frac{2\pi}{9})$ este o rădăcină a lui $P$ .....	1 p
(e)	Demonstrarea egalității .....	2 p
<b>II. Analiză.</b>	Oficiu .....	1 p
(a)	Calculul pantei asimptotei oblice la $\pm\infty$ : $m = 1$ .....	0,5 p
	Calculul ordonatei la origine a asimptotei oblice la $\pm\infty$ : $n = -2$ .....	1 p
	Scrierea explicită a ecuației $y = x - 2$ .....	0,5 p
	Calculul limitelor laterale în $-5$ .....	0,5 p
	Explicitarea ecuației asimptotei verticale și a tipului ei .....	0,5 p
(b)	Calculul derivatei .....	0,5 p
	Tabelul de variație al funcției/semnul derivatei .....	1 p
	Concluzia: punctele de extrem local ale lui $f$ sunt: $-8$ (maxim) și $-3$ (minim) .....	0,5 p
(c)	Trasarea graficului/ Șirul lui Rolle .....	1 p
	Concluzia: numărul de soluții ale ecuației $f(x) = m$ este:	
	2 soluții pentru $m \in (-\infty, -9\sqrt[3]{e}) \cup (\frac{-4}{\sqrt{e}}, 0)$	
	1 soluție pentru $m \in \left\{-9\sqrt[3]{e}, \frac{-4}{\sqrt{e}}\right\} \cup [0, \infty)$	
	0 soluții pentru $m \in \left(-9\sqrt[3]{e}, \frac{-4}{\sqrt{e}}\right)$ .....	1 p
(d)	Integrarea prin părți (aplicare corectă a formulei) .....	0,5 p
	Calculul limitei $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} \int_0^1 x^{n+2} f''(x) dx = 0$ .....	1 p
	Finalizare: limita este $-f'(1) = -e^{-\frac{1}{6}}$ .....	0,5 p

<b>III. Geometrie.</b>	Oficiu	1 p
(a)	Determinarea ecuației mediatoarei segmentului $AB$ : $3x - y - 3 = 0$	1 p
	Dreapta de ecuație $y = -1$ este mediatoarea segmentului $AC$	1 p
	Coordonatele centrului cercului circumscris $O'(\frac{2}{3}, -1)$	1 p
(b)	Demonstrarea relației	3 p
(c)	$AM + MD = CM + MD$	2 p
	Finalizare $M(0, -1)$ /centrul de greutate al triunghiului $ABC$	1 p
<b>IV. Informatică.</b>	Oficiu	1 p
(a)	Citirea șirului de caractere	0,25 p
	Găsirea cuvintelor separate prin spațiu	0,75 p
	Distribuirea cuvintelor pe o linie cu cel mult $L$ caractere	0,5 p
	Încărcarea liniei la maxim	0,5 p
	Cuvintele sunt conținute integral pe o linie	0,25 p
	Afișarea corectă a liniilor	0,25 p
	Corectitudinea limbajului	0,5 p
	Explicații	0,25 p
(b)	Utilizarea unei structuri de date pentru menținerea informației necesare	0,5 p
	Verificarea conectivității pe cazul general (cu 3 vecini)	0,5 p
	Verificarea conectivității pe cazurile particulare (cu 0, 1, 2 vecini)	0,5 p
	Tratarea cazului pentru DA	0,5 p
	Tratarea cazului pentru NU	0,5 p
	Corectitudinea limbajului	0,5 p
	Explicații	0,25 p
(c)	Corectitudinea soluției	1 p
	Optimalitatea soluției corecte $\mathcal{O}(L \cdot N)$	1 p
	Deducerea complexității soluției prezentate	0,25 p
	Explicații	0,25 p

Concursul de admitere iulie 2018  
Domeniul de licență - *Matematică*

Barem

- I. Algebră.** Oficiu ..... 1 p
- (a)  $A(m)$  inversabilă dacă și numai dacă  $\det A(m) \neq 0$  ..... 0,5 p  
 Calculul determinantului:  $m(m+2)(m+3)$  ..... 1 p  
 $m \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -2, 0\}$  ..... 0,5 p
- (b) Calculul puterilor  $A(0)^2$  și  $A(0)^3$  ale matricei  $A(0)$  ..... 1 p  
 Verificarea egalității ..... 1 p
- (c)  $A(0)^{2018} = \begin{pmatrix} 2^{2018} & -2^{2018} & 3^{2018} \\ 0 & 0 & 3^{2018} \\ 0 & 0 & 3^{2018} \end{pmatrix}$ , ..... 1,5 p  
 $A(1)^{2018} = \begin{pmatrix} 3^{2018} & 1 - 3^{2018} & 4^{2018} - 1 \\ 0 & 1 & 4^{2018} - 1 \\ 0 & 0 & 4^{2018} \end{pmatrix}$  ..... 1,5 p
- (d)  $\text{tr}(CB) = 5$  ..... 1 p  
 $\det(CB) = 6$  ..... 1 p
- II. Analiză.** Oficiu ..... 1 p
- (a)  $y = x - 3$  asimptotă oblică spre  $+\infty$  ..... 0,5 p  
 $y = -x + 3$  asimptotă oblică spre  $-\infty$  ..... 1 p  
 $f$  nu are asimptote verticale ..... 0,5 p
- (b)  $f$  este derivabilă pe  $\mathbb{R} \setminus \{2, 4\}$  ..... 0,5 p  
 Studiul derivabilității în  $x = 2$  ..... 0,75 p  
 Studiul derivabilității în  $x = 4$  ..... 0,75 p  
 Calculul derivatei a doua ..... 0,5 p  
 Concluzia:  $f$  concavă pe  $(-\infty, 2], [2, 4], [4, \infty)$  ..... 0,5 p
- (c) calculul integralei  $I = \frac{4}{3}$  ..... 2 p
- (d)  $(I_n)_n$  descrescător ..... 0,5 p  
 $(I_n)_n$  mărginit ..... 0,5 p  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$  ..... 1 p
- III. Geometrie.** Oficiu ..... 1 p
- (a)  $P(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$  și  $Q(2, \sqrt{3})$  ..... 1 p  
 Demonstrarea perpendicularității ..... 1 p
- (b) Demonstrarea coliniarității ..... 2 p
- (c)  $P(\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2})$  și  $Q(\frac{a+3}{2}, \frac{(3-a)\sqrt{3}}{2})$  ..... 1 p  
 Expresiile pantelor  $m_{OP} = \sqrt{3}$  și  $m_{PQ} = \frac{\sqrt{3}(3-2a)}{3}$  ..... 1 p  
 Condiția de perpendicularitate și calculul lui  $a = 2$  ..... 1 p
- (d) Ecuația dreptei  $MN$ :  $(x-a)3\sqrt{3} - y(3-2a) = 0$  ..... 1 p  
 Identificarea punctului fix  $B(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2})$  ..... 1 p

<b>IV. Informatică.</b>	Oficiu .....	1 p
Găsirea relației care permite aflarea constantei $c$ .....		2 p
Considerarea unui interval de căutare pentru constanta $c$ care conține și valori negative .....		1 p
Găsirea constantei $c$ prin căutare .....		3 p
Respectarea aproximării de 2 zecimale .....		1 p
Corectitudinea limbajului .....		1 p
Explicații .....		1 p