www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Solutii oficiale
VARIANTE BAC
M1

pag. 1-100 I
pag 101 - 200 II
pag 201 - 300 III

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluții

1. $x = 4n+1;\ 1+5+9+...+(4n+1) = 231;\ \frac{(4n+2)(n+1)}{2} = 231;\ 2n^2+3n-230=0;\ n=10,\ x=41$

2. $x_1 = 1, x_2 = \frac{3}{2}\ ;\ x \in \left[1, \frac{3}{2}\right]$

3. $y > 1,\ y = x^2+1;\ f^{-1}:(1,\infty) \to (0,\infty),\ f^{-1}(x) = \sqrt{x-1}$

4. Submulțimile cerute sunt de forma $\{1,a,b\}$, $a,b \in \{2,3,...,10\}$, adică $C_9^2 = 36$ submulțimi cu trei elemente

5. $\sqrt{(2-m)^2+(2+m)^2} = 4\ ;\ m \in \{\pm 2\}$

6. $\cos\frac{23\pi}{12}\sin\frac{\pi}{12} = \cos\left(2\pi - \frac{23\pi}{12}\right) = \cos\frac{\pi}{12}\sin\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{4}$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

1. $\left[(1-i)^2\right]^{12} = (-2i)^{12} = 2^{12} \in \mathbb{R}$.

2. $x^2 - 6x + 5 = 0$; $x \in \{1,5\}$.

3. $f^{-1}: (1;\infty) \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \ln(x-1)$.

4. $p = \frac{81}{90} = 0,9$.

5. $M(1,3)$ este mijlocul lui (BC); $AM = 5$.

6. $m(m-2) + 3\cdot(-1) = 0$; dar $m > 0$, deci $m = 3$.

www.bacmatematica.ro

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluții

1. $\left(\sqrt{2}\right)^{12}=2^6$; $\left(\sqrt[3]{4}\right)^{12}=4^4$; $\left(\sqrt[4]{5}\right)^{12}=5^3$; $2^6<5^3<4^4$; $\sqrt{2},\sqrt[4]{5},\sqrt[3]{4}$

2. $\min f=-\dfrac{\Delta}{4a}$; $\min f=-3$

3. $x\in(1,\infty)$; $\lg(x-1)(6x-5)=\lg 100$; $x=5$

4. $p=\dfrac{6}{90}=\dfrac{1}{15}$

5. ecuația perpendicularei din A pe $d: 3x+2y-26=0$

6. $\cos 2\alpha=1-\sin^2\alpha=\dfrac{7}{9}$

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluții

1. $\left(\frac{1}{1-i}-\frac{1}{1+i}\right)^2=i^2=-1$

2. $V\left(-\frac{5}{2},-\frac{21}{4}\right)$; $x_V, y_V<0 \Rightarrow V\in C_{III}$

3. $3^x=t>0 \Rightarrow 3t^2-10t+3=0$, deci $t\in\left\{\frac{1}{3};3\right\}$, adică $x\in\{-1;1\}$.

4. $9\cdot 9$ numere $\overline{aab}$; $9\cdot 9$ numere $\overline{aba}$, $9\cdot 9$ numere $\overline{baa}$; $p=0,27$

5. $-a(5a-1)+2(a+1)=0$; $a\in\left\{1;-\frac{2}{5}\right\}$

6. $\frac{6\cdot 10\cdot \sin A}{2}=15\sqrt{3}$; $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos A=\frac{1}{2}$; $BC=2\sqrt{19}$

www.bacmatematica.ro

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluții

1. $\frac{2}{5}$

2. $x \in \left[5-\sqrt{13}, 5+\sqrt{13}\right]$; $x \in \{2,3,4,5,6,7,8\}$

3. $f(x) = y \Leftrightarrow 3\log_2 x = y \Leftrightarrow x = 2^{\frac{y}{3}} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2^y} > 1 \Leftrightarrow y > 0$ (adevărat), deci

$f^{-1}:(0;\infty) \to (1;\infty)$, $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{2^x}$.

4. Numărul căutat e dat de numărul funcțiilor $g:\{1,2,3\} \to \{1,2,3,4\}$; $4^3 = 64$ funcții

5. E centrul paralelogramului $E(3,3)$; $\frac{x_B + x_D}{2} = 3$, $\frac{y_B + y_D}{2} = 3$; $D(-1,10)$

6. $\frac{AC}{\sin B} = 2R$; $AC = \sqrt{3}$

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Inovării
Centrul Naţional pentru Curriculum şi Evaluare în Învăţământul Preuniversitar
Soluții

1. 495

2. $f(x)=ax^2+bx+c; a-b+c=1, c=1, a+b+c=3$; $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+x+1$

3. $\cos 2x \sin x=0$; $x\in\left\{\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right\}$

4. $A_4^3=24$

5. $AB=\sqrt{17}, BC=2\sqrt{17}, AC=5$; $\cos B=\frac{15}{17}$

6. $R=\frac{c}{2\sin C}$; $R=6$

www.bacmatematica.ro

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluții

1. 1

2. $\max f = -\frac{\Delta}{4a}$; $\max f = 0$

3. $x = (-1)^k \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + k\pi$; $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$; $x \in \left\{\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$.

4. $C_n^2 = 120$; $n = 16$

5. $ABDC$ paralelogram; $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$; $AD = CB$; $ABDC$ dreptunghi; $A = \frac{\pi}{2}$

6. Triunghiul este dreptunghic; $S = 6$, $p = 6$; $r = 1$

www.bacmatematica.ro

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluții

1. $z^4 = -4 \Leftrightarrow (z+2i)(z-2i) = 0 \Rightarrow z_1 = -2i,\ z_2 = 2i$.

2. $f(1) = 2,\ f(0) = 3$; $c = 3$, $a = -2$

3. $\sqrt[3]{7x+1} = x+1$; $x^3 + 3x^2 - 4x = 0$; $x \in \{-4,1,0\}$

4. $A_5^4 = 120$

5. $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF}$; $\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{FC} = 2\overrightarrow{AF}$; A, F, C coliniare

6. $p = 21$, $S = 84$; $\frac{56}{5}$.

www.bacmatematica.ro

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1. $a_1 = 1, a_n = a_1 + (n-1)r = 2n - 1 = x$. $S_n = \frac{n(1+x)}{2} = n^2 = 225 \Rightarrow n = 15 \Rightarrow x = 29$.

2. $\Delta = m^2 + 8m > 0$ și $|x_1 - x_2| = 3 \Leftrightarrow s^2 - 4p = 9 \Leftrightarrow m^2 + 8m - 9 = 0 \Rightarrow m \in \{-9;1\}$.

3. $2^x = 2^{-x+1} + 1 \overset{2^x = t > 0}{\Rightarrow} t = 2 \Rightarrow x = 1$.

4. $C_{17}^{15} = C_{17}^{2} < C_{17}^{3}$.

5. $\left|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}\right| = \left|\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}\right| = \left|\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right| = \left|3\overrightarrow{BC}\right| = 3 \cdot 4 = 12$.

6. Avem $\sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + ... + \sin^2 90^\circ = \left(\sin^2 1^\circ + \cos^2 1^\circ\right) + ... + \left(\sin^2 44^\circ + \cos^2 44^\circ\right) + \cos^2 45^\circ + 1 = \frac{91}{2}$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluții

1. $z^2+z+1=0 \Rightarrow z^3=1 \Rightarrow z^4=z$, $z\neq 0$. Deci $z^4+\frac{1}{z^4}=z+\frac{1}{z}=\frac{z^2+1}{z}=-1$.

2. $f(x)=ax+b, a\neq 0$; $f(f(x))=a^2x+ab+b$; $2f(x)+1=2ax+2b+1$; $f(x)=2x+1$.

3. $\lg\frac{x+1}{9}=\lg\frac{10}{x}$; $x=9$.

4. $T_{k+1}=C_{10}^k\cdot 3^{10-k}\cdot 3^{\frac{k}{3}}\in\mathbb{Q} \Leftrightarrow 3^{\frac{k}{3}}\in\mathbb{Q} \Leftrightarrow k\vdots 3$, cum $k\in\{0,1,2,...,10\}$ rezultă $k\in\{0,3,6,9\}$, deci 4 termeni raționali.

5. $G\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$.

6. $\vec{u}\cdot\vec{v}=-2$; $\cos(\vec{u},\vec{v})=\frac{-2}{\sqrt{41}\cdot\sqrt{13}}$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluții

1. $a^2 = 2b$; $a + 2 = 2 \cdot 17$; $a = 32, b = 512$.

2. $-3(-3x + 2) + 2 = 0$; $x = \frac{4}{9}$.

3. $tg(-x) = -tgx$; $tgx = 1$; $x \in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$.

4. 9 funcții.

5. $AD = 2DB$; $AE = 2EC \Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} = 2 \Rightarrow DE \parallel BC$.

6. $C = \frac{7\pi}{12}$; $\sin C = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$; $R = \frac{c}{2\sin C}$; $R = 3\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)$.

www.bacmatematica.ro

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluții

1. 1

2. $\frac{2x^2+8x+7}{x^2+5x+6}=\frac{7}{6}$; $x\in\left\{-\frac{13}{5},0\right\}$

3. $2x=\pm\arccos\frac{1}{2}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$; $x\in\left\{\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6},\frac{7\pi}{6},\frac{11\pi}{6}\right\}$

4. $T_7=C_{12}^6\cdot\sqrt{a}$; $a=4$

5. $m_d=\frac{2}{3}, m_{d'}=\frac{2}{3}$; $M(1,1)\in d, M'=s_A(M)\Rightarrow M'(-7,7)$; $y-7=\frac{2}{3}(x+7)$; $d':2x-3y+35=0$

6. $\frac{4}{3}$

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluții

1. $\left(1+i\sqrt{3}\right)^2+\left(1-i\sqrt{3}\right)^2=-4\in\mathbb{Z}$

2. x, y sunt rădacinile ecuației $a^2-4a+3=0$, $a\in\{1,3\}$; $(x, y)\in\{(1,3),(3,1)\}$

3. $6\sqrt{x-2}=x+6$; $x^2-24x+108=0$; $x\in\{6,18\}$

4. $T_{k+1}=C_9^k x^{18-3k}$; $T_7=84$

5. $d'\perp d, d': 4x+3y-12=0$; $d'\cap d=\{A'\}, A'\left(\frac{9}{5},\frac{8}{5}\right)$; $d(A,d)=2$

6. $\cos B=\frac{1}{8}$, $\cos C=\frac{3}{4}$, $\cos 2C=\frac{1}{8}$; $\cos B=\cos 2C\Rightarrow m(\sphericalangle B)=2m\sphericalangle(C)$

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluții

1. $\lg\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100}\right)=\lg\frac{1}{100}=-2$

2. $a-3<0$ și $\Delta<0\Rightarrow\begin{cases}a\in(-\infty;3)\\ a\in\left(0;\frac{12}{5}\right)\end{cases}$, deci $a\in\left(0;\frac{12}{5}\right)$

3. $x=\frac{1}{3}$

4. $C_n^2=45$; $n=10$

5. $m_{AB}=-\frac{1}{7}$; $y-3=-\frac{1}{7}(x-2)$; $x+7y-23=0$

6. $\frac{AC}{\sin B}=2R$; $B=\frac{\pi}{3}$

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluții

1. $\log_3\left(5-\sqrt{7}\right)\left(5+\sqrt{7}\right)=\log_3 18=2+\log_3 2$; deci rezultatul este 2.

2. $f(x)=ax^2+bx+c$, $f(0)=2$, $f(1)=0$, $\Delta=0$; $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^2-4x+2$

3. $tgx=-1;\ x\in\left\{\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right\}$

4. Numărul cerut este dat de numărul funcțiilor $f:\{1,2,3,4\}\to\{1,3,5,7,9\}$; $5^4=625$

5. $m_{CD}=\frac{4}{3}$; $y-2=\frac{4}{3}(x+2)$; $4x-3y+14=0$

6. $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$; $\sin\alpha=-\frac{12}{13}$

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Inovării
Centrul Naţional pentru Curriculum şi Evaluare în Învăţământul Preuniversitar
Soluții

1. 1

2. $x^2+ax+2\geq 0$,$\forall x\in\mathbb{R}$; $\Delta\leq 0$; $a\in\left[-2\sqrt{2},2\sqrt{2}\right]$

3. $\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$; $x=\frac{1}{2}$.

4. $8!(n-8)!=10!(n-10)!$; $n^2-17n-18=0$; $n=18$

5. $AB=5$, $BC=4$, $CA=\sqrt{41}$; $B=\frac{\pi}{2}$

6. $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$; $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$; $\sin 2\alpha=-\frac{24}{25}$

www.bacmatematica.ro

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluții

1. $\left(1+i\sqrt{3}\right)^3=-8\in\mathbb{Z}$

2. $x^2-x+2-y=0$; $\Delta\geq 0$; $\operatorname{Im} f=\left[\frac{7}{4},+\infty\right)$

3. $x=-12$

4. $p=\frac{4}{90}=\frac{2}{45}$

5. $m_d=\frac{5}{4}$; $d':y-1=-\frac{4}{5}(x-1)$; $4x+5y-1=0$

6. $AC=6\sqrt{2}$; $BC=3\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)$; $P=3\left(2+3\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)$

www.bacmatematica.ro

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluții

1. $x \in \left\{1 \pm i\sqrt{3}\right\}$

2. $\Delta = 1, \min f = -\frac{1}{4}$

3. $\arccos\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$; $\arcsin x = \frac{\pi}{4}$; $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

4. $C_7^0 = C_7^7 = 1, C_7^1 = C_7^6 = 7, C_7^2 = C_7^5 = 21, C_7^3 = C_7^4 = 35$; doar 7 este prim, deci 2 cazuri favorabile; $p = \frac{1}{4}$

5. $\vec{u}$ și $\vec{v}$ coliniari $\Leftrightarrow \frac{a}{4} = \frac{3}{a+4} \Rightarrow a \in \{-6; 2\}$

6. $\overrightarrow{AB}(7,-7); \overrightarrow{AC}(4,-2); \overrightarrow{BC}(-3,5);\ \ -14$

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluții

1. $(\sqrt{3})^{12} = 3^6$; $(\sqrt[3]{5})^{12} = 5^4$; $(\sqrt[4]{8})^{12} = 8^3$; $\sqrt[4]{8} < \sqrt[3]{5} < \sqrt{3}$.

2. $g(1) = 0$; $f(x) = ax + b$, $f(1) = 0$; $g(0) = 3 \Rightarrow f(2) = 3$; $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3x - 3$.

3. $3^x = y, 3y^2 - 30y + 27 = 0$; $y \in \{1,9\}$; $x \in \{0,2\}$.

4. $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$ cazuri posibile; $4 \cdot 5 \cdot 5 = 100$ cazuri favorabile; $p = \frac{1}{9}$.

5. $A'(2,-1)$; $m_{AA'} = -3$; $m_a : y - 2 = -3(x-1)$; $3x + y - 5 = 0$.

6. $\frac{\text{ctg}1 - \text{tg}1}{2} = \frac{\frac{1}{\text{tg}1} - \text{tg}1}{2} = \frac{1 - \text{tg}^2 1}{2\,\text{tg}1} = \frac{\cos 2}{\sin 2} = \text{ctg}2$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Inovării
Centrul Naţional pentru Curriculum şi Evaluare în Învăţământul Preuniversitar
Soluții

1. $2<\sqrt{5}, \log_3 4<2$

2. $x\in\{1\pm i\}$

3. $\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x=1$; $\sin x\cos x=0, x\in[0,2\pi) \Rightarrow x\in\left\{0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2}\right\}$; $x\in\left\{\pi,\frac{3\pi}{2}\right\}$

4. 21

5. $\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}=4\Rightarrow CN=\frac{1}{5}AC\Rightarrow \overrightarrow{CN}=-\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$, deci $m=-\frac{1}{5}$

6. $OA=\sqrt{5}$; $AB=\sqrt{2}$; $OB=\sqrt{13}\Rightarrow P=\sqrt{2}+\sqrt{13}+\sqrt{5}$

www.bacmatematica.ro

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Inovării
Centrul Naţional pentru Curriculum şi Evaluare în Învăţământul Preuniversitar
Soluții

1. $x_{1,2} = 4 \pm 3i$

2. $\Delta > 0$ **,** $\Delta = 5a^2 - 8a + 13$ **;** $a \in (-\infty, 1) \cup \left(\frac{13}{5}, \infty\right) \setminus \{-1\}$

3. $\left|\sqrt{x-1} - 3\right| = 1$ **;** $x \in \{5, 17\}$

4. 0

5. $d' : y - 2 = 1(x - 1)$ **;** $d' : x - y + 1 = 0$

6. $\frac{7}{9}$

www.bacmatematica.ro

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluții

1. i

2. $g(x)=y; f(y)=0, y^2-3y+2=0$; $y\in\{1,2\}$; $x\in\left\{1,\frac{3}{2}\right\}$

3. $x>-\frac{3}{7}$; $\lg(x+9)(7x+3)=\lg\left[10\left(x^2+9\right)\right]\Rightarrow 3x^2-66x+63=0$, deci $x\in\{1;21\}$

4. $n(n-1)<20$; $n\in\{2,3,4\}$

5. $A\left(\frac{1}{2},0\right)\in d_2; d(d_1,d_2)=d(A,d_1); d(A,d_1)=\frac{\sqrt{5}}{10}; d(d_1,d_2)=\frac{\sqrt{5}}{10}$

6. $\sin 75^0=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$; $\sin 15^0=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; $\frac{\sqrt{6}}{2}$

www.bacmatematica.ro

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluții

1. $r = 2;\ a_1 = 2;\ S_{20} = \dfrac{20\left(a_1 + 19r\right)}{2} = 400$

2. $x^2 - 2x - 4 = 0\,;\ x \in \left\{1 \pm \sqrt{5}\right\}$

3. $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}\right) = \operatorname{ctg}\left(\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}\right);\ \operatorname{ctg}\left(\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}\right) = 2$

4. Probabilitatea este $p = \dfrac{20}{40} = \dfrac{1}{2}$.

5. $G\left(\dfrac{7}{3}, \dfrac{5}{3}\right)$

6. $\sin 4\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg} 2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha} = \dfrac{2\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}}{1 + \left(\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}\right)^2} = -\dfrac{24}{25}$

www.bacmatematica.ro

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Inovării
Centrul Naţional pentru Curriculum şi Evaluare în Învăţământul Preuniversitar
Soluții

1. -1

2. $f(x)=ax^2+bx+c \Rightarrow f(1)=f(-1)=0$, $f(2)=6 \Rightarrow a=2=-c;\ b=0$, deci $f(x)=2x^2-2$.

3. $\log_2 x+\frac{1}{2}\log_2 x+\frac{1}{3}\log_2 x=\frac{11}{6}$; $\log_2 x=1$; $x=2$

4. $(1+x)^2+(1-x)^2=2+2x^2$; $|x|\geq 1 \Rightarrow x^2\geq 1 \Rightarrow 2+2x^2\geq 4$

5. $m_{AC}=-\frac{12}{5}$, $m_h=\frac{5}{12}$; $h: y+1=\frac{5}{12}(x-2)$; $h: 5x-12y-22=0$

6. $(2\vec{i}+5\vec{j})\cdot(3\vec{i}-4\vec{j})=-14$

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Inovării
Centrul Naţional pentru Curriculum şi Evaluare în Învăţământul Preuniversitar
Soluții

1. $-3+4i$

2. Se ajunge la ecuația $ax^2+(a-3)x-3=0$, şi cum $\Delta=(a+3)^2\geq 0, \forall a\in\mathbb{R}^*$

3. $2^x=y; y^2-6y+8=0$; $y\in\{2,4\}$; $x\in\{1,2\}$

4. $\overline{ab}\in\{10,11,12,...,40\}$ şi $(a+b)\vdots 3\Rightarrow p=\frac{10}{31}$

5. M, N, P sunt mijloacele laturilor triunghiului, $HM\perp BA$ si analoagele; HM mediatoarea $[BA]$ si analoagele; H este centrul cercului circumscris $\triangle ABC$

6. $2\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

www.bacmatematica.ro

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. $\Delta < 0 \Rightarrow z_{1,2} \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ și conjugate. $z_1 \cdot z_2 = z_1 \cdot \overline{z_1} = |z_1|^2$, dar $z_1 \cdot z_2 = 25 \Rightarrow |z_1| + |z_2| = 10$.

2. $f\left(f\left(f\left(x\right)\right)\right) = -8x + 3$, $\forall x \in \mathbb{R}$, deci f este strict descrescătoare.

3. Ecuația dată se scrie $3^{2x} + 3^x - 2 = 0$. Notând $3^x = y$ obținem ecuația $y^2 + y - 2 = 0$ cu soluțiile -2 și 1. Cum $3^x > 0$, convine doar $3^x = 1$, deci $x = 0$.

4. f bijectivă $\Rightarrow f$ surjectivă $\Rightarrow \mathrm{Im}\left(f\right) = A$. Atunci $f\left(-2\right) + f\left(-1\right) + f\left(0\right) + f\left(1\right) + f\left(2\right) = 0$.

5. Mijlocul segmentului $\left[AB\right]$ este $M\left(0;1\right)$. Punctul $P\left(x,y\right)$ aparține mediatoarei segmentului $\left[AB\right]$ dacă și numai dacă $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MP} = 0$. Avem $\overrightarrow{AB} = 2\vec{i} - 4\vec{j}$ iar $\overrightarrow{MP} = x\vec{i} + \left(y-1\right)\vec{j}$.
Ecuația mediatoarei lui $\left[AB\right]$ va fi : $2x - 4\left(y-1\right) = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 2 = 0$.

6. Avem $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right) \Rightarrow \cos\alpha < 0 \Rightarrow \cos\alpha = -\sqrt{1 - \frac{1}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1. $z = 1 + i + i^2 + i^3 + \ldots + i^6 = 1 + i - 1 - i + 1 + i - 1 = i \Rightarrow |z| = 1$.

2. f este funcție de gradul 2 cu $\Delta = 1$. Valoarea maximă a funcției f este $-\frac{\Delta}{4a} = \frac{1}{8}$.

3. Notând $\lg x = y$ obținem ecuația $y^2 + 5y - 6 = 0$ cu soluțiile -6 și 1.

$\lg x = -6 \Leftrightarrow x = \frac{1}{10^6}$, iar $\lg x = 1 \Leftrightarrow x = 10$.

4. O funcție $f : \{0,1,2,3\} \to \{0,1,2,3\}$ cu proprietatea $f(0) = f(1) = 2$ este unic determinată de un tabel de tipul

x	0	1	2	3
$f(x)$	2	2	a	b

unde $a, b \in \{0,1,2,3\}$.

Vor fi $4^2 = 16$ funcții cu proprietatea cerută.

5. $\overrightarrow{OA} = \vec{i} + 2\vec{j}$ și $\overrightarrow{OB} = 3\vec{i} + \vec{j}$, rezultă că $\|\overrightarrow{OA}\| = \sqrt{5}$, $\|\overrightarrow{OB}\| = \sqrt{10}$ și $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 5$. $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$.

6. $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow \sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{9} \Rightarrow \sin 2\alpha = -\frac{8}{9}$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1. $(1+i)^{10}+(1-i)^{10}=\left[(1+i)^2\right]^5+\left[(1-i)^2\right]^5=(2i)^5+(-2i)^5=0$.

2. Funcția f este strict descrescătoare pe intervalul $[1,+\infty)$. $\sqrt{2}<\sqrt{3}<2 \Rightarrow f\left(\sqrt{2}\right)>f\left(\sqrt{3}\right)>f(2)$.

3. Se impune condiția $x\geq\frac{1}{2}$. Prin ridicare la pătrat, ecuația devine $2x-1=9 \Leftrightarrow x=5$.

4. $f(0)\in\{1;3\}$. Dacă $f(0)=1\Rightarrow 4^3=64$ de funcții. Dacă $f(0)=3\Rightarrow 128$ de funcții.

5. $\frac{BM}{MC}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{BM}{BC}=\frac{1}{3}$; $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}+\frac{BM}{BC}\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

6. $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)\Rightarrow\cos\alpha<0$; $\cos\alpha=-\sqrt{1-\frac{9}{25}}=-\frac{4}{5}$; $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{3}{4}$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1. $\sqrt{7 \pm 4\sqrt{3}} = 2 \pm \sqrt{3}$, deci $a = 4$.

2. $f(2x) \le 0 \Rightarrow 4x^2 - 5x + 1 \le 0 \Rightarrow x \in \left[\frac{1}{4}; 1\right]$

3. $x \in [0;2]$, $x_1 = 1 \in [0;2]$, $x_2 = -2 \notin [0;2]$.

4. Mulțimea A are $2^6 - 1$ submulțimi nevide dintre care $2^3 - 1$ au toate elementele impare.

Probabilitatea cerută este $\frac{2^3 - 1}{2^6 - 1} = \frac{7}{63} = \frac{1}{9}$.

5. $\sin C = \frac{1}{\sqrt{65}}$.

6. Avem $x + \frac{1}{x} \ge 2$, $\forall x > 0$, cu egalitate numai pentru $x = 1$.

Cum $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha > 0$ și atunci $\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = 2 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \sin 2\alpha = \sin\frac{\pi}{2} = 1$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1. $\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}=\frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{-1}$

Fie a numărul din enunț. Avem $a=\frac{\sqrt{1}-\sqrt{2}+\sqrt{2}-\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{99}-\sqrt{100}}{-1}=-\sqrt{1}+\sqrt{100}=9$, deci $a\in\mathbb{N}$.

2. Graficul funcției f intersectează axa Ox în două puncte distincte dacă și numai dacă ecuația $f(x)=0$ are două soluții reale $\Leftrightarrow$ $\Delta>0$ $\Leftrightarrow$ $m^2-8>0$ $\Leftrightarrow$ $m\in\left(-\infty;-2\sqrt{2}\right)\cup\left(2\sqrt{2};+\infty\right)$.

3. Se impune condiția $x\in(-1;+\infty)$. Ecuația dată este echivalentă cu $\log_3\left[(x+1)(x+3)\right]=\log_3 3$ $\Leftrightarrow$ $x^2+4x=0$ cu soluțiile 0 și -4. Cum $x\in(-1;\infty)$, rezultă că $x=0$ este unica soluție a ecuației date.

4. Mulțimea A are 2^5-1 submulțimi nevide. $120=2\cdot3\cdot4\cdot5=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5$, deci 2 cazuri favorabile.

Probabilitatea $=\frac{2}{31}$.

5. Fie $G(x_G,\ y_G)$ centrul de greutate al triunghiului ABC.

Avem $x_G=\frac{x_A+x_B+x_C}{3}=\frac{4}{3}$ și $y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{3}=\frac{5}{3}$.

6. Folosim relația $|\sin x|=\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}}$.

Cum $\frac{\pi}{8}\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow\sin\frac{\pi}{8}>0$. Atunci $\sin\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1-\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{8}\right)}{2}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1. $\log_{16} 24 = \dfrac{\log_2\left(2^3 \cdot 3\right)}{\log_2\left(2^4\right)} = \dfrac{3+\log_2 3}{4} = \dfrac{3+\dfrac{1}{\log_3 2}}{4} = \dfrac{3+\dfrac{1}{a}}{4} = \dfrac{1+3a}{4a}$.

2. Fie a și b numerele căutate. Avem $\begin{cases} a+b=1 \\ a\cdot b=-1 \end{cases}$.

Numerele a și b vor fi soluțiile ecuației de gradul al doilea $x^2-x-1=0$, adică $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ și $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

3. Ecuația se scrie $2\cdot 2^{2x}+4\cdot 2^x=160 \Leftrightarrow 2^{2x}+2\cdot 2^x=80 \Leftrightarrow \left(2^x+1\right)^2=81$ și cum $2^x+1>0$ obținem $2^x+1=9$, de unde $x=3$.

4. Putem alege 3 fete din cele 12 în C_{12}^3 moduri. La fiecare alegere a fetelor putem alege 2 băieți din cei 10 în C_{10}^2 moduri. Comitetul clasei poate fi ales în $C_{12}^3\cdot C_{10}^2=9900$ moduri.

5. Avem $\overrightarrow{AB}=-3\vec{i}+2\vec{j}$. Ecuația paralelei prin C la AB este $\dfrac{x-1}{-3}=\dfrac{y-3}{2}$, adică $2x+3y-11=0$.

6. Deoarece $6\in\left(\dfrac{3\pi}{2};2\pi\right)$, rezultă că numărul real 6 se reprezintă pe cercul trigonometric în cadranul IV. În concluzie $\sin 6<0$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluție

1. Numerele $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \ldots, \frac{1}{2^{2009}}$ sunt în progresie geometrică cu rația $\frac{1}{2}$.

Rezultă că $s = \dfrac{\frac{1}{2^{2010}} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 2 - \frac{1}{2^{2009}}$ și de aici $1 < s < 2$.

2. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2x - 1 = -4x + 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$. Punctul de intersecție cerut este $M\left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right)$.

3. Utilizând relația $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, ecuația devine $\sin^2 x + \sin x - 2 = 0$.

Notăm $\sin x = y$ și obținem ecuația $y^2 + y - 2 = 0$ cu soluțiile 1 și -2.

Ecuația $\sin x = -2$ nu are soluții (pentru că $-1 \le \sin x \le 1$), iar $\sin x = 1 \Leftrightarrow x_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

4. Sunt 5^3 moduri de alegere a valorilor $f(0), f(1), f(2)$, deci 125 de funcții.

5. Patrulaterul convex *ABCD* este paralelogram dacă și numai dacă diagonalele sale au același mijloc.

Mijlocul lui $[AC]$ este $M\left(\frac{3}{2}; 1\right)$. Fie $D(x, y)$. Mijlocul lui $[BD]$ este $M'\left(\frac{-1+x}{2}; \frac{1+y}{2}\right)$.

$M = M' \Leftrightarrow \frac{-1+x}{2} = \frac{3}{2}$ și $\frac{1+y}{2} = 1 \Rightarrow D(4, 1)$.

6. Deoarece $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right) \Rightarrow \cos x < 0$ și atunci $\cos x = -\sqrt{1 - \sin^2 x} = -\frac{4}{5}$.

Deoarece $\frac{x}{2} \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \sin\frac{x}{2} > 0$, deci $\sin\frac{x}{2} = +\sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1. $\log_4 16 + \log_3 9 + \sqrt[3]{27} = 2 + 2 + 3 = 7 \in \mathbb{N}$.

2. Funcția f este funcție de gradul al doilea cu $\Delta = -8$ și $a = 3 > 0$.

Valoarea minimă a funcției f este $-\frac{\Delta}{4a} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$.

3. Notând $4^x = y$ obținem ecuația $y^2 + 3y - 4 = 0$ cu soluțiile -4 și 1.

Cum $4^x > 0$, convine doar $4^x = 1$, deci $x = 0$.

4. Dacă $n \in \mathbb{N}$, atunci $\sqrt{n} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow$ n este pătrat perfect.

În mulțimea $\{0, 1, 2, \ldots, 99\}$ sunt 100 de elemente dintre care 10 sunt pătrate perfecte: $0^2, 1^2, 2^2, \ldots, 9^2$.

Probabilitatea cerută este $\frac{10}{100} = \frac{1}{10} = 0{,}1$.

5. Avem $\overrightarrow{AB} = -3\vec{i} + 2\vec{j}$ și $\overrightarrow{CD} = (a-1)\vec{i} + \vec{j}$. Atunci $AB \| CD \Leftrightarrow \frac{a-1}{-3} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$.

6. $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{1}{2} + \sqrt{3}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} = 8 + 5\sqrt{3}$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluție

1. Avem $|3+4i| = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$ şi atunci $|z| = \left|(3+4i)^4\right| = |3+4i|^4 = 5^4 = 625$.

2. Fie $V(x_V, y_V)$ vârful parabolei $\Rightarrow x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2}$, $y_V = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{1}{2}$. Evident $x_V + y_V = 0$.

3. Ecuația devine $\sin x(1-2\cos x) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0$ sau $1-2\cos x = 0$.

Cum $x \in [0, 2\pi)$, avem $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ şi $x = \pi$, iar $\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}$ şi $x = \frac{5\pi}{3}$, deci 4 soluții.

4. Numărul funcțiilor bijective $g:\{2,3,4,5\} \to \{1,3,4,5\}$ este $4! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 24$.

5. Avem $\overrightarrow{AB} = -3\vec{i} + 2\vec{j}$ şi $\overrightarrow{CD} = (a-1)\vec{i} + \vec{j}$.

Atunci $AB \perp CD \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = 0 \Leftrightarrow -3(a-1)+2 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{5}{3}$.

6. Avem $\sin x + \cos x = \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Atunci $\sin B + \cos B = \sin C + \cos C \Rightarrow \sqrt{2}\cos\left(B - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(C - \frac{\pi}{4}\right)$.

Cum $B, C \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ obținem $B = C$, adică triunghiul ABC este isoscel.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1. $z=(2+i)^3+(2-i)^3=2^3+3\cdot 2^2 i+3\cdot 2i^2+i^3+2^3-3\cdot 2^2 i+3\cdot 2i^2-i^3=4$, deci $|z|=4$.

2. $f(x)=ax^2+bx+c\Rightarrow c=1;\ b=-3;\ a=-1$, deci $f(x)=-x^2-3x+1\Rightarrow f(2)=-9$.

3. Ecuația se scrie $2\cdot 3^{2x}+2^x\cdot 3^x-3\cdot 2^{2x}=0$ și împărțind prin 2^{2x} se obține $2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}+\left(\frac{3}{2}\right)^x-3=0$.

Notăm $y=\left(\frac{3}{2}\right)^x \Rightarrow 2y^2+y-3=0 \Rightarrow y_1=1$ și $y_2=-\frac{3}{2}$.

Cum $\left(\frac{3}{2}\right)^x>0$, convine doar $\left(\frac{3}{2}\right)^x=1 \Leftrightarrow x=0$.

4. Mulțimea A are 2010 elemente, iar numărul celor divizibile cu 402. Probabilitatea cerută este $\frac{1}{5}$.

5. Triunghiul AOB este dreptunghic în O. Avem $AO=3,\ BO=4,\ AB=5$.

Fie x distanța de la O la dreapta AB. Atunci $AO\cdot OB=x\cdot AB \Rightarrow x=\frac{AO\cdot OB}{AB} \Rightarrow x=\frac{12}{5}$.

6. $m(\sphericalangle ADC)=135^\circ \Rightarrow m(\sphericalangle BAD)=45^\circ$.

Aria paralelogramului este $AB\cdot AD\cdot \sin\widehat{BAD}=24\sqrt{2}$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1. Prin împărțire se obține că $\frac{1}{7} = 0,(142857)$. Atunci $a_{60} = 7$.

2. Avem $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2 - g(x) = -3x$, iar $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 3f(x) + 2 = 8 - 3x$.
Atunci $(f \circ g)(x) - (g \circ f)(x) = -3x - (8 - 3x) = -8, \forall x \in \mathbb{R}$.

3. Fie $f(x) = f(y) \Rightarrow 3x^3 + 1 = 3y^3 + 1 \Rightarrow x = y$. Rezultă că funcția f este injectivă.

4. Sunt 900 de numere de trei cifre, iar numărul celor divizibile cu 50 este dat de numărul k-urilor cu proprietatea $k \in \mathbb{N}, 100 \le 50k < 1000$ adică $2 \le k < 20$. Probabilitatea cerută este $\frac{18}{900} = \frac{1}{50}$.

5. Ecuația dreptei AB este: $y = x - 3$. Punctele A, B, C sunt coliniare $\Leftrightarrow C \in AB \Leftrightarrow a = -4$.

6. Din teorema cosinusului obținem $\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = -\frac{1}{2}$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. Numerele 1, 4, 7, … ,100 sunt 34 termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice cu rația 3.

Atunci $1+4+7+...+100=\frac{(1+100)\cdot 34}{2}=1717$.

2. $\text{Im}(f)=\{y\in\mathbb{R}\ /\ \exists x\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(x)=y\}$. Avem $f(x)=y \Leftrightarrow x^2+x+1-y=0$. Această ecuație are soluții reale dacă şi numai dacă $\Delta\geq 0$. $\Delta=1-4(1-y)$; $\Delta\geq 0 \Leftrightarrow y\geq\frac{3}{4}$. În concluzie, $\text{Im}(f)=\left[\frac{3}{4};\infty\right)$.

3. $E=\sin\left(\arcsin\frac{1}{2}\right)+\sin\left(\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{1}{2}+\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$.

4. Termenii dezvoltării sunt $T_{k+1}=C_5^k\left(\sqrt{2}\right)^{5-k}\cdot 1^k=C_5^k\sqrt{2^{5-k}}$, $k\in\{0,1,2,3,4,5\}$. Deoarece $C_5^k\in\mathbb{N}$ avem $T_{k+1}\in\mathbb{Q}\Leftrightarrow 5-k=\text{par}\Leftrightarrow k\in\{1,3,5\}$. Dezvoltarea are trei termeni raționali.

5. $ABCD$ pătrat $\Rightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AC}$. Atunci $\left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right\|=2\cdot\left\|\overrightarrow{AC}\right\|=2\sqrt{2}$.

6. $\sin 105^\circ=\sin\left(45^\circ+60^\circ\right)=\sin 60^\circ\cdot\cos 45^\circ+\cos 60^\circ\cdot\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1. Avem $2<3<4 \Rightarrow \log_2 2<\log_2 3<\log_2 4 \Rightarrow 1<\log_2 3<2 \Rightarrow \log_2 3 \in (1,2)$.

2. $x^2+3x+m>0$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta<0 \Leftrightarrow 9-4m<0 \Leftrightarrow m>\frac{9}{4} \Leftrightarrow m\in\left(\frac{9}{4},\infty\right)$.

3. Avem $\sin x+\cos x=\sin x+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

Ecuația devine $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x-\frac{\pi}{4}=\pm\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Mulțimea soluțiilor ecuației inițiale este: $\{2k\pi \ / \ k\in\mathbb{Z}\}\cup\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi \ / \ k\in\mathbb{Z}\right\}$.

4. $\forall n\in\mathbb{N}, n\geq 3$ avem $C_n^2+C_n^3=\frac{n!}{2!(n-2)!}+\frac{n!}{3!(n-3)!}=\frac{3n!+(n-2)n!}{3!(n-2)!}=\frac{n!(n+1)}{3!(n-2)!}=\frac{(n+1)!}{3!(n-2)!}=C_{n+1}^3$.

5. Avem $d_1\cap d_2=\{A(1;-1)\}$. Atunci $A\in d_3 \Leftrightarrow 1-1+a=0 \Leftrightarrow a=0$.

6. Din teorema cosinusului, $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos A \Rightarrow BC=\sqrt{13}$.

Perimetrul triunghiului ABC este $AB+BC+AC=7+\sqrt{13}$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. $z^2 = \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1-2i\sqrt{3}-3}{4} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = \bar{z}$.

2. Considerăm funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x) = -x^2+4x-3$. Tabelul de semn al lui g este:

x	$-\infty$		1		3		∞
$g(x)$		$- - - -$	0	$+ + + +$	0	$- - - -$	

$g(x)\ge 0 \Leftrightarrow x\in[1;\,3]$.

3. Avem $f(x)=f(y)\Rightarrow \frac{x^2+1}{x}=\frac{y^2+1}{y}\Rightarrow (x-y)(xy-1)=0\Rightarrow x=y$ sau $xy=1$.

Dar $x,y\in(1,\infty)\Rightarrow xy>1$. Avem $\begin{cases} x,y\in(1,\infty) \\ f(x)=f(y)\end{cases} \Rightarrow x=y$, deci f este injectivă.

4. O funcție $f:\{1,2,3\}\to\{0,1,2,3\}$ pentru care $f(1)$ este număr par este unic determinată de un tabel de tipul

x	1	2	3
$f(x)$	a	b	c

unde $a\in\{0,\,2\}$ iar $b,c\in\{0,1,2,3\}$.
Vor fi $2\cdot 4\cdot 4=32$ funcții cu proprietatea cerută.

5. Din teorema cosinusului, avem $BC^2 = AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos A$.

Atunci $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB\cdot AC\cos A = \frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2} = \frac{5}{2}$.

6. $\sin 15^\circ = \sin\left(45^\circ-30^\circ\right) = \sin 45^\circ\cdot\cos 30^\circ - \cos 45^\circ\cdot\sin 30^\circ$

$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1. Avem $z=\frac{4a}{4+a^2}+\frac{4-a^2}{4+a^2}i$. Atunci $z\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z)=0 \Leftrightarrow 4-a^2=0 \Leftrightarrow a=\pm 2$.

2. Rezolvăm sistemul $\begin{cases} 2x+3=y \\ x^2-4x+12=y \end{cases}$ și obținem o singură soluție: $\begin{cases} x=3 \\ y=9 \end{cases}$.

3. Se impun condițiile $2x-1\geq 0$ și $x\geq 0$, adică $x\in\left[\frac{1}{2},\infty\right)$.

Prin ridicare la pătrat ecuația devine $2x-1=x^2 \Leftrightarrow (x-1)^2=0 \Leftrightarrow x=1$.

4. Produsul cartezian $A\times A$ are 36 de elemente: $A\times A=\{(1,1),(1,2),...,(6,6)\}$.

Cazurile favorabile sunt $(1,5)$, $(5,1)$, $(2,4)$, $(4,2)$ și $(3,3)$. Probabilitatea cerută este $\frac{5}{36}$.

5. $\overrightarrow{MA}=-\vec{i}+3\vec{j}$, $\overrightarrow{MB}=2\vec{i}+2\vec{j} \Rightarrow \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{i}+5\vec{j} \Rightarrow \left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|=\sqrt{26}$.

6. Avem succesiv: $\sin(a+b)\cdot\sin(a-b)=(\sin a\cos b+\cos a\sin b)(\sin a\cos b-\cos a\sin b)=$
$=\sin^2 a\cos^2 b-\cos^2 a\sin^2 b=\sin^2 a(1-\sin^2 b)-(1-\sin^2 a)\sin^2 b=\sin^2 a-\sin^2 b$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1. Avem $100^{\lg 2}+\sqrt[3]{-27}=\left(10^{\lg 2}\right)^2+\sqrt[3]{(-3)^3}=2^2+(-3)=1$.

2. $\operatorname{Im}(f)=\{y\in\mathbb{R}\ /\ \exists x\in\mathbb{R}$ aşa încât $f(x)=y\}$.

Pentru $y=0$ avem $f(0)=0$, iar pentru $y\neq 0$ avem: $f(x)=y \Leftrightarrow yx^2-2x+y=0$. Această ecuație are soluții reale dacă şi numai dacă $\Delta\geq 0 \Leftrightarrow 4-4y^2\geq 0$, adică $y\in[-1;1]$. În concluzie, $\operatorname{Im}(f)=[-1;1]$.

3. Notând $3^x=y$ ecuația devine: $3y=-y+8$ de unde obținem $y=2$. Avem $3^x=2 \Leftrightarrow x=\log_3 2$.

4. $f(1)=3$, $f(3)=4\Rightarrow$ există 16 funcții $g:\{2,3\}\to\{1,2,3,4\}$. $f(1)=4$, $f(3)=3\Rightarrow$ încă 16 funcții, deci în total 32 funcții.

5. Fie d drepta ce trece prin $O(0,0)$ şi este paralelă cu dreapta AB.

Un vector director al dreptei d este $\overrightarrow{AB}=-3\vec{i}+2\vec{j}$. Ecuația dreptei d este $\frac{x}{-3}=\frac{y}{2} \Leftrightarrow 2x+3y=0$.

6. Ridicând la pătrat cele două egalități din ipoteză, se obțin relațiile :

$\cos^2 a+\cos^2 b+2\cos a\cos b=\frac{1}{4}$ şi $\sin^2 a+\sin^2 b+2\sin a\sin b=1$. Adunând membru cu membru aceste două egalități obținem $2+2(\cos a\cos b+\sin a\sin b)=\frac{5}{4}$, adică $2+2\cos(a-b)=\frac{5}{4}$ de unde rezultă $\cos(a-b)=-\frac{3}{8}$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1. Fie $a = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3}$. Prin calcul direct obținem $a = \frac{20}{27} \Rightarrow [a] = 0$.

2. Scăzând cele două ecuații obținem $x^2 + 4x + 3 = 0$ de unde $x = -1$ sau $x = -3$.

Sistemul are două soluții: $\begin{cases} x = -1 \\ y = 5 \end{cases}$ și $\begin{cases} x = -3 \\ y = 19 \end{cases}$.

3. Avem $\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg}\frac{1}{3}$, de unde $x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg}\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow x = \operatorname{ctg}\left(\operatorname{arcctg}\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$.

4. $T_{k+1} = C_{100}^{k} \cdot 5^{\frac{100-k}{4}} \Rightarrow k \vdots 4 \Rightarrow k \in \{0, 4, \ldots, 100\}$. Deci sunt 26 termeni raționali.

5. Avem $\overrightarrow{AB} = 2\vec{i} - 4\vec{j}$, $\overrightarrow{AC} = 4\vec{i} - 8\vec{j} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB} \Rightarrow A, B, C$ sunt coliniare.

6. Aria triunghiului dat este $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ unde $a = 4$, $b = 5$, $c = 7$ și $p = \frac{a+b+c}{2}$.

Obținem $p = 8$ și $S = 4\sqrt{6}$. Atunci $r = \frac{S}{p} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1. Fie $a=\sqrt{2}$ şi $b=-\sqrt{2}$. Avem $a,b\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ şi $a+b=0\in\mathbb{Q}$. Afirmația din enunț este falsă.

2. $f\left(f\left(x\right)\right)=f^2\left(x\right)\Rightarrow x+4=x^2+4x+4\Rightarrow x\in\left\{-3,0\right\}$.

3. Notăm $2^x=y$ şi obținem ecuația $y^2-y-12=0$ cu soluțiile $y_1=-3$ şi $y_2=4$.

$2^x=-3$ nu are soluții, iar $2^x=4 \Leftrightarrow x=2$.

4. Produsul cartezian $A\times A$ are 36 de elemente: $A\times A=\left\{\left(1,1\right),\left(1,2\right),.....,\left(6,6\right)\right\}$.

Fie $\left(a,b\right)\in A\times A$. Produsul $a\cdot b$ este impar dacă şi numai dacă a şi b sunt impare.

Cazurile favorabile sunt: $\left(1,1\right)$, $\left(1,3\right)$, $\left(1,5\right)$, $\left(3,1\right)$, $\left(3,3\right)$, $\left(3,5\right)$, $\left(5,1\right)$, $\left(5,3\right)$ şi $\left(5,5\right)$.

Probabilitatea cerută este $\frac{9}{36}=\frac{1}{4}=0,25$.

5. $AC=2\sqrt{2}\Rightarrow$ latura pătratului este 2, deci aria este 4.

6. Avem $\sin 105^\circ+\sin 75^\circ=2\sin 75^\circ=2\sin\left(45^\circ+30^\circ\right)=2\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1. $z=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{1-2i+i^2}{1-i^2}=-i \Rightarrow \operatorname{Re}(z)=0$.

2. Avem $x^2+mx+1\geq 0, \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta\leq 0 \Leftrightarrow m^2-4\leq 0 \Leftrightarrow m\in[-2,2]$.

3. $\arcsin 2x=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x\in[-1,1]$ și $\sin\left(-\frac{1}{2}\right)=2x$. Soluția ecuației este $x=-\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}$.

4. Mulțimea A conține 5 elemente pare și 5 impare. Dacă o submulțime cu 5 elemente a lui A conține două elemente pare, rezultă că celelalte trei elemente sunt impare. Putem alege 2 elemente pare din cele 5 în C_5^2 moduri, iar 3 elemente impare din cele 5 pot fi alese în C_5^3. Numărul cerut în enunț este $C_5^2\cdot C_5^3=100$.

5. Ecuația dreptei BC este $4x+3y-2=0$. Atunci $d(O,BC)=\frac{|4\cdot 0+3\cdot 0-2|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{2}{5}$.

6. $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right) \Rightarrow \cos\alpha<0$ și atunci $\cos\alpha=-\sqrt{1-\frac{9}{25}}=-\frac{4}{5}$.

$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \Rightarrow \operatorname{ctg}\alpha=-\frac{4}{3}$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. $\frac{7}{5\sqrt{2}-1}=\frac{7\left(5\sqrt{2}+1\right)}{50-1}=\frac{5\sqrt{2}+1}{7}\in(1,2)\Rightarrow\left[\frac{7}{5\sqrt{2}-1}\right]=1$.

2. $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}=\frac{\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2}{x_1x_2}=\frac{(-1)^2-2(-1)}{-1}=-3\in\mathbb{Z}$.

3. Ecuația este echivalentă cu $2\cdot 3^x+\frac{3}{3^x}=7$. Făcând substituția $y=3^x$ obținem ecuația $2y^2-7y+3=0$ cu soluțiile 3 și $\frac{1}{2}$. Avem $3^x=3\Leftrightarrow x=1$, iar $3^x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=-\log_3 2$.

4. Funcția f este strict crescătoare $\Leftrightarrow f(1)<f(2)<f(3)<f(4)$.
Orice submulțime a lui B poate fi ordonată crescător într-un singur mod. Numărul funcțiilor strict crescătoare $f:A\to B$ este egal cu numărul submulțimilor cu 4 elemente ale mulțimii B, adică $C_6^4=15$.

5. Ecuația dreptei BC este $2x-y+5=0$. Lungimea înălțimii duse din vârful A în triunghiul ABC este $d(A,BC)=\frac{|2\cdot 1-3+5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

6. $E=2\left(\sin 75^\circ-\sin 15^\circ\right)=4\sin\frac{75^\circ-15^\circ}{2}\cos\frac{75^\circ+15^\circ}{2}=4\sin 30^\circ\cos 45^\circ=4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. Fie r rația progresiei. Avem $a_6 = a_3 + 3r$ şi $a_{16} = a_{19} - 3r$, deci $a_6 + a_{16} = a_3 + a_{19} \Rightarrow a_6 + a_{16} = 10$.

2. Ecuația dată are două rădăcini reale distincte dacă şi numai dacă $\Delta > 0$. Avem $\Delta = m^2 + 4m - 4$.

$\Delta > 0 \Leftrightarrow m \in \left(-\infty, -2-2\sqrt{2}\right) \cup \left(-2+2\sqrt{2}, +\infty\right)$.

3. Făcând substituția $\lg x = y$, ecuația devine $y^2 + y - 6 = 0$ de unde obținem $y_1 = 2$, $y_2 = -3$.

Avem $\lg x = 2 \Leftrightarrow x = 100$, iar $\lg x = -3 \Leftrightarrow x = \frac{1}{1000}$.

4. $f(1) > f(2) > f(3) = 1 \Rightarrow$ numărul funcțiilor f este egal cu numărul funcțiilor $g:\{1,2\} \to \{2,3,4,5\}$ strict descrescătoare, adică $C_4^2 = 6$.

5. Fie $Q(a,b)$. Avem $\overrightarrow{MQ} = (a-2)\vec{i} + (b+1)\vec{j}$ şi $\overrightarrow{NP} = \vec{i} + 2\vec{j}$.

$MNPQ$ este paralelogram $\Leftrightarrow \overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{NP} \Leftrightarrow a - 2 = 1$ şi $b + 1 = 2$. Punctul căutat este $Q(3, 1)$.

6. Fie M mijlocul lui $[BC]$. Avem $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AM}^2 = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)^2$ de unde obținem

$AM^2 = \frac{1}{4}\left(AB^2 + AC^2 + 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{4}\left(AB^2 + AC^2 + 2\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{AC}\right\|\cdot\cos A\right)$. Din teorema cosinusului avem $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB\cdot AC\cdot\cos A \Rightarrow 2AB\cdot AC\cdot\cos A = AB^2 + AC^2 - BC^2$.

Atunci $AM^2 = \frac{2\left(AB^2 + AC^2\right) - BC^2}{4}$, de unde $AM = \frac{\sqrt{10}}{2}$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1. $(2+i)^4+(2-i)^4=\left((2+i)^2\right)^2+\left((2-i)^2\right)^2=(3+4i)^2+(3-4i)^2=-7+24i-7-24i=-14$.

2. Sistemul $\begin{cases} y=x^2+x+1 \\ y=2x+1 \end{cases}$ are două soluții: $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$ și $\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$. Dreapta de ecuație $y=2x+1$ intersectează parabola de ecuație $y=x^2+x+1$ în punctele $A(0,1)$ și $B(1,3)$.

3. $x\le\frac{11}{2}$; $\sqrt{16+x^2}=11-2x$, prin ridicare la pătrat, rezultă $3x^2-44x+105=0\Rightarrow x_1=3,\ x_2=\frac{35}{3}$, în final $x=3$.

4. Sunt 9000 de numere naturale cu 4 cifre. Numărul celor divizibile cu 9 este dat de numărul k-urilor cu $1000\le 9k\le 9999 \Leftrightarrow 111,(1)\le k\le 1111$, deci există 1000 astfel de numere. Probabilitatea cerută este $\frac{1}{9}$.

5. Centrul de greutate al triunghiului ABC este $G\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3},\frac{y_A+y_B+y_C}{3}\right)$, adică $G(1,2)$.

Ecuația dreptei OG este $\frac{x}{1}=\frac{y}{2} \Leftrightarrow y=2x$.

6. $2\left(\cos 75^\circ+\cos 15^\circ\right)=4\cos\frac{75^\circ-15^\circ}{2}\cos\frac{75^\circ+15^\circ}{2}=4\cos 30^\circ\cos 45^\circ=4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{6}$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1. Fie z numărul din enunț. Avem $z = 2^6 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^6 = 2^6 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)^6$. Folosind formula lui Moivre, obținem: $z = 2^6 \cdot (\cos\pi + i\sin\pi) = -2^6 \Rightarrow \mathrm{Re}(z) = -64$.

2. $(f \circ f)(512) = f(f(512)) = \frac{1}{\sqrt[3]{f(512)}} = \sqrt[9]{512} = \sqrt[9]{2^9} = 2$.

3. Utilizând formula $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, ecuația devine $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$. Notăm $y = \sin x$ și obținem ecuația $2y^2 - y - 1 = 0$ cu soluțiile $-\frac{1}{2}$ și 1.

$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, iar $\sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

4. Fiecare submulțime cu trei elemente a lui M poate fi ordonată strict crescător într-un singur mod. Numărul tripletelor (a,b,c) cu proprietatea că $a,b,c \in M$ și $a < b < c$ este egal cu numărul submulțimilor cu trei elemente ale mulțimii M, adică $C_6^3 = 20$.

5. Punctul $A(0, 3)$ se află pe dreapta d_1. Atunci distanța cerută este

$$\mathrm{d}(d_1, d_2) = \mathrm{d}(A, d_2) = \frac{|2 \cdot 0 + 4 \cdot 3 - 11|}{\sqrt{2^2 + 4^2}} = \frac{1}{\sqrt{20}} = \frac{\sqrt{5}}{10}.$$

6. Avem $\overrightarrow{AD}^2 = \|\overrightarrow{AD}\|^2 = 4$, iar $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{AD}\| \cdot \cos 60^\circ = 1$.

Atunci $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD}^2 \Rightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = 5$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluție

1. $\log_9 \sqrt{3} + \log_4 \sqrt{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$.

2. $m < 0$ şi $\Delta \le 0$, rezultă $m \in (-\infty; 0)$.

3. $2^x + 2^{x+1} + 2^{x-1} = 56 \Leftrightarrow 2^x\left(1 + 2 + \frac{1}{2}\right) = 56 \Leftrightarrow 2^x = 16 \Leftrightarrow x = 4$.

4. Dacă $n \in \mathbb{N}$, atunci $\sqrt[3]{n} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow$ n este cub perfect. În mulțimea A sunt 10 cuburi perfecte: 1^3, 2^3, ..., 10^3.

Probabilitatea cerută este $\frac{10}{1000} = \frac{1}{100} = 0{,}01$.

5. Cum $\overrightarrow{MC} = -3\overrightarrow{MB}$, rezultă că $M \in (BC)$ şi $\frac{BM}{MC} = \frac{1}{3}$. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \frac{BM}{BC}\overrightarrow{BC}$.

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{CA}$.

6. $\sin 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{3}{5}$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1. $2\left(2^{-a+2}+1\right)=2^{a-1}+2^{a+1}+1 \overset{2^a=t>0}{\Rightarrow} 5t^2-2t-16=0 \Rightarrow t=2 \Rightarrow a=1$.

2. $\begin{cases} x_V=-a+\dfrac{1}{2} \\ y_V=a-\dfrac{1}{4} \end{cases}$. Deci $x_V+y_V=\dfrac{1}{4}$.

3. $z^2+2z+4=0 \Big| \cdot \underbrace{(z-2)}_{\neq 0} \Rightarrow z^3=8$. Aşadar $z^2-\dfrac{8}{z}=\dfrac{z^3-8}{z}=0$.

4. Mulțimea dată are 40 de elemente, dintre care divizibile cu 2 şi cu 5, deci cu 10, sunt numerele $10,20,30$ şi 40. Probabilitatea este egală cu $\dfrac{1}{10}$.

5. Fie $\{O\}=AC\cap BD$ şi $MN\perp AB$, $O\in(MN), M\in(DC), N\in(AB)$. Atunci $\left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right|=$

$=\left|\left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{BO}\right)+\left(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)\right|=\left|2\overrightarrow{NO}+2\overrightarrow{OM}\right|=2NM=8$.

6. $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\Rightarrow \cos\alpha>0;\ \cos\alpha=\dfrac{5}{13}\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha=\dfrac{12}{5};\ \operatorname{tg}2\alpha=\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=-\dfrac{120}{119}$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluție

1. $A-B=(-3\ ;\ 1]\Rightarrow (A-B)\cap\mathbb{Z}=\{-2\ ;-1\ ;0\ ;1\}\Rightarrow card((A-B)\cap\mathbb{Z})=4$.

2. $2x+1=x^2-x+3\Rightarrow x^2-3x+2=0\Rightarrow x\in\{1\ ;2\}\Rightarrow (x\ ;y)\in\{(1\ ;3),(2\ ;5)\}$, deci punctele sunt $A(1\ ;3),B(2\ ;5)$.

3. $\begin{cases} x-1\geq 0 \\ 2-x\geq 0 \end{cases}\Rightarrow x\in[1\ ;2]\Rightarrow x-1+2-x+2\sqrt{(x-1)(2-x)}=1\Rightarrow x\in\{1\ ;2\}$.

4. $x!<7,\ x\in\mathbb{N}\Rightarrow x\in\{0;1;2;3\}$

5. $d(A;d)=\dfrac{|5\cdot 1+12\cdot 1-4|}{\sqrt{5^2+12^2}}\Rightarrow d(A;d)=1$.

6. $tga=\dfrac{1}{2},tgb=\dfrac{1}{5}\Rightarrow tg(a+b)=\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}}=\dfrac{7}{9}$.

www.bacmatematica.ro

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1. $|4x-8| = 4|x-2|, |4-2x| = 2|x-2| \Rightarrow f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

2. $x^2 - 2x + a - 1 = 2x + 3 \Rightarrow x^2 - 4x + a - 4 = 0 \Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow a \in (-\infty, 8)$.

3. $\sqrt[3]{x-1} = x - 1 \Rightarrow x - 1 = (x-1)^3 \Rightarrow (x-1)(x^2 - 2x) = 0 \Rightarrow x \in \{0\ ;\ 1\ ;\ 2\}$.

4. $\left(\sqrt{3}+1\right)^9 = \left(1+\sqrt{3}\right)^9$, $T_{k+1} = C_9^k \left(\sqrt{3}\right)^k \in \mathbb{Q} \Rightarrow \frac{k}{2} \in \mathbb{N}$

Numărul termenilor iraționali este $10 - \left(\left[\frac{9}{2}\right] + 1\right) = 5$.

5. $\frac{m+1}{m-1} = \frac{8}{-4} \Rightarrow m = \frac{1}{3}$.

6. $\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} \Rightarrow \cos A = \frac{1}{2} \Rightarrow m(\sphericalangle A) = 60^\circ$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

1. $\left[\sqrt{2008}\right]=44$, $\left\{-\frac{1}{3}\right\}=\frac{2}{3}\Rightarrow\left[\sqrt{2008}\right]+3\cdot\left\{-\frac{1}{3}\right\}=46$.

2. $x_v=-\frac{b}{2a}=2\in[2\,;\,3]$, $f(1)=f(3)=0, f(2)=-1\Rightarrow f([2\,;\,3])=[-1\,;\,0]$.

3. $\begin{cases}x+8\ge 0\\ x\ge 0\end{cases}\Rightarrow x\in[0\,;\,\infty)$, $\sqrt{x+8}=2+\sqrt{x}\Rightarrow x+8=4+4\sqrt{x}+x\Rightarrow x=1$.

4. $D_{56}=\{1,2,4,7,8,14,28,56\}\Rightarrow p=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$.

5. $6\vec{i}+2\vec{j}=p\left(\vec{i}+\vec{j}\right)+r\left(\vec{i}-\vec{j}\right)\Rightarrow\begin{cases}p+r=6\\ p-r=2\end{cases}\Rightarrow(p;r)=(4;2)$.

6. $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, $p=\frac{5+7+8}{2}=10$, $S=10\sqrt{3}\Rightarrow R=\frac{abc}{4S}\Rightarrow R=\frac{7\sqrt{3}}{3}$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluție

1. $(\sqrt{3}+\sqrt{7})^2 = 3+2\sqrt{21}+7 = 10+2\sqrt{21}$; $4,5 < \sqrt{21} < 4,6 \Rightarrow 9 < 2\sqrt{21} < 9,2$,deci $\left[(\sqrt{3}+\sqrt{7})^2\right] = 19$.

2. $1-x \neq 0, 1-2x \neq 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \left\{1, \frac{1}{2}\right\}$; $\frac{2x-1}{1-x} - \frac{3x+2}{1-2x} \geq 0 \Rightarrow \frac{x^2-3x+3}{(x-1)(2x-1)} \leq 0 \Rightarrow x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

3. $\sqrt[3]{2-x} = 2-x \Rightarrow 2-x = (2-x)^3 \Rightarrow (2-x)\left(x^2-4x+3\right) = 0 \Rightarrow x \in \{1;2;3\}$.

4. $T_{k+1} = C_{49}^k \left(x^{\frac{2}{3}}\right)^{49-k} y^{\frac{k}{2}}$; $\frac{2(49-k)}{3} = \frac{k}{2} \Rightarrow k = 28 \Rightarrow T_{29} = C_{49}^{28} x^{14} y^{14}$.

5. $\overrightarrow{r_G} = \frac{\overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_C}}{3} \Rightarrow \overrightarrow{r_G} = 2\vec{i} + 2\vec{j}$.

6. $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow R = \sqrt{3}$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1. $\left[-\sqrt{8}\right]=-3$, $\{-2,8\}=0,2 \Rightarrow -3,2$.

2. $\begin{cases} s=5 \\ s^2-2p=13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s=5 \\ p=6 \end{cases} \Rightarrow (x,y)\in\{(2,3),(3,2)\}$.

3. $2^x=t$, $t^2-10t+16=0 \Rightarrow t\in\{2;8\} \Rightarrow x\in\{1;3\}$.

4. $C_x^2=\frac{x(x-1)}{2}$, $A_x^2=x(x-1)$, $x\geq 2$, $\frac{x(x-1)}{2}+x(x-1)=30 \Rightarrow x=5$.

5. $\overrightarrow{OA}=2\vec{i}+\vec{j}, \overrightarrow{OB}=-2\vec{i}+\vec{j} \Rightarrow \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\left|\overrightarrow{OA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OB}\right|\cos\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)$, $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)=\frac{2\cdot(-2)+1\cdot 1}{\sqrt{2^2+1^2}\sqrt{2^2+1^2}}$, $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)=\frac{-3}{5}$.

6. $\text{ctg } x=3 \Rightarrow \text{tg } x=\frac{1}{3} \Rightarrow \text{tg } 2x=\frac{2\cdot\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{9}}=\frac{3}{4}$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluție

1. $2(a-bi)+a+bi=3+4i \Rightarrow z=1-4i$.

2. $s\left(s^2-3p\right)=-18$.

3. $5^x=t>0 \Rightarrow 1+t-2t^2=0 \Rightarrow t=1 \Rightarrow x=0$.

4. $T_{k+1}=C_9^k\left(a^2\right)^{9-k}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{a}}\right)^k, 2(9-k)-\frac{k}{3}=4 \Rightarrow k=6 \Rightarrow T_7$.

5. $\vec{u}^2-\vec{v}^2=\left(\vec{u}-\vec{v}\right)\left(\vec{u}+\vec{v}\right), \left(3\vec{i}+2\vec{j}\right)\left(2\vec{i}+3\vec{j}\right)=3\cdot 2+2\cdot 3=12$.

6. $BC=\sqrt{AC^2+AB^2}=13 \Rightarrow R=\frac{BC}{2}=\frac{13}{2}$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluție

1. $\sqrt{7+4\sqrt{3}}-\sqrt{3}=\sqrt{\left(\sqrt{3}+2\right)^2}-\sqrt{3}=2\in\mathbb{N}$.

2. $x^2+4x+5=\left(x+2\right)^2+1\geq 1,\ \forall x\in\mathbb{R}, x^2+2x+2=\left(x+1\right)^2+1\geq 1,\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow$

$\Rightarrow\left(x^2+4x+5\right)\left(x^2+2x+2\right)\geq 1,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

3. $x>0,\ \log_2\left(4x\right)=\log_2 4+\log_2 x=2+\log_2 x$, $\log_2 x=t$, $t^2+t-2=0\Rightarrow t\in\left\{1\ ;\ -2\right\}$; $x\in\left\{2\ ;\ \frac{1}{4}\right\}$.

4. $T_{k+1}=C_{200}^{k}\left(\sqrt[3]{x}\right)^{200-k}\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^{k}$, $k\in\left\{0;1;2;...;200\right\}$, $\frac{200-k}{3}-\frac{k}{2}=0\Rightarrow k=80\Rightarrow T_{81}=C_{200}^{80}\cdot 2^{80}$.

5. $m=-\frac{4}{-8}=\frac{1}{2}\Rightarrow\ y-1=\frac{1}{2}\left(x-2\right)\Rightarrow\ x-2y=0$.

6. $m_a^2=\frac{2\left(b^2+c^2\right)-a^2}{4}$, $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A\Rightarrow a^2=12$, $m_a=\sqrt{7}$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluție

1. $z=\frac{1+4i}{4+7i}=\frac{32+9i}{65}\Rightarrow \operatorname{Re} z=\frac{32}{65}$

2. $x_v=-\frac{b}{2a}\Rightarrow x=1$.

3. $3^x=t, t>0$, $3t+\frac{3}{t}=10\Rightarrow t\in\left\{\frac{1}{3};3\right\}\Rightarrow x\in\{-1;1\}$.

4. Numărul cazurilor posibile este $2010:2=1005$. Numărul cazurilor favorabile = 335, deci $p=\frac{335}{1005}=\frac{1}{3}$.

5. $m_d=-2\Rightarrow m=-\frac{1}{-2}$, $y-2=\frac{1}{2}(x-3)\Rightarrow x-2y+1=0$.

6. M mijlocul lui $[BC]$. $GM=\frac{1}{3}AM$, AM este înălțime $AM^2=AB^2-BM^2\Rightarrow AM=4$.

Deci $GM=\frac{4}{3}$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluție

1. $\lg\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100}\right)=\lg\frac{1}{100}=-2$.

2. $x<3\Rightarrow -x+3-x+4=1\Rightarrow x\in\varnothing$, $x\in[3,4)\Rightarrow x-3-x+4=1\Rightarrow x\in[3,4)$,
$x\geq 4\Rightarrow x-3+x-4=1\Rightarrow x=4$. Deci $x\in[3,4]$.

3. $\log_3 x=t$, $t+\frac{1}{t}=\frac{5}{2}\Rightarrow t\in\left\{2;\frac{1}{2}\right\}\Rightarrow x\in\left\{9;\sqrt{3}\right\}$

4. Numărul cazurilor posibile $2010:2=1005$. Numărul cazurilor favorabile 251. $p=\frac{251}{1005}$.

5. $\sqrt{(m-2)^2+(-2-m)^2}=4$. $m\in\{-2;2\}$.

6. $\operatorname{ctg} x=6\Rightarrow\frac{\cos x}{\sin x}=6\Rightarrow\frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}=36\Rightarrow\sin^2 x=\frac{1}{37}$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1. $1+3+3^2+...+3^8=\frac{3^9-1}{3-1}=\frac{3^9-1}{2}\Rightarrow 2\frac{3^9-1}{2}=3^9-1<3^9$.

2. $x_1^3+x_2^3=s\left(s^2-3p\right), s=-5, p=-7\Rightarrow x_1^3+x_2^3=-5\left(25-3\left(-7\right)\right)=-230\in\mathbb{Z}$.

3. $\log_5 x=t, t+\frac{1}{t}=\frac{5}{2}\Rightarrow t\in\left\{2;\frac{1}{2}\right\}\Rightarrow x\in\left\{25;\sqrt{5}\right\}$.

4. $2x-3\geq 2$, $\frac{\left(2x-3\right)\left(2x-4\right)}{2}=3\Rightarrow x=3$. $C_3^2=3$ .Deci $x=3$.

5. $M\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ este mijlocul segmentului AB. $m_{AB}=1\Rightarrow m_d=-1$, d fiind mediatoarea segmentului AB, deci $d: y-\frac{1}{2}=-\left(x+\frac{1}{2}\right)\Rightarrow d: x+y=0$.

6. $\vec{u}\cdot\vec{v}=\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|\cos\left(\sphericalangle\left(\vec{u};\vec{v}\right)\right)\Rightarrow\cos\left(\sphericalangle\left(\vec{u};\vec{v}\right)\right)=\frac{5}{6}$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluție

1. $2(1-x)=x+1+4 \Rightarrow x=-1$

2. $f(0)=-6$, $f(x)=0 \Rightarrow x\in\{1;-6\} \Rightarrow A(0;-6), B(1;0), C(-6;0)$

3. $\sin x=-\frac{1}{2}, x\in\left\{(-1)^k \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+k\pi \,\middle|\, k\in\mathbb{Z}\right\}$, dar $x\in[0,2\pi] \Rightarrow x\in\left\{\frac{7\pi}{6};\frac{11\pi}{6}\right\}$.

4. Numărul cazurilor posibile este 2^6. Numărul cazurilor favorabile este $C_6^2=15$. $p=\frac{15}{64}$.

5. $\overrightarrow{r_G}=\frac{\overrightarrow{r_A}+\overrightarrow{r_B}+\overrightarrow{r_C}}{3} \Rightarrow \overrightarrow{r_C}=6\vec{i}+6\vec{j}$.

6. $(2\vec{u}+\vec{v})\cdot(2\vec{v}-\vec{u})=4\vec{u}\vec{v}-2\vec{u}^2+2\vec{v}^2-\vec{u}\vec{v}=3\vec{u}\vec{v}-2\vec{u}^2+2\vec{v}^2$,

$3\vec{u}\vec{v}-2\vec{u}^2+2\vec{v}^2=3\cdot1\cdot2\cdot\frac{1}{2}-2\cdot1+2\cdot2^2$, $(2\vec{u}+\vec{v})\cdot(2\vec{v}-\vec{u})=9$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluție

1. $6^2 = x(x-5) \Rightarrow x = 9$.

2. $f(-1) = -2 \Rightarrow f(2\cdot(-2)) = 10 \Rightarrow f(2\cdot(f(-1))) = 10$.

3. $2x + \frac{\pi}{2} = x - \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \pi(2k-1), k \in \mathbb{Z}$ sau $2x + \frac{\pi}{2} = -x + \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

   În final , $x \in \{\pi(2k-1) |\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{\frac{2k\pi}{3} |\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

4. $C_{2n}^n = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \in \mathbb{N} \Rightarrow (n!)^2$ divide $(2n)!$.

5. $2x_M = x_A + x_N, 2x_N = x_B + x_M \Rightarrow x_M = 4, x_N = 5;$
   $2y_M = y_A + y_N, 2y_N = y_B + y_M \Rightarrow y_M = 3, y_N = 4$, deci $M(4\ ;\ 3)$, $N(5\ ;\ 4)$.

6. $-1 < \frac{a^2 + (a+1)^2 - (a+2)^2}{2a(a+1)} < 0, a \in \mathbb{N}^* \Rightarrow a = 2$. Doar pentru $a = 2$ se obține triunghi .

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1. $a_{n+1}-a_n=\frac{4(n+1)}{n+4}-\frac{4n}{n+3}=\frac{12}{(n+3)(n+4)}\Rightarrow a_{n+1}-a_n>0,\forall n\in\mathbb{N}\Rightarrow$ șirul este crescător .

2. $x^2+x+1=-x^2-2x+6\Rightarrow 2x^2+3x-5=0\Rightarrow x\in\left\{-\frac{5}{2},1\right\}\Rightarrow A\left(-\frac{5}{2},\frac{19}{4}\right), B(1,3)$.

3. $x-\frac{\pi}{4}=3x+\frac{\pi}{4}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\Rightarrow x=\frac{4k-1}{4}\pi,k\in\mathbb{Z}$, $x-\frac{\pi}{4}=-3x-\frac{\pi}{4}+(2k+1)\pi,k\in\mathbb{Z}\Rightarrow x=\frac{2k+1}{4}\pi,k\in\mathbb{Z}$.

În final , $x\in\left\{\frac{4k-1}{4}\pi\middle|\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{2k+1}{4}\pi\middle|\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.

4. $2^n=32\Rightarrow n=5$,$T_4=C_5^3\left(2x^2\right)^2(-5y)^3\Rightarrow T_4=-5000x^4y^3$.

5. $d_1\cap d_2\neq\varnothing\Leftrightarrow\frac{m}{2}\neq\frac{3}{1}\Leftrightarrow m\neq 6$.

6. $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0\Rightarrow AC\perp BD\Rightarrow AB^2=OB^2+OA^2$,$CD^2=OD^2+OC^2$,
$AD^2=OD^2+OA^2$, $BC^2=OC^2+OB^2\Rightarrow AB^2+CD^2=AD^2+BC^2$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1. $a_{n+1}-a_n=(n+1)^2-(n+1)-n^2+n$, $a_{n+1}-a_n=2n$,

$a_{n+1}-a_n>0, \forall n\in\mathbb{N}^* \Rightarrow (a_n)_{n\in N^*}$ este strict monoton .

2. $f(x)=(x+1)^2$, $(f\circ g)(x)=(x-2009+1)^2=(x-2008)^2\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$.

3. $x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}-x+k\pi, k\in\mathbb{Z}\Rightarrow x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}-x+k\pi, k\in\mathbb{Z}$,deci $x=\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$.

Cum $x\in(0,\pi)\Rightarrow x\in\left\{\frac{\pi}{12},\frac{7\pi}{12}\right\}$.

4. $x\geq 3$, $C_x^{x-1}=C_x^1=x, C_{x-1}^{x-3}=C_{x-1}^2=\frac{(x-1)(x-2)}{2}$, $x^2-x-16\leq 0\Rightarrow x\in\{3;4\}$.

5. $\frac{m}{m+2}=\frac{m+2}{4m}\neq\frac{-1}{-8}\Rightarrow m\in\left\{2;-\frac{2}{3}\right\}$.

6. $tgC=tg(\pi-(A+B))=-tg(A+B)$, $tg(A+B)=\frac{tgA+tgB}{1-tgAtgB}\Rightarrow tgC=1\Rightarrow C=\frac{\pi}{4}$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1. Rația este : $17-13=4$. $a_2=a_3-4=9 \Rightarrow a_1=a_2-4=5$.

2. $f(-x)=(-x)^3+2\sin(-x)=-f(x), \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ funcția f este impară .

3. $tgx=-\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x \in \left\{-\frac{\pi}{6}+k\pi \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}$.

4. Numărul cazurilor posibile este 900 . $a+b+c=2 \Rightarrow \overline{abc} \in \{110;101;200\} \Rightarrow p=\frac{1}{300}$.

5. $-\frac{m}{3}\cdot\left(-\frac{12}{2}\right)=-1 \Rightarrow m=\frac{-1}{2}$.

6. $\sin\alpha=\frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow \sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1. $(2+i)(3-2i)=8-i$,$(1-2i)(2-i)=-5i \Rightarrow 8+4i$.

2. $f(x)=3x-[3x]$,

$f(x+\frac{1}{3})=\left\{3\left(x+\frac{1}{3}\right)\right\}=\{3x+1\}=3x+1-[3x+1]=3x+1-[3x]-1=3x-[3x]=\{3x\}=f(x),\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{3}$ este o perioadă a funcției f .

3. $x=\pi$ verifică ecuația. $tg\frac{x}{2}=t\Rightarrow \sin x=\frac{2t}{1+t^2}$,$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$,$t=\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow x\in\left\{\frac{\pi}{3},\pi\right\}$.

4. $\frac{C_{20}^{10}}{C_{20}^{9}}=\frac{20!}{10!10!}\cdot\frac{9!11!}{20!}=\frac{11}{10}$.

5. $m+4=2+2, n+5=3+2\Rightarrow (m,n)=(0;0)$.

6. $\frac{\sin x}{\cos x}=4\Rightarrow \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}=16\Rightarrow \cos^2 x=\frac{1}{17}$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1. $b_3^2 = 6 \cdot 24 \Rightarrow b_3 = 12 \;\; q = \frac{b_3}{b_2} = 2 \Rightarrow \;\; b_1 = 3$.

2. $3 - m^2 > 0 \Rightarrow m \in \left(-\sqrt{3}; \sqrt{3}\right)$.

3. $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin\frac{3\pi}{3} = 0, \sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\sin\frac{\pi}{3} + \sin\frac{2\pi}{3} + \sin\frac{3\pi}{3} + \sin\frac{4\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

4. Numărul cazurilor posibile este: 3^3. Numărul cazurilor favorabile este $3! = 6 \Rightarrow p = \frac{2}{9}$.

5. $\frac{GP}{AB} = \frac{1}{3}, \overrightarrow{GP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \Rightarrow m = \frac{1}{3}$.

6. $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \Rightarrow \cos 2\alpha = \frac{-7}{9}$.

www.bacmatematica.ro

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluție

1. $\frac{25(4-3i)}{25}+\frac{25(4+3i)}{25}=8$.

2. $m^2-2<0 \Rightarrow m\in\left(-\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$.

3. $arctg\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6} \Rightarrow arctg\frac{x}{3}=\frac{\pi}{6} \Rightarrow x=\sqrt{3}$.

4. Numărul cazurilor posibile este : $90:2=45$. Numărul cazurilor favorabile se obține din $4\cdot 3, 4\cdot 4, ..., 4\cdot 24$, adică 22 . $p=\frac{22}{45}$.

5. $\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{NC}=\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AN}=3\overrightarrow{NC}$ și $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{MB} \Rightarrow \overrightarrow{MN} \parallel \overrightarrow{BC}$.

6. $\sin\frac{11\pi}{12}=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{12}\right)=\sin\frac{\pi}{12}=\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluție

1. $\bar{z}+7i=6z, z=x+yi; x,y\in\mathbb{R}$, $\bar{z}=x-yi, x-yi+7i=6(x+yi)\Rightarrow x=0, y=1\Rightarrow z=i$.

2. $f(1)+f(2)+f(3)+...+f(50)=\frac{(3+101)50}{2}=2600.$

3. Dacă f ar fi surjectivă , atunci ar exista $x_0\in\mathbb{N}$ astfel încât $f(x_0)=0$. $3x_0+1=0\Rightarrow x_0=-\frac{1}{3}\notin\mathbb{N}$.

Deci f nu e surjectivă $\Rightarrow$ f nu este bijectivă $\Rightarrow$ f nu este inversabilă.

4. $x!(x+1-1)\le 100\Rightarrow x!\cdot x\le 100$, $0!\cdot 0, 1!\cdot 1, 2!\cdot 2, 3!\cdot 3, 4!\cdot 4\le 100$, $x!\cdot x>100, \forall x>4$, $p=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$.

5. Punctul lor de intersecție este $M(0,1)\in Oy$ .Punctele $A(-1,-1)\in d_1, B(1,-1)\in d_2$ sunt simetrice față de Oy , deci dreptele sunt simetrice față de Oy .

6. $\cos\frac{7\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$, $\cos\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluție

1. $(1+i)^{20} = \left[(1+i)^2\right]^{10} = (2i)^{10} = -1024$.
2. $f(f(x)) = f\left(\frac{1}{x}\right) = x$, $(-10)+(-9)+...+(-1)+1+...+10 = 0$.
3. Funcția este strict crescătoare, fiind compunere de funcții strict crescătoare, deci funcția *f* este injectivă.
4. $\frac{5!}{2!} - 6 \cdot \frac{5!}{3!2!} = 0$.
5. $\frac{|3m-4(m+1)-1|}{\sqrt{3^2+4^2}} = 1 \Rightarrow m \in \{-10;0\}$.
6. $\cos 75^\circ - \cos 15^\circ = -2\sin 45^\circ \sin 30^\circ$, $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin 30^\circ = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos 75^\circ - \cos 15^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1. $\log_7 2009 - \log_7 287 - 1 = \log_7 \frac{2009}{287} - 1 = \log_7 7 - 1 = 0$.

2. $f(-x) = (-x)^2 - \frac{1}{(-x)^2}$, $(-x)^2 - \frac{1}{(-x)^2} = x^2 - \frac{1}{x^2}$, $f(-x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}^* \Rightarrow$ funcția f este pară.

3. $x \neq 0 \Rightarrow x^4 > 0 \Rightarrow 3 - x^4 < 3, f(0) = 3 \Rightarrow f(x) \leq f(0), \forall x \in \mathbb{R}$, deci valoarea maximă este $f(0)$.

4. $3n + 2\frac{n(n-1)}{2} = 8 \Rightarrow n = 2$.

5. $\frac{A'C}{A'B} = 2, \frac{C'B}{C'A} = \frac{1}{3}, \frac{B'A}{B'C} = \frac{3}{2}$, $\frac{A'C}{A'B} \cdot \frac{C'B}{C'A} \cdot \frac{B'A}{B'C} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1 \Rightarrow AA'$, BB' și CC' sunt concurente .

6. $\begin{cases} 2x + y - 2 = 0 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$, ecuația este $y = 2$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1. $\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{100}=\cos\frac{100\pi}{4}+i\sin\frac{100\pi}{4}=-1\in\mathbb{R}$.

2. $f(-x)=(-x)^3-\frac{1}{-x}$, $(-x)^3-\frac{1}{-x}=-x^3+\frac{1}{x}=-\left(x^3-\frac{1}{x}\right)$, $f(-x)=-f(x),\forall x\in\mathbb{R}^*\Rightarrow f$ impară.

3. $x_v=\frac{1}{2}\notin[1\ ;\ 4], f(1)=0, f(4)=12\Rightarrow f([1,4])=[0,12]\Rightarrow A=[0,12]$.

4. $(5-4)^{2009}=1$.

5. $m_d=-\frac{4}{-2}\Rightarrow m=-\frac{1}{2}$, $y-2=-\frac{1}{2}(x-1)\Rightarrow x+2y-5=0$.

6. $\sin 75^\circ\cdot\cos 15^\circ=\frac{\sin 90^\circ+\sin 60^\circ}{2}$, $\sin 90^\circ=1, \sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\frac{2+\sqrt{3}}{4}$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluție

1. $|5-12i| = \sqrt{5^2+(-12)^2} = 13$, $|12+5i| = \sqrt{12^2+5^2} = 13$, $|5-12i| - |12+5i| = 0$.
2. $f(1) = 0$, $f(0) = 0$, $(f \circ f \circ f \circ f)(1) = 0$.
3. $2^x = t > 0 \Leftrightarrow t^2 + t - 20 = 0 \Rightarrow t \in \{-5, 4\} \Rightarrow x = 2$
4. Numărul cazurilor posibile este 403. Dintre acestea divizibile cu 25 sunt 81. Deci $p = \frac{81}{403}$.
5. Direcția bisectoarei este dată de $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{AB}}{AB} + \frac{\overrightarrow{AC}}{AC} = \frac{\overrightarrow{AB}}{c} + \frac{\overrightarrow{AC}}{b} = \frac{b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}}{bc}$.

   Deci $\overrightarrow{AD} = bc\vec{u} \Rightarrow$ semidreapta $[AD$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAC$.
6. $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$, $\cos^2\alpha = \frac{3}{4} \Rightarrow \alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right) \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluție

1. $z_1 = \frac{-3-i\sqrt{7}}{2}, z_2 = \frac{-3+i\sqrt{7}}{2}$.
2. Fie g prelungirea funcției f în punctul $x_0 = 0$. Condiția este $g(0) = -2m+2 \geq 0 \Rightarrow m \in (-\infty;1]$.
3. $2-x \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty;2)$. $\sqrt{2-x} = \sqrt[3]{x-2}$. Notăm $\sqrt[6]{2-x} = t \geq 0 \Rightarrow t^3 = t^2 \Rightarrow t \in \{0;1\} \Rightarrow x \in \{1;2\}$.
4. Ambii membri sunt egali cu $\frac{(a+b)!}{a!b!}$.
5. $\frac{2m-2}{1-m-4} = \frac{3-2}{3-4} \Rightarrow m = 5$.
6. $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \Rightarrow \sin\alpha > 0, \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \Rightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1. $a=-3,\ b=-4,\ c=-2$. Deci $b<a<c$.

2. $\begin{cases}\Delta<0\\ a>0\end{cases}\Rightarrow m^2+8m<0\Rightarrow m\in(-8,0)$.

3. $x^2+x-2>0$. $\sqrt{x^2+x-2}=2\Rightarrow x^2+x-6=0\Rightarrow x\in\{-3,2\}$, care verifică condiția de existență.

4. Numărul triunghiurilor este egal cu $4C_3^2+3C_4^2=30$.

5. Dacă D este simetricul lui A față de mijlocul lui (BC), atunci $ABDC$ este paralelogram, deci $x_A+x_D=x_B+x_C$ și $y_A+y_D=y_B+y_C$, de unde $D(-1,-7)$.

6. $A_{ABC}=2A_{AMC}=MC\cdot AM\cdot\sin 150^\circ=4$.

www.bacmatematica.ro

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Inovării
Centrul Naţional pentru Curriculum şi Evaluare în Învăţământul Preuniversitar

Rezolvare

1. Avem $\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1\in\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in\mathbb{Z}\}$, pentru $a=-1\in\mathbb{Z}$ şi $b=1\in\mathbb{Z}$.

2. $x_1^2+x_2^2=\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2=3^2-2=7\in\mathbb{N}$.

3. $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

4. $C_{2n}^n=C_{2n-1}^n+C_{2n-1}^{n-1}=2\cdot C_{2n-1}^n$.

5. $\vec{u}+\vec{v}=3\vec{i}+3\vec{j}$, deci $\left|\vec{u}+\vec{v}\right|=3\sqrt{2}$.

6. Avem $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$, deci $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=3$.

www.bacmatematica.ro

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Inovării
Centrul Naţional pentru Curriculum şi Evaluare în Învăţământul Preuniversitar

Rezolvare

1. $2a_1 + 5 \cdot 2 = 8 \Rightarrow a_1 = -1$.

2. $0 - 1 - 2 - \ldots - 9 = -45$.

3. $2^x = 8$, deci $x = 3$.

4. $24 - 6 - 6 = 12$.

5. $\overrightarrow{GM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, de unde cerinţa.

6. $\frac{3}{\sqrt{7}}$.

www.bacmatematica.ro

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

1. $7-7=0$.

2. $x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$.

3. $f=x\left(\log_3 2-1\right)$ este funcție de grad 1, deci este injectivă.

4. $C_8^2-8=20$.

5. $\overrightarrow{BP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BD}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)$.

6. $1=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=\operatorname{tg}\left(a+b\right)=\frac{\operatorname{tg}a+\operatorname{tg}b}{1-\operatorname{tg}a\cdot\operatorname{tg}b}$, de unde cerința.

www.bacmatematica.ro

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Inovării
Centrul Naţional pentru Curriculum şi Evaluare în Învăţământul Preuniversitar
Rezolvare

1. $\frac{3}{2} < \log_2 3 \Leftrightarrow 2^{\frac{3}{2}} < 3 \Leftrightarrow 8 < 9 \ (\mathbf{A})$.

2. 1 şi 3.

3. $x = 0;\ x = 1$.

4. $\frac{C_{n+1}^3}{C_n^3} = \frac{n+1}{n-2} = 1 + \frac{3}{n-2} \in \mathbb{N} \Rightarrow n \in \{3;5\}$.

5. $\frac{3}{\sqrt{2}}$.

6. $\cos^2 x = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 x} = \frac{1}{7}$.

www.bacmatematica.ro

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Rezolvare

1. Al patrulea factor este 0, deci produsul este 0.

2. $f\left(g\left(x\right)\right)=1-g\left(x\right)=-2x+2$ este descrescătoare.

3. $x\in\left[-1,1\right]$.

4. Numărul cerut este egal cu numărul funcţiilor injective. $g:\left\{1;2;3\right\}\to\left\{1;2;3;4;5\right\}$ minus numărul funcţiilor injective $h:\left\{2;3\right\}\to\left\{2;3;4;5\right\}$, adică $A_5^3-A_4^2=48$.

5. $x-2y-6=0$.

6. Ridicăm la pătrat $\sin x-\cos x=\frac{1}{2}\Rightarrow 1-\sin 2x=\frac{1}{4}\Rightarrow \sin 2x=\frac{3}{4}$.

www.bacmatematica.ro

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Rezolvare

1. 8.

2. $1=\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2=4-4m\Rightarrow m=\frac{3}{4}.$

3. $x=0.$

4. 2^{15}.

5. $a=-3.$

6. $\sin 2a+\sin 2b=2\sin\left(a+b\right)\cos\left(a-b\right)=2\sin\frac{\pi}{2}\cos\left(a-b\right)=2\cos\left(a-b\right).$

www.bacmatematica.ro

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Inovării
Centrul Naţional pentru Curriculum şi Evaluare în Învăţământul Preuniversitar

Rezolvare

1. $(1+i)^4 = (2i)^2 = -4$, deci este rădăcină a ecuației $z^4 + 4 = 0$.

2. $x_V = 2, y_V = 5$, deci $x + y = 7$.

3. $f(1), f(2), f(3)$ sunt distincte, deci sunt 4,5,6 -- eventual permutate. Suma este $4+5+6=15$.

4. M are 90 de elemente, cifre impare sunt 5, iar numere cu cifre impare 25. Probabilitatea e $\frac{25}{90} = \frac{5}{18}$.

5. $\overrightarrow{AB} = \vec{i} + 3\vec{j}$, $\overrightarrow{AC} = -2\vec{i} + 4\vec{j} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 10$.

6. $\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a = \frac{11}{16}$.

www.bacmatematica.ro

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

1. $\sqrt{2} < \sqrt[3]{3} \Leftrightarrow 8 < 9;\ \sqrt[3]{3} < 2 = \log_2 4 < \log_2 5.$

2. $\Delta = 9 - 4m \le 0 \Rightarrow m \ge \frac{9}{4}.$

3. $\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow$ ecuația devine $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow x \in \left\{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$

4. Sunt 7 pătrate. Probabilitatea este $\frac{7}{49} = \frac{1}{7}.$

5. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow 2m - 12 = 0 \Leftrightarrow m = 6.$

6. $P = \operatorname{tg}1^\circ \cdot \operatorname{tg}2^\circ \cdot \operatorname{tg}3^\circ \cdot \ldots \cdot \operatorname{tg}89^\circ = (\operatorname{tg}1^\circ \cdot \operatorname{tg}89^\circ) \cdot (\operatorname{tg}2^\circ \cdot \operatorname{tg}88^\circ) \cdot \ldots \cdot (\operatorname{tg}44^\circ \cdot \operatorname{tg}46^\circ) \cdot \operatorname{tg}45^\circ = 1.$

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Inovării
Centrul Naţional pentru Curriculum şi Evaluare în Învăţământul Preuniversitar

Rezolvare

1. Avem $3\left(z+\bar{z}\right)\in\mathbb{R},\forall z\in\mathbb{R}$, deci $z=3z+3\bar{z}-\left(2z+3\bar{z}\right)\in\mathbb{R}$.

2. $f\left(x\right)=-\frac{9}{2}x^2-\frac{3}{2}x+4$.

3. Ecuaţia $f\left(x\right)=y, y\in\left(1,3\right)\Rightarrow x=\frac{3-y}{y-1}\in\left(0,\infty\right)$ are soluţie unică.

4. $n=8$.

5. $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)+\left(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}\right)=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=\vec{0}$.

6. $\cos a=\cos\left(b+\pi\right)=-\cos a$, deci $\cos a\cdot\cos b=-\cos^2 a\le 0$.

www.bacmatematica.ro

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

1. Fie $z = a + bi,\ a,b \in \mathbb{R}$. Avem $i\left(z - \bar{z}\right) = i\left(a + bi - a + bi\right) = -2b \in \mathbb{R}$.

2. $\Delta = (m-1)^2 = 0 \Rightarrow m = 1$.

3. $x = 3$ este unica soluție.

4. $T_{k+1} = C_7^k \cdot 2^k,\ k = \overline{1,6}$ se divid cu 2 si 7, deci cu 14; iar primul si ultimul termen nu. Sunt 6 termeni.

5. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos A = 2 \cdot 2 \cdot \cos\frac{\pi}{3} = 2.$

6. $\sin 2a - \sin 2b = 2\sin\left(a-b\right)\cos\left(a+b\right) = 2\sin\left(a-b\right)\cos\frac{3\pi}{2} = 0.$

www.bacmatematica.ro

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Rezolvare

1. Prin calcul obținem $-\frac{8}{5}$.

2. Avem $\frac{a^2+b^2}{ab}=\frac{(a+b)^2}{ab}-2=\frac{21}{2}$.

3. Cum $\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right)=\sin\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)=\sin\left(\pi-\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\Rightarrow$ ecuația este verificată de orice $x\in\mathbb{R}$.

4. Sunt 4 elemente în A și 3 multipli de 7.

5. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AC}$, deci modulul este $2AC=6\sqrt{5}$.

6. $\cos 1^\circ+\cos 2^\circ+\cos 3^\circ+...+\cos 179^\circ=$

$\left(\cos 1^\circ+\cos 179^\circ\right)+\left(\cos 2^\circ+\cos 178^\circ\right)+...+\left(\cos 89^\circ+\cos 91^\circ\right)+\cos 90^\circ=0$

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Inovării
Centrul Naţional pentru Curriculum şi Evaluare în Învăţământul Preuniversitar

Rezolvare

1. $1+z+z^2=\frac{1-z^3}{1-z}=\frac{1-1}{1-z}=0.$

2. $x\in\{-3,-2,-1,0,1,2\}.$

3. Observăm că $\forall y\in(2,\infty),\ \exists!\ x\in(1,\infty), x=\sqrt{y+1}$ astfel ca $f(x)=y.$

4. Avem 4 numere divizibile cu 24, anume 24, 48, 72, 96.

5. $\frac{a}{3}=\frac{a+1}{5}\Rightarrow a=\frac{3}{2}.$

6. Semiperimetrul şi aria sunt $p=\frac{15}{2}, S=\frac{15\sqrt{3}}{4}\Rightarrow r=\frac{S}{p}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$

www.bacmatematica.ro

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1. $a = \lg\frac{2}{20} = \lg\frac{1}{10} = -1,\ b = -C_3^1 = -3,\ c = -\sqrt[3]{4\cdot 2} = -2 \Rightarrow b < c < a$.

2. $V(-1; a-1)$. Rezultă $a = 0$ sau $a = 2$.

3. $\operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}\frac{1}{x} \Rightarrow x\cdot y = 1$

4. $A_n^3 = 6C_n^3 = n(n-1)(n-2) \Rightarrow 3 \mid A_n^3$.

5. Avem $EGFH$ paralelogram, pentru că $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{HF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} \Rightarrow \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{HG} = \overrightarrow{EG} + \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{HF} + \overrightarrow{FG} = 2\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{CA}$.

6. Cum $2x \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right) \Rightarrow \cos 2x < 0$. Deci $\cos 2x = -\sqrt{1-\sin^2 2x} = -\frac{4}{5} \Rightarrow \operatorname{tg} x = \frac{\sin 2x}{1+\cos 2x} = -3$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Inovării
Centrul Naţional pentru Curriculum şi Evaluare în Învăţământul Preuniversitar
Rezolvare

1. $z = -\frac{3}{7}i.$

2. $x = 5$ şi $x = -1$.

3. Ecuaţia $f(x) = y \Leftrightarrow 4yx^2 - x + y = 0$ are soluţii reale dacă şi numai dacă $y \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right] \Rightarrow \operatorname{Im} f = \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right].$

4. Sunt $C_4^3 = 4$ funcţii strict crescătoare şi tot 4 strict descrescătoare. În total sunt 8 funcţii strict monotone.

5. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$, evident.

6. $\sin 2a - \sin 2b = 2\sin(a-b)\cos(a+b) = \sin(a-b)$, de unde cerinţa.

www.bacmatematica.ro

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Inovării
Centrul Naţional pentru Curriculum şi Evaluare în Învăţământul Preuniversitar

Rezolvare

1. $150 = \frac{2a_1 + 9 \cdot 3}{2} \cdot 10 \Rightarrow a_1 = \frac{3}{2}$.

2. Notând $s = a + b, p = ab$ avem $s^2 - 2p = 1, s = 2,$ de unde $s = 2,\ p = 1$ şi $a = b = 1 \Rightarrow (a,b) = (1,1)$.

3. Avem $x \in \left(0, \frac{9}{2}\right)$ iar ecuaţia se scrie $x(9 - 2x) = 10$. Obţinem soluţiile $x = 2$ şi $x = 2{,}5$.

4. Sunt 100 de numere in multimea M si 14 multiplii cu 7; probabilitatea este $\frac{86}{100} = \frac{43}{50}$.

5. $y = -2x + 2$.

6. Este partea reală a sumei rădăcinilor de ordin 5 ale unităţii. Alternativ, înmulţim suma cu $\sin\frac{\pi}{5}$.

www.bacmatematica.ro

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Inovării
Centrul Naţional pentru Curriculum şi Evaluare în Învăţământul Preuniversitar

Rezolvare

1. $|z| = \left|\sqrt{2} - 1 + i\left(\sqrt{2} + 1\right)\right|^2 = 6.$

2. $(1-2y)^2 - 6y^2 = 1 \Rightarrow -4y - 2y^2 = 0 \Rightarrow y = 0$ sau $y = -2$. Obținem $x = 1, y = 0$ şi $x = 5, y = -2$.

3. De exemplu, $f(0) = 1 = f(-1)$.

4. $C_{10}^3 - C_9^3 = C_9^2 = 36$.

5. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ şi $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$, deci $AC = BD$, de unde cerința.

6. $\sin 40^\circ \cdot \sin\left(180^\circ - 140^\circ\right) = \sin^2 40^\circ = \cos^2 50^\circ = \cos^2 130^\circ$.

www.bacmatematica.ro

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

1. Fie q rația progresiei. Avem $a\left(q^3-1\right)=7$, $aq\left(q-1\right)=2$, de unde $q=2$.

2. $mx^2+x-2\le 0, \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow m<0$ și $\Delta=1+8m\le 0$. Rezultă $m\le -\frac{1}{8}$.

3. $2x+\frac{\pi}{6}\in\left\{\left(-1\right)^k \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\} \Rightarrow x\in\left\{-\frac{\pi}{12}-\left(-1\right)^k\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2} \mid k\in\mathbb{Z}\right\}\cap\left(0,5\right)=\{\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6},\frac{3\pi}{2}\}$.

4. $n=C_{10}^0-C_{10}^2+C_{10}^4-C_{10}^6+C_{10}^8=C_{10}^0+\left(C_{10}^2-C_{10}^8\right)-\left(C_{10}^6-C_{10}^4\right)=1-0-0=1$.

5. $0=\vec{u}\cdot\vec{v}=a^2-1+2a+2\Rightarrow a=-1$.

6. $\sin\alpha=-\frac{2\sqrt{2}}{3}\Rightarrow \sin 2\alpha=2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)=\frac{4\sqrt{2}}{9}$.

www.bacmatematica.ro

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Inovării
Centrul Naţional pentru Curriculum şi Evaluare în Învăţământul Preuniversitar

Rezolvare

1. $z = 1 \pm \sqrt{3}i \Rightarrow |z| = 2.$

2. $f(x) = ax + b, a > 0 \Rightarrow f(f(x)) = a^2x + ab + b \Rightarrow a = 2, b = 1.$

3. $x = 2.$

4. $\frac{10}{1000} = \frac{1}{100}.$

5. Dreapta AB are ecuatia $x - y + 1 = 0.$ Distanta este $\frac{1}{\sqrt{2}}.$

6. Avem $\sin\alpha = 0$ sau $\cos\alpha = 1,$ deci $x = \pi.$

www.bacmatematica.ro

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Inovării
Centrul Naţional pentru Curriculum şi Evaluare în Învăţământul Preuniversitar

Rezolvare

1. $(1+i)^4 = -4.$

2. $f(-x) = \ln\frac{1+x}{1-x} = -\ln\frac{1-x}{1+x} = -f(x).$

3. $5^x + 5^{-x} = 2 \Leftrightarrow \left(5^x - 1\right)^2 = 0 \Rightarrow x = 0.$

4. Sunt 4 cifre prime, anume 2,3,5,7, deci sunt 400 de numere cu proprietatea cerută. Probabilitatea este $\frac{4}{9}$.

5. Punctele B,C,O sunt coliniare şi O este mijlocul segmentului BC. Rezultă că BC este diametru al cercului circumscris, deci $A = 90^\circ$.

6. $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 1 \Rightarrow \sin 2\alpha = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} 2\alpha = 0.$

www.bacmatematica.ro

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Inovării
Centrul Naţional pentru Curriculum şi Evaluare în Învăţământul Preuniversitar

Rezolvare

1. $\frac{10}{\sqrt{2}-1}=10\left(\sqrt{2}+1\right)\in\left(24;25\right)$, deci partea întreagă este 24.

2. Ecuația se scrie $1=\left(1-x\right)\left|1+x\right|$. Obținem $x=0$ şi $x=-\sqrt{2}$.

3. Funcțiile $g,h:\left(0,\infty\right)\to\mathbb{R}, f\left(x\right)=2009^x, g\left(x\right)=\log_{2009}x,$ sunt strict crescătoare, deci funcția $f=g+h$ este strict crescătoare.

4. Numărul numerelor $\overline{abc}$ cu $a\cdot b\cdot c$ impar $\Leftrightarrow a,b,c\in\left\{1,3,5,7,9\right\}$ este $5^3=125$, deci $p=\frac{5}{36}$.

5. $\vec{u}\cdot\vec{v}=3+3a+a^2>0,\forall a\in\mathbb{R}.$

6. $\sin x+\sin 5x=2\cos 2x\cdot\sin 3x,$ de unde cerința.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Rezolvare

1. Avem $b^2 = ac$. Dacă prin absurd nu toate numerele sunt pare, din $a+b+c$ par rezultă că un număr este par şi două impare. Atunci unul din membrii relaţiei $b^2 = ac$ este par şi celălalt par, fals.

2. $f(a)+f(a+1)=2(a+2)^2 \geq 0$.

3. $\log_2 x + \log_4 x = \frac{3}{2}\log_2 x > 3 \Rightarrow x > 4$.

4. $C_n^1 + C_n^2 = 120 \Rightarrow n(n+1) = 240 \Rightarrow n = 15$.

5. $\vec{u}\cdot\vec{v} = 2-a < 0 \Leftrightarrow a > 2$.

6. Avem $B = 90^\circ, A = 30^\circ$, deci $BA = 4\sqrt{3}$ şi aria triunghiului este $8\sqrt{3}$.

www.bacmatematica.ro

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Rezolvare

1. $\sqrt[3]{100} < \sqrt[3]{125} = 5 = \log_2 32 < 3! = 6.$

2. Privind ca trinom în x avem $\Delta = 9y^2 - 12y^2 = -3y^2 \le 0,$ de unde cerința.

3. $\sin 2x = \cos x \Rightarrow \cos x = 0$ sau $\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{(-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$

4. $A_5^3 - 4 \cdot C_6^2 = 5 \cdot 4 \cdot 3 - 4 \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} = 0.$

5. $\overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \Rightarrow C(3,7).$

6. $\sin A = \frac{4}{5} \Rightarrow R = \frac{BC}{2\sin A} = \frac{8}{\frac{8}{5}} = 5.$

www.bacmatematica.ro

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

1. Avem $a+bi+2a-2bi=3+i \Rightarrow a=1, b=-1 \Rightarrow |z|=\sqrt{2}$.

2. $x^2-3=0$.

3. $\log_x 2+\log_{\sqrt{x}} 2=9 \Rightarrow 3\log_x 2=9 \Rightarrow x=\sqrt[3]{2}$.

4. Sunt $C_5^3=10$ submulțimi cu 3 elemente ale lui A, iar singura fără elemente pare este $\{1,3,5\}$; rămân 9 submulțimi.

5. $a=b=-1$.

6. $\cos a=-\frac{4}{5} \Rightarrow \operatorname{tg} a=-\frac{3}{4}$.

www.bacmatematica.ro

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Inovării
Centrul Naţional pentru Curriculum şi Evaluare în Învăţământul Preuniversitar

Rezolvare

1. Avem $n=\sqrt{3}+\sqrt{2}\in(3,4)\Rightarrow[n]=3$.

2. f este funcție strict monotonă, iar compunerea a două funcții de aceeaşi monotonie este strict crescătoare.

3. $3^x=t>0\Rightarrow 9t^2+9t-4=0\Rightarrow t=\frac{1}{3}\Rightarrow x=-1$.

4. Exact două valori ale funcției sunt 1, celelalte fiind 0, deci sunt $C_{10}^2=45$ de funcții.

5. $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MP}=\left(\vec{i}+3\vec{j}\right)\left(2\vec{i}+(m-2)\vec{j}\right)=3m-4\Rightarrow m=3$.

6. Funcția cos este descrescătoare pe intervalul $[0,\pi]$, deci cel mai mare este cos 1.

www.bacmatematica.ro

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Inovării
Centrul Naţional pentru Curriculum şi Evaluare în Învăţământul Preuniversitar

Rezolvare

1. $a = 2; b = 1$.

2. $x = 0$.

3. $|x-1| = 3 - x \Rightarrow x = 2$.

4. Fiecare termen se divide cu 11.

5. $C(3,9)$.

6. $\sin^2 a = \dfrac{\operatorname{tg}^2 a}{1+\operatorname{tg}^2 a} = \dfrac{4}{29} \Rightarrow |\sin a| = \dfrac{2}{\sqrt{29}}$.

www.bacmatematica.ro

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluții

1. a) Se verifică prin calcul.

b) Se demonstrează prin inducție după $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Din ipoteză rezultă $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X$, iar din **a)**, că există $u, v \in \mathbb{R}$, astfel încât $X = \begin{pmatrix} u & v \\ v & u \end{pmatrix}$.

Folosind **b)** găsim $\begin{cases} \dfrac{(u+v)^3 + (u-v)^3}{2} = 2 \\ \dfrac{(u+v)^3 - (u-v)^3}{2} = 1 \end{cases}$ și soluția: $X = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt[3]{3}+1}{2} & \dfrac{\sqrt[3]{3}-1}{2} \\ \dfrac{\sqrt[3]{3}-1}{2} & \dfrac{\sqrt[3]{3}+1}{2} \end{pmatrix}$.

2. a) Se verifică prin calcul.

b) Calcul direct, $-\widehat{16} = \hat{5}$ în $\mathbb{Z}_7$.

c) Pentru $a \in \mathbb{Z}_7$, $a \neq \hat{0}$, $\forall\, x \in \mathbb{Z}_7$, $f(x) = \hat{6} + a \cdot x$. Avem $f\left(a^{-1}\right) = \hat{0}$, deci f este reductibil.

Pentru $a = \hat{0}$, $f = \left(X^3 + \hat{4}\right) \cdot \left(X^3 + \hat{3}\right)$, deci f este reductibil.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluții

1. a) Se verifică prin calcul. Se obține $a = 3$.

b) $B = A - A^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Se obține $B^{2009} = B$.

c) $\det(X) = 0 \Rightarrow X^5 = t^4 \cdot X$, unde $t = trX$. Deci $t^5 = 3,\ t \in \mathbb{R} \Rightarrow t = \sqrt[5]{3}$ și $X = \frac{1}{\sqrt[5]{3^4}} A$, care verifică.

2. a) Pentru $a, b \in M$, avem $e^a + e^b - 1 \geq 1$, deci $a * b \in [0, \infty) = M$.

b) Pentru $a, b, c \in M$ se demonstrează că $(a * b) * c = a * (b * c) = \ln\left(e^a + e^b + e^c - 2\right)$.

c) Se demonstrează prin inducție că $\underbrace{a * a * \ldots * a}_{de\ n\ ori\ a} = \ln\left(n \cdot e^a - (n-1)\right)$.

Se obțin apoi soluțiile $a = 0$ și $a = \ln(n-1)$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluții

1. a) $A^2 - A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2I_3$.

b) Cum $A(A - I_3) = (A - I_3)A = 2I_3$ rezultă că $A^{-1} = \frac{1}{2}(A - I_3)$.

c) $A^2 + A = 2(A + I_2) \Rightarrow A^3 + A^2 = 2^2(A + I_3)$. Prin inducție rezultă concluzia.

2. a) Se folosește definiția elementului neutru.

b) Deoarece $\begin{cases} f(3) = 0 \\ f(4) = 1 \end{cases}$, obținem $\begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \end{cases}$ și se verifică apoi faptul că funcția $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = x - 3$ este izomorfismul căutat.

c) Se demonstrează prin inducție că $\underbrace{x \circ x \circ \ldots \circ x}_{\text{de 2009 ori } x} = (x-3)^{2009} + 3$.

Se obțin apoi soluția $x = 5$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1. a) Se arată că $rang(A) = 2$.

b) Calcul direct, sau, deoarece $rang(A^t \cdot A) \le rang(A) = 2$, rezultă că $\det(A^t \cdot A) = 0$.

c) De exemplu $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

2. a) $4 \circ 5 \circ 6 = 9$.

b) Se demonstrează că funcția f este bijectivă și $\forall\, x, y \in (0, \infty)$, $f(x \cdot y) = f(x) \circ f(y)$.

c) Fie $q \in \mathbb{Q}$, $q > 3$. Atunci, există $m, n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $q = 3 + \frac{m}{n}$.

$\forall\, t \in \mathbb{N}^*$, avem $k = 3 + t \in H$ și deoarece H este subgrup al lui G, rezultă că și simetricul $k' = \frac{1}{t} + 3 \in H$.

Deci $m + 3, \frac{1}{n} + 3 \in H$, de unde și $(m+3) \circ \left(\frac{1}{n} + 3\right) = \frac{m}{n} + 3 = q \in H$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluții

1. a) Se arată că $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \end{vmatrix} = 0$, deci punctele A, B, C sunt coliniare.

b) Între linii există relația $L_3 = 6L_1 - 2L_2$. Rangul este 2.

c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, deci $\operatorname{rang}(M) \geq 2$.

Dacă unul dintre minorii de ordinul trei ai lui M care conțin ultima coloană este nul, atunci punctul $D(a,b)$ este coliniar cu două dintre punctele A, B și C.
Din a) rezultă că punctele A, B, C, D sunt coliniare, deci toți ceilalți minori de ordinul 3 ai matricei M sunt nuli. Așadar $\operatorname{rang}(M) = 2$.

2. a) Se verifică prin calcul.
b) Se arată că elementul neutru este $e = -1$.
Dacă $x \in \mathbb{Z}$, evident $5x + 6 \neq 0$.

x este simetrizabil $\Leftrightarrow$ $\exists\, x' \in \mathbb{Z}$, $xx' = x'x = -1$ $\Leftrightarrow$ $x' = -\dfrac{6x+7}{5x+6} \in \mathbb{Z}$, deci $5x' = -6 + \dfrac{1}{5x+6} \in \mathbb{Z}$,

aşadar $5x + 6 \in \{-1, 1\}$. Se obține că unicul element simetrizabil în raport cu legea "$*$" este elementul neutru $e = -1$.
c) Din ecuație rezultă că x este inversabil şi din b) rezultă $x = -1$, care verifică relația.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1. a) Deoarece $\sigma^6 = e$, rezultă că $\sigma^{2009} = \sigma^5 = \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

b) Alegem, de exemplu, $\tau \in S_5$ astfel încât $\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. Obținem

$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ (sau alegem $\tau = \sigma^2$).

c) Cum $\tau^1, \tau^2, ..., \tau^{121} \in S_5$, $\exists q \geq r$ cu $\tau^q = \tau^r$. Luăm $p = q - r$.

2. a) Se arată că soluțiile ecuației sunt $x \in \left\{1, \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}, \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right\}$.

b) Utilizând relațiile lui Viète obținem $S = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$.

Dacă ecuația ar avea mai mult de o rădăcină reală, deoarece ea are coeficienți reali, ea ar avea toate rădăcinile reale. Deoarece $S = 0$, obținem $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, fals.

c) Utilizând relațiile lui Viète, obținem $\Delta = (x_1 + x_2 + x_3)\left((x_1 + x_2 + x_3)^2 - 3(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)\right) = -4$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluție

1. a) Se arată că $\operatorname{rang}(A)=3$.

b) Se arată ușor că mulțimea soluțiilor este $S=\left\{(0,\alpha,1-2\alpha,\alpha)\,\middle|\,\alpha\in\mathbb{C}\right\}$.

c) Presupunem că sistemul are soluția $X=\begin{pmatrix}x & y & z\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{C})$. Se obține sistemul $\begin{cases}x=0\\2x+y=0\\3x+2y+z=0\\4x+3y+2z=1\end{cases}$.

Sistemul omogen format din primele trei ecuații are doar soluția $x=y=z=0$, care nu verifică a patra ecuație a sistemului, contradicție.

2. a) Se verifică prin calcul.

b) Din a) rezultă că „$\cdot$” este lege de compoziție pe H_t.

Deoarece pentru $t\in\mathbb{Z}$, simetrica din grupul $(G,\cdot)$ a matricei $A(k\cdot t-1)$ este matricea $A(-k\cdot t-1)$, rezultă că $A(h\cdot t-1)\cdot A(-k\cdot t-1)=A((h-k)t-1)\in H_t$, $\forall h,k\in\mathbb{Z}$.

c) Fie funcția $f:G\to\mathbb{Z}$, $f(A(k))=k+1$, $\forall\, k\in\mathbb{Z}$.

Se demonstrează că f este bijectivă și că este un morfism de grupuri.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluții

1. a) $\det(A) = -4$.

b) Pentru $n = 1$, $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = A + 2I_3$, deci $P(1)$ este adevărată.

Dacă $P(n)$ este adevărată atunci

$$A^{2(n+1)} = A^{2n} \cdot A^2 = \left(\frac{2^{2n} - 1}{3} A + \frac{2^{2n} + 2}{3} I_3 \right)(A + 2I_3) = \frac{2^{2(n+1)} - 1}{3} A + \frac{2^{2(n+1)} + 2}{3} I_3 .$$

c) Se arată că $A^{-1} = \frac{1}{2}(A - I_3)$ deci $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. a) $(x_1 + 1)(x_2 + 1)(x_3 + 1) = -(-x_1 - 1)(-x_2 - 1)(-x_3 - 1) = -P(-1) = -a$ sau se folosesc relațiile lui Viète.

b) $x_1 = 2 \Rightarrow a = -6$. Celelalte rădăcini sunt soluțiile ecuației $x^2 + 2x + 3 = 0$, deci $x_{2,3} = -1 \pm \sqrt{2} \cdot i$.

c) $a = 0$ este soluție.

Pentru $a \neq 0$, din primele două relații ale lui Viète rezultă $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 x_2 + (x_1 + x_2) \cdot x_3 = -1 \end{cases}$.

Se obține $x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 - 1 = 0$. Din $\Delta_{x_1} \geq 0$ și $x_2 \neq 0$ rezultă $x_2^2 = 1$.

Rezultă $x_3 = 0$, fals. Așadar $a = 0$ este unica soluție.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1. a) $\begin{vmatrix} x_A & 2x_A & 1 \\ x_B & 2x_B & 1 \\ x_C & 2x_C & 1 \end{vmatrix} = 0$.

b) $\det(M) = \pm 2S_{ABC} = \pm 1$.

c) Fie $M^{-1} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$. Din $M^{-1} \cdot M = I_3$, rezultă $a_1 + b_1 + c_1 = 0, a_2 + b_2 + c_2 = 0, a_3 + b_3 + c_3 = 1$, de unde concluzia.

2. a) $X = \begin{pmatrix} m & n \\ -3n & m \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} p & q \\ -3q & p \end{pmatrix} \Rightarrow X + Y = \begin{pmatrix} u & v \\ -3v & u \end{pmatrix}$, cu $u = m + p \in \mathbb{Z}, v = n + q \in \mathbb{Z}$.

b) $XY = O_2 \Rightarrow \det(X) \cdot \det(Y) = 0$ deci, luând X, Y ca mai sus, $m^2 + 3n^2 = 0$ sau $p^2 + 3q^2 = 0$, de unde $m = n = 0$ sau $p = q = 0$.

c) Unitatea inelului este I_2. Dacă $X, Y \in A$ şi $XY = I_2$, atunci $\det(X) \cdot \det(Y) = 1$ și $\det(X), \det(Y) \in \mathbb{Z}$, deci $\det(X) = \pm 1$. Rezultă $X = \pm I_2$; aceste două elemente sunt inversabile în inelul dat.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1. a) Se arată că $\alpha^3 = e$.

b) Deoarece $\alpha^3 = e$ rezultă că $\alpha^{2009} = \alpha^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Ecuația devine $\alpha^2 \cdot x = e$, cu unica soluție

$x = \alpha^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \alpha$.

c) Fie $\sigma = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 \cdot \sigma_4 \cdot \sigma_5 \cdot \sigma_6$ o ordonare oarecare a factorilor.

$\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma_1) \cdot \varepsilon(\sigma_2) \cdot \varepsilon(\sigma_3) \cdot \varepsilon(\sigma_4) \cdot \varepsilon(\sigma_5) \cdot \varepsilon(\sigma_6) = (-1)^{m(\sigma_1)+m(\sigma_2)+m(\sigma_3)+m(\sigma_4)+m(\sigma_5)+m(\sigma_6)} = -1$.

2. a) $z = \sqrt{2}(1+i)$.

b) Dacă $z = a + bi \in \mathbb{Z}[i]$ este inversabil, atunci $a^2 + b^2 = 1$, deci $a = \pm 1$ și $b = 0$ sau $a = 0$ și $b = \pm 1$. Rezultă că $z \in \{\pm 1; \pm i\}$. Cum ± 1 și $\pm i$ sunt inversabile în $\mathbb{Z}[i]$, rezultă concluzia.

c) $z = a + bi$ cu $a, b \in \mathbb{Z}$ aparține lui $H \Leftrightarrow 2 / (a+b)$. Dacă $a + bi$, $c + di \in H$ rezultă $(a+bi)(c+di) \in H$ deoarece $2 / c(a+b) + d(a-b)$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1. a) $\det(A) = 4$.

b) Se arată prin calcul direct.

c) $A \neq 0_4 \Leftrightarrow$ cel puțin unul dintre numerele $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ este nenul $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \neq 0$. Folosind unicitatea inversei, deducem că $A^{-1} = \frac{1}{\alpha} \cdot A^t$.

2. a) $|a| = |-a| = |x_1 + x_2 + x_3| \leq |x_1| + |x_2| + |x_3| \leq 3$.

b) $f(0) = c < 0$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = +\infty$.

Funcția polinomială asociată lui f este continuă pe $[0, \infty)$, deci ea (și polinomul f) are cel puțin o rădăcină în $(0, \infty)$.

c) $x_1 x_2 x_3 = 1$, de unde rezultă $|x_1| = |x_2| = |x_3| = 1$.

Deoarece $c = -1 < 0$, din punctul **b)** rezultă că f are rădăcina $x_1 \in (0, \infty)$.

Cum $|x_1| = 1$, obținem $x_1 = 1$.

Folosind relațiile lui Viète, obținem $x_2 = x_3 = -1$ și apoi $b = -1$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluții

1. a) Se verifică prin calcul.
b) Se demonstrează prin calcul direct, ținând cont de faptul că
$\forall\, k \in \{1,2\}$, $x_k \cdot g(x_k) = a \cdot x_k^3 + b \cdot x_k^2 + c \cdot x_k = a + b \cdot x_k^2 + c \cdot x_k$ și
$x_k^2 \cdot g(x_k) = a \cdot x_k^4 + b \cdot x_k^3 + c \cdot x_k^2 = a \cdot x_k + b + c \cdot x_k^2$.
c) Din **b)** se obține $\det(A) = g(1) \cdot g(x_1) \cdot g(x_2)$.
$\det(A) = 0 \Leftrightarrow$ cel puțin unul dintre numerele $1, x_1, x_2$ este rădăcină și pentru g.
Obținem $a + b + c = 0$ sau $a = b = c$.
2. a) $f(\hat{0}) = f(\hat{1}) = \hat{0}$.
b) Cum f nu e injectivă, iar domeniul său este o mulțime finită și coincide cu codomeniul, rezultă că f nu este surjectivă.
c) Singurele rădăcini ale polinomului sunt $x_1 = \hat{0}$ și $x_2 = \hat{1}$.
Descompunerea în factori ireductibili a polinomului peste $\mathbb{Z}_5$ este $X^4 + \hat{4}X = X(X + \hat{4})(X^2 + X + \hat{1})$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1. a) Determinantul sistemului este $\Delta = 2\cdot(1-m)$.

Pentru $m\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$ sistemul este compatibil determinat.

b) Pentru $m=1$, $\Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ şi $\Delta_c = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$, deci sistemul este compatibil.

c) Dacă $m=1$, sistemul are mulțimea soluțiilor $S_1 = \{(x,1,2-x) \mid x\in\mathbb{R}\}$ şi

$x^2+1^2+(2-x)^2 = 2x^2-4x+5$.

Funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=2x^2-4x+5$ are minimul $g(x_V)=g(1)=3$.

2. a) Se verifică prin calcul.

b) Dacă $X,Y\in G$, $\det(X\cdot Y)=\det(X)\cdot\det(Y)=1$, deci $X\cdot Y\in G$.

Se verifică că dacă $X\in G$, atunci şi $X^{-1}\in G$.

c) $C = A\cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2 + D$, unde $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Deoarece $D^2 = 0_2$, obținem $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, $C^n = (-1)^n\cdot I_2 + n\cdot(-1)^{n-1}\cdot D \neq I_2$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Inovării
Centrul Naţional pentru Curriculum şi Evaluare în Învăţământul Preuniversitar
Soluţii

1. a) Se arată că $rang(A) = 1$.

b) Se arată că $A^2 = d \cdot A$, cu $d = a + 2b + 3c$.

c) Se verifică că pentru $K = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ şi $L = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$, avem $A = K \cdot L$.

2. a) Se verifică prin calcul.

b) Rădăcinile ecuaţiei $t^2 - 4t + 16 = 0$ sunt $t_{1,2} = 2 \pm 2\sqrt{3} \cdot i$.

Mulţimea rădăcinilor lui f este $\left\{\sqrt{3}+i, \sqrt{3}-i, -\sqrt{3}+i, -\sqrt{3}-i\right\}$.

c) Singura descompunere în factori a polinomului, în $\mathbb{R}[X]$, este $f = \left(X^2 - 2\sqrt{3}X + 4\right)\left(X^2 + 2\sqrt{3}X + 4\right)$.

Nici unul dintre polinoamele $X^2 - 2\sqrt{3}X + 4$ şi $X^2 + 2\sqrt{3}X + 4$ nu poate fi descompus în $\mathbb{Q}[X]$.

www.bacmatematica.ro

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1. a) $\det(A)=(a+b+c)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ c & a & b\\ b & c & a\end{vmatrix}=\frac{1}{2}(a+b+c)\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]$ sau

$\det(A)=a^3+b^3+c^3-3abc$.

b) Deoarece $\det(A)=0$ și $a+b+c\neq 0$, rezultă $a=b=c$.

c) Determinantul matricei sistemului $\begin{vmatrix}2a-1 & 2b & 2c\\ 2c & 2a-1 & 2b\\ 2b & 2c & 2a-1\end{vmatrix}$ este o sumă de 5 termeni pari și unul impar, deci este un număr impar și, în consecință, nenul.

2. a) Folosind relațiile lui Viéte, se obține $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}=0$.

b) Notând $x^2=t$ obținem ecuația $t^2-5t+5=0$, cu soluțiile $t_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}>0$, deci ecuația inițială are toate rădăcinile reale.

c) Dacă $\operatorname{grad}(g)>4$, atunci $\lim\limits_{x\to\infty}\left|\frac{g(x)}{f(x)}\right|=+\infty$, dar din ipoteză rezultă $\lim\limits_{x\to\infty}\left|\frac{g(x)}{f(x)}\right|\leq 1$, contradicție.

În consecință, $\operatorname{grad}(g)\leq 4$. Din ipoteză deducem că $\forall k\in\{1,2,3,4\}$, $|g(x_k)|\leq|f(x_k)|=0$, deci $|g(x_k)|=0$, de unde rezultă $g(x_k)=0$, adică $g=a\cdot f$, cu $a\in\mathbb{R}$. Înlocuind în relația din enunț, obținem că $|a|\leq 1$. Așadar, soluțiile sunt polinoamele $g=a\cdot f$, cu $a\in[-1,1]$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1. a) Dacă $A, B \in G$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, cu $a, a' \in (0, \infty)$ și $b, b' \in \mathbb{R}$, atunci

$AB = \begin{pmatrix} a \cdot a' & a \cdot b' + b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $a \cdot a' \in (0, \infty)$, $a \cdot b' + b \in \mathbb{R}$.

b) De exemplu, pentru $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, se arată că $CD \neq DC$.

c) Se arată că $I_2 - A + A^2 = \begin{pmatrix} \alpha & ab \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, cu $\alpha = 1 - a + a^2 > 0$.

2. a) Utilizând eventual relațiile lui Viète, se obține că $a = 0$, $b = -3$ și $c = 2$.

b) Dacă f are rădăcina $\sqrt{2}$, atunci $2a + c + (b+2) \cdot \sqrt{2} = 0$, de unde rezultă $b = -2$ și $c = -2a$.

Apoi, $f = X^3 + aX^2 - 2X - 2a = (X + a)(X^2 - 2)$, cu rădăcina rațională $x_1 = -a$.

c) Presupunem că f are rădăcina $k \in \mathbb{Z}$. Rezultă că există $q \in \mathbb{Q}[X]$, astfel încât $f = (X - k) \cdot q$.

Mai mult, coeficienții lui q sunt numere întregi. Folosind ipoteza, obținem că numerele $(-k) \cdot q(0)$ și $(1-k) \cdot q(1)$ sunt impare, ceea ce este fals, deoarece $(-k)(1-k)$ este un număr par.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1. a) Prin calcul direct, rezultă $A^2 - B^2 = 0_2$.

b) Se arată că $I_2 + A + A^2 + A^3 + A^4 = I_2 + 2\cdot\left(A + A^2\right) = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

Atunci, $\det\left(I_2 + A + A^2 + A^3 + A^4\right) = 5$.

c) Pentru $n \in \mathbb{Z}$ oarecare, fie $X_n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Se arată că $X_n^2 = I_2$.

2. a) Restul căutat este polinomul $r = 2X + 3$.

b) Avem $f = \left(X - x_1\right)\cdot\left(X - x_2\right)\cdot\left(X - x_3\right)\cdot\left(X - x_4\right)$, deci $\left(1 - x_1\right)\cdot\left(1 - x_2\right)\cdot\left(1 - x_3\right)\cdot\left(1 - x_4\right) = f\left(1\right) = 5$.

c) $g\left(x_1\right)\cdot g\left(x_2\right)\cdot g\left(x_3\right)\cdot g\left(x_4\right) = \left(1 - x_1\right)\left(1 - x_2\right)\left(1 - x_3\right)\left(1 - x_4\right)\left(-1 - x_1\right)\left(-1 - x_2\right)\left(-1 - x_3\right)\left(-1 - x_4\right)$,
deci $g\left(x_1\right)\cdot g\left(x_2\right)\cdot g\left(x_3\right)\cdot g\left(x_4\right) = f(1)\cdot f(-1) = 5$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1. a) Prin calcul direct, obținem $A^3 = 0_3$.

b) $I_3 + A + A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, deci $rang\left(I_3 + A + A^t\right) = 1$.

c) Se arată că $\left(I_3 + A\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, sau prin calcul direct, sau observând că

$I_3 = I_3 + A^3 = \left(I_3 + A\right)\left(I_3 - A + A^2\right)$.

2. a) Se arată că mulțimea rădăcinilor lui f este $\left\{0, -4-2i, -4+2i\right\}$.

b) $S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = -4a$ și $S_2 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = 20$.

Suma din enunț este $S = 2S_1^2 - 6S_2 = 8\left(4a^2 - 15\right)$.

c) Deoarece $x_2 = x_3 = -a$, din prima relație a lui Viète obținem $x_1 = -2a$ și înlocuind în a doua relație a lui Viète rezultă $a \in \left\{-2, 2\right\}$.

Pentru $a = -2$, obținem $b = 2a^3 = -16$, iar pentru $a = 2$, obținem $b = 2a^3 = 16$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1. a) Scădem prima linie din celelalte şi obținem $\det(A) = -8$.

b) Scădem pe rând prima ecuație din celelalte şi obținem $y = z = t = \frac{1}{2}$ şi apoi $x = -\frac{1}{2}$.

c) Se obține $A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

2. a) Se obține $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} = \frac{S_3}{S_4} = 2$.

b) Se verifică prin calcul.

c) Observăm că $x = 0$ nu este rădăcină pentru f. Ecuația $f(x) = 0$ este echivalentă cu ecuația $t^2 + 2t + a + 2 = 0$, unde $t = x - \frac{1}{x}$. Pentru orice $t \in \mathbb{R}$, ecuația $f(x) = 0$ are toate rădăcinile reale.

Ecuația $t^2 + 2t + a + 2 = 0$ are rădăcinile reale dacă şi numai dacă $a \le -1$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1. a) Determinantul sistemului este $\Delta = -120$. Se obține soluția unică $x = \frac{4}{5}$, $y = \frac{3}{5}$, $z = 0$.

b) Determinantul sistemului este $\Delta = \begin{vmatrix} b & a & 0 \\ c & 0 & a \\ 0 & c & b \end{vmatrix} = -2abc \neq 0$, deci sistemul are soluție unică.

c) Folosind formulele lui Cramer, obținem $x_0 = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \cos A$.

$\hat{A}$ fiind unghi al triunghiului ABC, avem $A \in (0, \pi)$, deci $x_0 = \cos A \in (-1, 1)$.

Analog obținem $y_0 = \cos B \in (-1, 1)$ și $z_0 = \cos C \in (-1, 1)$.

2. a) Deoarece a și b iau independent câte trei valori, există $3 \cdot 3 = 9$ matrice în mulțimea G.

b) Se verifică prin calcul..

c) $\det(A) = (a-b)(a+b)$. $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ fiind corp, din $(a-b)(a+b) = \hat{0}$ rezultă $a = b$ sau $a = -b$.

În total, există 5 matrice în G care au determinantul nul.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1. a) Se verifică prin calcul.

b) Tripletul $(0,1,0)$ e soluție a sistemului, $\forall\, a,b,c\in\mathbb{R}$, deci acesta este compatibil.

Dacă $a+b+c\neq 0$ și $a^2+b^2+c^2\neq ab+bc+ca$, atunci soluția precedentă este unică.

c) Din ipoteză rezultă că $a=b=c$.

Cum $a=b=c\neq 0$, rezultă $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x^2+y^2=z-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=1-x-y \\ \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \end{cases}$.

A doua ecuație din sistem are o infinitate de soluții, care sunt coordonatele punctelor de pe cercul de centru $Q\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ și rază $r=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Soluțiile sistemului sunt $\begin{cases} x_t=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos t \\ y_t=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sin t \\ z_t=1-x_t-y_t \end{cases}$, cu $t\in[0,2\pi)$.

2. a) Deoarece a,b,c pot lua arbitrar câte 4 valori, există $4\cdot 4\cdot 4=64$ matrice în mulțimea G.

b) De exemplu, matricea $A=\begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$ are proprietățile cerute.

c) Fie $X=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\in G$. $X^2=\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2=\hat{1} \\ b(a+c)=\hat{0} \\ c^2=\hat{0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\in\{\hat{1},\hat{3}\} \\ c\in\{\hat{0},\hat{2}\} \end{cases}$, deci $a+c\in\{\hat{1},\hat{3}\}$.

Rezultă $b=\hat{0}$. Obținem patru matrice.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1. a) Se verifică prin calcul.

b) Sistemul este compatibil determinat. Se obține soluția $x=\frac{c-b}{\det(A)}$, $y=\frac{a-c}{\det(A)}$, $z=\frac{b-a}{\det(A)}$.

c) Avem că rangul matricei sistemului este 2 și rangul matricei extinse este 3, de unde rezultă concluzia.

2. a) Se arată că $f(1)=1$ și $f(2)=2$ și apoi că $f(5)=5$.

b) Folosind ipoteza, se deduce că $f(a_{n+1})=(f(a_n))^2+1$, $\forall n\in\mathbb{N}$ și apoi, folosind această relație, se demonstrează prin inducție concluzia.

c) Se consideră $g\in\mathbb{R}[X]$, $g=f-X$. Din b) avem că $g(a_n)=0$, $\forall n\in\mathbb{N}$, deci g este polinomul nul, așadar $f=X$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1. a) Se verifică prin calcul.

b) Fie $Y=\begin{pmatrix} a & 5b \\ b & a \end{pmatrix}\in C(A)$, cu $Y^2=0_2$. Obținem sistemul $\begin{cases} a^2+5b^2=0 \\ ab=0 \end{cases}$, cu unica soluție $a=b=0$, deci $Y=0_2$.

c) Fie $Z=\begin{pmatrix} a & 5b \\ b & a \end{pmatrix}\in C(A)$, $Z\neq O_2$, cu $a,b\in\mathbb{Q}$.

Presupunem că $\det(Z)=0$, deci $a^2-5b^2=0$. Dacă $b=0$, atunci $a=0$, deci $Z=0_2$, fals. Dacă $b\neq 0$, rezultă că $\sqrt{5}\in\mathbb{Q}$, fals.

2. a) $f(\hat{0})+f(\hat{1})+f(\hat{2})=\hat{3}a+\hat{1}=\hat{1}$.

b) $f=X^3+\hat{2}X^2+\hat{2}$ are singura rădăcină $x=\hat{2}$.

c) Deoarece $grad(f)=3$, f este ireductibil peste $\mathbb{Z}_3 \Leftrightarrow f$ nu are rădăcini în $\mathbb{Z}_3$. Așadar $a\neq\hat{0}$ și $\hat{1}+a\neq\hat{0}$, deci $a=\hat{1}$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1. a) Se verifică prin calcul.

b) $\det\left(A-A^t\right)=\det\left(A-A^t\right)^t=\det\left(A^t-A\right)=-\det\left(A-A^t\right)$, deci $\det\left(A-A^t\right)=0$.

c) $A-A^t\neq 0_3$, și în consecință, $\operatorname{rang}\left(A-A^t\right)\geq 1$.

Dacă $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, atunci $A-A^t=\begin{pmatrix} 0 & b-d & c-g \\ d-b & 0 & f-h \\ g-c & h-f & 0 \end{pmatrix}$.

Dacă am avea $\operatorname{rang}\left(A-A^t\right)=1$, atunci toți minorii de ordinul doi ai matricei ar fi nuli.

Obținem $b-d=h-f=c-g=0$, deci $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & e & f \\ c & f & i \end{pmatrix}$, adică $A=A^t$, fals.

Așadar $\operatorname{rang}\left(A-A^t\right)\geq 2$ și cum $\det\left(A-A^t\right)=0$, rezultă $\operatorname{rang}\left(A-A^t\right)=2$.

2. a) Notând $x^2=t$ obținem ecuația $t^2-5t+4=0$, cu soluțiile $t_1=1$ și $t_2=4$.
Rădăcinile lui f sunt $x_1=-2$, $x_2=-1$, $x_3=1$, $x_4=2$.

b) $\exists\, a\in\mathbb{Q}$ astfel ca $h=a\left(X+\frac{1}{2}\right)\left(X-\frac{1}{2}\right)\left(X+1\right)\left(X-1\right)$. Obținem $h=4X^4-5X^2+1$.

c) Din $g\left(-2\right)=g\left(-1\right)=g\left(1\right)=g\left(2\right)=2$ deducem că există polinomul cu coeficienți întregi q, astfel încât $g\left(X\right)=f\left(X\right)\cdot q\left(X\right)+2$. Presupunem contrariul, deci că există $n\in\mathbb{Z}$, astfel încât $g\left(n\right)=0$.
Obținem $\left(n-2\right)\left(n-1\right)\left(n+1\right)\left(n+2\right)\cdot q\left(n\right)=-2$.
Egalitatea anterioară având loc în mulțimea $\mathbb{Z}$, divizorii întregi ai lui -2 fiind $-2,-1,1,2$, obținem că două dintre numerele $n-2,n-1,n+1,n+2$ coincid, fals.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1. a) $\varepsilon(\sigma)=(-1)^{m(\sigma)}=(-1)^2=1$.

b) Avem $\sigma^3=e$, unde e este permutarea identică. Evident, σ comută cu permutările e,σ,σ^2.
Se arată, prin calcul direct, că σ nu comută cu celelalte 3 permutări din S_3.

c) Dacă $x\in S_3$ este o permutare impară (deci o transpoziție), evident, $x^2=e\neq\sigma$.

Obținem unica soluție $x=\sigma^2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$.

2. a) Se verifică prin calcul.
b) Se arată că înmulțirea matricelor este lege de compoziție pe G. Se verifică axiomele grupului abelian.
Elementul neutru este matricea $X(0)$, iar simetrica lui $X(a)\in G$ este matricea $X\left(-1+\frac{1}{a+1}\right)\in G$.

c) Se demonstrează prin inducție că
$\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, $\forall\, a_1,a_2,\ldots,a_n\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, $X(a_1)\cdot X(a_2)\cdot\ldots\cdot X(a_n)=X\left((a_1+1)\cdot(a_2+1)\cdot\ldots\cdot(a_n+1)-1\right)$.
Pentru $n=2009$ și $a_k=k$, $\forall\, k\in\{1,2,\ldots,2009\}$, obținem $t=2010!$

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1. a) Se verifică prin calcul.

b) Se demonstrează prin inducție după $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Fie X o soluție. Din punctul **a)** deducem că $X = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. Cum $\det\left(X^2\right) = 1 \Rightarrow \det\left(X\right) = 1$, deci există $t \in [0; 2\pi]$, $X = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$. $X^2 = A \Leftrightarrow \cos 2t = 0$ și $\sin 2t = 1 \Leftrightarrow t \in \left\{\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right\}$.

2. a) Folosind relațiile lui Viète, se obține $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} = a$.

b) Din teorema împărțirii cu rest, $\exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ și $q \in \mathbb{R}[X]$, $f = (X-1)^2 \cdot q + \alpha X + \beta$.

Din $\begin{cases} f(1) = \alpha + \beta \\ f'(1) = \alpha \end{cases}$, se obține $\begin{cases} \alpha = a + 8 \\ \beta = -7 \end{cases}$. Restul împărțirii este: $r = (a+8)X - 7$.

c) $\sum_{k=1}^{4} x_k^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{2}{9} < 0$, deci ecuația nu are toate rădăcinile reale

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluție

1. a) $\operatorname{rang}(A+I_2)=2$.

b) Se demonstrează prin calcul direct.

c) Presupunem că ecuația are soluția $Y\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Atunci, $A\cdot Y=Y\cdot A$ și din **b)** deducem că există $x,y\in\mathbb{C}$, astfel încât $Y=\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & x \end{pmatrix}$. Cum $\det(Y)=0$, obținem $x=0$ și apoi $Y^2=0_2$, fals.

2. a) Se verifică prin calcul.

b) Se verifică prin calcul.

c) Se arată prin inducție că $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, $\forall\, x_1,x_2,\ldots,x_n\in\mathbb{R}$, $x_1*x_2*\ldots*x_n=(x_1+1)(x_2+1)\cdot\ldots\cdot(x_n+1)-1$.

Obținem $1*\frac{1}{2}*\frac{1}{3}*\ldots*\frac{1}{2008}*\frac{1}{2009}=2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{2009}{2008}\cdot\frac{2010}{2009}-1=2009$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

1. a) Se arată că $\det(A - xI_2) = 0 \Leftrightarrow x \in \{1, 8\}$.

b) Se verifică prin calcul.

c) Fie $Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, o soluție a ecuației. Atunci, $A \cdot Y = Y \cdot A$.

Din **b)** rezultă că există $x, y \in \mathbb{C}$, astfel încât $Y = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$. Obținem $\begin{cases} x^3 = 1 \\ y^3 = 8 \end{cases}$, deci există 9 soluții în $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

2. a) Se arată că $f_{-1,2} \circ f_{-1,2} = f_{1,0}$.

b) Se arată că operația de compunere este lege de compoziție pe G. Se verifică axiomele grupului. Se demonstrează că elementul neutru este funcția identică, $f_{1,0}$, iar pentru funcția $f_{a,b} \in G$, simetrica sa este $f_{a',b'} \in G$, unde $a' = \frac{1}{a}$ și $b' = -\frac{b}{a}$.

c) Elementele $f_{-1,-b}$ au ordin 2, $\forall b \in \mathbb{R}$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1. a) Se arată că $\det(A)=0 \Leftrightarrow m\in\{1,2\}$.

b) Dacă $m\notin\{1,2\}$, sistemul este de tip Cramer, deci este compatibil

Se arată că dacă $m\in\{1,2\}$, atunci sistemul este compatibil 1-nedeterminat.

c) Dacă $m\notin\{1;2\}$, soluția unică este $(1;0;-1)$, ceea ce nu convine. Dacă $m=1$, soluțiile sunt $(1-\lambda;\lambda;-1)$, $\lambda\in\mathbb{R}$, iar dacă $m=2$, soluțiile sunt $(1;\mu;-1-\mu)$, $\mu\in\mathbb{R}$. Deci $m=2$.

2. a) Dacă $x=y=\hat{0}$, atunci $x^2+y^2=\hat{0}$.

$\forall\, x\in\mathbb{Z}_3$, $x^2\in\{\hat{0},\hat{1}\}$ și dacă $x\neq\hat{0}$ sau $y\neq\hat{0}$, se arată că $x^2+y^2\in\{\hat{1},\hat{2}\}$.

b) Dacă $X=A(a,b)\in H$ și $Y=A(c,d)\in H$, $X\cdot Y=A(ac+\hat{2}bd,bc+ad)\in H$

Dacă $X=A(a,b)\in H$, atunci $d=a^2+b^2\in\{\hat{1},\hat{2}\}$ și $X^{-1}=A(ad^{-1},\hat{2}bd^{-1})\in H$

c) $X^2=I_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+\hat{2}b^2=\hat{1} \\ ab=\hat{0} \end{cases}$.

Pentru $a=\hat{0}$ ecuația $\hat{2}b^2=\hat{1}$ nu are soluții.

Pentru $b=\hat{0}$ rezultă $\hat{a}\in\{\hat{1},\hat{2}\}$ și soluțiile $X_1=\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix}$ și $X_2=\begin{pmatrix}\hat{2} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{2}\end{pmatrix}$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1. a) Se verifică prin calcul.

b) $B = A + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ 2a & 2b & 2c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = A$.

c) Fie $A_1\left(a, f\left(a\right)\right)$, $A_2\left(b, f\left(b\right)\right)$ și $A_3\left(c, f\left(c\right)\right)$ cele trei puncte, cu $a \le b \le c$.

$S\left[A_1A_2A_3\right] = \frac{1}{2}\left|B\right| \overset{a)}{=} \frac{(b-a)(c-b)(c-a)(a+b+c)}{2}$.

Cel puțin două dintre cele trei numere a, b, c au aceeași paritate, deci cel puțin unul dintre numerele $b-a, c-b, c-a$ este par. Rezultăcă $S\left[A_1A_2A_3\right] \in \mathbb{N}$. Se arată că $f(a)$, $f(b)$ și $f(c)$ sunt multipli de 3, deci B este divizibil cu 3, adică $S\left[A_1A_2A_3\right]$ este divizibilă cu 3.

2. a) Se verifică prin calcul.

b) Se arată că $\forall\, X\left(a\right), X\left(b\right) \in H$, cu $a, b \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{10}\right\}$, $a + b - 10ab \ne \frac{1}{10}$, deci $X\left(a\right)X\left(b\right) \in H$.

c) Pentru $X = X\left(a\right) \in G$, $X^2 = I_2 \Leftrightarrow X\left(2a - 10a^2\right) = X(0)$.

Se obțin soluțiile $X_1 = I_2$ și $X_2 = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. a) Se verifică prin calcul.

b) Se obține $\left(8x^3+2x\right)A(x)=O_2$ și apoi $x\in\left\{-\frac{i}{2},\frac{i}{2},0\right\}$.

c) Presupunem că ecuația are soluția $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{C})$. Atunci $X^4=\left(A(0)\right)^2=O_2$.

Rezultă $\det(X)=0$ și $X^2=t\cdot X$, unde $t=a+d$.

Se demonstrează că $X^4=t^3\cdot X$, deci $X=O_2$ sau $t=0$. În ambele cazuri rezultă $X^2=O_2$, fals.

2. a) $a_{100}=2$ și $a_{99}=0$.

b) Din teorema împărțirii cu rest, există și sunt unice $q\in\mathbb{C}[X]$ și $a,b\in\mathbb{C}$, astfel încât $f=\left(X^2-1\right)\cdot q+aX+b$. Obținem $a=\frac{f(1)-f(-1)}{2}$ $b=\frac{f(1)+f(-1)}{2}$.

Cum $f(1)=f(-1)=-2^{51}$, restul împărțirii polinomului f la X^2-1 este $r=-2^{51}$.

c) Fie $z\in\mathbb{C}$ rădăcină a lui f. Atunci $(z+i)^{100}=-(z-i)^{100}$, de unde rezultă $|z+i|=|z-i|$ și înlocuindu-l pe $z=a+b\cdot i$, cu $a,b\in\mathbb{R}$ în relația precedentă, deducem $b=0$, deci $z\in\mathbb{R}$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1. a) $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix} = (a+2)(a-1)^2$

b) Cum sistemul este compatibil determinat rezultă $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2;1\}$. Deoarece $(0;0;1)$ este soluție pentru orice $a \in \mathbb{R}$, rezultă că $(0;0;1)$ este soluția unică a sistemului.

c) Sistemul este compatibil nedeterminat și are soluția $(\alpha;\alpha;1+\alpha)$.

2. a) Pentru $a = 19 \in \mathbb{Q}$, $b = 6 \in \mathbb{Q}$, avem $a^2 - 10b^2 = 1$, deci $A = \begin{pmatrix} 19 & 10\cdot 6 \\ 6 & 19 \end{pmatrix} \in G$.

b) Pentru $X = \begin{pmatrix} a & 10b \\ b & a \end{pmatrix} \in G$ și $Y = \begin{pmatrix} a' & 10b' \\ b' & a' \end{pmatrix} \in G$, avem $XY = \begin{pmatrix} a'' & 10b'' \\ b'' & a'' \end{pmatrix}$, unde $a'' = a\cdot a' + 10b\cdot b' \in \mathbb{Q}$ și $b'' = b\cdot a' + a\cdot b' \in \mathbb{Q}$ și $\det(XY) = \det(X)\det(Y) = 1$.

c) Se arată inductiv că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, există $a_n, b_n \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $A^n = \begin{pmatrix} a_n & 10\cdot b_n \\ b_n & a_n \end{pmatrix} \in G$.

Cum $b_n > 0$, rezultă că $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $A^n \neq I_2$ și apoi că puterile matricei A sunt o infinitate de elemente distincte ale grupului $(G,\cdot)$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1. a) Se arată că $B^3 = I_3$

b) $B^{-1} = B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

c) Obținem $(a+b+c)\cdot \det(A) = \frac{1}{2}\cdot(a+b+c)^2 \cdot \left((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right) \geq 0$.

2. a) Se verifică prin calcul.

b) $\hat{0} = \hat{0}^2 + \hat{0}^2$, $\hat{1} = \hat{0}^2 + \hat{1}^2$, $\hat{2} = \hat{1}^2 + \hat{1}^2$, $\hat{3} = \hat{1}^2 + \hat{3}^2$, $\hat{4} = \hat{0}^2 + \hat{2}^2$, $\hat{5} = \hat{1}^2 + \hat{2}^2$, $\hat{6} = \hat{2}^2 + \hat{3}^2$.

c) Se arată inductiv că $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\left\{ x^{2n} \,\middle|\, x \in \mathbb{Z}_7 \right\} = H$, de unde rezultă concluzia.

www.bacmatematica.ro

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1. a) Se arată că suma elementelor matricei A este $S = 90$.
b) Se verifică prin calcul.
c) Se arată inductiv că $A^n = 32^{n-1} \cdot A$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Rezultă că $rang\left(A^n\right) = 1$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

2. a) Se verifică prin calcul.
b) $e \in \mathbb{R}$ este element neutru al legii „$*$” $\Leftrightarrow$ $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $(ae-2)\cdot x = e-6$ $\Leftrightarrow$ $e = 6$ şi $a = \frac{1}{3}$.
c) $6 * 6 \in [0;6] \Rightarrow 36a - 6 \in [0;6] \Rightarrow a \in \left[\frac{1}{6};\frac{1}{3}\right]$.

www.bacmatematica.ro

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1. a) Dacă $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$, ecuația e echivalentă cu sistemul $\begin{cases} x+2y-z=2 \\ 2x+2y=1 \\ x+4y-3z=5 \end{cases}$. Sistemul este compatibil nedeterminat, deoarece rangul matricei sistemului este egal cu 2, ca și rangul matricei extinse.

b) Se verifică prin calcul.

c) Se arată că $A^*=\begin{pmatrix} -6 & 2 & 2 \\ 6 & -2 & -2 \\ 6 & -2 & -2 \end{pmatrix}$. Rezultă $rang\left(A^*\right)=1$.

2. a) $7^2-2\cdot 5^2=-1$, deci $7+5\sqrt{2}\in A$

b) Se verifică prin calcul.

c) Avem $f\left(7+5\sqrt{2}\right)=-1$. Mai mult, $f\left(\left(7+5\sqrt{2}\right)^{2n+1}\right)=\left(f\left(7+5\sqrt{2}\right)\right)^{2n+1}=-1$, $\forall\, n\in\mathbb{N}$,

iar șirul $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}=\left(\left(7+5\sqrt{2}\right)^{2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ are termenii distincți, în $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1. a) Din $A^2 = 0_2$ obținem sistemul: $\begin{cases} a^2 + bc = 0 \\ b(a+d) = 0 \\ c(a+d) = 0 \\ (a-d)(a+d) = 0 \end{cases}$. Presupunem că $a + d \neq 0$. Rezultă $b = c = 0$ și $a = d$. Din prima și din ultima ecuație obținem $a = d = 0$, deci $a + d = 0$, contradicție.

b) Se arată că $(I_2 + A)(I_2 - A) = I_2$, deci $(I_2 + A)^{-1} = I_2 - A$.

c) Matricele de forma $X = \alpha A$, $\alpha \in \mathbb{R}$ sunt soluții.

2. a) Se arată că $f(a) = 0$.

b) Notând $x^2 = t$ obținem ecuația $t^2 - 2t + 9 = 0$, ale cărei soluții au $|t_1| = |t_2| = 3$.

Rezultă $|x_1| = |x_2| = \sqrt{|t_1|} = \sqrt{3}$, $|x_3| = |x_4| = \sqrt{3}$ și suma căutată este egală cu $4\sqrt{3}$.

c) Evident, $B \subset A$. Fie $\alpha = g(a) \in A$. Din teorema împărțirii cu rest, există și sunt unice $q, h \in \mathbb{Q}[X]$, cu $\text{grad}(h) \leq 3$, astfel încât $g = (X^4 - 2X^2 + 9) \cdot q + h$. Rezultă $\alpha = g(a) = h(a) \in B$, deci $A \subset B$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1. a) Se verifică prin calcul.

b) $\det\left(A-A^t\right)=\det\left(\left(A-A^t\right)^t\right)=\det\left(A^t-A\right)=-\det\left(A-A^t\right)$ deci $\det\left(A-A^t\right)=0$.

c) Minorul $\begin{vmatrix} b & b+1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-1$ este nenul.

2. a) Pentru orice $x\in[0,\infty)$, avem $f(x)=x^3+p\cdot x^2+q\cdot x+r>0$.

b) $S_1=x_1+x_2+x_3=-p$, $S_2=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=q$.

$x_1^3+x_2^3+x_3^3=-p\cdot\left(S_1^2-2S_2\right)-q\cdot S_1-3r=-p^3+3pq-3r$.

c) Fie polinomul $g\in\mathbb{R}[X]$, $g=X^3-(a+b+c)X^2+(ab+bc+ca)X-abc$, cu rădăcinile a,b,c.
Deoarece $p=-(a+b+c)>0$, $q=ab+bc+ca>0$ și $r=-abc>0$, din punctul a) rezultă că rădăcinile a,b,c ale lui g nu sunt în intervalul $[0,\infty)$. Așadar, $a,b,c\in(-\infty,0)$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluții

1. a) Se arată că $A^3 = 0_3$.

b) Dacă $X = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, din $A \cdot X = X \cdot A$ rezultă $g = 0$, $d + g = 0$, $a = e + h$, $d = h$, $a + b = f + i$, $d + e = i$ și $g + h = 0$. Se obține $g = d = h = 0$, $a = e = i$ și $b = f$.

c) Presupunem că există $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, astfel încât $X^2 = A$.

Rezultă $A \cdot X = X \cdot A$. Din **b)**, există $a, b, c \in \mathbf{C}$, astfel încât $X = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & b & a \end{pmatrix}$.

Din $X^2 = A$, rezultă că $\det(X) = 0$, deci $a = 0$. Se obține $X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ b^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq A$.

2. a) $f(3) - f(1) = a(3^4 - 1) + b(3 - 1)$ și rezultă concluzia.

b) Se obține $f(x) - f(y) = (x - y)\left(a(x + y)(x^2 + y^2) + b\right)$.

c) Cum $b - 1$ divide 1 rezultă $b \in \{0, 2\}$. Dacă $b = 0 \Rightarrow a = 1,\ c = 3$. Dacă $b = 2 \Rightarrow a = -\frac{1}{15} \notin \mathbb{Z}$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Inovării
Centrul Naţional pentru Curriculum şi Evaluare în Învăţământul Preuniversitar

Soluții

1. a) Se calculează $\det(A) = (a-b)(b-c)(c-a)$.

b) Se arată că unica soluție este $x = y = z = 0$.

c) Se obțin soluțiile $(\alpha, -\alpha, 0)$, cu $\alpha \in \mathbb{C}$.

2. a) $9, 4 \in \mathbb{Z}$ şi $9^2 - 5 \cdot 4^2 = 1$, deci $z \in M$

b) Se arată uşor că $\forall z_1, z_2 \in M$, avem $z_1 \cdot z_2 \in M$ şi $z_1^{-1} \in M$.

c) Se demonstrează că pentru $z = 9 + 4\sqrt{5} \in M$, $\forall k, n \in \mathbb{N}^*$, cu $n \neq k$, avem $z^n \neq z^k$.

www.bacmatematica.ro

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1. a) Se arată că $S = 0_3$.

b) Se calculează $A^2 = 14 \cdot A$, apoi $B \cdot C = I_3 + (15a+1) \cdot A$ și se obține $a = -\frac{1}{15}$.

c) Se folosește relația $A^2 = 14 \cdot A$ și se demonstrează prin inducție matematică.

2. a) Deoarece $0 = \varepsilon^3 - 1 = (\varepsilon - 1)(\varepsilon^2 + \varepsilon + 1)$ și $\varepsilon \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, rezultă concluzia.

b) Determinantul sistemului este $\Delta = (\varepsilon - 1)(\varepsilon^2 - 1)(\varepsilon^2 - \varepsilon) \neq 0$, deci sistemul are doar soluția nulă $x = y = z = 0$.

c) Din ipoteză, există $g \in \mathbb{C}[X]$, astfel încât $f_1(X^3) + Xf_2(X^3) + X^2 f_3(X^3) = (X^3 - 1) \cdot g(X)$.

Deoarece numerele 1, ε și ε^2 sunt rădăcinile polinomului $X^3 - 1$, se obține sistemul

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ a_1 + a_2 \cdot \varepsilon + a_3 \cdot \varepsilon^2 = 0 \\ a_1 + a_2 \cdot \varepsilon^2 + a_3 \cdot \varepsilon = 0 \end{cases}, \text{ unde } a_k = f_k(1),\ \forall k \in \{1, 2, 3\}.$$

Folosind punctul **b)** se deduce că $f_k(1) = 0$, $\forall k \in \{1, 2, 3\}$, de unde rezultă concluzia.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluții

1. a) Se verifică prin calcul.

b) Prin calcul direct se obține unica soluție $\begin{cases} x = pqr \\ y = -(pq + qr + rp) \\ z = p + q + r \end{cases}$.

c) Numerele p, q, r verifică aceeaşi ecuație de grad trei $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$, cu soluțiile $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = -1$, deci $p = q = 1$ sau $p = r = 1$ sau $q = r = 1$.

2. a) A are 25 de elemente.

b) Dacă $X = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ atunci $X^2 = I_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 - b^2 & \hat{2}ab \\ -\hat{2}ab & a^2 - b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} \Leftrightarrow a^2 - b^2 = \hat{1}$ şi $ab = \hat{0}$.

Dacă $a = \hat{0} \Rightarrow b^2 = \hat{4} \Rightarrow b \in \{\hat{2}, \hat{3}\}$. Dacă $b = \hat{0} \Rightarrow a^2 = \hat{1} \Rightarrow a \in \{\hat{1}, \hat{4}\}$.

Obținem matricele $\begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{2} \\ \hat{3} & \hat{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{3} \\ \hat{2} & \hat{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{4} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{4} \end{pmatrix}$

c) Matricea $Y = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{2} \\ \hat{3} & \hat{1} \end{pmatrix} \neq O_2$ are determinantul $\hat{0}$, deci nu e inversabilă.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1. a) $rang\left(A_0\right)=1$.

b) Se verifică prin calcul.

c) Pentru orice $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$,

$$C_n \overset{not}{=} A^nB-BA^n = A^{n-1}\left(AB-BA\right)+\left(A^{n-1}B-BA^{n-1}\right)A \overset{ip}{=} A^{n-1}\cdot A+C_{n-1}\cdot A.$$

Folosind relația anterioară, se demonstrează prin inducție concluzia.

2. a) Avem $f(-1)=f(1)=0$ și obținem $a=-4$ și $b=12$.

b) Deoarece ecuația are coeficienți reali, dacă admite rădăcina $x_1=i$, va avea și rădăcina $\overline{x_2}=-i$, deci polinomul f se va divide cu $\left(X-i\right)\left(X+i\right)=X^2+1$, adică $a=4$ și $b=-12$.

c) Rădăcinile x_1,x_2,x_3 sunt în progresie aritmetică, deci există $z,r\in\mathbb{C}$ astfel încât $x_1=z-r$, $x_2=z$ și $x_3=z+r$. Obținem $x_1+x_2+x_3=3z=3$, deci $z=1$.

$x_1^2+x_2^2+x_3^2=\left(1-r\right)^2+1+\left(1+r\right)^2=11$, deci $r\in\left\{-2,2\right\}$, iar rădăcinile sunt $-1,1,3$.

În final, $a=4\cdot\left(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1\right)=-4$ și $b=-4x_1x_2x_3=12$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1. Patru matrice, şi anume $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) $\det(A) = 1 \neq 0$, deci matricea A este inversabilă. Se obține $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \notin M$.

c) Fie $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M$ inversabilă, cu $B^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M$. $B \cdot B^{-1} = I_2 \Leftrightarrow \begin{cases} ax + bz = 1 \\ ay + bt = 0 \\ cx + dz = 0 \\ cy + dt = 1 \end{cases}$.

Deoarece $a, b, c, d \in \mathbb{N}$, se obțin soluțiile $B_1 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. a) Adunând relațiile lui Viète, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = \frac{a}{1}$ şi $x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -\frac{8}{1}$ şi grupând, obținem concluzia.

b) Avem $x_1 + x_4 = x_2 + x_3 = 4$. Folosind a treia relație a lui Viète, obținem $x_1x_4 + x_2x_3 = -2$.
Din a doua relație a lui Viète, obținem $a = 14$.

c) x_1, x_2, x_3, x_4 sunt în progresie aritmetică, deci există $z, r \in \mathbb{C}$, astfel încât $x_1 = z - 3r$, $x_2 = z - r$, $x_3 = z + r$ şi $x_4 = z + 3r$. Avem $x_1 + x_4 = x_2 + x_3 = 4$, deci $z = 2$ şi din b) obținem $a = 14$ şi $x_1x_4 + x_2x_3 = -2$. Rezultă $r^2 = 1$ şi $b = -15$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1. a) Se arată că $AB = BA = O_4$, deci $AB + BA = O_4$

b) Se arată că $\text{rang}(A+B) = 2$ şi $\text{rang}\, A = \text{rang}\, B = 1$.

c) Se demonstrează folosind faptul că $AB = BA = O_4$ şi binomul lui Newton.

2. a) Deoarece $f(-1) = 0$, se obține $a = 6$.

b) Observăm că $x_0 = 0$ nu este rădăcină pentru f.

Pentru $i \in \{1,2,3,4\}$, x_i e rădăcină a lui $f \Leftrightarrow x_i^4 + ax_i^3 + 4x_i^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow 1 + a \cdot \frac{1}{x_i} + 4\frac{1}{x_i^2} + \frac{1}{x_i^4} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x_i}$ este rădăcină a lui g

c) Din $\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{x_i^2} = -8 < 0$ rezultă concluzia.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

1. a) Se arată că $AB = BA = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

b) Se verifică prin calcul.

c) Dacă X este o soluție a ecuației, obținem că $X \in C(A)$, deci există $x, y \in \mathbb{R}$, astfel încât $X = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & x \end{pmatrix}$. Rezultă $\begin{pmatrix} x^2 + x & 0 \\ 2xy + y & x^2 + x \end{pmatrix} = A$, deci $\begin{cases} x^2 + x - 2 = 0 \\ (2x+1)y = 3 \end{cases}$, adică $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$ sau $\begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}$. Se obțin soluțiile $X_1 = B$, $X_2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

2. a) Fie $x, y \in G$. Avem $1 + xy \in (0, 2)$, deci $1 + xy > 0$. Atunci, $x * y \in G \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(y+1) > 0 \\ (x-1)(y-1) > 0 \end{cases}$, adevărat.

b) Se verifică prin calcul.

c) $f(x) = f\left(\frac{1}{2} * \frac{1}{3} * \ldots * \frac{1}{9}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) \cdot f\left(\frac{1}{3}\right) \cdot \ldots \cdot f\left(\frac{1}{9}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{5} \cdot \ldots \cdot \frac{8}{10} = \frac{1}{45}$. Din $\frac{1-x}{1+x} = \frac{1}{45}$ rezultă $x = \frac{22}{23}$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluții

1. a) Se verifică prin calcul.

b) Din $A^2 = 0_2$ obținem sistemul: $\begin{cases} a^2 + bc = 0 \\ b(a+d) = 0 \\ c(a+d) = 0 \\ (a-d)(a+d) = 0 \end{cases}$. Presupunem că $a + d \neq 0$. Rezultă $b = c = 0$ și $a = d$. Din prima și din ultima ecuație din sistem rezultă $a = d = 0$, deci $a + d = 0$, contradicție.

c) Din punctul b) avem că $a + d = 0$ și din $A^2 = 0_2$ deducem $\det(A - x \cdot I_2) = x^2$.
Obținem $\det(A + 2I_2) = 4$.

2. a) $(a,15) \in G \Leftrightarrow a^2 - 3 \cdot 15^2 = 1$. Se obține $a \in \{-26, 26\}$.

b) Pentru $(a,b),(c,d) \in G$, avem $ac + 3bd, ad + bc \in \mathbb{Z}$ și
$(ac + 3bd)^2 - 3(ad + bc)^2 = (a^2 - 3b^2)(c^2 - 3d^2) = 1$.

c) Se verifică axiomele grupului. Se arată că elementul neutru este $(1,0) \in G$ și $\forall (a,b) \in G$, simetricul acestuia este $(a,-b) \in G$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1. a) $\det(A) = -2 \neq 0$, deci $rang(A) = 2$.

b) Se arată că $f(B) = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

c) Dacă $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ și $f(X) = B$ atunci $tr(AX - XA) = tr(B)$, deci $0 = 2$ fals.

2. a) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = -2a^2$.

b) x_1 e o rădăcină a polinomului $f \Leftrightarrow f(x_1) = 0 \Leftrightarrow x_1^3 + a^2x_1 - a = 0 \overset{x_1^3 \neq 0}{\Leftrightarrow} 1 + \frac{a^2}{x_1^2} - \frac{a}{x_1^3} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x_1}$ este o rădăcină a polinomului g.

c) Notăm cu $\frac{1}{x_1}$, $\frac{1}{x_2}$ și $\frac{1}{x_3}$ rădăcinile polinomului g. Deoarece $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -2a^2 < 0$, rezultă că f are o singură rădăcină reală, de exemplu x_1. Atunci, $\frac{1}{x_1} \in \mathbb{R}$ este unica rădăcină reală a lui g.

Presupunem că $x_1 = \frac{1}{x_1}$, deci că $x_1 \in \{-1, 1\}$. Dacă $x_1 = -1$ este rădăcina comună a polinoamelor, din $f(-1) = 0$ deducem $a^2 + a + 1 = 0$, fals. Dacă $x_1 = 1$ este rădăcina comună a polinoamelor, din $f(1) = 0$ deducem $a^2 - a + 1 = 0$, fals.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. a) Determinantul sistemului este $\Delta = -5a + 20$. Obținem $a = 4$.
b) Dacă $\Delta \neq 0$, sistemul este de tip Cramer, deci este compatibil.

Pentru $\Delta = 0$, deci pentru $a = 4$, un minor principal este $\Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$, iar sistemul este incompatibil dacă

și numai dacă $\Delta_c = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 7 & -1 & b \end{vmatrix} \neq 0$, adică pentru $b \neq 4$.

c) Din $x + z = 2y$ și din prima ecuație rezultă $y = \frac{1}{4}$. Din primele două ecuații deducem $x = \frac{3}{4}$, $z = -\frac{1}{4}$
și din ecuația a treia, singura condiție este $a + 4b = 20$, verificată de o infinitate de perechi
$(a, b) \in \{(20 - 4b, b) \mid b \in \mathbb{R}\}$.

2. a) Se verifică prin calcul.
b) Cum $\sin t \in \mathbb{Z}, \cos t \in \mathbb{Z}$ și $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ rezultă că $\sin t = 0$ și $\cos t = \pm 1$ sau $\sin t = \pm 1$ și $\cos t = 0$.

Deci $t = k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

c) Se verifică axiomele grupului. Elementul neutru este $X(0) = I_2$ și pentru $X(t) \in G$, $(X(t))^{-1} = X(-t) \in G$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1. a) Determinantul este $\begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + a^2 \neq 0$.

b) Se obține soluția $x_0 = \dfrac{1}{a^2+1}$, $y_0 = \dfrac{a}{a^2+1}$, $z_0 = \dfrac{a^2}{a^2+1}$, cu $y_0^2 = x_0 \cdot z_0$.

c) După calcule, se obține $A^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{a^2+1} & \dfrac{-a}{a^2+1} & \dfrac{a^2}{a^2+1} \\ \dfrac{a}{a^2+1} & \dfrac{1}{a^2+1} & \dfrac{-a}{a^2+1} \\ \dfrac{-1}{a^2+1} & \dfrac{a}{a^2+1} & \dfrac{1}{a^2+1} \end{pmatrix}$.

2. a) Se obține $e = 6$.

b) Se arată că corespondența este o lege de compoziție pe G. Se verifică apoi axiomele grupului.

Se obține că elementul neutru este $e = 6$, iar simetricul lui $x \in G$ este $x' = 5 + \dfrac{1}{x-5} \in G$.

c) Notăm $\begin{cases} x - 5 = a > 0 \\ y - 5 = b > 0 \\ z - 5 = c > 0 \end{cases}$ și obținem sistemul $\begin{cases} ab = c \\ bc = a \\ ca = b \end{cases}$, cu unica soluție $a = b = c = 1$.

Singura soluție a sistemului inițial este $x = y = z = 6$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. a) $A^t = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}$ și obținem $B = \begin{pmatrix} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 & a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \\ a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 & b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 28 \\ 28 & 56 \end{pmatrix}$.

b) Se obține $\det(B) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 \geq 0$

c) Punctele P_1, P_2, P_3, O sunt coliniare $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_k & a_t \\ b_k & b_t \end{vmatrix} = 0$, $\forall\, k, t \in \{1, 2, 3\}$.

$\det(B) = 0 \quad \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_k & a_t \\ b_k & b_t \end{vmatrix} = 0$, $\forall\, t, k \in \{1, 2, 3\}$, $t \neq k$ și rezultă concluzia.

2. a) Numărul elementelor mulțimii este $|\mathbb{Z}_5|^{|L|} = 5^2 = 25$, unde $L = \{a, b\} \subset \mathbb{Z}_5$.

b) Se verifică prin calcul.

c) Se verifică axiomele grupului. Pentru $a, b \in \mathbb{Z}_5$, notăm $A(a,b) = \begin{pmatrix} \hat{1} & a & b \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$.

Elementul neutru este $I_3 = A(\hat{0}, \hat{0})$, iar simetrica matricei $A(a,b)$ este matricea $A(-a, -b)$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1.a) $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = A + I_2$.

b) $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.Din $A \cdot X = X \cdot A$, rezultă $b = c, d = a - b$ deci $X = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a-b \end{pmatrix}$.

Dacă $\det(X) = 0 \Rightarrow a^2 - ab - b^2 = 0$ .Dacă $b = 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow X = 0_2$,contradicție.Dacă $b \neq 0$,împărțind prin $b \Rightarrow t^2 - t - 1 = 0, t = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, fals.Deci $\det X \neq 0$, adică X este inversabilă.

c) $F_2 = 1$.Demonstrăm prin inducție.Verificare. $n = 1; A = \begin{pmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Presupunem adevărată pentru n și demonstrăm pentru $n+1$. $A^{n+1} = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+2} & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_n \end{pmatrix}$.

2.a) $\sigma \cdot \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \pi \cdot \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$. Cum aceste permutări nu comută, rezultă concluzia.

b) Prin calcul direct se obține că ord(π)=3 .Deci $H = \{e, \pi, \pi^2\}$.

c) Fie $\pi^i, \pi^j \in H \Rightarrow \pi^{i+j} \in H$ .Cum H este finită , rezultă H este subgrup al lui S_5.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1.a) $\sigma^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 6 & 1 & 4 & 2 & 3 & 5\end{pmatrix}$.

b) $m(\sigma)=7$ $m\left(\sigma^{-1}\right)=7$.

c) $\varepsilon(\sigma)=-1$ Dacă ar exista o soluție x atunci $\varepsilon\left(x^4\right)=\varepsilon(\sigma)$ sau $1=-1$ contradicție.

2.a) $x>1, y>1 \Rightarrow xy-x-y+2>1$, deoarece $(x-1)\cdot(y-1)>0$.

b) $f(xy)=xy-1; f(x)\circ f(y)=(x+1)\circ(y+1)=xy+1$.

c) Fie $f^{-1}:G\to(0,\infty)$ care este izomorfism , $f^{-1}=g$ şi deci

$\underbrace{x*x*...*x}_{10}=1025 \Rightarrow (g(x))^{10}=g(1025) \Leftrightarrow (g(x))^{10}=1024 \Leftrightarrow (x-1)^{10}=1024 \Rightarrow x\in\{-1;3\}$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1.a) $A\cdot(X+Y)=A\cdot X+A\cdot Y=X\cdot A+Y\cdot A=(X+Y)\cdot A\Rightarrow X+Y\in C(A)$.

b) Fie $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Din $A\cdot E_1=E_1\cdot A, A\cdot E_2=E_2\cdot A\Rightarrow a=d, c=b=0\Rightarrow A=a\cdot I_2$.

c) Dacă oricare trei se află în $C(A)$ atunci există $\alpha\in\mathbb{C}, A=\alpha\cdot I_2\Rightarrow$ a patra matrice se află în $C(A)$.

2.a) $x=a^{-1}\cdot b$, $x=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

b) $a\cdot b=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$; $\operatorname{ord}(ab)=5$.

c) $\operatorname{ord}(b)=6\Rightarrow b^k=e$ echivalent cu $6\mid k$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1.a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $A \cdot B \neq B \cdot A$.

b) Prin calcul direct.

c) Notăm $C = A \cdot B$. $C^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ apoi prin inducție completă se arată că $C^n = \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

deci răspunsul este negativ.

2a) $X^3 - 2 \cdot X - 1 = (X + 1) \cdot P$.

b) $Q_3 = X^3 - 2 \cdot X - 1$ are trei rădăcini reale : $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$, $x_3 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$.

c) Prin inducție completă după n .Pentru $n = 2$, $Q_2 = P \vdots P$. Presupunem afirmația adevărată pentru n și o demonsrăm pentru $n + 1$. $Q_{n+1} = X^{n+1} - F_{n+1} \cdot X - F_n = X \cdot \left(X^n - F_n \cdot X - F_{n-1} \right) + F_n \cdot \left(X^2 - X - 1 \right)$, de unde rezultă afirmația .

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1.a) $x_{n+1} = a \cdot x_n - b \cdot y_n$, $y_{n+1} = b \cdot x_n + a \cdot y_n$. Deci $x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 = \left(a^2 + b^2\right) \cdot \left(x_n^2 + y_n^2\right)$

b) Șirurile $\left(x_n\right)_n$, $\left(y_n\right)_n$ sunt mărginite $\Leftrightarrow$ $\left(d_n\right)_n$, $d_n = x_n^2 + y_n^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$ este mărginit.

$d_{n+1} = \left(a^2 + b^2\right) \cdot d_n$ deci $d_n = \left(a^2 + b^2\right)^n \cdot \left(x_0^2 + y_0^2\right)$. Dacă $a^2 + b^2 \le 1 \Rightarrow d_n \le x_0^2 + y_0^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Dacă $a^2 + b^2 > 1$ șirul (d_n) este nemărginit.

c) $A = 2 \cdot \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_n = 2^n \cdot \left(x_0 \cdot \cos\frac{n\pi}{3} - y_0 \cdot \sin\frac{n\pi}{3}\right)$

De aici rezultă relația cerută.

2.a) $\hat{1}^2 = \widehat{10}^2 = \hat{1}^2$, $\hat{2}^2 = \hat{9}^2 = \hat{4}$, $\hat{3}^2 = \hat{8}^2 = \hat{9}$, $\hat{4}^2 = \hat{7} = \hat{5}$, $\hat{5}^2 = \hat{6}^2 = \hat{3} \Rightarrow$ ecuația nu are soluții în $\mathbb{Z}_{11}$.

b) Numărul este $10 \cdot 11^2 = 1210$.

c) Dacă polinomul are o soluție $a \in \mathbb{Z}_{11}$, atunci $a^2 + a + \hat{1} = \hat{0}$, deci $\left(\hat{2}a + \hat{1}\right)^2 = \hat{8}$, fals. Cum polinomul dat are gradul doi și nu are rădăcini în $\mathbb{Z}_{11}$, rezultă concluzia.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1.a) $f(A) = A^2 = I_2$.

b) $f(X + f(X)) = A \cdot (X + A \cdot X) = A \cdot X + A^2 \cdot X = A \cdot X + X = X + f(X)$.

c) Fie $f(X_1) = f(X_2) \Rightarrow A \cdot X_1 = A \cdot X_2 \Rightarrow X_1 = X_2$, deoarece A este inversabilă , deci f este injectivă. Fie $Y \in M_2(\mathbb{R})$. $X = A^{-1} \cdot Y$ este o preimagine a lui Y .Rezultă f este surjectivă, deci f este bijectivă.

2.a) $X, Y \in M \Rightarrow A \cdot X = X \cdot A, A \cdot Y = Y \cdot A \Rightarrow A \cdot (X \cdot Y) = (A \cdot X) \cdot Y = (X \cdot A) \cdot Y = X \cdot (A \cdot Y) =$
$X \cdot (Y \cdot A) = (X \cdot Y) \cdot A$.

b) Fie $X, Y \in G \Rightarrow \det(X) \neq 0, \det(Y) \neq 0, \det(X \cdot Y) \neq 0$ și $X \cdot Y \in M \Rightarrow X \cdot Y \in G$.

$X \in M$ și $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix}$.Cum $\det(X) \neq 0 \Rightarrow a \neq 0$. $X^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ -\frac{c}{a^2} & \frac{1}{a} \end{pmatrix} \in G$

c) Fie $X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix}, X^2 = I_2 \Rightarrow c = 0, a = \pm 1$. Deci există un element de ordin doi $X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1.a) $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = 3, y_1 = 2$; $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow x_2 = 17, y_2 = 12.$

b)Demonstrăm prin inducție. $x_0 + y_0 \cdot \sqrt{2} = 1, x_1 + y_1 \cdot \sqrt{2} = 3 + 2\sqrt{2}$ .Presupunem adevărat pentru n și demonstrăm pentru $n+1$.

$x_{n+1} + y_{n+1} \cdot \sqrt{2} = 3 \cdot x_n + 4 \cdot y_n + (2x_n + 3y_n)\sqrt{2} = (3 + 2\sqrt{2}) \cdot (x_n + y_n\sqrt{2}) = (3 + 2\sqrt{2})^{n+1}$.

c) $\begin{matrix} x_{n+2} = 3 \cdot x_{n+1} + 4 \cdot y_{n+1} \\ y_{n+2} = 2 \cdot x_{n+1} + 3 \cdot y_{n+1} \end{matrix}$; Deci $x_{n+2} - 6 \cdot x_{n+1} + x_n = 0, \forall n \geq 0$.

2.a) $\hat{3}x^2 = \hat{3} \Rightarrow x^2 = \hat{1} \Rightarrow x \in \{\hat{1}, \hat{6}\}$

b) $\text{ord}(\hat{3}) = 6$

c) Presupunem că f este un morfism de grupuri. $f(\bar{0}) = \hat{1}; f(\bar{0}) = f(\bar{2} + \bar{2} + \bar{2}) = (\hat{3})^3 = \hat{6} = \hat{1}$, contradicție.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1.a) $d=\frac{bc}{a}\Rightarrow f(x)=\frac{a\left(x+\frac{b}{a}\right)}{c\left(x+\frac{d}{c}\right)}=\frac{a}{c}$

b) Fie $x_1,x_2>0$ a.î. $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1(ad-bc)=x_2(ad-bc)$, deci $x_1=x_2$, adică f este injectivă.

c) Inducție după n. Pentru $n=1\Rightarrow f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a_1x+b_1}{c_1x+d_1}$. Presupunem adevărată pentru n și demonstrăm pentru $n+1$. $\underbrace{(f\circ f\circ\ldots\circ f)}_{\text{de } n \text{ ori}}(x)=\frac{a_nf(x)+b_n}{c_nf(x)+d_n}=\frac{a_{n+1}x+b_{n+1}}{c_{n+1}x+d_{n+1}}$, deoarece $A^{n+1}=A^n\cdot A=\begin{pmatrix}a_n & b_n\\ c_n & d_n\end{pmatrix}\cdot A$.

2a) Fie $X\in G, X=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a&0\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&b\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+1&b\\0&1\end{pmatrix}\Rightarrow \det X=a+1\neq 0$.

b) $A^2=A, B^2=0_2, A\cdot B=B, B\cdot A=0_2$. Fie $X_1,X_2\in G;\ X_1=I_2+aA+bB,\ X_2=I_2+a'A+b'B$.

$X_1\cdot X_2=I_2+\left(a+a'+aa'\right)A+\left(b+b'+bb'\right)B$, $a+a'+aa'\neq -1$. $(X_1)^{-1}=I_2-\frac{a}{a+1}A-\frac{b}{a+1}B$, deci G este un grup.

c) $X^2=I_2\Rightarrow X=I_2-2A+bB, b\in\mathbb{R}$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1.a) $\Delta = 14m - 4 \neq 0 \Rightarrow m \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2}{7}\right\}$.

b) $m = \frac{2}{7}$.

c) $d_2 \cap d_3 = \{(7,-3)\}; (7,-3) \in d_1 \Rightarrow m = \frac{2}{7}$.

2.a) $\det A = m \in \left\{\pm\hat{1}\right\}$. Cum $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ este un corp comutativ , rezultă că A este inversabilă. Se arată că $ABA = B$.

b) $|H| = 10$. Fie $X_1, X_2 \in H \Rightarrow X_1 = \begin{pmatrix} m & n \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} m' & n' \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$. $X_1 \cdot X_2 = \begin{pmatrix} mm' & mn' + n \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} \in H$, deoarece

$mm' \in \left\{\pm\hat{1}\right\}$.

c) $X_1^2 = I_2, X_1 \neq I_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} m^2 & mn + n \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} \Rightarrow m^2 = \hat{1}$ și $n\left(m + \hat{1}\right) = \hat{0}$ .Pentru $m = \hat{1}, n = \hat{0} \Rightarrow X_1 = I_2$, fals.

Pentru $m = -\hat{1}, n \in \mathbb{Z}_5 \Rightarrow 5$ soluții.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1.a) $f(A) = A^2 = 0_2$.

b) $f(f(X)) = f(AX) = A^2X = 0_2$.

c) Presupunem $f(X) + f(Y) = I_2 \Rightarrow A(X+Y) = I_2$ și aplicăm pe $f \Rightarrow f(A(X+Y)) = f(I_2) \Rightarrow A^2(X+Y) = A$ $\Rightarrow 0_2 = A$, contradicție.

2a) $A^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow AA^t = I_2$, deci $A \in P$.

b)Fie $A, B \in P, A \cdot A^t = I_2 \Rightarrow \det(A \cdot A^t) = 1 \Rightarrow \det(A) \cdot \det(A^t) = 1 \Rightarrow \det(A) \neq 0 \Rightarrow A$ inversabilă $\Rightarrow A^t = A^{-1} \Rightarrow P = GL_2(\mathbb{R}) =$ grup.

c) $X = A^{-1} \cdot B; \det(X) = (\det A^{-1}) \cdot (\det B) \neq 0 \Rightarrow X \in GL_2(\mathbb{R}) = P$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1.a) $M_{a,b}\cdot M_{c,d}=\begin{pmatrix}1 & a & b\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & c & d\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & a+c & b+d\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=M_{a+c,b+d}$

b) $M_{0,0}=I_3$ este elementul neutru .Pentru orice matrice $M_{a,b}\in G$, există matricea $M_{-a,-b}\in G$ a.î. $M_{a,b}\cdot M_{-a,-b}=M_{0,0}=M_{-a,-b}\cdot M_{a,b}$. . $M_{c,d}\cdot M_{a,b}=M_{c+a,d+b}=M_{a+c,b+d}=M_{a,b}\cdot M_{c,d}$.

c) $M_{a,b}-M_{a,b}^t=M=\begin{pmatrix}0 & a & b\\ -a & 0 & 0\\ -b & 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow \det(M)=0$. Dacă $a=0,b\in\mathbb{R}^*\Rightarrow rang(M)=2$.

Dacă $a=0,b=0\Rightarrow rang(M)=0$. Dacă $a\in\mathbb{R}^*\Rightarrow rang(M)=2$.

2a) $ord(e)=1$, $ord(a)=ord(b)=ord(c)=2$ .Deci $x=e$ este unica soluție.

b) $\forall x\in K, x^2=e\Rightarrow K$ este comutativ. Dacă $ab=a\Rightarrow b=e$, fals. Dacă $ab=b\Rightarrow a=e$, fals.

Dacă $ab=e\Rightarrow b=a^{-1}=a$, fals. Deci $ab=c$.

c) Nu sunt izomorfe deoarece K nu este ciclic și $\mathbb{Z}_4$ este ciclic fiind generat de $\hat{1}$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1.a) $B^2 = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} = 2B.$

b) $A^2 = 2A \Rightarrow a^2 + bc = 2a; b(a+d) = 2b;\ c(a+d) = 2c; bc + d^2 = 2d$. Dacă $b \neq 0 \Rightarrow a + d = 2$, contradicție. Deci $b = 0$. Analog $c = 0$. $a^2 = 2a, d^2 = 2d, a + d \neq 2 \Rightarrow A = O_2$ sau $A = 2I_2$.

c) $d = 2 - a; \det(A) = ad - bc = a(2-a) - bc = 0$.

2.a) Aplicăm algoritmul lui Eucid. $x^6 - 1 = (x^4 - 1)\cdot x^2 + (x^2 - 1)$. $x^4 - 1 = (x^2 - 1)\cdot(x^2 + 1)$, deci $(f, g) = x^2 - 1$.

b) 8 soluții distincte.

c) $f(x) = (x-1)\cdot(x+1)\cdot(x^2+1)$

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1.a) $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 3 & 1\end{pmatrix}; A^t=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 3 & 1\end{pmatrix}=A\Rightarrow A\in P$; $B=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}; B^t=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 2 & 0\end{pmatrix}=-B\Rightarrow B\in Q.$

b) Fie $A,B\in Q\Rightarrow A=\begin{pmatrix}0 & a\\ -a & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0 & b\\ -b & 0\end{pmatrix}$. $AB=\begin{pmatrix}-ab & 0\\ 0 & -ab\end{pmatrix}=(AB)^t\Rightarrow AB\in P.$

c) $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}; X^t=-X\Rightarrow\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-a & -b\\ -c & -d\end{pmatrix}\Rightarrow a=d=0; c=-b$. $X=\begin{pmatrix}0 & b\\ -b & 0\end{pmatrix}; \det(X)=b^2\geq 0$.

2a) $f'(x)=3x^2+4x+3>0, \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f$ este strict crescătoare.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty, \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$, f este continuă deci are P.D. $\Rightarrow f(x)=0$ are o unică soluție reală.

b) $\hat{f}(\hat{0})=\hat{1}, \hat{f}(\hat{1})=\hat{1}$

c) Dacă $f=gh, grad(h)\geq 1, grad(h)\geq 1\Rightarrow \hat{f}=\hat{g}\cdot\hat{h}$, deci $\hat{f}$ este reductibil, contradicție.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1.a) Fie $Y=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}; AX = XA \Rightarrow t = x, y = 3z.$

b) $\text{Det}\left(X\right) = x^2 - 3y^2 = 0;$ Dacă $y = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow X = 0_2$. Dacă $y \neq 0 \Rightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^2 = 3 \Rightarrow \frac{x}{y} \in \left\{\pm\sqrt{3}\right\}$, contradicție.

c) Dacă $X=\begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix}, Y=\begin{pmatrix} c & 3d \\ d & c \end{pmatrix}, a,b,c,d \in \mathbb{Z} \Rightarrow XY=\begin{pmatrix} ac+3bd & 3\left(bc+ad\right) \\ bc+ad & ac+3bd \end{pmatrix}.$

Utilizând metoda inducției matematice, rezultă concluzia.

2a) $f\left(1\right) = 0.$

b) $\left(\sum_{i=1}^{5} x_i\right)^2 - 2\left(\sum_{1\le i<j\le 5} x_i x_j\right) = -5.$

c) $f\left(x\right) = \left(x-1\right)\left(x^4+3x^2+2x+2\right);\ x^4+3x^2+2x+2 = \left(x^2+1\right)^2 + \left(x+1\right)^2 > 0.$

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1.a) $a = 2, b = 0$.

b) $a = 4, b \neq -2$.

c) $a \neq 4; b = -a + 2 \Rightarrow x, y, z \in \mathbb{Z}$ .Pentru $a = 4$, $b = -2$.

2.a) Cum $a, b, c \in \mathbb{Z}_2$ și variază independent , rezultă că A are 8 elemente.

b) $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ b & c & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ b & c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$.Dacă $a = \hat{0} \Rightarrow X^2 = O_3$.Dacă $a = \hat{1} \Rightarrow X^2 = I_3$.

c) În egalitatea $X^2 = 0_3$ trecând la determinant se obține $a = \hat{0}$ .Cum $X = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} \\ b & c & \hat{0} \end{pmatrix}, b, c \in \mathbb{Z}_2$ verifică egalitatea $X^2 = 0_3$, rezultă că avem 4 soluții.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1.a) $m = 7$.

b) $M_1(1,1); M_2\left(\frac{4m-3}{25}, \frac{3m+4}{25}\right); M_3\left(\frac{2m-9}{5}, \frac{12-m}{5}\right), m \in \mathbb{Z}$. Considerăm $m = 25k + 7, k \in \mathbb{Z}$.

c) $S = \frac{1}{2} \cdot |\Delta|, \Delta = \frac{1}{25}(-m+7)(14-2m); S = 1 \Leftrightarrow m \in \{2,12\}$.

2.a) $f(-1) = 0$.

b) $f(x) = (x+1)\left(2x^2 - (a+2)x + 2\right)$; rădăcinile sunt reale pentru $a \in (-\infty, -6] \cup [2, \infty)$.

c) $x_1 = -1; x_3 = \frac{1}{x_2}; |x_2| + |x_3| = 2 \Leftrightarrow |x_2| = 1 \Leftrightarrow a \in [-6, 2]$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1.a) $\det A = (m-1)^2$.

b) Dacă $m \neq 1 \Rightarrow rangA = 3$. Dacă $m = 1 \Rightarrow rangA = 1$.

c) Caz de incompatibilitate $m = 1$.

Dacă $m \in \mathbb{Z} \setminus \{1\} \Rightarrow x = 1 + \frac{3}{m-1}; y = 0; z = \frac{-3}{m-1}$. Deci $m \mid 3 \Rightarrow m \in \{-2, 0, 2, 4\}$.

2a) Se verifică prin calcul.

b) $\alpha = [1234], \beta = [1342]$.

c) $x \cdot \beta^{-1} = \alpha^{-1} \cdot x \Leftrightarrow \alpha \cdot x = x \cdot \beta$. $\gamma = x$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1.a) $B^t = A^t + A = B$,

b) Din ipoteză rezultă $A = \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ -x & 1 & z \\ -y & -z & 1 \end{pmatrix}$, $x, y, z \in \mathbb{R}$, deci $\det(A) = 1 + x^2 + y^2 + z^2 \geq 1$.

c) Dacă $x + y = 0 \Rightarrow y = -x \Rightarrow B = x\left(A - A^t\right) \Rightarrow \det B = 0$.

2.a) $x\left(x^2 + 1\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = i, x_3 = -i$.

b) $i(p+2) + p + q - 2 = 0, p, q \in \mathbb{R} \Rightarrow p = -2, q = 4$.

$S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n, n \in \mathbb{N}. S_n = -pS_{n-2} - qS_{n-3}, \forall n \geq 3.$

c) $S_0 = 3, S_1 = 0, S_2 = -2p, S_3 = -3q, S_4 = 2p^2, S_5 = 5pq.$

$S_6 = -2p^3 + 3q^2, S_7 = -7p^2q.$

www.bacmatematica.ro

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1.a) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Se verifică relația.

b) $A^3 - A = A^2 - I_3; A^5 - A^3 = A^4 - A^2; A^7 - A^5 = A^6 - A^4; ..., A^{2n+1} - A^{2n-1} = A^{2n} - A^{2n-1}$

Prin însumare obținem: $A^{2n+1} - A = A^{2n} - I_3; A^{2n+2} - A^2 = A^{2n+1} - A \Rightarrow$

$A^{2n} - A^2 = A^{2n-1} - A \Rightarrow A^{2n+1} - A^{2n-1} = A^2 - A = I_3$; $A^{2n+2} - A^{2n} = A^2 - I_3$

c) Demonstrăm prin inducție. Verificăm pentru $n = 1, n = 2$. Presupunem adevărată pentru toate valorile $\leq n-1$ și demonstrăm pentru n. Utilizând relația $A^n = A^{n-2} + A^2 - I_2$, rezultă concluzia.

2.a) $x^4 - 1 = 0$ are soluțiile complexe: $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = i, x_4 = -i$

b) $P_3 = (x-1)(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)$ unde $\varepsilon_{1,2} = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

c) $x^6 - 1 = (X-1)(X+1)\left(X^2 - X + 1\right)\left(X^2 + X + 1\right)$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1.a) $[A, A^2] = A^3 - A^3 = 0_2$.

b) Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; A^* = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. $A \cdot A^* = A^* \cdot A$.

c) $[A, BC - CB] = ABC - ACB - BCA + CBA$. Prin permutări circulare se obțin celelalte două relații.Adunând se obține egalitatea.

2.a) $0 < a < 1, 0 < b < 1 \Rightarrow ab \in (0,1), (1-a)(1-b) \in (0,1)$

b) $f'(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2} > 0, \forall x > 0 \Rightarrow f$ strict crescătoare, deci injectivă. f este continuă deci are P.D.,

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = 0, \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 1 \Rightarrow \operatorname{Im} f = (0,1) \Rightarrow f$ surjectivă, deci bijectivă. Se verifică egalitatea.

c) $f(1) = \dfrac{1}{2}; \exists! y > 0, f(y) = x; f(y^3) = x \circ x \circ x = f(1) \Rightarrow y^3 = 1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1.a) $D_2 = 3; D_3 = 4$.

b) Se dezvoltă determinantul după prima linie.

c) Se demonstrează prin inducție. Verificare pentru $n = 2, n = 3$. Dacă este adevărată pentru $2 \le k \le n-1, D_n = 2n - (n-1) = n+1$.

2.a) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \left\{ \left(\hat{0},\hat{0}\right), \left(\hat{0},\hat{1}\right), \left(\hat{1},\hat{0}\right), \left(\hat{1},\hat{1}\right) \right\}$ .Se completează tabla operației de adunare .

b) $(xy)^2 = e, x^2y^2 = ee = e$.

c) $x = x^{-1}, \forall x \in G; \forall a,b \in G \Rightarrow (ab)^{-1} = ab = b^{-1}a^{-1} = ba$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1.a) $A^2 = 3A; x = -\frac{1}{9}$.

b) $B = \frac{1}{\sqrt{3}} A$.

c) Prin calcul direct.

2.a) $x_1 = 2; x_{2,3} = -1 \pm i\sqrt{2}$.

b) $S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n, \forall n \geq 0; S_0 = 3, S_1 = 0, S_2 = 2, S_3 = 18, S_4 = 2$.

c) Se scriu relațiile lui Viète, se obține $m = 0$.

www.bacmatematica.ro

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1.a) $A_M(1,1)$.

b) $y' = 2x'$.

c) $x_1' = ax_1 + by_1, y_1' = cx_1 + dy_1; x_2' = ax_2 + by_2 \;\; y_2' = cx_2 + dy_2; x_3' = ax_3 + by_3, y_3' = cx_3 + dy_3$.
Se utilizează proprietăți ale determinanților.
2.a) 16.
b) Se verifică prin calcul direct.
c) $X = I_3$ sau $X = O_3$.

www.bacmatematica.ro

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1.a) $\det A = 0$

b) Se verifică prin calcul.

c) $\det(I_3 + xA^2) = (1-6x)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

2.a) $x_1 = -1, x_2 = i, x_3 = -i$.

b) $p(1) = 0, p'(1) = 0 \Rightarrow a = -2, b = 0$.

c) Singurele rădăcini raționale ale polinomului $p(x) = x^3 + ax^2 + x + 1$ sunt $x = \pm 1 \Rightarrow a \in \{-3, 1\}$.

www.bacmatematica.ro

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1.a) $AB = 0_3$

b) $A^2 = 3A, AB = BA = 0_3, B^2 = 3B.$ Se verifică relația.

c) $\forall x \in \mathbb{R}^* \Rightarrow M_x$ este inversabilă, deci $\det(M_x) \neq 0.$

2.a) Aplicăm relațiile lui Viète, $\sum_i x_i = a, x_1x_2x_3x_4 = 1, \sum_{i<j<k} x_ix_jx_k = a.$

b) Dacă se divide , atunci $p(1) = 0, p(-1) = 0 \Rightarrow a = 1 = -1$, contradicție.

c) Se împarte ecuția reciprocă $f(x) = 0$ prin x^2, se notează $x + \frac{1}{x} = t$ etc.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1.a) Se dezvoltă determinantul; se obține $\det A = 1 + a^2 + b^2 + c^2$.

b) $A \cdot A^* = \det A \cdot I_3 \Rightarrow \det A \cdot \det\left(A^*\right) = \left(\det A\right)^3 \Rightarrow \det A \cdot \det\left(A^*\right) = \left(\det A\right)^3$.

Cum $\det A \neq 0 \Rightarrow \det\left(A^*\right) = \left(\det A\right)^2$.

c) Avem $A - I_3 = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ba & b^2 & bc \\ ca & cb & c^2 \end{pmatrix}$ și se observă că orice minor de ordin 2 al matricei A este nul. Ca urmare, rangul matricei $A - I_3$ este cel mult 1.

2.a) Dacă $f(x) = f(y) \Rightarrow ax = ay \Rightarrow a^{-1}(ax) = a^{-1}(ay) \Rightarrow x = y$, adică f este injectivă.

Pentru orice $y \in G$, considerând $x = a^{-1}y \in G$, rezultă $f(x) = y$, deci f este surjectivă.

b) $(f_a \circ f_b)(x) = f_a(f_b(x)) = a \cdot f_b(x) = a(bx) = (ab)x = f_{ab}(x), \forall x \in G$.

c) Compunerea funcțiilor este asociativă. Elementul neutru este $1_G = f_e \in \mathcal{F}(G)$, unde e este elementul neutru din G. Dacă a^{-1} este simetricul lui $a \in G$, atunci $f_{a^{-1}}$ este simetricul elementului $f_a \in \mathcal{F}(G)$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1. **a)** Prin calcul direct rezultă $\det A = 3\left(1-m^2\right)$.

b) Dacă $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$ rezultă $\det A \neq 0$, deci $\operatorname{rang}(A) = 3$.

Pentru $m = 1$ sau $m = -1$, există cel puțin un minor de ordin doi nenul în A, deci $\operatorname{rang}(A) = 2$.

c) Dacă $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$, sistemul este compatibil determinat.

Pentru $m = 1 \Rightarrow \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & -1 \end{array}\right)$, care are rangul 2, egal cu rangul lui A, deci sistemul este compatibil (nedeterminat).

Pentru $m = -1 \Rightarrow \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 3 & -1 \end{array}\right)$, care are rangul 3, și cum $\operatorname{rang} A = 2$, rezultă sistemul este incompatibil.

2. **a)** Se verifică prin calcul direct că $x * y \in G_2, \forall x, y \in G_2$, adică operația „$*$” este corect definită pe G_2.

Folosind definiția se verifică și asociativitatea și comutativitatea operației. Elementul neutru este $e = \frac{7}{3}$, iar simetricul oricărui element $x \in G_2$ este $x' = \frac{18x-35}{9(x-2)} = 2 + \frac{1}{9(x-2)} \in (2,\infty) = G_2$.

b) Se arată că f este bijectivă și că $f(x * y) = f(x) \cdot f(y), \forall x, y \in G_2$.

c) Dacă $x, y \in (\alpha, \infty)$ și $\alpha \geq 2$, atunci $x * y = 3(x-2)(y-2) + 6(\alpha-2) + \alpha \geq \alpha$, deci G_α este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu operația „$*$”.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1. a) Din primele două ecuații rezultă că dacă $(x_0, y_0, 0, 0)$ este soluție, atunci $x_0 = 0,\ y_0 = \frac{1}{3}$. Din a treia ecuație rezultă $p = -2$.

b) Matricea sistemului, notată A, conține minorul $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 21 \neq 0$, deci $\operatorname{rang} A \geq 2,\ \forall\, m,n \in \mathbb{R}$.

c) Dacă $\operatorname{rang} A = 2$, orice minor de ordin 3 al matricei A este nul. Se obține astfel $m = 2,\ n = -12$. Alegând minorul principal $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 21 \neq 0$, din teorema Rouché rezultă $p = -2$.

2. a) Se verifică prin calcul direct asociativitatea și comutativitatea. Elementul neutru este $(1,0)$ iar simetricul unui element (q,k) este elementul $\left(\frac{1}{q}, -k\right) \in G$.

b) $(1,1) * (1,2) * \ldots * (1,10) = (1,1+2+\ldots+10) = (1,55)$.

c) <u>f morfism</u>: $f\left((q_1,k_1) * (q_2,k_2)\right) = q_1 q_2 2^{k_1+k_2} = f(q_1,k_1) \cdot f(q_2,k_2), \forall (q_1,k_1),(q_2,k_2) \in G$.

<u>f injectivă</u>: Fie $(q_1,k_1),(q_2,k_2) \in G$, $q_1 = \frac{m_1}{n_1}$ și $q_2 = \frac{m_2}{n_2}$, $m_1,n_1,m_2,n_2 \in \mathbb{Z}$ impare astfel încât $f(q_1,k_1) = f(q_2,k_2)$. Dacă $k_1 \neq k_2$, fără a restrânge generalitatea, putem presupune $k_1 < k_2$. Atunci, din $q_1 \cdot 2^{k_1} = q_2 \cdot 2^{k_2}$, rezultă $m_1 n_2 = 2^{k_2-k_1} m_2 n_1$, contradicție, deoarece membrul stâng este impar, iar membrul drept este par. Ca urmare, $k_1 = k_2$, de unde $q_1 = q_2$.

<u>f surjectivă</u>: pentru orice număr rațional $r = \frac{m}{n}$, $m,n \in \mathbb{Z}^*$, există $m_1,n_1 \in \mathbb{Z}$ impare și $a,b \in \mathbb{N}$ astfel încât $m = 2^a m_1$ și $n = 2^b n_1$. Notând $q = \frac{m_1}{n_1}$, $k = a - b$, rezultă $f(q,k) = \frac{m}{n}$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1.a) Sistemul are soluție unică dacă determinatul matricei A a sistemului este nenul. Cum $\det A = m^2 - 6m + 5$, sistemul are soluție unică pentru $m \in \mathbb{R} \setminus \{1,5\}$.

b) Pentru $m \in \mathbb{R} \setminus \{1,5\}$ sistemul este compatibil determinat. Pentru $m = 1$, $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \overline{A} = 2$, adică sistemul este compatibil nedeterminat. Pentru $m = 5$ rezultă $\operatorname{rang} A = 2$ și $\operatorname{rang} \overline{A} = 3$, deci sistemul este incompatibil.

c) Pentru $m = 1$ se obține soluția $x = 1 - \alpha$, $y = \alpha$, $z = 0$, unde $\alpha \in \mathbb{R}$. Înlocuind în relația $2x_0^2 - y_0^2 + 3z_0^2 = 14$, rezultă $\alpha \in \{-2,6\}$. Soluțiile căutate sunt $(3,-2,0)$ și $(-5,6,0)$.

2.a) $\frac{2}{3} * \frac{3}{4} = \left\{\frac{2}{3} + \frac{3}{4}\right\} = \frac{5}{12}$.

b) Comutativitatea este imediată. Asociativitatea: folosind relația $\{x+n\} = \{x\}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$, rezultă:

$(x * y) * z = \{x * y + z\} = \{\{x+y\} + z\} = \{x + y - [x+y] + z\} = \{x + y + z\}$ și

$x * (y * z) = \{x + y * z\} = \{x + \{y+z\}\} = \{x + y + z - [y+z]\} = \{x + y + z\}$.

Elementul neutru este $e = 0$, simetricul lui 0 este 0, iar simetricul oricărui element $x \in (0,1)$ este $1 - x$.

c) Ecuația se poate scrie sub forma $\{3x\} = \frac{1}{2}$. Cum $0 \le 3x < 3$, rezultă $3x \in \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right\} \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{5}{6}\right\}$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1.a) $m(\sigma)=4$.

b) Prin calcul direct rezultă $\sigma^5=e$, deci $A=\{e,\sigma,\sigma^2,\sigma^2,\sigma^3,\sigma^4\}$. A are 5 elemente.

c) Cum $\tau\sigma^2=\sigma^2\tau \Rightarrow \tau\sigma^4=\sigma^4\tau$, deci $\tau\sigma^{-1}=\sigma^{-1}\tau$, adică $\tau\sigma=\sigma\tau$.

2.a) Trebuie demonstrat că $f(x-T)=f(x), \forall x\in\mathbb{R}$

Pentru orice $x\in\mathbb{R}$ avem $f(x-T)=f((x-T)+T)=f(x)\Rightarrow -T\in H$.

b) Fie $T_1,T_2\in H \Rightarrow f(x+(T_1+T_2))=f((x+T_1)+T_2)\overset{T_2\in H}{=}f(x+T_1)\overset{T_1\in H}{=}f(x)$, deci $T_1+T_2\in H$.

Dacă $T\in H$, atunci $-T\in H$, deci H este subgrup al lui $(\mathbb{R},+)$.

c) Din $f(T)=f(0)\Rightarrow T\in\mathbb{Z}$. Apoi, $f(x+T)=f(x), \forall T\in\mathbb{Z}$. Astfel $H=\mathbb{Z}$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1.a) $\det(M)=\begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1-m & 2 & 1 \\ 2m+1 & 2m+1 & 1 \end{vmatrix}=-4m^2+m-1$.

b) $-4m^2+m-1=-\left(4m^2-m+1\right)\neq 0, \forall m\in\mathbb{R}$.

c) $\left|\det(M)\right|=\left(2m-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{15}{16}\geq\frac{15}{16}\Rightarrow S_{ABC}\geq\frac{15}{32}$.

2.a) $M=\begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{1} \\ -\hat{1} & \hat{2} \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{1} \\ -\hat{1} & \hat{2} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \hat{3} & \hat{1} \\ -\hat{1} & \hat{3} \end{pmatrix}=O_2$.

c) Dacă $X=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, atunci $X^2=\begin{pmatrix} a^2-b^2 & \hat{2}ab \\ -\hat{2}ab & a^2-b^2 \end{pmatrix}$. $a^2,b^2\in\left\{\hat{0},\hat{1},\hat{4}\right\}$. Cum $a^2-b^2=\hat{2}\Rightarrow a^2=\hat{1}$ și $b^2=\hat{4}$, adică $a\in\left\{\hat{1},\hat{4}\right\}$ și $b\in\left\{\hat{2},\hat{3}\right\}$. Cum $ab=\hat{3}$ rezultă soluțiile $X_1=\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{3} \\ -\hat{3} & \hat{1} \end{pmatrix}$ și $X_2=\begin{pmatrix} \hat{4} & \hat{2} \\ -\hat{2} & \hat{4} \end{pmatrix}$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1.a) Cu regula lui Sarrus sau prin aplicarea proprietăților determinaților rezultă $\det A = 0$.
b) Cum $\det A = 0$, sistemul admite soluții nenule.
c) Scăzând prima ecuație a sistemului din a doua, rezultă $(b-a)(y_0 - z_0) = 0$, deci $y_0 = z_0$. Rangul matricei sistemului este egal cu 2; z este necunoscută secundară, $z = \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$. Obținem $y = \lambda, x = -(a+b+c)\lambda$.
Cum $(1,1,1)$ soluție implică $a+b+c=-1$, soluțiile sistemului sunt $(\lambda,\lambda,\lambda)$ $\lambda \in \mathbb{R}$.

2.a) Notând $A_{x,y} = \begin{pmatrix} x & iy \\ iy & x \end{pmatrix} \Rightarrow A_{x_1,y_1} \cdot A_{x_2,y_2} = \begin{pmatrix} x_1x_2 - y_1y_2 & \mathrm{i}(x_1y_2 + x_2y_1) \\ \mathrm{i}(x_1y_2 + x_2y_1) & x_1x_2 - y_1y_2 \end{pmatrix}$. În plus,
$(x_1x_2 - y_1y_2)^2 + (x_1y_2 + x_2y_1)^2 = (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) \neq 0 \Rightarrow A_{x_1,y_1} \cdot A_{x_2,y_2} \in G$
b) Comutativitatea este consecință a punctului **a)**, iar asociativitatea este proprietate generală a înmulțirii din $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Elementul neutru este matricea $A_{1,0} = I_2$, iar inversa matricei $A_{x,y}$ este $A_{x',y'} = \begin{pmatrix} x' & iy' \\ iy' & x' \end{pmatrix}$,
cu $x' = \dfrac{x}{x^2+y^2}$ și $y' = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$.

c) Evident f este funcție bijectivă. f φ morfism: $f(x_1+iy_1)\cdot\varphi(x_2+iy_2) = \begin{pmatrix} x_1 & iy_1 \\ iy_1 & x_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 & iy_2 \\ iy_2 & x_2 \end{pmatrix} = A_{x_1,y_1} \cdot A_{x_2,y_2} =$
$= A_{x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1}$. Concluzia rezultă din faptul că $(x_1+iy_1)\cdot(x_2+iy_2) = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1)$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1.a) Notând cu A matricea sistemului, rezultă $\det A = m^2(m-1)$. Sistemul admite soluție unică dacă şi numai dacă $\det A \neq 0$, adică $m \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$.

b) Dacă $m = 0$ rezultă $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, $\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\operatorname{rang} A = 1$ şi $\operatorname{rang} \overline{A} = 2$.

Pentru $m = 1$ rezultă $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, $\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $\operatorname{rang} A = 2$ şi $\operatorname{rang} \overline{A} = 3$.

c) Fie $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ o soluție a sistemului; atunci $m \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$. Scăzând a doua ecuație a sistemului din a treia, rezultă că $x_0 - y_0 + (m+1)z_0 = 1$. Din prima ecuație, conduce la $mz_0 = 0$ deci $z_0 = 0$. Rezultă $x_0 - y_0 = 1$, deci $x_0 - y_0 + 2009z_0 = 1$.

2.a) $H = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{4}\}$.

b) Din tabla adunării elementelor din H, rezultă că dacă $x, y \in H$ astfel încât $x + y = \hat{0}$ atunci $x = y = \hat{0}$.

c) Se verifică relația $A \cdot B \in G$ pentru orice $A, B \in G$.

Asociativitatea este proprietate generală a înmulțirii din $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_7)$, iar elementul neutru este $I_2 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$.

Dacă $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in G$, condiția $a \neq \hat{0}$ sau $b \neq \hat{0}$ este echivalentă cu $\det A \neq \hat{0}$, conform punctului anterior.

Inversa matricei $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in G$ este $A^{-1} = \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$, cu $c = (\det A)^{-1} \cdot a$, $d = (\det A)^{-1} \cdot (-b)$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1.a) Se înlocuiesc $x_0 = 2,\ y_0 = 2,\ z_0 = 1$ în ecuațiile sistemului și se obține $m = 3$ și $n = 2$.

b) Sistemul admite soluție unică dacă determinantul matricei sistemului este nenul. Cum $\det A = 3 - n$, rezultă $n \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

c) Dacă $n \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$, sistemul este compatibil determinat. Dar sistemul trebuie să fie compatibil nedeterminat; ca urmare, $n = 3$. Rangul matricei sistemului este 2 și deoarece sistemul este compatibil, rangul matricei extinse trebuie să fie 2. Obținem $m = 1$.

2. a) Fiecare matrice din G este determinată de o pereche $(a,b) \in \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$, deci G are 9 elemente.

b) Înmulțirea este corect definită pe G: $\begin{pmatrix} \hat{1} & a & b \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{1} & c & d \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{1} & a+c & b+d \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} \in G$.

Înmulțirea matricelor este asociativă pe $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_3)$, deci și pe G. Elementul neutru este I_3, iar inversa matricei $A = \begin{pmatrix} \hat{1} & a & b \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} \in G$ este $A^{-1} = \begin{pmatrix} \hat{1} & -a & -b \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$.

c) Dacă $X = \begin{pmatrix} \hat{1} & a & b \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$, $X^2 = \begin{pmatrix} \hat{1} & a+a & b+b \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$ și $X^3 = \begin{pmatrix} \hat{1} & a+a+a & b+b+b \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} = I_3$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1.a) $\det A = -5m$

b) Sistemul admite soluții nenule dacă determinantul matricei sistemului este nul, deci $m = 0$

c) Pentru $m = 0$ sistemul are soluții nebanale: $x = \lambda,\ y = 3\lambda,\ z = -5\lambda,$ unde $\lambda \in \mathbb{R}$. Înlocuind, rezultă $\dfrac{z_0^2 + y_0^2 + x_0^2}{z_0^2 - y_0^2 - x_0^2} = \dfrac{7}{3}$.

2.a) $f(i) = b - 5 + i(a+4) = 0,$ de unde $a = -4, b = 5.$

b)

$$(x_1-1)^2 + (x_2-1)^2 + (x_3-1)^2 + (x_4-1)^2 = \sum_{k=1}^{4} x_k^2 - 2\sum_{k=1}^{4} x_k + 4 = \left(\sum_{k=1}^{4} x_k\right)^2 - 2\sum_{1\le k<j\le 4} x_k x_j - 2\sum_{k=1}^{4} x_k + 4 = 0.$$

c) Dacă polinomul are toate rădăcinile reale, ținând cont de relația obținută la punctul anterior, rezultă $(x_1-1)^2 = (x_2-1)^2 = (x_3-1)^2 = (x_4-1)^2 = 0,$ deci $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1.$ Obținem $a = -4, b = 1.$

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1.a) Determinantul matricei sistemului este $\Delta = ab(b-a)(a-1)(b-1)$.

b) Sistemul este compatibil determinat dacă $\Delta \neq 0$. Rezultă $a,b \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$, $a \neq b$.

c) Evident rang $A \leq$ rang $\overline{A}$. Coloana termenilor liberi este aceeaşi cu a treia coloană a matricei sistemului, deci orice minor al matricei extinse este şi minor al matricei sistemului. Ca urmare, rang $\overline{A} \leq$ rang A, deci rang $A =$ rang $\overline{A}$, adică sistemul este compatibil, $\forall a,b \in \mathbb{R}$.

2.a) $f^2 = \left(\hat{2}X + \hat{1}\right)^2 = \hat{1}$, polinom care are gradul 0.

b) Cum $f \cdot f = \hat{1}$, f este element inversabil al inelului $\left(\mathbb{Z}_4[X],+,\cdot\right)$ şi $f^{-1} = f$.

c) Fie $g \in \mathbb{Z}_4[X]$, $g = ax + b$, $a \neq \hat{0}$, astfel încât $g^2 = \hat{1}$. Rezultă $\begin{cases} a^2 = \hat{0} \\ \hat{2}ab = \hat{0} \\ b^2 = \hat{1} \end{cases}$. Obținem $b = \hat{1}$ sau $b = \hat{3}$ şi $a = \hat{2}$.

Obținem două polinoame cu proprietatea cerută în enunț: $g_1 = \hat{2}X + \hat{1}$ şi $g_2 = \hat{2}X + \hat{3}$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1.a) Se verifică prin calcul.

b) $A^3 = 9A \Rightarrow I_3 + A^3 = \begin{pmatrix} 10 & 9 & 9 \\ 9 & 10 & 9 \\ 9 & 9 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \det\left(I_3 + A^3\right) = 28.$

c) Fie $B = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \Rightarrow AB = \begin{pmatrix} a_1+b_1+c_1 & a_2+b_2+c_2 & a_3+b_3+c_3 \\ a_1+b_1+c_1 & a_2+b_2+c_2 & a_3+b_3+c_3 \\ a_1+b_1+c_1 & a_2+b_2+c_2 & a_3+b_3+c_3 \end{pmatrix}$

$BA = \begin{pmatrix} a_1+a_2+a_3 & a_1+a_2+a_3 & a_1+a_2+a_3 \\ b_1+b_2+b_3 & b_1+b_2+b_3 & b_1+b_2+b_3 \\ c_1+c_2+c_3 & c_1+c_2+c_3 & c_1+c_2+c_3 \end{pmatrix}$. Egalând elementele aflate pe poziții corespondente, obținem concluzia.

2.a) $\varepsilon^2 = -1 - \varepsilon \in \mathbb{Q}(\varepsilon)$.

b) $(a+b\varepsilon)\left(a+b\varepsilon^2\right) = a^2 - ab + b^2 \neq 0$, deci inversul lui $a+b\varepsilon$ este $\dfrac{a-b}{a^2-ab+b^2} - \dfrac{b}{a^2-ab+b^2}\varepsilon \in \mathbb{Q}(\varepsilon)$.

c) $\left(a^2-ab+b^2\right)\left(c^2-cd+d^2\right) = \left|(a+b\varepsilon)(c+d\varepsilon)\right|^2 = x^2 - xy + y^2$, unde $x = ac - bd \in \mathbb{Z}$ și $y = ad + bc - bd \in \mathbb{Z}$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1. a) $\det(A) = 3m^2 + m - 1$.

b) $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow m \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{6} \right\}$.

c) $A^{-1} = A^* \Leftrightarrow \det(A) = 1 \Leftrightarrow 3m^2 + m - 2 = 0 \Leftrightarrow m \in \left\{ -1, \frac{2}{3} \right\}$.

2. a) Rădăcinile lui f sunt $\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}$.

b) $g(\hat{0}) = g(\hat{1}) = g(\hat{2}) = \hat{2} \neq \hat{0}$. Cum gradul lui g este 3 rezultă concluzia.

c) $h(x) = g(x), \forall x \in \mathbb{Z}_3 \Leftrightarrow (h - g) \vdots (X^3 - X) \Leftrightarrow h = (X^3 - X) \cdot c + g$ cu $c \in \{\hat{0}, \hat{1}\}$ de unde $h = \hat{2}X^3 + X + \hat{2}$ sau $h = g$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1.a) Fie A matricea sistemului: $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow \text{rang}A=3$. Avem $\text{rang}\overline{A}=3=\text{rang}A$, deci sistemul este compatibil.

b) Rezolvând sistemul obținem: $x_1=\dfrac{1+a-b-2\lambda}{2}$, $x_2=\dfrac{1-a-b-2\lambda}{2}$, $x_3=b+\lambda$, $x_4=\lambda$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

Punând condițiile ca x_1, x_2, x_3, x_4 și x_1+x_2 să fie în progresie aritmetică, rezultă $a=b=-\dfrac{1}{18}$

c) Din $x_4>0\Rightarrow\lambda>0$. Apoi, $x_2>0\Rightarrow 1-a-b-2\lambda>0$, deci $1-a-b>2\lambda>0\Rightarrow a+b<1$

2. a) $(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)=1-(x_1+x_2+x_3)+(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)-x_1x_2x_3=4$.

b) Presupunând că f are o rădăcină întreagă a, atunci a este divizor al termenului liber al polinomului, adică $a\in\{-1,1\}$. Cum $f(-1)=-8$, $f(1)=4$, nici 1, nici -1 nu sunt rădăcini ale lui f, deci f nu are rădăcini întregi.

c) $x_1^2x_2+x_1^2x_3+x_2^2x_1+x_2^2x_3+x_3^2x_1+x_3^2x_2=(x_1+x_2+x_3)(x_1^2+x_2^2+x_3^3)-(x_1^3+x_2^3+x_3^3)$.

Avem $x_1+x_2+x_3=3$ și $x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)=-1$.

Avem $x_k^3-3x_k^2+5x_k+1=0$, $k=1,2,3$ și adunând, rezultă $x_1^3+x_2^3+x_3^3=-21$.

În concluzie, $x_1^2x_2+x_1^2x_3+x_2^2x_1+x_2^2x_3+x_3^2x_1+x_3^2x_2=18$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1. a) $\sum_{j=1}^{3}\left(a_{ij}+b_{ij}\right)=\sum_{j=1}^{3}a_{ij}+\sum_{j=1}^{3}b_{ij}=0, \forall i\in\{1,2,3\}$.

b) Dacă $A\in M \Rightarrow \det(A)=0$.

c) Fie $A=\left(a_{ij}\right)\in M$ şi $A^2=\left(c_{ij}\right)$ unde $c_{ij}=\sum_{k=1}^{3}a_{ik}a_{kj}$. Pentru fiecare $i\in\{1,2,3\}$ avem

$$c_{i1}+c_{i2}+c_{i3}=\sum_{k=1}^{3}\left(a_{ik}a_{k1}+a_{ik}a_{k2}+a_{ik}a_{k3}\right)=\sum_{k=1}^{3}a_{ik}\left(a_{k1}+a_{k2}+a_{k3}\right)=0.$$

2.a) $x_{1,2}=\pm\left(1+\sqrt{2}\right)\in\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$.

b) $\mathbb{Z}\subset\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$, $\mathbb{Z}\subset\mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]\Rightarrow\mathbb{Z}\subset\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]\cap\mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]$. Fie

$x=a+b\sqrt{2}=c+d\sqrt{3}$ cu $a,b,c,d\in\mathbb{Z}\Rightarrow b\sqrt{2}-d\sqrt{3}\in\mathbb{Z}$ şi prin ridicare la pătrat rezultă $bd\sqrt{6}\in\mathbb{Z}\Rightarrow bd=0$.
Deci $b=0$ sau $d=0$, de unde $x\in\mathbb{Z}$.

c) Presupunem că există $f:\mathbb{Z}\sqrt{2}\to\mathbb{Z}\sqrt{3}$ morfism de inele. Cum $f(1)=1$ rezultă că $f(2)=f(1)+f(1)=2$.

Atunci $2=f\left(\sqrt{2}^2\right)=f^2\left(\sqrt{2}\right)$, deci $f\left(\sqrt{2}\right)=\pm\sqrt{2}\notin\mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1. a) $A^2 = 5A \Rightarrow \begin{pmatrix} 1+2x & 10 \\ 5x & 2x+16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 5x & 20 \end{pmatrix} \Rightarrow x = 2.$

b) Pentru $x = 2$, conform punctului anterior, rezultă $A^2 = 5A.$ Prin inducție, rezultă $A^n = 5^{n-1}A,$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, de unde $A^{2009} = 5^{2008}A.$

c) $A + A^t = \begin{pmatrix} 2 & x+2 \\ x+2 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rang}\left(A + A^t\right) = 1$ dacă şi numai dacă $\det\left(A + A^t\right) = 0,$ adică $x \in \{-6, 2\}.$

2.a) $f(-1) = a^2 - 2a + 7 = 10 \Rightarrow a \in \{-1, 3\}.$

b) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = \left(x_1 + x_2 + x_3 + x_4\right)^2 - 2\sum_{1 \le i < j \le 4} x_i x_j$. Cum $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 - a$ şi $\sum_{1 \le i < j \le 4} x_i x_j = \frac{a^2+3}{2}$,

rezultă $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = -2a - 2$

c) Avem $\sum_{1 \le i < j \le 4} \left(x_i - x_j\right)^2 = 3\sum_{1 \le i < j \le 4} x_i^{\,2} - 2\sum_{1 \le i < j \le 4} x_i x_j = -a^2 - 6a - 9$. Dacă f are toate rădăcinile reale

$\Rightarrow \sum_{1 \le i < j \le 4} \left(x_i - x_j\right)^2 \ge 0 \Rightarrow -a^2 - 6a - 9 \ge 0 \Rightarrow a = -3$.

Egalitatea are loc dacă $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} = \frac{1-a}{4} = 1$. Obținem $a = -3, b = -8, c = 2$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1.a) $A\cdot\left(X+Y\right)\cdot A^{t}=A\cdot X\cdot A^{t}+A\cdot Y\cdot A^{t}=0_2\Rightarrow X+Y\in G$.

b) Fie $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in G$; atunci $A\cdot X\cdot A^{t}=\left(a+b+c+d\right)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Este evident că dacă $A\cdot X\cdot A^{t}=0_2$, atunci $a+b+c+d=0$.

c) $\det X=0\Rightarrow X^2=tX$, unde $t=\operatorname{tr}\left(A\right)$. Prin inducție rezultă $X^n=t^{n-1}X$, pentru orice $n\in\mathbb{N}, n\geq 1$.

Atunci $A\cdot X^n\cdot A^t=t^{n-1}\left(A\cdot X\cdot A^t\right)=0_2\Rightarrow X^n\in G$.

2. a) Prin împărțire se obține câtul X^2-4X+5 și restul 0.

b) $f=\left(X^2-2X+5\right)\left(X^2-4X+5\right)$. Rădăcinile polinomului sunt $x_{1,2}=1\pm 2\mathrm{i}$, $x_{3,4}=2\pm\mathrm{i}$, niciuna nefiind reală.

c) Prin calcul direct, folosind rezultatele obținute la punctul anterior, rezultă $\left|x_k\right|=\sqrt{5}$, $k=1,2,3,4$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1.a) Prin calcul direct rezultă $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$.

b) $A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(A \cdot A^t\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Fie $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Cum $X^3 = AX = XA$, rezultă $a = d$ și $b = 0$. Înlocuind apoi $X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix}$ în ecuația $X^2 = A$, rezultă $a^2 = 1$ și $ac = 1$. Obținem soluțiile $X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

2.a) Restul împărțirii polinomului f la $X+1$ este $f(-1) = b - 5$, care nu depinde de a.

b) Fie $g = f - X$; atunci $X^2 - X \mid g$. Rezultă $g(0) = g(1) = 0$, de unde $a = 0, b = 0$.

c) $(X-1)^2 \mid f \Rightarrow f(1) = f'(1) = 0$. Avem $f(1) = 0 \Rightarrow 2a + b + 1 = 0$ și $f'(1) = 0 \Rightarrow 11a - 15 = 0$; obținem $a = \frac{15}{11}, b = -\frac{41}{11}$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1.a) $\text{Det}(A) = abc \neq 0$.

b) Prin inducție după n.

c) $A^{-1} = \begin{pmatrix} a^{-1} & a^{-1}-b^{-1} & a^{-1}-b^{-1} \\ 0 & b^{-1} & b^{-1}-c^{-1} \\ 0 & 0 & c^{-1} \end{pmatrix}$.

2.a) Pentru $x=-1$ rezultă $f(-1) = f^2(-1) + 3f(-1) + 1$, deci $f(-1) = -1$.

b) Restul împărțirii polinomului f la $X-5$ este $f(5)$. Pentru $x=0$ rezultă $f(1) = f^2(0) + 3f(0) + 1 = 1$.

Pentru $x=1$ rezultă $f(5) = f^2(1) + 3f(1) + 1 = 5$.

c) Fie șirul de numere reale $(a_n)_{n\geq 0}$ definit prin $a_0 = 0$ *și* $a_{n+1} = a_n^2 + 3a_n + 1, \forall n \geq 0$.

Prin inducție rezultă $f(a_n) = a_n$ și $a_n < a_{n+1}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, deci șirul are o infinitate de termeni diferiți. Ca urmare, polinomul $h = f - X$ se anulează în fiecare dintre termenii șirului, adică de o infinitate de ori, deci $f - X = 0$, adică $f = X$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1.a) $2A_2 = 2\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(2A_2) = 12.$

b) $A_3 + xI_3 = \begin{pmatrix} 2+x & 1 & 1 \\ 1 & 2+x & 1 \\ 1 & 1 & 2+x \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A + xI_3) = (x+4)(x+1)^2$. $\mathrm{Det}(A + xI_3) = 0 \Rightarrow x \in \{-4, -1\}$.

c) $\det A_4 = 5 \neq 0$, deci A_4 este inversabilă. Fie $B = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$. Prin calcul direct se arată că $AB = BA = I_4$, deci $B = A^{-1}$.

2.a) $x_2 = 1 + i \Rightarrow x_3 = 1 - i$. Folosind relațiile lui Viete, obținem $a = x_1 + x_2 + x_3$, $b = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$ și $c = x_1x_2x_3$, adică $a = 4, b = 6, c = 4$.

b) Presupunem că există $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel ca resturile împărțirii polinomul f la $(X-1)^2$ și $(X-2)^2$ sunt egale cu $r \in \mathbb{R}[X]$, grad $r \leq 1$. Fie $g = f - r$; atunci grad $g = 3$. Atunci $(X-1)^2 \mid g$ și $(X-2)^2 \mid g$. Rezultă $(X-1)^2(X-2)^2 \mid g \Rightarrow$ grad $g \geq 4$, contradicție

c) Presupunem că $x_1 \leq 0$. Pe rând, rezultă $x_1^3 \leq 0, -ax_1^2 \leq 0, bx_1 \leq 0, -c < 0$. Adunând, obținem $0 = f(x_1) < 0$, contradicție.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluții

1. a) $A^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2+bc \end{pmatrix}$. Se verifică prin calcul că $A^2 - \operatorname{tr}(A)\cdot A + \det A \cdot I_2 = 0_2$.

b) $\operatorname{tr}(A) = 0 \Rightarrow A^2 = -\det A \cdot I_2$. Atunci $A^2 \cdot B = B \cdot A^2 = -(\det A)\cdot B$

c) $A^2 - \operatorname{tr}(A)\cdot A + \det A \cdot I_2 = 0_2 \Rightarrow A^2B - \operatorname{tr}(A)\cdot AB + (\det A)\cdot B = 0_2$ (prin înmulțire la dreapta cu B).

$A^2 - \operatorname{tr}(A)\cdot A + \det A \cdot I_2 = 0_2 \Rightarrow BA^2 - \operatorname{tr}(A)\cdot BA + (\det A)\cdot B = 0_2$ (prin înmulțire la stânga cu B).

Scăzând relațiile de mai sus rezultă $\operatorname{Tr}(A)\cdot(AB - BA) = 0_2 \Rightarrow AB = BA$.

2. a) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 - 2\sum_{1\le i<j\le 4} x_i x_j = 10$.

b) $(X-1)(X-3) \mid f \Rightarrow f(1) = f(3) = 0$. Obținem $a = -14, b = 6$.

c) Fie u, v cele două rădăcini duble ale polinomului f; din relațiile lui Viète rezultă $2(u+v) = 6$ și $u^2 + v^2 + 4uv = 13$. Atunci $uv = 2$; $u = 1$, $v = 2$, de unde $a = -12, b = 4$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1.a) $\det\left(A\cdot A^t\right)=\det\left(A\right)\cdot\det\left(A^t\right)=\det^2\left(A\right)\geq 0$.

b) $A\cdot A^t=A^t\cdot A\Leftrightarrow ac+bd=ab+cd\Leftrightarrow\left(a-d\right)\left(c-b\right)=0$.

c) $A-A^t=\begin{pmatrix}0 & b-c\\ c-b & 0\end{pmatrix}=\left(b-c\right)\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$. Cum $\left(A-A^t\right)^{2008}=\left(b-c\right)^{2008}\cdot I_2$, rezultă $\left(A-A^t\right)^{2009}=\left(b-c\right)^{2008}\cdot\left(A-A^t\right)\Rightarrow A-A^t=O_2$ sau $\left(b-c\right)^{2008}=1$. Se obține $b-c\in\left\{0,1,-1\right\}$, deci $\left|b-c\right|\in\left\{0,1\right\}$.

2.a) $x=\hat{2}^{-1}\cdot\hat{3}=\hat{5}$.

b) $x^2\in\left\{\hat{0},\hat{1},\hat{2},\hat{4}\right\}$, $\forall x\in\mathbb{Z}_7$, deci $2x^2\in\left\{\hat{0},\hat{1},\hat{2},\hat{4}\right\}$.

c) $f\left(x+y\right)=\hat{2}\left(x+y\right)=\hat{2}x+\hat{2}y=f\left(x\right)+f\left(y\right)$, $\forall x,y\in\mathbb{Z}_7$. $f\left(x\right)=f\left(y\right)\Rightarrow\hat{2}x=\hat{2}y\Rightarrow x=y$, deci f este injectivă. Cum $\mathbb{Z}_7$ este mulțime finită rezultă că f este surjectivă.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluții

1.a) Matricea sistemului A conține un minor nenul de ordin 2 (spre exemplu $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$), deci $\operatorname{rang} A \geq 2$.

Dacă A are rangul 2, atunci $\det A = 0$ (singurul minor de ordin 3). Avem $\det A = 2(m-1)$, deci $\det A = 0 \Rightarrow m = 1$.

b) Dacă $x_0 + y_0 + z_0 = 4$, din a treia ecuație a sistemului rezultă $x_0 = 2,\ y_0 + z_0 = 2$. Folosind și a doua ecuație rezultă $y_0 = z_0 = 1$. Atunci, din prima ecuație a sistemului rezultă $m = \frac{1}{2}$

c) Sistemul are soluție unică dacă $\det A \neq 0 \Rightarrow m \neq 1$.

Aplicând regula lui Cramer, rezultă $x = -\frac{1}{m-1},\ y = 1,\ z = -\frac{m}{m-1}$. $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{Z}^3 \Rightarrow m-1 \mid 1 \Rightarrow m \in \{0,2\}$

2.a) $X+1 \mid f \Rightarrow f(-1) = 0$. Cum $f(-1) = 5 + p \Rightarrow p = -5$.

b) Dacă $\alpha \in \mathbb{R}$ este rădăcină dublă, atunci $f(\alpha) = f'(\alpha) = 0$. Din $f'(\alpha) = 0 \Rightarrow 4(\alpha^3 - 1) = 0 \Rightarrow \alpha = 1$.

Din $f(\alpha) = 0 \Rightarrow p = 3$.

c) Cum $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 - 2\sum_{1 \leq i < j \leq 4} x_i x_j = 0$, dacă polinomul ar avea toate rădăcinile reale, atunci acestea ar fi toate egale cu 0, contradicție.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluții

1.a) $A\cdot A^t=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix}$.

b) $f(0)=\det\left(A\cdot A^t+0\cdot B\right)=\det\left(A\cdot A^t\right)=\det(A)\cdot\det\left(A^t\right)=(\det A)^2\geq 0$.

c) Fie $f(x)=\begin{vmatrix} a^2+b^2+x & ac+bd+x \\ ac+bd+x & c^2+d^2+x \end{vmatrix}=\left(a^2+b^2+c^2+d^2-2ac-2bd\right)x+(ad-bc)^2$.

Afirmația din enunț este adevărată: $m=a^2+b^2+c^2+d^2-2ac-2bd$, $n=(ad-bc)^2$.

2.a) Pentru $q=\frac{1}{3}\Rightarrow\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\in G$.

b) Fie $x=\cos q\pi+i\sin q\pi$, $y=\cos r\pi+i\sin r\pi$, $q,r\in\mathbb{Q}$. Atunci $xy=\cos(q+r)\pi+i\sin(q+r)\pi\in G$.

c) Rădăcinile polinomului f sunt numerele complexe $z_k=\cos\frac{2k\pi}{6}+i\sin\frac{2k\pi}{6}=\cos\frac{k\pi}{3}+i\sin\frac{k\pi}{3}$, $k=0,1,...,5$.

Cum $\frac{k}{3}\in\mathbb{Q}$, pentru orice $k=0,1,...,5$, rezultă că f are toate rădăcinile în G.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1.a) $I_2 + A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 7 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow (I_2 + A)^2 = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 7 & -3 \end{pmatrix} = I_2 + A.$

b) $A^2 = -A$, $A^3 = A^2 \cdot A = -A \cdot A = -A^2 = A$. Prin inducție matematică rezultă că $A^n = (-1)^{n-1} A, \forall n \in \mathbb{N}^*$, deci $\left\{A^n \middle| n \in \mathbb{N}^*\right\} = \{-A, A\}$.

c) $X^3 = A \Rightarrow \det(X^3) = \det(A) \Rightarrow \det(X) = 0$. Dacă $t = tr(X) \Rightarrow X^3 = t^2 X$. Din $t^2 X = A \Rightarrow t^3 = -1$, deci $t = -1$. Deci $X = A$.

2.a) $f(1) + f(-1) = a_n\left(1 + (-1)^n\right) + a_{n-1}\left(1 + (-1)^{n-1}\right) + \ldots + a_1\left(1 + (-1)\right) + 2a_0$.

Avem $1 + (-1)^k \in \{0, 2\}$, pentru orice $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, deci $f(1) + f(-1)$ este număr par

b) Presupunem că ecuația $f(x) = 0$ are o rădăcină întreagă k; atunci $f(x) = (x - k)g(x)$, unde g este un polinom cu coeficienți întregi. $f(2) = (2 - k)g(2)$ este impar, deci $2 - k$ este impar.

$f(3) = (3 - k)g(3)$ este impar, deci $3 - k$ este impar. Atunci $2 - k + 3 - k = 5 - 2k$ este par, contradicție.

c) Dacă polinomul $g = X^3 - X + 3a + 1$ ar putea fi descompus în produs de două polinoame neconstante, cu coeficienți întregi, unul dintre aceste polinoame ar fi de gradul 1, deci g ar avea o rădăcină rațională $x_0 = \frac{p}{q}$, unde $p, q \in \mathbb{Z}, q \geq 1, (p, q) = 1$, astfel încât $p \mid 1$ și $q \mid 1$. Rezultă $x_0 \in \{-1, 1\}$.

Pentru $x_0 = -1 \Rightarrow g(-1) = 3a + 1 = 0$ dacă și numai dacă $a = -\frac{1}{3}$, care nu este număr întreg, contradicție.

Pentru $x_0 = 1 \Rightarrow g(1) = 3a + 1 = 0$ dacă și numai dacă $a = -\frac{1}{3}$, care nu este număr întreg, contradicție.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluții

1.a) Cum $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)=-a$ și $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)+a\cdot x\right)=0$, dreapta $y=-a\cdot x$ este asimptota oblică spre $-\infty$.

b) $x=\ln a$ este punct de minim.

c) Din ipoteză avem că $f(x)\geq f(0),\forall x\in\mathbb{R}$, deci $x=0$ este punct de minim pentru f. Din T. Fermat deducem că $f'(0)=0\Leftrightarrow a=1$; se verifică faptul că $a=1$ convine.

2.a) F este derivabila pe $(0;\infty)$. $F'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}(\ln x-2)+2\cdot\sqrt{x}\cdot\frac{1}{x}=f(x), x>0$.

b) G primitivă $\Rightarrow$ G este derivabilă. $G'(x)=f(x)\geq 0,\forall x\geq 1\Rightarrow$ concluzia.

c) Aria $=\int_{\frac{1}{e}}^{e}|f(x)|dx=\int_{\frac{1}{e}}^{1}-f(x)dx+\int_{1}^{e}f(x)dx=-F(x)\Big|_{\frac{1}{e}}^{1}+F(x)\Big|_{1}^{e}=-2\sqrt{e}-\frac{6}{\sqrt{e}}+8$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluții

1.a) Se demonstrează prin inducție matematică.

b) $a_{n+1} - a_n = -a_n \cdot \sqrt{a_n} < 0 \Rightarrow$ șirul dat este strict descrescător.

c) Cum $a_k^2 < a_k\sqrt{a_k} = a_k - a_{k+1}$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, însumând se deduce relația cerută.

2.a) F este derivabilă pe $\mathbb{R}$. $F'(x) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = f(x)$.

b) Aria cerută este $A = \int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx = \ln\left(x^2+x+1\right)\Big|_0^1 = \ln 3$.

c) Limita cerută este $L = \lim\limits_{n\to\infty}\left(F(n) - F(-n)\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{2\pi\sqrt{3}}{3}$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluții

1.a) $f'(x)=\frac{36\cdot x^2-1}{x}, x>0 \Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $\left(0,\frac{1}{6}\right]$ și strict crescătoare pe $\left[\frac{1}{6},\infty\right)$.

b) Din **a)** avem că $f(x)\geq f\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{2}+\ln 6, \forall x>0$, deci $a\in\left(-\infty,\frac{1}{2}+\ln 6\right]$.

c) Deoarece $\lim\limits_{x\searrow 0} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$,utilizând **a)** avem ca pentru $m<\frac{1}{2}+\ln 6=m_0$ ecuația are 0 rădăcini reale, pentru $m=m_0$ ecuația are o rădăcină reală, iar pentru $m>m_0$ ecuația are două rădăcini reale.

2.a) Funcția este continuă, deci are primitive. Daca F este o primitivă pentru f_a, atunci $F'(x)=f_a(x)>0, \forall x\in\mathbb{R}$.
Așadar funcția F este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

b) $\int_0^3 \frac{1}{|x-2|+3}dx=\int_0^2 \frac{1}{5-x}dx+\int_2^3 \frac{1}{x+1}dx=\ln\frac{20}{9}$.

c) $\lim\limits_{a\to\infty}\int_0^3 f(x)dx=\lim\limits_{a\to\infty}\int_0^3 \frac{1}{a-x+3}dx=\lim\limits_{a\to\infty}\ln\frac{a+3}{a}=0$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluții

1.a) $y=0$ este asimptota orizontală la ∞ și la $-\infty$.

Dreptele $x=0,\ x=-1$ sunt asimptote verticale.

b) $f'(x)=\dfrac{-2\left(3x^2+3x+1\right)}{x^3(x+1)^3}\neq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,0\}$, de unde se obține concluzia.

c) $\sum\limits_{k=1}^{n} f(k)=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{k^2}-\dfrac{1}{(k+1)^2}\right)=1-\dfrac{1}{(n+1)^2}$. Limita cerută este $\dfrac{1}{e}$

2.a) $I_1=\int_1^2\left(1-\dfrac{1}{x+1}\right)dx=1-\ln\dfrac{3}{2}$.

b) $I_n=\int_1^2\dfrac{x^n}{1+x^n}dx\le\int_1^2 dx=1$.

c) $I_n=\int_1^2\left(1-\dfrac{1}{1+x^n}\right)dx=1-\int_1^2\dfrac{1}{1+x^n}dx$, iar $0\le J_n=\int_1^2\dfrac{1}{1+x^n}dx\le\int_1^2\dfrac{1}{x^n}dx=\dfrac{1}{n-1}\left(1-\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)\Rightarrow J_n\to 0$

$\Rightarrow I_n\to 0$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluții

1.a) $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{4}{(x+1)^2}=\frac{(x-1)^2}{x\cdot(x+1)^2}$, $x>0$

b) $f'(x)=\frac{2}{9}\Leftrightarrow 2x^3-5x^2+20x-9=0\Leftrightarrow(2x-1)(x^2-2x+9)=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$.

Deoarece $f\left(\frac{1}{2}\right)=-\ln 2+\frac{2}{3}\Rightarrow A\left(\frac{1}{2};-\ln 2+\frac{2}{3}\right)$ este punctul căutat.

c) Din subpunctul **a)** deducem ca $f'(x)>0,\forall x>1$. Deoarece funcția *f* este strict crescătoare pe $[1,\infty)$ și $f(1)=0$, rezultă că $f(x)\geq 0,\forall x\in[1;\infty)$, de unde se deduce inegalitatea de demonstrat.

2.a) Se arată că *f* este strict descrescătoare. Se aplică teorema de medie (sau teorema lui Lagrange pentru o primitivă a funcției *f*).

b) $\int_1^n f(x)dx=\int_1^n x^{-2}dx=\left.\frac{-1}{x}\right|_1^n=1-\frac{1}{n}$. Limita cerută este egală cu 1.

c) Deoarece $\int_1^n f(x)dx=\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}f(x)dx$ adunând inegalitățile de la **a)** obținem:

$\sum_{k=2}^{n}f(k)\leq\int_1^n f(x)dx\Rightarrow a_n-f(1)\leq\int_1^n f(x)dx\Rightarrow a_n\leq\int_1^n f(x)dx+1\to 2$, deci șirul este mărginit superior.

Șirul fiind și crescător , este convergent.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluții

1.a) $f'(x) = e^{x\ln x}.(x\ln x)' = f(x)\cdot(\ln x+1), x>0$.

b) Funcția f este descrescătoare pe $\left(0;\frac{1}{e}\right]$ și crescătoare pe $\left[\frac{1}{e},\infty\right)$, deci ea este marginită inferior de numărul $f\left(\frac{1}{e}\right)$. Minimul cerut este $e^{\frac{-1}{e}}$.

c) $f''(x) = f(x)\cdot\left((1+\ln x)^2+\frac{1}{x}\right)>0$, deci f este convexă pe $(0,\infty)$.

2.a) $\int_0^1 g_2(x)\,dx = \int_0^1\left(1-x+x^2-x^3+\frac{x^4}{1+x}\right) = \int_0^1\frac{1}{1+x}dx = \ln(x+1)\Big|_0^1 = \ln 2$.

b) $x\in[0;1]\Rightarrow 0\le\frac{x^{2n}}{1+x}\le x^{2n}$ și integrând aceste inegalități de la 0 la 1, obținem inegalitățile cerute.

c) Integrând functia g_n obținem:

$\int_0^1\frac{1}{1+x}dx = \int_0^1\left(1-x+x^2-\ldots-x^{2n-1}+\frac{x^{2n}}{1+x}\right)dx \Rightarrow \ln 2 = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots-\frac{1}{2n}+\int_0^1\frac{x^{2n}}{1+x}dx$, utilizând și **b)** găsim că limita este $\ln 2$.

www.bacmatematica.ro

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluții

1.a) $x = 0$ este asimptota verticala. Functia f nu admite alte asimptote, pentru că f este continuă, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ și $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

b) Aplicăm T.Lagrange funcției f pe $[k, k+1]$ și stabilim inegalitățile cerute.

c) Adunând inegalitățile de la **b)** obținem $x_n > \ln(n+1) - \ln n > 0, n \in \mathbb{N}^*$. Apoi, $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n$ și folosind **b)** se deduce că șirul este descrescător.

2.a) $F'(x) = f(x), \forall x > -1 \Leftrightarrow \frac{a}{x+1} + \frac{2bx}{x^2+1} + \frac{c}{x^2+1} = \frac{2x}{(x+1)(x^2+1)}$, $\forall x > -1 \Leftrightarrow a = -1, b = \frac{1}{2}, c = 1$.

b) $\int_0^1 f(x)dx = F(x)\Big|_0^1 = \left(-\ln(x+1) + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \operatorname{arctg}(x)\right)\Big|_0^1 = -\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{4}$.

c) $F'(x) = f(x)$, $x > -1$. Observăm că $F'(x) < 0, x \in (-1;0)$ și $F'(x) > 0, x > 0$, de unde deducem monotonia.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluții

1.a) $f'(x) = 1 - \sin x \geq 0$, deci are loc concluzia.

b) Se demonstrează prin inducție, folosind monotonia funcției.

c) Șirul este crescător și folosind **b)**, șirul este convergent. Concluzia rezultă trecând la limită în relația de recurență.

2.a) $I_1 = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$.

b) $I_{n+1} - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \left(\cos x - 1\right) dx \leq 0$, de unde se obține concluzia.

c) $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)' \cdot \cos^{n-1} x dx$; $I_n = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \cos^2 x\right) \cdot \cos^{n-2} x dx$; $I_n = (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n$,

deci $nI_n = (n-1) I_{n-2} \Rightarrow nI_n I_{n-1} = (n-1) I_{n-1} I_{n-2} = \ldots = 1 I_1 I_0 = \frac{\pi}{2}$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluții

1.a) $f'(x) = 1 - \cos x \geq 0,\ x \in \mathbb{R}$, deci funcția f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

b) Din ipoteză rezultă că $x_n = \sin x_n + n \geq n - 1$. Rezultă că șirul (x_n) este nemărginit.

c) $\frac{x_n}{n} \in \left[\frac{n-1}{n}, \frac{n+1}{n}\right]$. Limita cerută este egală cu 1 (teorema cleștelui).

2.a) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1-x^2}{1-x} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} (1+x) dx = \left(x + \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{5}{8}$.

b) $t \in \left[0; \frac{1}{2}\right] \Rightarrow 0 \leq g_n(t) \leq g_n\left(\frac{1}{2}\right)$ deoarece funcția g_n este crescătoare pe $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

Rezultă că $0 \leq \int_0^{\frac{1}{2}} g_n(t) dt \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2^{n-1}} dt = \frac{1}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Avem : $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1-x^n}{1-x} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}\right) dx = \left(x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n}\right)\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 2^2} + \frac{1}{3\cdot 2^3} + \ldots + \frac{1}{n\cdot 2^n}$.

Limita cerută este $-\ln(1-x)\Big|_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} g_n(x) dx \to -\ln\frac{1}{2} = \ln 2$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluții

1.a) $f'(x) = \text{arctg}x - \frac{x}{x^2+1}$; $f''(x) = \frac{2x^2}{\left(1+x^2\right)^2} \geq 0$, deci *f* este convexă.

b) $f''(x) \geq 0 \Rightarrow f'$ este crescătoare. Cum $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) = -\frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = \frac{\pi}{2}$, se obține concluzia.

c) $f'(0) = 0$ și f' crescătoare pe $\mathbb{R} \Rightarrow f'(x) \leq 0$ pentru $x < 0$; $f'(x) \geq 0$ pentru $x > 0$. Deducem că $x = 0$ este punct de minim global pentru *f*, deci $f(x) \geq f(0) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

2.a) $I_1 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2.$

b) $x \in [0;1] \Rightarrow \frac{x^n}{1+x^{2n}} \leq x^n$. Se integrează inegalitatea și se obține cerința problemei .

c) $I_n \geq 0$, deoarece funcția de integrat este pozitivă. Folosind **b)** și teorema cleștelui se deduce că limita cerută este egală cu 0.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluții

1.a) Avem că $f_s'(0) = -\frac{3}{4}$ și $f_d'(0) = \frac{1}{4}$, deci f nu e derivabilă în $x = 0$.

b) $f'(x) = \begin{cases} -\frac{e^{-x}(x+3)}{(x+2)^2}, x \in (-\infty,-2) \cup (-2,0) \\ \frac{e^x(x+1)}{(x+2)^2}, x \in (0,\infty) \end{cases}$; $x = -3$ este maxim și $x = 0$ este minim.

c) Șirul lui Rolle:

x	$-\infty$	-3	-2	0	$+\infty$
$f(x) - m$	$-\infty$	$-m - e^3$	$-\infty \vert +\infty$	$\frac{1}{2} - m$	$+\infty$

pentru $m < -e^3 \Rightarrow 2$ rădăcini; $m = -e^3 \Rightarrow$ o rădăcină, $x = -3$; $m \in \left(-e^3, \frac{1}{2}\right) \Rightarrow$ nicio rădăcină;

$m = \frac{1}{2} \Rightarrow$ o rădăcină, $x = 0$; $m > \frac{1}{2} \Rightarrow 2$ rădăcini.

2.a) $I = \frac{13}{24} - \cos 1$.

b) $g'(x) = \frac{-\sin x}{x} < 0$, $\forall x \in (0,1]$, deci are loc cerința problemei.

c) Avem $\frac{\sin t}{t} \geq 1 - \frac{t^2}{6}$, pentru $t > 0$, deci $g(x) \geq \int_x^1 \left(1 - \frac{t^2}{6}\right) dt = \frac{17}{18} - x + \frac{x^3}{6}$.

Atunci , limita cerută $L \geq \frac{17}{18} > 0,9$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluții

1.a) $x_n \ln 2 + \ln\frac{3}{2} + ... + \ln\frac{n+1}{n} = \ln(n+1)$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

b) Folosind o regulă a lui L'Hospital, limita cerută este egală cu 0.

c) $f'(x) = \frac{x-(x+1)\ln(x+1)}{x^2(x+1)}$. Considerăm $g:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x) = x-(x+1)\ln(x+1)$ și avem

$g'(x) = -\ln(x+1) < 0,\ \forall x > 0$, deci $g(x) < g(0) = 0,\ \forall x > 0$ adică $f'(x) < 0, \forall x > 0$.

2.a) Integrând prin părți se obține $f(2) = 1 - \frac{2}{e}$.

b) $f(x) = \int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt \le \int_0^1 t^{x-1} dt = \frac{1}{x}$.

c) $f(x+1) = \int\limits_0^1 \left(-e^{-t}\right)' \cdot t^x dt = -e^{-t}\cdot t^x\Big|_0^1 + \int\limits_0^1 e^{-t}\cdot x\cdot t^{x-1} dt = -\frac{1}{e} + x\cdot f(x),\ x > 1$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluții

1.a) $y = x + 1$ este asimptota oblică spre ∞.

b) Deoarece $x^3 + 3x^2 - 4 = (x-1)(x+2)^2 \neq 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2,1\}$. Derivând relația $f^3(x) = x^3 + 3x^2 - 4$, obținem concluzia.

c) $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{(x-1)^2(x+2)}}$, $\forall x \neq 1, x \neq -2$. Cum f continuă în $x_0 = -2$ rezultă $f'_s(-2) = +\infty, f'_d(-2) = -\infty$.

2.a) $F_1(x) = \int_0^x \left(-e^{-t}\right)' \cdot t dt = 1 - (x+1) \cdot e^{-x}$.

b) $F_n'(x) = x^n \cdot e^{-x}, x > 0$; $F_n''(x) = x^{n-1} \cdot e^{-x}(n - x)$, $x > 0$, deci punctul de inflexiune este $x = n$.

c) $F_2(x) = \int_0^x e^{-t} t^2 dt = \dfrac{-x^2}{e^x} - \dfrac{2x}{e^x} - \dfrac{2}{e^x} + 2$, de unde rezultă că limita cerută este egală cu 2.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluții

1. a) $f_n'(x) = n\sin^{n-1} x\cos x$, apoi se obține relația cerută.

b) $f_n''(x) = n\sin^{n-2} x\left(n-1-n\sin^2 x\right)$; $f_n''(x_n) = 0, x_n \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow n;\ \sin^2 x = n-1 \Rightarrow \sin x_n = \sqrt{\frac{n-1}{n}}$.

c) $L = \lim\limits_{n\to\infty}(\sin x_n)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\sin x_n - 1\right)^{\frac{1}{\sin x_n - 1}\cdot n\cdot(\sin x_n - 1)}$; $L = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{n-1}{n}}-1\right)\cdot n} = e^{-\frac{1}{2}}$.

2.a) F este derivabilă pe $\mathbb{R}$ și $F'(x) = \dfrac{(2x+a)\left(x^2+1\right)-\left(x^3+ax^2+5x\right)}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}} = f(x)$.

b) Aria $= \int_1^2 f(x)dx = \left.\dfrac{x^2+2x+5}{\sqrt{x^2+1}}\right|_1^2 = \dfrac{13}{\sqrt{5}} - \dfrac{8}{\sqrt{2}}$.

c) Cu schimbarea de variabilă $t = -x$, a doua integrală devine $\int_{-2}^0 F(x)dx = \int_0^2 F(-t)dt$.

Relația din ipoteză devine

$\int_0^2 \left(F(x)-F(-x)\right)dx = 2 \Leftrightarrow \int_0^2 \dfrac{2ax}{\sqrt{x^2+1}}dx = 2 \Leftrightarrow a\cdot\left.\sqrt{x^2+1}\right|_0^2 = 1 \Rightarrow a = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluții

1.a) $f_n'(x) = n \cdot \left(x^{n-1} - 1\right)$, $f_n'(x) < 0$, pentru $x \in [0,1)$; $f_n'(x) > 0$, pentru $x > 1$, de unde rezultă concluzia.

b) f_n este continuă, strict descrescătoare pe $[0,1]$ și $f_n(0) \cdot f_n(1) < 0 \Rightarrow$ o rădăcină în $(0,1)$.

f_n este continuă, strict crescătoare pe $[1,\infty)$, $f_n(1) < 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} f_n(x) = \infty \Rightarrow$ o rădăcină în $(1,\infty)$.

c) $f_n\left(\frac{2}{n}\right) < 0, f_n(0) > 0$,deci $a_n \in \left(0, \frac{2}{n}\right) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

2.a) $I_0 = \operatorname{arctg} x \Big|_0^1$, deci $I_0 = \frac{\pi}{4}$.

b) $I_{2n} + I_{2n-2} = \int_0^1 \frac{x^{2n-2} \cdot \left(x^2+1\right)}{x^2+1} dx$; $I_{2n} + I_{2n-2} = \frac{1}{2n-1}$, $n \geq 2$.

c) Din **b)** rezultă $I_{2n} \cdot (-1)^{n-1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - ... + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{2n-1} - I_0$. Din $0 \leq I_n \leq \int_0^1 x^n dx \leq \frac{1}{n+1}$ rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$, de unde concluzia.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluții

1.a) Funcția este derivabila pe $\mathbb{R}-\{0\}$ și $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)=0$.

b) $f'(x)=2x\cdot\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)-\frac{2}{x}\cdot\cos\left(\frac{1}{x^2}\right), x\in\mathbb{R}-\{0\}$. Limita cerută este egală cu 0.

c) Știm că $\sin t\le t,\ \forall t\ge 0$, de unde $0\le f(x)\le x^2\cdot\frac{1}{x^2}=1, \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

2.a) $\int_0^1(1-x)^2dx=\frac{1}{3}$.

b) Cu substituția $1-x=t$,se obține $\int_0^1 x(1-x)^n dx=\int_0^1\left(t^n-t^{n+1}\right)dt=\left.\left(\frac{t^{n+1}}{n+1}-\frac{t^{n+2}}{n+2}\right)\right|_0^1$, de unde rezultă cerința.

c) $\int_0^1\left(1-\frac{x}{n}\right)^n dx=-n\left.\frac{\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n+1}}{n+1}\right|_0^1=\frac{-n}{n+1}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1}+\frac{n}{n+1}$, de unde rezultă că limita cerută este $1-\frac{1}{e}$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluții

1. a) Se demonstrează prin inducție.

b) $x_{n+1} - x_n = \frac{x^5{}_n - x_n}{4} < 0$. Șirul fiind descrescător și mărginit este convergent.

c) Avem ca $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^4{}_n + 3}{4} = \frac{3}{4}$. Din $\frac{x_{n+2}}{x_n} = \frac{x_{n+2}}{x_{n+1}} \cdot \frac{x_{n+1}}{x_n}$ și relația anterioară, se deduce că limita cerută este $\left(\frac{3}{4}\right)^2$.

2. a) Din ipoteză avem ca $x^2 \cdot f(x) = x \cdot \sin x,\ x \in \mathbb{R}$. $I = \int_0^\pi x \sin x dx = -\int_0^\pi (\cos x)' x dx$.

$I = -x\cos x\Big|_0^\pi + \int_0^\pi \cos x\, dx = \pi$.

b) Funcția $g(x) = f(x),\ x \in I - \{0\},\ g(0) = 1,\ I = [0,1]$, este continuă pe I deci integrabilă.
Cum f diferă de g doar în $x = 0$, rezultă că și f este integrabilă pe I.

c) Avem $\frac{\sin x}{x} < \frac{\sin x}{1}, \forall x \in \left(1, \frac{\pi}{2}\right]$. Rezultă $\int_1^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx < \int_1^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \cos 1$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluții

1.a) Funcția f este continuă pe $[0,\infty)$, deci nu va avea asimptote verticale. Cum $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 2$, dreapta $y = 2$ este asimptota orizontală spre ∞.

b) Demonstrăm inductiv că $x_n > 1, \forall n \in \mathbb{N}$. Apoi, $x_{n+1} - x_n = \dfrac{1 - x_n^2}{x_n + 2} < 0$ deci șirul este descrescător. Astfel șirul este convergent și folosind recurența rezultă concluzia.

c) $y_{n+1} - y_n = x_{n+1} - 1$, deci șirul (y_n) este crescător. Avem $|x_n - 1| = |f(x_{n-1}) - 1| = \dfrac{|x_{n-1} - 1|}{x_{n-1} + 2} \le \dfrac{|x_{n-1} - 1|}{2}$, de unde $|x_n - 1| \le \dfrac{x_0 - 1}{2^n} = \dfrac{1}{2^n}$. Atunci $y_n \le x_0 + \sum\limits_{k=1}^{n} |x_k - 1| \le 2 + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2^k} < 3$, deci șirul este și mărginit superior.

2.a) Avem că $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos x)dx = (x + \sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{\pi}{2} + 1$.

b) $F(x) = x\int_0^x (1 + \cos t)dt = x^2 + x\sin x$, de unde rezultă că F este o funcție pară.

c) Dacă $0 \le x_1 < x_2$, atunci $0 \le \int_0^{x_1} f(t)dt \le \int_0^{x_2} f(t)dt$ deoarece f este pozitivă, deci F este crescătoare pe $[0,\infty)$. Cum F este o funcție pară, rezultă că F este descrescătoare pe $(-\infty, 0]$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluții

1.a) f este continuă pe D, deci în aceste puncte nu avem asimptote verticale
$f_d(-2) = -\infty, f_s(2) = \infty \Rightarrow x = -2, x = 2$ sunt asimptote verticale.

b) $f''(x) = \dfrac{8x}{\left(4 - x^2\right)^2}$,deci $x = 0$ este punct de inflexiune.

c) Limita cerută este $L = \lim\limits_{x\to\infty} x^a \cdot \ln\left(\dfrac{2 + \frac{1}{x}}{2 - \frac{1}{x}}\right) = \lim\limits_{y\searrow 0} \dfrac{1}{y^a} \cdot \ln\dfrac{2+y}{2-y}$.

$$L = \lim_{y\searrow 0} \frac{1}{y^a} \cdot \frac{\ln\left(1 + \frac{2y}{2-y}\right)}{\frac{2y}{2-y}} \cdot \frac{2y}{2-y} = \lim_{y\searrow 0} \frac{1}{y^{a-1}} = \begin{cases} 0, a < 1 \\ 1, a = 1 \\ \infty, a > 1 \end{cases}.$$

2.a) $I = \int_0^1 \left(-x + 2 - \dfrac{x}{x^2+4}\right)dx = \left(-\dfrac{x^2}{2} + 2x - \dfrac{1}{2}\cdot\ln\left(x^2+4\right)\right)\Big|_0^1 = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{5}{4}$.

b) Avem că $I = \int_1^4 \dfrac{x^2}{\left(x^2+4\right)^2}dx = \dfrac{-1}{2}\cdot\int_1^4 \left(\dfrac{1}{x^2+4}\right)' \cdot x dx$. $I = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{-x}{x^2+4}\Big|_1^4 + \dfrac{1}{4}\cdot\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2}\Big|_1^4 = \dfrac{1}{4}\left(\operatorname{arctg}2 - \operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}\right)$.

c) Cu substituția $f^{-1}(x) = t$, $I = \int_{\frac{4}{5}}^2 f^{-1}(x)dx = -\int_0^1 t\cdot f'(t)dt = -t\cdot f(t)\Big|_0^1 + \int_0^1 f(t)dt = \dfrac{7}{10} - \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{5}{4}$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluții

1. a) f este derivabilă pe $[0,\infty)$, $f'(x) = 2e^x + 6x - 2$. $f'(x) \geq 0, x \geq 0$, cu egalitate dacă $x = 0$, de unde se obține concluzia.

b) Pentru $x < 0$, $f'(x) < 0$, deci 0 este punct de minim global, de unde $f(x) \geq f(0)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

c) Deoarece $f'(x) = 2e^x + 6x - 2$, avem $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2e^x + 6x - 2}{2e^x + 3x^2 - 2x + 5} = 1$.

2. a) $I = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt = \text{arctg}t\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$.

b) Cu substitutia $\frac{1}{t} = y \Rightarrow J = \int_{\frac{1}{x}}^1 f(t)dt = \int_x^1 f\left(\frac{1}{y}\right)\cdot\left(\frac{-1}{y^2}\right)dy = \int_1^x \frac{1}{t^2}\cdot f\left(\frac{1}{t}\right)dt = \int_1^x t^3 f(t)dt$.

c) $A = \int_{\frac{1}{x}}^x f(t)dt = \int_{\frac{1}{x}}^1 f(t)dt + \int_1^x f(t)dt = \int_1^x t^3 f(t)dt + \int_1^x f(t)dt = \int_1^x \left(t^3+1\right)f(t)dt$.

$A = \int_1^x \frac{1}{1+t^2}dt = \text{arctg}x - \text{arctg}1$, deci limita ceruta este $\frac{\pi}{4}$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluții

1. a) Limita cerută este egală cu 1.

b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln f(x)}{x}} = e^0 = 1$.

c) f' este funcție polinomială de grad 3 deci ecuația va avea cel mult 3 rădacini reale. Aplicand T. lui Rolle funcției f pe $[1,3],[3,5],[5,7]$, f' se anulează în cel puțin în 3 puncte.

2.a) Aria cerută este $A = \int_0^1 f_1(x)\,dx = \operatorname{arctg} x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$.

b) $I = \int_0^1 \frac{x}{\left(1+x^2\right)^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(1+x^2\right)'\left(1+x^2\right)^{-2}dx = \frac{-1}{2\left(x^2+1\right)}\Big|_0^1 = \frac{1}{4}$.

c) Șirul care ne interesează se scrie $a_n = n\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2+k^2} = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k^2}{n^2}}$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{4}$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluții

1.a) $f'(x) = \dfrac{3\left(1-x^2\right)\left(1+x^2\right)}{\left(x^4+3\right)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

b) $x = 1$ este punct de maxim, $x = -1$ este punct de minim; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$. Imaginea lui f este $\operatorname{Im} f = \left[\dfrac{-1}{4}, \dfrac{1}{4}\right]$.

c) Dacă $x = y$ avem egalitate. Dacă $x \neq y$, se aplică T.Lagrange, se arată că $f'(c) \leq 1$ și rezultă cerința.

2.a) Avem: $\int_2^3 f(x)dx = \int_2^3 \left(x^2 + x - 2\right)dx = \left(\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} - 2x\right)\Bigg|_2^3 = \dfrac{41}{6}$.

b) Se descompune în fracții simple funcția de integrat și se obține $\int_{-1}^0 \dfrac{x^2-13}{x^2-3x+2}dx =$

$\int_{-1}^0 \left(\dfrac{2}{x-1} - \dfrac{4}{(x-1)^2} - \dfrac{1}{x+2}\right)dx = -3\ln 2 - 2$.

c) $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x.f\left(x^2\right).e^{x^2} = 0 \Leftrightarrow 2xe^{x^2}\left(x^2+2\right)\left(x^2-1\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x \in \{0,1,-1\}$. Doar $x = 0$ este punct de extrem.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluții

1.a) $f' > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ este strict crescatoare, deci f este injectivă.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty, f$ continuă $\Rightarrow f$ surjectivă; deoarece f este bijectivă, are loc cerința problemei.

b) Din $x_n^3 + x_n + 1 = 3 + \frac{1}{n+1} \Rightarrow x_n^3 + x_n - 2 = \frac{1}{n+1}$, deci $|x_n - 1| = \frac{1}{(n+1)(x_n^2 + x_n + 2)} \le \frac{1}{2(n+1)}$, pentru că $x_n > 1$, de unde rezultă concluzia.

c) $n(x_n - 1) = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{x_n^2 + x_n + 2} \to 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.

2.a) $f(x) = \int_0^a \frac{1}{t+1} dt = \ln(t+1)\Big|_0^a = \ln(a+1)$.

b) Cum $\sin t \le 1, \forall t \ge 0$, cu egalitate pentru $t = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{N}$, avem:

$f(x) < \int_0^x \frac{1}{t+1} dt = \ln(t+1)\Big|_0^x = \ln(x+1)$.

c) $f(2\pi) - f(\pi) = \int_\pi^{2\pi} \frac{\sin t}{1+t} dt < 0$, deoarece $t \in (\pi, 2\pi) \Rightarrow \frac{\sin t}{1+t} < 0$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluții

1.a) $f'(x) = 1 - \cos x \geq 0$, cu egalitate doar în punctele $2n\pi, n \in \mathbb{N}$.

b) Funcția f este continuă pe $\mathbb{R}$, deci nu are asimptote verticale. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ deci funcția f nu are asimptote orizontale. Deoarece $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to\infty} \left(f(x) - x\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \left(-\sin x\right)$ și aceasta nu există, funcția nu are asimptotă oblică la ∞. Analog spre $-\infty$.

c) Funcția este derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, deoarece $x \neq 0 \Rightarrow f(x) \neq 0$. Cum $g'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \sqrt[3]{\frac{x - \sin x}{x^3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{6}}$, deducem că g este derivabilă și în $x = 0$.

2.a) f continuă implică faptul că f are primitive.

b) $I = \int_0^1 \left(e^{-x} - e^{-2x}\right)dx = \left(-e^{-x} + \frac{1}{2}e^{-2x}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - e^{-1} + \frac{1}{2}e^{-2}$.

c) $f(t) \geq 0, \forall t \in [0; x], x > 0 \Rightarrow \int_0^x f(t)dt \geq 0$. Din ipoteză rezultă că $e^{-x} \geq -x + 1 \Rightarrow 1 - e^{-x} \leq x \Rightarrow e^{-x} - e^{-2x} \leq xe^{-x}$, deci $\frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x} \leq e^{-x}, x > 0 \Rightarrow \int_0^x f(t)dt \leq \int_0^x e^{-t}dt = 1 - e^{-x} < 1$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluții

1.a) $f'(x)=\frac{\ln x}{x}, f''(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}\geq 0,\ \forall x\in(0,e]$, de unde se obține concluzia.

b) Dreapta $x=0$ este asimptotă verticală. Nu există alte asimptote, pentru că funcția este continuă și $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=0,\ \lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$.

c) $a_{n+1}-a_n=\frac{\ln(n+1)}{n+1}-\left(f(n+1)-f(n)\right)=f'(n+1)-f'(c_n)<0$.

2.a) Aria ceruta este $A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos dx=\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1$.

b) $V=\pi\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}f^2(x)dx=\pi\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 xdx=\frac{\pi}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{4}$.

c) $L=\lim\limits_{n\to\infty}2\sin^2\left(\frac{1}{2\sqrt{n}}\right)\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\cos\frac{k}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{1}{2\sqrt{n}}}{\frac{1}{2\sqrt{n}}}\right)^2\cdot\frac{1}{2n}\sum\limits_{k=1}^{n}\cos\frac{k}{n}=1\cdot\frac{1}{2}\cdot\int_0^1\cos xdx=\frac{1}{2}\sin 1$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Rezolvare

1. **a)** $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \text{arctg}x - \lim\limits_{x\to\infty} \text{arcctg}x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow y = \frac{\pi}{2}$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$.

b) $f'(x) = \frac{2}{1+x^2} > 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ este strict crescătoare.

c) $x_2 = f(0) = -\frac{\pi}{2} \to x_1 > x_2$ şi f este strict crescătoare $\Rightarrow (x_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător. $(x_n)_{n\geq 1}$ este mărginit inferior de $-\frac{3\pi}{2}$, deci conform Teoremei lui Weierstrass este convergent.

2. **a)** g este continuă, deci are primitive, iar derivata oricărei primitive este pozitivă, deci orice primitivă este crescătoare.

b) $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx = f(x)x\Big|_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{12} + \sqrt{1-x^2}\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1.$

c) $\int_0^1 xf(x)dx \leq \int_0^1 \frac{\pi x}{2}dx$, de unde concluzia.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Rezolvare

1. **a)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2-x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1.$

b) $x\in(-1,1)\to f'(x)=\arcsin x+\dfrac{x-1}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+\dfrac{x-1}{\sqrt{(1-x)(1+x)}}.\ \lim\limits_{x\nearrow 1}f'(x)=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow f'(1)=\dfrac{\pi}{2}.$

f nu este derivabilă în -1.

c) $f''(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\dfrac{\sqrt{1-x^2}-(x-1)\cdot\dfrac{(-x)}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{1-x}{(1-x^2)\cdot\sqrt{1-x^2}}\geq 0\Rightarrow f$ este convexă.

2. **a)** $\left.\begin{array}{l}F'(x)=f(x)=\dfrac{x^5-1}{x-1},\ \forall x\neq 1\\ F'(1)=f(1)=5\end{array}\right\}\Rightarrow F'(x)>0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow F$ este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

b) $F(x)=\dfrac{x^5}{5}+\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}+x$ deci $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=-\infty$ şi $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=+\infty$. F fiind continuă, rezultă că F este surjectivă, deci conform punctului **a**) este bijectivă.

c) $\int_0^a F^{-1}(x)dx=\int_0^1 tf(t)dt=\left(\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{t^3}{3}+\dfrac{t^4}{4}+\dfrac{t^5}{5}+\dfrac{t^6}{6}\right)\Bigg|_0^1=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{29}{20}.$

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Rezolvare

1. **a**) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=0$.

b) Funcția este continuă în punctele care nu sunt numere întregi, iar într-un punct $n\in\mathbb{Z}$ avem $\lim\limits_{\substack{x\to n\\ x<n}} f(x)=0$, $\lim\limits_{\substack{x\to n\\ x>n}} f(x)=0$ şi $f(x)=0$. Deci f este continuă pe intervalul $[0,3]$.

c) Explicitând funcția observăm că 1 şi 2 sunt puncte unghiulare şi f este derivabilă pe $[0,3]\setminus\{1,2\}$.

2. **a**) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2-\sin x}dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2-\sin x)'}{2-\sin x}dx = -\ln(2-\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \ln 2$.

b) $F'(x)=f(x)$ şi $f(x)>0$ deoarece $2-\sin x\geq 1$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Deci F este strict crescătoare.

c) $\frac{1}{2-\sin t}\geq\frac{1}{3}\Rightarrow\int_0^x f(t)dt\geq\frac{t}{3}\Big|_0^x=\frac{x}{3}\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}=+\infty$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Rezolvare

1. **a)** $f_n\left(x\right)=\dfrac{x^{2n+1}+1}{x+1}=\dfrac{1}{x+1}g\left(x\right),\ \forall x\neq -1\Rightarrow f_n{}'(x)=\dfrac{g_n{}'(x)}{x+1}-\dfrac{g_n\left(x\right)}{\left(x+1\right)^2}$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'\left(\dfrac{1}{2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{\left(2n+1\right)\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2n}}{\dfrac{3}{2}}-\dfrac{\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2n+1}+1}{\dfrac{9}{4}}\right]=-\dfrac{4}{9}$.

c) $f_n'(x)=\dfrac{h(x)}{(x+1)^2}$, cu $h(x)=(x+1)g_n'(x)-g_n(x)=2nx^{2n+1}+(2n+1)x^{2n}-1$. Deoarece h' este negativă pe $(-1,0)$ şi pozitivă pe $(-\infty,-1)\cup(0,\infty)$, iar $h(-1)=0,\ h(0)=-1,\ \lim\limits_{x\to\infty}h(x)>0$ reiese că există exact un punct $a\in(0,\infty)$, astfel încât f este strict descrescătoare pe $(-\infty,a]$ şi strict crescătoare pe $[a,\infty)$.

2. **a)** $\mathrm{I}_2=\dfrac{1}{3}\displaystyle\int_0^1\dfrac{\left(x^3+1\right)'}{x^3+1}dx=\dfrac{1}{3}\cdot\ln 2$.

b) $\mathrm{I}_{n+1}-\mathrm{I}_n=\displaystyle\int_0^1\dfrac{x^n\left(x-1\right)}{1+x^3}dx<0$.

c) $0\le \mathrm{I}_n\le\displaystyle\int_0^1 x^n dx=\dfrac{1}{n+1}$ deci $\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{I}_n=0$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Rezolvare

1. **a)** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{6}-\frac{\sin x}{x^3}\right) = +\infty$.

b) $f'(x) = 1-\frac{x^2}{2}-\cos x$; $\quad f''(x) = -x+\sin x$.

c) $f'''(x) = -1+\cos x \le 0 \Rightarrow f''$ este strict descrescătoare $\Rightarrow f''(x) \le f''(0)$, $\forall x \ge 0 \to f''(x) \le 0 \to$
$\to f'$ este strict descrescătoare $\to f'(x) \le f'(0)$, $\forall x \ge 0$.
$f'(x) \le 0 \to f$ este strict descrescătoare pe intervalul $[0,+\infty)$ şi $f(0)=0 \to f(x) \le 0$, $\forall x \ge 0$.

2. **a)** $F'(x) = \frac{1}{1+x^2}+\frac{x}{x^2+1} = f(x)$.

b) $\int_0^1 f(x)dx = F(x)|_0^1 = \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$.

c) $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+k^2} = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ reprezintă sume Riemann asociate funcţiei f, diviziunilor $D_n = \left(0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},...,\frac{n}{n}\right)$ şi punctelor intermediare $X_n = \left(\frac{1}{n},\frac{2}{n},...,\frac{n}{n}\right)$. Deoarece funcţia este integrabilă, fiind continuă, iar şirul normelor diviziunilor tinde la 0, şirul $(a_n)_n$ este convergent.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Rezolvare

1. **a)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-1=m$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{|x^2-x|}+x\right)\frac{1}{2}=n\Rightarrow y=-x+\frac{1}{2}$ este asimptotă oblică spre $-\infty$.

b) f este derivabilă pe intervalul $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ şi 0 şi 1 sunt puncte de întoarcere ale graficului.

c) $f'(x)=\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}$; $x\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$ şi $f'(x)=\frac{1-2x}{2\sqrt{x^2-x}}$; $x\in(0,1)$. Pentru $x\in(-\infty,0)$, f este strict descrescătoare, iar pentru $x\in(1,+\infty)$, f este strict crescătoare. $f'\left(\frac{1}{2}\right)=0$, deci 0 şi 1 sunt puncte de minim (şi de întoarcere), iar $\frac{1}{2}$ este punct de maxim.

2. **a)** $I_2=\int_0^1\frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx=x\Big|_0^1-\operatorname{arctg}x\Big|_0^1=1-\frac{\pi}{4}$.

b) $I_{n+2}+I_n=\int_0^1\frac{x^n(x^2+1)}{x^2+1}dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1=\frac{1}{n+1}$.

c) Din (**b**) $\Rightarrow\frac{1}{2(n+1)}\le I_n\le\frac{1}{2(n-1)}$, folosind monotonia lui $(I_n)_{n\ge1}$. Conform criteriului cleştelui avem $\lim\limits_{n\to\infty}nI_n=\frac{1}{2}$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Rezolvare

1. **a)** $f'(x)=\dfrac{1}{(x+2)^2+1}-\dfrac{1}{x^2+1}$.

b) $x+2>x\Rightarrow \operatorname{arctg}(x+2)>\operatorname{arctg}x\Rightarrow f(x)>0$.

f este strict crescătoare pe intervalul $(-\infty,-1)$ şi strict descrescător are pe intervalul $[-1,\infty)$ deci -1 este maxim global. $f(-1)=\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}(-1)=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$.

c) Se arată că $g'(x)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

2. **a)** $\displaystyle\int_1^2\frac{x^2-1+\frac{1}{1+x^2}}{x}dx=\frac{x^2}{2}\Big|_1^2-\ln x\Big|_1^2-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\Big|_1^2=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\ln 5+\frac{1}{2}\ln 2$.

b) $f(x)\geq\dfrac{x^3}{3}-x-\dfrac{\pi}{2}\to\int_0^x f(t)dt\geq\dfrac{x^4}{12}-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{\pi}{2}\cdot x$. Deci $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\int_0^x f(t)dt}{x^3}=+\infty$.

c) $g(x)\geq f(x),\ \forall x\in[0,1)\Rightarrow \mathrm{A}=\int_0^1\left(g(x)-f(x)\right)dx=\left(\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^4}{12}\right)\Big|_0^1=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{12}=\dfrac{5}{12}$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Rezolvare

1. **a)** $f'(x) = -\frac{1}{2x\sqrt{x}} \Rightarrow f''(x) = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x^2\sqrt{x}} > 0 \Rightarrow f'$ este strict crescătoare.

b) Se poate demonstra prin calcul sau aplicând Teorema lui Lagrange.

c) Se adună relațiile de la (**b**) de la $k=1$ până la $k=n$ și astfel se obține marginea șirului $(a_n)_{n\geq 1}$. Șirul este evident crescător, deci este convergent conform Teoremei lui Weierstrass.

2. **a)** $f_1(x) = \int_0^1 t\cdot\operatorname{arctg} t = \frac{t^2}{2}\cdot\operatorname{arctg} t\Big|_0^x - \frac{1}{2}\int_0^x \frac{t^2+1-1}{t^2+1}dx = \frac{x^2}{2}\cdot\operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\cdot\operatorname{arctg} x$.

b) $f_n(1) = \int_0^1 t^n\cdot\operatorname{arctg} t\,dt \leq \frac{\pi}{4}\cdot\int_0^1 t^n dt = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{n+1}$.

c) $f_n(1) = \int_0^1 \left(\frac{t^{n+1}}{n+1}\right)'\cdot\operatorname{arctg} t\,dt = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{t^2+1}dt$. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\cdot\int_0^1\frac{t^{n+1}}{t^2+1}dt = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n\cdot f_n(1) = \frac{\pi}{4}$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Rezolvare

1. **a)** $f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x-\frac{3}{2}} + \frac{1}{x+\frac{1}{2}} > 0,\ \forall x > 0.$

b) Avem $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ și cum f este strict crescătoare, rezultă că $f(x) < 0,\ \forall x > 0.$

c) $a_{n+1} - a_n = f(n)$ și, conform **b)**, $(a_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător.

2. **a)** $f_3'(x) = x^3 \arcsin x.$

b) $f_1\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} t\cdot \arcsin t dt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\sin x)\cdot x\cos x dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} x\sin 2x dx = -\frac{x}{4}\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} + \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 2x dx = -\frac{\pi}{48} + \frac{\sqrt{3}}{16}.$

c) Deoarece f_2 este derivabilă, deci continuă, limita cerută este $f_2(1) = \int_0^1 t^2 \arcsin t dt = \frac{\pi}{6}$, deoarece

$\int_0^x t^2 \arcsin t dt = \frac{x^3}{3}\arcsin x - \frac{1}{3}\int_0^x \frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{x^3}{3}\arcsin x + \frac{1}{3}\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{9}\sqrt{\left(1-x^2\right)^3} + \frac{1}{9}.$

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Rezolvare

1. **a)** $f'(x)=1-\frac{e^x}{e^x+1}$, $f''(x)=\frac{-e^x}{\left(e^x+1\right)^2}<0\Rightarrow f'$ este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$.

b) Pentru $a\le 0$ este evident, iar pentru $a>0$, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^{-a}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{-ax^{-a-1}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-x^{a+1}}{a\left(e^x+1\right)}=0$.

c) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\ln 1=0$. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=1=m$. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-mx\right)=0$, deci $y=0$ este o asimptotă orizontală la $+\infty$ și $y=x$ este o asimptotă oblică la $-\infty$. Asimptotele verticale nu există, deoarece funcția este continuă pe $\mathbb{R}$.

2. **a)** $I_1=\int_0^2\left(2x-x^2\right)dx=x^2\Big|_0^2-\frac{x^3}{3}\Big|_0^2=\frac{4}{3}$

b) $\mathrm{I}_n=\int_0^2\left(2x-x^2\right)^n(x-1)'\,dx=\left(2x-x^2\right)^n(x-1)\Big|_0^2-n\int_0^2\left(2x-x^2\right)^{n-1}(2-2x)(x-1)dx=$

$=-2n\int_0^2\left(2x-x^2\right)^{n-1}\left(-x^2+2x-1\right)dx=-2n\int_0^2\left(2x-x^2\right)^n dx+2n\int_0^2\left(2x-x^2\right)^{n-1}\Rightarrow(2n+1)\mathrm{I}_n=2n\mathrm{I}_{n-1}$.

c) Avem $I_n>0,\forall n\in\mathbb{N}^*$ și din punctul **b)** $I_{n-1}=I_n+\frac{1}{2n}I_n>I_n$, $\forall n\ge 2$ (1). Astfel șirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tinde $l\ge 0$, iar $I_n\ge l$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$. Adunând relațiile (1) avem $I_1=\frac{1}{4}I_2+\frac{1}{6}I_3+...+\frac{1}{2n}I_n\ge\frac{l}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}\right)$, de unde $l\le\frac{2I_1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}}$. Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}\right)=\infty$, deducem că $l=0$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Rezolvare

1. **a)** $f'(x)=\dfrac{4}{\left(\sqrt{3}-x\right)^2}>0,\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\sqrt{3}.$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} f\left(x\right)=-\sqrt{3}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right)=-\sqrt{3}\Rightarrow y=-\sqrt{3}$ este asimptotă orizontală la $\pm\infty$. $x=\sqrt{3}$ este asimptotă verticală.

c) Avem $a_{3n}=2$ și $a_{3n+3}=-2,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$, deci șirurile $\left(a_{3n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ și $\left(a_{3n+3}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ au limite diferite.

2. **a)** $\mathrm{F}'\left(x\right)=f\left(x\right)\Rightarrow \mathrm{F}''\left(x\right)=e^{-x^2}\cdot\left(-2x\right)\Rightarrow 0$ este punct de inflexiune.

b) $\int_0^1 xf\left(x\right)dx=-\dfrac{1}{2}\int_0^1 e^{-x^2}\left(-x^2\right)'dx=\dfrac{1-e^{-1}}{2}.$

c) $\int_0^1 \mathrm{F}\left(x\right)\left(x\right)'dx=\mathrm{F}\left(x\right)\cdot x\Big|_0^1-\int_0^1 f\left(x\right)x=-\dfrac{1-e^{-1}}{2}.$

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Rezolvare

1. **a)** $f'(x) = 3\left(x^2 - 1 + \frac{1}{1+x^2}\right) = 3 \cdot \frac{x^4}{1+x^2} > 0$.

b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ şi f este continuă, deci este surjectivă. Conform (**a**) f este injectivă.

c) Singura valoare pentru a este 3 şi limita este 1.

2. **a)** $\mathrm{I}_1 = \int_0^1 xe^x dx = xe^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = 1$.

b) $\mathrm{I}_{n+1} - \mathrm{I}_n = \int_0^1 e^x \left(x^{n+1} - x^n\right) dx \le 0$, deci $\left(\mathrm{I}_n\right)_{n\ge1}$ este descrescător şi mărginit inferior de 0.

c) $\mathrm{I}_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1}\left(e^x\right)' dx = e - \mathrm{I}_n - n\,\mathrm{I}_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n\,\mathrm{I}_n = e$, deoarece $0 \le I_n \le e\int_0^1 x^n dx = \frac{e}{n+1} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Rezolvare

1. **a)** $f'(x) = 2 + \frac{2x+1}{x^2+x+1} = \frac{2x^2+4x+3}{x^2+x+1} > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, f este continuă pe $\mathbb{R}$, deci f este surjectivă, iar conform punctului **a)** este injectivă.

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$ dar $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x) - 2x\right) = +\infty$.

2. **a)** $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 x(1-x)\,dx = \frac{1}{6}$.

b) f este continuă pe $\mathbb{R}$ (în fiecare număr punct întreg $l_s = l_d = f(a) = 0$).

c) Funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(a) = \int_a^{a+1} f(x)dx$ este derivabilă şi $g'(a) = f(a+1) - f(a) = 0$, deci g este constantă.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Rezolvare

1. **a)** $f'(x) = \ln x + 1$. Pe intervalul $\left(0, \frac{1}{e}\right]$, f este strict descrescătoare, iar intervalul $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$, f este strict crescătoare.

b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = 0$. Deci f nu are asimptote.

c) Din $x_{n+1} = x_n^{x_n}$ rezultă inductiv că $x_n \in (0,1)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. De aici obținem și $x_{n+1} > x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2. **a)** $I_2 = \int_0^1 \frac{x^2}{4x+5}dx = \frac{1}{8} - \frac{5}{16} + \frac{25}{64}\cdot \ln\frac{9}{5} = -\frac{3}{16} + \frac{25}{64}\cdot \ln\frac{9}{5}$.

b) $4I_{n+1} + 5I_n = \int_0^1 \frac{x^n(4x+5)}{4x+5}dx = \frac{1}{n+1}$.

c) $I_{n+1} - I_n \le 0 \to \frac{1}{9(n+1)} \le I_n \le \frac{1}{9n} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} nI_n = \frac{1}{9}$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Rezolvare

1. **a)** $f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}=x\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2}}-\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)>0,\ \forall x<0.$

b) $f''(x)=\dfrac{2}{\left(x^2+2\right)\sqrt{\left(x^2+2\right)}}-\dfrac{1}{\left(x^2+1\right)\sqrt{\left(x^2+1\right)}}=\dfrac{2t\cdot\sqrt{t}-(t+1)\sqrt{t+1}}{(t+1)\cdot t\cdot\sqrt{t(t+1)}}$, unde $t=x^2+1$.

Se arată că există un singur t pentru care numărătorul este 0 şi $t>1$, deci două valori pentru x.

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0\Rightarrow y=0$ este asimptotă la $-\infty$.

2. **a)** $\mathrm{F}_1(\pi)=\int_0^{\pi} x\sin x dx=-x\cos x\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\cos x=\pi$ (se integrează prin părţi).

b) $\mathrm{F}_{n+1}(1)-\mathrm{F}_n(1)=\int_0^1 t\cdot\sin^2 t\cdot(\sin t-1)dt<0.$

c) Deoarece $\sin t\le t$, $0\le \mathrm{F}_n(1)\le\int_0^1 t^{n+1}dt=\dfrac{1}{n+2}\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{F}_n(1)=0.$

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

rezolvare

1.a) $f'(x)=\frac{1}{1+x}-1=\frac{-x}{1+x}<0,\forall x>0$.

b) Avem $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\frac{\ln(1+x)}{x}-1\right)=\infty(0-1)=-\infty, \lim\limits_{x\to 0} f(x)=\ln 1=0$. În plus, f este continuă, deci are proprietatea lui Darboux. Astfel, mulțimea valorilor funcției este $(-\infty,0)$.

c) Funcția este continuă, deci nu are asimptote verticale în punctele domeniului de definiție. În 0, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\ln 1=0$, deci nici aici nu există asimptotă verticală. Din **a)** rezultă că nu există asimptotă orizontală. În sfârşit, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=-1$ şi $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)+x)=\lim\limits_{x\to\infty}\ln(1+x)=\infty$, deci nu există asimptotă oblică spre ∞.

2.a) $\int_0^1 f(x)\,dx = x\operatorname{arctg} x\,\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x}{x^2+1}dx=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\,\Big|_0^1=\frac{\pi-2\ln 2}{4}$.

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_1^x f(\ln t)dt=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(\ln x)}{1}=\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{arctg}(\ln x)=\frac{\pi}{2}$, folosind regula lui l'Hospital pentru cazul $\frac{\infty}{\infty}$ şi faptul că funcția $g:(0,\infty)\to\mathbb{R}, g(x)=\int_1^x f(\ln t)dt$ are derivata $g'(x)=f(\ln x)$.

c) $s_n=\frac{1}{n}\left(f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+f\left(\frac{3}{n}\right)+\ldots+f\left(\frac{n}{n}\right)\right)$ este sumă Riemann ataşată funcției f, intervalului $[0,1]$, diviziunii $D_n=\left(0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\ldots,\frac{n}{n}\right)$ şi punctelor intermediare $X_n=\left(\frac{1}{n},\frac{2}{n},\ldots,\frac{n}{n}\right)$.

Astfel, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n=\int_0^1 f(x)dx=\frac{\pi-2\ln 2}{4}$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

rezolvare

1.a) $f'(x) = \operatorname{arctg} x + \dfrac{x}{1+x^2}, f''(x) = \dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = \dfrac{2}{(1+x^2)^2} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\dfrac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x) + \dfrac{\pi}{2}x\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = -1$, folosind regula lui l'Hospital pentru cazul $\dfrac{0}{0}$. Obținem $y = -\dfrac{\pi}{2}x - 1$, ecuația asimptotei oblice spre $-\infty$.

c) Avem $x_2 = \dfrac{\pi}{4} < 1 = x_1$ și demonstrăm inductiv că șirul este strict descrescător. Cum el este și cu termeni pozitivi, rezultă că este convergent.

2.a) $\int_0^1 (x^2 - 2x^3 + x^4)dx = \dfrac{1}{30}$.

b) $I_n = \dfrac{2x-1}{2}(x-x^2)^n \Big|_0^1 + \int_0^1 \dfrac{n}{2}(2x-1)^2(x-x^2)^{n-1}dx = \dfrac{n}{2}\int_0^1 \left((x-x^2)^{n-1} - 4(x-x^2)^n\right)dx = \dfrac{n}{2}I_{n-1} - 2nI_n$.

c) Din **b)**, $I_n < \dfrac{1}{4}I_{n-1}$. De aici rezultă inductiv $I_n < \dfrac{1}{4^n}I_0 = \dfrac{1}{4^n}$. Cum $I_n > 0$, limita cerută este 0.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

rezolvare

1.a) $f'(x) = 1 - e^{-x} > 0, \forall x > 0$.

b) Derivata este pozitivă pe $[0,\infty)$ și negativă pe $(-\infty,0]$, deci avem doar punctul de extrem 0.

c) Din $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$. Rezultă: dacă $m \in (1;\infty) \Rightarrow$ ecuația are 2 soluții reale diferite; dacă $m = 1 \Rightarrow$ ecuația are doar o soluție $x = 0$; dacă $m \in (-\infty;1) \Rightarrow$ ecuația are nu are soluție.

2.a) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{t}{1+t^2}dt = \frac{1}{2}\ln(1+t^2)\Big|_1^{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\ln 2$.

b) Dacă F este o primitivă a funcției $h(t) = \frac{t}{1+t^2}$, atunci $f(x) = F(\operatorname{tg} x) - F(1)$, deci $f'(x) = (1+\operatorname{tg}^2 x)F'(\operatorname{tg} x) = \operatorname{tg} x$.

c) Raționând ca mai sus, $f'(x) + g'(x) = \operatorname{tg} x - \frac{1}{\operatorname{ctg} x} = 0$. Rezultă $f(x) + g(x) = \text{constant} = 0$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

rezolvare

1.a) $f'(x)=\dfrac{a\sqrt{x^2+x+1}-(ax+b)\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}}{x^2+x+1}=\dfrac{(a-2b)x+2a-b}{2(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$.

b) Trebuie ca $f'(x)>0$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$, ceea ce se întâmplă dacă şi numai dacă funcţia liniară de la numărătorul derivatei este constantă şi pozitivă, adică $a=2b>0$.

c) Conform **b)**, în acest caz funcţia este strict crescătoare. Cum funcţia este şi continuă, iar $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=2,\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-2$, mulţimea valorilor funcţiei este $(-2,2)$.

2.a) $f'(x)=e^{\arcsin x}>0,\forall x\in[-1,1]$.

b) Cu schimbarea de variabilă $t=\sin u, dt=\cos u du$ obţinem $f(x)=\int_0^{\arcsin x} e^u\cos u du$.

c) $f(1)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^u\cos u du=e^u\sin u\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^u\sin u du=e^{\frac{\pi}{2}}+e^u\cos u\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^u\cos u du=e^{\frac{\pi}{2}}-1-f(1)$.

Rezultă $f(1)=\dfrac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}}-\dfrac{1}{2}$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

rezolvare

1.a) $f'(x)=\dfrac{(2x+a)\sqrt{x^2+1}-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}(x^2+ax+5)}{x^2+1}=\dfrac{x^3-3x+a}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1,\ \lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-x\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5}{\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x}{\sqrt{x^2+1}(x+\sqrt{x^2+1})}+0=0$,

deci avem asimptota oblică spre ∞ de ecuație $y=x$.

c) Trebuie ca ecuația $x^3-3x=-a$ să aibă trei soluții. Pentru funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=x^3-3x$ avem

x	$-\infty$		-1		1		∞
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	∞

Astfel, ecuația $g(x)=-a$ are trei soluții pentru $a\in(-2,2)$. Se verifică imediat, folosind semnul lui f', că, în acest caz, funcția f are trei puncte de extrem.

2.a) $\int_{-1}^{1}x\sqrt{1-x^2}\,dx=-\dfrac{1}{3}\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-1}^{1}=0$ (sau observăm că este integrala unei funcții impare).

b) $V=\pi\int_{-1}^{1}f^2(x)dx=\pi\left(x-\dfrac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-1}^{1}=\dfrac{4\pi}{3}$.

c) $0\le\int_0^1 x^n f\left(x\right)dx\le\int_0^1 x^n dx=\dfrac{1}{n+1}$, deci limita cerută, conform teoremei cleștelui, este 0.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

rezolvare

1.a) $f'_d(1)=\lim\limits_{x\searrow 1} f'(x)=\lim\limits_{x\searrow 1}\frac{2-x}{e^x}=\frac{1}{e}$ și $f'_s(1)=\lim\limits_{x\nearrow 1} f'(x)=\lim\limits_{x\nearrow 1}\frac{x-2}{e^x}=-\frac{1}{e}$.

b)

x	$-\infty$		1		2		∞
$f'(x)$	$-$	$-$	$\mid$	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	∞	$\searrow$	0	$\nearrow$	$1/e^2$	$\searrow$	0

Pentru $m<0$ nu avem soluții, pentru $m=0$ sau $m>1/e^2$ avem o soluție, pentru $m=1/e^2$ avem două soluții, iar pentru $0<m<1/e^2$ avem trei soluții.

c) $\frac{1}{e^2}+\frac{2}{e^3}+\ldots+\frac{n-1}{e^n}=\left(\frac{1}{e^2}+\frac{1}{e^3}+\ldots+\frac{1}{e^n}\right)+\left(\frac{1}{e^3}+\frac{1}{e^4}+\ldots+\frac{1}{e^n}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{e^{n-1}}+\frac{1}{e^n}\right)+\frac{1}{e^n}=$

$$=\frac{1}{e^2}\frac{1-\frac{1}{e^{n-1}}}{1-\frac{1}{e}}+\frac{1}{e^3}\frac{1-\frac{1}{e^{n-2}}}{1-\frac{1}{e}}+\ldots+\frac{1}{e^{n-1}}\frac{1-\frac{1}{e^2}}{1-\frac{1}{e}}+\frac{1}{e^n}\frac{1-\frac{1}{e}}{1-\frac{1}{e}}=\frac{1}{1-\frac{1}{e}}\left(\frac{1}{e^2}+\frac{1}{e^3}+\ldots+\frac{1}{e^n}\right)-\frac{n}{1-\frac{1}{e}}\frac{1}{e^n}\to\frac{1}{(e-1)^2}.$$

2.a) $F'(x)=(2a+c)x\cos x-ax^2\sin x+(c-b)\sin x\Rightarrow a=-1,\ b=c=2$.

b) $\int\limits_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{4x^2}\sin\frac{1}{2x}=\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2x}\Bigg|_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

c) Observăm că $f(x)<g(x),\ \forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, adică $x\sin x+x<\pi,\ \forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Avem $A=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(g(x)-f(x)\right)dx=$

$$=\left(\frac{\pi x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+x^2\cos x-2x\sin x-2\cos x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^3}{12}-\pi+2.$$

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

rezolvare

1.a) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$

b) Dreapta $y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$.

c) Deoarece arctg este funcție strict crescătoare, funcția dată are aceleaşi puncte de extrem local ca şi funcția $g:\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}\to\mathbb{R}, g(x)=\frac{1}{x^2-1}$, adică $x=0$.

2.a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = \left(\sin x - x + \frac{x^3}{6}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi^3}{48}$.

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}\int_0^x f(t)\,dt = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x - x + \frac{x^3}{6}}{x^2} = +\infty$.

c) $f'(x) = -\sin x + x$; $f''(x) = 1-\cos x \Rightarrow f$ este strict crescătoare pe intervalul $[0,+\infty) \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos x^2 - 1 + \frac{x^4}{2} \geq 0 \Rightarrow \cos x^2 \geq 1 - \frac{x^4}{2} \Rightarrow \int_0^1 \cos\left(x^2\right)dx \geq \frac{9}{10}$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

rezolvare

1.a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \arcsin 0 = 0$.

b) Funcția este derivabilă pentru $-1 < \frac{2x}{1+x^2} < 1$, adică $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$. În punctele ± 1, derivatele laterale sunt diferite, deci funcția nu este derivabilă.

c) Deoarece arcsin este funcție strict crescătoare, punctele de extrem ale funcției f coincid cu cele ale funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x) = \frac{2x}{x^2+1}$. Acestea sunt ± 1.

2.a) $\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx = -\frac{1}{3}\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$.

b) $V = \pi\int_0^1 (1-x^2)\,dx = \frac{2\pi}{3}$.

c) $a_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ sunt sume Riemann pentru funcția f, diviziunile $D_n = \left(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n}{n}\right)$ și punctele intermediare $X_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n}{n}\right)$. Deoarece funcția este integrabilă și șirul normelor diviziunilor tinde la 0, șirul sumelor Riemann este convergent.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

rezolvare

1. a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$, deci avem asimptota orizontală $y=0$ spre $+\infty$.

b) $f'(x)=\dfrac{3x^2-12}{x^4}\Rightarrow$ funcția este strict descrescătoare pe $[1,2]$ şi strict crescătoare pe $[2,\infty)$. Mulțimea valorilor funcției este $[f(2),f(1)]=[-1,1]$.

c) Funcția este derivabilă pe $(2,\infty)$, deoarece, pe acest interval, $-1<f(x)<0$, f este derivabilă şi arccos este derivabilă. În punctul 2, $g'(2)=\lim\limits_{x\searrow 2} g'(x)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. În concluzie, funcția este derivabilă pe $[2,\infty)$.

2. a) $F'(x)=f(x)$.

b) $\pi\int_0^1 f^2(x)dx=\pi\left(\int_1^2\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^2+1}\right)dx\right)=\pi\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}2\right)$.

c) $F(x)<0$, deci $A=-\int_1^2 F(x)dx=-xF(x)\Big|_1^2+\int_1^2 xf(x)dx=F(1)-2F(2)+\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\Big|_1^2=$

$=\ln\dfrac{\left(11+5\sqrt{5}\right)\left(3-2\sqrt{2}\right)}{2}$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Rezolvare

1.a) $|f(x)| \le x \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

b) $f'(x) = \sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1 \Rightarrow y = 1$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$.

2.a) $I_2 = \int_{-1}^{1}(1-2x^2+x^4)dx = \frac{16}{15}$.

b) $I_n - I_{n+1} = \int_{-1}^{1} x^2(1-x^2)^n dx = -x\frac{(1-x^2)^{n+1}}{2(n+1)}\Big|_{-1}^{1} + \frac{1}{2(n+1)}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{n+1}dx = \frac{1}{2(n+1)}I_{n+1}$.

c) $a_n = \sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k C_n^k}{2k+1} = \int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx = I_n$, iar şirul $(I_n)_n$ tinde descrescător către 0.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1.b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-f(x)\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x=\frac{1}{e}$.

b) $f'(x)=\frac{x^2-1}{x^2}$. Deoarece $f'(x)>0,\forall x\in[1,\infty)$, rezultă că funcția f este strict crescătoare.

c) Funcția f este injectivă fiind strict crescătoare. Cum f este continuă pe $[1,\infty)$, $f(1)=1$ și $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$, iar f este strict crescătoare, rezultă că imaginea funcției f este $[1,\infty)$, deci f este surjectivă.

2. a) Funcția F trebuie să fie derivabilă. Din continuitatea în 1 rezultă $a+b=1$, iar din derivabilitatea în 1 rezultă $a=0$. Deci $a=0$ și $b=1$.

b) Utilizăm schimbarea de variabilă $\ln x=t$. Rezultă $\int_1^e\frac{1}{xF(x)}dx=\int_1^e\frac{1}{x\left(1+\ln^2 x\right)}dx=\int_0^1\frac{1}{1+t^2}dt$.

Dar $\int_0^1\frac{1}{1+t^2}dt=arctgt\,|_0^1=\frac{\pi}{4}$, deci $\int_1^e\frac{1}{xF(x)}dx=\frac{\pi}{4}$.

c) $\int_1^\pi h(x)h''(x)dx=\int_1^\pi h(x)\left(h'(x)\right)'dx=h(x)h'(x)|_1^\pi-\int_1^\pi\left(h'(x)h'(x)\right)dx$. Deoarece $h(1)=h(\pi)=0$ rezultă $h(x)h'(x)|_1^\pi=0$. Deci $\int_a^b h(x)h''(x)dx=-\int_a^b\left(h'(x)\right)^2dx\le 0$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1.a) f este continuă pe $(0,1]$ deoarece, pe acest interval, se obține prin operații cu funcții continue. Cum $\left|x\sin\frac{\pi}{x}\right| \le |x|$ și $\lim\limits_{x\to 0}|x| = 0$, rezultă $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{\pi}{x} = 0$. Deci $\lim\limits_{x\searrow 0} f(x) = 0 = f(0)$. Prin urmare f este continuă și în 0. Rezultă că f este continuă pe $[0,1]$.

b) f este derivabilă pe $(0,1]$ deoarece, pe acest interval, este produs de funcții derivabile.

Întrucât limita $\lim\limits_{x\searrow 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\searrow 0}\sin\frac{\pi}{x}$ nu există, f nu este derivabilă în 0.

c) Ecuația se scrie $g(x) = 0$, unde $g:\left[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right]\to\mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - \cos\frac{\pi}{x}$. Cum g este continuă, $g\left(\frac{1}{n+1}\right) = (-1)^{n+2}$ și $g\left(\frac{1}{n}\right) = (-1)^{n+1}$, rezultă că funcția g se anulează în cel puțin un punct din $\left(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right)$.

2.a) $\int_0^1 f(\sqrt{x})dx = \int_0^1 \ln(1+x)dx = x\ln(1+x)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x}dx = \ln 2 - x\Big|_0^1 + \ln(1+x)\Big|_0^1 = 2\ln 2 - 1.$

b) $\int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 x\,\mathrm{arctg}x\,dx = \int_0^1\left(\frac{x^2}{2}\right)'\mathrm{arctg}x\,dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}(x - \mathrm{arctg}x)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$

c) Considerăm funcția $\varphi = f - g$. Atunci: $\varphi'(x) = \frac{x}{1+x^2} - \mathrm{arctg}x$ și $\varphi''(x) = -\frac{2x^2}{(1+x^2)^2}$.

Deoarece $\varphi''(x) \le 0$, rezultă că φ' este descrescătoare, deci $x \ge 0 \Rightarrow \varphi'(x) \le \varphi'(0) \Rightarrow \varphi'(x) \le 0$.

Prin urmare φ este descrescătoare, de unde $x \ge 0 \Rightarrow \varphi(x) \le \varphi(0) \Rightarrow \varphi(x) \le 0 \Rightarrow f(x) \le g(x)$.

Ca atare aria căutată este $A = \int_0^1 (g(x) - f(x))dx = -\frac{\pi}{4} - \ln 2 + \frac{3}{2}$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1. a) Avem $f'(x)=3x^2-3$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow x\in\{-1,1\}$ și următorul tabel de variație al funcției *f*:

x		-1		1	
$f'(x)$	$+++$	0	$---$	0	$+++$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

Din tabelul de variație rezultă că -1 și 1 sunt punctele de extrem ale funcției *f*.

b) Deoarece f este continuă, $f(1)=-2<m$ și $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$, rezultă că ecuația are soluție în mulțimea $(1,\infty)$. Cum *f* este strict crescătoare pe $(1,\infty)$, rezultă că f este injectivă pe $(1,\infty)$, deci soluția este unică.

c) Deoarece $g(x)=f^2(x)=x^6-6x^4+9x^2$, rezultă $g'(x)=6x^5-24x^3+18x$, de unde $g''(x)=30x^4-72x^2+18$.

Pentru a rezolva ecuația $g''(x)=0$, notăm $x^2=t$ și rezultă $6(5t^2-12t+3)=0$ care are soluțiile $t_{1,2}=\dfrac{12\pm\sqrt{84}}{10}$. Deci ecuația $g''(x)=0$ are soluțiile $\pm\sqrt{t_1},\pm\sqrt{t_2}$. Ținând cont de semnul funcției g'', rezultă că *g* are patru puncte de inflexiune.

2.a) $\lim\limits_{x\nearrow 0} f(x)=\lim\limits_{x\searrow 0} f(x)=f(0)\Rightarrow f$ continuă în 0. Rezultă *f* este continuă pe $\mathbb{R}$. *f* continuă pe $\mathbb{R}\Rightarrow f$ admite primitive pe $\mathbb{R}$.

b) $\int xe^x dx=e^x(x-1)+C$, iar $\int \sin x dx=-\cos x+C$.

Deci o primitivă a funcției f va fi de forma: $F(x)=\begin{cases} e^x(x-1)+c_1, & x\le 0\\ -\cos x+c_2, & x>0\end{cases}$.

Din condiția de continuitate a lui *F* rezultă $c_1=c_2=F(0)+1=0$.

c) Deoarece *F* este o primitivă a lui *f*, rezultă $\int_0^x f(t)dt=F(x)-F(0)$, deci limita de calculat este $\lim\limits_{x\searrow 0}\dfrac{F(x)-F(0)}{x^2}$. Cu regula lui l´Hôspital: $\lim\limits_{x\searrow 0}\dfrac{F(x)-F(0)}{x^2}=\lim\limits_{x\searrow 0}\dfrac{F'(x)}{2x}$. Apoi $\lim\limits_{x\searrow 0}\dfrac{F'(x)}{2x}=\lim\limits_{x\searrow 0}\dfrac{f(x)}{2x}=\lim\limits_{x\searrow 0}\dfrac{\sin x}{2x}=\dfrac{1}{2}$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1.a) $f'(x)=1 \Leftrightarrow e^x-1=1 \Leftrightarrow x=\ln 2$.

b) f' este negativă pe $(-\infty,0)$ și pozitivă pe $(0,\infty)$, deci valoarea minimă este $f(0)=1$.

c) $f_d'(0)=\lim\limits_{x\searrow 0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\searrow 0}\sqrt{\frac{e^x-1-x}{x^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ și $f_s'(0)=\lim\limits_{x\nearrow 0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\nearrow 0}\sqrt{\frac{e^x-1-x}{x^2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

2. a) $f(3)=\int_2^3\frac{t^2}{t^2-1}=\left(t+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right)\Big|_2^3=1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$.

b) $g(x)=F\left(\ln\frac{x^2-1}{3}\right)-F(0)$, unde F este o primitivă a funcției $t\to\sqrt{3e^t+1}$.

Rezultă $g'(x)=\sqrt{3e^{\ln\frac{x^2-1}{3}}+1}\cdot\left(\ln\frac{x^2-1}{3}\right)'=x\cdot\frac{2x}{x^2-1}$, $\forall x\in(1,\infty)$.

c) Avem $g'(x)=2f'(x)$, deci $g(x)-2f(x)=\text{constant}=g(2)-2f(2)=0$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1.a) Succesiv rezultă:

$$\lim_{x\nearrow 1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\nearrow 1}\frac{\sqrt[3]{x^3-3x+2}}{x-1}=\lim_{x\nearrow 1}\sqrt[3]{\frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)^3}}=-\infty .$$

b) Aplicând corect reguli de derivare, rezultă $f'(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt[3]{(x-1)(x+2)^2}}$ .Tabelul de variație al funcției *f* este:

x	$-\infty$		-2		-1		1		∞
$f'(x)$		+++++	|	+++++	0	- - - - - -	|	++++++	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\sqrt[3]{4}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	∞

Din tabelul de variație al funcției rezultă că –1 și 1 sunt punctele de extrem ale funcției *f*.

c) Funcția *f* este derivabilă în orice punct *x* care satisface condiția $x^3-3x+2\neq 0$. Deci domeniul de derivabilitate al funcției *f* este $\mathbb{R}\setminus\{-2,1\}$.

2. a) Descompunem în fracții simple: $\dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x+1}+\dfrac{C}{x+2}$. $f(x)=\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{2(x+2)}$. Deci

$$\int f(x)dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{x}dx-\int\frac{1}{x+1}dx+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x+2}dx=\ln\frac{\sqrt{x(x+2)}}{x+1}+C .$$

b) Deoarece $t\in(1,\infty)$ rezultă $t>1, t+1>2, t+2>3\Rightarrow t(t+1)(t+2)>6\Rightarrow\dfrac{1}{t(t+1)(t+2)}<\dfrac{1}{6}$.

Atunci, pentru $x>1$ rezultă $\displaystyle\int_1^x\frac{1}{t(t+1)(t+2)}dt<\int_1^x\frac{1}{6}dt=\frac{x-1}{6}$. Egalitatea are loc dacă $x=1$.

c) Utilizăm schimbarea de variabilă: $x^3=t$. Rezultă $\displaystyle\int_0^1\frac{x^2}{1+x^6}dx=\frac{1}{3}\int_0^1\frac{3x^2}{1+x^6}dx=\frac{1}{3}\int_0^1\frac{1}{1+t^2}dt$.

Dar $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+t^2}dt=arctgt\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}$. Rezultă $\displaystyle\int_0^1\frac{x^2}{1+x^6}dx=\frac{\pi}{12}$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1.a) Deoarece $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\frac{2}{3}$, rezultă că dreapta de ecuație $y=\frac{2}{3}$ este asimptotă orizontală spre ∞.

b) Avem $f(1)=1$ și $0<f(n)\le\frac{9}{10}$, $\forall n\ge 2$, deci $0<a_n\le\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}$, de unde $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$.

c) $g'(x)=-\frac{7e^x}{(3e^x+4)^2}$, $g''(x)=\frac{7e^x(3e^x-4)}{(3e^x+4)^3}$. punctul de inflexiune este $\ln\frac{4}{3}$.

2 a) $\int_0^1 f(e^x)dx=\int_0^1\sqrt{x}dx=\frac{2\sqrt{x^3}}{3}\Big|_0^1=\frac{2}{3}$.

b) $V=\pi\int\limits_1^e \ln x dx=(x\ln x-x)\Big|_1^e=\pi$.

c) Utilizăm schimbarea de variabilă $\sqrt{\ln x}=t$, apoi o integrare prin părți:

$$\int\limits_1^e\sqrt{\ln x}dx=\int\limits_0^1 2t^2e^{t^2}dt=\int\limits_0^1\left(e^{t^2}\right)'tdt=te^{t^2}\Big|_0^1-\int\limits_0^1 e^{t^2}dt=e-\int\limits_0^1 e^{t^2}dt=e-\int\limits_0^1 e^{x^2}dx.$$

Prin urmare $\int\limits_0^1 e^{x^2}dx+\int\limits_1^e f(x)dx=\int\limits_0^1 e^{x^2}dx+e-\int\limits_0^1 e^{x^2}dx=e$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1.a) Avem $x_{n+1} - x_n = x_n^2 - x_n + 1 > 0, \forall n \geq 1$, deci şirul este strict crescător, de unde concluzia.

b) Funcția g este derivabilă pe fiecare din intervalele $(-\infty, 0)$ şi $(0, \infty)$ şi $g'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 1, & x < 0 \\ \dfrac{1}{x^2+1}, & x > 0 \end{cases}$.

Cum g este continuă în 0 şi $\lim\limits_{x \nearrow 0} g'(x) = \lim\limits_{x \searrow 0} g'(x) = 1$, rezultă că g este derivabilă în 0 şi $g'(0) = 1$.

c) Numărul cerut este valoarea minimă a funcției $h:(0,\infty) \to \mathbb{R}$, $h(x) = x^2 + 1 - 2\ln x$. Acesta este $h(1) = 2$.

2.a) $\int\limits_0^1 xf(x)dx = \int\limits_0^1 xe^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 e^{-t}dt = -\frac{1}{2}e^{-t}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-1}\right)$.

b) Aplicăm regula lui l´Hôspital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{F(\cos x) - F(1)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x F'(\cos x)}{2x} = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{\sin x}{2x}\cdot f(\cos x)\right) = -\frac{1}{2}f(1) = -\frac{1}{2}e^{-1}.$$

c) $g'(x) = F'(x) + f'(x) = f(x) - 2xe^{-x^2} = (1-2x)e^{-x^2}$, deci g are unicul punct de extrem $x = \frac{1}{2}$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1.a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)g(x)\right)=0\cdot\frac{\pi}{2}=0$.

b) f este derivabilă și $f'(x)=\frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2},\forall x\in\mathbb{R}$. Ținând cont de semnul derivatei, rezultă că – 1 este punct de minim local, iar 1 este punct de maxim local.

c) Considerăm funcția $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h(x)=f(x)-g(x)$. Rezultă $h'(x)=-\frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^2}$. Deoarece $h'(x)<0,\forall x\in(0,\infty)$, rezultă că h este descrescătoare pe $(0,\infty)$. Deci

$h(x)<h(0),\forall x\in(0,\infty)\Rightarrow h(x)<0,\forall x\in(0,\infty)\Rightarrow\frac{x}{1+x^2}<\operatorname{arctg}x,\forall x\in(0,\infty)$

2.a) Funcția f este continuă pe $[0,1]$, deci este integrabilă pe acest interval. Funcția $g:[1,2]\to\mathbb{R}, g(x)=x\ln x$ este continuă, deci este integrabilă pe $[1,2]$. Deoarece $f(x)=g(x),\forall x\in[1,2]\setminus\{1\}$, rezultă că f este integrabilă pe $[1,2]$. Fiind integrabilă pe $[0,1]$ și pe $[1,2]$, rezultă f integrabilă pe $[0,2]$.

b) Fie F o primitivă a funcției $\varphi:[1,\infty)\to\mathbb{R}$, $\varphi(t)=t\ln t$. Atunci: $\int_1^x t\ln t\,dt=F(x)-F(1)$.

Rezultă $\lim\limits_{x\searrow 1}\frac{\int_1^x t\ln t\,dt}{x-1}=\lim\limits_{x\searrow 1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}=F'_d(1)$. Deoarece $F'_d(1)=\varphi(1)=0$ rezultă că limita este egală cu 0.

c) Arătăm că există $a\in[0,t)$ și $b\in(t,2]$ astfel încât $\int_0^b f(x)dx-\int_0^a f(x)dx=(b-a)f(t)$, adică

$\int_0^b f(x)dx-bf(t)=\int_0^a f(x)dx-af(t)$. Considerăm funcția $g:[0,2]\to\mathbb{R}$, $g(y)=\int_0^y f(x)dx-yf(t)$. Avem $g'(y)=f(y)-f(t)$, deoarece f este strict crescătoare, deci g este strict descrescătoare pe $[0,t]$ și strict crescătoare pe $[t,2]$. Aceasta garantează existența numerelor a și b.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1.a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{f(x+1)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x}{(x+1)^3+x+1}=1$.

b) Deoarece $f'(x)=3x^2+1>0$, rezultă că f este strict crescătoare , deci este injectivă.

Cum $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$, iar f este strict crescătoare și continuă rezultă $\operatorname{Im} f=\mathbb{R}$, deci f este surjectivă. Fiind injectivă și surjectivă f este bijectivă, deci este inversabilă.

c) Pentru $x\geq 1$, $f\left(\sqrt[3]{x}\right)=x+\sqrt[3]{x}>x$ și $f\left(\sqrt[3]{x}\right)-1=x-3\sqrt[3]{x}^2+4\sqrt[3]{x}-2=x-\sqrt[3]{x}\left(3\sqrt[3]{x}-4+\dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)<x$, deci soluția ecuației $f(y)=x$ se află între $\sqrt[3]{x}-1$ și $\sqrt[3]{x}$. Astfel $1-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}<\dfrac{f^{-1}(x)}{\sqrt[3]{x}}<1$, de unde $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f^{-1}(x)}{\sqrt[3]{x}}=1$.

2.a) $\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=0$, deoarece f este impară.

b) $\int\limits_1^3\dfrac{f(x)}{\sin x}dx=\int\limits_1^3 x^2dx$. Dar $\int\limits_1^3 x^2dx=2c^2\Leftrightarrow\dfrac{26}{3}=2c^2$. Rezultă $c=\sqrt{\dfrac{13}{3}}\in(1,3)$.

c) $F(x)=\left(-x^2+2\right)\cos x+2x\sin x$. Considerăm șirul $\left(x_n'\right)_{n\geq1}$, $x_n'=2n\pi$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty}F\left(x_n'\right)=-\infty$.

Considerând șirul $\left(x_n''\right)_{n\geq1}$, $x_n''=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ rezultă $\lim\limits_{n\to\infty}F\left(x_n''\right)=\infty$. Prin urmare funcția F nu are limită la ∞.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1.a) $f'(x)=1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\neq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ și $f'(0)>0$, deci f' are semn constant pozitiv. Astfel f este strict crescătoare, continuă, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ și $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(x^2+1)-x^2}{\sqrt{x^2+1}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=0$, de unde concluzia.

b) Cum $g'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ rezultă relația cerută.

c) Fie funcția $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \varphi(x)=g(x)-x$. Rezultă $\varphi'(x)=\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}-1$. Deoarece $\varphi'(x)<0, \forall x\in\mathbb{R}$ rezultă φ strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$. Prin urmare, pentru orice $x>0$ rezultă $\varphi(x)<\varphi(0)$. Cum $\varphi(0)=0$, se obține inegalitatea cerută.

2.a) Într-adevăr f este derivabilă și $f(0)=f(1)=0$, iar $\int_0^1 f(x)dx=\frac{x^4}{2}-x^3+\frac{x^2}{2}\Big|_0^1=0$.

b) Deoarece $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d, a\neq 0$, rezultă $\int_0^1 f(x)dx=\frac{a}{4}+\frac{b}{3}+\frac{c}{2}+d$ și $f(0)=d, f(1)=a+b+c+d$. Prin urmare, condiția $f\in M$ este echivalentă cu $\begin{cases} a+b+c=0 \\ \frac{a}{4}+\frac{b}{3}+\frac{c}{2}=0 \end{cases}$, de unde: $a\in\mathbb{R}, a\neq 0, b=-\frac{3a}{2}, c=\frac{a}{2}, d\in\mathbb{R}$. Rezultă $f(x)=ax^3-\frac{3a}{2}x^2+\frac{a}{2}x+d$, $a\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$, $d\in\mathbb{R}$. Atunci $f\left(\frac{1}{2}\right)=d=f(0)$.

c) Aplicăm teorema de medie: există $c\in(0,1)$ astfel încât $\int_0^1 f(x)dx=f(c)$. Rezultă $f(c)=f(0)$ și $f(c)=f(1)$. Conform teoremei lui Rolle, există $\alpha\in(0,c)$ și $\beta\in(c,1)$ astfel încât $f'(\alpha)=0, f'(\beta)=0$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1.a) f este continuă pe fiecare dintre intervalele $(-\infty,1)$ și $(1,\infty)$, deoarece f este cât de funcții continue.

Deoarece $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1} = \lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t} = 1 = f(1)$ rezultă că f este continuă în 1.

b) Aplicăm regula lui l'Hôspital. Rezultă $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x-(x-1)}{(x-1)^2} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{1-x}{2x(x-1)} = -\frac{1}{2}$.

c) Avem $f'(x) = \frac{x-1-x\ln x}{x(x-1)^2}$ și avem de arătat că $g(x) = x-1-x\ln x < 0, \forall x\in(0,\infty)\setminus\{1\}$. Cum $g'(x) = -\ln x$, rezultă tabelul de variație următor, din care rezultă concluzia.

x	0		1		∞
$g'(x)$		$+++++++++$	0	$----------$	
$g(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	

2.a) Fie $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o primitivă pe $\mathbb{R}$ a lui f. Atunci $F'(x) = \ln(1+\sin^2 x), \forall x\in\mathbb{R}$.

Deoarece $1+\sin^2 x \ge 1$ rezultă $F'(x) = \ln(1+\sin^2 x) \ge 0, \forall x\in\mathbb{R}$.

b) Utilizăm schimbarea de variabilă $\sin x = t$. Rezultă $\int_0^{\pi} f(x)\cos dx = \int_0^0 \ln(1+t^2)dt = 0$.

c) Funcția f, fiind continuă pe $\mathbb{R}$, admite o primitivă. În plus, $g(x) = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\arcsin x} f(t)dt = F(\arcsin x) - F\left(\frac{\pi}{4}\right)$,

de unde $g'(x) = \arcsin' x\cdot F'(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ln(1+x^2)$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1.a) $f_2'(x) = 2x + \frac{1}{x} > 0, \forall x \in (0,\infty)$.

b) Cum $f_n\left(\frac{1}{e}\right) \cdot f_n(1) = \left(\frac{1}{e^n} - 1\right) \cdot 1 < 0$ și f este continuă rezultă că ecuația $f_n(x) = 0$ are cel puțin o rădăcină reală, situată în intervalul $\left(\frac{1}{e}, 1\right)$. Cum f_n este strict crescătoare, rădăcina este unică.

c) Folosind de două ori regula lui l'Hospital:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{3}{f_2(x)-1} - \frac{1}{x-1}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{3x-2-x^2-\ln x}{(x-1)\left(x^2+\ln x-1\right)} = \lim_{x\to 1}\frac{-2+\frac{1}{x^2}}{6x+\frac{1}{x}-2+\frac{1}{x^2}} = -\frac{1}{6}.$$

2. a) Considerăm funcțiile, $g:[-2\pi,0] \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^3$ și $H:(0,\infty) \to \mathbb{R}$, $h:[0,2\pi] \to \mathbb{R}$, $h(x) = 1 + \sin x$.
Deoarece $f(x) = g(x), \forall x \in [-2\pi,0] \setminus \{0\}$ și g este integrabilă pe $[-2\pi,0]$ rezultă f integrabilă pe $[-2\pi,0]$.
Analog, deoarece $f(x) = h(x), \forall x \in [0,2\pi]$ și h este integrabilă pe $[0,2\pi]$ rezultă f integrabilă pe $[0,2\pi]$.
Prin urmare f este integrabilă pe $[-2\pi,0] \cup [0,2\pi] = [-2\pi,2\pi]$.

b) $\int_{-1}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} x^3\,dx + \int_{0}^{\pi}(1+\sin x)\,dx = \pi + \frac{7}{4}$.

c) $\int_0^{2\pi}(1+\sin x)^n\,dx \le \int_0^{2\pi}(1+\sin x)\cdot 2^{n-1}\,dx = 2^{n-1}(x-\cos x)\Big|_0^{2\pi} = 2^n\pi$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1.a) $\left|f(x)\right| \le \max\left(|x|,\left|x^3\right|\right) \le |x|,\ \forall x \in [-1,1]$.

b) Din $\left|f(x)\right| \le |x|, \forall x \in [-1,1]$ rezultă $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. Cum $f(0)=0$, rezultă că f este continuă în origine.

c) Fie $g(x) = \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$, $x \ne 0$. $\lim\limits_{n\to\infty} g\left(\dfrac{1}{n}\right) = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} g\left(\dfrac{1}{n\sqrt{2}}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2\sqrt{2}n^3} = 0$, deci f nu este derivabilă în 0.

2.a) f trebuie să fie derivabilă, deci continuă. Din continuitatea lui f rezultă $b=0$.

Apoi $f'(x) = ae^x + axe^x - 1, \forall x < 0$ și $f'(x) = \cos x - x\sin x, \forall x > 0$.

Cu o consecință a teoremei lui Lagrange rezultă $\lim\limits_{x\searrow 0} f'(x) = \lim\limits_{x\nearrow 0} f'(x) = f'(0) \Leftrightarrow a-1=1 \Rightarrow a=2$.

b) $\int_{-1}^{\pi} f(x)dx = \int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\pi} f(x)dx = -\int_{-1}^{0} xdx + \int_{0}^{\pi} x\cos xdx = -\dfrac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{0} + x\sin x\Big|_{0}^{\pi} + \cos x\Big|_{0}^{\pi} = -\dfrac{3}{2}$.

c) Avem $I_n = \int_0^{\pi} x^{n+1}\cos xdx = x^{n+1}\sin x\Big|_0^{\pi} - (n+1)\int_0^{\pi} x^n \sin xdx = -(n+1)\int_0^{\pi} x^n \sin xdx$ și

$\int_0^{\pi} x^n \sin xdx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin xdx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x^n \sin xdx \ge \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x^n \sin xdx = 1$, deci $I_n \le -(n+1)$, de unde concluzia.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluții

1.a) $f(x)=\ln\frac{x+2}{x}=\ln|x+2|-\ln|x|$, $f'(x)=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x}$, $f''(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(x+2)^2}=\frac{4x+4}{x^2(x+2)^2}<0,\ \forall x\in(-\infty,-2)$.

b) $a_n=\ln\left(\frac{3}{1}\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{6}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{n+1}{n-1}\cdot\frac{n+2}{n}\right)-\ln\frac{n(n+1)}{2}=\ln\frac{(n+1)(n+2)}{2}-\ln\frac{n(n+1)}{2}=\ln\frac{n+2}{n}$.

Rezultă $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\ln\frac{n+2}{n}=0$.

c) Considerăm funcția $h:[1,2]\to\mathbb{R}, h(x)=(x-1)f(x)$. Aplicăm teorema lui Lagrange funcției h:

există $c\in(0,1)$ astfel încât $h'(c)=\frac{h(2)-h(1)}{1}$, de unde $f(c)+(c-1)f'(c)=f(2)$.

2.a) $\int_0^1 xf(x)\,dx=\int_0^1\frac{x}{1+x^4}dx=\frac{1}{2}arctg\left(x^2\right)\Big|_0^1=\frac{\pi}{8}$.

b) Se observă că $\frac{1}{1+x^2}\le\frac{1}{1+x^4}\le 1, \forall x\in[0,1]$. Aplicând proprietatea de monotonie a integralei rezultă

$\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx\le\int_0^1\frac{1}{1+x^4}dx\le\int_0^1 1dx$, de unde $\frac{\pi}{4}\le\int_0^1 f(x)dx\le 1$.

c) $\int_0^1\frac{f(x)f''(x)-(f'(x))^2}{(f(x))^2}dx=\int_0^1\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)'dt=\frac{f'(1)}{f(1)}-\frac{f'(0)}{f(0)}=-2$, deoarece $f'(x)=-\frac{4x^3}{\left(1+x^4\right)^2}$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1.a) Funcția *f* este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$, deci este injectivă. Deoarece $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ și *f* este continuă rezultă $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}$, prin urmare *f* este surjectivă.

b) Fie funcția $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ h(x) = x + e^x - (2x+1) = e^x - x - 1$. $h'(x) = e^x - 1$, iar din tabelul de variație rezultă concluzia.

x	$-\infty$		0		∞
$h'(x)$	$-$ $-$ $-$ $-$ $-$ $-$ $-$ $-$ $-$ $-$ $-$ $-$		0	$+$ $+$ $+$ $+$ $+$ $+$ $+$ $+$ $+$ $+$ $+$ $+$ $+$ $+$	
$h(x)$	∞	$\searrow$	0	$\nearrow$	∞

c) Fie funcția $\theta:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ 0\ \theta(x) = x + e^x - (mx+1)$. Atunci $\theta(x) \geq \theta(0), \forall x\in\mathbb{R}$, adică 0 este punct de minim a lui θ. Conform teoremei lui Fermat, $\theta'(0) = 0$. Deoarece $\theta'(x) = 1 + e^x - m$ rezultă $\theta'(0) = 2 - m = 0$, de unde $m = 2$.

2.a) Deoarece *F* este o primitivă pe $\mathbb{R}$ a funcției *f*, atunci $F'(x) = f(x), \forall x\in\mathbb{R}$.

Deci $(4F(x))' = 4f(x) = 4\sin^3 x\cos x$. Apoi $(\sin^4 x)' = 4\sin^3 x\cos x$. Deci există $c\in\mathbb{R}$ astfel încât $4F(x) = \sin^4 x + c$. Fie $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, G(x) = \frac{1}{4}\sin^4 x$. Cum $G'(x) = f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$, există $d\in\mathbb{R}$ astfel încât $F(x) = G(x) + d$, iar pentru $c = 4d$, rezultă concluzia.

b) $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt = \frac{1}{4}\sin^4 t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}$.

c) Utilizăm schimbarea de variabilă $x = \pi - t$ și obținem

$I = \int_0^{\pi} \sin^{6n+3} x\cos^{2n+1} x dx = \int_{\pi}^{0} \sin^{6n+3}(\pi - t)\cos^{2n+1}(\pi - t)(-1)dt = \int_0^{\pi} \sin^{6n+3} t(-\cos t)^{2n+1} dt = -I$, de unde $I = 0$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1.a) $f(x)=1-\sqrt{1-x^2}$ și $f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $\forall x\in(-1,1)$.

b) $m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\sqrt{x^2-1}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}\right)=-1$.

$n=\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-1}+1\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}+1\right)=1$.

Prin urmare, ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f este $y=-x+1$.

c) Pentru $x\in(0,1]$ avem $\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}=\dfrac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}\in[0,1]$. Pentru $x\in[1,\infty)$ avem $-x\le 1-x^2\le 1$, deci

$-\dfrac{1}{x}\le\dfrac{f(x)}{x^2}\le\dfrac{1}{x^2}$, de unde $-1\le\dfrac{f(x)}{x^2}\le 1$, $\forall x\ge 1$. Astfel $-1\le g(x)\le 1, \forall x\in(0,\infty)$

2.a) $\int_0^{3/4}\dfrac{2t+1}{f(\sqrt{t})}dt=\int_0^{3/4}\dfrac{2t+1}{t^2+t+1}dt=\ln\left(t^2+t+1\right)\Big|_0^{3/4}=\ln\dfrac{37}{16}$.

b) Utilizăm schimbarea de variabilă $g(x)=t\Leftrightarrow x=f(t)$.

Rezultă $\int\limits_1^3 g(x)dx=\int\limits_0^1 tf'(t)dt=tf(t)\Big|_0^1-\int\limits_0^1 f(t)dt=f(1)-\int\limits_0^1 f(x)dx=3-\int\limits_0^1 f(x)dx$, de unde concluzia.

c) Folosind **b)** avem $\int\limits_0^1 f(x)dx+\int\limits_1^\alpha g(x)dx=3-\int\limits_1^3 g(x)dx+\int\limits_1^\alpha g(x)dx=3-\int\limits_\alpha^3 g(x)dx$, așa încât inegalitatea de demonstrat este echivalentă cu $\int\limits_\alpha^3 g(x)dx\le 3-\alpha$. Deoarece $g:[1,3]\to[0,1]$ rezultă $g(x)\le 1, \forall\alpha\in[\alpha,3]$ din care prin integrare rezultă $\int\limits_\alpha^3 g(x)dx\le 3-\alpha$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1.a) într-adevăr, u este o funcție de două ori derivabilă, $u'(x)=e^x(\sin x+\cos x)$, deci $u'(0)=1$ și $f(0)=0$.

b) Avem $\left(1+f(x)\right)^{\frac{1}{x}}=\left[\left(1+f(x)\right)^{\frac{1}{f(x)}}\right]^{\frac{f(x)}{x}}$ și $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+f(x)\right)^{\frac{1}{f(x)}}=e$, deoarece $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=0$.

Apoi $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=1$.

c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f^n(x)-x^n}{x^{n+1}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-x}{x^2}\cdot\left(\frac{f^{n-1}(x)}{x^{n-1}}+\frac{xf^{n-2}(x)}{x^{n-1}}+\frac{x^{n-2}f(x)}{x^{n-1}}+\frac{x^{n-1}}{x^{n-1}}\right)$, iar

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)-1}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\frac{f''(0)}{2}$,

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f^k(x)}{x^k}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right)^k=\left(f'(0)\right)^k=1,\ \forall k\in\{0,1,2,...,n-1\}$.

2. a) $g(x)=\int\limits_0^x f(t)\,dt=\int\limits_0^x\frac{1}{1+t}dt=\ln(1+x)$.

b) $\int_0^1 f^2(x)g(x)dx=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{(x+1)^2}dx=-\int_0^1\left(\frac{1}{x+1}\right)'\ln(1+x)dx=-\frac{1}{2}\ln 2+\int_0^1\frac{1}{(x+1)^2}dx=\frac{1-\ln 2}{2}$.

c) Pentru $k\in\{0,1,2,...,n-1\}$ cu teorema de medie $\int\limits_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}f(x)dx=\left(\frac{k}{n}-\frac{k-1}{n}\right)f(c_k)$, cu $c_k\in\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]$.

Apoi, deoarece f este descrescătoare, $f(c_k)\ge f\left(\frac{k}{n}\right)$. Rezultă $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\le\sum\limits_{k=1}^{n}\int\limits_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}f(x)dx=\int\limits_0^1 f(x)dx=\ln 2$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1. a) $f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{2}{2x+1} - \frac{2}{2x+3} = \frac{1}{(x+1)^2(2x+1)(2x+3)}$.

b) Deoarece $f'(x) > 0$ rezultă că funcția f este strict crescătoare. Cum $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = 0$, rezultă $f(x) < 0, \forall x \in (0,\infty)$.

c) $x_{n+1} - x_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \ln\left(n+1+\frac{1}{2}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} - \ln\left(n+\frac{1}{2}\right)\right) = f(n) < 0.$

2. a) Utilizăm schimbarea de variabilă $t = -u$. Rezultă $f(-x) = \int_0^{-x} e^{t^2}dt = -\int_0^{x} e^{u^2}du = -\int_0^{x} e^{t^2}dt = -f(x)$.

b) Concluzia rezultă din $f(x) = \int_0^1 e^{t^2}dt + \int_1^x e^{t^2}dt > \int_1^x e^{t^2}dt > \int_1^x e^t dt = e^x - e$ și $\lim\limits_{x\to\infty}\left(e^x - e\right) = \infty$.

c) $e^{t^2} \le e^t, \forall t \in [0,1]$.

Rezultă $\int_0^x e^{t^2}dt \le \int_0^x e^t dt, \forall x \in [0,1]$, deci $f(x) \le e^x - 1, \forall x \in [0,1]$.

Prin urmare $\int_0^1 f(x)dx \le \int_0^1 \left(e^x - 1\right)dx = e - 2$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1. a) $f_s'(0)=\lim\limits_{x\nearrow 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\nearrow 0}\dfrac{3}{2\sqrt[3]{x}}=-\infty$, deci f nu este derivabilă în 0.

b) Deoarece funcția f este continuă pe intervalul $[k,k+1]$ și derivabilă pe intervalul $(k,k+1)$, aplicăm teorema lui Lagrange . Rezultă existența unui punct $c\in(k,k+1)$ astfel încât $f(k+1)-f(k)=f'(c)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{c}}$.

c) $a_{n+1}-a_n=-f(n+1)+f(n)+\dfrac{1}{\sqrt[3]{n+1}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{n+1}}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{c_n}}$ cu $c_n\in(n,n+1)$, deci $a_{n+1}-a_n<0,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

2.a) $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{12}\right)\Bigg|_0^1-(x+1)\ln(x+1)\Bigg|_0^1+x\Bigg|_0^1=-\frac{7}{12}-2\ln 2..$

b) Cum $F(0)=0$, aplicăm regula lui l´Hôspital: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F(x)}{x^5}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F'(x)}{5x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{5x^4}$. Dar

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{5x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{1-x+x^2-\dfrac{1}{1+x}}{20x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{20x^3(1+x)}=\frac{1}{20}.$$

c) $f'(x)=1-x+x^2-\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{x^3}{1+x}$ **.** Cum, pe $(-1,0)$ derivata f' este negativă, iar pe $(0,\infty)$ este pozitivă, rezultă că 0 este punct de minim absolut, deci $f(x)\ge f(0)=0$.

Rezultă $x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}\ge\ln(1+x)$, din care se obține $\displaystyle\int_0^1\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)dx\ge\int_0^1\ln(1+x)dx$

Dar $\displaystyle\int_0^1\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)dx=\frac{5}{12}$, deci $\displaystyle\int_0^1\ln(1+x)dx\le\frac{5}{12}$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1. a) Prin inducție demonstrăm că, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, $f_{n+1}(x)=2^{n+1}e^{2x}, \forall x\in\mathbb{R}$. Într-adevăr $f_1(x)=f_0'(x)=2e^{2x}$. Presupunem că $f_n(x)=2^n e^{2x}$ și rezultă că $f_{n+1}(x)=2^{n+1}e^{2x}$. Pentru $n=3$ rezultă $f_3(x)=8e^{2x}$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

b) Deoarece $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} 2^n e^{2x}=0$ rezultă că axa Ox este asimptotă orizontală spre $-\infty$. Cum $\lim\limits_{x\to\infty} f_n(x)=\lim\limits_{x\to\infty} 2^n e^{2x}=\infty$ și $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f_n(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2^n e^{2x}}{x}=\infty$ rezultă că f_n nu are alte asimptote.

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f_1(a)+f_2(a)+...+f_n(a)}{f_{n+1}(a)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2e^{2a}+2^2e^{2a}+...+2^n e^{2a}}{2^{n+1}e^{2a}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+2^2+...+2^{n-1}}{2^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n-1}{2^n}=1$.

2. a) Funcția f este continuă pe intervalul $(0,\infty)$ deoarece pe acest interval f este produs de funcții continue. Deoarece $\lim\limits_{x\searrow 0} f(x)=\lim\limits_{x\searrow 0} x\ln^2 x=\lim\limits_{x\searrow 0}\frac{\ln^2 x}{\frac{1}{x}}=0=f(0)$, f este continuă în 0. Rezultă f continuă pe $[0,\infty)$ și prin urmare este integrabilă pe $[0,1]$.

b) Deoarece funcția $F:[0,\infty)\to\mathbb{R}, F(t)=\int_t^1 f(x)dx$ este continuă, avem $\int_0^1 f(x)dx=F(0)=\lim\limits_{t\searrow 0}F(t)$. Cum

$$\int_t^1 x\ln^2 x dx=\left(\frac{x^2}{2}\ln^2 x-\frac{x^2}{2}\ln x+\frac{x^2}{4}\right)\Bigg|_t^1=\frac{t^2}{2}\ln t-\frac{t^2}{2}\ln^2 t+\frac{1}{4}-\frac{t^2}{4},$$ rezultă că $\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{4}$.

c) $\int_1^e \frac{1}{x}\ln^2\frac{1}{x}dx=\int_1^e\frac{1}{x}(-\ln x)^2 dx=\int_1^e\frac{1}{x}\ln^2 x dx=\frac{1}{3}\ln^3 x\Big|_1^e=\frac{1}{3}$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1.a) $f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$.

b) Deoarece $f'(x) > 0, \forall x \in (0,\infty)$ rezultă că *f* este strict crescătoare pe $(0,\infty)$.

Din $x > 0$ și *f* este strict crescătoare pe $(0,\infty)$, rezultă $f(x) > f(0) = 0$.

c) $f(x) = \ln e^x - \ln(1+x) = \ln \frac{e^x}{1+x}$. Deci $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

2.a) $F(x) = \int_1^2 t^x dt = \left.\frac{t^{x+1}}{x+1}\right|_1^2 = \frac{2^{x+1}-1}{x+1}$, pentru $x \neq -1$, deci $1 + (x+1)F(x) = 2^{x+1}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$; pentru $x = -1$ relația se verifică direct.

b) $\lim\limits_{x\to-1} F(x) = \lim\limits_{x\to-1} \frac{2^{x+1}-1}{x+1} = \lim\limits_{x\to-1} 2^{x+1}\ln 2 = \ln 2$.

c) Din teorema de existență a primitivelor unei funcții continue, rezultă că *F* este primitiva funcției *f* pentru care $F(0) = 1$ (condiție care este îndeplinită). Deci $F'(x) = f(x), \forall x \in (-1,\infty)$.

Rezultă $f(x) = \left(\frac{2^{x+1}-1}{x+1}\right)' = \frac{(x\ln 2 + \ln 2 - 1)2^{x+1} + 1}{(x+1)^2}$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1. a) Ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției *f* este $y = mx + n$, unde:

$$m = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x+1}{x^2+x} = 1 \text{ și } n = \lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x+1} = 0.$$

b) $$f'(x) = \frac{\left(x^2+x+1\right)'\cdot(x+1)-\left(x^2+x+1\right)\cdot(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}.$$

c) Cum $f''(x) = \dfrac{2}{(x+1)^3} < 0,\ \forall x\in(-\infty,-1)$ funcția *f* este concavă pe intervalul $(-\infty,-1)$.

2. a) $$\int_0^{\pi} f_2(x)\,dx = \int_0^{\pi}|\sin 2x|dx = \int_0^{\pi/2}\sin 2x dx - \int_{\pi/2}^{\pi}\sin 2x dx = -\frac{\cos 2x}{2}\Big|_0^{\pi/2} + \frac{\cos 2x}{2}\Big|_{\pi/2}^{\pi} = 2.$$

b) Cum $\dfrac{|\sin(nx)|}{x} \le \dfrac{1}{x}, \forall x\in[\pi,2\pi]$, rezultă $I_n = \displaystyle\int_{\pi}^{2\pi}\frac{|\sin(nx)|}{x}dx \le \int_{\pi}^{2\pi}\frac{1}{x}dx = \ln 2.$

c) Utilizăm schimbarea de variabilă $nx = t$ și obținem

$$I_n = \int_{n\pi}^{2n\pi}\frac{|\sin t|}{nt}ndt = \sum_{k=n}^{2n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin t|}{t}dt \ge \sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{(k+1)\pi}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin t|dt = \sum_{k=n}^{2n-1}\frac{2}{(k+1)\pi}.$$

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1.a) $\left(f\left(x\right)\right)^x=\left(1+\frac{x+a+1}{x^2-1}\right)^x=\left[\left(1+\frac{x+a+1}{x^2-1}\right)^{\frac{x^2-1}{x+a+1}}\right]^{\frac{x^2+(a+1)x}{x^2-1}}$, deci limita este e.

b) Avem $f'\left(x\right)=-\frac{x^2+2\left(a+1\right)x+1}{\left(x^2-1\right)^2}$, $x\neq\pm1$. Dacă $x_0=3$ este punctul de extrem local și f este derivabilă în 3, atunci $f'\left(3\right)=0$, deci $a=-\frac{8}{3}$. Pentru $a=-\frac{8}{3}$, din semnul lui f' rezultă că $x_0=3$ este punct de extrem.

c) Fie $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g\left(x\right)=x^2+x+a$. Dacă $g\left(1\right)\neq0$, $g\left(-1\right)\neq0\Leftrightarrow a\in\mathbb{R}\setminus\left\{-2,0\right\}$ atunci f are două asimptote verticale, $x=1$ și $x=-1$. Dacă $a=0$ atunci $f\left(x\right)=\frac{x}{x-1}$, $x\neq\pm1$, iar dacă $a=-2$, atunci $f\left(x\right)=\frac{x+2}{x+1}$, $x\neq\pm1$ și în ambele cazuri f are o singură asimptotă verticală.

2. a) $f_1\left(x\right)=\int_0^x f_0\left(t\right)dt=\int_0^x 1dt=x$, iar $f_2\left(x\right)==\int_0^x f_1\left(t\right)dt=\int_0^x tdt=\frac{x^2}{2}$.

b) Se demonstrează prin inducție că $f_n\left(x\right)=\frac{x^n}{n!}$. Prin urmare :

$\frac{xf_n(x)+1}{f_{n+1}(x)+2}=\frac{\left(n+1\right)x^{n+1}+\left(n+1\right)!}{x^{n+1}+2\left(n+1\right)!}$. Rezultă $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{xf_n(x)+1}{f_{n+1}(x)+2}=n+1$.

c) $V=\pi\int_0^\pi x^2\sin^2 xdx\ \frac{\pi}{2}\int_0^\pi x^2\left(1-\cos2x\right)dx=\frac{\pi}{2}\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2\sin2x}{2}-\frac{x\cos2x}{2}+\frac{\sin2x}{4}\right)\Big|_0^\pi=\frac{\pi^4}{6}-\frac{\pi^2}{4}$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1.a) Deoarece $\lim\limits_{x\searrow -2} f(x) = \lim\limits_{x\searrow -2} \ln\frac{2+x}{2-x} = -\infty$ și $\lim\limits_{x\nearrow 2} f(x) = \lim\limits_{x\nearrow 2} \ln\frac{2+x}{2-x} = \infty$, rezultă asimptotele verticale $x=-2$ și $x=2$; alte asimptote nu există.

b) Deoarece $f'(x) = \frac{2-x}{2+x}\left(\frac{2+x}{2-x}\right)' = \frac{4}{4-x^2} > 0, \forall x \in (-2,2)$, deci f este strict crescătoare pe $(-2,2)$.

c) Notăm $\frac{1}{x} = y$. Atunci $\lim\limits_{x\to\infty} xf\left(\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{y\to 0}\frac{1}{y} f(y) = f'(0) = 1$.

2.a) $f(t) = t^2\int_1^2 \frac{1}{x^2}dx - 2t\int_1^2 \frac{e^x}{x}dx + \int_1^2 e^{2x}dx = At^2 - 2Bt + C$, unde $C = \int_1^2 e^{2x}dx = \frac{e^{2x}}{2}\Big|_1^2 = \frac{e^4 - e^2}{2}$.

b) Deoarece $A = \int_1^2 \frac{1}{x^2}dx = \frac{1}{2}$, rezultă $f(t) = \frac{1}{2}t(4B-t) + C$, de unde $f(2B+t) = f(2B-t) = \frac{1}{2}\left(4B^2 - t^2\right) + C$.

c) Deoarece $f(t) = At^2 - 2Bt + C \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}$, rezultă $4B^2 - 4AC \leq 0$,

adică $B^2 \leq AC$ din care rezultă $\left(\int_1^2 \frac{e^x}{x}dx\right)^2 \leq \left(\int_1^2 e^{2x}dx\right)\left(\int_1^2 \frac{1}{x^2}dx\right)$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1.a) $f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1}-\alpha$.

Dacă $x<0$ rezultă $1+x<1$, deci rezultă $(1+x)^{\alpha-1}<1$, de unde $\alpha(1+x)^{\alpha-1}<\alpha$ și în final $f'(x)<0$.

Dacă $x>0$ rezultă $1+x>1$, deci rezultă $(1+x)^{\alpha-1}>1$, de unde $\alpha(1+x)^{\alpha-1}>\alpha$ și în final $f'(x)>0$.

Rezultă *f* strict descrescătoare pe $(-1,0]$ și strict crescătoare pe $[0,\infty)$.

b) *f* este strict descrescătoare pe $(-1,0]$, deci $x<0\Rightarrow f(x)>f(0)=1$.

f este strict crescătoare pe $[0,\infty)$, deci $x>0\Rightarrow f(x)>f(0)=1$.

Așadar $f(x)>1,\forall x\in(-1,\infty)\setminus\{0\}$, de unde rezultă cea ce trebuia demonstrat.

c) $f''(x)=\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-1}>0,\forall x\in(-1,\infty)$. Rezultă *f* convexă pe $[0,\infty)$ .Prin urmare

$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\le\frac{f(a)+f(b)}{2},\forall a,b\in[0,\infty)$. Pentru $a=2x$ și $b=2y$ rezultă inegalitatea din enunț.

2.a) $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\frac{x}{1+x}dx=\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x}\right)dx=\left(x-\ln(1+x)\right)\Big|_0^1=1-\ln 2$.

b) $\int_1^3 f^2(x)[x]dx=\int_1^2 f^2(x)dx+2\int_2^3 f^2(x)dx=\left(x-2\ln(1+x)-\frac{1}{1+x}\right)\Big|_1^2+2\left(x-2\ln(1+x)-\frac{1}{1+x}\right)\Big|_2^3=$.

$=\frac{16}{3}-6\ln 2+2\ln 3$.

c) $a_{n+1}-a_n=f(n+1)-\int_n^{n+1}f(x)dx$, iar $\int_n^{n+1}f(x)dx=(n+1-n)f(c_n)=f(c_n)$, cu $c_n\in(n,n+1)$, deci

$a_{n+1}-a_n>0$ deoarece *f* este strict descrescătoare. Apoi, din $\int_1^{k+1}f(x)dx=f(c_k)$, cu $c_k\in(k,k+1)$.

$\int_0^n f(x)dx=\sum_{k=o}^{n-1}\int_k^{k+1}f(x)dx=\sum_{k=o}^{n-1}f(c_k)>f(0)+f(1)+...+f(n-1)$, de unde $a_n<f(n)-f(0)<1$, deci

șirul este mărginit.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1.a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{\ln x}{x}\right)=1,\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-x\right)=\infty$ **.**

b) Funcția este strict crescătoare, este continuă și $f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}-1<0,\ f(1)=1>0$.

c) Folosind regula lui l'Hôspital pentru cazul $\frac{0}{0}$ avem $l=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{xe^x-1}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}(x+1)e^x=(x_0+1)e^{x_0}$, din $f(x_0)=0$ rezultă că $x_0=-\ln x_0=\ln\frac{1}{x_0}$, deci $e^{x_0}=\frac{1}{x_0}$ și $l=(x_0+1)\frac{1}{x_0}=1+\frac{1}{x_0}=f'(x_0)$.

2.a) $I_1=\int_0^1\frac{1}{x+1}\ln(x+1)\,dx=\frac{1}{2}\ln^2(x+1)\Big|_0^1=\frac{1}{2}\ln^2 2.$

b) Deoarece $x\in(0,1)\Rightarrow x^n>x^{n+1}$ și $\frac{1}{x+1}>0$, avem $\frac{\ln\left(1+x^n\right)}{x+1}>\frac{\ln\left(x^{n+1}+1\right)}{x+1},\ \forall x\in(0,1)$ de unde concluzia.

c) Avem $I_n\geq 0$ și $I_n\leq\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx\leq\int_0^1 x^n\,dx=\frac{1}{n+1}$; concluzia rezultă din teorema cleștelui.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1. a) $f(x)=\dfrac{e^x-1}{x}$ dacă $x\neq 0$ și $f(0)=a$; $f(1)=e-1, f'(1)=1$, deci $y=x+e-2$ este ecuația tangentei.

b) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$, deci f este continuă în $x=0$ dacă și numai dacă $f(0)=a=1$.

c) Evident f este derivabilă pe $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ și $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-x-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{2x}=\dfrac{1}{2}=f'(0)$.

2.a) $I_1=\int_1^2(x-1)(2-x)dx=\left(-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{3x^2}{2}-2x\right)\Big|_1^2=\dfrac{1}{6}$.

b) $I_n=\dfrac{1}{2}\int\limits_1^2(2x-3)'\left(-x^2+3x-2\right)^n dx=\dfrac{1}{2}(2x-3)\left(-x^2+3x-2\right)^n\Big|_1^2+\dfrac{n}{2}\int\limits_1^2(2x-3)^2\left(-x^2+3x-2\right)^{n-1}dx=$

$=2n\int\limits_1^2\left(x^2-3x+\dfrac{9}{4}\right)\left(-x^2+3x-2\right)^{n-1}dx=2n\left(\dfrac{1}{4}I_{n-1}-I_n\right)$, de unde concluzia cerută.

c) $0\le(x-1)(2-x)\le\dfrac{1}{4}$, $\forall x\in[1;2]$, de unde $0\le I_n\le\int_1^2\left(\dfrac{1}{4}\right)^n=\dfrac{1}{4^n}$, deci $\lim\limits_{n\to\infty}I_n=0$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1.a) $m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$, $n = \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - x) = 0$, deci $y = x$ asimptota oblică spre ∞.

b) Punctele de extrem sunt aceleaşi cu ale funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x) = x^3 - 3x + 2$. Deoarece $g'(x) = 3(x^2 - 1)$, punctele de extrem sunt ± 1.

c) Folosind regula lui l'Hospital pentru cazul $\dfrac{0}{0}$: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2\operatorname{arctg} f(x) - \pi}{x-1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\dfrac{2}{1+f^2(x)}\dfrac{x+1}{\sqrt[3]{(x-1)(x+2)^2}}}{-\dfrac{1}{x^2}} = -2$.

2.a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{3+\cos x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+tg^2\frac{x}{2}}{2\left(2+tg^2\frac{x}{2}\right)}dx = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{1}{t^2+2}dt = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{6}}{6}$.

b) Dacă F este o primitivă, atunci $F'(x) = \dfrac{1}{3+\cos x}$. Cum $\cos x \in [-1;1]$, $F'(x) > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$, deci F este strict crescătoare.

c) Avem $\dfrac{1}{4} \le f(x) \le \dfrac{1}{2},\ \forall x \in \mathbb{R}$, de unde $\dfrac{x}{4} < \displaystyle\int_0^x f(t)dt \le \dfrac{x}{2},\ \forall x > 0$.

Rezultă $\dfrac{1}{4x} < \dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_0^x f(t)dt \le \dfrac{1}{2x},\ \forall x > 0$, deci limita este egală cu 0.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1.a) $f'(x) = 3e^{3x} + 2,\ f(0) = 2,\ f'(0) = 5$, deci ecuația cerută este $y - 2 = 5x$.

b) $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ strict crescătoare $\Rightarrow f$ injectivă. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty,\ \lim\limits_{x\to-\infty} = -\infty,\ f$ continuă $\Rightarrow f$ surjectivă. Deci f este bijectivă $\Rightarrow f$ inversabilă.

c) Suma este egală cu $e^{-3} + e^{-6} + ... + e^{-3n} = e^{-3}\dfrac{1-e^{-3n}}{1-e^{-3}}$ și are limita $\dfrac{1}{e^3-1}$.

2.a) $a_1 = \int\limits_0^1 \sin \pi x dx = -\dfrac{1}{\pi}\cos \pi x \Big|_0^1 = \dfrac{2}{\pi}$.

b) Arătăm inductiv că $0 \le a_{n+1} \le a_n, \forall n \ge 0$. Cum $0 \le a_1 = \dfrac{2}{\pi} \le 1 = a_0$, presupunând că $0 \le a_n \le a_{n-1} \le ... \le a_0 = 1$ rezultă $0 \le \sin \pi x \le 1,\ \forall x \in [0, a_n]$, deci $0 \le a_{n+1} = \int\limits_0^{a_n} \sin \pi x dx \le \int\limits_0^{a_n} dx = a_n$. Deci $(a_n)_n$ este monoton și mărginit.

c) Dacă $(a_n)_{n\ge 0}$ convergent către $x = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, atunci obținem, prin trecere la limită, $x = \int_0^x \sin \pi t dt$.

Fie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = x - \int_0^x \sin \pi t dt$. Avem $g(0) = 0$ și $g'(x) = 1 - \sin \pi x \ge 0 \Rightarrow x = 0$ este soluție unică.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1.a) f este strict descrescătoare pe $(-\infty,0]$ și strict crescătoare pe $[0,\infty)$.

b) Avem $\sqrt{x^2+1}f'(x)=x$ și derivând $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}f'(x)+\sqrt{x^2+1}f''(x)=1$, de unde $(x^2+1)f''(x)+xf'(x)=$

$=\sqrt{x^2+1}$.

c) $m=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-1$, $n=\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)+x)=0$, deci $y=-x$ este asimptota oblică spre $-\infty$.

2.a) $I_1=\int_0^1\frac{x}{x+1}dx=\int_0^1(1-\frac{1}{x+1})dx=(x-\ln(x+1))\,|_0^1=1-\ln 2$.

b) $I_n=\int_0^1 x\frac{nx^{n-1}}{x^n+1}dx=\int_0^1 x\left(\ln\left(x^n+1\right)\right)'dx=\ln 2-\int_0^1\ln\left(x^n+1\right)dx$

c) Știm că $\ln(1+t)\le t,\ \forall t\ge 0$, de unde $0\le\int_0^1\ln\left(1+x^n\right)dx<\int_0^1 x^n dx=\frac{1}{n+1}$.

Rezultă $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\ln\left(1+x^n\right)dx=0$, de unde $\lim\limits_{n\to\infty}I_n=\ln 2$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1.a) $f(1)=0$, $f'(x)=e^{-\frac{1}{x}}\dfrac{x^2+x-1}{x^2}$, $f'(1)=\dfrac{1}{e}$, deci ecuația este $y=\dfrac{1}{e}(x-1)$.

b) $f'(x)=0$ are rădăcinile $x_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. Din semnul derivatei rezultă că acestea sunt puncte de extrem local.

c) $m=\lim\dfrac{f(x)}{x}=1$, $n=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to\infty}x(e^{-\frac{1}{x}}-1)-e^{-\frac{1}{x}}=-2$, deci $y=x-2$ este asimptotă oblică spre $+\infty$.

2.a) Cum $f'(x)=x^3\sqrt{x^2+1}\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$, rezultă concluzia.

b) $f(1)=\int\limits_0^1 t^3\sqrt{t^2+1}dt=\int\limits_1^{\sqrt{2}}\left(u^4-u^2\right)du=\left(\dfrac{u^5}{5}-\dfrac{u^3}{3}\right)\Bigg|_1^{\sqrt{2}}=\dfrac{2\left(\sqrt{2}+1\right)}{15}$.

c) Deoarece $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{5x^4}=\dfrac{1}{5}$, din teorema lui l'Hôspital rezultă că limita cerută este $\dfrac{1}{5}$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1.a) $a_1 > a_0$, iar $a_{k+1} > a_k \Rightarrow a_{k+2} > a_{k+1}$, deci prin inducție $(a_n)_{n\geq 1}$ este crescător.

b) Avem $a_0 < 2$ și $a_k < 2 \Rightarrow a_{k+1} < 2$, deci inductiv $(a_n)_{n\geq 1}$ este mărginit superior. Fiind și monoton $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

c) Avem $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$ și $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+2}-a_{n+1}}{a_{n+1}-a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2+a_{n+1}}+\sqrt{2+a_n}} = \frac{1}{4}$.

2.a) $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (tg^2 t + tgt)dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} ((tgt)' + tgt - 1)dt = 1 - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2$.

b) $f'(x) = \frac{(\sin x + \cos x)\sin x}{\cos^2 x} > 0,\ \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, deci f este strict crescătoare.

c) Pentru cazul $\frac{0}{0}$, aplicând regula lui l'Hôspital, limita devine $\lim\limits_{x\searrow 0} \frac{(\sin x + \cos x)\sin x}{2x\cos^2 x} = \frac{1}{2}$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1.a). $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = +\infty$ deci dreapta de ecuație $x = 1$ este asimptota verticală la graficul funcției.

b) $m = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ și $n = \lim\limits_{x\to\infty} x\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - 1\right) = 1$, deci $y = x + 1$ este asimptota oblică spre $+\infty$.

c) Funcția este derivabilă în punctele în care este definită şi expresia de sub radical nu se anulează, adică pe $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$. În punctul -1, derivatele laterale nu sunt finite, deci funcția nu este derivabilă.

2.a) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x + \sin x)\,dx = 2$.

b) Din $F'(x) = f_4(x)$ rezultă $F''(x) = 4\sin x\cos x(\cos^2 x - \sin^2 x)f_4^2(x)$, deci $F''(x) = f_4^2(x)\sin 4x$.

c) Cu schimbarea de variabilă $y = \frac{\pi}{2} - x$,

$$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sin x + \cos x}dx = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\sin^3\left(\frac{\pi}{2} - y\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right)}(-1)\,dy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 y}{\sin y + \cos y}dy = J \text{, iar}$$

$$2I = I + J = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^2 x - \sin x\cos x + \cos^2 x\right)dx = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}.$$

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1.a) $f'(x) = \dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$, deci f este strict descrescătoare pe $(-\infty,0)$ și pe $(0,1]$ și strict crescătoare pe $[1,\infty)$.

b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \infty$, deci nu avem asimptotă spre $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$, deci $y = 0$ este asimptota orizontală spre $-\infty$.

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = -\infty$, deci $x = 0$ este asimptotă verticală.

c) Cu teorema lui Lagrange, $f(n+1) - f(n) = \dfrac{e^{c_n}(c_n-1)}{{c_n}^2}$, $c_n \in (n, n+1)$. Rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} n^2(f(n) - f(n+1) =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n}{c_n}\right)^2 (1-c_n)e^{c_n} = \lim\limits_{n\to\infty} (1-c_n)e^{c_n} = -\infty$.

2.a) $f(1) = \int_0^1 e^{-t}(t^2 - 3t + 2)dt = \int_0^1 e^{-t}(t-1)(t-2)dt > 0$.

b) $f'(x) = e^{-x}(x^2 - 3x + 2)$. Din tabelul de variație reiese că $x = 1$ este punct de maxim local și $x = 2$ este punct de minim local.

c) $L = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) + f(-x)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f'(x) - f'(-x)}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{-x}(x^2 - 3x + 2) - e^x(x^2 + 3x + 2)}{2x} = -5$

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1.a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1,\ y=1$ este asimptota orizontală spre $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1,\ y=1$ este asimptota orizontală spre $-\infty$.

$\lim\limits_{x\nearrow 0} f(x)=-\infty, \lim\limits_{x\searrow 0} f(x)=+\infty,\ x=0$ este asimptota verticală.

b) $f''(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}(2x+1)}{x^4}$, deci $x=-0{,}5$ este punct de inflexiune.

c) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2(e^{\frac{1}{x+1}}-e^{\frac{1}{x}})=\lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}}x^2\left(e^{-\frac{1}{x(x+1)}}-1\right)=\lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}}\dfrac{-x^2}{x(x+1)}\dfrac{e^{-\frac{1}{x(x+1)}}-1}{-\frac{1}{x(x+1)}}=-1$.

2.a) $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^2x dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+tg^2x)dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}1dx=tgx\,|_0^{\frac{\pi}{4}}-x\,|_0^{\frac{\pi}{4}}=1-\dfrac{\pi}{4}$

b) $I_{n+1}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{tg}^{2n+2}\,xdx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\mathrm{tg}^{2n}\,x(\mathrm{tg}^2\,x+1)-\mathrm{tg}^{2n}\,x\right]dx=\dfrac{\mathrm{tg}^{2n+1}\,x}{2n+1}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-I_n;\ I_{n+1}+I_n=\dfrac{1}{2n+1}$.

c) Cum $0\le tg_x^{2n+2}\le tg_x^{2n}$, $\forall x\in\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$, rezultă că $0\le I_{n+1}\le I_n$, deci șirul $(I_n)_{n\ge1}$ este descrescător și mărginit.

Dacă $l=\lim\limits_{n\to\infty} I_n$, atunci din punctul **b)** rezultă concluzia.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1.a) $f'(x)=\dfrac{6x^2}{\left(x^3+1\right)^2}$, $f'(0)=0, f(0)=-1$, deci ecuația este y+1=0 .

b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1,\ y=1$ este asimptota orizontală spre $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1,\ y=1$ este asimptota orizontală spre $-\infty$.

$\lim\limits_{x\nearrow-1} f(x)=-\infty,\ \lim\limits_{x\searrow-1} f(x)=+\infty,\ x=-1$ este asimptota verticală.

c) Din $\dfrac{k^3-1}{k^3+1}=\dfrac{(k-1)\big(k(k+1)+1\big)}{(k+1)\big(k(k-1)+1\big)}$, rezultă $\dfrac{3}{2}f(2)f(3)...f(n)=\dfrac{n^2+n+1}{n^2+n}$, de unde $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+n+1}{n^2+n}\right)^{n^2}=e.$

2.a) $I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\cos 2x}{2}dx=\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\sin 2x}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\dfrac{\pi}{4}$.

b) $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}x(-\cos x)'dx=-\sin^{n-1}x\cos x\,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\cos^2 x dx$

$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x(1-\cos^2 x)dx=(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n$, de unde rezultă relația.

c) $0\le\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^n x dx\le\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^n\dfrac{\pi}{3}dx=\dfrac{\pi}{3}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$, deci limita cautată este 0.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1.a) $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}>0, \forall x\in\mathbb{R}.$

b) $x_2=f(x_1)=\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\in(0,1)$ și, inductiv, $0<x_{n+1}<x_n, \forall n\in\mathbb{N}^*$, deci șirul este descrescător și mărginit.

c) Cu teorema lui Lagrange, $f(x+1)-f(x)=f'(c_x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+c_x^2}}\le 1.$

2.a) $\int_1^e \ln x dx = x\ln\Big|_1^e-\int_1^e 1dx=e-(e-1)=1.$

b) Cu schimbarea de variabilă $x=3-t$, $\int_1^2 f(x)dx=\int_2^1\dfrac{\ln t}{3-t}(-1)dt=\int_1^2\dfrac{\ln t}{3-t}dt=\int_1^2 g(x)dx.$

c) Pentru $x\in(0,3)$ avem $\dfrac{\ln(3-x)}{x}>\dfrac{\ln 2}{x}$, deci $\int_t^1 g(x)dx>\int_t^1\dfrac{\ln 2}{x}dx=\ln 2\cdot(-\ln t)$. Concluzia rezultă din $\lim\limits_{t\searrow 0}(-\ln 2\ln t)=\infty$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1.a) $f(1)=\frac{\pi}{4}, f'(1)=\frac{1}{2}$, deci ecuația este $y-\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}(x-1)$.

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-f(x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-f'(x)}{3x^2}=\frac{1}{3}$

c) Avem $g'(x)=\operatorname{arctg} x+\frac{x-1}{x^2+1}$, $g''(x)=\frac{2(1-x)}{(x^2+1)^2}$. Rezultă că g' este strict crescătoare pe $(-\infty,1]$ și strict decrescătoare pe $[1,\infty)$. Din $g'(1)>0$, $\lim\limits_{x\to\infty} g'(x)>0$ și $\lim\limits_{x\to-\infty} g'(x)<0$, reiese concluzia cerută.

2.a) $I_1=\int_0^1 x\sin x=-\cos x\Big|_0^1+\int_0^1\cos x dx=\sin 1-\cos 1.$

b) $x^n>x^{n+1}\Rightarrow I_n>I_{n+1}$; $\sin x>0\Rightarrow I_n>0$; $(I_n)_{n\geq 1}$ descrescător și mărginit, rezultă $(I_n)_{n\geq 1}$ convergent.

c) $I_{2n}=\int_0^1 x^{2n}(-\cos x)'dx=-x^{2n}\cos x\,|_0^1+2n\int_0^1 x^{2n-1}(\sin x)'$

$=-\cos 1+2nx^{2n-1}\sin x\,|_0^1-2n(2n-1)I_{n-1}=2n\sin 1-\cos 1-2n(2n-1)I_{2n-2}$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1.a) $f_a^{'}(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{x+a}{x(x+1)}$.

b) $f_a^{''}(x) = \frac{x(2a-1)+a}{x^2(x+1)^2}$. f convexă $\Leftrightarrow$ $f^{''}(x) \geq 0, \forall x > 0 \Leftrightarrow 2a-1 \geq 0$ și $\frac{a}{2a-1} > 0$, de unde $a \in \left[\frac{1}{2};\infty\right]$.

c) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(x+1)-\ln x}{\frac{1}{x+a}} = 1$, folosind regula lui l'Hôpital.

2.a) $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{\pi}{4}$.

b) $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x(\sin x)' dx = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x \sin^2 x dx = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$, de unde $nI_n = (n-1)I_{n-2}$.

c) $\cos x \in [0;1]$ de unde $I_{n+1} < I_n$; în plus $I_n \geq 0$, deci șirul este descrescător și mărginit inferior.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1.a). $\lim\limits_{x\searrow 0}\left(x+\ln x\right)=-\infty$,deci $x=0$ este asimptotă verticală; $\lim\limits_{x\to\infty} f\left(x\right)=\infty$, deci nu avem asimptotă orizontală; $m=1$ dar n nu este finit, deci nu avem asimptotă oblică.

b) $g_n\left(x\right)=x^n+x^{-n}$, $g_n^{''}\left(x\right)=n\left(n-1\right)x^{n-2}+n(n+1)x^{-n-2}>0,\forall x>0$, deci funcțiile sunt convexe.

c) Din $f_n\left(1\right)<2^n$ și $f_n\left(2\right)>2^n$, rezultă că $x_n\in\left(1,2\right)$, deci $\ln x_n\in\left(0,1\right)$. Deci $\sqrt[n]{2^n-1}<x_n<2\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$.

2.a) $I_2=\int\limits_0^a\frac{t^2}{t+1}dt=\int\limits_0^a\left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)dt==\frac{a^2}{2}-a+\ln\left(a+1\right)$

b) $I_n+I_{n-1}=\int\limits_0^a\frac{t^n+t^{n-1}}{t+1}dt=\int\limits_0^a t^{n-1}dt=\left.\frac{t^n}{n}\right|_0^a=\frac{a^n}{n}$.

c) $\frac{t^n}{t+1}<t^n,\forall t\in\left[0;a\right]$, $0<I_n<\int\limits_0^a t^n dt=\frac{a^{n+1}}{n+1}\to 0,\ \forall a\in\left[0;1\right]$, de unde rezultă $\lim\limits_{n\to\infty}I_n=0$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1.a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=2=m$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-2x\right)=0=n$, deci $y=2x$ asimptota oblică spre ∞ .

b) $f'(x)=\frac{2x^4+6x^2}{\left(x^2+1\right)^2}\geq 0$, deci *f* este strict crescătoare, adică injectivă. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ și *f* continuă, rezultă că *f* este surjectivă. Deoarece *f* este bijectivă rezultă că deci *f* este inversabilă.

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f\left(e^x\right)\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty} 2^{\frac{1}{x}}\cdot e^3\cdot\left(e^{2x}+1\right)^{-\frac{1}{x}}=e.$

2.a) $F'(x)=e^{\sin^2 x}>0$, de unde *F* este strict crescătoare

b) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2xF(x)dx=\frac{1}{2}\sin 2xF(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2xF'(x)dx=-\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2xe^{\sin^2 x}dx=-\frac{1}{2}e^{\sin^2 x}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1-e}{2}.$

c) Conform teoremei l'Hôpital, pentru cazul $\frac{0}{0}$, avem $\lim\limits_{x\to 0}\frac{F(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1.a) $f'(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$, $f'(e)=\dfrac{1}{e}$, $f(e)=0$, deci ecuația este $y=\dfrac{1}{e}(x-e)$.

b) $f''(x)=-\dfrac{\ln x+1}{(x\ln x)^2}<0, \forall x>1$, deci f este concavă

c) Conform teoremei lui Lagrange există $c_x\in(x,x+1)$ *a.i.* $f(x+1)-f(x)=f'(c_x)=\dfrac{1}{c_x\ln c_x}$.

Avem de calculat $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\ln x}{c_x\ln c_x}$. Cum $\dfrac{x\ln x}{(x+1)\ln(x+1)}<\dfrac{x\ln x}{c_x\ln c_x}<1$ limita căutată este 1.

2.a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=\operatorname{arctg}(\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$

b) Fie F o primitivă a lui f. Atunci $F'(x)=\dfrac{\cos x}{1+\sin^2 x}\geq 0, (\forall)x\in[0,\frac{\pi}{2}]$, deci F este strict cresătoare pe $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

c) Cu substituția $x=2\pi-y$ obținem $I=\displaystyle\int_0^{2\pi}(2\pi-y)f(y)dy=2\pi\int_0^{2\pi}f(y)dy-I$, de unde $I=0$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1.a) $f_t^{'}(x) = 3x^2 + t^2$

b) $f_t^{'}(x) = 3x^2 + t^2 > 0$ pentru orice x real, deci funcția este strict crescătoare. $\lim\limits_{x\to\infty} f_t(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f_t(x) = -\infty$, f_t continuă $\Rightarrow f_t$ surjectivă. Cum funcția este strict crescătoare, deci injectivă, înseamnă că ea este inversabilă.

c) Avem $g^3(t) + t^2 g(t) = 1$, unde $1 \geq g(t) \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}$, rezultă $\lim\limits_{t\to 0} g(t) = \lim\limits_{t\to 0} \sqrt[3]{1 - t^2 g(t)} = 1 = g(0)$.

2a) $f(1) = \int\limits_0^1 \left(t^2 + 1\right)\sqrt{t}dt = \frac{20}{21}$.

b) $f(x) = \frac{2x^3\sqrt{|x|}}{7} + \frac{2x\sqrt{|x|}}{3}$, deci $f(-x) = -f(x)$, adică f este impară.

c) Conform teoremei lui Lagrange, există $c_x \in (x, x+1)$ astfel încât $f(x+1) - f(x) = f'(c_x) = (c_x^2 + 1)\sqrt{c_x}$.

Cum $\frac{(x^2+1)\sqrt{x}}{x^2\sqrt{x}} < \frac{(c_x^2+1)\sqrt{c_x}}{x^2\sqrt{x}} < \frac{\left((x+1)^2+1\right)\sqrt{x+1}}{x^2\sqrt{x}}$, rezultă că limita căutată este 1.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1.a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ și $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, deci f nu admite asimptotă spre $+\infty$.

b) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (n+1)x^n - (n+2) = 0$, deci avem punctul de extrem unic $x_n = \sqrt[n]{\frac{n+2}{n+1}}$.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = e$.

2.a) $I_1 = \int_0^1 \frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx = \int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx = x\,|_0^1 - arctg\left(x\right)|_0^1 = 1-\frac{\pi}{4}$.

b) $I_{n+1} + I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+2}+x^{2n}}{1+x^2}dx = \int_0^1 x^{2n}dx = \frac{1}{2n+1}$.

c) $\frac{x^{2n}}{1+x^2} \le x^{2n},\ \forall x \in [0,1] \Rightarrow 0 < I_n \le \int_0^1 x^{2n}dx = \frac{1}{2n+1} \to 0$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1.a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$ deci $y = \frac{\pi}{2}$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$.

b) $g'(x) = f'(x+1) - f'(x) - f'\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right)\cdot\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right)' = 0 \Rightarrow g = \text{constană} = g(0) = 0$

c) $\operatorname{arctg}\frac{1}{k^2+k+1} = \operatorname{arctg}(k+1) - \operatorname{arctg}k$, deci $\sum\limits_{k=1}^{n}\operatorname{arctg}\frac{1}{k^2+k+1} = \operatorname{arctg}(n+1) - \frac{\pi}{4}$, iar

$\lim\limits_{n\to\infty}(\operatorname{arctg}(n+1) - \frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4}$.

2.a) $I_1 = \int_0^1 e^{-x}xdx = \int_0^1 x(e^{-x})'dx = -xe^{-x}\,|_0^1 + \int_0^1 e^{-x}dx = -e^{-1} - e^{-x}\,|_0^1 = -2e^{-1} + 1$.

b) $I_n = \int_0^1 \left(-e^{-x}\right)' x^n dx = -x^n e^{-x}\,|_0^1 + n\int_0^1 e^{-x}x^{n-1}dx = -e^{-1} + nI_{n-1}$.

c) Avem $0 \le I_n \le \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1.a) $\lim\limits_{x\searrow k} f(x)=\infty$ și $\lim\limits_{x\nearrow k} f(x)=-\infty,\ \mathrm{k}\in\{1,2,...,2009\}$, deci $x=k$ este asimptota verticală pentru $\mathrm{k}\in\{1,2,...,2009\}$. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\Rightarrow$ y=0 este asimptota orizontală spre ∞ și spre $-\infty$.

b) $f'(x)<0$, deci f este strict descrescătoare pe fiecare interval inclus în A. Din $\lim\limits_{x\searrow k} f(x)=\infty,\ \lim\limits_{x\nearrow k+1} f(x)=-\infty$ reiese că avem câte o soluție pe fiecare interval $(k,k+1)$, $k\in\{1,2,3,...,2008\}$, adică 2008 soluții. Apoi, din $\lim\limits_{x\searrow 2009} f(x)=\infty, \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0, \lim\limits_{x\nearrow 1} f(x)=-\infty, \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$, reiese că, pentru $a\neq 0$, mai avem și o soluție în $(-\infty,1)\cup(2009,\infty)$.

c) $f''(x)=\dfrac{2}{(x-1)^3}+\dfrac{2}{(x-2)^3}+...+\dfrac{2}{(x-2009)^3}$ se anulează în $(k,k+1)$ o singură dată, deci, avem 2008 puncte de inflexiune.

2.a) $f'(x)=e^{-x^2}>0$, $\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

b) $f''(x)=-2xe^{-x^2}\leq 0$, $\forall x\in[0;\infty)\Rightarrow f$ este concavă pe $[0;\infty)$.

c) $f(n)=\int_0^n e^{-t^2}dt$ și $f(n+1)-f(n)=\int_n^{n+1} e^{-t^2}dt>0\Rightarrow (f_n)_{n\geq 1}$ crescător. $e^{-t^2}\leq e^{-t}$ pentru $t\geq 1\Rightarrow$ $f(n)\leq\int_0^1 e^{-t^2}dt+\int_1^n e^{-t}dt\leq 1+\left(e^{-1}-e^{-n}\right)\leq 2\Rightarrow (f_n)_{n\geq 1}$ este mărginit superior. Deci $(f_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1.a) $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$, $f''(x)=\dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}\le 0, \forall x\in[0;\infty)$.

b) $L=\lim\limits_{x\to\infty} x^2(f(x+1)-f(x))=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\operatorname{arctg}(x+1)-\operatorname{arctg}x}{\dfrac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{1+(x+1)^2}-\dfrac{1}{1+x^2}}{-\dfrac{2}{x^3}}=1$.

c) Fie $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=f(x)-x+\dfrac{x^3}{3}$, atunci $g'(x)=\dfrac{x^4}{1+x^2}\ge 0$, deci g este strict crescătoare. Cum $g(0)=0$, rezultă $g(x)<0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,0)$.

2.a) $\int\limits_0^1 x(1+x^2)f(x)dx=\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^1=\dfrac{1}{2}\ln 2$.

b) $F'(x)=x^4 f(x)>0$ pentru $x\in\mathbb{R}^*$, deci F este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

c) Fie $A=\int\limits_1^a f(x)dx$. Dacă $a<1$, atunci $A<0<\dfrac{1}{4}$, iar dacă $a\ge 1$, atunci $A\le\int\limits_1^a\dfrac{x}{(1+x^2)^2}dx=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2(1+a^2)}<\dfrac{1}{4}$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1.a) $f'(x) = nx^{n-1} - n$ și $f''(x) = n(n-1)x^{n-2} \geq 0, \ \forall x \geq 0$, deci f este convexă.

b) Șirul lui Rolle atașat ecuației $x^n - nx - 1 = 0, x \geq 0$ este:

x	0	1	∞
$f(x)$	$-$	$-$	$+$

de unde concluzia.

c) Avem $f_n(1) < 0$ și $f_n(n) = n^n - n^2 - 1 > 0$ pentru $n \geq 3$, deci $1 < x_n < n$. Din $x_n = \sqrt[n]{1 + nx_n}$ rezultă $1 \leq x_n \leq \sqrt[n]{1+n^2}$, de unde $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

2.a) $\int_0^1 f(x)dx = \ln\left(1+e^x\right)\Big|_0^1 = \ln\frac{1+e}{2}$.

b) $g'(x) = f(x)\cos x + f(-x)\cos x = \cos x$, deci g este crescătoare pe $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ și descrescătoare pe $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

c) Din $g'(x) = \cos x$ și $g(0) = 0$, rezultă $g(x) = \sin x$, deci $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1. a) $f'(x)=\dfrac{3x^2+6x+2}{3\sqrt[3]{(x^3+3x^2+2x+1)^2}}-\dfrac{3x^2-1}{3\sqrt[3]{(x^3-x+1)^2}}$

$f(0)=0,\ \ f'(0)=1$, deci ecuația este $y=x$.

b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+3x}{\sqrt[3]{(x^3+3x^2+2x+1)^2}+\sqrt[3]{(x^3+3x^2+2x+1)\left(x^3-x+1\right)}+\sqrt[3]{(x^3-x+1)^3}}=1$, deci

$y=1$ este asimptota spre $+\infty$.

c) Din $f(k)=\sqrt[3]{k(k+1)(k+2)+1}-\sqrt[3]{(k-1)k(k+1)+1}$ deducem $\sum\limits_{k=1}^{n} f(k)=\sqrt[3]{n^3+3n^2+2n+1}-1$.

Limita cerută este de tipul 1^∞ și devine $l=e^{\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n^3+3n^2+2n+1}-n-1)}=e^0=1$.

2.a) $f_1(e)=\int_{\frac{1}{e}}^{e}\left(\dfrac{t^2}{2}\right)'\ln t\,dt=\dfrac{t^2\ln t}{2}\Bigg|_{\frac{1}{e}}^{e}-\dfrac{1}{2}\int_{\frac{1}{e}}^{e} t\,dt=\dfrac{e^2}{4}+\dfrac{3}{4e^2}$.

b) $f_n'(x)=x^n\ln x$, iar $x\in(0;1)\Rightarrow \ln x\le 0\Rightarrow f'(x)\le 0$

c) $-1\le \ln t\le 0\ \forall x\in\left[\dfrac{1}{e};1\right]$, rezultă $-\int_{\frac{1}{e}}^{1} t^n\le f_n(1)\le 0$, adică $-\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{(n+1)e^{n+1}}\le f_n(1)\le 0$, deci

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(1)=0$

www.bacmatematica.ro & www.mateinfo.ro

Soluție

1a) $f'(x) = e^x + 3x^2 - 2x + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, de unde rezultă că funcția este strict crescătoare

b) Din punctul anterior rezultă ca functia este injectivă $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty, \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, funcția este continuă, deci surjectivă, adică inversabilă.

c) Cu substituția $x = f(y)$ obținem $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f^{-1}(x)}{\ln x} = \lim\limits_{y\to\infty} \frac{y}{\ln(e^y + y^3 - y^2 + y)} = 1$.

2a) $I_1 = \int_0^1 \frac{x}{x^2+3x+2}dx = \int_0^1 \left(\frac{2}{x+2} - \frac{1}{x+1}\right)dx = 2\ln 3 - 3\ln 2$.

b) $I_{n+2} + 3I_{n+1} + 2I_n = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$.

c) $nI_n = \int_0^1 nx^n \left(\frac{2}{x+2} - \frac{1}{x+1}\right)dx = \int_0^1 \frac{2x(x^n)'}{x+2}dx - \int_0^1 \frac{x(x^n)'}{x+1}dx = \frac{1}{6} - 4\int_0^1 \frac{x^n}{(x+2)^2}dx + \int_0^1 \frac{x^n}{(x+1)^2}dx$, de unde rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n = \frac{1}{6}$