Det nr. de partiții al unei mulțimi cu 4 elemente,

de ex $A = \{1, 2, 3, 4\}$

Partiția are

→ 1 submulțime

$(\{1, 2, 3, 4\})$

→ 2 submulțimi

$(\{1\}, \{2, 3, 4\})$ $(\{2\}, \{1, 3, 4\})$

$(\{3\}, \{1, 2, 4\})$ $(\{4\}, \{1, 2, 3\})$

$(\{1, 2\}, \{3, 4\})$ $(\{1, 3\} \{2, 4\})$ $(\{1, 4\} \{2, 3\})$

$4 + 3 = 7$

→ 3 submulțimi $(\{1\}, \{2\}, \{3, 4\})$

$(\{1\}, \{3\}, \{2, 4\})$ $(\{1\} \{4\} \{2, 3\})$

$(\{2\}, \{3\}, \{1, 4\})$ $(\{2\}, \{4\}, \{1, 3\})$

$(\{3\} \{4\} \{1, 2\})$

→ 4 submulțimi $(\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\})$

$$4 = \underset{1}{\underset{\vee\!|}{n_1}} + \underset{1}{\underset{\vee\!|}{n_2}} = 1 + 3$$
$$2 + 2$$

$$= \underset{1}{\underset{\vee\!|}{n_1}} + \underset{1}{\underset{\vee\!|}{n_2}} + \underset{1}{\underset{\vee\!|}{n_3}} = 1 + 1 + 2$$

partiții al unei mulț cu 4 elem este

$1 + 7 + 6 + 1 = 15 \overset{Th}{\underset{Curs}{\Rightarrow}}$ 15 rel de echiv ex 1

Dați exemplu, dacă există, o relație de echivalență pe $\{1, 2, \dots, 25\}$ care are exact 7 clase de echivalență și oricare 2 clase au cardinal diferit.

Dem

A da o relație de echivalență pe A cu 7 clase de echiv. revine la a da o partiție cu 7 submulțimi nevide $(A_1, \dots, A_7)$ a.î. $|A_i| \neq |A_j| \ \forall \ i \neq j$

Cum $|A_i| \geq 1 \ (\forall) \ i$

$$25 = |A| = \sum_{i \in J} |A_i| \geq 1 + 2 + \dots + 7 = 28 \ \text{ᚷ} \Rightarrow$$

Nu există o astfel de partiție și implicit o relație de echiv cu prop. din enunț $\square$

ex 3

Fie $A \neq \phi$, $\phi \neq B \subseteq A$

Def pe $\mathcal{P}(A)$ rel ρ: $\quad x \rho y \overset{def}{\Longleftrightarrow} X \cap B = Y \cap B$

Să se arate că ρ e rel de echiv și $\mathcal{P}(A)/_\rho$ este în bijecție cu $\mathcal{P}(B) = \{Z \mid Z \subseteq B\}$, $\phi \in$

îți dă un indiciu cine e S.C.R.

Sol:

ρ e rel de echiv (Temă !)

→ reflexiv
→ simetric
→ tranzitiv

Arătăm că $\mathcal{P}(B)$ e S.C.R.

$S = \mathcal{P}(B) \iff$ 1) $(\forall)\ X, Y \in \mathcal{P}(B)$, $X \neq Y$ $\quad X \not\rho\ Y$

2) $(\forall)\ X \in \mathcal{P}(A)$ $\ \exists\ Y \in \mathcal{P}(B)$ a.î. $X \rho Y$

1) Fie $X, Y \in \mathcal{P}(B)$

$X \rho Y$ arătăm că $X = Y$

$X \rho Y \Rightarrow X \cap B = Y \cap B \Rightarrow X = Y$

2) Fie $X \in \mathcal{P}(A)$ $\qquad X \cap B = \underset{\substack{\cap\mid \\ B}}{?} \cap B$

$X \cap B = (X \cap B) \cap B \Rightarrow X \rho (X \cap B)$

$X \cap B \subseteq B$

$\Updownarrow$

$\mathcal{P}(A)/_{\rho} = \{\ \overline{X}\ \mid\ X \in \mathcal{P}(B)\ \}$

$(G, *)$ 0) $*$ lege de compoziție pe M

1) " $*$ " e asociativă $\forall x, y, z \in G \quad x*(y*z) = (x*y)*z$

2) " $*$ " are el. neutru $\exists e \in G$ a.î. $\forall x \in G \quad x*e = e*x = x$

3) element simetrizabil $x \in G \quad \exists y \in G$ a.î. $x*y = y*x = e$

4) " $*$ " e comutativă $\forall x, y \in G \quad x*y = y*x$

$U(G) = \{ x \in G \mid x$ e inversabil $\}$

$(G, *)$

- monoid (com) 0, 1, 2, (4)
- grup (com) 0, 1, 2 + $U(G) = G$ (4)

ex 1 ((3) pt $\forall x \in G$

$G = [0, 1)$

$x * y = \{ x + y \}$ ← partea fracționară

" $*$ " e lege de compoziție prin definiția părții fracționare

(parte stabilă)

<u>asociativitatea</u> :

Fie $x, y, z \in G$

$(x*y)*z = \{x+y\}*z = \{\{x+y\}+z\}$

$= \{ x + y - [x+y] \} = \{ x + y + z + (-[x+y]) \} + z \}$

$= \{ x+y+z \}$

$x * (y * z) = x * \{y+z\} = \{x + \{y+z\}\}$

$= \{x + y + z - [y+z]\}$

$= \{x+y+z\}$

$\{\underset{\mathbb{R}}{a} + \underset{\mathbb{Z}}{k}\} = \{a\}$

$[a] \le a < [a] + 1$

$\underset{\mathbb{Z}}{[a] + k} \le a + k < [a] + k + 1$

$\overset{def}{\Rightarrow} [a+k] = [a] + k$

<u>comutativitate</u>

$\forall x, y \in G \qquad x * y = y * x$

$\{x+y\} = \{y+x\}$

$\{x+y\} = \{x+y\}$

<u>el neutru</u>

Deoarece legea "*" este comutativă este necesar să arătăm există el. neutru pe o singură parte

$x * e = x \qquad \forall x \in G$

$\{x+e\} = x \qquad \forall x \in$

$x + e - [x+e] = x$

$e = [x+e] \in \mathbb{Z}$

$e \in \mathbb{Z} \cap G \Rightarrow \underline{e = 0}$

$x * 0 = \{x+0\} = \{x\} \underset{x\in[0,1)}{=} x \qquad \forall x \in G \Rightarrow$

0 e elem. neutru

el neutru, dacă $\exists$, este unic

el inversabil

$x * x' = 0$

$\{x + x'\} = 0$

Dacă $x = 0 \Rightarrow \{0 + 0\} = 0$

Altfel $x \neq 0 \underset{x \in (0,1)}{\Rightarrow} 0 < 1 - x < 1 \quad (1 - x \in G)$

$\{x + (1 - x)\} = \{1\} = 0$

$(1), (2), (3), (4) \Rightarrow G$ grup abelian

ex 2

Pe mulțimea $G = (2, \infty)$ se definește "$*$":

$x * y = xy - 2x - 2y + 6$

a) Ar. că $(G, *)$ grup abelian

b) Ar. că $f : \mathbb{R} \to (2, +\infty)$ $f(x) = e^x + 2$

e un izom între gr $(\mathbb{R}, +)$ și $(G, *)$

Sol:

"$*$" e lege de comp (Temă!)

$x * y = (x - 2)(y - 2) + 2$

asociativitate

Fie x, y, z

$$(x * y) * z = ((x-2)(y-2)+2) * z$$

$$= [(x-2)(y-2)+2-2](z-2)+2$$

$$= (x-2)(y-2)(z-2)+2$$

$$= \ldots = x * (y * z)$$

Evident comutativă

$$x * e = x, \quad \forall x > 2$$

$$(x-2)(e-2)+2 = x$$

$$(x-2)(e-2) = x-2$$

$$(x-2)(e-3) = 0 \quad (\forall)\ \underline{x>2} \Rightarrow e-3=0$$

$$e = 3\ (\in G)$$

Dacă $e \notin G$ at $\Rightarrow$ NU are el neutru

$\Rightarrow$ 3 el neutru

inversabilitate

$$x * x' = 3$$

$$(x-2)(x'-2)+2 = 3$$

$$(x-2)(x'-2) = 1$$

$$x'-2 = \frac{1}{x-2}$$

$$x' = \frac{1}{x-2}+2 \quad (\in G!)$$

$$x-2>0 \Rightarrow \frac{1}{x-2}>0 \quad |+2$$

$$2+\frac{1}{x-2} > 2$$

$$\Rightarrow x' > 2$$

$\Rightarrow \forall x \in G \quad x' = \frac{1}{x-2}+2$ e inversul său