Curs 2

8 Oct 2024

1. Serii de numere reale

2. Criteriul suficient de divergență

$$\lim_{n\to\infty} x_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=0} x_n \text{ div}$$

3. Serie geometrică

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n \begin{cases} \text{conv}, & q \in (-1, 1) \\ \text{div}, & q \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1) \end{cases}$$

4. Serie armonică generalizată

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \begin{cases} \text{conv}, & \alpha > 1 \\ \text{div}, & \alpha \leq 1 \end{cases}$$

5. Operații cu serii

6. Criterii de conv. pt. serii cu termeni pozitivi

1) Criteriul raportului : $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \ell$

$\ell < 1 \Rightarrow \sum x_n$ conv, $\ell > 1 \Rightarrow \sum x_n$ div

2) Criteriul radicalului : $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \ell$

$\ell < 1 \Rightarrow \sum x_n$ conv, $\ell > 1 \Rightarrow \sum x_n$ div

3) Criteriul Raabe - Duhamel $\lim_{n\to\infty} n \cdot \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) = \ell$

$\ell < 1 \Rightarrow \sum x_n$ div, $\ell > 1 \Rightarrow \sum x_n$ conv

4) Criteriul condensării

x_n descrescător $\Rightarrow \sum x_n \sim \sum 2^n \cdot x_{2^n}$

5) Criteriul de comparație cu inegalități

$x_n \le y_n$

$\sum y_n$ conv $\Rightarrow$ $\sum x_n$ conv

$\sum x_n$ div $\Rightarrow$ $\sum y_n$ div

6) Criteriul de comparație cu limită

$\lim\limits_{n \to \infty} \frac{x_n}{y_n} = \ell$

$\ell \in (0, +\infty) \Rightarrow \sum x_n \sim \sum y_n$

$\ell = 0$, $\sum y_n$ conv $=$ $\sum x_n$ conv

$\ell = +\infty$, $\sum y_n$ div $\Rightarrow$ $\sum x_n$ div

7. Criterii de conv. pt. serii cu termeni oarecare

1) Criteriul Abel - Dirichlet

I
$$\left.\begin{array}{l} x_n \text{ desc}, \ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 \\ \left| \sum\limits_{k=0}^{n} y_k \right| \le M \end{array}\right\} \Rightarrow \sum x_n \cdot y_n \text{ conv}$$

II
$$\left.\begin{array}{l} x_n \text{ monoton} \wedge \text{mărg} \\ \sum y_n \text{ conv} \end{array}\right\} \Rightarrow \sum x_n \cdot y_n \text{ conv}$$

8. Criteriul Leibniz

x_n desc $\wedge$ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x_n$ conv

ex 1

Fie $x_n = \frac{1+(-1)^n}{2} + (-1)^n \cdot \frac{n}{2n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Det $\underline{\lim}\, x_n$, $\overline{\lim}\, x_n$ și precizați dacă

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n$

Sol:

$$x_{2k} = \frac{1+(-1)^{2k}}{2} + (-1)^{2k} \cdot \frac{2k}{2\cdot 2k+1} = \frac{1+1}{2} + 1 \cdot \frac{2k}{4k+1}$$

$$x_{2k} = 1 + \frac{2k}{4k+1} \xrightarrow[k\to\infty]{} 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$x_{2k+1} = \frac{1+(-1)^{2k+1}}{2} + (-1)^{2k+1} \cdot \frac{2k+1}{2\cdot(2k+1)+1} = \frac{1-1}{2} + (-1) \cdot \frac{2k+1}{4k+3}$$

$$x_{2k+1} = -\frac{2k+1}{4k+3} \xrightarrow[k\to\infty]{} -\frac{1}{2}$$

$\mathbb{N} = 2\mathbb{N} \cup (2\mathbb{N}+1)$

Deci $\mathcal{L}((x_n)_n) = \{-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\}$

Așadar $\underline{\lim}\, x_n = -\frac{1}{2}$ și $\overline{\lim}\, x_n = \frac{3}{2}$

$\underline{\lim}\, x_n \neq \overline{\lim}\, x_n \Rightarrow \nexists \lim\limits_{n\to\infty} x_n$

$\square$

Serii de numere reale

Def Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{N}$ și $s_n = x_p + x_{p+1} + \dots + x_n$

Perechea $\left((x_n)_{n \geq p}, (s_n)_{n \geq p} \right)$ se n. serie de numere reale

Notație În contextul definiției precedente, perechea $\left((x_n)_{n \geq p}, (s_n)_{n \geq p} \right)$ se notează $\sum_{n=p}^{\infty} x_n$ sau $\sum_{n \geq p} x_n$ sau $\sum_{n} x_n$

Obs În general $p = 0$ sau $p = 1$, cazuri pe care le vom considera în continuare

Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie de nr. reale ($s_n = x_0 + x_1 + \dots + x_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$)

Def

1) Elementele șirului $(x_n)_n$ se n. termenii seriei $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$

2) Elementele șirului $(s_n)_n$ se n. sumele parțiale ale seriei

3) Dacă $\exists \lim_{n \to \infty} s_n \overset{not}{=} \alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ acest α s. n.

suma seriei $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ și vom scrie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \alpha$
sau $\sum_{n\geq 0} x_n$ sau $\sum_{n} x_n = \alpha$

4) Spunem că seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă dacă șirul $(s_n)_n$ este convergent

5) Spunem că seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă dacă nu e convergentă (i.e. șirul s_n este divergent)

<u>Propoziție</u> Dacă seria $\sum_{n} x_n$ este convergentă, atunci $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$

<u>Corolar</u> (Criteriul suficient de divergență)

Dacă $\lim_{n\to\infty} x_n \neq 0$ atunci seria $\sum_{n} x_n$ este divergentă

Exemple

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ div $\qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ conv

<u>Obs</u> Folosind doar afirmația „$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$" nu putem decide dacă seria $\sum_{n} x_n$ este conv. sau div.

ex 2

Determinați sumele seriilor de mai jos și precizați dacă sunt conv.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} q^n, \; q \in \mathbb{R}$

($0^0 = 1$ prin convenție)

Sol:

a) $x_n = \frac{1}{n(n+1)} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$s_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

$$= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$$

$$= \frac{2-1}{1 \cdot 2} + \frac{3-2}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{(n+1)-n}{n(n+1)}$$

$$= \left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \dots + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

Deci $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = 1 \in \mathbb{R}$

Prin urmare $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este conv

b) $x_n = q^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$s_n = x_0 + x_1 + \dots + x_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$$

$$= 1 + q + q^2 + \dots + q^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$s_n = \begin{cases} n+1; & q = 1 \\ 1 \cdot \dfrac{q^{n+1}-1}{q-1}; & q \neq 1 \end{cases} = \begin{cases} n+1, & q=1 \\ \dfrac{q^{n+1}-1}{q-1}, & q \neq 1 \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Dacă $q = 1$ atunci $\lim\limits_{n \to \infty} s_n = \lim\limits_{n \to \infty} (n+1) = \infty$

Deci $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n = +\infty$ și $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă

$$\lim_{n \to \infty} q^{n+1} = \begin{cases} \nexists, & q \leq -1 \\ 0, & q \in (-1, 1) \\ +\infty, & q > 1 \end{cases}$$

Dacă $q \leq -1$ atunci nu există $\lim\limits_{n \to \infty} s_n$, deci $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ nu are sumă și $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este div

Dacă $q \in (-1, 1)$ atunci $\lim\limits_{n \to \infty} s_n = \dfrac{-1}{q-1} = \dfrac{1}{1-q}$ deci $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n = \dfrac{1}{1-q}$ și $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este conv

Dacă $q > 1$, atunci $\lim\limits_{n \to \infty} s_n = +\infty$, deci $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n = \infty$ și $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă

$\square$

Obs În aplicații putem folosi, fără justificare, convergențele următoarelor serii de nr. reale:

1) $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ $\nearrow$ conv; dacă $q \in (-1, 1)$
$\searrow$ div; dacă $q \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$

(serie geometrică)

2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ $\nearrow$ conv, dacă $\alpha > 1$
$\searrow$ div, dacă $\alpha \leq 1$

(serie armonică generalizată)

Obs q și α din obs. prec. sunt numere reale care nu depind de n

Exemplu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{n}}}$$ $\rightarrow$ NU e serie armonică gen (depinde de n)

Propoziție Fie $\sum_n x_n$ și $\sum_n y_n$ două serii de nr. reale și $\alpha \in \mathbb{R}^*$

1) Dacă $\sum_n x_n$ e conv, atunci $\sum_n \alpha \cdot x_n$ e conv

În plus $\sum_n \alpha \cdot x_n = \alpha \cdot \sum_n x_n$

2) Dacă $\sum_n x_n$ e div, atunci $\sum_n \alpha \cdot x_n$ e div

3) Dacă $\sum_n x_n$ și $\sum_n y_n$ sunt conv., atunci $\sum_n (x_n + y_n)$ e conv.

În plus, $\sum_n (x_n + y_n) = \sum_n x_n + \sum_n y_n$

4) Dacă $\sum_n x_n$ e conv și $\sum_n y_n$ e div (sau invers, $\sum_n x_n$ e div și $\sum_n y_n$ e conv) atunci $\sum_n (x_n + y_n)$ e div

5) Dacă $\sum_n x_n$ și $\sum_n y_n$ sunt div atunci $\sum_n (x_n + y_n)$ poate fi sau conv. sau div. (trebuie verif. convergența folosind altă metodă)

<u>Teoremă</u> (Criteriul Cauchy pt. serii de nr. reale)

Sunt echivalente:

1) $\sum_n x_n$ e conv

2) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon$, $\forall m \in \mathbb{N}^*$ avem $|x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_{n+m}| < \varepsilon$

Criterii de convergență pentru serii cu termeni pozitivi

1) **Criteriul raportului**

Fie $\sum_n x_n$, $x_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ a.î. $\exists \lim_{n \to \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \ell$

a) Dacă $\ell < 1$, atunci $\sum_n x_n$ este conv

b) Dacă $\ell > 1$, atunci $\sum_n x_n$ este div

c) Dacă $\ell = 1$, atunci criteriul nu decide

2) **Criteriul radicalului**

Fie $\sum_n x_n$, $x_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ a.î. $\exists \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{x_n} \overset{not}{=} \ell$

a) Dacă $\ell < 1$, atunci $\sum_n x_n$ este conv

b) Dacă $\ell > 1$, atunci $\sum_n x_n$ este div

c) Dacă $\ell = 1$, atunci criteriul nu decide

3) **Criteriul Raabe - Duhamel**

Fie $\sum_n x_n$, $x_n > 0$ a.î. $\exists \lim_{n \to \infty} n \cdot \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) \overset{not}{=} \ell$

a) Dacă $\ell < 1$, atunci $\sum_n x_n$ este div

b) Dacă $\ell > 1$, atunci $\sum_n x_n$ este conv

c) Dacă $\ell = 1$, atunci criteriul nu decide

4) **Criteriul condensării**

Fie $(x_n)_n \subset [0, +\infty)$ un şir descrescător

Atunci seriile de nr. reale $\sum_n x_n$ şi $\sum_n 2^n \cdot x_{2^n}$ au aceeaşi convergenţă (i.e. sau sunt ambele convergente sau sunt ambele div : $\sum_n x_n \sim \sum_n 2^n \cdot x_{2^n}$)

5) **Criteriul de comparaţie cu inegalităţi**

Fie seriile $\sum_n x_n$ şi $\sum_n y_n$ a.î. $x_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ şi $y_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ şi $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_0$ avem $x_n \leq y_n$

a) Dacă $\sum_n y_n$ e conv atunci $\sum_n x_n$ e conv

b) Dacă $\sum_n x_n$ e div atunci $\sum_n y_n$ e div

6) **Criteriul de comparaţie cu limite**

Fie seriile $\sum_n x_n$ şi $\sum_n y_n$ a.î. $x_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ $y_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ şi $\exists \lim_{n \to \infty} \frac{x_n}{y_n} \overset{not}{=} \ell$

a) Dacă $\ell \in (0, \infty)$ atunci $\sum_n x_n \sim \sum_n y_n$ (au aceeaşi convergenţă)

b) Dacă $\ell = 0$ şi $\sum_n y_n$ e conv, atunci $\sum_n x_n$ e conv

c) Dacă $\ell = +\infty$ şi $\sum y_n$ e div, atunci $\sum_n x_n$ e div

Criterii de convergență pt. serii cu termeni oarecare

Fie $\sum_n x_n$ o serie de numere reale

Def Spunem că $\sum_n x_n$ este absolut convergentă dacă $\sum_n |x_n|$ e convergentă

Propoziție Dacă $\sum_n x_n$ este absolut conv, atunci $\sum_n x_n$ e convergentă

Obs Reciproca prop. prec. nu este adev.

1) Criteriile Abel - Dirichlet

I. Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ și $(y_n)_n \subset \mathbb{R}$

a) $(x_n)_n$ este descrescător și $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$

b) $\exists M > 0$ a.î. $\forall n \in \mathbb{N}$ avem

$$|y_0 + y_1 + \dots + y_n| \leq M \iff \left|\sum_{k=0}^{n} y_k\right| \leq M$$

Atunci $\sum_{n=0}^{\infty} x_n \cdot y_n$ este convergentă

II. Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ și $(y_n)_n \subset \mathbb{R}$ a.î.

a) $(x_n)_n$ este monoton și mărginit

b) $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ este convergentă

Atunci $\sum_{n=0}^{\infty} x_n \cdot y_n$ este convergentă

2) Criteriul lui Leibniz

Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ un șir descrescător a. î. $\lim_{n \to \infty} x_n = 0$. Atunci $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x_n$ este convergentă.

ex 2

Fie $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Arătați că

a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e conv

b) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ e div

Sol:

a) Fie $x_n = \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Avem că $(x_n)_n$ este descrescător și $\lim_{n \to \infty} x_n = 0$

$$a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Conform Criteriul lui Leibniz rezultă că $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este conv

b) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

Avem ca $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ este divergentă (serie armonică generalizată, $\alpha = 1$)

$\square$

ex 3

Studiați convergența seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (3n-2)}{3 \cdot 6 \cdot \ldots (3n)} \cdot \frac{1}{2^n}$

<u>**Sol**</u>:

$$x_n = \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (3n-2)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot 3n} \cdot \frac{1}{2^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{\cancel{1} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{7} \cdot \ldots \cdot \cancel{(3n-2)}(3n+1)}{\cancel{3} \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{9} \cdot \ldots \cancel{3n} \cdot 3(n+1)} \cdot \frac{1}{2^{\cancel{n+1}}}}{\frac{\cancel{1} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{7} \cdot \ldots \cdot \cancel{(3n-2)}}{\cancel{3} \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{9} \cdot \ldots \cdot \cancel{3n}} \cdot \frac{1}{\cancel{2^n}}}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{3n+1}{3n+3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} < 1$$

Conform Criteriului raportului avem că $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergentă

$\square$