Seminar 6

Relații de echivalență ; partiții
mulțime factor

relație de echivalență $\overset{def}{=}$ relație binară pe X
pe mulț. X
care este :
1) reflexivă
2) simetrică
3) tranzitivă

„submulțime a lui $X \cdot X$ $= \{ (a, b) \mid a \in X, b \in X \}$

Notație $(a, b) \in \rho \iff a \, \rho \, b$

1) reflexiva $\iff$ $a \, \rho \, a \quad \forall a \in X$

2) simetrică $\iff$ Dacă $a \, \rho \, b \Rightarrow b \, \rho \, a$

3) tranzitivă $\iff$ $\forall a, b, c$ a.î.

$$\left.\begin{matrix} a \, \rho \, b \\ b \, \rho \, c \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \, \rho \, c$$

Exerciții

Definim pe $\mathbb{R}$ urm. relații binare

a) $x \rho_1 y \iff x - y \in \mathbb{N}$

b) $x \rho_2 y \iff |x-y| < 2$

c) $x \rho_3 y \iff x + y \in \mathbb{Z}$

d) $x \rho_4 y \iff x - y \in \mathbb{Z}$

Verif dacă sunt rel. de echiv

a)

$x \rho_1 y \iff x - y \in \mathbb{N}$

1) $x - x = 0 \in \mathbb{N} \Rightarrow x \rho_1 x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \rho_1$ reflexivă

2) $3 \rho_1 2 \quad (3-2 = 1 \in \mathbb{N})$

dar $2 \not\rho_1 3 \quad (2-3 = 1 \notin \mathbb{N})$ $\Bigg\} \Rightarrow \rho_1$ nu e simetrică

3) Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ a.î. $a \rho_1 b$ și $b \rho_1 c$

$(a-b) \in \mathbb{N}$ și $(b-c) \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow a - b + b - c = a - c \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow a \rho_1 c \Rightarrow \rho_1$ tranzitivă

b) $x \rho_2 y \iff |x-y| < 2$

1) $|x-x| = 0 < 2 \Rightarrow x \rho_2 x \Rightarrow \rho$ reflexivă

2) Fie $x, y \in \mathbb{R}$ a.î. $x \rho_2 y \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow |x-y| < 2 \\ |x-y| = |y-x| \end{array}\right\} \Rightarrow |y-x| < 2 \Rightarrow y \rho_2 x$$

$\Rightarrow \rho_2$ simetrică

3)
$$\left.\begin{array}{l} 1 \rho_2 2 \quad (\text{deoarece } |1-2| < 2) \\ 2 \rho_2 3 \quad (\text{deoarece } |2-3| < 2) \\ 1 \not\rho_2 3 \quad (\text{deoarece } |1-3| = 2) \end{array}\right\} \Rightarrow \rho_2 \text{ nu e tranzitivă}$$

c) $x \rho_3 y \iff x + y \in \mathbb{Z}$

1) $\frac{1}{3} \not\rho_3 \frac{1}{3}$ (deoarece $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \notin \mathbb{Z}$) $\Rightarrow \rho_3$ nu e reflexivă

2) Fie a, b

$a \rho_3 b \Rightarrow a + b \in \mathbb{Z} \Rightarrow b + a \in \mathbb{Z} \Rightarrow b \rho_3 a$

$\Rightarrow \rho_3$ simetrică

3) Fie a, b, c

$\frac{1}{3} \rho_3 \frac{2}{3} \quad \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{3}{3} = 1 \in \mathbb{Z}\right)$

$\frac{2}{3} \rho_3 \frac{4}{3} \quad \left(\frac{2}{3} + \frac{4}{3} = \frac{6}{3} = 2 \in \mathbb{Z}\right)$

$\frac{1}{3} \not\rho_3 \frac{4}{3} \quad \left(\frac{1}{3} + \frac{4}{3} = \frac{5}{3} \notin \mathbb{Z}\right)$

$\Rightarrow \rho_3$ nu e tranzitivă

d) $x \rho_n y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$

1) $x - x = 0 \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \rho_n x \Rightarrow \rho_n$ reflex.

2) Fie x, y

$x \rho_n y \Rightarrow x - y \in \mathbb{Z} \Rightarrow y - x \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow y \rho_n x \Rightarrow \rho_n$ simetrică

3) Fie a, b, c a.î. $a \rho_n b$ și $b \rho_n c$

$a - b \in \mathbb{Z}$

$b - c \in \mathbb{Z}$

ρ relație de echiv pe X $\rightsquigarrow$ Clasa de echivalența a unui element $x \in X$ o notăm $[x]$ sau $\hat{x}$ sau $\tilde{x}$

$$\boxed{\begin{array}{l} \hat{x} = \hat{y} \text{ sau } \hat{x} \cap \hat{y} = \phi \\ \hat{x} = \{ z \in X \mid x \rho z \} \end{array}}$$

Obs O clasă de echiv repr. o mulțime

$([x])_{x \in S} \rightarrow$ repr. o partiție a lui X

S.C.R.

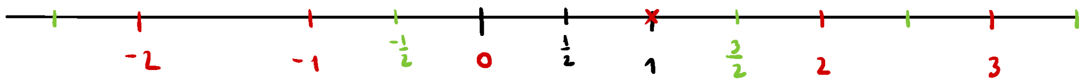
(sistem complet de reprezentanți pt. rel. de echiv)

⟶ Mulțime factor (via rel. de echiv ρ)

Notație $X/_{\rho} = \{ [x] \mid x \in \underset{\text{S.C.R.}}{S} \}$

Exemplu

$x \,\rho_n\, y \iff x - y \in \mathbb{Z}$



$\hat{1} = \{ x \in \mathbb{R} \mid 1 - x \in \mathbb{Z} \} = \mathbb{Z}$

$\parallel$

$(\hat{0} = \hat{2} = \widehat{2024})$

$\hat{\frac{1}{2}} = \{ \frac{1}{2} - k \mid k \in \mathbb{Z}$

$x_0 \in \mathbb{R}, \quad \hat{x_0} = \{ x_0 - k \mid k \in \mathbb{Z} \}$

Căutăm S, o submulțime a lui $\mathbb{R}$, un S.C.R.

(1) $(\forall)\, x \in \mathbb{R} \quad \exists\, s \in S_0$ a.î. $x \,\rho_n\, s$)

2) $\forall\, s_1 \neq s_2 \in S \quad s_1 \not\rho_n\, s_2$)

1) $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad x = [x] + \{x\}$

$\Rightarrow x - \underbrace{\{x\}}_{\in [0,1)} = [x] \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow x \,\rho_n\, \{x\}$

$\Rightarrow \{x\} \in S$

2) Fie $u, v \in S$ a.î. $u \, \rho_n \, v \Rightarrow u - v \in \mathbb{Z}$

$$\left.\begin{array}{l} 0 \le u < 1 \\ -1 < -v \le 0 \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -1 < u - v < 1 \\ u - v \in \mathbb{Z} \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} u - v = 0 \\ u = v \end{array}$$

Din (1) ^ (2) $\Rightarrow$ $[0, 1)$ este un S.C.R.

$$\mathbb{R}/\rho_n = \{ \hat{x} \mid x \in [0, 1) \}$$