

Concursul de admitere iulie 2014
Domeniul de licență – *Informatică*

I. Algebră. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$.

- (a) Să se determine matricele $X \in M_2(\mathbf{R})$ pentru care $AX = XA$.
- (b) Să se arate că pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$ există două numere întregi x_n și y_n astfel încât $A^n = \begin{pmatrix} x_n & -2y_n \\ y_n & x_n \end{pmatrix}$.
- (c) Să se arate că pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$ numerele x_n și y_n de la (b) sunt nenule.

II. Analiză. Fie $f : \mathbf{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$.

- (a) Determinați ecuațiile asimptotelor la graficul funcției f .
- (b) Arătați că $f(x) \leq \frac{4}{e^2}$, $\forall x \in (-\infty, 0)$.
- (c) Considerăm șirul $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ dat de $x_0 \in (0, \frac{1}{2})$ și $x_{n+1} = f\left(\frac{1}{x_n}\right)$, $\forall n \in \mathbf{N}$. Demonstrați că șirul $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ este convergent și că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.
- (d) Calculați $\int_1^2 f(x) dx$.

III. Geometrie.

- (a) Fie $A(1, 1)$ și $B(3, 2)$ două puncte în plan. Să se determine punctul $M(x, 0)$ astfel încât valoarea sumei $AM + MB$ să fie minimă. Să se găsească minimul acestei sume.
- (b) Să se rezolve ecuația $\cos^4 x - \sin^4 x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- (c) Fie ABC un triunghi cu laturile $AB = c$, $BC = a$ și $AC = b$. Să se exprime suma de produse scalare $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ în funcție de a, b și c .

IV. Informatică. Se dă operația $\bar{} : \{1, 2\} \rightarrow \{1, 2\}$ astfel încât $\bar{1} = 2$ și $\bar{2} = 1$. Operația se extinde asupra oricărei secvențe formate cu cifre de 1 și 2, de exemplu $\overline{1211212121} = 2122121212$. Se consideră șirul infinit s format cu cifre de 1 și 2, generat incremental prin extindere după următoarea regulă de concatenare: $s_1 = 1221$, $s_2 = 1221211221121221$, \dots , $s_{k+1} = s_k \overline{s_k s_k} s_k$, \dots , pentru orice număr natural nenul k .

Fie n un număr natural nenul, $n < 1000000$.

- (a) Să se scrie un program care citește n și afișează primele n cifre ale șirului s .
Exemplu: Pentru $n = 18$ programul va afișa 122121122112122121.
- (b) Să se scrie un program care citește n și afișează a n -a cifră a șirului s , astfel încât numărul de pași ai programului să fie proporțional cu $\log_2 n$ (complexitate timp logaritmică în funcție de n).
Exemplu: Pentru $n = 11$ programul va afișa 1, iar pentru $n = 20$ programul va afișa 2.

Notă: Programele vor fi scrise într-unul dintre limbajele de programare studiate în liceu (Pascal, C, C++). Pentru fiecare soluție se vor descrie informal detaliile algoritmului folosit și ale implementării sub formă de program: semnificația variabilelor, a structurilor de date, a structurilor repetitive, a instrucțiunilor condiționale.

Timp de lucru 3 ore.

Concursul de admitere iulie 2014
Domeniul de licență - *Matematică*

I. Algebră. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$.

- (a) Să se arate că $A^3 = \mathbf{I}_2$ și să se calculeze A^{2014} .
- (b) Să se determine matricele $X \in M_2(\mathbf{R})$ pentru care $AX = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
- (c) Fie n un număr natural care nu este divizibil cu 3. Să se arate că există $X \in M_2(\mathbf{R})$ astfel încât $X^n = A$.

II. Analiză. Fie $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x - \arctg x$.

- (a) Studiați monotonia funcției f .
- (b) Determinați ecuațiile asimptotelor la graficul funcției f .
- (c) Considerăm șirul $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ dat de $x_0 > 0$ și $x_{n+1} = f(x_n)$, $\forall n \in \mathbf{N}$. Demonstrați că șirul $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ este convergent și că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.
- (d) Calculați $\int_0^1 f(x) dx$.

III. Geometrie.

- (a) În planul xOy fie punctele $A(-1, -2)$, $B(-4, 1)$ și $C(5, 4)$. Să se determine lungimea segmentului $[GO]$, unde G este centrul de greutate al triunghiului ABC , iar O este centrul cercului circumscris acestui triunghi.
- (b) Fie $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$. Să se calculeze $\tg \alpha$, știind că are loc egalitatea $\sin \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.
- (c) Fie $ABCD$ un paralelogram. Se consideră punctele M și N date de relațiile $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{MB}$, respectiv $\overrightarrow{DN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$. Se notează cu P intersecția dintre dreapta AB și paralela dusă prin C la dreapta OM , unde O este punctul de intersecție a diagonalelor paralelogramului. Să se determine $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ pentru care are loc egalitatea $\overrightarrow{NP} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AD}$.

IV. Informatică.

Se consideră ecuația de gradul al 2-lea cu coeficienți reali $ax^2 + bx + c = 0$ cu $a \neq 0$ și expresia: $S_n = x_1^n + x_2^n$, unde x_1 și x_2 sunt rădăcinile ecuației. Să se scrie un program care primind coeficienții a, b, c ai ecuației și un număr natural n calculează și afișază valoarea expresiei S_n , știind că S_n este un număr real indiferent dacă rădăcinile ecuației sunt reale sau nu. De exemplu, dacă programul va primi la intrare numerele: 1 1 1 6 (ceea ce înseamnă că ecuația este $x^2 + x + 1 = 0$ și se cere S_6) va afișa 2.

Notă: Programele vor fi scrise într-unul dintre limbajele de programare studiate în liceu (Pascal, C, C++). Pentru fiecare soluție se vor descrie informal detaliile algoritmului folosit și ale implementării sub formă de program: semnificația variabilelor, a structurilor de date, a structurilor repetitive, a instrucțiunilor condiționale.

Timp de lucru 3 ore.

Concursul de admitere iulie 2014
Domeniul de licență - *Informatică*

Barem

- I. Algebră.** Oficiu 1 punct
- (a) • Calculul produselor AX și XA și scrierea sistemului de ecuații 2 puncte
 • Determinarea matricei: $X = \begin{pmatrix} x & -2z \\ z & x \end{pmatrix}$, cu x, z numere reale arbitrare..... 2 puncte
- (b) • Demonstrație prin inducție 3 puncte
- (c) • Orice rezolvare corectă 2 puncte
- II. Analiză.** Oficiu 1 punct
- (a) • $y = 0$ asimptotă orizontală spre $\pm\infty$ 1 punct
 • $\lim_{x \rightarrow 0, x < 0} f(x) = 0$ 1 punct
 • $x = 0$ asimptotă verticală la dreapta 1 punct
- (b) • Calculul lui f' 1 punct
 • $x = -1/2$ punct de maxim global pe $(-\infty, 0)$ și $f(-1/2) = 4/e^2$ 1 punct
- (c) • Monotonia și mărginirea 1 punct
 • Calculul limitei 1 punct
- (d) • Calculul integralei 2 puncte
- III. Geometrie.** Oficiu 1 punct.
- (a) • Considerarea punctului $A'(1, -1)$ 0,5 puncte
 • Demonstrația faptului că M este intersecția axei Ox cu dreapta $A'B$ 1,5 puncte
 – pentru enunțarea proprietății fără demonstrație 0,5
 • Scrierea ecuației dreptei $A'B$ și aflarea coordonatei x 0,5 puncte
 • Calculul minimului 0,5 puncte
- Orice metodă corectă și completă (de exemplu folosind analiza matematică) se punctează maxim.
- (b) • Descompunerea $(\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x)$ 0,75 puncte
 • $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ 0,5 puncte
 • $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$ 0,75 puncte
 • Rezolvarea ecuației $\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 1 punct
 – soluție incompletă 0,5p
- (c) • Formula produsului scalar 1 punct
 • Teorema cosinusului 1 punct
 • Finalizare 1 punct

- IV. Informatică.** Oficiu1 punct
- (a) • Șirul s este generat corect 3 puncte
- Programul afișează exact n cifre 1 punct
- Cifrele afișate sunt corecte în raport cu șirul s 1 punct
- (b) • Programul afișează corect a n -a cifră, într-o complexitate mai mică decât $O(n)$.1 punct
- Programul afișează corect a n -a cifră, într-o complexitate egală cu $O(\log n)$ 1 punct
- Programele nu au greșeli de limbaj 1 punct
- Claritatea rezolvărilor 1 punct

Concursul de admitere iulie 2014
Domeniul de licență - *Matematică*

Barem

I. Algebră.	Oficiu	1 punct
(a)	<ul style="list-style-type: none"> • $A^3 = \mathbf{I}_2$ 2 puncte • $A^{2014} = A$ 2 puncte 	
(b)	• $X = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ 3 puncte	
(c)	• Orice rezolvare corectă 2 puncte	
II. Analiză.	Oficiu	1 punct
(a)	<ul style="list-style-type: none"> • Calculul lui f' 1 punct • f crescătoare 1 punct 	
(b)	<ul style="list-style-type: none"> • Calculul limitei $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ și $y = x + \pi/2$ asimptotă oblică spre $-\infty$ 1 punct • Calculul limitei $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ și $y = x - \pi/2$ asimptotă oblică spre $+\infty$ 1 punct 	
(c)	<ul style="list-style-type: none"> • Monotonia 1 punct • Mărginirea 1 punct • Calculul limitei 1 punct 	
(d)	• Calculul integralei 2 puncte	
III. Geometrie.	Oficiu	1 punct
(a)	<ul style="list-style-type: none"> • Determinarea centrului de greutate G 0,5 puncte • Triunghiul ABC este dreptunghic cu $m(\hat{A}) = 90^\circ$ 1 punct • Determinarea centrului cercului circumscris O 1 punct • Calculul lungimii segmentului $[GO]$ 0,5 puncte 	
(b)	<ul style="list-style-type: none"> • Ridicare la pătrat, calculul lui $\sin \alpha$ 1 punct • Calculul lui $\cos \alpha$ 1 punct • Finalizare 1 punct 	
(c)	<ul style="list-style-type: none"> • P este mijlocul lui $[AB]$ 1 punct • Scrierea unei relații vectoriale care să conducă la determinarea lui \overrightarrow{NP} 1 punct • Finalizare 1 punct 	
IV. Informatică.	Oficiu	1 punct
	<ul style="list-style-type: none"> • Calculul lui S_1 și S_2 1 punct • Găsirea relației de recurență pentru S_n 3 puncte • Implementarea corectă a relației de recurență 3 puncte • Programele nu au greșeli de limbaj 1 punct • Claritatea rezolvărilor 1 punct 	