LFA Seminar 5

ex 1

Să se arate că urm. limbaje nu sunt regulate:

a) $L_1 = \{ a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N} \}$

b) $L_2 = \{ w \in \{ "(", ")" \} \mid w$ bine-parantezat $\}$

c) $L_3 = \{ ww \mid w \in \{a, b\}^* \}$

ex 2

Confirmați sau infirmați

i) $L \notin REG \Rightarrow \overline{L} \notin REG$

ii) $L_1, L_2 \notin REG \Rightarrow L_1 \cup L_2 \notin REG$

ex 3

Fie $L = \{ a^i b^j c^n \mid$ dacă $i = 1$, atunci $j = n \}$

Să se arate că

i) $L \notin REG$

ii) L satisface lema de pompare

Teoremă

Fie $L \subseteq \Sigma^*$ regulat

Atunci $\exists\, p \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall\, w \in L$ cu $|w| \geq p$

$\exists\, x, y, z \in \Sigma^*$ cu $w = xyz$ a.î.

i) $\forall\, i \in \mathbb{N}$, $xy^iz \in L$

ii) $y \neq \varepsilon$

iii) $|xy| \leq p$

ex 1

Să se arate că urm. limbaje nu sunt regulate:

a) $L_1 = \{ a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N} \}$

b) $L_2 = \{ w \in \{ "(", ")" \} \mid w$ liniie - parantezat $\}$

c) $L_3 = \{ ww \mid w \in \{a, b\}^* \}$

a)

Sol:

Presupunem că L_1 este regulat. Atunci există p lungime de pompare pt L_1.

Luăm $w = a^n b^n c^n$. $|w| = 3n \geq n$

Deci există x, y, z cu $w = xyz$ și i), ii), iii).

$|xy| \leq n \Rightarrow xy \in a^* \Rightarrow$ $x = a^k$, $y = a^m$, $z = a^{n-k-m} b^n c$

Din i)

$m \neq 0$ (din ii))

Fie $i = 2$, $xy^2z = a^k a^{2m} a^{n-k-m} b^n c^n$

$= a^{n+m} b^n c^n \notin L_2$

Deci $L_1 \notin REG$

$\square$

b)

Sol:

Presupunem ca L_2 este regulat. Atunci există n lungime de pompare pt L_2

Luăm $w = (^n)^n$ $|w| = 2n \geq n$

Deci există x, y, z cu $w = xyz$ și i), ii), iii).

$|xy| \le p \Rightarrow xy \in a^* \Rightarrow \begin{cases} x = (^k \\ y = (^m \\ z = (^{p-k-m})^p \end{cases}$ $m \neq 0$ (din ii))

Din i)

$m \neq 0$ (din ii))

Fie $i = 2$, $xy^2z = (^{p+m})^p \notin L_2$

Deci $L_2 \notin REG$

$\square$

c)

Presupunem ca L_3 este regulat. Atunci există p lungime de pompare pt L_3

Luăm $w = a^p b^p a^p b^p$ $|w| = 4p \ge p$

Deci există x, y, z cu $w = xyz$ și i), ii), iii).

$|xy| \le p \Rightarrow xy \in a^* \Rightarrow \begin{cases} x = a^k \\ y = a^m \\ z = a^{p-k-m} b^p a^p b^p \end{cases}$ $m \neq 0$

$xy^iz = a^{p+(i-1)m} b^p a^p b^p$

Pt $i = 2p+1$ avem $xy^iz = a^{p+2pm} b^p a^p b^p$

$m > 0 \Rightarrow p + 2mp \geq 3p \Rightarrow$ prima jumătate $\leq a$

??

d) $L_4 = \{ a^i b^j \mid i > j \}$

Presupunem că L_4 este regulat. Atunci există p lungime de pompare pt L_4

Fie $w = a^{p+1} b^p \quad |w| = 2p+1 \geq p$

Deci există x, y, z cu $w = xyz$ și i), ii), iii).

$$|xy| \leq p \Rightarrow \begin{array}{l} x = a^k \\ y = a^m, \quad m \neq 0 \\ z = a^{p+1-k-m} b^p \end{array}$$

$$x y^i z = a^{p+1+(i-1)m} b^p$$

Pt $i = 0$, $x y^0 z = a^{p+1-m} b^p$

$m > 0 \Rightarrow p+1-m \leq p$

$\Rightarrow x y^0 z \notin L_4 \Rightarrow L_4 \notin REG$

$\square$

c)

$$L_5 = \{ a^n \mid n \text{ prim} \}$$

Sol:

Presupunem că L_5 este regulat. Atunci există p lungime de pompare pt L_5.

Fie q prim cu $q > p$.

$$w = a^q \in L_5 \qquad |w| = q \geq p$$

Deci există x, y, z cu $w = xyz$ și i), ii), iii).

$$|xy| \leq p \Rightarrow \begin{array}{l} x = a^k \qquad k + m \leq p \\ y = a^m, \quad m \neq 0 \\ z = a^{q-m-k} \end{array}$$

$$x y^i z = a^{q + (i-1)m}$$

Pt $i = q+1$, $x y^i z = a^{q + qm} = a^{q(m+1)} \notin L_5$

Deci $L_5 \notin REG$

ex 2

Confirmați sau infirmați

i) $L \notin REG \Rightarrow \bar{L} \notin REG$ ✓

ii) $L_1, L_2 \notin REG \Rightarrow L_1 \cup L_2 \notin REG$ ✗

<u>**Sol**</u>:

i) Fie $L \notin REG$.

Presupunem prin r.a. că $\bar{L} \in REG$

i) $L \notin REG$
Atunci $\bar{\bar{L}} \in REG \Leftrightarrow L \in REG$

ii) L satisface lema de pompare

Deci $L \in REG$ contradicție $\square$

ii)

Fie $L \notin REG$ oarecare

$\bar{L} \notin REG$. Dar $L \cup \bar{L} = \Sigma^* \in REG$

$\square$

ex 3

Fie $L = \{ a^i b^j c^n \mid$ dacă $i = 1$, atunci $j = n \}$

Să se arate că

i) $L \notin REG$

ii) L satisface lema de pompare

Prop Fie L_1, L_2 a.î. $L_1 \in REG$ și $L_1 \cap L_2 \notin REG$

Atunci $L_2 \notin REG$

Sol:

$$L = \underbrace{\{ a b^n c^n \}}_{\notin REG} \cup \{ a^i b^j c^n \mid i \neq 1 \}$$

$x = ?$

$$L \cap \underbrace{X}_{\in REG} = \{ a \underbrace{b^n c^n}_{\notin REG} \} \Rightarrow L \notin REG$$

$$L \cap \underbrace{a b^* c^*}_{\in REG} = \underbrace{\{ a b^n c^n \}}_{\notin REG} \Rightarrow L \notin REG$$