TESTUL nr. 6

1. Să se afle valorile $x, y, z \in \mathbb{R}$ pentru care $x^2+5y^2+11z^2-4xy-2xz+10yz=0$.

a) $x=1, y=0, z=-1$; b) $x=1, y=-1, z=0$; c) $x=0, y=1, z=-1$;
d) $x=0, y=0, z=0$; e) $x=0, y=z=1$; f) $x=y=z=1$.

2. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel ca ecuația $x^2 - x\log_a m + 3\log_a m - 8 = 0$, $0<a<1$ să admită o rădăcină în intervalul $(0, 2)$.

a) $m\in\left(a, \frac{1}{a}\right)$; b) $m\in(a^2, a)$; c) $m\in\left(a^2, \frac{1}{a^2}\right)$;
d) $m\in(a^{8/3}, a^2)$; e) $m\in(a^4, a^{8/3})$; f) $m\in(a^3, a^{8/3})$.

3. Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel ca ecuațiile: $\begin{cases} ax^2-(a+2)x+2=0 \\ ax^2-(a+3)x+a+2=0 \end{cases}$ să admită o rădăcină comună.

a) $a=-\sqrt{2}$; b) $a=\sqrt{2}$, $a=-1$; c) $a=1, a=-\sqrt{2}$, $a=\sqrt{2}$;
d) $a=1, a=2, a=-2$; e) $a=-1, a=\sqrt{2}, a=-\sqrt{2}$; f) $a=2, a=-2$.

4. Să se afle toate valorile $m\in\mathbb{R}$ pentru care ecuația $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+x+x^2+\ldots+x^n\right)=m$, să admită soluții reale.

a) $m>0$; b) $m\in(-1, 1)$; c) $m\in\left(0, \frac{1}{2}\right)$;
d) $m\in\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$; e) $m\in(1, \infty)$; f) $m\in\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

5. Să se rezolve ecuația $\dfrac{A_{x+1}^{n+1}(x-n)!}{(x-1)!}=90$, $n, x\in\mathbb{N}$.

a) $x=2$; b) $x=1$; c) $x=n$;
d) $x=1, 2, \ldots, n$; e) $x=9$; f) $x=10, x=n$.

6. Fie $f_{(x)} = ax^2 + bx + c$ şi $g_{(x)} = mx + n$. Să se determine $a, b, c, m, n \in \mathbb{R}$ astfel ca: $f \circ g = g \circ f$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

a) $a = 1, m = 1, b, c, n$ oarecare; b) $a = 1, b = c = -1, m = n = 1$;

c) m, n oarecari, $a = b = c = 1$; d) $a = 1, b = c, m = n = 1$;

e) $m = 1, n = 0, a, b, c$ oarecari; f) niciunul din răspunsurile anterioare nu este corect.

7. Fie $P(X) = aX^2 + 3X + 2$. Ştiind că $P(X)$ dă restul 2 la împărţirea cu $X + 1$ să se afle restul împărţirii lui $P(X)$ la $X^2 - X - 2$.

a) $2X + 4$; b) $3X + 2$; c) $3X + 4$;

d) $6xX + 4$; e) $6X + 2$; f) $6X + 8$.

8. Să se determine matricea A^n, $n \in \mathbb{N}$ dacă $A = \begin{pmatrix} 1+a & a & a \\ a & a+1 & a \\ a & a & a+1 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.

a) $I + \frac{\left[(3a+1)^n - 1\right]}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 3^n a^n & 3^n a^n - 1 & 3^n a^n - 1 \\ 3^n a^n - 1 & 3^n a^n & 3^n a^n - 1 \\ 3^n a^n - 1 & 3^n a^n - 1 & 3^n a^n \end{pmatrix}$;

c) $3^n \begin{pmatrix} (a+1)^n & a^n & a^n \\ a^n & (a+1)^n & a^n \\ a^n & a^n & (a+1)^n \end{pmatrix}$; d) $I + (3a)^n \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

e) $I + (3a+1)^n \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; f) niciun răspuns nu este corect.

9. Care dintre următoarele afirmaţii privind şirul $(a_n)_{n \ge 2}$, $a_n = n\left(\sqrt[n]{\ln n} - 1\right)$ este corectă ?

a) este convergent şi are limita 1; b) este mărginit;

c) este descrescător; d) are un subşir convergent la zero;

e) are limita ∞; f) admite un subşir convergent la e.

10. Să se rezolve sistemul: $\frac{xy}{3x+y}=\frac{4}{3}, \frac{yz}{y+z}=\frac{18}{5}, \frac{xz}{3x+z}=\frac{12}{13}$.

a) $x=4, y=2, z=9$; b) $x=4/3, y=6, z=9$; c) $x=1/3, y=6, z=2$;
d) $x=2, y=12, z=\frac{36}{7}$; e) $x=4/3, y=3, z=6$; f) $x=1, y=3, z=9$.

11. Fie $f(x)=\begin{cases}\frac{x+1}{x-1}, & x>1\\ 1, & x\le 1\end{cases}$. Să se determine funcţia

$$g(x)=f(x+1)-f(x-1).$$

a) $g(x)=\frac{2}{x}, x\neq 0$; b) $g(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ x^2+x, & x>0\end{cases}$;

c) $g(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ x(x-2), & x>0\end{cases}$; d) $g(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \frac{4}{x(x-2)}, & x>2\end{cases}$;

e) $g(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \frac{2}{x}, & x\in(0,2]\\ -\frac{4}{x(x-2)}, & x>2\end{cases}$; f) $g(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ -\frac{4}{x(x-2)}, & x>2\end{cases}$.

12. Să se determine valorile $n\in\mathbb{N}^*$ pentru care $\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^n}$ este nenulă.

a) $n=3$; b) $n=2$; c) $n=1$;
d) $(\forall)\, n\in\mathbb{N}^*$; e) $n=4$; f) $n=5$.

13. Să se determine valorile $a\in\mathbb{R}$ pentru care $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{an+1}{n-1}\right)^{(a-1)n+1}=1$.

a) $0<a<1$; b) $a>1$; c) $a=1$;
d) $1<a<2$; e) $a>2$; f) $a<1$.

14. Să se determine aria $A(\lambda)$ a domeniului plan cuprins între graficele funcţiilor $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ şi $g(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$, $x\in[0,\lambda]$.

a) $\dfrac{1}{2}$; b) $\dfrac{\lambda}{2}$; c) $\dfrac{\lambda-1}{2}$;

d) $\dfrac{1-e^{-\lambda}}{2}$; e) $1-e^{-\lambda}$; f) $\dfrac{1-2e^{-\lambda}}{2}$.

15. Să se determine punctul de pe graficul funcţiei $f(x)=2\sqrt{x}$ aflat la distanţă minimă de punctul $A(2, 0)$.

a) $(0, 0)$; b) $(1, 2)$; c) $(4, 4)$; d) $(9, 6)$; e) $(16, 8)$; f) $(25, 10)$.

16. Primitivele funcţiei

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{3+\sin x+\cos x},\ \text{pentru } x\in[0,2\pi].$$

este

a) $\dfrac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{7}}\right)+C$; b) $\dfrac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{7}}\right)+C$;

c) $\begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{7}}\right)+C, & x\in[0,\pi)\\[2ex] \dfrac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{7}}\right)+\dfrac{2\pi}{\sqrt{7}}+C, & x\in[\pi,2\pi]\end{cases}$;

d) $\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{7}}\right)+C, & x\in[0,\pi]\\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{7}}\right)+C, & x\in(\pi,2\pi]\end{cases}$;

e) $\begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{7}}+\dfrac{2\pi}{\sqrt{7}}+C, & x\in[0,2\pi]; \end{cases}$

f) $\dfrac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\dfrac{2\operatorname{tg}x+1}{\sqrt{7}}+C, \quad x\in[0,2\pi]$.

17. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3-x^2}{2}, & x\in(-\infty,1)\\ \dfrac{1}{x}, & x\in[1,\infty]\end{cases}$. Să se afle toate valorile $c\in\mathbb{R}$ astfel ca $f(2)-f(0)=2f'(c)$.

a) $c=\sqrt{2}$; b) $c_1=\sqrt{2}, c_2=-\sqrt{2}$; c) $c_1=\dfrac{1}{2}, c_2=-\dfrac{1}{2}$;

d) $c_1=\sqrt{2}, c_2=\dfrac{1}{2}$; e) $c_1=-\sqrt{2}, c_2=\dfrac{1}{2}$; f) $c=\dfrac{1}{2}$.

18. Fie $F(x)=\int_x^{2x}\dfrac{t^2}{t^2+\sin^2 t}dt$, $x\neq 0$. Care dintre următoarele afirmaţii este corectă ?

a) F este pară; b) F este impară; c) $F(0)=1$;

d) F este descrescătoare; e) $\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=0$;

f) niciunul din răspunsurile anterioare nu este corect.