Seminar 7

A "$\sim$" o rel de echiv pe A : "$\sim$" e reflexivă
simetrică
tranzitivă

S.C.R. pt A în raport cu ρ

$\downarrow$

$S \subseteq A$ care are 1 $\forall\, x \in A \ \exists\, s \in S$ a.î. $x \rho s$
$(\hat{x} = \hat{s})$

2 $\forall\, s_1 \neq s_2,\ s_1, s_2 \in S \Rightarrow s_1 \not\rho\, s_2$
$(\hat{s}_1 \cap \hat{s}_2 = \phi)$

Exerciții

ex 1

Relația ρ def pe $\mathbb{R}^*$: $x \rho y \iff x \cdot y > 0$

$\downarrow$

este rel. de echiv

Aflați un S.C.R. pe ρ

Sol :

1) $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \underset{x \cdot x}{\underset{\parallel}{x^2}} > 0 \Rightarrow x \rho x \Rightarrow \rho$ reflex

"$\cdot$" com pe $\mathbb{R}$

2) Fie $x, y \in \mathbb{R}$ a.î. $x \rho y \Rightarrow x \cdot y > 0 \Rightarrow y \cdot x > 0$
$\Rightarrow y \rho x \Rightarrow \rho$ simetrică

3) Fie $x, y, z \in \mathbb{R}^*$ a.î. $x \rho y$ și $y \rho z$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x \cdot y > 0 \\ y \cdot z > 0 \end{array}\right| \Rightarrow x \cdot y^2 \cdot z > 0 \quad \Big| : \frac{1}{y^2}$$

$$y^2 \in \mathbb{R}^2, \ y > 0$$

$\Rightarrow xz > 0 \Rightarrow x \rho y \Rightarrow \rho$ tranz

Din (1), (2), (3) $\Rightarrow \rho$ este relație de echiv.

Vrem clasele:

luate arbitrar

$-\widehat{\sqrt{2}}, \ \widehat{\sqrt{3}} = \{x \in \mathbb{R}^* \mid \sqrt{3} \, \rho \, x\} = \{x \in \mathbb{R}^* \mid \sqrt{3} \cdot x > 0\} = \mathbb{R}^*_+$

$\|$

$\mathbb{R}^*_-$ (analog)

Obs $\exists$ o infinitate de S.C.R. ori

$S = \{-\widehat{\sqrt{2}}, \sqrt{3}\}$ e un SCR

$S = \{a, b\}$ e S.C.R. ori $a < 0, \ b > 0$

$\mathbb{R}^*/\rho = \{-\hat{1}, \hat{1}\}$

ex 2

pe $\mathbb{R}$ $\quad x \sim y \iff [x] = [y]$

Arătați că "$\sim$" e rel. de echiv și det un S.C.R.

Sol:

1) $\forall x \in \mathbb{R}$, $[x] = [x] \Rightarrow x \sim x \Rightarrow \sim$ e reflex

2) Fie $x, y \in \mathbb{R}$ a.î. $x \rho y \Rightarrow [x] = [y] \Rightarrow$

$[y] = [x] \Rightarrow y \sim x \Rightarrow \sim$ simetrică

3) Fie $x, y, z \in \mathbb{R}$ a.î. $x \sim y$ și $y \sim z$

$$\begin{cases} [x] = [y] \\ [y] = [z] \end{cases} \Rightarrow [x] = [z] \Rightarrow x \sim z \Rightarrow \sim \text{ tranz}$$

Din (1), (2), (3) $\Rightarrow \sim$ rel. de echiv

1) $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \underbrace{[x]}_{\in \mathbb{Z}} \leq x < [x] + 1 \Rightarrow [x] = [[x]] \overset{def}{\underset{\sim}{\Rightarrow}}$

$x \sim [x]$

2) Fie $\underset{x \neq y}{x, y} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = [x] \text{ și } y = [y] \\ x \neq y \end{matrix}\right\} \Rightarrow [x] \neq [y]$

$x \not\sim y$

Din (1) și (2) $\mathbb{Z}$ e S.C.R.

ex 3

pe $\mathbb{R}$ $\quad x \sim y \overset{def}{\Longleftrightarrow} x^2 - 3x = y^2 - 3y$

Arătați că "$\sim$" e rel. de echiv. și det un S.C.R.

E bine definită funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$