SD Curs 8

1. Alegerea Medianei în $O(n)$

   - Algoritmul aleator

   - Algoritmul determinist

Alegerea medianei în $O(n)$

1. Algoritmul aleator
2. Algoritmul determinist

Problemă De câte comparații avem nevoie pt a găsi minimul și maximul dintr-un vector ?
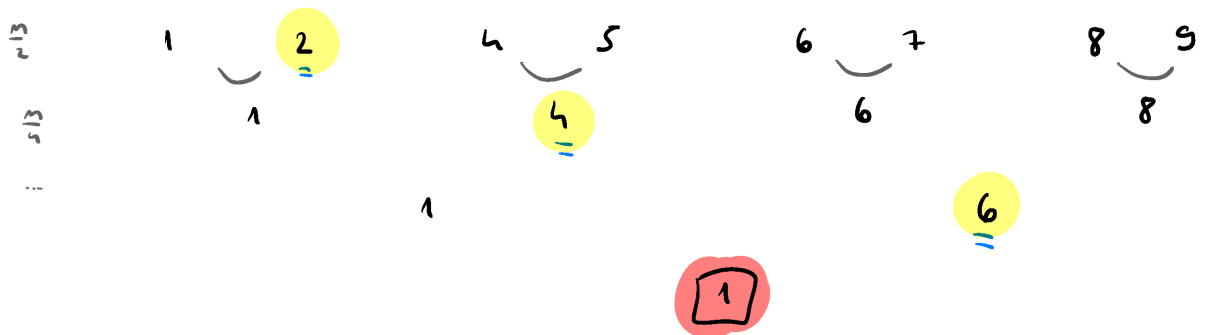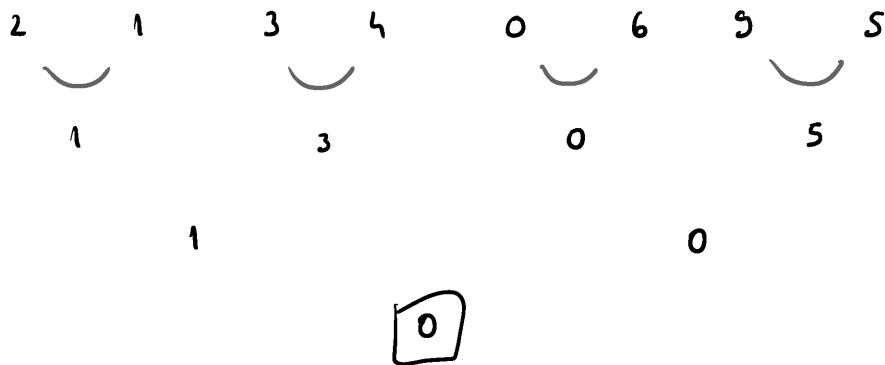
$$\text{min} \Rightarrow n-1 \text{ comparații}$$

$$\text{min} \,\char`^\, \text{max} = ?$$

$$
\begin{array}{ccccccc}
3 & 5 & 2 & 1 & 7 & 4 & 10 \\
\smile & & \smile & & \smile & &
\end{array}
$$

min = 3   7 ? 4
max = 5   4 ? min
               7 ? max

2 ? 1

1 ? min $\Downarrow$

2 ? max   min = 1
               max = 7
$\Downarrow$

min = 1
max = 5

Pt. fiecare comparații avem 3 comparații

$\Rightarrow \dfrac{3n}{2}$ comparații (mai bine decât $2(n-1)$)

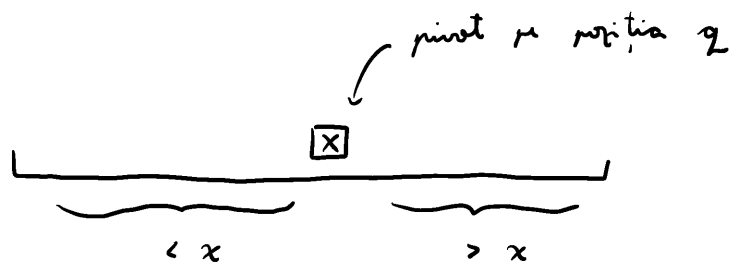De câte comparații avem nevoie pt a găsi minimul și al doilea minim dintr-un vector ?

$$n + \log_2 n \quad \text{comparații}$$

2   1   3   4   0   6   9   5

1   3   0   5

1   0

| 0 |

$\frac{n}{2}$ 1   2   4   5   6   7   8   9

$\frac{n}{4}$ 1   4   6   8

...   1   6

| 1 |

$$\frac{n}{2} + \frac{n}{4} + \frac{n}{8} + \ldots = n-1$$

Al doilea minim sigur a fost comparat cu cel de-al doilea minim

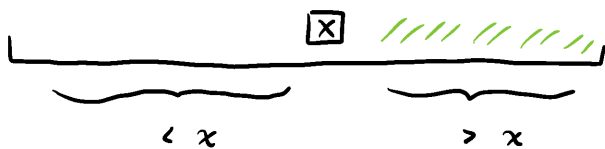1. **Algoritm aleator** pt. găsirea medianei (în general al K-lea element dintr-un vector)

pivot pe poziția q

$\boxed{x}$

$< x$ $> x$

1. Daca $K < q$

$\boxed{x}$

$< x$ $> x$

2. Daca $K > q$

$\boxed{x}$

$< x$ $> x$

$\Rightarrow$ căutam al $K - q$ - lea număr

Exemplu :

   K = 6

pivot ales aleatoriu

| 1 | 7 | 3 | $\boxed{5}$ | 2 | 10 | 13 | 4 | 9 | 20 |

| 1 | 3 | 2 | 4 | $\boxed{5}$ | 7 | 10 | 13 | 9 | 20 |

K = 1

$$7 \qquad 10 \qquad \boxed{13} \qquad 9 \qquad 20$$

$$7 \qquad 10 \qquad 9 \qquad \boxed{13} \qquad 20$$

$$q = 4$$

K - element (A, ℓ, r, k)

{
    q = Partitie (A, ℓ, r)

     if (k == q)   return A[q]

     if (k < q)   return K - element (A, ℓ, q - 1)

     else   return K - element (A, q + 1, r, k - q)
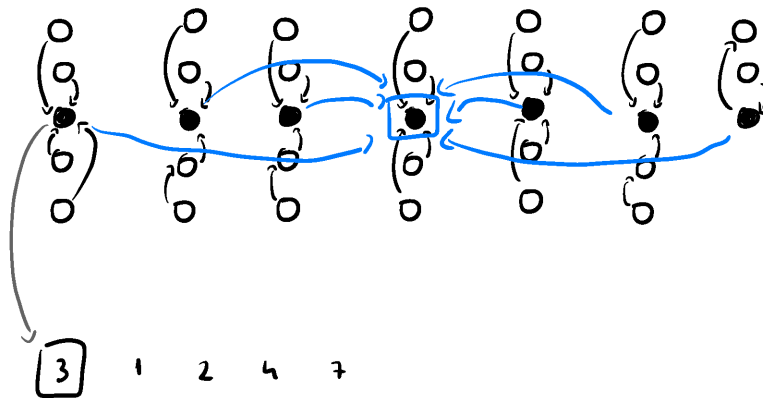
}

Caz favorabil $T(n) = T(\frac{n}{2}) + O(n) = \boxed{\Theta(n)}$

Caz nefavorabil $T(n) = T(n-1) + O(n) = \boxed{\Theta(n^2)}$

2. **Algoritmul determinist**

1. Partiționăm numerele în grupe de câte 5

2. Găsim mediana din fiecare grupă

$$\boxed{3} \quad 1 \quad 2 \quad 4 \quad 7$$

3. Găsim mediana medianelor folosind același algoritm

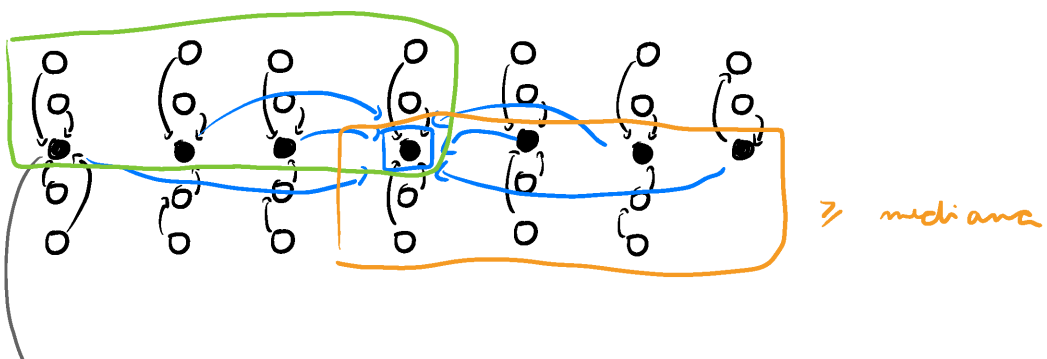4. Selectăm valoarea de la pct 3 drept pivot

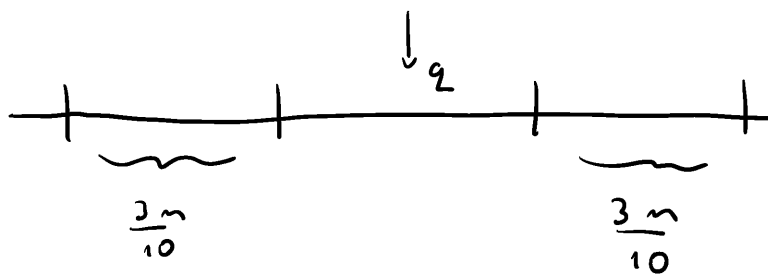5. Continuăm în același mod ca alg. aleator

$\frac{n}{5}$ grupe

$\frac{n}{5} \cdot \frac{1}{2}$ au mediana mai mică decât

mediana medianelor

$\Rightarrow \frac{3n}{10}$ elemente $\leq$ mediana medianelor

$\geq$ mediana

$$\downarrow q$$

$$\underbrace{\quad\quad}_{\dfrac{3m}{10}} \qquad\qquad \underbrace{\quad\quad}_{\dfrac{3m}{10}}$$

$$T(m) = T\left(\dfrac{m}{5}\right) + T\left(\dfrac{7m}{10}\right) + O(m) \qquad = O(m)$$

$$\downarrow \atop 3 \qquad\qquad\qquad \downarrow \atop \text{pași } 1,2,4$$

Arătăm că $\quad T(m) \leq c \cdot m$

$$\#$$

Pr. că $\quad T\left(\dfrac{m}{5}\right) \leq c \cdot \dfrac{m}{5}$

$$T\left(\dfrac{7m}{10}\right) \leq c \cdot \dfrac{7m}{10}$$

$$T(m) = T\left(\dfrac{m}{5}\right) + T\left(\dfrac{7m}{10}\right) + m \leq \dfrac{c \cdot m}{5} + c \cdot \dfrac{7m}{10} + m \leq$$

$$\leq c \dfrac{9m}{10} + m = c\,m - \dfrac{c\,m}{10} + m$$

$$= c\,m - m\left(\dfrac{c}{10} - 1\right) \leq c\,m$$

$$\forall c \geq 10$$

$$T(n) = T\left(\frac{n}{3}\right) + T\left(\frac{2n}{3}\right) + O(n) = \theta(n \log n)$$

$\frac{n}{3}$ grupe

$\frac{n}{6}$ grupe $\times$ 2 elem $= \frac{n}{3}$ elem $\leq$ mediana medianelor

$$T(n) = T\left(\frac{n}{7}\right) + T\left(\frac{5n}{7}\right) + O(n) = \theta(n)$$