CLASIFICAREA METRICĂ A CONICELOR / CUADRICELOR

OANA CONSTANTINESCU

1. Invarianți afini și ortogonali ai unei conice/cuadrice

Cadrul de lucru pentru prima parte a cursului este un $\mathbb{K}-$spațiu afin n-dimensional $\mathcal{A} = \left(X, \overrightarrow{X}, \Phi\right)$, $\mathbb{K}$-corp comutativ cu $Car\mathbb{K} \neq 2$, cu $n = 2$ sau $n = 3$.

Definition 1. O submulțime $\Gamma \subset X$ se numește conică/cuadrică în $\mathcal{A}$ dacă Γ este locul geometric al punctelor $M \in X$ ale caror coordonate $(x^1, x^2, \cdots, x^n)$ în raport cu un reper cartezian $\mathcal{R} = \{O; \bar{e}_1, \cdots, \bar{e}_n\}$ verifică o ecuație de tipul

$$H(M) := H(x^1, \cdots, x^n) := \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x^ix^j + 2\sum_{i=1}^{n} a_{i0}x^i + a_{00} = 0, \tag{1.1}$$

unde coeficienții $a_{ij} \in \mathbb{K}$, $i, j \in \overline{1, n}$ nu sunt toți nuli și $a_{ij} = a_{ji}$, $\forall i, j \in \overline{1, n}$.

Ecuația (1.1) se numește ecuatia conicei, pentru $n = 2$, respectiv a cuadricei, pentru $n = 3$, în raport cu $\mathcal{R}$.

Altfel zis, o conică/cuadrică este nucleul unei **forme pătratice afine** $H : X \to \mathbb{K}$,

$$H(M) = h(\overrightarrow{OM}) + f(\overrightarrow{OM}) + a_{00},\ \forall M \in X,$$

unde $h : \overrightarrow{X} \to \mathbb{K}$ este forma pătratică ce se exprimă în raport cu baza reperului $\mathcal{R}$ prin

$$h(\overrightarrow{OM}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x^ix^j$$

și $f : \overrightarrow{X} \to \mathbb{K}$ este forma liniară definită în raport cu baza $\{\bar{e}_1, \cdots, \bar{e}_n\}$ prin

$$f(\overrightarrow{OM}) = \sum_{i=1}^{n} a_{i0}x^i.$$

Pentru simplitatea scrierii vom folosi notatia matriceală.

Considerăm $A = (a_{ij})$, matricea simetrică de ordinul n cu coeficienți în $\mathbb{K}$, $A \neq O_n$, $B = (a_{10} \cdots a_{n0}) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ și $X =^t (x^1 \cdots x^n) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ matricea coloană a coordonatelor unui punct arbitrar $M \in X$. Deci

$$M \in \Gamma \Leftrightarrow H(X) :=^t XAX + 2BX + a_{00} = 0. \tag{1.2}$$

Observăm că în notație matriceală, ecuațiile unei conice, respectiv unei cuadrice, sunt identice.

Theorem 2. *Proprietatea unei submulțimi $\Gamma \subset X$ de a fi conică/cuadrică afină nu depinde de reperul cartezian în raport cu care i se dă ecuația.*

Proof. Într-adevăr, fie $\mathcal{R}' = \left\{O'; \bar{f}_1, \cdots, \bar{f}_n\right\}$ un alt reper cartezian în X. Schimbarea de repere induce schimbarea de coordonate

$$X = SX' + S_0, \tag{1.3}$$

unde X' și X sunt matricele coloane ale coordonatele aceluiași punct arbitrar în raport cu $\mathcal{R}'$, respectiv $\mathcal{R}$, S este matricea de trecere de la baza reperului $\mathcal{R}$ la baza reperului $\mathcal{R}'$, iar S_0 este matricea coloană a coordonatelor lui O' în raport cu reperul $\mathcal{R}$.

Atunci, în raport cu $\mathcal{R}'$, Γ are ecuația

$${}^tX'A'X' + 2B'X' + a'_{00} = 0,$$

unde

$$A' = {}^tSAS,\quad B' = {}^tS_0AS + BS,\quad a'_{00} = H(S_0). \tag{1.4}$$

Rezulta ca $A' \neq O_n$ și este simetrică.

□

Fie matricea $D = \begin{pmatrix} A & {}^tB \\ B & a_{00} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ și $S' = \begin{pmatrix} S & S_0 \\ \underbrace{0\cdots 0}_{n} & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$. Rezultă că $\det S' = \det S \neq 0$.

Verificați că

$$D' = \begin{pmatrix} A' & {}^tB' \\ B' & a'_{00} \end{pmatrix} = {}^tS'DS'. \tag{1.5}$$

Notăm $\det A = \delta$ și $\det D = \Delta$.

Observăm că

$$\det A' = \det A(\det S)^2,\ \ \det D' = \det D(\det S)^2. \tag{1.6}$$

Din relațiile (1.4), (1.5) si (1.6) rezultă:

Theorem 3. *Rangurile matricelor A și D nu se schimbă la schimbări de repere carteziene. Daca $\delta \neq 0$ atunci și $\frac{\Delta}{\delta}$ rămâne același la o schimbare de repere carteziene.*

Definition 4. Numim $rangA := r$ rangul formei pătratice h asociată formei pătratice afine H și $rangD := \rho$ rangul lui H sau rangul lui Γ. Datorită teoremei anterioare spunem că r, ρ și $\frac{\Delta}{\delta}$ sunt invarianți afini ai conicei/cuadricei Γ.

O conică/cuadrică se numește degenerată dacă $rangH = rangD \leq 2 \Leftrightarrow \Delta = 0$.

Observăm că δ și Δ nu sunt invarianți afini ai hipercuadricei.

Considerăm acum că studiem hipercuadricele unui **spațiu afin euclidian** $\mathcal{E} = \left(E, \overrightarrow{E}, \Phi\right)$ și reperele carteziene în raport cu care dăm ecuațiile unei conice/cuadrice sunt **ortonormate**.

Ne interesează ce mărimi (proprietăți) rămân invariante la o schimbare de repere **ortonormate**. Aceste mărimi le vom numi **invarianți ortogonali ai unei conice/cuadrice.**

În cazul schimbării de repere ortonormate, matricea S a schimbării de baze este ortogonală, $S \in \mathcal{O}(n) \Leftrightarrow^t S = S^{-1}$. Deci $detS = \pm 1$. Din (1.6) rezultă că

$$\det D = \det D',\ \ \det A = \det A'.$$

Mai mult, din (1.4) rezultă că matricile A si A' sunt asemenea, deci au același polinom caracteristic.

Amintim că **polinomul caracteristic** al unei matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se scrie

$$p(\lambda) = \det\left(A - \lambda I_n\right) = (-1)^n\left(\lambda^n - \delta_1\lambda^{n-1} + \delta_2\lambda^{n-2} - \cdots + (-1)^n\delta_n\right), \tag{1.7}$$

unde δ_k este suma minorilor diagonali de ordinul k ai lui A, $k \in \overline{1,n}$. În particular $\delta_1 = TraceA := I$ este urma matricei A iar $\delta_n = \delta = \det A$. Astfel am demonstrat rezultatul:

Theorem 5. *Coeficienții polinomului caracteristic al matricei A (în particular I, δ) și $\Delta = \det D$ nu se schimbă la o schimbare de repere ortonormate, deci sunt invarianți ortogonali ai conicei/cuadricei.*

2. Recapitulare - clasificarea metrică a conicelor în $\mathcal{E}^2$

În primul semestru ați studiat pe îndelete conicele unui plan afin euclidian. Deoarece clasificarea metrică a cuadricelor respectă aceeași pași ca și clasificarea metrică a conicelor, considerăm utilă reamintirea acestora.

Cadrul de lucru al acestei secțiuni este un spatiu afin euclidian de dimensiune 2.

Fie Γ o conică ce are în raport cu reperul ortonormat $\mathcal{R} = \{O; \bar{i}, \bar{j}\}$ ecuația:

$$\Gamma:\ \ H(x,y) := a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0. \tag{2.1}$$

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$, $B = (a_{10}\ a_{20})$, $D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{10} \\ a_{21} & a_{22} & a_{20} \\ a_{10} & a_{20} & a_{00} \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$.

Am demonstrat că $I := Trace A = a_{11} + a_{22}$, $\delta = \det A = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ și $\Delta = det D$ sunt invarianți ortogonali ai conicei.

Pe langă invarianții ortogonali amintiți deja mai introducem și un invariant centro-ortogonal. Demonstrația următorului rezultat poate fi găsită la pag 165 a monografiei I. Pop, Ghe. Neagu, Algebră liniară și geometrie analitică în plan și în spațiu, editura Plumb, Bacău, 1996.

Proposition 6. *Numărul real* $\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{10} \\ a_{10} & a_{00} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{20} \\ a_{20} & a_{00} \end{vmatrix}$, *adică suma minorilor diagonali de ordinul* 2 *ai lui* D, *este un invariant centro-ortogonal al lui* Γ, *adică rămâne neschimbat la o rotație de repere carteziene ortonormate. Dacă în plus* $\delta = \Delta = 0$, *atunci* Δ_1 *este chiar un invariant ortogonal al conicei.*

În continuare vom clasifica conicele planului afin euclidian $\mathcal{E}^2$ în funcție de invarianții ortogonali și centro-ortogonali introduși.

Theorem 7. *(Teorema de clasificare metricpă a conicelor) Invarianții ortogonali și centro-ortogonali ai unei conice permit determinarea naturii conicei ca în tabelul următor:*

Nr.	δ	Δ	$I\Delta$	Δ_1	*Genul conicei*	*Tipul conicei*	*Denumirea conicei*
1	*>0*	$\neq 0$	*<0*		*eliptic*	*nedegenerat*	*elipsa*
2	*>0*	$\neq 0$	*>0*		*eliptic*	*nedegenerat*	*elipsa imaginara*
3	*>0*	*0*			*eliptic*	*degenerat*	*punct dublu*
4	*<0*	$\neq 0$			*hiperbolic*	*nedegenerat*	*hiperbola*
5	*<0*	*0*			*hiperbolic*	*degenerat*	*drepte concurente*
6	*0*	$\neq 0$			*parabolic*	*nedegenerat*	*parabola*
7	*0*	*0*		*<0*	*parabolic*	*degenerat*	*drepte paralele*
8	*0*	*0*		*0*	*parabolic*	*degenerat*	*dreapta dubla*
9	*0*	*0*		*>0*	*parabolic*	*degenerat*	*drepte imaginare paralele*

Proof. Vom căuta un reper ortonormat, pe care îl vom numi **canonic**, în raport cu care ecuația conicei Γ să fie una de tipul următor:

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1\, a > 0,\, b > 0\, (elipsa) \\
\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} &= 1\, (hiperbola) \\
y^2 - 2px &= 0\, p > 0\, (parabola) \\
\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= -1\, (elipsa\, imaginara) \\
(ax + by + c)(a'x + b'y + c') &= 0\ a^2 + b^2 > 0,\ (a')^2 + (b')^2 > 0\, (o\, pereche\, de\, drepte) \\
x^2 + y^2 &= 0\ (punct\, dublu) \\
x^2 &= -1\, (drepte\, imaginare\, paralele)
\end{aligned}$$

Reamintim că în raport cu reperul ortonormat $\mathcal{R} = \{O; \bar{i}, \bar{j}\}$, conica Γ are ecuația (2.1).

Considerăm forma pătratică $h : \overrightarrow{E} \to \mathbb{R}$ asociată lui Γ care, în raport cu baza ortonormată $\{\bar{i}, \bar{j}\}$, are expresia $h(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$. Știm că există o bază ortonormată $\{\bar{i}', \bar{j}'\}$, formată din vectori proprii ai lui A, în raport cu care h are forma canonică

$$h(x', y') = \lambda_1 (x')^2 + \lambda_2 (y')^2,$$

λ_1, λ_2 fiind valorile proprii ale lui A. Vectorii proprii $\bar{i}' \in U(\lambda_1)$, $\bar{j}' \in U(\lambda_2)$ sunt **direcții principale** pentru conica Γ.

Considerăm **rotația de repere** carteziene ortonormate $\mathcal{R} \to \mathcal{R}' = \{O; \bar{i}', \bar{j}'\}$. În raport cu $\mathcal{R}'$, conica are ecuația:

$$\lambda_1 (x')^2 + \lambda_2 (y')^2 + 2a'_{10}x' + 2a'_{20}y' + a'_{00} = 0. \tag{2.2}$$

Din (1.4) rezultă că $a'_{00} = H(S_0) = H(O) = a_{00}$.

(I) Presupunem că $\delta = \lambda_1 \lambda_2 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda_1 \neq 0$ și $\lambda_2 \neq 0$.

Atunci rescriem ecuația (2.2) astfel:

$$\lambda_1 \left(x' + \frac{a'_{10}}{\lambda_1} \right)^2 + \lambda_2 \left(y' + \frac{a'_{20}}{\lambda_2} \right)^2 + a_{00} - \frac{(a'_{10})^2}{\lambda_1} - \frac{(a'_{20})^2}{\lambda_2} = 0.$$

Folosind faptul că Δ este invariant ortogonal, rezultă că $\Delta = \Delta' = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & a'_{10} \\ 0 & \lambda_2 & a'_{20} \\ a'_{10} & a'_{20} & a_{00} \end{vmatrix}$.

De aici obținem $a_{00} - \frac{(a'_{10})^2}{\lambda_1} - \frac{(a'_{20})^2}{\lambda_2} = \frac{\Delta}{\delta}$ și deci ecuația lui Γ devine

$$\lambda_1 \left(x' + \frac{a'_{10}}{\lambda_1} \right)^2 + \lambda_2 \left(y' + \frac{a'_{20}}{\lambda_2} \right)^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0.$$

Considerăm **translația de repere** $\mathcal{R}' \to \mathcal{R}'' = \{C; \bar{i}', \bar{j}'\}$,

$$\begin{cases} x' &= x'' - \frac{a'_{10}}{\lambda_1}, \\ y' &= y'' - \frac{a'_{20}}{\lambda_2}, \end{cases}$$

unde C are țn raport cu $\mathcal{R}'$ coordonatele $x'_C = -\frac{a'_{10}}{\lambda_1}$, $y'_C = -\frac{a'_{20}}{\lambda_2}$. În raport cu reperul ortonormat $\mathcal{R}''$, conica Γ are ecuația

$$\lambda_1 (x'')^2 + \lambda_2 (y'')^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0. \tag{2.3}$$

(Ia) Dacă $\Delta = 0$ atunci $\Gamma : \ \lambda_1 (x'')^2 + \lambda_2 (y'')^2 = 0$. Avem subcazurile:

$\delta > 0 \Leftrightarrow sign(\lambda_1) = sign(\lambda_2) \Rightarrow x'' = y'' = 0$, deci $\Gamma = \{C\}$ este un punct dublu.

$\delta < 0 \Leftrightarrow sign(\lambda_1) = -sign(\lambda_2) \Rightarrow \Gamma$ este o pereche de drepte concurente în C, de ecuații $y^{''} = \pm\sqrt{-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}$x".

(Ib) Dacă $\Delta \neq 0$, rescriem ecuația (2.3) astfel:

$$\frac{(x'')^2}{-\frac{\Delta}{\delta\lambda_1}} + \frac{(y'')^2}{-\frac{\Delta}{\delta\lambda_2}} - 1 = 0. \tag{2.4}$$

Considerăm subcazurile:

$\delta > 0 \Rightarrow sign(\lambda_1) = sign(\lambda_2) = sign(I)$, deci $sign\left(-\frac{\Delta}{\delta\lambda_1}\right) = sign\left(-\frac{\Delta}{\delta\lambda_2}\right) = -sign(I\Delta)$.

dacă $I\Delta < 0$, atunci Γeste o elipsă de semiaxe $\sqrt{-\frac{\Delta}{\delta\lambda_i}}$, $i \in \{1,2\}$;

dacă $I\Delta > 0$, atunci Γ este o conica vidă, mai exact o elipsă imaginară.

$\delta < 0 \Rightarrow sign(\lambda_1) = -sign(\lambda_2) \Rightarrow \Gamma$ este o hiperbolă de semiaxe $\left|\sqrt{-\frac{\Delta}{\delta\lambda_i}}\right|, i \in \{1,2\}$.

În cazul $\delta \neq 0$ reperul canonic este deci $\mathcal{R}'' = \{C; \bar{i}', \bar{j}'\}$.

Ne reamintim că originea reperului canonic al unei elipse sau hiperbole este centrul de simetrie al conicei, deci **C este centru de simetrie pentru Γ.**

Axele reperului canonic sunt **axe de simetrie** pentru conică, și în cazurile discutate sunt **drepte prin C, care au ca vectori directori doi vectori proprii ortogonali ai lui A.**

(II) Dacă $\delta = 0$, rezultă că una din valorile proprii ale lui A este zero. De exemplu, presupunem că $\lambda_1 = 0$ și $\lambda_2 = I \neq 0$.

În raport cu reperul $\mathcal{R}'$ conica are ecuația

$$\lambda_2 (y')^2 + 2a'_{10}x' + 2a'_{20}y' + a_{00} = 0,$$

sau

$$\lambda_2 \left(y' + \frac{a'_{20}}{\lambda_2} \right)^2 + 2a'_{10}x' + a_{00} - \frac{(a'_{20})^2}{\lambda_2} = 0.$$

Folosind că $\lambda_2 = I$, $\Delta = \Delta'$ și $\Delta_1 = \Delta'_1$, obținem $\Delta = -I(a'_{10})^2$ și $a_{00} - \frac{(a'_{20})^2}{\lambda_2} = \frac{\Delta_1}{I} - \frac{\Delta}{I^2}$. Astfel, ecuația conicei în raport cu $\mathcal{R}'$ devine

$$\left(y' + \frac{a'_{20}}{\lambda_2} \right)^2 + 2\frac{a'_{10}}{I}x' + \frac{\Delta_1}{I^2} - \frac{\Delta}{I^3} = 0. \tag{2.5}$$

(IIa) Dacă $\Delta \neq 0$, rezultă că $a'_{10} \neq 0$ și rescriem ecuația (2.5) astfel:

$$\left(y' + \frac{a'_{20}}{I} \right)^2 + 2\frac{a'_{10}}{I} \left[x' + \frac{1}{2a'_{10}} \left(\frac{\Delta_1}{I} - \frac{\Delta}{I^2} \right) \right] = 0.$$

Considerăm **translația de repere** $\mathcal{R}' = \{O; \bar{i}', \bar{j}'\} \to \mathcal{R}'' = \{V; \bar{i}', \bar{j}'\}$,

$$\begin{cases} x' &= x'' - \frac{1}{2a'_{10}} \left(\frac{\Delta_1}{I} - \frac{\Delta}{I^2} \right), \\ y' &= y'' - \frac{a'_{20}}{I}. \end{cases}$$

V are în raport cu $\mathcal{R}'$ coordonatele $x'_V = -\frac{1}{2a'_{10}} \left(\frac{\Delta_1}{I^2} - \frac{\Delta}{I^3} \right)$ și $y'_V = -\frac{a'_{20}}{I}$. În raport cu reperul cartezian ortonormat $\mathcal{R}''$, conica are ecuația

$$(y'')^2 \pm 2px'' = 0, \;\; p = \left| \frac{a'_{10}}{I} \right|,$$

deci Γ este o parabolă. Să observăm că putem scrie parametrul parabolei într-un mod convenabil:

$$(a'_{10})^2 = -\frac{\Delta}{I} \Rightarrow | \, a'_{10} \, | = \sqrt{-\frac{\Delta}{I}} \Rightarrow p = \sqrt{-\frac{\Delta}{I^3}}.$$

Pentru cazul $\delta = 0$ și $\Delta \neq 0$ reperul canonic este $\mathcal{R}'' = \{V; \bar{i}', \bar{j}'\}$.

Deci originea V a reperului canonic $\mathcal{R}''$ este vârful parabolei, iar axa $Vx'' = V + [\bar{i}']$ trece prin V și are ca vector normal vectorul propriu al lui A corespunzător valorii proprii nenule. Ea este axa de simetrie a parabolei. Axa Vy'' este tangentă la parabolă în V.

(IIb) Daca $\Delta = 0$, rezultă $a'_{10} = 0$, deci ecuația (2.5) devine

$$\left(y' + \frac{a'_{20}}{I} \right)^2 + \frac{\Delta_1}{I^2} = 0.$$

$\Delta_1 > 0$: conica vidă (drepte paralele imaginare);

$\Delta_1 = 0$: $\left(y' + \frac{a'_{20}}{I} \right)^2 = 0$, deci conica este o dreaptă dublă de ecuație (în raport cu $\mathcal{R}'$) $y' = -\frac{a'_{20}}{I}$;

$\Delta_1 < 0$: $\left(y' + \frac{a'_{20}}{I} - \sqrt{-\frac{\Delta_1}{I^2}} \right) \left(y' + \frac{a'_{20}}{I} + \sqrt{-\frac{\Delta_1}{I^2}} \right) = 0$, deci conica e o pereche de drepte paralele, de ecuații (în raport cu $\mathcal{R}'$) $y' = -\frac{a'_{20}}{I} \pm \sqrt{-\frac{\Delta_1}{I^2}}$.

$\square$

Exemple

(1) În raport cu reperul ortonormat $\mathcal{R} = \{O; \bar{i}, \bar{j}\}$ se dă conica

$$\Gamma: \ 5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0.$$

Aduceți această conică la forma canonică și reprezentați-o grafic.

Calculăm invarianții ortogonali necesari determinării conicei.

Avem $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$, deci $I = 13$ și $\delta = 36$. De asemenea $D = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -16 \\ 2 & 8 & -28 \\ -16 & -28 & 80 \end{pmatrix}$, deci $\Delta = -1296$. Deoarece $\delta > 0$ si $I\Delta < 0$, rezultă că Γ este o elipsă.

Polinomul caracteristic al lui A este $p(\lambda) = \lambda^2 - I\lambda + \delta = \lambda^2 - 13\lambda + 36$, deci valorile proprii ale lui A sunt $\lambda_1 = 4$ si $\lambda_2 = 9$.

Determinăm acum direcțiile principale ale conicei, adică vectorii proprii corespunzători celor două valori proprii. Rezolvând sistemul scris matricial $(A - 4I_2)U = O$, unde $U = \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ conține coordonatele unui vector propriu al lui A corespunzator lui λ_1, obținem $U(4) = \{\bar{u} = -2\alpha\bar{i} + \alpha\bar{j} \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$. Alegem $\bar{i}' = \frac{\sqrt{5}}{5}(2\bar{i} - \bar{j})$. Știm că vectorii proprii corespunzători unor valori proprii distincte ale unei matrice simetrice sunt ortogonali, de aceea putem alege direct $\bar{j}' = \frac{\sqrt{5}}{5}(\bar{i} + 2\bar{j})$ un vector propriu corespunzător lui $\lambda_2 = 9$.

Baza reperului canonic este deci $\{\bar{i}', \bar{j}'\}$.

Facem rotația de repere $\mathcal{R} = \{O; \bar{i}, \bar{j}\} \to \mathcal{R}' = \{O; \bar{i}', \bar{j}'\}$, ce determină schimbarea de coordonate

$$X = \frac{\sqrt{5}}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} X' \Leftrightarrow \begin{cases} x &= \frac{\sqrt{5}}{5}(2x' + y'), \\ y &= \frac{\sqrt{5}}{5}(-x' + 2y'). \end{cases} \tag{2.6}$$

Astfel, înlocuind pe x, y în funcție de x', y' în ecuația inițială a conicei, obtinem ca ecuatia conicei în raport cu $\mathcal{R}'$ este

$$4(x')^2 + 9(y')^2 - \frac{8\sqrt{5}}{5}x' - \frac{144\sqrt{5}}{5}y' + 80 = 0 \Leftrightarrow$$
$$4\left(x' - \frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 + 9\left(y' - \frac{8\sqrt{5}}{5}\right)^2 - 36 = 0.$$

Facem translația de repere $\mathcal{R}' = \{O; \bar{i}', \bar{j}'\} \to \mathcal{R}'' = \{C; \bar{i}', \bar{j}'\}$,

$$\begin{cases} x'' &= x' - \frac{\sqrt{5}}{5}, \\ y'' &= y' - \frac{8\sqrt{5}}{5}. \end{cases} \tag{2.7}$$

În raport cu reperul canonic $\mathcal{R}'' = \{C; \bar{i}', \bar{j}'\}$ elipsa are ecuația

$$\frac{(x'')^2}{9} + \frac{(y'')^2}{4} - 1 = 0 \tag{2.8}$$

Pentru a reprezenta grafic această elipsă, în sistemul de axe ortogonale (xOy) asociate reperului $\mathcal{R}$, vom determina coordonatele lui C și ecuațiile axelor reperului canonic în raport cu reperul inițial $\mathcal{R}$.

Astfel, centrul de simetrie al elipsei are, în raport cu $\mathcal{R}''$, coordonatele $x''_C = y''_C = 0$. Folosind formulele schimbărilor de coordonate (2.7) și (2.6), obținem $x'_C = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $y'_C = \frac{8\sqrt{5}}{5}$ și în final $x_C = 2$ și $y_C = 3$. Astfel, am obținut $C(2, 3)$ în raport cu $\mathcal{R}$.

Bineînțeles, putem determina direct coordonatele lui C rezolvînd sistemul ce caracterizează centrele de simetrie ale unei conice.

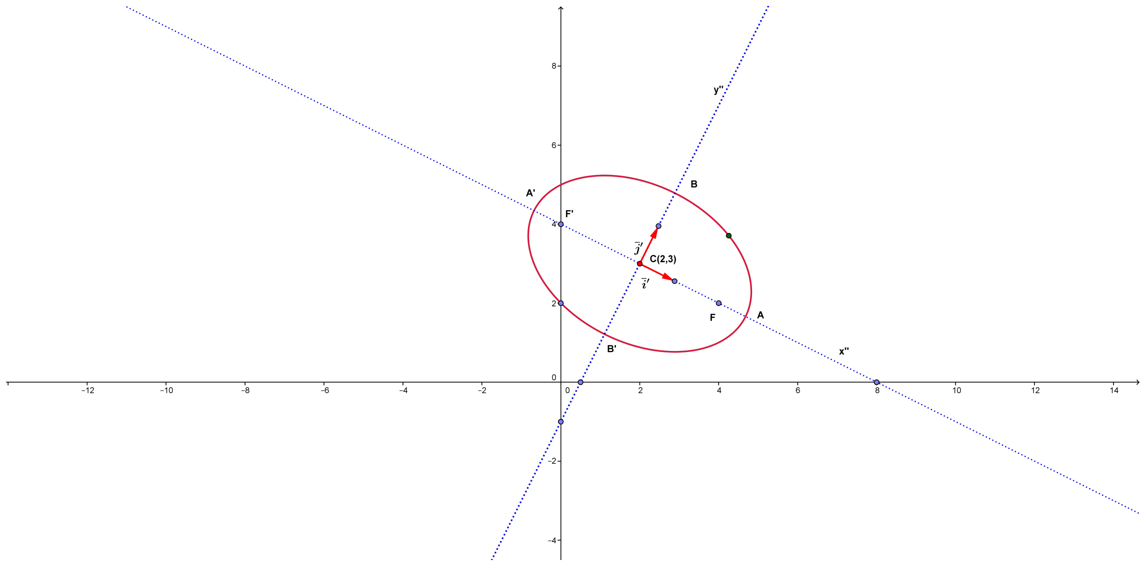
Axele reperului canonic au, în raport cu $\mathcal{R}''$, ecuațiile $Cx'' : \ y'' = 0$ și $Cy'' : \ x'' = 0$. Putem folosi aceleași formule (2.7), (2.6) pentru a obține ecuațiile acestora în raport cu reperul inițial sau, mai simplu, observăm că Cx'' trece prin C și are ca vector director vectorul propriu $\bar{i}'$, iar Cy'' trece prin C și are ca vector director pe $\bar{j}'$. Obținem

$$Cx'' : \ x + 2y - 8 = 0, \ \ Cy'' : \ 2x - y - 1 = 0.$$

Pentru o reprezentare grafică cât mai riguroasă, putem să ne folosim și de intersecțiile elipsei cu axele reperului inițial, Ox si Oy. Obținem $\Gamma \cap Oy = \{P(0, 2), \, Q(0, 5)\}$ și $\Gamma \cap Ox = \emptyset$.

De asemenea, elipsa are vârfurile $A(3, 0)$, $A'(-3, 0)$ și $B(0, 2)$, $B'(0, -2)$, în raport cu $\mathcal{R}''$. Folosindu-ne de cele două schimbări de coordonate succesive, calculăm $x_A = 2 + \frac{6\sqrt{5}}{5}$ și $y_A = 3 - \frac{3\sqrt{5}}{5}$. Analog procedăm cu celelalte trei vârfuri ale elipsei.

De asemenea, focarele elipsei au în raport cu reperul canonic coordonatele $x''_F = \sqrt{5},\ y''_F = 0$ și $x''_{F'} = -\sqrt{5},\ y''_{F'} = 0$, iar în raport cu reperul inițial obținem $F(4,2)$ și $F'(0,4)$.



(2) În raport cu reperul ortonormat $\mathcal{R} = \{O; \bar{i}, \bar{j}\}$ se dă conica

$$\Gamma: \ 6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0.$$

Aduceți această conică la forma canonică și reprezentați-o grafic.

Determinăm $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$ și $D = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -6 \\ 3 & 8 & -13 \\ -6 & -13 & 11 \end{pmatrix}$, deci $I = 8$, $\delta = -9$, $\Delta = 81$. Deoarece $\delta < 0$ și $\Delta \neq 0$ rezultă că Γ este o hiperbolă.

Polinomul caracteristic al lui A este $p(\lambda) = \lambda^2 - 8\lambda - 9$, deci $\lambda_1 = -1$ și $\lambda_2 = 9$ sunt valorile proprii ale lui A.

Ca și în exemplul precedent determinăm subspațiul liniar al vectorilor proprii corespunzători lui $\lambda_1 = -1$, $U(-1) = \{-3\alpha\bar{i} + \alpha\bar{j} \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ și alegem $\bar{i}' = \frac{\sqrt{10}}{10}(3\bar{i} - \bar{j})$. Fie $\bar{j}' = \frac{\sqrt{10}}{10}(\bar{i} + 3\bar{j}) \perp \bar{i}'$ un vector propriu corespunzator lui $\lambda_2 = 9$.

Facem rotația de repere $\mathcal{R} = \{O; \bar{i}, \bar{j}\} \to \mathcal{R}' = \{O; \bar{i}', \bar{j}'\}$, ce determină schimbarea de coordonate

(2.9)
$$X = \frac{\sqrt{10}}{10}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} X' \Leftrightarrow \begin{cases} x &= \frac{\sqrt{10}}{10}(3x' + y'), \\ y &= \frac{\sqrt{10}}{10}(-x' + 3y'). \end{cases}$$

În raport cu $\mathcal{R}'$, hiperbola are ecuația

$$-(x')^2 + 9(y')^2 - \sqrt{10}x' - 9\sqrt{10}y' + 11 = 0 \Leftrightarrow$$

$$-\left(x' + \frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 + 9\left(y' - \frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 - 9 = 0.$$

Considerăm acum translația de repere $\mathcal{R}' = \{O; \bar{i}', \bar{j}'\} \to \mathcal{R}'' = \{C; \bar{i}', \bar{j}'\}$,

(2.10)
$$\begin{cases} x'' &= x' + \frac{\sqrt{10}}{2}, \\ y'' &= y' - \frac{\sqrt{10}}{2}. \end{cases}$$

În raport cu reperul canonic $\mathcal{R}'' = \{C; \bar{i}', \bar{j}'\}$ hiperbola are ecuația

(2.11)
$$\frac{-(x'')^2}{9} + \frac{(y'')^2}{1} - 1 = 0$$

Observăm că hiperbola are focarele și vârfurile pe axa Cy''.

Folosindu-ne de formulele (2.9), (2.10), obținem centrul de simetrie al hiperbolei $C(-1,2)$ în raport cu $\mathcal{R}$.

Axele reperului canonic sunt $Cx'' = C + [\bar{i}']$ și $Cy'' = C + [\bar{j}'']$, de ecuații

$$Cx'' : \; x + 3y - 5 = 0, \; Cy'' : \; 3x - y + 5 = 0.$$

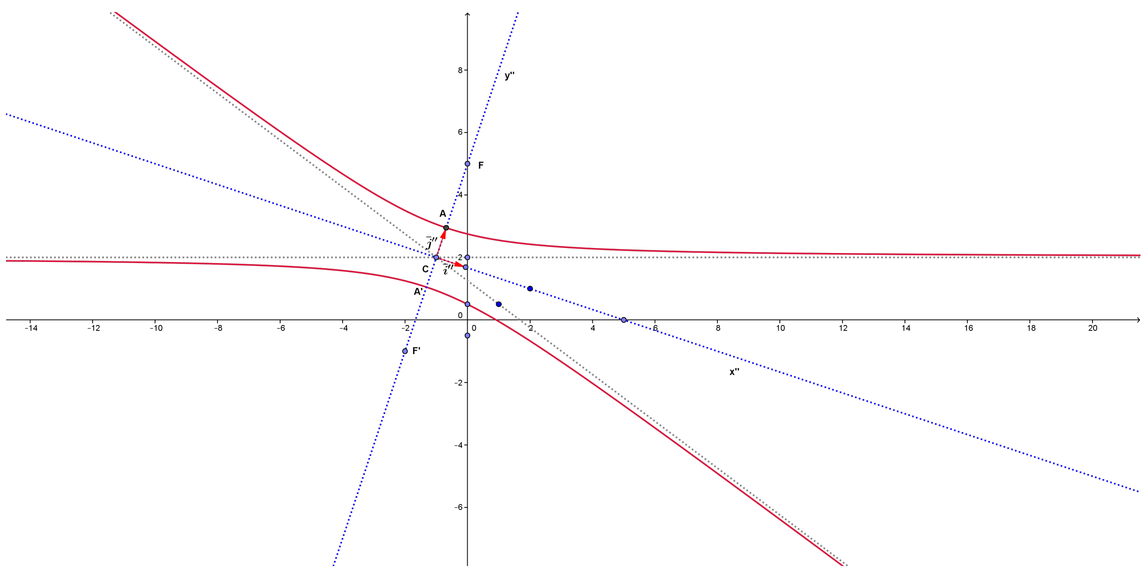
Asimptotele hiperbolei au, în raport cu reperul $\mathcal{R}''$, ecuațiile $a_1 : \; y'' = \frac{1}{3}x''$ și $a_2 : \; y'' = -\frac{1}{3}x''$. Aplicând formulele schimbărilor de repere obținem

$$a_1 : \; y = 2, \; a_2 : \; 3x + 4y - 5 = 0.$$

Sau determinăm mai întâi două direcții asimptotice, rezolvând ecuația matriceală ${}^tUAU = 0$, apoi scriem ecuațiile asimptotelor ca fiind drepte prin C, având ca vectori directori cele două direcții asimptotice.

Intersecțiile hiperbolei cu axele Ox, Oy sunt $\Gamma \cap Ox = \left\{P(\frac{11}{12}, 0)\right\}$ și $\Gamma \cap Oy = \left\{Q(0, \frac{11}{4}), \; R(0, \frac{1}{2})\right\}$.

Vârfurile hiperbolei, în raport cu reperul canonic $\mathcal{R}''$, au coordonatele $A(0,1)$ și $A'(0,-1)$. Pentru o reprezentare grafică riguroasă determinați coordonatele acestora în raport cu reperul inițial $\mathcal{R}$. De asemenea focarele hiperbolei au, în raport cu reperul inițial, coordonatele $F(0,5)$ și $F'(-2,-1)$.



(3) În raport cu reperul ortonormat $\mathcal{R} = \{O; \bar{i}, \bar{j}\}$ se dă conica

$$\Gamma: \ 9x^2 - 6xy + y^2 + 20x = 0.$$

Aduceți această conică la forma canonică și reprezentați-o grafic.

$A = \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ și $D = \begin{pmatrix} 9 & -3 & 10 \\ -3 & 1 & 0 \\ 10 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Rezultă că $I = 10$. $\delta = 0$, $\Delta = -100$. Deoarece $\delta = 0$ și $\Delta \neq 0$, Γ este o parabolă.

Valorile proprii ale lui A sunt $\lambda_1 = 0$ și $\lambda_2 = 10$.

Determinăm $U(0) = \{\alpha\bar{i} + 3\alpha\bar{j} \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ și alegem de exemplu $\bar{i}' = \frac{\sqrt{10}}{10}(\bar{i} + 3\bar{j})$ și $\bar{j}' = \frac{\sqrt{10}}{10}(-3\bar{i} + \bar{j}) \perp \bar{i}'$.

Rotația de repere ortonormate $\mathcal{R} = \{O; \bar{i}, \bar{j}\} \to \mathcal{R}' = \{O; \bar{i}', \bar{j}'\}$ determină schimbarea de coordonate

$$X = \frac{\sqrt{10}}{10}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} X' \Leftrightarrow \begin{cases} x &= \frac{\sqrt{10}}{10}(x' - 3y'), \\ y &= \frac{\sqrt{10}}{10}(-3x' + y'). \end{cases} \tag{2.12}$$

În raport cu $\mathcal{R}'$, parabola are ecuația

$$(y')^2 + \frac{2\sqrt{10}}{10}x' - \frac{6\sqrt{10}}{10}y' = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(y' - \frac{3\sqrt{10}}{10}\right)^2 + \frac{2\sqrt{10}}{10}x' - \frac{9}{10} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(y' - \frac{3\sqrt{10}}{10}\right)^2 + \frac{2\sqrt{10}}{10}\left(x' - \frac{9\sqrt{10}}{20}\right) = 0.$$

Considerăm acum translația de repere $\mathcal{R}' = \{O; \bar{i}', \bar{j}'\} \to \mathcal{R}'' = \{V; \bar{i}', \bar{j}'\}$,

$$\begin{cases} x'' &= x' - \frac{9\sqrt{10}}{20}, \\ y'' &= y' - \frac{3\sqrt{10}}{10}. \end{cases} \tag{2.13}$$

În raport cu reperul canonic $\mathcal{R}'' = \{V; \bar{i}', \bar{j}'\}$ parabola are ecuația

$$(y'')^2 + \frac{2\sqrt{10}}{10}x'' = 0.$$

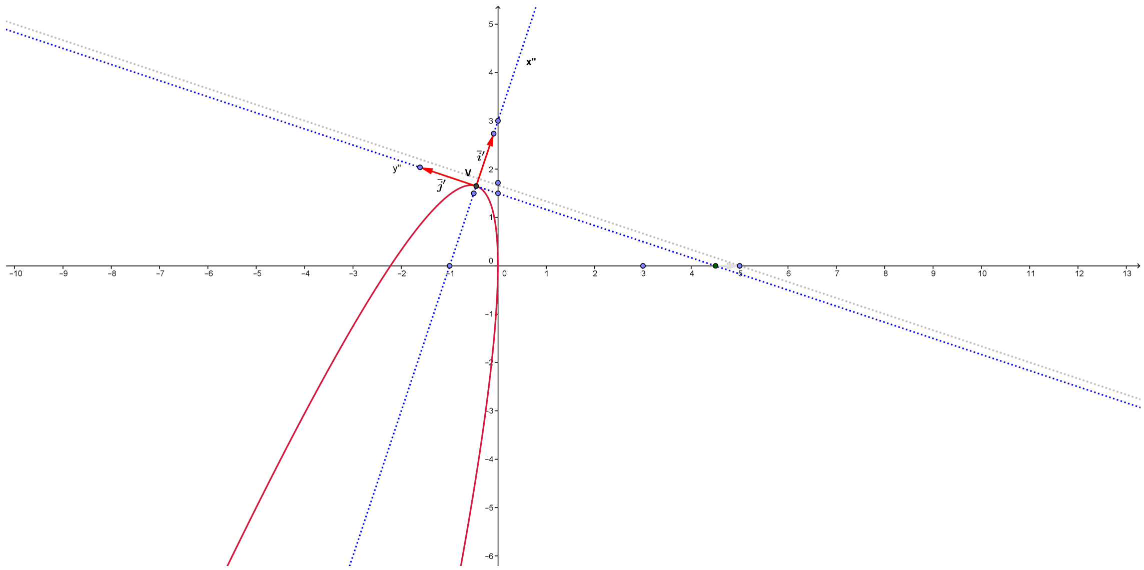
Reamintim că parabola nu are centru de simetrie, iar originea reperului canonic este vârful parabolei. Acesta are în raport cu $\mathcal{R}''$ coordonatele $x''_V = y''_V = 0$, iar din (2.12) și (2.13) obținem $x_V = -\frac{9}{20}$ și $y_V = \frac{33}{20}$. Deci $V(-\frac{9}{20}, \frac{33}{20})$ în raport cu reperul inițial.

$Vx'' = V + [\bar{i}']$, deci $Vx'': \ 3x - y + 3 = 0$. Sau putem considera că Vx'' trece prin V și are ca vector normal $\bar{j}'$.

$Vy'' = V + [\bar{j}']$, sau e perpendiculara pe Vx'' în V. Obținem $Vy'': \ x + 3y - \frac{9}{2} = 0$.

Determinăm $\Gamma \cap Ox = \left\{O, P(-\frac{20}{9}, 0)\right\}$ și Γ taie Oy în punctul dublu O. Deci parabola este tangenta axei Oy în O.

Focarul parabolei are coordonatele $F(-\frac{\sqrt{10}}{20}, 0)$ în raport cu reperul canonic și $F(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ în raport cu reperul $\mathcal{R}$. Ecuația directoarei în raport cu reperul canonic este $d: \ x'' = \frac{\sqrt{10}}{20}$, iar în raport cu reperul inițial avem $d: \ x + 3y - 5 = 0$.



3. Teorema de clasificare a cuadricelor

În acest curs vom clasifica metric cuadricele unui spațiu afin euclidian 3-dimensional $\mathcal{E}^3$, folosindu-ne de anumiți invarianți ortogonali și centro-ortogonali asociați unei cuadrice.

Presupunem că în raport cu un reper ortonormat $\mathcal{R} = \{O; \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$, se dă o cuadrică Γ

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{10}x + a_{20}y + a_{30}z + a_{00} = 0, \tag{3.1}$$

sau, în notație matriceală:

$$ {}^tXAX + 2BX + a_{00} = 0. \tag{3.2}$$

Am notat $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ coordonatele unui punct arbitrar al cuadricei Γ, în raport cu reperul $\mathcal{R}$, $B = \begin{pmatrix} a_{10} & a_{20} & a_{30} \end{pmatrix}$ și $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. Matricea A este simetrică și nenulă. Pentru a introduce invarianții ortogonali asociați lui Γ, considerăm și matricea $D = \begin{pmatrix} A & {}^tB \\ B & a_{00} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

În prima secțiune a cursului am demonstrat că următoarele numere reale sunt **invarianți ortogonali** ai cuadricei Γ:

$$I = Trace(A),\ \ \delta = \det A,\ \ \Delta = \det D,$$

$$J = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

Se poate demonstra ca următoarele numere reale asociate lui D sunt **invarianți centro-ortogonali**:

$$L = J + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{10} \\ a_{10} & a_{00} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{20} \\ a_{20} & a_{00} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_{30} \\ a_{30} & a_{00} \end{vmatrix},$$

$$K = \det A + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{10} \\ a_{21} & a_{22} & a_{20} \\ a_{10} & a_{20} & a_{00} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{10} \\ a_{13} & a_{33} & a_{30} \\ a_{10} & a_{30} & a_{00} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{20} \\ a_{23} & a_{33} & a_{30} \\ a_{20} & a_{30} & a_{00} \end{vmatrix}.$$

- J este suma minorilor diagonali de ordinul doi ai lui A
- L este suma minorilor diagonali de ordinul doi ai lui D
- K este suma minorilor diagonali de ordinul trei ai lui D

Mai mult, dacă $\delta = \Delta = 0$, atunci K este invariant ortogonal. Iar dacă $\delta = \Delta = K = J = 0$, atunci L este invariant ortogonal.

Theorem 8. *Invarianții ortogonali și centro-ortogonali ai unei cuadrice permit clasificarea acestora ca în tabelul următor.*

Nr.	δ	Δ	$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$	$-\frac{\Delta}{\lambda_1\delta},\ -\frac{\Delta}{\lambda_2\delta},\ -\frac{\Delta}{\lambda_3\delta}$	K	L	*Cuadrica*
1	*>0*	$\neq 0$		+ + +			*elipsoid*
2	*<0*	$\neq 0$		+ + -			*hiperboloid cu o pânză*
3	*>0*	$\neq 0$		- - +			*hiperboloid cu două pânze*
4	*<0*	$\neq 0$		- - -			*cuadrică vidă*
5	$\neq 0$	*0*	*acelasi semn*				*punct dublu*
6	$\neq 0$	*0*	+ + -				*con pătratic*
7	*0*	$\neq 0$	$\lambda_1\lambda_2 > 0,\ \lambda_3 = 0$				*paraboloid eliptic*
8	*0*	$\neq 0$	$\lambda_1\lambda_2 < 0,\ \lambda_3 = 0$				*paraboloid hiperbolic*
9	*0*	*0*	$\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 > 0,\ \lambda_3 = 0$		*>0*		*cuadrică vidă*
10	*0*	*0*	$\lambda_1\lambda_2 > 0,\ \lambda_3 = 0$		*0*		*dreaptă dublă*
11	*0*	*0*	$\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 > 0,\ \lambda_3 = 0$		*<0*		*cilindru eliptic*
12	*0*	*0*	$\lambda_1 < 0,\ \lambda_2 < 0,\ \lambda_3 = 0$		*>0*		*cilindru eliptic*
13	*0*	*0*	$\lambda_1 < 0,\ \lambda_2 < 0,\ \lambda_3 = 0$		*<0*		*cuadrică vidă*
14	*0*	*0*	$\lambda_1\lambda_2 < 0,\ \lambda_3 = 0$		$\neq 0$		*cilindru hiperbolic*
15	*0*	*0*	$\lambda_1\lambda_2 < 0,\ \lambda_3 = 0$		*0*		*plane secante*
16	*0*	*0*	$\lambda_1 \neq 0,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 0$		*0*	*>0*	*cuadrică vidă*
17	*0*	*0*	$\lambda_1 \neq 0,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 0$		*0*	*0*	*plan dublu*
18	*0*	*0*	$\lambda_1 \neq 0,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 0$		*0*	*<0*	*plane paralele*
19	*0*	*0*	$\lambda_1 \neq 0,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 0$		$\neq 0$		*cilindru parabolic*

Proof. Ca și în cazul conicelor, vom determina un reper canonic în raport cu care ecuația cuadricei să fie una dintre ecuațiile prezentate într-unul din cursurile anterioare.

Fie $\bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'$ trei vectori proprii ai lui A, ortogonali doi câte doi și unitari, corespunzatori valorilor proprii $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, nu neapărat distincte.

Amintim că

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = -\lambda^3 + I\lambda^2 - J\lambda + \delta.$$

Se știe că vectorii proprii corespunzători unor valori proprii distincte ale unei matrice simetrice sunt ortogonali. Dacă o valoare proprie are ordin de multiplicitate 2, determinăm o bază oarecare în subspațiul propriu corespunzător acesteia, apoi o ortonormăm prin procedeul Gram-Schmidt.

Considerăm rotația de repere $\mathcal{R} = \left\{O; \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\right\} \to \mathcal{R}' = \left\{O; \bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'\right\}$. Notăm coordonatele unui punct oarecare în raport cu $\mathcal{R}'$ cu x', y', z'. Astfel, în raport cu $\mathcal{R}'$, ecuația cuadricei Γ devine

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + \lambda_3(z')^2 + 2a'_{10}x' + 2a'_{20}y' + 2a'_{30}z' + a_{00} = 0. \tag{3.3}$$

Am folosit (1.4) $a'_{00} = H(S_0) = H(O) = a_{00}$.

(I) Fie $\delta \neq 0$, adică toate cele trei valori proprii ale lui A sunt nenule.

Formând pătrate în ecuația (3.3) și folosind faptul că Δ e un invariant ortogonal, $\Delta = \Delta' = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & a'_{10} \\ 0 & \lambda_2 & 0 & a'_{20} \\ 0 & 0 & \lambda_3 & a'_{30} \\ a'_{10} & a'_{20} & a'_{30} & a_{00} \end{vmatrix}$,

rezultă $a_{00} - \frac{(a'_{10})^2}{\lambda_1} - \frac{(a'_{20})^2}{\lambda_2} - \frac{(a'_{30})^2}{\lambda_3} = \frac{\Delta}{\delta}$,

deci ecuația lui Γ este echivalentă cu

$$\lambda_1\left(x' + \frac{a'_{10}}{\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2\left(y' + \frac{a'_{20}}{\lambda_2}\right)^2 + \lambda_3\left(z' + \frac{a'_{30}}{\lambda_3}\right)^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0.$$

Făcând o translație de repere $\mathcal{R}' \to \mathcal{R}''$ astfel încât originea lui $\mathcal{R}''$ să fie $C\left(-\frac{a'_{10}}{\lambda_1}, -\frac{a'_{20}}{\lambda_2}, -\frac{a'_{30}}{\lambda_3}\right)$ (în raport cu $\mathcal{R}'$),

$$\begin{cases} x' &= x" - \frac{a'_{10}}{\lambda_1}, \\ y' &= y" - \frac{a'_{20}}{\lambda_2}, \\ z' &= z" - \frac{a'_{30}}{\lambda_3}, \end{cases}$$

ecuația anterioară devine

$$\lambda_1(x'')^2 + \lambda_2(y'')^2 + \lambda_3(z'')^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0. \tag{3.4}$$

(Ia) Presupunem $\Delta \neq 0$. Atunci ecuația (3.4) se scrie

$$\frac{(x'')^2}{-\frac{\Delta}{\lambda_1\delta}} + \frac{(y'')^2}{-\frac{\Delta}{\lambda_2\delta}} + \frac{(z'')^2}{-\frac{\Delta}{\lambda_3\delta}} = 1. \tag{3.5}$$

Astfel, obținem următoarele variante:

Nr.	δ	Δ	$-\frac{\Delta}{\lambda_1\delta}, -\frac{\Delta}{\lambda_2\delta}, -\frac{\Delta}{\lambda_3\delta}$	Cuadrica
1	>0	$\neq 0$	$+ \quad + \quad +$	elipsoid
2	<0	$\neq 0$	$+ \quad + \quad -$	hiperboloid cu o pânză
3	>0	$\neq 0$	$- \quad - \quad +$	hiperboloid cu două pânze
4	<0	$\neq 0$	$- \quad - \quad -$	cuadrică vidă

(Ib) Dacă $\Delta = 0$, atunci ecuația (3.4) devine

$$\lambda_1(x'')^2 + \lambda_2(y'')^2 + \lambda_3(z'')^2 = 0. \tag{3.6}$$

Rezulta urmatoarele posibilitati:

Nr	δ	Δ	$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$	Cuadrica
5	$\neq 0$	0	acelasi semn	punct dublu
6	$\neq 0$	0	$+ \quad + \quad -$	con pătratic

(II) Presupunem că $\delta = 0$, deci A are una sau două valori proprii nule.

Considerăm subcazul (II_1) $\lambda_3 = 0,\ \lambda_1 \neq 0,\ \lambda_2 \neq 0.$

Ecuația (3.3) devine

$$\lambda_1\left(x' + \frac{a'_{10}}{\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2\left(y' + \frac{a'_{20}}{\lambda_2}\right)^2 + 2a'_{30}z' + a_{00} - \frac{(a'_{10})^2}{\lambda_1} - \frac{(a'_{20})^2}{\lambda_2} = 0. \tag{3.7}$$

Din invarianța ortogonală a lui Δ, obținem că $\Delta = -\lambda_1\lambda_2(a'_{30})^2 \Rightarrow |\ a'_{30}\ |= \sqrt{-\frac{\Delta}{\lambda_1\lambda_2}}$.
Deci considerăm subcazurile $\Delta \neq 0$ si $\Delta = 0$.

(II_1a) Dacă $\Delta \neq 0 \Leftrightarrow a'_{30} \neq 0$, ecuația (3.7) devine

$$\lambda_1\left(x' + \frac{a'_{10}}{\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2\left(y' + \frac{a'_{20}}{\lambda_2}\right)^2 + 2a'_{30}\left(z' + \frac{a_{00}}{2a'_{30}} - \frac{(a'_{10})^2}{2\lambda_1 a'_{30}} - \frac{(a'_{20})^2}{2\lambda_2 a'_{30}}\right) = 0.$$

Considerăm o translație convenabilă de repere $\mathcal{R}' \to \mathcal{R}'' = \left\{V; \bar{\imath}', \bar{\jmath}', \bar{k}'\right\}$, cu $V\left(-\frac{a'_{10}}{\lambda_1}, -\frac{a'_{20}}{\lambda_2}, -\frac{a_{00}}{2a'_{30}} + \frac{(a'_{10})^2}{2\lambda_1 a'_{30}} + \frac{(a'_{20})^2}{2\lambda_2 a'_{30}}\right)$ (în raport cu $\mathcal{R}'$).
Atunci ecuația cuadricei în raport cu $\mathcal{R}''$ este

$$\frac{(x'')^2}{\frac{1}{\lambda_1}} + \frac{(y'')^2}{\frac{1}{\lambda_2}} = \pm 2\sqrt{-\frac{\Delta}{\lambda_1\lambda_2}}z''. \tag{3.8}$$

Astfel avem

Nr	δ	Δ	$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$	Cuadrica
7	0	$\neq 0$	$\lambda_1\lambda_2 > 0,\ \lambda_3 = 0$	paraboloid eliptic
8	0	$\neq 0$	$\lambda_1\lambda_2 < 0,\ \lambda_3 = 0$	paraboloid hiperbolic

(II_1b) Dacă $\Delta = 0 \Leftrightarrow a'_{30} = 0$, ecuația (3.7) devine

$$\lambda_1\left(x' + \frac{a'_{10}}{\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2\left(y' + \frac{a'_{20}}{\lambda_2}\right)^2 + a_{00} - \frac{(a'_{10})^2}{\lambda_1} - \frac{(a'_{20})^2}{\lambda_2} = 0.$$

Deoarece K este un invariant centro-ortogonal, se demonstrează că $a_{00} - \frac{(a'_{10})^2}{\lambda_1} - \frac{(a'_{20})^2}{\lambda_2} = \frac{K}{\lambda_1\lambda_2}$.

După o translație a reperului $\mathcal{R}'$ în punctul $C\left(-\frac{a'_{10}}{\lambda_1}, -\frac{a'_{20}}{\lambda_2}, 0\right)_{\mathcal{R}'}$, ecuația anterioară se scrie

$$\lambda_1(x'')^2 + \lambda_2(y'')^2 + \frac{K}{\lambda_1\lambda_2} = 0. \tag{3.9}$$

Nr	δ	Δ	$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$	K	cuadrica
9	0	0	$\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 > 0,\ \lambda_3 = 0$	>0	cuadrică vidă
10	0	0	$\lambda_1\lambda_2 > 0,\ \lambda_3 = 0$	0	dreaptă dublă
11	0	0	$\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 > 0,\ \lambda_3 = 0$	<0	cilindru eliptic
12	0	0	$\lambda_1 < 0,\ \lambda_2 < 0,\ \lambda_3 = 0$	>0	cilindru eliptic
13	0	0	$\lambda_1 < 0,\ \lambda_2 < 0,\ \lambda_3 = 0$	<0	cuadrică vidă
14	0	0	$\lambda_1\lambda_2 < 0,\ \lambda_3 = 0$	$\neq 0$	cilindru hiperbolic
15	0	0	$\lambda_1\lambda_2 < 0,\ \lambda_3 = 0$	0	plane secante

(II_2) presupunem $\lambda_1 \neq 0,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Ecuația (3.3) devine

$$\lambda_1\left(x' + \frac{a'_{10}}{\lambda_1}\right)^2 + 2a'_{20}y' + 2a'_{30}z' + a_{00} - \frac{(a'_{10})^2}{\lambda_1} = 0. \tag{3.10}$$

Folosind invarianța centro-ortogonală a lui L și K, se demonstreaza că $L = \lambda_1 a_{00} - (a'_{10})^2 - (a'_{20})^2 - (a'_{30})^2$ și $K = -\lambda_1(a'_{20})^2 - \lambda_1(a'_{30})^2$.

(II_2a) $K = 0 \Leftrightarrow a'_{20} = a'_{30} = 0$, deci ecuația anterioara se scrie

$$\lambda_1^2\left(x' + \frac{a'_{10}}{\lambda_1}\right)^2 + L = 0. \tag{3.11}$$

După o translație a reperului $\mathcal{R}'$ în punctul $O'\left(-\frac{a'_{10}}{\lambda_1}, 0, 0\right)$, obținem ecuația $\lambda_1^2(x'')^2 + L = 0$.

Nr	δ	Δ	$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$	K	L	cuadrica
16	0	0	$\lambda_1 \neq 0,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 0$	0	>0	cuadrică vidă
17	0	0	$\lambda_1 \neq 0,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 0$	0	0	plan dublu
18	0	0	$\lambda_1 \neq 0,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 0$	0	<0	plane paralele

(II_2b) $K \neq 0$. Deci cel puțin unul dintre coeficienții a'_{20}, a'_{30} este nenul. În raport cu $\mathcal{R}'$ cuadrica are ecuația

$$\lambda_1\left(x' + \frac{a'_{10}}{\lambda_1}\right)^2 + 2a'_{20}y' + 2a'_{30}z' + a_{00} - \frac{(a'_{10})^2}{\lambda_1} = 0.$$

Facem translația reperului $\mathcal{R}'$ în punctul $O'\left(-\frac{a'_{10}}{\lambda_1}, 0, 0\right)_{\mathcal{R}'}$ și ecuația anterioară se scrie

$$\lambda_1(x'')^2 + 2a'_{20}y'' + 2a'_{30}z'' + a'_{00} = 0. \tag{3.12}$$

Daca $a'_{20} \neq 0$ și $a'_{30} \neq 0$, efectuăm apoi o rotație a reperului $\mathcal{R}'' = \{O''; \bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'\}$ în jurul lui $\bar{i}'$, de un unghi orientat θ, astfel încât în raport cu noul reper $\mathcal{R}'''$, din ecuația cuadricei să dispară termenul în z'''. Schimbarea de coordonate în urma acestei rotații, de unghi deocamdată nedeterminat, se scrie:

$$\begin{cases} x'' &= x''', \\ y'' &= y''' \cos\theta - z''' \sin\theta, \\ z'' &= y''' \sin\theta + z''' \cos\theta. \end{cases}$$

Înlocuim x'', y'', z'' în ecuația (3.12) și impunem ca termenul în z''' să se anuleze.

Aceasta revine la $-a'_{20}\sin\theta + a'_{30}\cos\theta = 0$. Dintre soluțiile acestei ecuații, alegem de exemplu

$$\sin\theta = \frac{a'_{30}}{\sqrt{(a'_{20})^2 + (a'_{30})^2}}, \ \cos\theta = \frac{a'_{20}}{\sqrt{(a'_{20})^2 + (a'_{30})^2}}. \tag{3.13}$$

Notăm cu $\bar{j}$", $\bar{k}$" vectorii obținuți prin rotirea lui $\bar{j}'$, $\bar{k}'$ cu unghiul θ. Vom folosi $L = \lambda_1 a_{00} - (a'_{10})^2 - (a'_{20})^2 - (a'_{30})^2$ și $K = -\lambda_1 (a'_{20})^2 - \lambda_1 (a'_{30})^2$.

În raport cu $\mathcal{R}''' = \{O'; \bar{i}'' = \bar{i}', \bar{j}'', \bar{k}''\}$, ecuația cuadricei devine

$$\lambda_1 (x''')^2 + 2a'_{10}\left(y''' \cos\theta - z''' \sin\theta\right) + 2a'_{30}\left(y''' \sin\theta + z''' \cos\theta\right) + a'_{00} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda_1 (x''')^2 + 2y''' \frac{(a'_{20})^2 + (a'_{30})^2}{\sqrt{(a'_{20})^2 + (a'_{30})^2}} + \frac{L}{\lambda_1} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x''')^2 = -\frac{2\sqrt{(a'_{20})^2 + (a'_{30})^2}}{\lambda_1}\left(y''' + \frac{L}{2\lambda_1\sqrt{(a'_{20})^2 + (a'_{30})^2}}\right) \Leftrightarrow$$

$$(x''')^2 = -2\sqrt{-\frac{K}{\lambda_1^3}}\left(y''' + \frac{L}{2\sqrt{-K\lambda_1}}\right). \tag{3.14}$$

Efectuând o ultimă translație a reperului $\mathcal{R}'''$ în $O''\left(0, -\frac{L}{2\sqrt{-K\lambda_1}}, 0\right)_{\mathcal{R}'''}$, obținem o ecuație de tipul

$$\tilde{x}^2 = -2\sqrt{-\frac{K}{\lambda_1^3}}\tilde{y},$$

deci ecuația unui cilindru parabolic.

Am obținut astfel și ultima variantă posibilă a clasificării cuadricelor:

Nr	δ	Δ	$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$	K	cuadrica
19	0	0	$\lambda_1 \neq 0,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 0$	$\neq 0$	cilindru parabolic

□

4. Exemple

$$(\Gamma)\ x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 6xz + 2yz - 2x + 6y + 2z = 0. \tag{4.1}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow I = 7,\ J = 0,\ \delta = -36 \neq 0.\ D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta = -36 \neq 0.$$

Polinomul caracteristic este $p(\lambda) = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 36$ și valorile proprii sunt $\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 6,\ \lambda_3 = -2$.

Deci cuadrica este un hiperboloid cu o pânză.

Subspațiul propriu corespunzător lui 3 este $U(3) = \{\alpha\bar{i} - \alpha\bar{j} + \alpha\bar{k} \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$. Alegem $\bar{i}' = \frac{1}{\sqrt{3}}(\bar{i} - \bar{j} + \bar{k})$.

Analog $U(6) = \{\beta\bar{i} + 2\beta\bar{j} + \beta\bar{k} \mid \beta \in \mathbb{R}\}$ și alegem $\bar{j}' = \frac{1}{\sqrt{6}}(\bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k})$.

În final, fie $\bar{k}' = \frac{\bar{i}' \times \bar{j}'}{\|\bar{i}' \times \bar{j}'\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\bar{i} + \bar{k}) \in U(-2)$.

Considerăm schimbarea de repere $\mathcal{R} \to \mathcal{R}' = \left\{O; \bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'\right\}$ ce induce schimbarea de coordonate

$$\begin{cases} x &= \frac{1}{\sqrt{3}}x' + \frac{1}{\sqrt{6}}y' - \frac{1}{\sqrt{2}}z', \\ y &= -\frac{1}{\sqrt{3}}x' + \frac{2}{\sqrt{6}}y', \\ z &= \frac{1}{\sqrt{3}}x' + \frac{1}{\sqrt{6}}y' + \frac{1}{\sqrt{2}}z'. \end{cases} \tag{4.2}$$

În raport cu $\mathcal{R}'$ ecuația (4.1) devine

$$3(x')^2 + 6(y')^2 - 2(z')^2 - \frac{6}{\sqrt{3}}x' + \frac{12}{\sqrt{6}}y' + \frac{4}{\sqrt{2}}z' = 0 \Leftrightarrow$$

$$3\left(x' - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 6\left(y' + \frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 - 2\left(z' - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 1 = 0.$$

Considerăm translația de repere $\mathcal{R}' \to \mathcal{R}'' = \left\{C; \bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'\right\}$, cu $C\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)_{\mathcal{R}'}$:

$$\begin{cases} x' &= x'' + \frac{1}{\sqrt{3}}, \\ y' &= y'' - \frac{1}{\sqrt{6}}, \\ z' &= z'' + \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Ecuația cuadricei în raport cu $\mathcal{R}''$ este

$$\frac{(x'')^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} + \frac{(y'')^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2} - \frac{(z'')^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1.$$

Reperul canonic are originea în C, centrul de simetrie al cuadricei. Folosind (4.2) obținem $C\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ în raport cu reperul inițial.

Axele reperului canonic sunt drepte prin C, de direcții $\bar{i}'$, $\bar{j}'$, $\bar{k}'$.

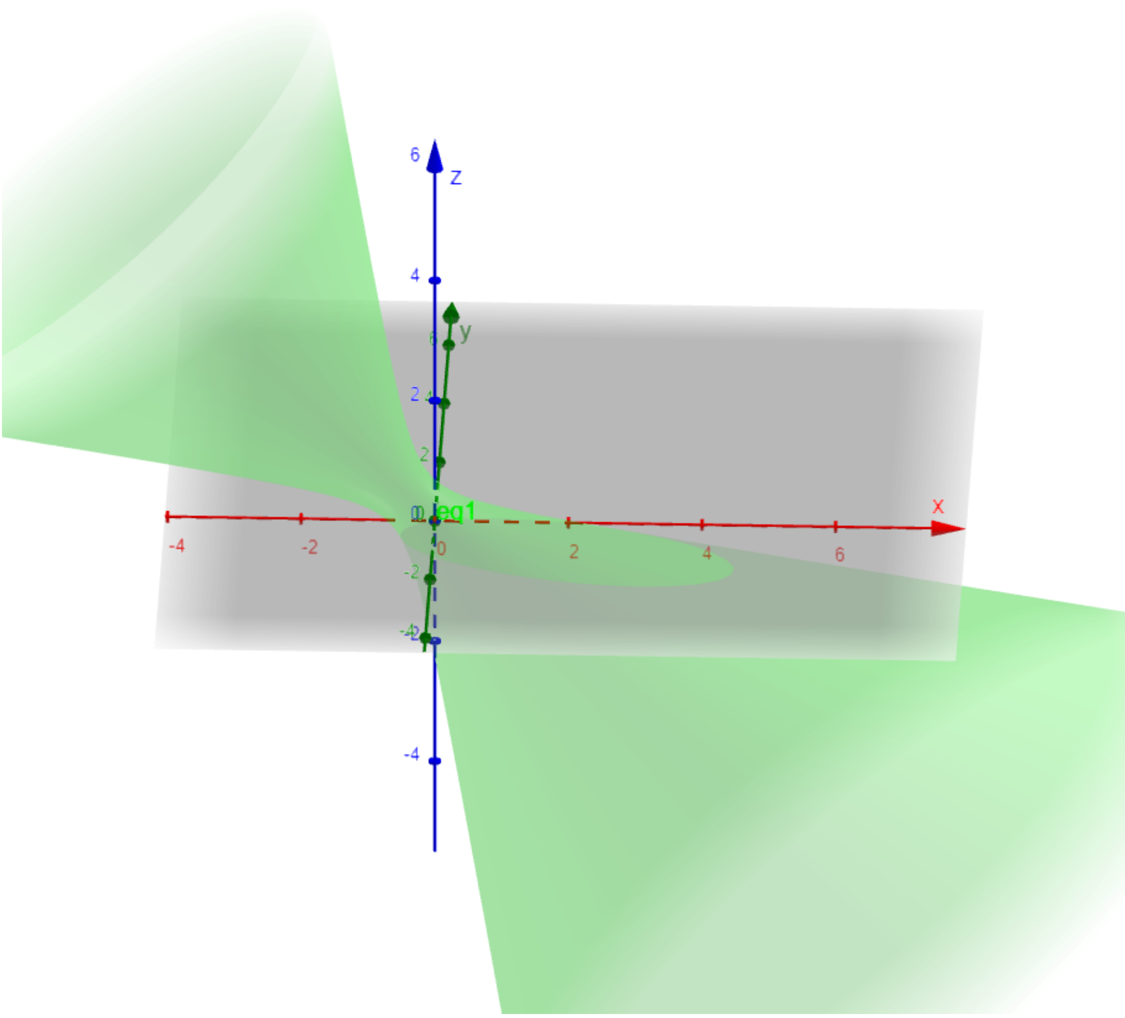
De exemplu

$$Cx'' : \frac{x + \frac{1}{3}}{1} = \frac{y + \frac{2}{3}}{-1} = \frac{z - \frac{2}{3}}{1}.$$

Reamintim că axele reperului canonic sunt axe de simetrie pentru hiperboloidul cu o pânză.

Planele reperului canonic sunt plane de simetrie ale hiperboloidului. De exemplu, planul $(x''Cy'')$ este planul prin C, de vector normal $\bar{k}'$, deci are ecuația $-x + z - 1 = 0$.

Determinați ecuațiile celorlalte axe și plane ale reperului canonic.



$$(\Gamma)\ 7x^2 + y^2 + z^2 + 8xy + 8xz - 16yz - 22x + 8y - 10z + 16 = 0. \tag{4.3}$$

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & -8 \\ 4 & -8 & 1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 & -11 \\ 4 & 1 & -8 & 4 \\ 4 & -8 & 1 & -5 \\ -11 & 4 & -5 & 16 \end{pmatrix}, \text{ deci } \delta \neq 0 \text{ și } \Delta = 0.$$

Obținem valorile proprii $\lambda_1 = \lambda_2 = 9$ și $\lambda_3 = -9$. Deci Γ este un con pătratic.

Pentru a determina o bază ortonormată în $U(9)$, determinăm subspațiul propriu corespunzător valorii proprii 9, apoi alegem doi vectori liniar independenți din $U(9)$. Ortonormăm acest sistem de vectori prin procedeul Gram-Schmidt.

Obținem $\bar{i}' = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\bar{i} + \bar{j}),\ \bar{j}' = \frac{1}{3\sqrt{5}}(2\bar{i} - 4\bar{j} + 5\bar{k}) \in U(9)$. Atunci $\bar{k}' = \frac{\bar{i}' \times \bar{j}'}{\|\bar{i}' \times \bar{j}'\|} = \frac{1}{3}(\bar{i} - 2\bar{j} - 2\bar{k}) \in U(-9)$.

Fie $\mathcal{R}' = \{O; \bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'\}$. Efectuăm schimbarea de coordonate

$$\begin{cases} x &= \frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{3\sqrt{5}}y' + \frac{1}{3}z', \\ y &= \frac{1}{\sqrt{5}}x' - \frac{4}{3\sqrt{5}}y' - \frac{2}{3}z', \\ z &= \frac{5}{3\sqrt{5}}y' - \frac{2}{3}z'. \end{cases} \tag{4.4}$$

În raport cu $\mathcal{R}'$, ecuația cuadricei este

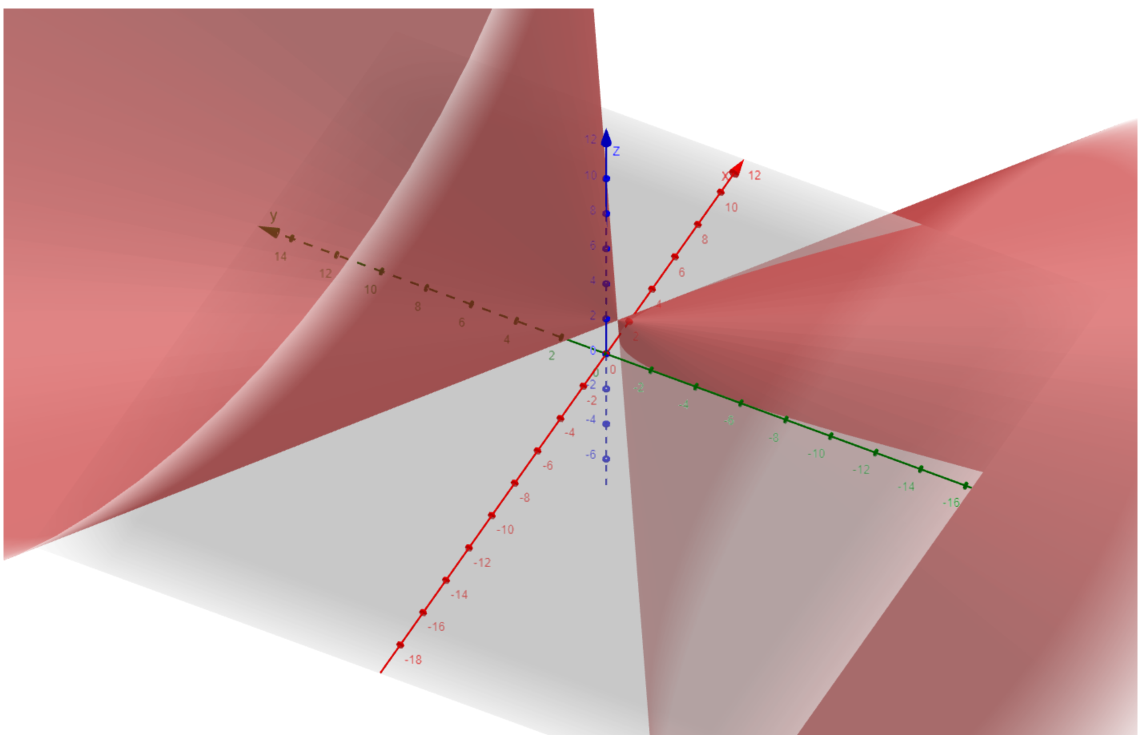
$$9(x')^2 + 9(y')^2 - 9(z')^2 - \frac{36}{\sqrt{5}}x' - \frac{42}{\sqrt{5}}y' - 6z' + 16 = 0 \Leftrightarrow$$

$$9\left(x' - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 + 9\left(y' - \frac{7}{3\sqrt{5}}\right)^2 - 9\left(z' + \frac{1}{3}\right)^2 = 0.$$

Fie $V\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{7}{3\sqrt{5}}, -\frac{1}{3}\right)_{\mathcal{R}'}$. Translând reperul $\mathcal{R}'$ în V, adică făcând schimbarea de coordonate $\begin{cases} x' &= x'' + \frac{2}{\sqrt{5}}, \\ y' &= y'' + \frac{7}{3\sqrt{5}}, \\ z' &= z'' - \frac{1}{3}, \end{cases}$ ecuația lui Γ se scrie

$$(x'')^2 + (y'')^2 - (z'')^2 = 0.$$

Menționăm că V este vârful conului pătratic și în raport cu reperul inițial are coordonatele $V(1, 0, 1)$. Verificați acest lucru folosind (4.4). Deci reperul canonic are originea în vârful conului, care este și centrul de simetrie al acestuia, iar axele reperului canonic sunt drepte prin V, avand ca direcții vectorii proprii $\bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'$. Determinați ecuațiile lor cât și ecuațiile planelor reperului canonic.



(4.5) $$(\Gamma)\ 4x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xz - 4yz + 6x + 4y + 8z + 2 = 0.$$

Calculăm $\delta = 0$, $\Delta \neq 0$, $p(\lambda) = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 18\lambda$, deci $\lambda_1 = 6,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = 0$. Deducem că Γ este un paraboloid eliptic.

Subspațiul propriu corespunzător lui 6 este $U(6) = \left\{-2\alpha\bar{i} + \alpha\bar{j} - 2\alpha\bar{k} \mid \alpha \in \mathbb{R}\right\}$. Fie $\bar{i}' = \frac{1}{3}(-2\bar{i} + \bar{j} - 2\bar{k}) \in U(6)$. Analog $\bar{j}' = \frac{1}{3}(-2\bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k}) \in U(3)$ și $\bar{k}' = \frac{1}{3}(\bar{i} - 2\bar{j} - 2\bar{k}) \in U(0)$.

Facem schimbarea de repere $\mathcal{R} \to \mathcal{R}' = \left\{O; \bar{\imath}', \bar{\jmath}', \bar{k}'\right\}$, ce induce schimbarea de coordonate

$$\begin{cases} x &= -\frac{2}{3}x' - \frac{2}{3}y' + \frac{1}{3}z', \\ y &= \frac{1}{3}x' - \frac{2}{3}y' - \frac{2}{3}z', \\ z &= -\frac{2}{3}x' + \frac{1}{3}y' - \frac{2}{3}z'. \end{cases}$$

Ecuația lui Γ în raport cu $\mathcal{R}'$ este

$$6(x')^2 + 3(y')^2 - 8x' - 4y' - 6z' + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

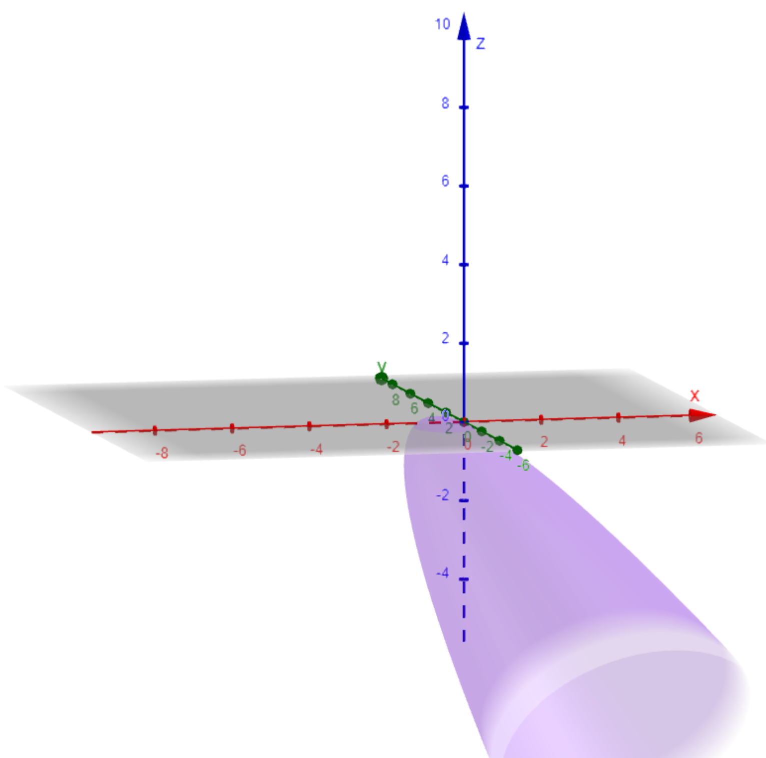
$$6\left(x' - \frac{2}{3}\right)^2 + 3\left(y' - \frac{2}{3}\right)^2 - 6\left(z' + \frac{1}{3}\right) = 0.$$

Considerăm translația de repere $\mathcal{R}' \to \mathcal{R}'' = \left\{V; \bar{\imath}', \bar{\jmath}', \bar{k}'\right\}$, $\begin{cases} x' &= x'' + \frac{2}{3}, \\ y' &= y'' + \frac{2}{3}, \\ z' &= z'' - \frac{1}{3}. \end{cases}$

Ecuația cuadricei în raport cu $\mathcal{R}''$ este

$$\frac{(x'')^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} + (y'')^2 = 2z''.$$

În raport cu reperul inițial avem $V(-1, 0, 0)$. Acesta este vârful paraboloidului eliptic. Axele reperului canonic $\mathcal{R}''$ sunt dreptele prin V având ca direcții vectorii proprii ai lui A. Determinați-le ecuațiile. Analog pentru planele reperului canonic.



(4.6) $$(\Gamma)\ 5x^2 - y^2 + z^2 + 4xy + 6xz + 2x + 4y + 6z - 8 = 0.$$

$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -8 \end{pmatrix} \Rightarrow I = 5,\ \delta = 0,\ J = -14,\ \Delta = 16.$

Valorile proprii sunt $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 7$, $\lambda_3 = -2$. Deci Γ este un paraboloid hiperbolic.

Alegem vectorii proprii corespunzători valorilor proprii de mai sus:
$\bar{i}' = (\frac{1}{\sqrt{14}}\bar{i} + \frac{2}{\sqrt{14}}\bar{j} - \frac{3}{\sqrt{14}}\bar{k}) \in U(0)$, $\bar{j}' = (\frac{4}{\sqrt{21}}\bar{i} + \frac{1}{\sqrt{21}}\bar{j} + \frac{2}{\sqrt{21}}\bar{k}) \in U(7)$ si $\bar{k}' = (-\frac{1}{\sqrt{6}}\bar{i} + \frac{2}{\sqrt{6}}\bar{j} + \frac{1}{\sqrt{6}}\bar{k}) \in U(-2)$.

Schimbarea de repere $\mathcal{R} \to \mathcal{R}' = \{O; \bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'\}$ determină schimbarea de coordonate

$$\begin{cases} x &= \frac{1}{\sqrt{14}}x' + \frac{4}{\sqrt{21}}y' - \frac{1}{\sqrt{6}}z', \\ y &= \frac{2}{\sqrt{14}}x' + \frac{1}{\sqrt{21}}y' + \frac{2}{\sqrt{6}}z', \\ z &= -\frac{3}{\sqrt{14}}x' + \frac{2}{\sqrt{21}}y' + \frac{1}{\sqrt{6}}z'. \end{cases}$$

Ecuația cuadricei în raport cu noul reper devine

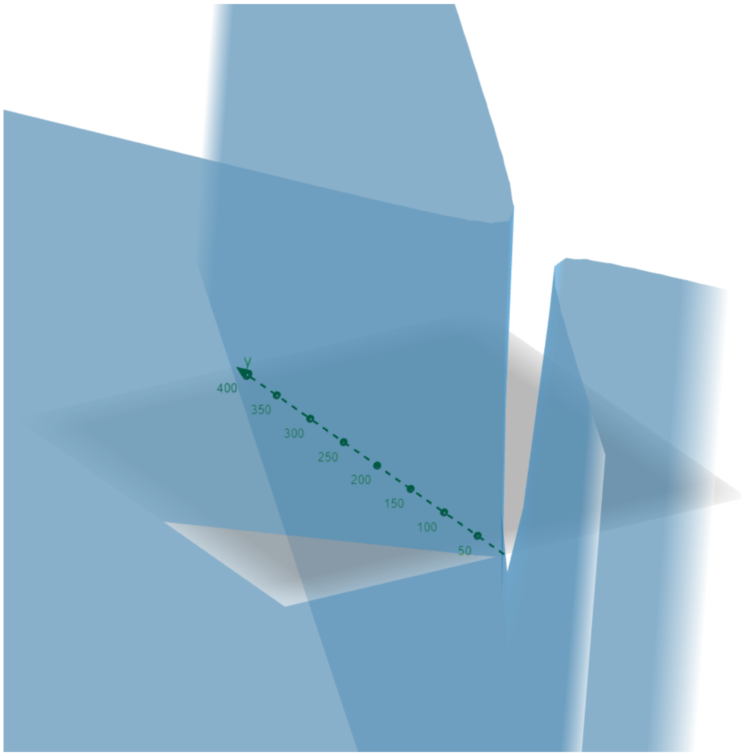
$$7(y')^2 - 2x' - \frac{8}{\sqrt{14}}x' + \frac{24}{\sqrt{21}}y' + \frac{12}{\sqrt{6}}z' - 8 = 0 \Leftrightarrow$$
$$7\left(y' + \frac{12}{7\sqrt{21}}\right)^2 - 2\left(z' - \frac{3}{\sqrt{6}}\right)^2 - \frac{8}{\sqrt{14}}\left(x' + \frac{293\sqrt{14}}{392}\right) = 0.$$

Efectuăm translația de repere $\mathcal{R}' \to \mathcal{R}'' = \{O'; \bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'\}$: $\begin{cases} x' &= x'' - \frac{293\sqrt{14}}{392}, \\ y' &= y'' - \frac{12}{7\sqrt{21}}, \\ z' &= z'' + \frac{3}{\sqrt{6}}. \end{cases}$

Ecuația canonică este

$$\frac{(y'')^2}{\frac{1}{7}} - \frac{(z'')}{\frac{1}{2}} = \frac{8}{\sqrt{14}}x''.$$

Procedați ca la exemplul anterior pentru a scrie coordonatele vârfului paraboloidului, ecuațiile axelor și planelor reperului canonic.



(4.7) $$(\Gamma)\ 4x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xz - 4yz + 8x - 4y + 8z = 0.$$

Obținem $\delta = \Delta = 0$, $K = -108$, $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 0$, deci cuadrica este un cilindru eliptic.

Alegem vectorii proprii corespunzători valorilor proprii de mai sus:
$\bar{i}' = \frac{1}{3}(-2\bar{i} + \bar{j} - 2\bar{k}) \in U(6)$, $\bar{j}' = \frac{1}{3}(-2\bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k}) \in U(3)$ si $\bar{k}' = \frac{1}{3}(\bar{i} - 2\bar{j} - 2\bar{k}) \in U(0)$.

Schimbarea de repere $\mathcal{R} \to \mathcal{R}' = \{O; \bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'\}$ determină schimbarea de coordonate

$$\begin{cases} x &= -\frac{2}{3}x' - \frac{2}{3}y' + \frac{1}{3}z', \\ y &= \frac{1}{3}x' - \frac{2}{3}y' - \frac{2}{3}z', \\ z &= -\frac{2}{3}x' + \frac{1}{3}y' - \frac{2}{3}z'. \end{cases}$$

Ecuația lui Γ în raport cu $\mathcal{R}'$ este

$$6(x')^2 + 3(y')^2 - 12x' = 0 \Leftrightarrow$$

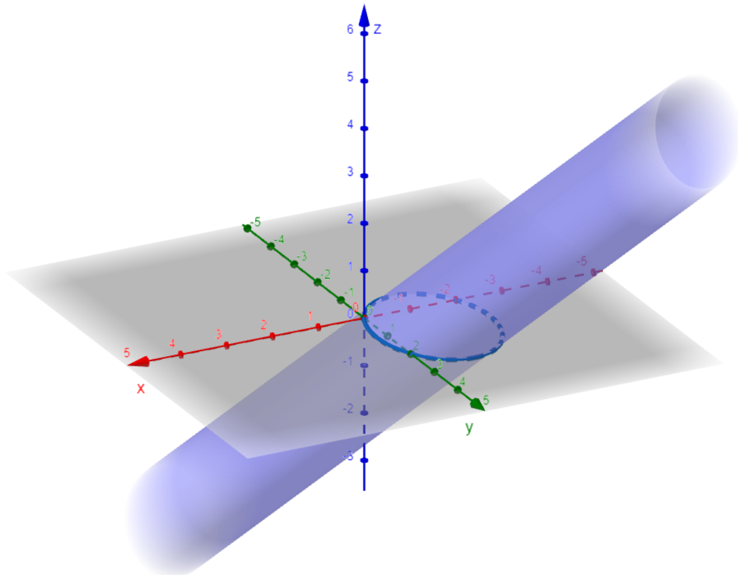
$$6(x'-1)^2 + 3(y')^2 - 6 = 0.$$

Urmează o translație de repere $\mathcal{R}' \to \mathcal{R}'' = \{O'; \bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'\}$: $\begin{cases} x' &= x'' + 1, \\ y' &= y'', \\ z' &= z''. \end{cases}$

Ecuația cuadricei în raport cu $\mathcal{R}''$ este

$$(x'')^2 + \frac{(y'')^2}{(\sqrt{2})^2} = 1.$$

Observăm că generatoarele cilindrului eliptic au direcția $\bar{k}'$. Alegem originea reperului canonic $O'\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)_{\mathcal{R}}$.
Determinați ecuațiile axelor și planelor reperului canonic.



$$(\Gamma)\ x^2 + y^2 + 4z^2 + 2xy + 4xz + 4yz - 6z + 1 = 0. \tag{4.8}$$

Obținem $\delta = J = \Delta = 0$, $I = 6$, $p(\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda$, deci $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, $K \neq 0$.
Rezultă că Γ este un cilindru parabolic.
Subspațiul propriu corespunzător valorii proprii 6 este $U(6) = \left\{\alpha\bar{i} + \alpha\bar{j} + 2\alpha\bar{k}, \mid \alpha \in \mathbb{R}\right\}$.
Fie $\bar{i}' = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}\right) \in U(6)$. Analog $U(0) = \{-\alpha - 2\beta, \alpha, \beta \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.
Fie $\bar{j}' = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(2\bar{i} - \bar{k}\right) \in U(0)$ si $\bar{k}' = \frac{\bar{i}' \times \bar{j}'}{\|\bar{i}' \times \bar{j}'\|} = \frac{1}{\sqrt{30}}\left(\bar{i} - 5\bar{j} + 2\bar{k}\right) \in U(0)$.
Schimbarea de repere $\mathcal{R} \to \mathcal{R}' = \left\{O; \bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'\right\}$ determină schimbarea de coordonate

$$\begin{cases} x &= \frac{1}{\sqrt{6}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y' + \frac{1}{\sqrt{30}}z', \\ y &= \frac{1}{\sqrt{6}}x' - \frac{5}{\sqrt{30}}z', \\ z &= \frac{1}{\sqrt{6}}x' - \frac{1}{\sqrt{5}}y' + \frac{2}{\sqrt{30}}z'. \end{cases}$$

Ecuația (4.8) devine

$$6(x')^2 - \frac{12}{\sqrt{6}}x' + \frac{6}{\sqrt{5}}y' - \frac{12}{\sqrt{30}}z' + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$6\left(x' - \frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 + \frac{6}{\sqrt{5}}y' - \frac{12}{\sqrt{30}}z' = 0. \tag{4.9}$$

Considerăm acum translația de repere $\mathcal{R}' \to \mathcal{R}'' = \left\{O'; \bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'\right\}$, cu $O'\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, 0, 0\right)_{\mathcal{R}'}$: $\begin{cases} x' &= x'' + \frac{1}{\sqrt{6}}, \\ y' &= y'', \\ z' &= z''. \end{cases}$

In raport cu $\mathcal{R}''$ ecuația (4.9) se scrie

$$(x'')^2 + \frac{6}{\sqrt{5}}y'' - \frac{12}{\sqrt{30}}z'' = 0.$$

Rotim reperul $\mathcal{R}''$ în jurul lui $\bar{i}'$ cu unghiul orientat θ:

$$\begin{cases} x'' &= x''', \\ y'' &= y''' \cos\theta - z''' \sin\theta, \\ z'' &= y''' \sin\theta + z''' \cos\theta. \end{cases}$$

În raport cu reperul $\mathcal{R}''' = \{O'; \bar{i}'', \bar{j}'', \bar{k}''\}$ obținut prin rotirea lui $\mathcal{R}''$, ecuația cuadricei devine

$$(x'')^2 + \left(\frac{6}{\sqrt{5}}\cos\theta - \frac{12}{\sqrt{30}}\sin\theta\right) y''' - \left(\frac{6}{\sqrt{5}}\sin\theta + \frac{12}{\sqrt{30}}\cos\theta\right) z''' = 0. \tag{4.10}$$

Alegem θ astfel încât termenul în z''' să dispară, deci

$$\frac{6}{\sqrt{5}}\sin\theta + \frac{12}{\sqrt{30}}\cos\theta = 0 \Rightarrow \tan\theta = -\frac{2}{\sqrt{6}} \Rightarrow$$

$$\sin\theta = \frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} = -\frac{\sqrt{10}}{5}, \quad \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} = \frac{\sqrt{15}}{5}.$$

Înlocuind aceste rezultate în (4.10), ecuația lui Γ devine

$$(x''')^2 + 2\sqrt{3}y''' = 0.$$

Originea reperului canonic este $O'\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)_{\mathcal{R}}$ iar vectorii directori ai axelor reperului canonic sunt

$$\begin{cases} \bar{i}'' &= \bar{i}', \\ \bar{j}'' &= \cos\theta \bar{j}' + \sin\theta \bar{k}', \\ \bar{k}'' &= -\sin\theta \bar{j}' + \cos\theta \bar{k}'. \end{cases}$$

Astfel putem scrie ecuațiile axelor și planelor reperului canonic în raport cu reperul inițial.