Universitatea din Bucureşti,
Facultatea de Matematică şi Informatică

Concursul de admitere septembrie 2010,
Domeniul de licenţă - *Informatică*

I. Algebră

(I) Fie m şi n numere reale şi fie polinomul $f = X^4 - 3X^3 + 3X^2 + mX + n$.
(a) Să se determine valorile lui m şi n pentru care f se divide cu polinomul $X^2 + 1$.
(b) Pentru valorile lui m şi n determinate la punctul precedent, să se determine rădăcinile lui f.

(II) Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$.
(a) Să se arate că $\det(A) = 0$ şi $A^2 = 3A$.
(b) Să se arate că matricea $I_3 - A$ este inversabilă şi $(I_3 - A)^{-1} = I_3 - \frac{1}{2}A$, unde I_3 este matricea identitate de ordin 3.
(c) Să se calculeze A^n, unde $n \in \mathbf{N}^*$.

II. Analiză

1. Fie funcţiile $f : \mathcal{D}_1 \to \mathbf{R}$ şi $g : \mathcal{D}_2 \to \mathbf{R}$, date prin

$$f(x) = \sqrt{4x^2 - 5} + 1; \quad g(x) = -\sqrt{4x^2 - 5} + 1,$$

unde $\mathcal{D}_1$ şi $\mathcal{D}_2$ sunt domeniile maxime de definiţie ale celor două funcţii.
a) Să se determine $\mathcal{D}_1$ şi $\mathcal{D}_2$ şi să se studieze derivabilitatea funcţiilor.
b) Să se afle valorile lui x pentru care $f'(x) = g'(x)$ şi cele pentru care $f'(x) + g'(x) = 0$.

2. Fie funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dată prin: $f(x) = \dfrac{x^2}{1 + x^2}$.
a) Să se reprezinte grafic funcţia.
b) Să se calculeze primitivele lui f.
c) Să se afle aria cuprinsă între graficul funcţiei, axa Ox şi dreptele $x = 0,\ x = 1$.

III. Geometrie

1. Calculaţi aria şi perimetrul trapezului dreptunghic $ABCD$ (în care $AB||CD, AB \perp BC$) ştiind că $DC = BC = 3, AD = 5$.
2. Fie punctele $P = (1, 1), Q = (-1, -1)$ şi dreapta d de ecuaţie $(d): \ x + y - 1 = 0$. Determinaţi un punct R pe dreapta d astfel încât triunghiul ΔPQR să fie dreptunghic. Câte astfel de puncte R există?
3. Rezolvaţi în $\mathbf{R}$ ecuaţia

$$\sin(x) + \cos(2x) = 1.$$

IV. Informatică

Fie $n \leq 100$ un număr natural nenul şi $x_1, \ldots, x_n$ un vector v de numere naturale cel mult egale cu 32000.
a) Să se scrie un program care să evalueze expresia

$$S = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i)^2$$

. b) Există un algoritm care să evalueze expresia S în timp $O(n)$ în raport cu dimensiunea n a vectorului v? Dacă da, să se implementeze acest algoritm sub formă de program.

Programele vor fi scrise într-unul dintre limbajele studiate în liceu (Pascal,C,C++). Pentru fiecare soluţie se vor preciza detaliile algoritmului folosit şi ale implementării sub formă de program: variabile, structuri de date, structuri iterative, instrucţiuni condiţionale.

Timp de lucru 3 ore.

Universitatea din Bucureşti,
Facultatea de Matematică şi Informatică

Concursul de admitere septembrie 2010,
Domeniul de licenţă - *Matematică*

I. Algebră

1. Fie m un număr real şi fie funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin $f(x) = (m+1)x^2 + 2(m+1)x + m$, pentru orice $x \in \mathbf{R}$.
a) Să se determine valorile lui m pentru care $f(1) < 0$.
b) Să se determine valorile lui m pentru care $f(x) < 0$, pentru orice $x \in \mathbf{R}$.

2. Fie λ un număr real. Considerăm sistemul

$$\begin{array}{rcrcl} \lambda x & + & y & = & 1 \\ x & + & \lambda y & = & 2 \end{array}.$$

a) Să se rezolve sistemul pentru $\lambda = 2$.
b) Să se determine valorile lui λ pentru care sistemul este incompatibil.

II. Analiză

1. Fie funcţia $f : [0,2] \to \mathbf{R}$, dată prin $f(x) = \dfrac{2x-2}{x^3+1}$.

a) Să se determine numerele a, b, c astfel încât să avem: $f(x) = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{bx+c}{x^2-x+1}$, pentru orice $x \in [0,2]$.

b) Să se calculeze $\displaystyle\int_0^2 f(x)dx$.

2. Fie funcţia $f : \mathcal{D} \to \mathbf{R}$ dată prin $f(x) = \sqrt{2x+3}$.

a) Să se stabilească domeniul maxim de definiţie $\mathcal{D}$ şi să se calculeze $f'(x)$ pentru orice $x \in (-\frac{3}{2}, \infty)$.

b) Să se studieze monotonia funcţiei f.

c) Să se reprezinte grafic funcţia.

d) Să se afle aria cuprinsă între graficul funcţiei, axa Ox şi dreptele $x = -1;\ x = 1$.

III. Geometrie

1. Calculaţi aria patrulaterului $ABCD$ ştiind că $AD = 3, AB = 4, BC = BD = 5, CD = 6$.

2. Fie punctele $P = (1,1), Q = (2,3)$ şi dreapta d de ecuaţie $(d): \ x + y - 1 = 0$. Determinaţi un punct R pe dreapta d astfel încât triunghiul ΔPQR să fie isoscel. Câte astfel de puncte R există?

3. Rezolvaţi în $\mathbf{R}$ ecuaţia

$$\sin(x + \frac{\pi}{6}) = \cos(x).$$

IV. Informatică

Fie $n \leq 100$ un număr natural nenul şi $x_1, \ldots, x_n$ un vector v de numere întregi, cu proprietatea $| x_i | \leq 32000$, oricare ar fi i de la 1 la n.

a) Să se scrie un program care va afişa un $k \in \{1, \ldots, n\}$ şi k indici $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$ astfel încât n divide pe $x_{i_1} + x_{i_2} + \ldots + x_{i_k}$ sau va afişa 0 dacă nu există un astfel de k.

b) Există un algoritm liniar (în timp $O(n)$ în raport cu dimensiunea n a vectorului v) pentru cerinţa de la punctul a)? Dacă da, să se implementeze acest algoritm sub formă de program.

Programele vor fi scrise într-unul dintre limbajele studiate în liceu (Pascal,C,C++). Pentru fiecare soluţie se vor preciza detaliile algoritmului folosit şi ale implementării sub formă de program: variabile, structuri de date, structuri iterative, instrucţiuni condiţionale.

Timp de lucru 3 ore.