Logica de ordin I

1. Semantică

<u>Ex 1.1</u>

Pentru orice φ, ψ formule și x variabile

(i) $\mathcal{A} \models (\neg\varphi)[e] \iff \mathcal{A} \not\models \varphi[e]$

$\mathcal{A} \models (\neg\varphi)[e] \iff \neg\varphi^{\mathcal{A}}(e) = 1 \iff \varphi^{\mathcal{A}}(e) = 0 \iff$

$\iff \mathcal{A} \not\models \varphi[e]$. $\square$

(ii) $\mathcal{A} \models \varphi \to \psi[e] \iff \mathcal{A} \models \varphi[e] \Rightarrow \mathcal{A} \models \psi[e]$

$\iff \mathcal{A} \not\models \varphi[e]$ sau $\mathcal{A} \models \psi[e]$

$\mathcal{A} \models (\varphi \to \psi)[e] \iff$

$\iff (\varphi \to \psi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 \iff (\varphi^{\mathcal{A}}(e) = 0$ sau $\psi^{\mathcal{A}}(e) = 1)$

$\iff (\mathcal{A} \not\models \varphi[e]$ sau $\mathcal{A} \models \psi[e])$ $\square$

(iii) $\mathcal{A} \models (\forall x \varphi)[e] \iff$ pentru orice $a \in A$

$\mathcal{A} \models \varphi[e_{x \mapsto a}]$

$\mathcal{A} \models (\forall x \varphi)[e] \iff (\forall x \varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 \iff$

$\iff (\varphi^{\mathcal{A}}(e_{x \mapsto a}) = 1 \quad \forall a \in A) \iff$

$\iff (\mathcal{A} \models \varphi[e_{x \mapsto a}] \ \forall a \in A)$

~~Ex 2.~~

Ex 1.2

oricare formule φ, ψ, și orice variabile x, y

(51) $\neg\exists x\varphi \vDash\dashv \forall x\neg\varphi \Leftrightarrow$

$:\Leftrightarrow (\mathcal{A} \vDash (\neg\exists x\varphi)[e] \Leftrightarrow \mathcal{A} \vDash (\forall x\neg\varphi)[e])$

$\mathcal{A} \vDash (\neg\exists x\varphi)[e] \Leftrightarrow (\neg\exists x\varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\exists x\varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ orice $a \in A$ $\varphi^{\mathcal{A}}(e_{x\mapsto a}) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ orice $a \in A$ $\neg\varphi^{\mathcal{A}}(e_{x\mapsto a}) = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\forall x\neg\varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 \Leftrightarrow \mathcal{A} \vDash (\forall x\neg\varphi)[e]$

---

(52) $\neg\forall x\varphi \vDash\dashv \exists x\neg\varphi$

asemănător

(53) $\forall x(\varphi\wedge\psi) \vDash\dashv \forall x\varphi \wedge \forall x\psi \Leftrightarrow$

-alegem $\forall$ $\mathcal{L}$-structura $\mathcal{A}$ și orice evaluare $e: V \to A$.

$\Leftrightarrow (A \vDash (\forall x(\varphi\wedge\psi))[e] \Leftrightarrow A \vDash (\forall x\varphi \wedge \forall x\psi)[e])$

$A \vDash (\forall x(\varphi\wedge\psi)) \Leftrightarrow (\forall x(\varphi\wedge\psi))^{A}(e) = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ oricare $a \in A$ $(\varphi \wedge \psi)^{A}(e_{x \to a}) = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ oricare $a \in A$ $\varphi^{A}(e_{x \to a}) \wedge \psi^{A}(e_{x \to a}) = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\forall x\, \varphi)^{A}(e) \wedge (\forall x\, \psi)^{A}(e) = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A \vDash ((\forall x\, \varphi)[e] \wedge (\forall x\, \psi)[e])$ $\square$

– se putea scrie mai bine, este în seminarul 5

<u>Ex 1.3</u>

$\forall$ $\mathcal{L}$-structura A și $\forall e_1, e_2 : V \to A$ și pentru orice termen t,

Dacă
$e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice $v \in Var(t)$
atunci $t^{A}(e_1) = t^{A}(e_2)$

<u>Dem</u> Prin inducție pe formule

1. t e variabilă v

$Var(t) = \{v\}$

$e_1(v) = e_2(v)$ din Ip.

~~$t^{A}(e_1) = t^{A}(e_2)$~~

$t^{A}(e_1) = v^{A}(e_1) = e_1(v) = e_2(v) = v^{A}(e_2) = t^{A}(e_2)$

2. t e o constantă c

$Var\ t = \emptyset$

$t^{\mathcal{A}}(e_1) = c^{\mathcal{A}} = t^{\mathcal{A}}(e_2)$

Pas inductiv :

presupunem

$t = f\ t_1 \dots t_n$

$t^{\mathcal{A}}(e) = f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}(e), t_2^{\mathcal{A}}(e), \dots t_n^{\mathcal{A}}(e))$

- unde t_i, $i = \overline{1,n}$ au proprietatea

$t_i^{\mathcal{A}}(e_1) = t_i^{\mathcal{A}}(e_2)$

$t^{\mathcal{A}}(e_1) = f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}(e_1), t_2^{\mathcal{A}}(e_1), \dots t_n^{\mathcal{A}}(e_1))$

$= f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}(e_2), t_2^{\mathcal{A}}(e_2), \dots t_n^{\mathcal{A}}(e_2)) =$

$= t^{\mathcal{A}}(e_2)$ $\square$

---

2. Forme normale

Ex 2.1 Teorema de formă normală prenex

orice $\varphi \in Form_{\mathcal{L}}$, există φ^* în formă normală prenex

a.î. $\varphi \vDash\!\dashv \varphi^*$ și $FV(\varphi) = FV(\varphi^*)$

Dem: prin inducție pe formule

Caz de bază

φ formulă atomică

$\varphi := R t_1 \dots t_m$, t_i termeni

φ ~~nu conț~~ este liberă de cuantificatori

deci $\varphi^* := \varphi$.

Pas inductiv

Presupunem că ψ, χ respectă proprietatea.

1) $\varphi = \neg\psi$

din ipoteză $\exists\ \theta$ liber de cuantificatori a.î.

$\psi \vDash\!\!\!\dashv \psi^* = Q_1 x_1 \dots Q_n x_n\, \theta$

– când avem un șir de cuantificatori, negația se propagă

$\neg(\forall x\, \tau) \vDash\!\!\!\dashv \exists x\, \neg\tau$ P 2.24 (52)

$\neg(\exists x\, \tau) \vDash\!\!\!\dashv \forall x\, \neg\tau$ P 2.24 (51)

Deci

$\varphi \vDash\!\!\!\dashv \neg\psi^* = \overline{Q_1} x_1 \dots \overline{Q_n} x_n\, \neg\theta = \varphi^*$ FNP.

unde $\overline{Q_i} = \begin{cases} \forall, & Q_i = \exists \\ \exists, & Q_i = \forall \end{cases}$

$FV(\varphi) = \underbrace{F(\psi) = F(\psi^*)}_{\text{din ipoteză}} = F(\varphi^*)$

2) $\varphi = \psi \to \chi$

din ip $\exists\ \theta, \theta'$ libere de cuantificatori a.î.

$$\psi \models\!\mid \psi^* = Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n \theta$$

$$\chi \models\!\mid \chi^* = Q_1' x_1' \ldots Q_m' x_m' \theta'$$

$$FV(\psi) = FV(\psi^*)$$

$$FV(\chi) = FV(\chi^*)$$

– din substituție cu formule echivalente

$$(\psi \to \chi) \models\!\mid (\psi^* \to \chi^*)$$

$$\varphi \models\!\mid (\psi^* \to \chi^*) =$$

$$= (Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n \theta \to Q_1' x_1' \ldots Q_m' x_m' \theta') \models\!\mid$$

Din P.2.30 71–74, putem aduce cuantificatorii în față a.î.

$$\models\!\mid Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n Q_1' x_1' \ldots Q_m' x_m' (\theta \to \theta') \quad (*)$$

θ nu are cuantificatori
θ' nu are cuantificatori $\Bigg\} \Rightarrow \theta \to \theta'$ liberă de cuantificatori

$(*)$ FNP. $\quad \theta'' := \theta \to \theta'$

$$\varphi^* := Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n Q_1' x_1' \ldots Q_m' x_m' \theta'' \quad \text{FNP}$$

$$\varphi \models\!\mid \varphi^*$$

$$FV(\varphi^*) = FV(\psi^*) \cup FV(\chi^*) \overset{\text{Ip.}}{=} FV(\psi) \cup FV(\chi)$$

$$= FV(\varphi)$$

3) $\varphi = \forall x \psi$

$\psi \vDash\!\dashv \psi^* = Q_1 x_1 \dots Q_n x_n \theta$

– fie $\psi^{*'}$ varianta x-liberă a lui ψ^*

$\psi^{*'} \vDash\!\dashv \psi^*$

$\varphi = \forall x \psi \vDash\!\dashv \forall x \psi^{*'} = \underbrace{\forall x Q_1 x_1 \dots Q_n x_n \theta}_{=: \varphi^*}$ (FNP)

$FV(\varphi) = FV(\psi) \overset{IP}{=} FV(\psi^*) = FV(\varphi^*)$

1) 2) 3) luată $\Big\}$ $\Rightarrow$ orice $\varphi \in Form_{\mathcal{L}}$ există φ^* FNP

a.î. $\varphi \vDash\!\dashv \varphi^*$ și $FV(\varphi) = FV(\varphi^*)$

$\square$.

---

3. Teorii

3.1 Fie Γ o mulțime de enunțuri.

(i) $Mod(\Gamma) = Mod(Th(\Gamma))$

(ii) $Th(\Gamma)$ cea mai mică teorie T a.î. $\Gamma \subseteq T$.

Dem

(i) $Th(\Gamma) = \{ \varphi \in Form_{\mathcal{L}} \mid Mod(\Gamma) \subseteq Mod(\varphi) \}$

$Mod(Th(\Gamma)) = \bigcap_{\varphi \in Th(\Gamma)} Mod(\varphi)$

(modelele trebuie să satisfacă fiecare formulă)

"$\supseteq$" $Mod(\Gamma) \subseteq Mod\ \varphi \ \forall \varphi \in Th(\Gamma)$

deci $Mod(\Gamma) \subseteq \bigcap_{\varphi \in Th(\Gamma)} Mod(\varphi) = Mod(Th(\Gamma))$

"$\subseteq$"

$\forall \varphi \in \Gamma \quad Mod(\Gamma) \subseteq Mod(\varphi) \Leftrightarrow \Gamma \vDash \varphi$

- deci $\Gamma \subseteq Th(\Gamma) \Rightarrow$

$\Rightarrow Mod(Th(\Gamma)) \subseteq Mod(\Gamma)$ $\square$.

"$\supseteq$", "$\subseteq$" $\Rightarrow Mod(Th(\Gamma)) = Mod(\Gamma)$

(iii) $T = Th(\Gamma)$ teorie și $\Gamma \subseteq T$.

PpRA $\exists T'$ teorie $\Gamma \subseteq T'$ as $|T'| < |T|$.

- fie $\varphi \in T \Rightarrow \Gamma \vDash \varphi \Rightarrow$

$\Rightarrow Mod(\Gamma) \subseteq Mod\, \varphi$

$\Gamma \subseteq T' \Rightarrow Mod(T') \subseteq Mod(\Gamma)$ $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow Mod(T') \subseteq Mod\, \varphi \Rightarrow$

$\Rightarrow T' \vDash \varphi$

dar T' teorie $\Big\} \overset{2.73}{\Rightarrow} \varphi \in T'$

deci $\forall \varphi \in T \Rightarrow \varphi \in T' \Rightarrow |T'| \geq |T|$

Contradicție

Deci T e cea mai mică teorie care îl conține pe Γ.

Ex 3.2

$$\exists^{\geq n} = \exists x_1 \ldots \exists x_n \Big(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} \neg (x_i = x_j) \Big)$$

$\forall$ $\mathcal{L}$-structura $\mathcal{A}$ și $\forall n \geq 2$

$\mathcal{A} \vDash \exists^{\geq n} \iff$ A are cel puțin n elemente

„$\Rightarrow$" ~~not. $f(x_1, \ldots x_n) = \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} \neg (x_i = x_j)$~~

$$\mathcal{A} \vDash \Big(\exists x_1 \ldots \exists x_n \big(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} \neg (x_i = x_j) \big) \Big) [e] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Big(\exists x_1 \ldots \exists x_n \big(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} \neg (x_i = x_j) \big) \Big)^{\mathcal{A}} (e) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists a_i \quad i = \overline{1,n} \quad \text{a.î.} \quad \Big(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} \neg (x_i = x_j) \Big)^{\mathcal{A}} \big(e_{x_i \mapsto a_i} \big) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \big(\neg (x_i = x_j) \big)^{\mathcal{A}} \big(e_{x_i \to a_i} \big) = 1$$

Adică $a_i \neq a_j$, ~~$1 \leq i < j \leq n$~~.

Deci avem n elemente distincte $a_1, \ldots a_n \Rightarrow$

$\Rightarrow |A| \geq n$.

„$\Leftarrow$" $|A| \geq n \Rightarrow A \vDash \exists^{\geq n}$

$|A| \geq n \Rightarrow$ există $a_1, \ldots a_n \in A$ distincte două câte două

$- \quad e_{x_i \to a_i}(x_i) = a_i \qquad i = \overline{1,n}$

$$(\neg(x_i = x_j))^{\mathcal{A}}(e_{x_i \to a_i}) = 1$$

deci $\left(\bigwedge_{1 \le i < j \le n} \neg(x_i = x_j)\right)^{\mathcal{A}}(e_{x_i \to a_i}) = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathcal{A} \vDash \exists^{\geq n}$

$\square$.

---

4. T. de compacitate

Ex 4.1

$\Gamma \subseteq Sent_{\mathcal{L}}$ cu proprietatea

(*) $\forall n \in \mathbb{N}$, Γ are un model finit de cardinal $\geq n$.

Atunci

(1) Γ are model infinit

(2) Clasa modelelor finite ale lui Γ nu e axiomat.

(3) Clasa modelelor finite a lui Γ e axiomatizabilă, dar nu finit axiomatizabilă.

Dem

(1) rezultă din (*) și P. 2.87

(2) $K_{fin} = \{ \mathcal{A} \models \Gamma \mid |A| < \infty \}$ *

Pp K_{fin} e axiomatizabilă

$\exists\ \Gamma' \subseteq Sent_{\mathcal{L}}$ a.î.

$K_{fin} = Mod(\Gamma')$

- din ~~def~~ (*), putem alege $\Gamma' \supseteq \Gamma$

~~(Γ) deja respectă condiția~~

- fie $\Delta := \Gamma' \cup \{ \exists^{\geq n} \mid n \geq 1 \}$

demonstrăm că Δ este satisfiabil prin teorema de compacitate.

fie $\Delta_0 \subseteq \Gamma' \cup \{ E^{\geq n_1}, \dots, E^{\geq n_k} \}$

~~- fie $\mathcal{A}_0$ $\mathcal{L}$-structură finită~~

- fie ~~$|A|$~~ $n = max\{n_1, \dots n_k\}$

din (*) $\exists\ \mathcal{B} \models \Gamma$ model finit cu $|B| \geq n$.

$|B| \geq n \geq n_i \Rightarrow \mathcal{B} \models \exists^{\geq n_i}\ \forall i$.

$\mathcal{B} \models \Gamma \Rightarrow \mathcal{B} \in K_{fin} \Rightarrow \mathcal{B} \models \Gamma'$

$\mathcal{B}$ finit

$\Rightarrow \mathcal{B} \models \Delta_0$

Prin compacitate $\exists\ \mathcal{M}$ model $\mathcal{M} \models \Gamma' \cup \{E^{\geq n_1} \dots E^{\geq n_k}\}$

$\mathcal{M} \models \{\exists^{\geq n_1} \dots \exists^{\geq n_k}\} \Rightarrow \mathcal{M}$ infinită

$\mathcal{M} \models \Gamma' \Rightarrow \mathcal{M} \in Mod(\Gamma') = K_{fin} \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathcal{M}$ finită.

Contradicție $\Rightarrow K_{fin}$ nu e axiomatizabilă.

(3) $K_{inf} = \{ \mathcal{A} \models \Gamma \mid |A| = \infty \}$

$K_{inf} = Mod(\Gamma \cup \{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\})$

– $\mathcal{L}$-structuri care modelează și Γ și sunt și infinite.

K_{inf} e axiomatizată de toate formulele din Γ și $\exists^{\geq n}$.

Pp există $\Gamma'' = \{\varphi_1, \dots \varphi_n\}$ care să axiomatizeze K_{inf}, $n \in \mathbb{N}$.

$K_{inf} = Mod(\Gamma) = Mod(\varphi)$

$\varphi := \varphi_1 \wedge \varphi_2 \dots \varphi_n$

– fie o $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ a.î. $\mathcal{A} \models \Gamma$.

$\mathcal{A}$ finită $\Leftrightarrow \mathcal{A} \in K_{inf} \Leftrightarrow \mathcal{A} \not\models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \neg\varphi$

deci K_{fin} este axiomatizabilă. Contradicție!

$\square$.