Sisteme liniare independente de vectori. Baze și spații vectoriale

Fie V un K-spațiu vectorial.

Def.: O mulțime $S \subset V$ s.n. **sistem de generatori (SG)** pentru V dacă $V = \langle S \rangle = \sum_{i=1}^{m} a_i x_i$, $m \in \mathbb{N}$, $x_i \in S$, $a_i \in K$.

$\Leftrightarrow$ $(\forall)\ v \in V$, $(\exists)\ x_1, \dots, x_m \in S$ și $a_1, \dots, a_m \in K$ a.î. $v = \sum_{i=1}^{m} a_i x_i$

Def.: Spunem că $\{v_1, v_2, \dots, v_m\} \subset V$ formează un **sistem liniar independent** (SLI) de vectori dacă $(\forall)\ a_1, \dots, a_m \in K$ cu $\sum_{i=1}^{m} a_i v_i = 0$ $\Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_m = 0$

Spunem că $S \subset V$ este SLI dacă $(\forall)$ parte finită a lui S este SLI.

Observație! Dacă S nu este SLI, spunem că S este **sistem liniar dependent (SLD).**

Def.: $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$ sunt **liniar dependenți** $\Leftrightarrow$ $(\exists)\ a_1, \dots, a_m \in K$ nu toți nuli a.î. $\sum_{i=1}^{m} a_i v_i = 0$.

Presupunem că $a_1 \neq 0 \Rightarrow a_1 v_1 = -a_2 v_2 - \dots - a_m v_m$

$$v_1 = -\frac{a_2}{a_1} v_2 - \dots - \frac{a_m}{a_1} v_m$$

$\Rightarrow v_1 \in \langle v_2, \dots, v_m \rangle$ combinații liniare

Propoziție: $S \subset V$ este SLD $\Rightarrow$ $(\exists)$ un element din S care este combinație liniară a celorlalte elemente din S.

Lemă: Dacă S este SLI în V și $x \notin \langle S \rangle$, atunci $S \cup \{x\}$ este SLI.

Explicație:

1. $\{0_V\}$ nu este SLI, pentru că $1_K \cdot 0_V = 0_V$ și $1_K \neq 0_K$

2. Fie $v \in V$. Atunci $\{v\}$ este SLI $\Leftrightarrow v \neq 0_V$.
   Dacă $v = 0_V \Rightarrow$ Nu este SLI.
   Dacă $v \neq 0_V$ și $a \cdot v = 0$ cu $a \in K \Rightarrow$
   $\Rightarrow a = 0$, deci $\{v\}$ este SLI

3. Fie $\overset{\neq 0}{v_1}, \overset{\neq 0}{v_2} \in V$. $\{v_1, v_2\}$ = SLI $\Leftrightarrow$
   v_1 și v_2 nu sunt proporționali (i.e. $\nexists$) $\lambda \in K$ a.î. $v_1 = k \cdot v_2$)

4. În $\mathbb{R}^m$, $\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_2}, \dots, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}}_{e_m} \right\}$ este SLI.

Fie $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$ cu $\sum_{i=1}^{m} a_i e_i = 0 \iff$

$$\iff \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = 0 \Rightarrow \{e_1, \dots, e_m\} \text{ SLi}$$

Propoziție: Fie $u_1, \dots, u_m \in \mathbb{R}^n$. Atunci $\{u_1, \dots, u_m\}$ este SLi $\iff$ în forma eșalon a matricei

$$\begin{pmatrix} | & | & & | \\ u_1 & u_2 & \dots & u_m \\ | & | & & | \end{pmatrix}_{n,m}$$

găsim pivot pe fiecare coloană.

Dem.:

$\{u_1, \dots, u_m\}$ = SLi $\iff (\forall)\ a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$ cu $a_1 u_1 + \dots + a_m u_m = 0$, avem $a_1 = \dots = a_m = 0 \iff$

$\iff \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ este singura soluție pentru sistemul omogen

$$\left(\begin{array}{cccc|c} | & | & & | & 0 \\ u_1 & u_2 & \dots & u_m & \\ | & | & & | & \end{array}\right)$$

(cu $\underbrace{\quad u_1 \; u_2 \; \dots \; u_m \quad}_{A}$)

$\iff$ Sistemul cu matricea extinsă $(A|0)$ nu are necunoscute secundare, i.e. găsim pivot pe toate primele m coloane $\iff$ în F.E. găsim pivot pe toate coloanele matricei A

Propoziție: 1) Dacă $S \ni 0 \Rightarrow S$ nu este SLi ($S \subseteq V$)

2) Dacă S = SLi și $S' \subseteq$ SLi $\Rightarrow S'$ = SLi

3) Dacă S = SG pentru V și $V \supseteq S'' \supseteq S$
$\Rightarrow S''$ = SG pentru V

Def.: O submulțime a lui V s.n. **bază** pentru V dacă este SLi și SG pentru V.

Numim **dimensiunea lui V** $\dim_K V$ = numărul de elemente dintr-o bază

? 1: Este adevărat că oricare spațiu vectorial are o bază? DA

? 2: Două baze pentru V au același număr de elemente? DA

? 3: Cum construim o bază?

Teoremă: Fie V un K-spațiu vectorial și $S \subseteq V$.

• 1) S este bază în V

$\Leftrightarrow$ • 2) S este SLi maximal, adică
S este SLi și $(\forall)\ x \in V \setminus S \Rightarrow$
$\Rightarrow S \cup \{x\}$ nu este SLi

$\Leftrightarrow$ • 3) S este SG minimal, i.e.
$\langle S \rangle = V$ și $(\forall)\ x \in S \Rightarrow$
$\Rightarrow \langle S \setminus \{x\} \rangle \neq$ SG
$\langle S \setminus \{x\} \rangle \subsetneq V$

Dem.:

1 ⇒ 2

S bază ⇒ S este SLI și SG pentru V.
Arăt că S = SLI maximal.
Fie $x \in V \setminus S$.

$\langle S \rangle = V$ ⇒ Putem scrie $x = \sum_{i=1}^{m} a_i x_i$ cu $x_i \in V$, $a_i \in K$

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_m x_m - 1 \cdot x = 0$$

⇒ $S \cup \{x\}$ nu este SLI ⇒ S = SLI maximal

2 ⇒ 1

Știm că S este SLI maximal. Arătăm că S este SG pentru V.

Dacă, prin reducere la absurd, (∃) $x \in V \setminus \langle S \rangle$

$\xRightarrow{S = SLI}$ $S \cup \{x\}$ este SLI

S = SLI maximal **Contradicție!**

⇒ $\langle S \rangle = V$

Teorema Schimbului (Lema Steinitz)

Fie V un K-spațiu vectorial, $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_l\}$ un SLI în V și $S' = \{v_1, \ldots, v_m\}$ un SG pentru V.
Atunci:

1) $s \leq m$

2) După o eventuală renumerotare a vectorilor din S', avem că și mulțimea $S'' = \{u_1, u_2, \dots, u_s, v_{s+1}, \dots, v_m\}$ este SG pentru V.

Corolar: (∀) două baze pentru V au același număr de elemente

Dem.:

Fie V finit generat de s vectori.
Atunci (∀) SLI în V are cel mult s elemente.

Fie B_1, B_2 baze pentru V $\Rightarrow |B_1|, |B_2| \leq s$, deci B_1 și B_2 sunt mulțimi finite.

B_1 este SLI pentru V
B_2 este SG pentru V $\xRightarrow{\text{T.R.}}$ $|B_1| \leq |B_2|$

B_2 este SLI pentru V
B_1 este SG pentru V $\Longrightarrow$ $|B_2| \leq |B_1|$

$\Rightarrow |B_1| = |B_2|$

Teoremă: (∀) spațiu vectorial admite o bază

Dem.:

Presupunem că V este finit generat, $V = \langle S \rangle$ cu $|S| = m$.

- Dacă $V=\{0_V\} \Rightarrow \emptyset$ este bază în V
- Dacă $(\exists)\ 0 \neq x_1 \in V \Rightarrow \{x_1\}$ este SLi

  Dacă $\langle x_1 \rangle = V \Rightarrow \{x_1\}$ este bază în V

  Dacă $(\exists)\ x_2 \in V \setminus \langle x_1 \rangle \Rightarrow \{x_1, x_2\}$ este SLi

  Dacă $\langle x_1, x_2 \rangle = V \Rightarrow \{x_1, x_2\}$ bază în V

  - Dacă $(\exists)\ x_3 \in V \setminus \langle x_1, x_2 \rangle \Rightarrow \{x_1, x_2, x_3\}$ SLi

Orice SLi în V are $\leq n$ elemente $\Rightarrow$ găsim $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ SLi și SG

SAU:

Pornim de la $S=\{u_1, \ldots, u_m\}$ SG pentru V și eliminăm pe rând pe acei care sunt combinații liniare ai celorlalți $\rightarrow$ la final obținem un SLi care este în continuare SG pentru V.

Deci găsim bază pentru V.

Exemple:

baza canonică a lui $\mathbb{R}^n$

1. În $\mathbb{R}^n$, $\{e_1, \ldots, e_n\}$ formează o bază.
   $\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n = n$

2. $V=\{0_V\}$, atunci $\dim V = 0$ pentru că $\emptyset$ este bază în V

3. $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$: matricele $\{e_{ij} : 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n\}$ formează o bază

$\dim \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) = m \cdot n$

$$\begin{array}{c c} & \ j \\ i & \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}_{m \times n} \end{array}$$

Teoremă:

Fie V un K-spațiu vectorial.

1) Orice $S \subset V$ este SLi se poate completa la o bază pentru V.

2) Din orice $S \subset V = SG$ se poate extrage o bază pentru V.

Teoremă:

Fie $V_1 \leq V_2$ spațiu vectorial.

1. $\dim V_1 \leq \dim V_2$

! 2. Dacă $\dim V_1 = \dim V_2 < \infty \Rightarrow V_1 = V_2$

Corolar:

Presupunem că $\dim V = n < \infty$.

1. Dacă $B \subset V$ este SLi cu $|B| = n \Rightarrow B$ este bază pt. V
2. Dacă $B \subset V$ este SG cu $|B| = n \Rightarrow B$ este bază pt. V

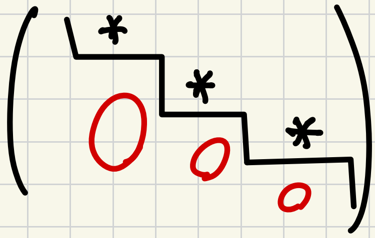
Cum construim o bază?

Fie $V = \langle u_1, u_2, \dots, u_m \rangle \leq \mathbb{R}^n$. O bază în V este dată de acei u_i a.î. pe coloana i din F.E. a matricei $A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ u_1 & u_2 & \dots & u_m \\ | & | & & | \end{pmatrix}$ găsim pivot.

În plus, $\dim V$ = numărul de pivoți din F.E. a matricei A

Dem.:

$$A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ u_1 & u_2 & \cdots & u_m \\ | & | & & | \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{F.E.}]{\text{Calculăm}}$$



rămân doar u_i unde $(\exists)$ pivoți $\Rightarrow$ bază

În general, în F.E. a matricei $\left(\begin{matrix} | & | & & | \\ u_1 & u_2 & \cdots & u_p \\ | & | & & | \end{matrix} \middle| \begin{matrix} | \\ u \\ | \end{matrix}\right)$ găsim pivot pe ultima coloană $\Leftrightarrow$ Sistemul liniar asociat este incompatibil.

$\Leftrightarrow (\nexists)\ a_1, a_2, \dots, a_p \in \mathbb{R}$ cu $a_1u_1 + \dots + a_pu_p = u \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow u \notin \langle u_1, u_2, \dots, u_p \rangle$

Deci nu găsim pivot pe coloana i $\Leftrightarrow$ Coloana i $\in \langle \text{col } 1, \text{col } 2, \dots, \text{col } i-1 \rangle$

$\Rightarrow$ Coloanele din matricea A unde vom avea pivoți în F.E. sunt un SLI și un SG pentru V = BAZĂ.

Propoziție: $B = \{u_1, u_2, \dots, u_m\} \subseteq V$

Atunci B este bază $\Leftrightarrow (\forall)\ x \in V$, $(\exists!)\ a_1, a_2, \dots, a_m \in K$ a.î. $x = a_1u_1 + \dots + a_mu_m$

Def.: Vectorul $[x]_B \overset{\text{not.}}{=\!=} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in K^n$ s.n.

vectorul coordonatelor lui x în baza B.

Dem.:

„$\Rightarrow$":

Presupunem B bază $\Rightarrow$ este SG.

Pentru $x \in V$, $(\exists)$ $a_1, \ldots, a_n \in K$ cu $x = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$

$\Rightarrow$

Dacă $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$ cu $\lambda_i \in K$ $(\forall)$ i

$\Rightarrow 0 = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(a_i - \lambda_i)}_{\in K} v_i \xRightarrow[\text{SLI}]{\{v_1, \ldots, v_n\}} a_i = \lambda_i, (\forall)$ i

$\Rightarrow$ unicitatea scrierii.

„$\Leftarrow$":

TEMĂ!

Exemplu:

$B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ baza canonică din $\mathbb{R}^n$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 e_1 + \ldots + x_n \cdot e_n \Rightarrow [x]_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x$$