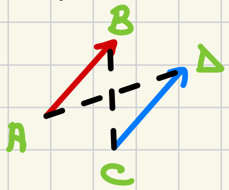
Spații vectoriale

Exemplu: Fie V = mulțimea vectorilor din plan

V = mulțimea segmentelor orientate

A, B puncte în plan $\rightarrow \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \iff$



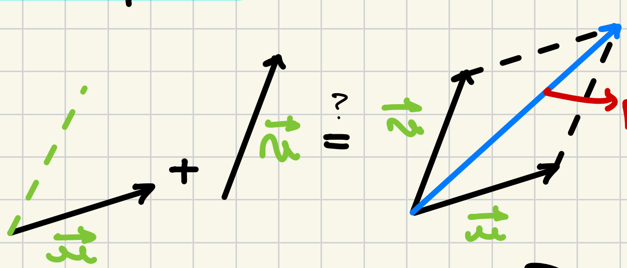
(perechile ordonate (A,B) și (C,D) reprezintă același vector)

Segmentele AD și BC au același mijloc $\iff$

$\iff ABDC$ paralelogram

Operații cu vectori în plan

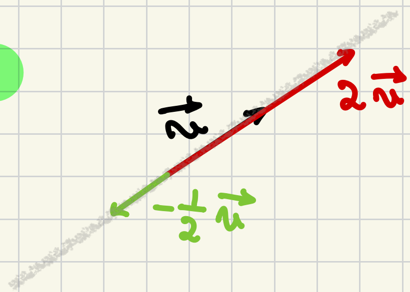
„+" (adunare):



diagonala paralelogramului este $\vec{u} + \vec{v}$

mutăm (aplicăm) vectorii într-un același punct

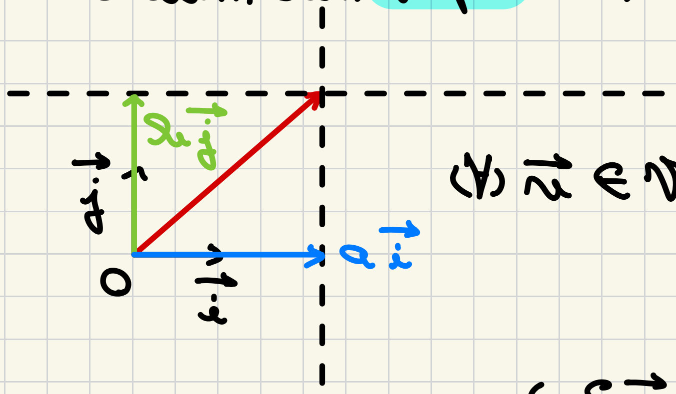
„·" (scalar, înmulțirea cu scalari)



$2 \cdot \vec{u}$ este un vector cu aceeași direcție ca $\vec{u}$

$(\mathcal{V},+)$ grup abelian

Fixăm un reper în plan $\{O, \vec{i}, \vec{j}\}$
versori



$(\forall)\ \vec{u} \in \mathcal{V}\ (\exists!)\ a, b \in \mathbb{R}$ a.î.
$$\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$$

$(\{\vec{i}, \vec{j}\}$ bază în $\mathcal{V}$, $\dim \mathcal{V} = 2)$

Aceste proprietăți ale lui $\mathcal{V}$ stau la baza structurii/noțiunii de SPAȚIU VECTORIAL.

Def. Fie K un corp comutativ ($K = \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_p$ cu p prim). Un K-spațiu vectorial este o mulțime nevidă $\emptyset \neq V$ împreună cu două operații:

„+" (adunare): $+ : V \times V \to V$

„·" (înmulțire): $\cdot : K \times V \to V$

$\lambda \in K$, $x \in V$ $\xrightarrow{\text{notez}} \lambda \cdot x$ a.î.

1) $(V,+)$ este grup abelian

2) $a(x+y) = ax + ay$, $(\forall)\ a \in K$, $(\forall)\ x, y \in V$

3) $(a+b)x = ax + bx$, $(\forall)\ a, b \in K$, $(\forall)\ x \in V$

4) $(a \cdot b)x = a(bx)$, $(\forall)\ a, b \in K$, $(\forall)\ x \in V$

5) $1 \cdot x = x$, $(\forall)\ x \in V$

Elementele lui V → „vectori"

K → „scalari"

„·" → înmulțire cu scalari

Observație! De cele mai multe ori, coeficienții sunt reali, spunem doar că V este un spațiu vectorial.

Exemple:

1) V vectorii din plan → $\mathbb{R}$-spațiu vectorial

2) $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$ este un $\mathbb{R}$-spațiu vectorial cu operațiile:

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

$a \in \mathbb{R}$ $\quad a \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) = (ax_1, ax_2, \dots, ax_n)$

3) $m, n \in \mathbb{N}^*$ $\quad \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ sunt un $\mathbb{R}$-spațiu vectorial

$$A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$$

$a \in \mathbb{R}$ $\quad a \cdot A = a(a_{ij}) = (a \cdot a_{ij})$

4) $\mathbb{R}[X]$ = polinoamele cu coeficienți reali → este un $\mathbb{R}$-spațiu vectorial

Reguli de calcul într-un spațiu vectorial:

$(V,+,\cdot)$

1) $a(x-y) = ax - ay$, $(\forall)\, a \in K$, $(\forall)\, x, y \in V$

2) $(a-\lambda)x = ax - \lambda x$, $(\forall)\, a, \lambda \in K$, $(\forall)\, x \in V$

3) $0_K \cdot x = 0_V$, $(\forall)\, x \in V$

4) $a \cdot 0_V = 0_V$, $(\forall)\, a \in K$

5) $(\forall)\, a \in K$ și $(\forall)\, x \in V$: $a \cdot x = 0_V \Rightarrow a = 0_K$ sau $x = 0_V$

6) $(-a)\cdot x = a(-x) = -ax$, $(\forall)\, a \in K$, $(\forall)\, x \in V$

$x - y = x + (-y)$

Dem.:

2) $a = (a-\lambda) + \lambda$

$ax = [(a-\lambda)+\lambda]x \overset{3)}{=} (a-\lambda)x + \lambda x \quad | + (-\lambda x)$

$ax - \lambda x = (a-\lambda)x$

3) $0_K = 0_K + 0_K \quad | \cdot x \in V$

$0_K x = (0_K + 0_K)x$

$0_K x = 0_K \cdot x + 0_K \cdot x \quad | - 0_K x$

$0_V = 0_K x$

5) Fie $a \in K$ şi $x \in V$ a.î. $a \cdot x = 0_V$

Dacă $a = 0_K \Rightarrow$ ✓

Dacă $a \in K \setminus \{0_K\} \Rightarrow (\exists)\ \frac{1}{a} \in K$

$$\frac{1}{a} \cdot (a x) = \underbrace{\frac{1}{a} \cdot 0_V}_{= 0_V}$$

$$\frac{1}{a} \cdot (a x) \overset{4)}{=} \left(\frac{1}{a} \cdot a\right) x = 1_K \cdot x \overset{5)}{=} x$$

Deci $x = 0_V$.

Subspaţii vectoriale

Def.: O submulţime nevidă W a unui spaţiu vectorial V se numeşte **subspaţiu vectorial** în V dacă pentru W împreună cu restricţiile operaţiilor de pe V la W obţinem un K-spaţiu vectorial.

$\Leftrightarrow$ $(\forall)\ x, y \in W \quad x + y \in W$

$(\forall)\ a \in K$ şi $(\forall)\ x \in W \quad a x \in W$

$\Leftrightarrow$ $(\forall)\ a, b \in K, (\forall)\ x, y \in W$

$a x + b y \in W$

Exemple: V un K-spațiu vectorial

1) $\{0_V\}$, V sunt subspații vectoriale în V

2) Pentru $n \in \mathbb{N}$ fixat, $\mathbb{R}_n = \{f \in \mathbb{R}[X] \mid \text{grad } f \leq n\} \cup \{0\}$

este un subspațiu vectorial în $\mathbb{R}[X]$

3) $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \middle| \; a, b, c \in \mathbb{R}\right\}$ este subspațiu vectorial în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

4) $\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \middle| \; 5x + 2y = 0\right\}$ este subspațiu vectorial în $\mathbb{R}^2$

5) Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Notăm $\text{Ker} A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = \underline{0}\}$

Kernel → nucleul matricei A

soluțiile sistemului omogen cu matricea sistemului $= A$

Atunci Ker A este subspațiu vectorial în $\mathbb{R}^n$.

Dem.:

$$\underline{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

Fie $a, b \in \mathbb{R}$ și $x, y \in \text{Ker} A \Rightarrow \begin{array}{l} Ax = \underline{0} \\ Ay = \underline{0} \end{array}$

$\Rightarrow A(ax+by) = A(ax) + A(by) = a \cdot Ax + bAy = 0$

$\Rightarrow ax+by \in \operatorname{Ker} A \Rightarrow \operatorname{Ker} A$ este subspațiu vectorial în $\mathbb{R}^n$

Observație! Dacă W este subspațiu vectorial în V $\Rightarrow 0 \in W$

Dem.:

$(\exists)\ x \in W \Rightarrow \underbrace{0_K \cdot x}_{=\,0_V} \in W \Rightarrow 0_V \in W$

Def.: Fie V_1, V_2 subspații vectoriale în V. Notăm $V_1+V_2 = \{x+y \mid x \in V_1$ și $y \in V_2\}$.
Atunci V_1+V_2 este subspațiu vectorial în V, ce conține și V_1 și V_2.
Acesta se numește **suma subspațiilor** V_1 și V_2.

Dem.:

Fie $a, b \in K$ și $\alpha, \beta \in V_1+V_2$.
Atunci $\alpha = x_1+y_1$ cu $x_1 \in V_1$ și $y_1 \in V_2$.
$\beta = x_2+y_2$ cu $x_2 \in V_1$ și $y_2 \in V_2$

$a\alpha + b\beta = a(x_1+y_1) + b(x_2+y_2) =$

$= \underbrace{(ax_1+bx_2)}_{\in V_1} + \underbrace{(ay_1+by_2)}_{\in V_2} \in V_1+V_2$

Așadar, V_1+V_2 este subspațiu în V. $\boxtimes$

Propoziție: V_1 și V_2 sunt subspații vectoriale în $V \Rightarrow V_1 \cap V_2$ este subspațiu vectorial în V

Observație! $V_1 \cup V_2$ este subspațiu vectorial în $V \Leftrightarrow V_1 \leq V_2$ sau $V_2 \subseteq V_1$

Dacă $V = V_1+V_2 \Leftrightarrow (\forall)\, x \in V, (\exists)\, x_1 \in V_1$ și $x_2 \in V_2$ cu

$$x = x_1 + x_2$$

Generalizăm: Suma subspațiilor vectoriale $V_1, V_2, \ldots, V_m$ este:

$$V_1+V_2+\ldots+V_m = \{x_1+x_2+\ldots+x_m \mid x_i \in V_i, (\forall)\, i=\overline{1,m}\}$$

Propoziție: Fie $V_1, \ldots, V_m$ subspații vectoriale în V a.î. $V = V_1+\ldots+V_m$.

Următoarele afirmații sunt echivalente:

(a) $(\forall)\, x \in V \ (\exists!)\, x_1 \in V_1, \ldots, x_m \in V_m$ cu

$$x = \sum_{i=1}^{m} x_i$$

(b) $$V_i \cap \Big(\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} V_j \Big) = \{0_V\}, \ (\forall)\, i=\overline{1,m}$$

În această situație, spunem că V este suma directă a subspațiilor $V_1, \ldots, V_m$.

Scriem $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_m$

Caz particular: $(m=2)$

$V = V_1 \oplus V_2 \iff (\forall)\, x \in V\ (\exists!)\ x_1 \in V_1$ și $x_2 \in V_2$ cu $x = x_1 + x_2$

$\overset{\text{PROP.}}{\iff}$ $(\forall)\, x \in V,\ (\exists)\ x_1 \in V_1$ și $x_2 \in V_2$ cu $x = x_1 + x_2$ și $V_1 \cap V_2 = \{0\}$

$m = 3$

$V = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3 \iff (\forall)\, x \in V,\ (\exists)\ x_1 \in V_1,\ x_2 \in V_2,\ x_3 \in V_3$ cu $x = x_1 + x_2 + x_3$

și $V_1 \cap (V_2 + V_3) = \{0\}$

și $V_2 \cap (V_1 + V_3) = \{0\}$

și $V_3 \cap (V_1 + V_2) = \{0\}$

Exemplu: În $\mathbb{R}^2$ notăm $V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R} \right\}$ și

$V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \middle| b \in \mathbb{R} \right\}$.

Avem V_1, V_2 subspații vectoriale în $\mathbb{R}^2$.

$(\forall) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}}_{\in V_1} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}}_{\in V_2} \Rightarrow$

$\Rightarrow V_1 + V_2 \in \mathbb{R}^2$

$V_1 \cap V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow$ Suma este directă.

$$\mathbb{R}^2 = V_1 \oplus V_2$$

Combinații liniare:

Date $x_1, x_2, \dots, x_m \in V$ și $a_1, a_2, \dots, a_m \in K$, vectorul $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_m x_m$ se numește **combinație liniară** de $x_1, x_2, \dots, x_m$.

Pentru $S \subset V$ submulțime, notăm

$$\langle S \rangle = \{ \text{toate combinațiile liniare posibile de elemente din } S \}$$

$$= \left\{ \sum_{i=1}^{m} a_i x_i \;\middle|\; m \in \mathbb{N},\ x_1, \dots, x_m \in S,\ a_1, \dots, a_m \in K \right\}$$

Propoziție: $(\forall)\ S \subset V$, $\langle S \rangle$ este un subspațiu vectorial al lui V și este cel mai mic (în sensul incluziunii) subspațiu ce îl conține pe S

Observație! $S = \emptyset \rightsquigarrow \langle \emptyset \rangle \overset{\text{convenție}}{=} \{0_V\}$

Def.: Mulțimea S se numește **sistem de generatori** pentru V dacă $\langle S \rangle = V$

(adică $(\forall)\ x \in V$, $(\exists)\ x_1, \dots, x_m \in S$ și $(\exists)\ a_1, \dots, a_m \in K$ cu $x = \sum_{i=1}^{m} a_i \cdot x_i$)

Def.: V se numește spațiu vectorial finit generat dacă $(\exists)$ $S \subset V$ cu $\langle S \rangle = V$.

finită

Exemplu:

În $\mathbb{R}^n$ notăm $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, ...,

$e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

Observăm că $(\forall)$ $\mathbb{R}^n \ni \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_1} + a_2 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_2} + \dots +$

$a_n \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{e_n} = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot e_i$

$\Rightarrow \{e_1, \dots, e_n\}$ este un sistem de generatori pentru $\mathbb{R}^n$