Rezolvarea sistemelor liniare prin metoda Gauss - Jordan (metoda eliminării)

Sistem liniar cu m ecuații și n necunoscute =

$$(*)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \text{-------------------------} \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} ; \; a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ este soluție pentru sistemul (*) dacă cele m ecuații au loc simultan înlocuind aceste valori

Notăm $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$

↪ matricea coeficienților sistemului

$$\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R}) \to \text{vectorul}$$

$$\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^m$$

coloană de termenilor liberi

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \to \text{coloana}$$

(vectorul) necunoscutelor

Forma matriceală a sistemului (*):

$$A \cdot \underline{x} = \underline{b}$$

Pentru rezolvarea sistemului, toată informația relevantă este cuprinsă în

$\bar{A} = (A \mid \underline{b}) \in \mathcal{M}_{m,n+1}(\mathbb{R})$, numită **matricea extinsă** a sistemului (*)

Dacă sistemul (*) nu are nicio soluție → → sistem incompatibil

Dacă (∃) măcar o soluție → **sistem compatibil**

Dacă soluția este unică → sistem compatibil determinat

Dacă soluția nu este unică → sistem compatibil nedeterminat

! Dacă înlocuim $\mathbb{R}$ cu orice alt corp comutativ, de exemplu $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}_p$, p prim, vom obține rezultate / algoritmi similare/-i.

Exercițiu: Rezolvați în $\mathbb{Z}$: $2x+4y=1$; $(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

$\Rightarrow 2x+4y$ este par

→ fără soluții întregi

Dar peste $\mathbb{R}$?

Pentru $x\in\mathbb{R}$ fixat, y se determină unic

$$\Rightarrow y=\frac{1-2x}{4}$$

Soluțiile: $\mathcal{S}=\left\{\left(\begin{matrix}x\\ \frac{1-2x}{4}\end{matrix}\right) \mid x\in\mathbb{R}\right\}$ – o infinitate de soluții

→ sistem compatibil nedeterminat peste $\mathbb{R}$

Temă: Rezolvați în $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ ecuația: $7x+17y=2$.

Exemplu: Rezolvați peste $\mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+x_4-x_5=0\\ \qquad\qquad x_3-2x_4+x_5=1\\ \qquad\qquad\qquad x_4-\underline{3x_5}=2 \end{cases}$$

Notez $\boxed{x_5 = s \in \mathbb{R}}$ $\Rightarrow$ $x_4 = 2 + 3x_5 = 2 + 3s$

$x_3 = 1 + 2x_4 - x_5 = 1 + 4 + 6s - s = 5 + 5s$

Notez $\boxed{x_2 = t \in \mathbb{R}}$ parametru $\Rightarrow$ $x_1 = -2x_2 + x_3 - x_4 + x_5$

$x_1 = -2t + 5 + 5s - 2 - 3s + s$
$= 3 - 2t + 3s$

Mulțimea soluțiilor:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 3 - 2t + 3s \\ t \\ 5 + 5s \\ 2 + 3s \\ s \end{pmatrix} \;\middle|\; s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{este o soluție particulară a sistemului (pentru } s = t = 0)} + t \cdot \boxed{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} + s \cdot \boxed{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}} \;\middle|\; s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Necunoscute secundare: $x_2 = t \in \mathbb{R}$, $x_5 = s \in \mathbb{R}$

Necunoscute principale: restul x_1, x_3, x_4

Ideea: Facem transformări asupra ecuațiilor sistemului ⊛ pentru a obține un sistem echivalent (i.e. are exact aceleași soluții) pentru care matricea extinsă este în forma eșalon

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right)$$

e este în formă eșalon.

Def.: Spunem că o matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ este în formă eșalon dacă:

1) liniile nule sunt sub cele nenule

2) prima poziție nenulă pe o linie se numește pivot

3) pivotul de pe linia $i+1$ (dacă $\exists$) se află la dreapta pivotului de pe linia i

Exemple:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

nu este în formă eșalon

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

este în F.E.

Transformări elementare pe liniile unei matrice

1) $L_i \leftrightarrow L_j$ ~ interschimbarea a două linii

2) $L_i \leftarrow a \cdot L_i$, $a \neq 0$ ~ înmulțesc o linie cu o constantă nenulă

3) $L_i \leftarrow L_i + a \cdot L_j$, $i \neq j$, $a \in \mathbb{R}$ ~ adun la linia i linia j după înmulțirea cu o constantă

Teoremă: Orice matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ poate fi adusă în **forma eșalon** (redusă) prin transformări elementare asupra liniilor matricei.

Observație! Spunem că A este în F.E. **redusă** dacă, în plus față de 1), 2), 3), avem și:

4) pivoții sunt toți $= 1$

5) pe oricare **coloană** cu pivot, acesta este singurul element nenul

Exemplu: Reduceți la forma eșalon matricea:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -5 & 3 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2 \leftarrow -L_2]{L_3 \leftarrow -\frac{1}{3} L_3}$$

este în F.E.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

etc. pentru F.E. redusă

Algoritmul de aducere a unei matrice la F.E.:

- Dacă $A = O_{m,n} \rightarrow$ STOP
- Altfel: $\longrightarrow$ mutăm liniile nule (T1) sub cele nenule

  $\longrightarrow$ parcurgem matricea pe coloane de la stânga la dreapta

  Pe coloana $i=1$, căutăm un element nenul (pivot), linia acestuia o mutăm cât mai sus (T1), i.e. imediat sub linia pivotului anterior, dacă există

→ pe coloana pivotului, sub pivot, facem zerouri (T3), folosind linia cu pivotul

→ trecem la coloana $i+1$

→ ne oprim când ajungem la ultima coloană/linie

Rezolvarea sistemelor liniare cu metoda Gauss-Jordan (sau a eliminării)

Fie sistemul liniar $(*)$ $A\underline{x} = \underline{b}$.

Calculăm $\overline{E}$ forma eșalon a matricei extinse $\overline{A} = (A \mid \underline{b})$ și rezolvăm sistemul (echivalent) a cărui matrice extinsă este $\overline{E}$.

Exercițiu: Rezolvați în $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - 3x_3 + 2x_4 = -3 \end{cases}$$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -3 & 2 & -3 \end{array}\right) \rightsquigarrow \overline{E} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

↳ corespunde sistemului echivalent:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ \quad - x_2 - 5x_3 + 3x_4 = -1 \\ \qquad\qquad\qquad 0 = -3 \end{cases}$$

sistem incompatibil

Deci nici primul sistem nu are soluţii.

Sistemul ⊛ este compatibil $\Leftrightarrow$ în $\bar{E}$ nu avem pivot pe ultima coloană.

Atunci: coloanele pe care găsim pivot sunt necunoscutele principale, iar celelalte necunoscute sunt secundare

Necunoscutele secundare pot fi alese arbitrar ca parametri, iar cele principale se exprimă unic în funcţie de aceşti parametri.