razvan.sfetcu@fmi.unibuc.ro

razvancornelsfetcu@gmail.com

0723 032 129

1 Oct 2024

Curs 1

1. Șiruri de numere reale
   - șir convergent / divergent
   - șir crescător / descresc (monoton)
   - șir mărginit
2. Criteriul cleștelui
3. Teorema lui Weierstrass
4. Operații cu șiruri de nr. reale conv
5. "zero · mărginit = zero"
6. Șir Cauchy
7. Lema lui Cesaro
9. Limitele externe ale unui șir de nr. reale
10. Puncte limită
11. Limita inferioară și superioară

Șiruri de numere reale

Def Fie $A \subset \mathbb{N}$ o mulțime nenumărabilă (i. e. $\exists\ g : A \to \mathbb{N}$, g bijectivă)

O funcție $f : A \to \mathbb{R}$ s. n. șir de numere reale

Obs Orice mulțime numărabila este infinită

Notații 1) $f(n) = x_n \quad \forall\, n \in A$

2) Ținând cont de definiția precedentă și de notația 1) obținem șirul de numere reale $(x_n)_{n \in A}$

Obs 1) Atunci când A se subînțelege scriem doar $(x_n)_n$

2) În general $A = \mathbb{N}$ sau $A = \mathbb{N}^*$, cazuri în care vom scrie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (sau $(x_n)_{n \geq 0}$, sau $(x_n)_n$) respectiv $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ (sau $(x_n)_{n > 0}$, sau $(x_n)_n$)

Def Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ și $\ell \in \mathbb{R}$

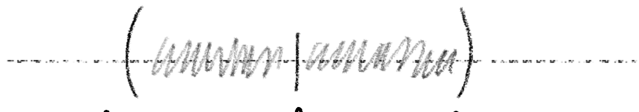
Spunem că șirul $(x_n)_n$ are limita ℓ și scriem $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \ell$ dacă $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a. î. $\forall\, n \geq n_\varepsilon$ avem $|x_n - \ell| < \varepsilon$

$\Downarrow$

$$-\varepsilon < x_n - \ell < \varepsilon$$

$$\Updownarrow$$

$$\ell - \varepsilon < x_n < \ell + \varepsilon$$



Def Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$

1) Spunem că șirul $(x_n)_n$ are limita $+\infty$ și scriem $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ dacă $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall\, n \geq n_\varepsilon$ avem $x_n > \varepsilon$

Spunem că șirul $(x_n)_n$ are limita $-\infty$ și scriem $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ dacă $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall\, n \geq n_\varepsilon$ avem $x_n < -\varepsilon$

Def Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$

Spunem că șirul $(x_n)_n$ este

1) convergent dacă $\exists\, \ell \in \mathbb{R}$ a.î. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \ell$

2) divergent dacă nu este convergent (i.e. sau x_n nu are limită sau $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \pm\infty$)

Șiruri de nr. reale
- cu limită
  - cu limită finită (conv)
  - cu limită infinită (div)
- fara limită (div)

Def Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$

Spunem că șirul x_n este

1) crescător (respectiv strict crescător) dacă $x_n \leq x_{n+1}$ (resp. $x_n < x_{n+1}$)

2) descrescător (resp. strict descresc.) dacă $x_n \geq x_{n+1}$ (resp. $x_n > x_{n+1}$)

3) monoton (resp. strict monoton) dacă x_n este crescător sau x_n este descrescător (respectiv x_n este strict cresc. sau x_n este strict desc.)

4) mărginit dacă $\exists\ a, b \in \mathbb{R}$ a.î. $a \leq x_n \leq b$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$ ($\Leftrightarrow \exists\, M > 0$ a.î. $|x_n| \leq M$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$)

Criteriul Cleștelui

Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$, $(y_n)_n \subset \mathbb{R}$ și $(z_n)_n \subset \mathbb{R}$ a.î. $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că $\forall\, n \geq n_0$ avem

$$x_n \leq y_n \leq z_n$$

Presupunem că $\exists\, l \in \mathbb{R}$ a.î. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = l$

Atunci: $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = l$

Teorema lui Weierstrass

Orice șir de numere reale monoton și mărginit este convergent

<u>Obs</u> Reciproca teoremei precedente este falsă!

ex 1

Fie $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$

Arătați că

a) $(x_n)_n$ nu este monoton

b) x_n convergent

Sol:

a) Fie $k \in \mathbb{N}^*$

$$x_{2k} = \frac{(-1)^{2k}}{2k} = \frac{1}{2k}$$

$$x_{2k+1} = \frac{(-1)^{2k+1}}{2k+1} = -\frac{1}{2k+1}$$

$$x_{2k+2} = \frac{(-1)^{2k+2}}{2k+2} = \frac{1}{2k+2}$$

Avem $x_{2k} > x_{2k+1}$ și $x_{2k+1} < x_{2k+2}$

Deci $(x_n)_n$ nu este monoton

b)
$$\begin{array}{ccccc} -\frac{1}{n} & \le & \frac{(-1)^n}{n} & \le & \frac{1}{n} \\ \searrow & & \downarrow{\scriptstyle n\to\infty} & & \swarrow \\ & & 0 & & \end{array}$$

Conform Criteriului cleștelui rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$ deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Așadar x_n convergent

$\square$

Propoziție Orice șir de nr. reale convergent este mărginit

Propoziție (Operații cu șiruri de numere reale convergente)

Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$, $(y_n)_n \subset \mathbb{R}$, $x, y \in \mathbb{R}$ a.i.

$\lim_{n\to\infty} x_n = x$ și $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ și $\alpha \in \mathbb{R}$

Atunci

1) $\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = x + y$

2) $\lim_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = x \cdot y$

3) $\lim_{n\to\infty} \alpha \cdot x_n = \alpha \cdot x$

4) $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{x}{y}$ (cu presupunerea $y \neq 0$)

Propoziție Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$, $(y_n)_n \subset \mathbb{R}$ și $x \in \mathbb{R}$

1) Avem echivalența $\left(x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \right) \Leftrightarrow \left(|x_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \right)$

2) Dacă $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ atunci $\lim_{n\to\infty} |x_n| = |x|$

3) Dacă $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ și $(y_n)_n$ mărginit

atunci $\lim_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = 0$ („zero · mărginit = zero")

Def Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$

Spunem că $(x_n)_n$ este **șir Cauchy** dacă $\forall \varepsilon > 0$,

$\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.i. $\forall m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq n_\varepsilon$, $n \geq n_\varepsilon$

avem $|x_m - x_n| < \varepsilon$. (de la un rang încolo termenii sunt apropiați)

Teoremă Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$. Sunt echivalente:

1) $(x_n)_n$ este şir convergent

2) $(x_n)_n$ este şir Cauchy

Terminologie Şirurile Cauchy se mai numesc şiruri fundamentale

ex 2

Fie $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Arătaţi ca $(x_n)_n$ nu este convergent.

Sol:

Arătăm că $(x_n)_n$ nu este şir Cauchy

$(x_n)_n$ şir Cauchy $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a. î. $\forall m, n \in \mathbb{N}$ $m \geq n_\varepsilon$, $n \geq n_\varepsilon$, avem $|x_m - x_n| < \varepsilon$

$(x_n)_n$ nu este şir Cauchy $\Leftrightarrow$ $\exists \varepsilon_0 > 0$ a. î. $\forall k \in \mathbb{N}$ $\exists m_k, n_k \in \mathbb{N}$, $m_k \geq k$, $n_k \geq k$ cu proprietatea că $|x_{m_k} - x_{n_k}| \geq \varepsilon_0$

Fie $p, q \in \mathbb{N}$, $p > q$

$$|x_p - x_q| = \left| \left(\cancel{1} + \cancel{\frac{1}{2}} + \dots + \frac{1}{p} \right) - \left(\cancel{1} + \cancel{\frac{1}{2}} + \dots + \cancel{\frac{1}{q}} \right) \right|$$

$$= \left| \frac{1}{q+1} + \dots + \frac{1}{p} \right| = \frac{1}{q+1} + \dots + \frac{1}{p}$$

$$\frac{1}{q+1} + \dots + \frac{1}{p} \geq \underbrace{\frac{1}{p} + \frac{1}{p} + \dots + \frac{1}{p}}_{p-q \text{ termeni}} = \frac{p-q}{p}$$

Dacă $p = 2q$ atunci $|x_p - x_q| \geq \frac{2q - q}{2q} = \frac{q}{2q} = \frac{1}{2}$

Alegem $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$

Fie $k \in \mathbb{N}$. Alegem $m_k = 2(k+1)$ şi $n_k = k+1$

$$|x_{m_k} - x_{n_k}| = |x_{2(k+1)} - x_{k+1}|$$

$$= \left| \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k+1} + \dots + \frac{1}{2(k+1)} \right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k+1} \right) \right|$$

$$= \frac{1}{k+2} + \dots + \frac{1}{2(k+1)} > \underbrace{\frac{1}{2(k+1)} + \dots + \frac{1}{2(k+1)}}_{2(k+1)+1-(k+2) = k+1 \text{ termeni}} = \frac{k+1}{2(k+1)} = \frac{1}{2}$$

Aşadar $|x_{m_k} - x_{n_k}| \geq \varepsilon_0$

Prin urmare $(x_n)_n$ nu este şir Cauchy

Aşadar $(x_n)_n$ nu este şir convergent

$\square$

Lema (Lema lui Cesaro)

Orice şir de nr. reale mărginit are măcar un subşir convergent

Limitele externe ale unui șir de nr. reale

Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$

Def Fie $x \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

Spunem că x este punct limită al șirului $(x_n)_n$ dacă există un subșir $(x_{n_k})_k \subset (x_n)_n$ a.î. $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n_k} = x$

Notație $\mathcal{L}((x_n)_n) \overset{not}{=} \{ x \in \overline{\mathbb{R}} \mid x$ punct limită al lui $(x_n)_n \}$

Propoziție Există un cel mai mare element (finit sau infinit) al mulțimii $\mathcal{L}((x_n)_n)$ (i.e. cel mai mare punct limită al șirului $(x_n)_n$) și un cel mai mic element (finit sau infinit) al mulțimii $\mathcal{L}((x_n)_n)$ (i.e. cel mai mic punct limită)

Def

1) Cel mai mare punct limită al șirului $(x_n)_n$ s.n. limita superioară a sa și se notează $\lim\limits_{n\to\infty} \sup x_n$ sau $\overline{\lim}\, x_n$

2) Cel mai mic punct limită al șirului $(x_n)_n$ s.n. limita inferioară a sa și se notează $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n$ sau $\underline{\lim}\, x_n$

<u>Propoziție</u>

1) $\underline{\lim}\, x_n \leq \overline{\lim}\, x_n$

2) Șirul $(x_n)_n$ are limită dacă și numai dacă cele două sunt egale (i.e. $\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n$, caz în care limita este valoarea comună a celor două)