Numele şi Prenumele.. Grupa.......................

EXAMEN LA CALCUL DIFERENŢIAL ŞI INTEGRAL-NR. 1
31.01.2025

Oficiu: 1 punct

(2 puncte) **1.** Studiaţi convergenţa seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2025^n}{x^n \sqrt[3]{n+1}\sqrt[5]{n^2+31}},$$

în funcţie de valorile parametrului $x \in (0, \infty)$.

2. Fie funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^{11}y}{\sqrt{x^{20}+y^4}} & ;\ \text{dacă } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ;\ \text{dacă } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(0,5 puncte) *a)* Studiaţi continuitatea funcţiei f.

(1 punct) *b)* Determinaţi $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ şi $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

(0,5 puncte) *c)* Studiaţi diferenţiabilitatea funcţiei f.

3. Fie $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ o funcţie diferenţiabilă şi $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y,z) = \varphi\left(xyz, x^2z, y^2z+2\right).$$

Arătaţi că:

(0,5 puncte) *a)* f este diferenţiabilă.

(1,5 puncte) *b)* $x \cdot \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) + y \cdot \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) - 2z \cdot \dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 0\ \forall\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

(1 punct) **4.** Fie $f_n, f : [1, 31] \to \mathbb{R}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ astfel încât şirul de funcţii $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniform către funcţia f şi f_n este continuă pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Arătaţi că

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^{31} f_n(x)e^{x^{2025}}dx = \int_1^{31} f(x)e^{x^{2025}}dx.$$

(2 puncte) **5.** Determinaţi

$$\iint_A y\,dx\,dy,$$

unde $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq y^2+2,\ x \leq 4-y^2,\ y \leq x-2\}$.

Numele şi Prenumele.. Grupa......................

EXAMEN LA CALCUL DIFERENŢIAL ŞI INTEGRAL-NR. 2

31.01.2025

Oficiu: 1 punct

(2 puncte) **1.** Studiaţi convergenţa seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2025^n}{x^n \sqrt[3]{n+1}\sqrt[5]{n^4+31}},$$

în funcţie de valorile parametrului $x \in (0, \infty)$.

2. Fie funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^7}{\sqrt{x^{16}+y^{12}}} & ; \text{ dacă } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; \text{ dacă } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(0,5 puncte) *a)* Studiaţi continuitatea funcţiei f.

(1 punct) *b)* Determinaţi $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ şi $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

(0,5 puncte) *c)* Studiaţi diferenţiabilitatea funcţiei f.

3. Fie $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ o funcţie diferenţiabilă şi $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y,z) = \varphi\left(x^2+y^2, xy+z, 2e^{xy+z}\right).$$

Arătaţi că:

(0,5 puncte) *a)* f este diferenţiabilă.

(1,5 puncte) *b)* $y \cdot \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) - x \cdot \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) + \left(x^2-y^2\right) \cdot \dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 0 \ \forall\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

(1 punct) **4.** Fie $f_n, f : [1,31] \to \mathbb{R}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ astfel încât şirul de funcţii $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniform către funcţia f şi f_n este continuă pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Arătaţi că

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^{31} f_n(x)e^{-x^{2025}}dx = \int_1^{31} f(x)e^{-x^{2025}}dx.$$

(2 puncte) **5.** Determinaţi

$$\iint_A y\,dx\,dy,$$

unde $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq y^2+2,\ x \leq 4-y^2,\ y \leq 4-x\right\}$.