Donea Fernando-Emanuel
grupa 143

Grupurile ortogonale O(n), SO(n) și comutativitatea lor

Grupul ortogonal O(n)

• Definiție

Grupul ortogonal O(n) este definit ca mulțimea tuturor matricilor reale pătratice de ordin n care pastrează produsul scalar:

$$O(n) = \{ X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid X^T \cdot X = I_n \}, \text{ unde}$$

X^T este transpusa lui X, iar I_n este matricea identitate de ordin n.

• Observații

1. Grupul ortogonal formează o structură de grup în $GL(n, \mathbb{R})$.

2. Orice matrice ortogonală are determinantul ± 1, ceea ce duce la împărțirea lui O(n) în două componente:

$$O(n) = SO(n) \cup O^-(n), \text{ unde}$$

- $SO(n) = \{ X \in O(n) \mid \det X = 1 \}$ - grupul rotațiilor
- $O^-(n) = \{ X \in O(n) \mid \det X = -1 \}$ - grupul care conține reflexiile

Grupul special ortogonal SO(n)

• Definiție

Grupul $SO(n)$ este un subgrup a lui $O(n)$, format doar din matricile cu determinantul 1. Aceste matrici corespund rotațiilor proprii-zise și păstrează atât distanța cât și orientarea.

$$SO(n) = \{ X \in O(n) \mid \det X = 1 \} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow SO(n) = \{ X \in M_n(\mathbb{R}) \mid X \cdot X^T = I_n , \det X = 1 \}$$

Comutativitatea grupurilor O(n) și SO(n)

Un grup este comutativ (abelian) dacă pentru orice două elemente a, b din grup avem $a \cdot b = b \cdot a$.

Analizăm comutativitatea pentru diferite valori ale lui n

Cazul $n = 1$

Spațiul $M_1(\mathbb{R})$ sunt de fapt numere reale

$O(1) = \{ x \in \mathbb{R} \mid x^T \cdot x = 1 \} = \{1, 1\}$

$SO(1) = \{ x \in O(1) \mid \det x = 1 \} = \{1\}$

$O^-(1) = \{ x \in O(1) \mid \det x = -1 \} = \{-1\}$

a) grupul $O(1)$

$1 \cdot (-1) = (-1) \cdot 1 = -1$

$\Rightarrow O(1)$ abelian

b) grupul $SO(1)$

$SO(1) = \{1\}$

$\Rightarrow SO(1)$ abelian

Cazul $n = 2$

$O(2) = \{ x \in M_2(\mathbb{R}) \mid x \cdot x^T = I_2 \}$

Fie $x = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$x \cdot x^T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

Din condiția $X \cdot X^T = I_2$ rezultă următorul sistem:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ ac + bd = 0 \\ c^2 + d^2 = 1 \end{cases}$$

Fie $\varphi, \theta \in [0, 2\pi]$

$$\begin{cases} \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1 \\ \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \\ \cos(\varphi - \theta) = \sin\varphi \sin\theta + \cos\varphi \cos\theta = 0 \end{cases}$$

$$a = \sin\varphi \qquad c = \sin\theta$$

$$b = \cos\varphi \qquad d = \cos\theta$$

$$\cos(\varphi - \theta) = 0 \Rightarrow \varphi - \theta \in \left(\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$a = \sin\left(\theta \pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm\cos\theta$$

$$b = \cos\left(0 \pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm\sin\theta$$

$$\text{Deci } O(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \theta \in [0, 2\pi) \right\} \cup$$

$$\cup \left\{ \begin{pmatrix} -\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \theta \in [0, 2\pi) \right\}$$

$$SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \theta \in [0, 2\pi) \right\}$$

$$O^-(2) = \left\{ \begin{pmatrix} -\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \theta \in [0, 2\pi) \right\}$$

a) grupul $O(2)$

Fie o rotație $R(\theta)$ și o reflexie $M(\theta)$

$$R(\theta) \cdot M(\theta) \neq M(\theta) \cdot R(\theta)$$

$\Rightarrow$ $O(2)$ nu este abelian

b) grupul $SO(2)$

Fie două rotații :

$$A = R(\theta_1) \quad , \quad B = R(\theta_2)$$

$$AB = R(\theta_1 + \theta_2) = R(\theta_2 + \theta_1) = BA$$

$\Rightarrow$ $SO(2)$ abelian

Bibliografie

1. Curs Geometrie : A.M. Teleman
2. Seminar Geometrie : A. Halanay
3. „Rotation Matrix" : Wikipedia