Donea Fernando-Emanuel
grupa 143

Axiomele geometriei euclidiene plane în limbaj de teoria mulțimilor

Sistemul axiomal

Definim următoarele mulțimi și relații fundamentale:

$\mathcal{P}$ = mulțimea punctelor din plan

$\mathcal{D}$ = mulțimea dreptelor din plan

$\mathcal{S}$ = mulțimea segmentelor din plan

$\mathcal{U}$ = mulțimea unghiurilor din plan

$\in$ = relația de incidență

$-$ = relația de ordonare

$\equiv$ = relația de congruență

$\parallel$ = relația de paralelism

Axiomele de incidență

1. $\forall A, B \in \mathcal{P}$ a.î. $A \neq B \Rightarrow \exists!\, d \in \mathcal{D}$ a.î. $A, B \in d$

2. $\forall d \in \mathcal{D}$, $\exists A, B \in \mathcal{P}$ a.î. $A \neq B \wedge A, B \in d$

3. $\exists A, B, C \in \mathcal{P}$ a.î. $A \neq B \neq C \wedge \nexists\, d \in \mathcal{P}$ a.î. $A, B, C \in d$

2. Axiomele de ordonare

Definim relația „punctul B este între A și C"
drept "A - B - C"

1. $\forall A, B, C \in \mathcal{P}$ a.î. $A-B-C \Rightarrow A \neq B \neq C \wedge$
$\exists d \in \mathcal{D}$ a.î. $A, B, C \in d$

2. $\forall A, B \in \mathcal{P}$ a.î. $A \neq B \Rightarrow \exists C \in \mathcal{P}$ a.î. $A-B-C$

3. $\forall A, B, C \in \mathcal{P}$ a.î. $A-B-C \Rightarrow \neg(C-A-B)$

4. Axioma lui Pasch

$\forall A, B, C \in \mathcal{P}$, $\forall d \in \mathcal{D}$ a.î. $A \notin d, B \notin d, C \notin d \wedge$ $(\exists M \in \mathcal{P}$ a.î. $B-M-C \wedge M \in d) \wedge (\nexists N \in \mathcal{P}$ a.î. $A-N-C \wedge N \in d) \wedge (A \neq B \neq C) \wedge (\nexists c \in \mathcal{D}$ a.î. $A, B, C \in c) \Rightarrow \exists K \in \mathcal{P}$ a.î. $A-K-B \wedge K \in d$

5. $\forall A, B, C \in \mathcal{P}$ a.î. $A \neq B \neq C \wedge$ $(\exists d \in \mathcal{P}$ a.î. $A, B, C \in d) \wedge \neg(B-A-C) \wedge \neg(A-C-B) \Rightarrow$ $\Rightarrow A-B-C$

6. $\forall A, B, C, L, M, N \in \mathcal{P}$ a.î. $(\nexists d \in \mathcal{P}$ a.î. $A, B, C \in d)$ $\wedge B-L-C \wedge C-M-A \wedge A-N-B \Rightarrow \nexists g \in \mathcal{P}$ a.î. $L, M, N \in g$

7. $\forall A, B \in \mathcal{P}$ a.î. $A \neq B \Rightarrow \exists M \in \mathcal{P}$ a.î. $A-M-B$

8. $\forall A, B, C, D \in \mathcal{P}$ a.î. $A-B-C \wedge B-C-D \Rightarrow$
$\Rightarrow A-B-D \wedge A-C-D$

9. $\forall A, B, C$ a.î. $D-C-A \wedge A-B-C \Rightarrow A-B-D \wedge B-C-D$

Axiomele de congruență

1. $\forall s \in \mathcal{D}$, $\forall [AB] \in \mathcal{S}$ a.î. $\exists O \in \mathcal{P} \wedge O \in s \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists! M \in \mathcal{P}$ a.î. $M \in s \wedge [OM] \equiv [AB]$

2. $\forall [AB], [A'B'], [A''B''] \in \mathcal{S}$ a.î. $[AB] \equiv [A'B'] \wedge$
$\wedge [A'B'] \equiv [A''B''] \Rightarrow [AB] \equiv [AB] \wedge [A'B'] \equiv [AB] \wedge$
$\wedge [AB] \equiv [A''B'']$

3. $\forall A, B, C, A', B', C' \in \mathcal{P}$ a.î. $A'-B'-C' \wedge A-B-C \wedge$
$[AB] \equiv [A'B'] \wedge [BC] \equiv [B'C'] \Rightarrow [AC] \equiv [A'C']$

4. $\forall \widehat{hk} \in \mathcal{U}$, $\forall s \in \mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$ = semiplan limitat de s
$\Rightarrow \exists! t \in \mathcal{D}'$ a.î. $\widehat{st} \equiv \widehat{hk}$

5. $\forall A, B, C, A', B', C' \in \mathcal{P}$ a.î. $\widehat{BAC} \equiv \widehat{B'A'C'} \wedge [AB] \equiv [A'B'] \wedge$
$\wedge [AC] \equiv [A'C'] \Rightarrow$ ~~[illegible]~~ $\widehat{ABC} \equiv \widehat{A'B'C'}$

Axioma de paralelism

1. Postulatul lui Euclid

$\forall A \in \mathcal{P}$, $\forall d \in \mathcal{D}$ a.î. $A \notin d \Rightarrow \exists! d' \in \mathcal{D}$ a.î.
$d' \parallel d \wedge A \in d'$

Axiomele de continuitate

1. Axioma lui Arhimede

$\forall O, A, P \in \mathcal{P}, \forall s \in \mathcal{D}$ a.î. $O, A, P \in s \Rightarrow \exists K \in \mathbb{N}$,

$\exists A_1, A_2, \dots, A_K \in \mathcal{P}$ a.î. $(A \in [OA_2], A_2 \in [OA_3] \wedge \dots$

$A_i \in [OA_{i+1}], \dots, A_{K-1} \in [OA_K]) \wedge ([OA] \equiv [AA_2] \equiv \dots \equiv [A_{K-1} A_K]) \wedge$

$P \in [OA_K]$

2. Axioma lui Cantor - Dedekind

$\forall d \in \mathcal{D}, A_i \in \mathcal{P}, \forall i = \overline{1,n}, \quad B_i \in \mathcal{P}, \forall i = \overline{1,n}$

a.î. $A_i, B_i \in d \wedge [A_{i+1}, B_{i+1}] \in [A_i B_i] \quad \forall i = \overline{1,n} \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists P \in \mathcal{P}$ a.î. $\forall i = \overline{1,n} \quad P \in [A_i B_i]$

Bibliografie

1. Curs Geometrie : A. M. Teleman

2. Matematică - manual pentru clasa a IX-a, Geometrie și trigonometrie, 1980 : K. Teleman, M. Florescu, C. Rădulescu, D. Moraru, E. Stănescu