

În atenția concurenților:

1. Se consideră că indexarea șirurilor începe de la 1.
2. Problemele tip grilă (Partea A) pot avea unul sau mai multe răspunsuri corecte. Răspunsurile trebuie scrise de candidat pe foaia de concurs (nu pe foaia cu enunțuri). Obținerea punctajului aferent problemei este condiționată de identificarea tuturor variantelor de răspuns corecte și numai a acestora.
3. Pentru problemele din Partea B se cer rezolvări complete pe foaia de concurs.
 - a. Rezolvările se vor scrie în pseudocod sau într-un limbaj de programare (Pascal/C/C++).
 - b. Primul criteriu în evaluarea rezolvărilor va fi **corectitudinea** algoritmului, iar apoi **performanța** din punct de vedere al timpului de executare și al spațiului de memorie utilizat.
 - c. **Este obligatorie descrierea și justificarea** (sub) algoritmilor înaintea rezolvărilor. Se vor scrie, de asemenea, **comentarii** pentru a ușura înțelegerea detaliilor tehnice ale soluției date, a semnificației identificărilor, a structurilor de date folosite etc. Neîndeplinirea acestor cerințe duce la pierderea a 10% din punctajul aferent subiectului.
 - d. Nu se vor folosi funcții sau biblioteci predefinite (de exemplu: STL, funcții predefinite pe șiruri de caractere).

Partea A (30 puncte)

A.1. Oare ce face? (5p)

Se consideră subalgoritmul $alg(x, b)$ cu parametrii de intrare două numere naturale x și b ($1 \leq x \leq 1000$, $1 < b \leq 10$).

```
Subalgoritm alg(x, b):
    s ← 0
    CâtTimp x > 0 execută
        s ← s + x MOD b
        x ← x DIV b
    SfCâtTimp
    returnează s MOD (b - 1) = 0
SfSubalgoritm
```

Precizați efectul acestui subalgoritm.

- a. calculează suma cifrelor reprezentării în baza b a numărului natural x
- b. verifică dacă suma cifrelor reprezentării în baza $b - 1$ a numărului x este divizibilă cu $b - 1$
- c. verifică dacă numărul natural x este divizibil cu $b - 1$
- d. verifică dacă suma cifrelor reprezentării în baza b a numărului x este divizibilă cu $b - 1$
- e. verifică dacă suma cifrelor numărului x este divizibilă cu $b - 1$

A.2. Ce se afișează? (5p)

Se consideră următorul program:

```
Varianța C++/C
int sum(int n, int a[], int s){
    s = 0;
    int i = 1;
    while(i <= n){
        if(a[i] != 0) s += a[i];
        ++i;
    }
    return s;
}

int main(){
    int n = 3, p = 0, a[10];
    a[1] = -1; a[2] = 0; a[3] = 3;
    int s = sum(n, a, p);
    cout << s << " "; // printf("%d", s, p);
    return 0;
}
```

```
Varianța Pascal
type vector = array[1..10] of integer;
function sum(n:integer; a:vector; s:integ-):integer;
var i : integer;
begin
    s := 0; i := 1;
    while (i <= n) do
        begin
            if (a[i] <> 0) then s := s + a[i];
            i := i + 1;
        end;
    sum := s;
end;
var n, p, s : integer;
    a : vector;
begin
    n := 3; a[1] := -1; a[2] := 0; a[3] := 3; p := 0;
    s := sum(n, a, p);
    writeln(s, ' ', p);
end.
```

Care este rezultatul afișat în urma execuției programului?

- a. 0;0
- b. 2;0
- c. 2;2
- d. Niciun rezultat nu este corect
- e. 0;2

A.3. Expresie logică (5p)

Se consideră următoarea expresie logică $(X \text{ OR } Z) \text{ AND } (\text{NOT } X \text{ OR } Y)$. Alegeți valorile pentru X, Y, Z astfel încât evaluarea expresiei să dea rezultatul TRUE:

- a. $X \leftarrow \text{FALSE}; Y \leftarrow \text{FALSE}; Z \leftarrow \text{TRUE};$
- b. $X \leftarrow \text{TRUE}; Y \leftarrow \text{FALSE}; Z \leftarrow \text{FALSE};$
- c. $X \leftarrow \text{FALSE}; Y \leftarrow \text{TRUE}; Z \leftarrow \text{FALSE};$
- d. $X \leftarrow \text{TRUE}; Y \leftarrow \text{TRUE}; Z \leftarrow \text{TRUE};$
- e. $X \leftarrow \text{FALSE}; Y \leftarrow \text{FALSE}; Z \leftarrow \text{FALSE};$

A.4. Calcul (5p)

Fie subalgoritmul calcul(a, b) cu parametrii de intrare a și b numere naturale, $1 \leq a \leq 1000$, $1 \leq b \leq 1000$.

```
1. Subalgoritm calcul(a, b):
2.   Dacă a ≠ 0 atunci
3.     returnează calcul(a DIV 2, b + b) + b * (a MOD 2)
4.   SfDacă
5.   returnează 0
6. SfSubalgoritm
```

Care din afirmațiile de mai jos sunt false?

- a. dacă a și b sunt egale, subalgoritmul returnează valoarea lui a
- b. dacă $a = 1000$ și $b = 2$, subalgoritmul se autoapelează de 10 ori
- c. valoarea calculată și returnată de subalgoritm este $a / 2 + 2 * b$
- d. instrucțiunea de pe linia 5 nu se execută niciodată
- e. instrucțiunea de pe linia 5 se execută o singură dată

A.5. Identificare element (5p)

Se consideră șirul (1, 2, 3, 2, 5, 2, 3, 7, 2, 4, 3, 2, 5, 11, ...) format astfel: plecând de la șirul numerelor naturale, se înlocuiesc numerele care nu sunt prime cu divizorii lor proprii, fiecare divizor d fiind considerat o singură dată pentru fiecare număr. Care dintre subalgoritmi determină al n -lea element al acestui șir (n - număr natural, $1 \leq n \leq 1000$)?

- a. Subalgoritm identificare(n):


```
a ← 1, b ← 1, c ← 1
CâtTimp c < n execută
    a ← a + 1, b ← a, c ← c + 1, d ← 2
    CâtTimp c ≤ n și d ≤ a DIV 2 execută
        Dacă a MOD d = 0 atunci
            c ← c + 1, b ← d
    SfDacă
        d ← d + 1
    SfCâtTimp
    a ← a + 1, b ← a
SfCâtTimp
returnează b
SfSubalgoritm
```
- b. Subalgoritm identificare(n):


```
a ← 1, b ← 1, c ← 1
CâtTimp c < n execută
    c ← c + 1, d ← 2
    CâtTimp c ≤ n și d ≤ a DIV 2 execută
        Dacă a MOD d = 0 atunci
            c ← c + 1, b ← d
    SfDacă
        d ← d + 1
    SfCâtTimp
    a ← a + 1, b ← a
SfCâtTimp
returnează b
SfSubalgoritm
```
- c. Subalgoritm identificare(n):


```
a ← 1, b ← 1, c ← 1
CâtTimp c < n execută
    a ← a + 1, d ← 2
    CâtTimp c < n și d ≤ a execută
        Dacă a MOD d = 0 atunci
            c ← c + 1, b ← d
    SfDacă
        d ← d + 1
    SfCâtTimp
    returnează b
SfSubalgoritm
```
- d. Subalgoritm identificare(n):


```
a ← 1, b ← 1, c ← 1
CâtTimp c < n execută
    b ← a, a ← a + 1, c ← c + 1, d ← 2
    CâtTimp c ≤ n și d ≤ a DIV 2 execută
        Dacă a MOD d = 0 atunci
            c ← c + 1, b ← d
    SfDacă
        d ← d + 1
    SfCâtTimp
    returnează b
SfSubalgoritm
```
- e. Subalgoritm identificare(n):


```
a ← 1, b ← 1, c ← 1
CâtTimp c < n execută
    a ← a + 1, b ← a, c ← c + 1, d ← 2
    f ← false
    CâtTimp c ≤ n și d ≤ a DIV 2 execută
        Dacă a MOD d = 0 atunci
            c ← c + 1, b ← d, f ← true
    SfDacă
        d ← d + 1
    SfCâtTimp
    Dacă f atunci
        c ← c - 1
    SfDacă
    SfCâtTimp
    returnează b
SfSubalgoritm
```

A.6. Factori primi (5p)

Fie subalgoritmul `factoriPrimi(n, d, k, x)` care determină cei k factori primi ai unui număr natural n , începând căutarea factorilor primi de la valoarea d . Parametrii de intrare sunt numerele naturale n , d și k , iar parametrii de ieșire sunt șirul x cu cei k factori primi ($1 \leq n \leq 10000$, $2 \leq d \leq 10000$, $0 \leq k \leq 10000$).

```
Subalgoritm factoriPrimi(n, d, k, x):
    Dacă n MOD d = 0 atunci
        k ← k + 1
        x[k] ← d
    SfDacă
    CâtTimp n MOD d = 0 execută
        n ← n DIV d
    SfcâtTimp
    Dacă n > 1 atunci
        factoriPrimi(n, d + 1, k, x)
    SfDacă
SfSubalgoritm
```

Stabiliți de câte ori se autoapelează subalgoritmul `factoriPrimi(n, d, k, x)` în următoarea secvență de instrucțiuni:

```
n ← 120
d ← 2
k ← 0
factoriPrimi(n, d, k, x)
```

- a. de 3 ori
b. de 5 ori
c. de 9 ori
d. de 6 ori
e. de același număr de ori ca și în cadrul secvenței de instrucțiuni:

```
n ← 750
d ← 2
k ← 0
factoriPrimi(n, d, k, x)
```

Partea B (60 puncte)

B.1. Conversie (10 puncte)

Fie subalgoritmul `conversie(s, lung)` care transformă un șir s de caractere, exprimând un număr în baza 16, în numărul corespunzător scris în baza 10. Șirul s este format din $lung$ caractere care pot avea ca valori doar cifrele '0', '1', '2', '3', '4', '5', '6', '7', '8', '9' și literele mari 'A', 'B', 'C', 'D', 'E', 'F' ($lung$ este număr natural, $1 \leq lung \leq 10$).

Scrieți o variantă *recursivă* a subalgoritmului `conversie(s, lung)` care are același antet și același efect cu acesta.

```
Subalgoritm conversie(s, lung):
    nr ← 0
    Pentru i ← 1, lung execută
        Dacă s[i] ≥ 'A' atunci
            nr ← nr * 16 + s[i] - 'A' + 10
        altfel
            nr ← nr * 16 + s[i] - '0'
    SfDacă
    Sfpentru
    returnează nr
SfSubalgoritm
```

B.2. Cifre identice (20 puncte)

Se consideră două numere naturale a și b , unde $1 \leq a \leq 1\,000\,000$ și $1 \leq b \leq 1\,000\,000$.

Scrieți un subalgoritm care determină șirul x , având k elemente (k - număr natural, $0 \leq k \leq 1000$), format din toate numerele naturale cuprinse în intervalul $[a, b]$ care au toate cifrele identice. Dacă nu există astfel de numere, k va fi 0. Numerele a și b sunt parametrii de intrare ai subalgoritmului, iar k și x vor fi parametrii de ieșire.

Exemplu 1: dacă $a = 8$ și $b = 120$, atunci $k = 12$ și $x = (8, 9, 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99, 111)$.

Exemplu 2: dacă $a = 590$ și $b = 623$, atunci $k = 0$ și x este șirul vid.

B.3. Roboțel plimbăreț (30 puncte)

Un roboțel se poate plimba pe o hartă dată sub forma unei matrice pătratică de dimensiune impară, lăsând în fiecare celulă a hărții un anumit număr de obiecte. Plimbarea roboțelului se desfășoară după următoarele reguli:

- în celula din care pomește roboțelul lasă un obiect, în a doua celulă în care ajunge lasă 2 obiecte, în a treia celulă în care ajunge lasă 3 obiecte, ș.a.m.d.;
- roboțelul pomește din mijlocul ultimei coloane și merge întotdeauna un pas pe diagonală în celula alăturată de sus-dreapta (direcție paralelă cu diagonală secundară) dacă această celulă există și ea este liberă; dacă celula nu există, atunci:
 - dacă roboțelul se află pe ultima coloană, atunci el "sare" în celula aflată pe coloana întâi și linia de deasupra lui dacă aceasta este liberă;
 - dacă roboțelul se află pe prima linie, el "sare" în celula aflată pe ultima linie și coloana din dreapta lui dacă aceasta este liberă;
 - dacă roboțelul se află în colțul dreapta-sus al hărții, el "sare" în celula aflată pe ultima linie și prima coloană dacă aceasta este liberă.
- în situația în care celula pe care trebuie să ajungă nu este liberă, roboțelul face un pas la stânga în celula alăturată de pe aceeași linie cu el.

Aceste reguli asigură vizitarea a singură dată a tuturor celulelor din hartă (și, implicit, evitarea blocajelor în deplasare). După ce roboțelul lasă obiecte în toate celulele hărții, el se oprește.

De exemplu, pentru o hartă cu 5×5 celule, primii 22 pași efectuați de roboțel ar fi:

9	3	22	16	15
2	21	20	14	8
	19	13	7	1
18	12	6	5	
11	10	4		17

Scrieți un subalgoritm care determină numărul de obiecte nr lăuate de roboțel în celulele de pe diagonală principală a hărții. Parametrul de intrare al subalgoritmului este dimensiunea hărții n (n - număr natural impar, $3 \leq n \leq 100$), iar nr va fi parametrul de ieșire (nr - număr natural).

Exemplu 1: dacă $n = 5$, atunci $nr = 65$.

Exemplu 2: dacă $n = 11$, atunci $nr = 671$.

Notă:

- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Ciornele nu se iau în considerare.
- Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

BAREM
OFICIU 10 puncte

Partea A 30 puncte
A. 1. c, d 5 puncte
A. 2. b 5 puncte
A. 3. a, d 5 puncte
A. 4. a, c, d 5 puncte
A. 5. c 5 puncte
A. 6. a, c 5 puncte

Partea B 60 puncte
B. 1. Conversie 10 puncte
- respectarea antetului 2 puncte
- condiția de oprire din recursivitate 1 puncte
- valoarea returnată la oprirea recursivității 1 puncte
- condiția pentru caracter diferit de cifră 2 puncte
- valoarea returnată atunci când condiția pentru caracter diferit de cifră este îndeplinită 2 puncte
- valoarea returnată atunci când condiția pentru caracter diferit de cifră nu este îndeplinită 2 puncte

```
Subalgoritm conversie (s, lung):
Dacă lung > 0 atunci
    Dacă s[lung] ≥ 'A' atunci
        returnează conversie(s, lung - 1) * 16 + s[lung] - 'A' + 10
    altfel
        returnează conversie(s, lung - 1) * 16 + s[lung] - '0'
SfDacă
altfel
    returnează 0
SfDacă
SfSubalgoritm
```

B. 2. Cifre identice 20 puncte
• V1: generarea numerelor având cifre identice pe bază de calcule 20 puncte
o respectarea parametrilor de intrare și ieșire 2 puncte
o generarea numerelor (cu o singură cifră și/sau ca multipli de 11, 111, 1111, ...) 16 puncte
o salvarea numerelor cu cifre identice în vector 2 puncte
• V2: considerarea și verificarea tuturor numerelor din intervalul $[a, b]$ 10 puncte
o respectarea parametrilor de intrare și ieșire 2 puncte
o verificarea dacă un număr are toate cifrele identice 4 puncte
o parcurgerea și verificarea tuturor numerelor din $[a, b]$ 2 puncte
o salvarea numerelor cu cifre identice în vector 2 puncte

B. 3. Roboțel plimbăreț 30 puncte
• V1: determinarea corectă a valorii prin calcule $(n * n * n + n) / 2$ 30 puncte
o respectarea parametrilor de intrare și ieșire 2 puncte
o calcul 14 puncte
o prezentarea detaliată a metodei de obținere a formulei de calcul 14 puncte
• V2: determinarea corectă a valorii prin simulare 25 puncte
o respectarea parametrilor de intrare și ieșire 2 puncte
o parcurgerea celor $n \times n$ celule 4 puncte
o deplasarea corectă (în cele 4 cazuri posibile) 4x4 puncte
o calculul sumei elementelor de pe diagonală 3 puncte

Partea B (soluții) 60 puncte
B. 1. Conversie 10 puncte

```
Subalgoritm conversie(s, lung):
Dacă lung > 0 atunci
    Dacă s[lung] ≥ 'A' atunci
        returnează conversie(s, lung - 1) * 16 + s[lung] - 'A' + 10
    altfel
        returnează conversie(s, lung - 1) * 16 + s[lung] - '0'
SfDacă
altfel
    returnează 0
SfDacă
SfSubalgoritm
```

B. 2. Cifre identice 20 puncte
• generarea numerelor având cifre identice pe bază de calcule 20 puncte

```
void cifreIdentice(int a, int b, int &x, int >[]){
    k = 0;
    for (int i = a; ((i < 10) && (i <= b)); i++){
        x[i] = i;
    }
    int crt = 11;
    int ratie = 11;
    while (crt <= b){
        if (crt >= a)
            x[++] = crt;
        crt = crt + ratie;
        if (crt > 9 * ratie){
            crt = ratie * 10 + 1;
            ratie = crt;
        }
    }
}
```

B. 3. Roboțel plimbăreț 30 puncte
• determinarea corectă a valorii prin calcule $(n * n * n + n) / 2$ 30 puncte

9	3					17	23							22	16	15	9	3	22	16	15	
2					8	24					18			21	20	14	2	21	20	14	8	
			13	7	1				13	19	25			25	19	13		25	19	13	7	1
	12	6		5			14	20	21					18			24	18	12	6	5	
11	10	4				15	16	22								23	17	11	10	4		17

Traseul roboțelului este simetric față de centrul pătratului. Altfel spus, centrul pătratului este întotdeauna vizitat exact la mijlocul drumului roboțelului (după $(n * n - 1) / 2$ mutări), iar a doua jumătate a drumului este obținută luând prima jumătate, inversând sensul de parcurgere și rotindu-l 180 grade față de centrul pătratului (de exemplu, ultimul pătrățel este mijlocul laturii din stânga). De aici rezultă că, pentru orice pereche de pătrățele simetrice față de centru, suma valorilor lor este $n * n + 1$. Aplicând observația anterioară asupra elementelor de pe diagonală și grupându-le două câte două, rezultă formula $\text{sumă} = n * (n * n + 1) / 2$

Dacă $n = 5$, suma va fi 65

```
int obiecte(int n){
    return (n * n * n + n) / 2;
}
```