SD Curs 8

16 Apr 2025

1. Algoritmul Medianei în $O(n)$
   - Algoritmul aleator
   - Algoritmul determinist

Alegerea medianei în O(n)

1. Algoritmul aleator
2. Algoritmul determinist

Problemă De câte comparații avem nevoie pt a găsi minimul și maximul dintr-un vector ?

min => n - 1 comparații

min ^ max = ?

3 5 2 1 7 4 10

min = 3

max = 5

2 ? 1

1 ? min

2 ? max

⇓

min = 1

max = 5

7 ? 4

4 ? min

7 ? max

⇓

min = 1

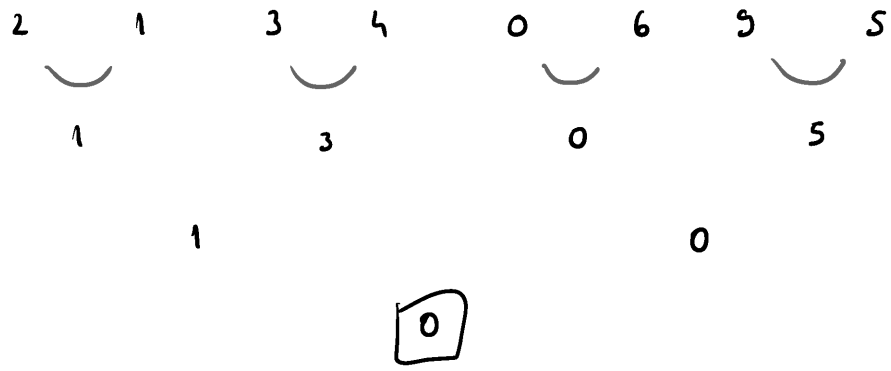
max = 7

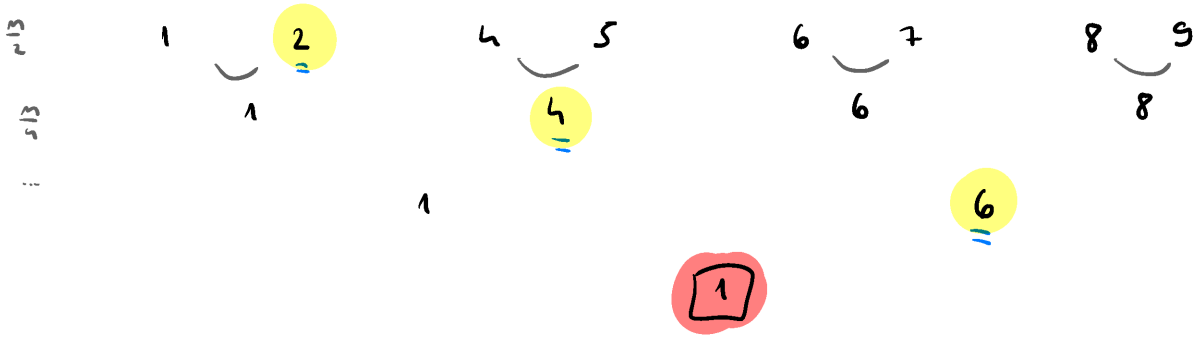
Pt. fiecare comparație avem 3 comparații

=> $\frac{3n}{2}$ comparații (mai bine decât $2(n-1)$)

Problemă De câte comparații avem nevoie pt a găsi minimul și al doilea minim dintr-un vector ?

$n + \log_2 n$ comparații

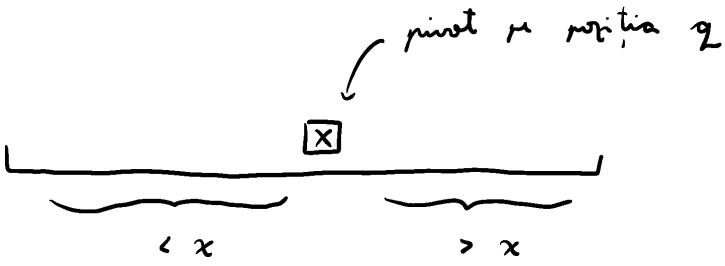




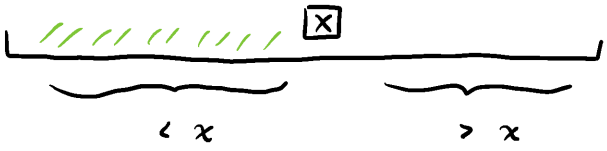
$\frac{n}{2} + \frac{n}{4} + \frac{n}{8} + \dots = n - 1$

Al doilea minim nigur a fost comparat cu cel de-al doilea minim

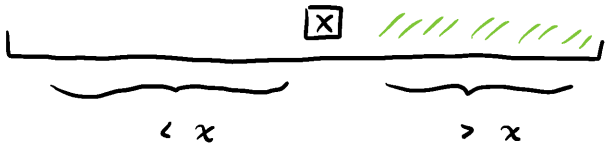
1. **Algoritm aleator** pt. găsirea mediani (în general al K-lea element dintr-un vector)



1. Dacă $K < q$



2. Dacă $K > q$



=> căutam al K-q-lea număr

Exemplu:

K = 6

pivot ales aleatoriu

1	7	3	[5]	2	10	13	4	9	20

1	3	2	4	[5]	7	10	13	9	20

K = 1

7 10 [13] 9 20

7 10 9 [13] 20

$q = 4$

Pseudo cod :

```
K - element ( A, l, r, k )

{   q = Partitie ( A, l, r )

    if ( k == q ) return A[q]
    if ( k < q ) return K - element ( A, l, q - 1 )
    else return K - element ( A, q + 1, r, k - q )
}
```

Caz favorabil $T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + O(n) = \Theta(n)$

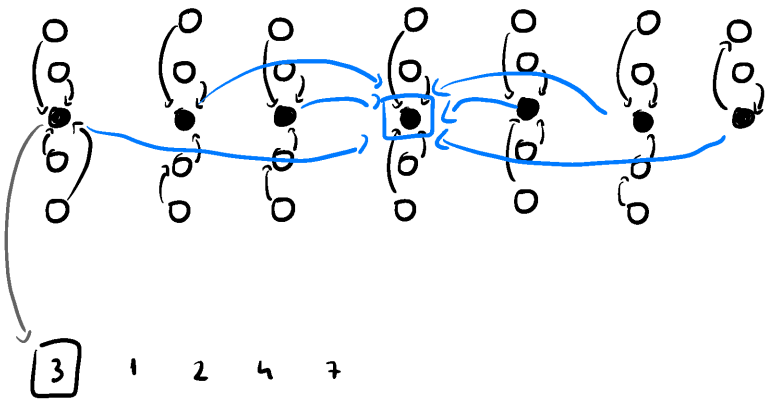
Caz nefavorabil $T(n) = T(n-1) + O(n) = \Theta(n^2)$

2. **Algoritmul determinist**

1. Partiționăm numerele în grupe de câte 5

o o o o o o o
o o o o o o o
o o o o o o o
o o o o o
o o o o o

2. Găsim mediana din fiecare grupă



3. Găsim mediana medianelor folosind același algoritm

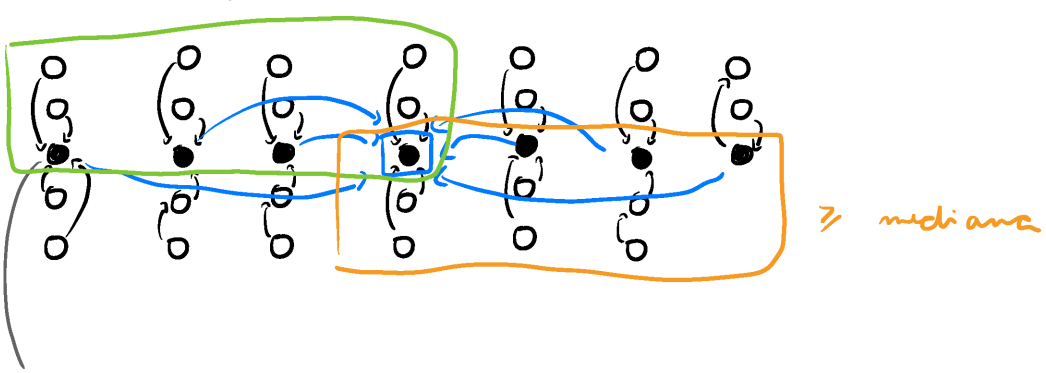
4. Selectăm valoarea de la pct 3 drept pivot

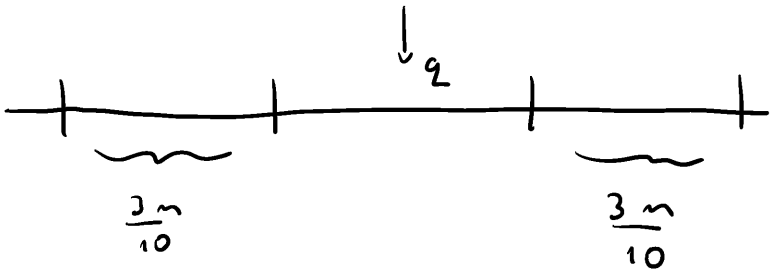
5. Continuăm în același mod ca alg. aleator

$\frac{n}{5}$ grupe

$\frac{n}{5} \cdot \frac{1}{2}$ au mediana mai mică decât mediana medianelor

$\Rightarrow \frac{3n}{10}$ elemente $\leq$ mediana medianelor





$$T(n) = T\left(\frac{n}{5}\right) + T\left(\frac{7n}{10}\right) + O(n) = O(n)$$

$\downarrow$ 3 — $\downarrow$ pași 1, 2, 4

Arătăm că $T(n) \leq c \cdot n$

$\#$

P_n: că $T\left(\frac{n}{5}\right) \leq c \cdot \frac{n}{5}$

$T\left(\frac{7n}{10}\right) \leq c \cdot \frac{7n}{10}$

$$T(n) = T\left(\frac{n}{5}\right) + T\left(\frac{7n}{10}\right) + n \leq \frac{c \cdot n}{5} + c \cdot \frac{7n}{10} + n \leq$$

$$\leq c\,\frac{9n}{10} + n = cn - \frac{cn}{10} + n$$

$$= cn - n\left(\frac{c}{10} - 1\right) \leq cn$$

$\forall c \geq 10$

Groupe de câté 3

$$T(n) = T\left(\frac{n}{3}\right) + T\left(\frac{2n}{3}\right) + O(n) = \Theta(n \log n)$$

$\frac{n}{3}$ groupe

$\frac{n}{6}$ groupe $\times$ 2 elem $= \frac{n}{3}$ elem $\leq$ mediana
mediane lor

Groupe de cate 7

$$T(n) = T\left(\frac{n}{7}\right) + T\left(\frac{5n}{7}\right) + O(n) = \Theta(n)$$