Donea Fernando - Emanuel
grupa 143

Spații vectoriale

Definiție:

Fie K un corp comutativ ($K = \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_p$ cu p prim). Un K - spațiu vectorial este o mulțime nevidă $\emptyset \neq V$ împreună cu două operații:

„ + " (adunarea): $+ : V \times V \to V$

„ · " (înmulțirea): $\cdot : K \times V \to V$

$$\begin{matrix} \lambda \in K \\ x \in V \end{matrix} \longrightarrow \lambda \cdot x$$ astfel încât

1. $(V, +)$ este grup abelian
2. $a(x+y) = a\cdot x + a \cdot y \quad \forall a \in K, \ \forall x, y \in V$
3. $(a+b)x = ax + bx \quad \forall a, b \in K, \ \forall x \in V$
4. $(a \cdot b)\cdot x = a\cdot(b \cdot x) \quad \forall a, b \in K, \ \forall x \in V$
5. $1 \cdot x = x, \ \forall x \in V$

Exemple

1. mulțimea vectorilor din plan
2. $\mathcal{M}_{m,n}(K)$ - K - spațiu vectorial cu operațiile uzuale
3. $K[X]$ - polinoame în nedeterminata X cu coeficienți în corpul K
4. K - corp comutativ, $K^n = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}, a_i \in K, \forall i = \overline{1,n}$

Subspații vectoriale:

Definiție:

O submulțime nevidă a unui spațiu vectorial V se numește subspațiu vectorial în V dacă pentru W împreună cu restricțiile operațiilor de pe V la W obținem un K-spațiu vectorial.

$\Leftrightarrow \forall x, y \in W \quad x + y \in W$

$\forall a \in K$ și $\forall x \in W \quad a \cdot x \in W$

$\Leftrightarrow \forall a, b \in K, \ \forall x, y \in W$

$a \cdot x + b \cdot y \in W$

Exemple: V un K-spațiu vectorial

1. $\{0_V\}$, V sunt subspații vectoriale în V
2. Pentru $n \in \mathbb{N}$ fixat, $R = \{ f \in \mathbb{R}[x] \mid \text{grad } f \leq n \} \cup \{0\}$ este un subspațiu vectorial în $\mathbb{R}[x]$
3. $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ este subspațiu vectorial în $M_2(\mathbb{R})$
4. $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 5x + 2y = 0 \right\}$ este subspațiu vectorial în $\mathbb{R}^2$
5. Fie $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$.
Notăm $\text{Ker}(A) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid A \cdot x = 0 \}$ soluțiile sistemului omogen cu matricea sistemului $= A$.
Atunci $\text{Ker}(A)$ este subspațiu vectorial în $\mathbb{R}^n$

Baze

Fie K corp și V un K-spațiu vectorial
O mulțime $S \subset V$ se numește sistem de generatori (SG) pentru V dacă

$$V = \langle S \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot v_i \mid n \in \mathbb{N}, v_i \in S, a_i \in K, i = \overline{1,n} \right\}$$

Spunem că $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$ formează un sistem liniar independent (SLI) de vectori dacă $\forall a_1, a_2, \dots, a_n \in K$ cu $\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot v_i = 0$, avem că $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$

• <u>Definiție</u>:

Se numește bază a spațiului vectorial V o familie de vectori B care îndeplinește condițiile:

1. B este liniar independentă (SLI)
2. B este sistem de generatori pentru spațiul V (SG)

• <u>Observații</u>:

1. Dacă $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ este bază în V, atunci orice vector $x \in V$ se scrie în mod unic

$$x = a_1 \cdot u_1 + a_2 \cdot u_2 + \dots + a_n \cdot u_n$$

2. Dimensiunea lui V este numărul de elemente dintr-o bază a lui V.

• <u>Exemple</u>

în K^n: $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ s.n. bază canonică a lui K^n

Spațiu Afin

Definiție

Fie o mulțime amorfă A, nevidă, cu elemente numite puncte iar V un spațiu vectorial peste un corp comutativ K.

Dacă aplicația $\ell : A \times A$ are urm. proprietăți:

1. $\ell(A+B) + \ell(B, C) = \ell(A, C)$
2. $\exists$ un punct O din A a.î. ℓ_0 e o bijecție

atunci tripletul (A, V, ℓ) se numește spațiu afin, iar ℓ se numește structura afină.

Teoremă

Fie tripletul (A, V, ℓ).

Dacă (A, V, ℓ) este spațiu afin, atunci oricare ar fi o submulțime din A, aplicația $\ell_B : A \to V$ este o bijecție

Exemplu

Planul și spațiul euclidian sunt spații afine peste spațiile vectoriale ale vectorilor liberi asociați.

Subspații afine

• Definiție

Fie $A = (X, \vec{X}, \phi)$ un spațiu afin peste K.

O submulțime $Y \subset X$ se numește

spațiu afin al lui X dacă $Y = \emptyset$ sau $Y \neq \emptyset$ și există un subspațiu vectorial V al lui $\vec{X}$ a.î. $\Phi(V \times V) \subset Y^2$ și tripletul $(Y, V, \Phi / V \times V)$ este spațiu afin.

Aplicații liniare

• Definiție

Fie V și W două K-spații vectoriale.

O funcție $f: V \to W$ s.n. aplicație liniară dacă:

1. $f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in V$
2. $f(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot f(x) \quad \forall x \in V \ \forall \alpha \in K$

Dacă, în plus, f este bijectivă, spunem că f este izomorfism liniar și că V și W sunt spații vectoriale izomorfe.

• Observație

Din 1 și 2 avem că $f: V \to W$ aplicație liniară

$\Leftrightarrow f(ax + by) = a \cdot f(x) + b \cdot f(y) \quad \forall a, b \in K \ \forall x, y \in V$

• Exemple:

1. Pentru V sp. vectorial, funcția identică $1_V: V \to V$ este aplicație liniară

2. Pentru V, W spații vectoriale, morfismul nul
$f : V \to W$, $x \to 0_W$ este aplicație liniară

3. Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$, funcția $f : K^n \to K^m$
$$K^n = \mathcal{M}_{n,1}(K), \quad K^m = \mathcal{M}_{m,1}(K)$$
$u \to A \cdot v$ este aplicație liniară

Endomorfisme

• Definiție

Fie U și V K-spații vectoriale

Aplicația $f : U \to V$ se numește morfism de spații vectoriale dacă respectă condiția de liniaritate:

$$f(a \cdot x + b \cdot y) = a \cdot f(x) + b \cdot f(y) \quad \forall x, y \in U \quad \forall a, b \in K$$

Dacă $U = V$ atunci f se numește endomorfism al lui V

Subspații asociate unei aplicații liniare

Fie $f : V \to W$ aplicație liniară, definim

1. nucleul lui f:
$\operatorname{Ker} f = \{ x \in V \mid f(x) = 0_V \} \subseteq V$

2. imaginea lui f
$\operatorname{Im} f = \{ f(x) \mid x \in V \} \subseteq W$

$$[f]_{B_V, B_W} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & & \\ \underbrace{\alpha_{m1}}_{[f(v_1)]_{B_W}} & \alpha_{m2} & \dots & \underbrace{\alpha_{mn}}_{[f(v_n)]_{B_W}} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$$

<u>Schimbarea bazei</u>

Fie $f : V \to W$ aplicație liniară, $\dim V = n$, $\dim W = m$ $< \infty$

B_V, B_V' baze in V

B_W, B_W' baze in W

$[f]_{B_V, B_W}$ $\qquad$ $[f]_{B_V', B_W'} = ?$

$B_V \xrightarrow{S} B_V'$
$B_W \xrightarrow{T} B_W'$, S, T - matricile de trecere

Fie $u \in V$, $[f(u)]_{B_W} = [f]_{B_V, B_W} \cdot [u]_{B_V}$

$T^{-1} \mid \quad T \cdot [f(u)_{B_W'}] = [f]_{B_V, B_W} \cdot S \cdot [u]_{B'V} \iff$

$\iff \quad [f(u)_{B'_W}] = T^{-1} \cdot [f]_{B_V B_W} \cdot S[u]_{B'V}$

$\Rightarrow \quad [f]_{B'_V, B'_W} = T^{-1} \cdot [f]_{B_V, B_W} \cdot S$

• Proprietăți :

1. $\operatorname{Ker} f$ subspațiu vectorial în V
2. f injectivă $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Ker} f = \{0_V\}$ $\Leftrightarrow$ $\dim(\operatorname{Ker} f) = 0$
3. $\operatorname{Im} f$ subspațiu vectorial în W
4. f surj $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Im} f = W$

Teorema Rang - Defect

$$\dim V = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$$

Obs :

$f : V \to V$ endomorfism , atunci

f inj $\Leftrightarrow$ f surj $\Leftrightarrow$ f bij

Matricea unei aplicații liniare

Fie V, W spații vectoriale, $\dim V = n$, $\dim W = m$

$B_V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ baza în V

$B_W = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ baza în W

și $f : V \to W$ o aplicație liniară

$\forall\, v_j$, calculam coordonatele lui $f(v_j)$ în B_W și le punem pe coloanele matricei $\forall\, j = \overline{1,n}$

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} \cdot w_i \,, \quad \forall\, j = \overline{1,n} \quad \text{cu } \alpha_{ij} \in K$$

Bibliografie

1. Curs Geometrie : A. M. Teleman
2. Curs Algebră : D. Stamate
3. Seminar Geometrie și Algebra : A. Halanay