Seminar 6

ex 1

Faceți analiza top. a mulțimii $A \subset \mathbb{R}^2$, unde

$A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 4, \ y \geq 0 \}$

ex 2

Studiați continuitatea funcțiilor

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} ; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

$| f(x,y) - f(0,0) |$ → majorare $\dfrac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq 1$

b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} ; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 ; & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

$(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right)$

$\lim\limits_{n \to \infty} (x_n, y_n) \overset{d_2}{=} (0, 0)$

$\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n, y_n) \neq 0 \neq f(0,0)$

ex 3

Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin \frac{1}{x} , & x \neq 0 \\ 0 ; & x = 0 \end{cases}$

Studiați continuitatea și uniform continuitatea lui f

$| f'(x) | \leq M \Rightarrow f$ u.c

$f|_A$ cont $\wedge$ A compactă $\Rightarrow f|_A$ u. cont

Considerăm $n \in \mathbb{N}^*$ și spațiul metric $(\mathbb{R}^n, d_2)$, unde $d_2 \overset{not}{=} d$

$d_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

Fie $n = 2$ și $r > 0$

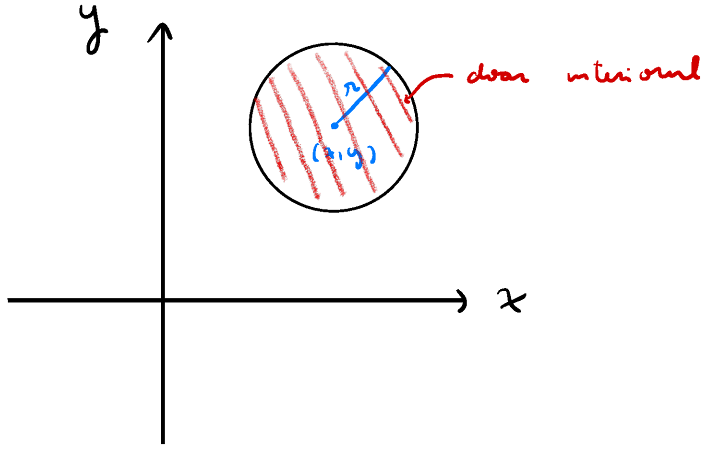
1)

$B((x,y), r) = \{(z,t) \in \mathbb{R}^2 \mid d((x,y),(z,t)) < r\}$

$= \{(z,t) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{(x-z)^2 + (y-t)^2} < r\}$

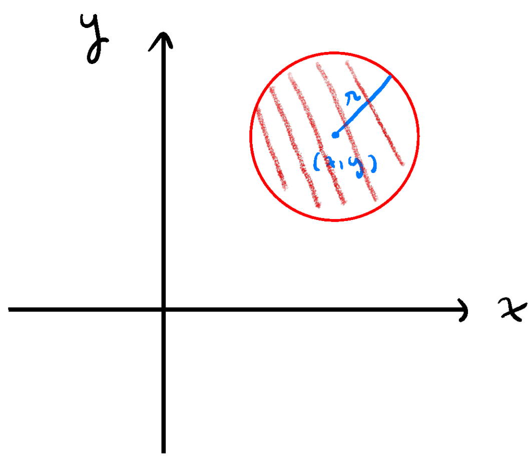
$= \{(z,t) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-z)^2 + (y-t)^2 < r^2\}$

$= \{(z,t) \in \mathbb{R}^2 \mid (z-x)^2 + (t-y)^2 < r^2\}$ = discul deschis de centru (x,y) și rază r



2) $B[(x,y), r] = \dots = \{(z,t) \in \mathbb{R}^2 \mid (z-x)^2 + (t-y^2) \le r\}$

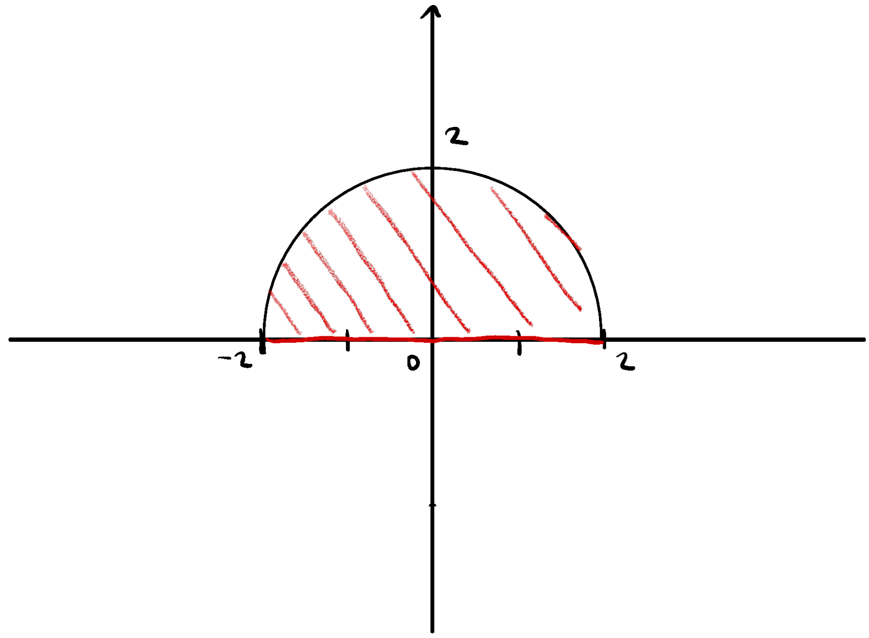
= discul închis de centru (x,y) și rază r



ex 1

Faceți analiza top. a mulțimii $A \subset \mathbb{R}^2$, unde

$$A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 4 ,\ y \geq 0 \}$$



1) $\mathring{A} = ?$

$(x,y) \in \mathring{A} \iff \exists r > 0$ a.î. $B((x,y), r) \subset A$

$\mathring{A} \subset A$

$$\left.\begin{array}{l} \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 4 ,\ y > 0 \} \subset A \\ \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 4 ,\ y > 0 \} \text{ deschisă} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 4 ,\ y > 0 \} \subset \mathring{A}$$

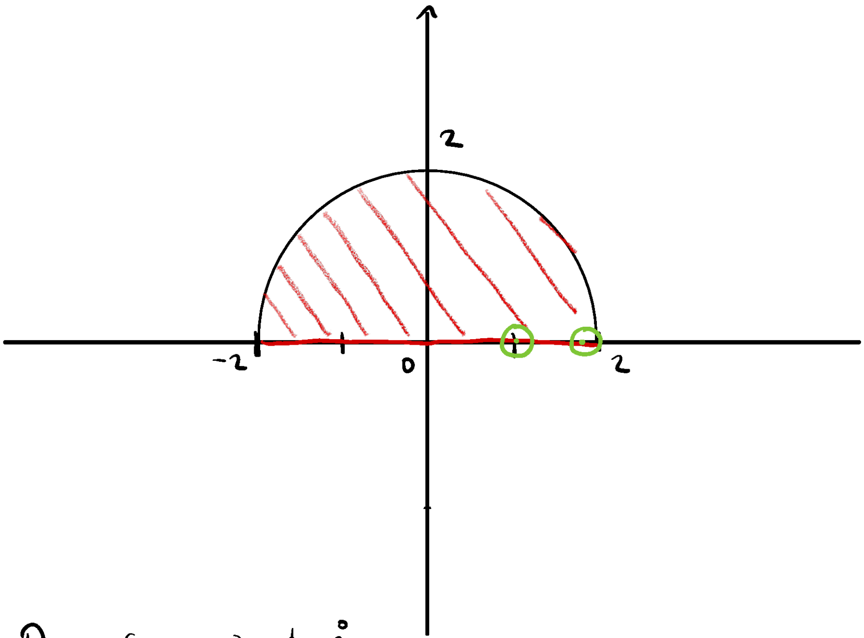
Avem $\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 4 ,\ y > 0 \} \subset \mathring{A} \subset$

$\subset \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 4 ,\ y \geq 0 \}$

Studiem dacă $\underbrace{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<4,\ y=0\}}_{(-2,2)\times\{0\}} \subset \mathring{A}$

Fie $x,y \in \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<4,\ y=0\}$

$(x,y)\in\mathring{A} \iff \exists\, r>0$ a.î. $B((x,y),r)\subset A$



Deci $(x,y)\notin\mathring{A}$

Deci $\mathring{A} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<4,\ y>0\}$

2) $\bar{A} = ?$

$(x,y)\in\bar{A} \iff \forall\, r>0$ avem $B((x,y),r)\cap A \neq \emptyset$

$A\subset\bar{A}$

$\left.\begin{array}{l}\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le 4,\ y\ge 0\}\supset A \\ \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le 4,\ y\ge 0\} \text{ compactă}\end{array}\right\}\Rightarrow$

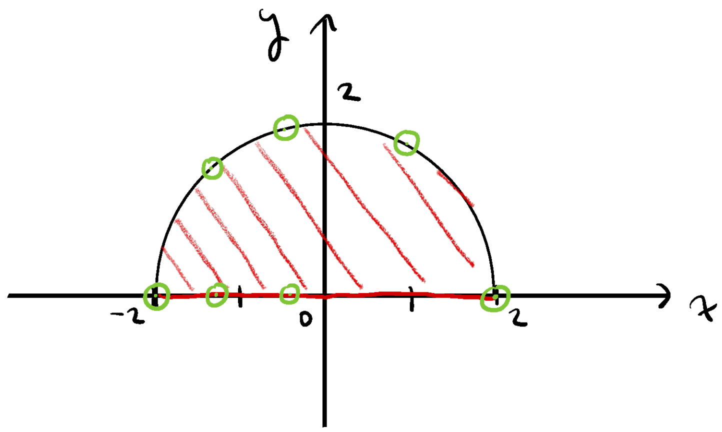
$\Rightarrow \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le 4,\ y\ge 0\}\supset\bar{A}$

Deci avem $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 4,\ y > 0\} \subset \bar{A} \subset$

$\subset \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 4,\ y \geq 0\}$

Studiem dacă $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 4,\ y = 0\} \subset \bar{A}$

$(x,y) \in \bar{A} \iff \forall r > 0$ avem $B((x,y),r) \cap A \neq \emptyset$



Deci $(x,y) \in \bar{A}$

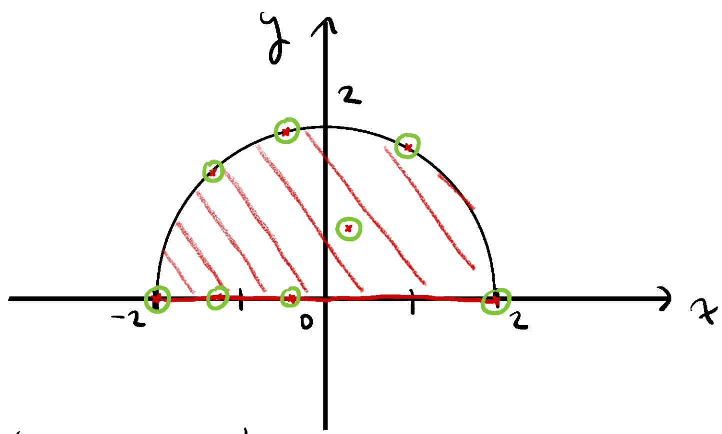
A rezultat $\bar{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 4$ și $y \geq 0\}$

3) $A' = ?$

$(x,y) \in A' \iff \forall r > 0$ avem $B((x,y),r) \cap (A \setminus \{(x,y)\}) \neq \emptyset$

$A' \subset \bar{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 4$ și $y \geq 0\}$

$(x,y) \in A' \iff \forall r > 0$ avem $B((x,y),r) \cap (A \setminus \{(x,y)\}) \neq \emptyset$



Deci $(x,y) \in A'$

Aradar $A' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 4$ și $y \ge 0\}$

4) $Fr(A) = \bar{A} \setminus \mathring{A}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 4$ și $y \ge 0\} \setminus$
$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 4, \ y > 0\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 4, \ y = 0\}$

5) $Izo(A) = {}'A = \bar{A} \setminus A'$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 4$ și $y \ge 0\} \setminus$
$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 4$ și $y \ge 0\}$

$= \emptyset$ $\square$

ex 2

Studiați continuitatea funcțiilor

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} ; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

f cont pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (op. cu func. elem)

Studiem continuitatea lui f în $(0,0)$

Fie $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$|f(x,y) - f(0,0)|$

$$= \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0 \right| = \frac{|x| \cdot |y|}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= |x| \cdot \underbrace{\frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{\leq 1} = |x| \cdot 1 \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

Explicație: $\sqrt{x^2+y^2} \geq \sqrt{y^2} = |y| \quad \Big| : \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$

$$1 \geq \frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$$

Deci f cont în $(0,0)$

$\square$

b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0; & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

f cont în $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (op. cu funct. elem.)

Studiem cont lui f în $(0,0)$

Alegem $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Avem $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n, y_n) \overset{d_2}{=} (0,0)$

și $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n \cdot y_n}{x_n^2 + y_n^2}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\cancel{n^2}} \cdot \frac{\cancel{n^2}}{2} = \frac{1}{2} \neq 0 \neq f(0,0)$$

Deci f nu este cont în $(0,0)$

ex 3

Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0; & x = 0 \end{cases}$

Studiați continuitatea și uniform continuitatea lui f

Sol:

Continuitatea

f cont pe $\mathbb{R}^*$ (op. cu fun. elem.)

Studiem cont. lui f în 0

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x \cdot \sin \frac{1}{x} = 0 \quad (\text{„zero} \cdot \text{mărg} = \text{zero"})$$

Deci f cont în 0

Uniform continuitatea

$$f'(x) = \left(x \cdot \sin \frac{1}{x}\right)' = \sin \frac{1}{x} + x \cdot \cos \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cdot \cos \frac{1}{x}$$

$|f'(x)| \leq M \Rightarrow f$ u.c

$$|f'(x)| = \left|\sin \frac{1}{x} - x \cdot \cos \frac{1}{x}\right| \leq \underbrace{|\sin x|}_{\leq 1} + \left|-\frac{1}{x} \cdot \cos \frac{1}{x}\right| =$$

$$= 1 + \frac{1}{|x|} \cdot \underbrace{\left|\cos \frac{1}{x}\right|}_{\leq 1} = 1 + \frac{1}{|x|} \leq 1 + 1 = 2$$

$\forall x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

Deci $f|_{(-\infty,-1]}$ u.c și $f|_{[1,+\infty)}$ u.c.

$f|_A$ cont $\wedge$ A compactă $\Rightarrow$ $f|_A$ u. cont

$$\left.\begin{array}{ll} f|_{[-1,1]} & \text{cont} \\ [-1,1] & \text{compactă} \end{array}\right\} \Rightarrow f|_{[-1,1]} \text{ cont}$$

$$\left.\begin{array}{ll} f|_{(-\infty,-1]} & \text{u.c} \\ f|_{[-1,1]} & \text{u.c} \end{array}\right\} \Rightarrow f|_{(-\infty,1]} \text{ u.c.}$$

$$\left.\begin{array}{ll} f|_{(-\infty,1]} & \text{u.c.} \\ f|_{[1,\infty)} & \text{u.c} \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ u.c}$$