Fie $B = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ bază în V. Atunci $(\forall)\ x \in V$, $(\exists!)\ a_1, a_2, \dots, a_m \in K$ a.î.

$$x = \sum_{i=1}^{m} a_i v_i \longrightarrow [v]_B = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,1}(K)$$

vectorul coordonatelor lui v în baza B

La schimbarea bazei se schimbă și coordonatele lui v în acea bază. Cum?

Matricea de trecere de la o bază la alta

Fie $B = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ și $B' = \{u_1', u_2', \dots, u_m'\}$ baze în V.

Exprimăm fiecare vector în baza B din baza B'.

$$u'_j = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} u_i, \text{ cu } \alpha_{ij} \in K \text{ unici}$$

$$\text{Matricea } S = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \\ \vdots & \vdots & \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_m(K)$$

$$\begin{matrix} [u_1']_B & [u_2']_B & \quad [u_m']_B \end{matrix}$$

s.n. matricea de trecere (de schimbare a bazei) de la baza $\mathcal{B}$ la baza $\mathcal{B}'$.

$$\boxed{\mathcal{B} \xrightarrow{S} \mathcal{B}' \Rightarrow \mathcal{B}' \xrightarrow{S^{-1}} \mathcal{B}}$$

Propoziție: Orice matrice de trecere de la o bază la alta este inversabilă.

Fie $x \in V$; $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ baze în V ca mai sus.

$$x = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i$$

Dar și $x = \sum_{j=1}^{m} a'_j u'_j = \sum_{j=1}^{m} a'_j \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} u_i \right) =$

$$= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{m} a'_j \cdot \alpha_{ij} \right) u_i$$

$\overset{\mathcal{B}}{\underset{\text{bază}}{\Longrightarrow}} a'_j \cdot \alpha_{ij} = a_i, \ (\forall)\ i = \overline{1,m}$

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1m} \\ \vdots & & & \\ \alpha_{m1} & \dots & \dots & \alpha_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ \vdots \\ a'_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow S \cdot [x]_{\mathcal{B}'} = [x]_{\mathcal{B}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow [x]_{\mathcal{B}'} = S^{-1} [x]_{\mathcal{B}}$

Exercițiu: Fie $A_1, A_2 \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$. Arătați că, dacă $A_1 \cdot X = A_2 \cdot X$, $(\forall)\ X \in \mathcal{M}_{n,1}(K)$, atunci $A_1 = A_2$.

Dem.:

Aleg $x = e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in i \Rightarrow A_i \cdot e_i = A_2 \Rightarrow$
$\Rightarrow col_i(A_1) = col_i(A_2)\ (\forall)\ i$
$\Rightarrow A_1 = A_2$

Aplicații liniare

Fie V și W două K-spații vectoriale.

Def: O funcție $f: V \to W$ s.n. aplicație liniară dacă

$$\begin{cases} f(x+y) = f(x) + f(y) & (\forall)\ x, y \in V \\ f(\alpha x) = \alpha \cdot f(x) & \alpha \in K \end{cases}$$

Dacă, în plus, f este bijectivă, spunem că f este izomorfism liniar și că V și W sunt spații vectoriale izomorfe.

Observație! $f: V \to W$ este aplicație liniară $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow f(ax + by) = a f(x) + b \cdot f(y)$, $(\forall)\ a, b \in K$
$x, y \in V$

Exemple:

1) Pentru V dat, funcția identică $1_V: V \to V$, $x \mapsto x$ este

iză-liniară.

2) Pentru V, W spații vectoriale, funcția $f: V \to W$, $x \mapsto 0_W$

este o aplicație liniară.

„morfismul nul"
„aplicația nulă"

3) Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$ și funcția

$$\begin{array}{ccc} f: K^n & \to & K^m \\ \| & & \| \\ \mathcal{M}_{n,1}(K) & & \mathcal{M}_{m,1}(K) \\ \cup & & \\ u & \longmapsto & A \cdot u \end{array}$$

Atunci, f este aplicație liniară.

Dem.:

Fie $a, b \in K$; $x, y \in K^n$

$$f(ax+by) = A(ax+by) = Aax + Aby = aAx + bAy$$
$$= a f(x) + b f(y)$$

Observație! Vom arăta că, lucrând în coordonate, orice aplicație liniară între două spații finit dimensionale este dată de înmulțirea cu o matrice.

Observație! Dacă f este aplicație liniară și f bijectivă $\Rightarrow f^{-1}$ este aplicație liniară.

Matricea unei aplicații liniare într-o pereche de baze

Fie V, W spații vectoriale, $\dim V = n$,

$\dim W = m$

$\mathcal{B}_V = \{v_1, \dots, v_n\}$ bază în V și

$\mathcal{B}_W = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ bază în W

$f : V \to W$ o aplicație liniară.

Pentru fiecare v_j, calculez coordonatele lui $f(v_j)$ în baza $\mathcal{B}_W$.

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} w_i \ , (\forall)\ j = \overline{1,n} \ \text{cu}\ \alpha_{ij} \in K$$

$$[f]_{\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \underbrace{\alpha_{m1}}_{[f(v_1)]_{\mathcal{B}_W}} & \underbrace{\alpha_{m2}}_{[f(v_2)]_{\mathcal{B}_W}} & & \underbrace{\alpha_{mn}}_{[f(v_n)]_{\mathcal{B}_W}} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$$

↳ matricea aplicației liniare într-o pereche de baze $\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W$

Fie $v \in V \Rightarrow v = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j \Rightarrow f(v) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot f(v_j)$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}\, w_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \alpha_{ij} \right)}_{} w_i$$

coordonatele lui $f(x)$ în baza B_W

$$[f(x)]_{B_W} = [f]_{B_V, B_W} \cdot [x]_{B_V}, \quad (\forall)\ x \in V$$

$$[f(x)]_{B_W} = A \cdot [x]_{B_V} \quad \text{cu} \quad A \in \mathcal{M}_{n,m}(K)$$

Fie $f: V \to W$ aplicație liniară, $\dim V = m < \infty$, $\dim W = n$

B_V, B'_V baze în V

B_W, B'_W baze în W

$$[f]_{B_V, B_W} \quad ? \quad [f]_{B'_V, B'_W}$$

$$B_V \xrightarrow{S} B'_V$$

$$B_W \xrightarrow{T} B'_W$$

S, T - matrice de trecere

Fie $x \in V$, $[f(x)]_{B_W} = [f]_{B_V, B_W} \cdot [x]_{B_V}$

$$T^{-1} \cdot / \quad T \cdot [f(x)]_{B'_W} = [f]_{B_V, B_W}\, S \cdot [x]_{B'_V}$$

$$[f(x)]_{B'_W} = T^{-1} [f]_{B_V, B_W} \cdot S \cdot [x]_{B'_V}$$

Exercițiu

$$\Longrightarrow [f]_{B'_V, B'_W} = T^{-1} \cdot [f]_{B_V, B_W} \cdot S$$

Operații cu aplicații liniare

- **Adunare:** Fie $f, g : V \to W$

  $f+g : V \to W$ $\Rightarrow (f+g)(x) := f(x) + g(x)$

Atunci $f+g$ este aplicație liniară.

Dacă B_V, B_W baze finite în V, respectiv în W

$$\Rightarrow [f+g]_{B_V, B_W} = [f]_{B_V, B_W} + [g]_{B_V, B_W}$$

Verificare:

Fie $x, y \in V$; $a, b \in K$

$$\begin{aligned}(f+g)(ax+by) &= f(ax+by) + g(ax+by) \\ &= af(x) + bf(y) + ag(x) + bg(y) \\ &= a(f(x)+g(x)) + b(f(y)+g(y)) \\ &= a(f+g)(x) + b(f+g)(y)\end{aligned}$$

- **Înmulțire cu scalari:**

Fie $a \in K$ și $f : V \to W$ aplicație liniară.

Definim funcția $af : V \to W$ prin $(af)(x) = af(x)$

Analog, af este aplicație liniară și

$$[af]_{B_V, B_W} = a \cdot [f]_{B_V, B_W}$$

- **Compunerea de aplicații liniare**

Fie $f: V \to W$ și $g: W \to L$ aplicații liniare.

Atunci $g \circ f: V \to L$ este aplicație liniară.

Dem.:

Fie $a, b \in K$; $x, y \in V$. Atunci

$$\begin{aligned}(g\circ f)(ax+by) &= g(f(ax+by)) \\ &= g(af(x)+bf(y)) \\ &= ag(f(x))+bg(f(y)) \\ &= a(g\circ f)(x) + b(g\circ f)(y)\end{aligned}$$

Presupunem $\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W, \mathcal{B}_L$ baze finite din V, W, L.

$$\begin{tikzcd} V \ni [x]_{\mathcal{B}_V} \arrow[r, mapsto, "A"] \arrow[rr, bend right, "{[g\circ f]_{\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_L}}"'] & {[f(x)]_{\mathcal{B}_W} = A\cdot[x]_{\mathcal{B}_V}} \arrow[r, mapsto, "B"] & {[(g\circ f)(x)]_{\mathcal{B}_W}} \end{tikzcd}$$

$$= B\cdot A\cdot [x]_{\mathcal{B}_V}$$

$$[g\circ f]_{\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_L} = BA = [g]_{\mathcal{B}_W, \mathcal{B}_L} \cdot [f]_{\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_V}$$

Subspații asociate unei aplicații liniare

Fie $f: V \to W$ aplicație liniară, definim nucleul lui f:

$$\mathrm{Ker}\, f = \{ x \in V \mid f(x) = 0_V \} \subseteq V$$

și imaginea lui f:

$$\mathrm{Im}\, f = \{ f(x) \mid x \in V \} \subseteq W$$

Propoziție:
1) $\mathrm{Ker}\, f$ este subspațiu vectorial în V
2) f este injectivă $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}\, f = \{0_V\} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \dim \mathrm{Ker}\, f = 0$
3) $\mathrm{Im}\, f$ este subspațiu vectorial în W
4) $\mathrm{Im}\, f = W \Leftrightarrow f$ surjectivă

Dem.:

1) Fie $a, b \in K$; $x, y \in \mathrm{Ker}\, f \Rightarrow f(x) = f(y) = 0$

$$f(ax + by) = a f(x) + b f(y) = 0 \Rightarrow ax + by \in \mathrm{Ker}\, f$$

3) Fie $a, b \in K$; $x, y \in \mathrm{Im}\, f \Rightarrow (\exists)\ x_0, y_0 \in V$ cu
$x = f(x_0)$ și
$y = f(y_0)$

$$ax + by = a f(x_0) + b f(y_0) = f(ax_0 + by_0) \in \mathrm{Im}\, f$$

Teorema rang - defect

Fie $f: V \to W$ aplicație liniară a.î. $\dim_K V < \infty$.

Atunci $\underbrace{\dim \operatorname{Ker} f}_{\text{defectul lui } f \text{ de la inj.}} + \underbrace{\dim \operatorname{Im} f}_{\text{rang lui } f} = \dim V$.

Observație! $\operatorname{rang} f = \operatorname{rang} [f]_{B_V, B_W}$

Propoziție: Fie $f: V \to V$ aplicație liniară cu $\dim V = n < \infty$. Atunci f este injecție $\Leftrightarrow$ f surjectivă $\Leftrightarrow$ f bijectivă

Dem.: Teorema rang - defect:
$\dim V = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$

f injectivă, $\dim \operatorname{Ker} f = 0 \Leftrightarrow \dim \operatorname{Im} f = \dim V$

$$\Downarrow$$

$$\operatorname{Im} f = V$$

$$\Downarrow$$

f surjectivă

Observație! Dacă $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$ avem aplicația liniară $f: K^n \to K^m$

$$x \longmapsto Ax$$

$\operatorname{Ker} f = \{x \in K^n \mid Ax = 0\}$ = soluțiile sistemului omogen cu matricea A
$\quad = \operatorname{Ker} A$

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Teoremă: Fie V spațiu vectorial cu $\dim V < n$. Atunci $V \simeq K^n$ izo-liniar.

Dem.: $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ bază în V

Funcția $f: V \to K^n$

$x \longmapsto [x]_{\mathcal{B}_V}$ este liniară + bij.