Construcții cu spații vectoriale

1) Produsul direct

Fie V_1, V_2 două K-spații vectoriale. Pe mulțimea $V_1 \times V_2$ avem o structură naturală de K-spațiu vectorial:

„+": $(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$

„·" (înmulțirea cu scalari): $\underset{\underset{K}{\cap}}{\lambda} \cdot (a, b) = (\lambda a, \lambda b)$

(operațiile se fac pe componente)

Propoziție: Dacă V_1 și V_2 sunt finit generate $\Rightarrow$ $\Rightarrow \dim(V_1 \times V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$

Dem.:

Fie $n = \dim V_1$ și $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ bază în V_1

$m = \dim V_2$ și $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ bază în V_2

$\Rightarrow \{(e_1, 0), \dots (e_n, 0)\} \cup \{(0, f_1), \dots, (0, f_m)\}$ este o bază pentru $V_1 \times V_2$

$\Rightarrow \dim V_1 \times V_2 = n + m$

2) Spațiul vectorial factor

Fie W un subspațiu vectorial în V.

Pe mulțimea V definim relația de congruență

modulo W $\quad x \sim y \mod W \iff x-y \in W$

Am arătat (sem. I) că $\sim$ este o relație de echivalență pe V, $\hat{x} = x+W$, $(\forall)\, x \in V$.

Mulțimea factor $\quad V/W \overset{\text{not.}}{:=} \{\hat{x} \mid x \in V\}$

- V/W este grup abelian cu operația $\hat{x}+\hat{y} := \widehat{x+y}$

Definim o înmulțire cu scalari pe V/W pentru $\lambda \in K$ și $\hat{x} \in V/W$:

$$\lambda \cdot \hat{x} := \widehat{\lambda x}$$

Operația „$\cdot$" este bine definită, adică nu depinde de reprezentanți.

$$x_1 \sim x_2 \mod W \Rightarrow \widehat{\lambda x_1} = \widehat{\lambda x_2}$$

$$\hat{x}_1 = \hat{x}_2$$

$$\Downarrow \text{def}$$

$$x_1 - x_2 \in W \xRightarrow[\text{al lui } V]{W \text{ subsp.}} \lambda(x_1-x_2) \in W \Rightarrow \lambda x_1 - \lambda x_2 \in W$$

Propoziție: V/W este un K-spațiu vectorial cu operațiile descrise mai sus, numit **spațiul vectorial factor / cât**.

Observație! Funcția $\pi : V \to V/W$, $x \longmapsto \hat{x}$ este **morfism** surjectiv de spații vectoriale cu nucleul $\operatorname{Ker} \pi = \{x \in V \mid \pi(x) = \hat{0}\}$

$\hat{x} = \hat{0}$

$x \sim 0 \bmod W$

$x \in W$

Teoremă: Dacă V este spațiu vectorial finit generat și W subspațiu vectorial în V, atunci $\dim V/W = \dim V - \dim W$.

Dem.:

Aplicăm teorema rang-defect pentru morfismul $\pi : V \to V/W \Rightarrow \dim V = \dim \underbrace{\operatorname{Ker}\pi}_{W} + \dim \underbrace{\operatorname{Im} f}_{V/W}$.

$\Rightarrow \dim V = \dim W + \dim V/W$ ⊠

Fie V_1, V_2 spații vectoriale în V.

$V_1 + V_2 = \{x + y \mid x \in V_1 \text{ și } y \in V_2\} = \langle V_1 \cup V_2 \rangle$ / subspații vectoriale în V

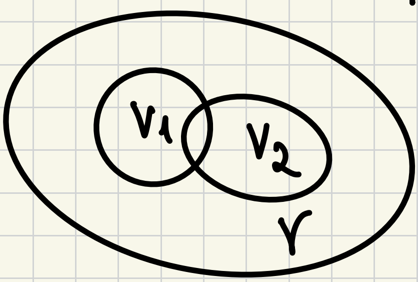
$V_1 \cap V_2$

Teorema Grassmann:

Presupunem că V_1, V_2 sunt finit generate. Atunci
$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$.

Dem.: Fie funcția $f : V_1 \times V_2 \to V_1 + V_2$

$(x, y) \longmapsto x - y$ ✓



$x - y = x + (-y)$

f este surjecție: Fie $z \in V_1+V_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (\exists)\, z_1 \in V_1$ și $z_2 \in V_2$ cu $z = z_1+z_2$

$\Rightarrow z = z_1+z_2 = z_1-(-z_2) = f((z_1,-z_2))$

$\Rightarrow z \in \mathrm{Im}\, f$

f aplicație liniară:

Fie $\lambda_1, \lambda_2 \in K$, $(x_1,y_1), (x_2,y_2) \in V_1 \times V_2$.

$$f(\lambda_1(x_1,y_1)+\lambda_2(x_2,y_2)) = f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2,\ \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) =$$

$$= \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 - \lambda_1 y_1 - \lambda_2 y_2 = \lambda_1(x_1-y_1)+\lambda_2(x_2-y_2)$$
$$= \lambda_1 \cdot f(x_1,y_1) + \lambda_2 \cdot f(x_2,y_2)$$

Ker f $= \{(x,y) \in V_1 \times V_2 \mid \underbrace{x-y=0}_{x=y}\} =$

$$= \{(x,x) \mid x \in V_1 \cap V_2\}$$

Funcția $g: V_1 \cap V_2 \longrightarrow \mathrm{Ker}\, f$, $x \longmapsto (x,x)$ este bijecție ✓ + aplicație liniară $\Rightarrow$

$\Rightarrow \dim \mathrm{Ker}\, f = \dim(V_1 \cap V_2)$

Din Teorema fundamentală de izomorfism la spații vectoriale, avem $V_1 \times V_2 / \mathrm{Ker}\, f \simeq \mathrm{Im}\, f$ izomorfism de spații vectoriale.

$$\overset{\text{dim.}}{\Longrightarrow} \dim \frac{V_1 \times V_2}{\operatorname{Ker} f} = \dim(V_1 \cap V_2)$$

$$\begin{aligned} &\| \\ &\dim(V_1 \times V_2) - \dim(\operatorname{Ker} f) \\ &\| \\ &\dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2) \quad \boxtimes \end{aligned}$$

Teorema fundamentală de izomorfism pentru spații vectoriale

Fie $f : V \to W$ o aplicație liniară. Atunci avem un izomorfism de spații vectoriale $\hat{f} : V/\operatorname{Ker} f \to \operatorname{Im} f$ dat prin $\hat{f}(\hat{x}) := f(x)$.

$$V/\operatorname{Ker} f \simeq \operatorname{Im} f$$

Dem.:

$f : V \to W$ aplicație liniară $\Rightarrow f$ morfism de grupuri

$\overset{\text{T.F.}}{\underset{\text{izo. grup}}{\Longrightarrow}} \hat{f} : V/\operatorname{Ker} f \to \operatorname{Im} f$ este izomorfism de grupuri

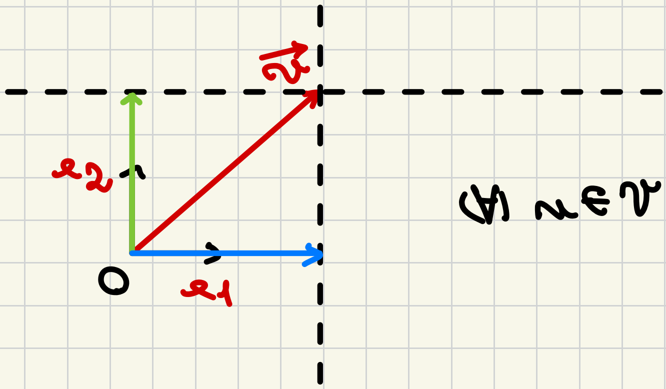
Mai rămâne de verificat că $\hat{f}(\lambda \hat{x}) = \lambda \hat{f}(\hat{x})$, $(\forall)\ \lambda \in K$, $(\forall)\ \hat{x} \in V/\operatorname{Ker} f$

$$\hat{f}(\lambda \cdot \hat{x}) = \hat{f}(\widehat{\lambda x}) = f(\lambda x) \underset{\text{liniară}}{\overset{f}{=}} \lambda \cdot f(x) = \lambda \hat{f}(\hat{x}) \quad \boxtimes$$

Determinanți

Fie $A \in \mathcal{M}_n(K) \rightsquigarrow \det A \in K$

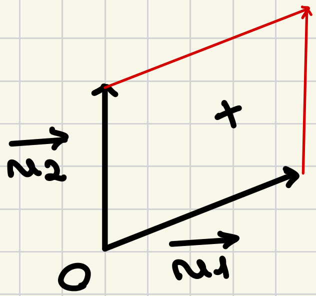
$n=2$ $\quad V$ = spațiul vectorial al vectorilor din plan (2 dimensional)



$(\forall)\ u \in V,\ (\exists)\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ (unici) cu

$$u = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$$

Aria (u_1, u_2) = aria cu semn a paralelogramului cu vârful în O și laturile $\vec{u_1}, \vec{u_2}$



$\text{aria}(u_2, u_1) = -\text{aria}(u_1, u_2)$

$\text{aria}(u, u) = 0,\ (\forall)\ u \in V$

$\text{aria}: V \times V \to \mathbb{R}$

① este liniară în fiecare argument

$$\text{aria}(\lambda_1 u_1' + \lambda_2 u_1'', u_2) = \lambda_1 \cdot \text{aria}(u_1', u_2) + \lambda_2 \cdot \text{aria}(u_1', u_2)$$

și

$$\text{aria}(u_1, \lambda_1 u_2' + \lambda_2 u_2'') = \lambda_1 \cdot \text{aria}(u_1, u_2') + \lambda_2 \cdot \text{aria}(u_1, u_2'')$$

② $\text{aria}(u, u) = 0,\ (\forall)\ u \in V$

③ $\text{aria}(\vec{e_1}, \vec{e_2}) = 1$

Exprimăm u_1, u_2 în baza $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$

$u_1 = a_{11}\vec{e_1} + a_{12}\vec{e_2}$

$u_2 = a_{21}\vec{e_1} + a_{22}\vec{e_2}$

$\text{aria}(u_1, u_2) = \text{aria}(a_{11}\vec{e_1} + a_{12}\vec{e_2}, u_2) =$

$= a_{11}\cdot \text{aria}(\vec{e_1}, u_2) + a_{12}\,\text{aria}(\vec{e_2}, u_2) =$

$= a_{11}\,(a_{21}\cdot \cancel{\text{aria}(\vec{e_1}, \vec{e_1})} + a_{22}\cdot \text{aria}(\vec{e_1}, \vec{e_2})) +$

$+ a_{12}(a_{21}\cdot \text{aria}(\vec{e_2}, \vec{e_1}) + a_{22}\cdot \cancel{\text{aria}(\vec{e_2}, \vec{e_2})}) =$

$= (a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21})\cdot \underbrace{\text{aria}(\vec{e_1}, \vec{e_2})}_{=1}$

$= a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21} = \det A$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow u_1 \\ \leftarrow u_2 \end{matrix}$$

În general, fie V un K-spațiu vectorial m-dimensional.

Ne interesează aplicațiile $f: \underbrace{V\times V\times \ldots \times V}_{m \text{ ori}} \to K$ cu

proprietățile:

1) f este liniară în fiecare argument

2) $f(u_1, u_2, \ldots, u_m) = 0$ ← f este aplicație alternată ↔ 2'

Dacă $(\exists)\ i \neq j$ cu $u_i = u_j$

Dacă fixăm o bază $\{e_1, \ldots, e_m\}$ pentru V și descompunem $u_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} e_j$ cu $a_{ij} \in K$

$$\Rightarrow f(v_1, v_2, \dots, v_m) = f\left(\sum_j a_{1j} e_j, \sum_j a_{2j} e_j, \dots, \sum_j a_{mj} e_j\right)$$

m^m termeni

$$= \sum_{1 \le j_1, \dots, j_m \le m} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{mj_m} f(e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_m}) =$$

(2') $f(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \dots, v_{\sigma(m)}) =$

$= \underbrace{\varepsilon(\sigma)}_{(-1)^{\text{nr. de inversiuni pentru } \sigma}} \cdot f(v_1, \dots, v_m) \quad (\forall)\ \sigma \in S_m$

$\varepsilon(\sigma)\ f(e_1, \dots, e_m)$

$\|$

$$= \sum_{\substack{1 \le j_1, \dots, j_m \le m \\ \text{distincți}}} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{mj_m} \boxed{f(e_{j_1}, \dots, e_{j_m})}$$

Deci permutare a mulțimii $\{1, 2, \dots, m\}$

$$\Rightarrow f(v_1, v_2, \dots, v_m) = \left(\sum_{\sigma \in S_m} \varepsilon(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{m\sigma(m)}\right) \cdot f(e_1, \dots, e_m)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & m \\ \sigma(1) & \dots & \sigma(m) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \dots & \dots & \\ a_{m1} & \dots & \dots & a_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \dots & m \\ \sigma(1) & \dots & \sigma(m) \end{pmatrix}$$

Def.: Pentru $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_m(K)$ definim determinantul său:

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_m} \varepsilon(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{m\sigma(m)}$$

1) $\det A = \det A^t$

2) Dacă A are o linie de zerouri $\Rightarrow \det A = 0$

3) Dacă în A înmulțim o linie cu $\lambda \in K \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Determinantul noii matrice este $\lambda \cdot \det A$

4) Dacă $L_i \leftrightarrow L_j$ ($i \neq j$) $\Rightarrow \det A' = -\det A$

schimbăm două linii

5) Dacă $L_i \leftarrow L_i + aL_j$ cu $i \neq j$ și $a \in K$ $\Rightarrow \det A' = \det A$

6) Proprietățile 1) $\rightarrow$ 5) au loc dacă facem aceleași transformări cu coloanele lui A