Universitatea din Bucureşti **19.07.2013**

Facultatea de Matematică şi Informatică

Concursul de admitere iulie 2013

Domeniul de licenţă - *Informatică*

I. Algebră.

(a) Fie $n \geq 2$ un număr natural. Considerăm n numere reale cu proprietatea că oricum am alege unul dintre ele, suma celorlalte $n-1$ numere rămase este 0. Să se arate că toate cele n numere sunt egale cu 0.

(b) Câte elemente are mulţimea $\mathcal{M} = \left\{ \left(\begin{array}{cc} a & b \\ -b & a \end{array} \right) \middle| \, a, b \in \mathbb{Z}_3 \right\}$?

(c) Să se arate că mulţimea $\mathcal{M}$ de la punctul precedent este parte stabilă în raport cu adunarea şi înmulţirea matricelor din $M_2(\mathbb{Z}_3)$ şi că $\mathcal{M}$ este corp comutativ împreună cu aceste operaţii.

II. Analiză. Fie funcţiile $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{\sin^2 x}$ şi $g : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$, $g(x) = xf(x)$.

(a) Determinaţi limitele laterale ale funcţiei f în punctul 0.

(b) Arătaţi că ecuaţia $\sin x - x\cos x = 0$ are o singură soluţie în intervalul $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

(c) Aflaţi mulţimea valorilor funcţiei g.

(d) Calculaţi $I = \displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/2} f(x)dx$.

III. Geometrie.

(a) Fie $A(1, 2)$ şi $B(3, -1)$ două puncte în plan. Determinaţi ecuaţiile dreptelor care trec prin punctul A şi sunt situate la distanţa 2 faţă de punctul B.

(b) Determinaţi numerele naturale a pentru care a, $a+1$ şi $a+2$ sunt lungimile laturilor unui triunghi obtuzunghic.

(c) Fie $ABCDEF$ un hexagon regulat de latură 2. Să se calculeze norma vectorului $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$.

IV. Informatică. Fie n un număr natural nenul şi $m = 2^n$. Se dă vectorul $0, 1, 2, 3, \ldots, m, m+1$ şi p, cu $1 \leq p \leq m$. În acest vector, marcăm numerele 0, p şi $m+1$ ca fiind şterse. *Exemplu*: Pentru $n = 3$ şi $p = 5$, avem vectorul $X, 1, 2, 3, 4, X, 6, 7, 8, X$ unde elementele 0, 5 şi 9 sunt marcate cu X ca fiind şterse.

(a) Scrieţi un program care să şteargă toate elementele vectorului, în n paşi, în aşa fel încât la pasul k să se şteargă 2^{k-1} elemente, dintre cele neşterse până la pasul respectiv. Programul va afişa $m-1$ perechi de forma (k, q) unde q este unul dintre elementele vectorului, diferit de p, iar k este pasul la care a fost şters q. Programul scris trebuie să aibă complexitatea timp liniară în funcţie de m, adică numărul de instrucţiuni ale programului să fie aproximativ egal cu dimensiunea vectorului.

(b) Scrieţi un program similar cu cel de la punctul (a), dar cu următoarea condiţie suplimentară: după pasul k, între oricare două elemente deja şterse consecutive să nu fie o distanţă mai mare de 2^{n-k}, unde prin distanţa dintre i şi j se înţelege $|j - i|$. Calculaţi complexitatea timp în funcţie de n a programului pe care l-aţi scris. *Exemplu*: Considerăm vectorul $X, 1, 2, 3, 4, X, 6, 7, 8, X$. Printr-o posibilă strategie de ştergere, conţinutul vectorului după fiecare pas k este: $X, 1, X, 3, 4, X, 6, 7, 8, X$ (după pasul 1), $X, 1, X, 3, X, X, 6, X, 8, X$ (după pasul 2), respectiv $X, X, X, X, X, X, X, X, X, X$ (după pasul 3). Rezultatul afişat de program în acest caz este secvenţa (1,2),(2,4),(2,7),(3,1),(3,3),(3,6),(3,8).

Notă: Programele vor fi scrise într-unul dintre limbajele de programare studiate în liceu (Pascal,C,C++). Pentru fiecare soluţie se vor descrie informal detaliile algoritmului folosit şi ale implementării sub formă de program: semnificaţia variabilelor, a structurilor de date, a structurilor repetitive, a instrucţiunilor condiţionale.

Timp de lucru 3 ore.

Universitatea din Bucureşti **20.07.2013**

Facultatea de Matematică şi Informatică

Concursul de admitere iulie 2013

Domeniul de licenţă - *Matematică*

I. Algebră.

(a) Fie polinomul $P(X) = X^3 - mX^2 + (2m-1)X - 2 \in \mathbb{R}[X]$. Să se determine m pentru care P are rădăcina 1 şi în acest caz să se găsească toate rădăcinile complexe ale lui P.

(b) Să se arate că mulţimea $\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{Z} \right\}$ este parte stabilă în raport cu adunarea şi înmulţirea matricelor şi că $\mathcal{M}$ este inel comutativ împreună cu aceste operaţii.

(c) Matricea $\begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}$ este element inversabil în inelul $\mathcal{M}$ dacă şi numai dacă $|a^2 - 2b^2| = 1$.

(d) Inelul $\mathcal{M}$ are o infinitate de elemente inversabile.

II. Analiză. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x - 1}$.

(a) Calculaţi $\lim\limits_{x \to 0} x f(x)$.

(b) Determinaţi ecuaţiile asimptotelor graficului funcţiei f.

(c) Să se studieze convexitatea funcţiei f.

(d) Să se arate că $\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 4} f(x)\,\mathrm{dx} = \ln 3$.

III. Geometrie.

(a) Fie ABC un triunghi cu laturile $AB = 4$, $AC = 6$ şi $m(\hat{A}) = \frac{\pi}{3}$. Să se calculeze înălţimea corespunzătoare laturii BC.

(b) Pe laturile AB şi AC ale unui triunghi ABC se consideră punctele D şi respectiv E, astfel încât $4\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB}$ şi $4\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AC}$. Pe dreptele BE şi CD se consideră punctele E' şi respectiv D', astfel încât $\overrightarrow{EE'} = 3\overrightarrow{BE}$ şi $\overrightarrow{DD'} = 3\overrightarrow{CD}$. Să se arate că punctele D', A şi E' sunt coliniare.

(c) Să se determine parametrul real a pentru care dreptele de ecuaţii $d_1 : y = x$, $d_2 : y = 2x + 1$ şi $d_3 : x + ay + 1 = 0$ sunt concurente.

IV. Informatică. Se consideră o secvenţă de numere naturale $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Din această secvenţă se pot obţine alte secvenţe folosind următoarea operaţie: se extrage elementul de pe poziţia i $(i > 1)$, se mută toate elementele situate la stânga poziţiei i cu o poziţie la dreapta, iar elementul de pe poziţia i se plasează pe prima poziţie a secvenţei.

(a) Să se realizeze un program care primind o secvenţă de numere naturale $x_1, x_2, \ldots, x_n$ afişează toate secvenţele care se pot obţine din aceasta folosind o singură dată operaţia definită mai sus. Ordinea în care sunt afişate secvenţele rezultate nu contează. De exemplu din secvenţa 1,2,3 folosind o singură operaţie, mutând elementul de pe poziţia 2 se pot obtine secvenţa 2,1,3 şi mutând de pe poziţia 3 se obtine secvenţa 3,1,2.

(b) Să se realizeze un program care primind două permutari $x_1, x_2, \ldots, x_n$ şi $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ale mulţimii $\{1, \ldots, n\}$ afişează o secvenţă de operaţii de tipul de mai sus prin care permutarea $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se poate transforma în permutarea $y_1, y_2, \ldots, y_n$. O operaţie va fi afişată prin acel element x_i care se mută pe prima poziţie. De exemplu dacă se primesc permutările: 4,5,6,7,8,9,3,1,2 şi 4,9,6,5,7,8,3,1,2 o posibilă ieşire a programului este: 6,9,4 adică din prima permutare se extrage 6 şi se pune în faţă, apoi se extrage 9 şi se pune in faţă, iar apoi se extrage 4 si se pune in faţă.

Notă: Programele vor fi scrise într-unul dintre limbajele de programare studiate în liceu (Pascal,C,C++). Pentru fiecare soluţie se vor descrie informal detaliile algoritmului folosit şi ale implementării sub formă de program: semnificaţia variabilelor, a structurilor de date, a structurilor repetitive, a instrucţiunilor condiţionale.

Timp de lucru 3 ore.

Universitatea din Bucureşti **19.07.2013**

Facultatea de Matematică şi Informatică

Concursul de admitere iulie 2013

Domeniul de licenţă - *Informatică*

Barem

I. Algebră. Oficiu .... 1 punct.

(a)
- Formalizarea algebrică a problemei .... 1 punct.
- Toate numerele sunt 0 (demonstraţie) .... 2 puncte.

(b)
- $\mathcal{M}$ are 9 elemente .... 1 punct.

(c)
- Parte stabilă .... 2 puncte.
- $\mathcal{M}$ este corp comutativ .... 3 puncte.

II. Analiză. Oficiu .... 1 punct.

(a)
- $l_s(0) = -\infty$ .... 1 punct.
- $l_s(0) = +\infty$ .... 1 punct.

(b)
- Ecuaţia are cel puţin o soluţie .... 1 punct.
- $\sin x - x\cos x$ este strict crescătoare .... 1 punct.

(c)
- Calculul lui g' .... 1 punct.
- $\mathrm{Im}(g) = \left(1, \frac{\pi^2}{4}\right]$ .... 2 puncte.

(d)
- Aplicarea metodei integrării prin părţi .... 1 punct.
- $I = \frac{\pi\sqrt{3}}{6} + \ln 2$ .... 1 punct.

III. Geometrie. Oficiu .... 1 punct.

(a)
- Ecuaţiile dreptelor d ce trec prin punctul A .... 1 punct.
- Expresiile distanţelor de la punctul B la dreaptele d .... 1 punct.
- Finalizare .... 1 punct.

(b)
- Condiţia de unghi obtuz (teorema cosinusului) .... 1 punct.
- Determinarea valorilor posibile ale parametrului $a \in (-1, 3)$ .... 1 punct.
- Alegerea valorii lui a pentru care se poate construi un triunghi .... 1 punct.

(c)
- Egalitatea $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}$ .... 1 punct.
- Egalitatea $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$ .... 1 punct.
- Egalitatea $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{BC}$ şi finalizare .... 1 punct.

Răspunsuri: (a) $5x + 12y - 29 = 0$ şi $x = 1$; (b) $a = 2$; (c) $|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}| = 6$

IV. Informatică. Oficiu .... 1 punct.

(a)
- Programul nu şterge un element deja şters .... 2 puncte.
- Programul şterge toate elementele din vector .... 2 puncte.
- Programul este liniar în m .... 1 punct.

(b)
- Programul respectă cerinţa suplimentară .... 1 punct.
- Calculul complexităţii programului .... 0,5 puncte.

– Programele nu au greşeli de limbaj .... 1,5 puncte.

– Claritatea rezolvărilor .... 1 punct.

Universitatea din Bucureşti **20.07.2013**

Facultatea de Matematică şi Informatică

Concursul de admitere iulie 2013

Domeniul de licenţă - *Matematică*

Barem

I. Algebră. Oficiu .... 1 punct.

(a)
- $m = 2$ .... 2 puncte.
- $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1+i\sqrt{7}}{2}$, $x_3 = \frac{1-i\sqrt{7}}{2}$ .... 2 puncte.

(b)
- Rezolvare corectă .... 3 puncte.

(c)
- Rezolvare corectă .... 1 punct.

(d)
- Rezolvare corectă .... 1 punct.

II. Analiză. Oficiu .... 1 punct.

(a)
- Valoarea limitei egală cu 1 .... 2 puncte.

(b)
- $x = 0$ asimptotă verticală .... 1 punct.
- $y = 1$ asimptotă orizontală spre $+\infty$ .... 1 punct.
- $y = 0$ asiptotă orizontală spre $-\infty$ .... 1 punct.

(c)
- Calculul lui $f'(x)$ şi $f''(x)$ .... 1 punct.
- f concavă pe $(-\infty, 0)$ şi f convexă pe $(0, \infty)$ .... 1 punct.

(d)
- Calculul integralei .... 2 puncte.

III. Geometrie. Oficiu .... 1 punct.

(a)
- Calculul laturii $BC = 2\sqrt{7}$ .... 1 punct.
- Calculul ariei triunghiului cu formula $S = \frac{bc \sin A}{2} = 6\sqrt{3}$ .... 1 punct.
- Scrierea formulei $S = \frac{ah_a}{2}$ şi finalizare .... 1 punct.

(b)
- $DE \| AE'$ şi $DE \| AD'$ .... 2 puncte.
- E', A, D' coliniare (unicitatea paralelei printr-un punct) .... 1 punct.

(c)
- Punctul P de intersecţie al dreptelor d_1 şi d_2 .... 1 punct.
- Condiţia $P \in d_3$ .... 1 punct.
- Finalizare .... 1 punct.

IV. Informatică. Oficiu .... 1 punct.

(a)
- Programul generează o secvenţă corectă .... 1 punct.
- Programul generează numai secvenţe corecte .... 2 puncte.
- Programul generează toate secvenţele corecte .... 2 puncte.

(b)
- Programul găseşte o secvenţă corectă de operaţii .... 1,5 puncte.

– Programele nu au greşeli de limbaj .... 1,5 puncte.

– Claritatea rezolvărilor .... 1 punct.