Seminar 1

24 Feb 2025

9 puncte examen
3 puncte seminar
3 puncte lab

notă : $(9 + 3 + 3) \% 10$

ex 1

Să se dea exemple de relații binare R a.î.

i) R refl. și sim dar nu tranz
ii) R refl și tranz dar nu sim
iii) R sim și tranz dar nu refl.

ex 2

Pt orice mulțime P de pisici, toate pisicile din P au aceeași culoare

ex 3

Fie $G = (V, E)$ un graf cu $|V| \geq 2$

Să se arate că $\exists\, x \neq y \in V$ a.î.

$deg(x) = deg(y)$

ex 1

Să se dea exemple de relații binare R a.î.

i) R refl. și sim dar nu tranz

ii) R refl și tranz dar nu sim

iii) R sim și tranz dar nu refl.

Fie A o mulțime

O relație binară R este o mulțime $R \subseteq A \times A$

i) $R \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$(x, y) \in R \iff |x - y| < 2$

$|1 - 2| < 2$

$|2 - 3| < 2$

Dar $|1 - 3| \nless 2$, deci

$(1, 3) \notin R$

ii) $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $R =$ „1"

sau

$R \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $(x, y) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{N}$

iii)

Fie $R \subseteq A \times A$ tranz și sim

$\forall x, y \in A \quad (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$

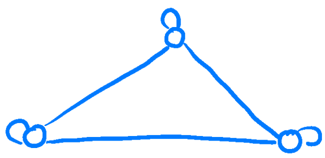
$\forall x, y, z \in A \quad \left.\begin{array}{l}(x, y) \in R \\ (y, z) \in R\end{array}\right\} \Rightarrow (x, z) \in R$

Fie $x \in A$

<u>Alegem $y \in A$</u> a.î. $(x, y) \in R$

Avem $(y, x) \in R$ $\Big\}$ $\overset{\text{tranz}}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow (x, x)$



o Deci nu e bun!

iii) $R = \{ (1, 2), (2, 3), (3, 2), (2, 1) \; (1, 3)$

$(3, 1), \; (1, 1), \; (2, 2), \; (3, 3) \} \subseteq \{1, 2, 3, 4\}^2$

ex 2

Pt orice mulțime P de pisici, toate pisicile din P au aceeași culoare

Dem. inducție după $|P|$

$|P| = 1$ Evident

$K \to K+1$:

ipoteza de inducție

(IH) : Pt orice mulțime P, dacă $|P| = K$ atunci $\forall p_1, p_2 \in P$, $cul(p_1) = cul(p_2)$

Fie Q o mulțime cu $K+1$ elemente

Arătam că $\forall x, y \in Q$, $cul(x) = cul(y)$

Alegem $x \in Q$. Considerăm $Q \setminus \{x\}$

$|Q \setminus \{x\}| = K \overset{(IH)}{\Longrightarrow} \forall y, z \in Q \setminus \{x\}$,

$cul(y) = cul(z) = c_1$

Alegem $x' \neq x \in Q$

Analog $\forall y, z \in Q \setminus \{x'\}$, $c(y) = c(z) = c_2$

Alegem $y \neq x, x'$ avem $c(y) = c_1$

$c(y) = c_2$

$\Rightarrow c_1 = c_2$

$\star$ steluță

ex 3

Fie $G = (V, E)$ un graf cu $|V| \geq 2$

Să se arate că $\exists\, x \neq y \in V$ a.î.

$deg(x) = deg(y)$

Sol:

$\underline{0} \quad 1 \quad 2 \qquad \underline{k-1}$

R. a.

$\forall\, x \neq y \in V, \quad deg(x) \neq deg(y)$

$$\left.\begin{array}{l} deg(V) \subseteq \{0, 1, \dots, |V|-1\} \\ deg \text{ e injectivă} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$deg(V) = \{0, 1, \dots, |V|-1\}$

$$\left.\begin{array}{l} \exists\, x \text{ cu } deg(x) = |V|-1 \Rightarrow \forall\, y \neq x,\ (x, y) \in E \\ \exists\, z \text{ cu } deg(z) = 0 \Rightarrow \forall\, y,\ (z, y) \notin E \end{array}\right\} \text{contradicție}$$

ex 4

Fie G un graf

Numim clică (clique) un subgraf G' al lui G a.î. orice două noduri din G' să aibă o muchie între ele.

Numim anticlică un subgraf G' al lui G a.î. nu există muchii între noduri

Th. (Ramsey)

Orice graf G cu n noduri conține o clică sau o anticlică cu cel puțin $\frac{1}{2} \log_2 n$ noduri