Curs 3

15 Oct 2024

1. Spațiu topologic
2. Mulțime deschisă / închisă / compactă, vecinătate
3. Punct interior / aderent / de acumulare / frontieră / izolat
4. Limita unui șir într-un sp. top.
5. Spațiu topologic separat (Hausdorff)
6. Distanța / metrică
7. Spațiu metric
8. Bilă deschisă / închisă
9. Adaptarea def. interiorului / aderenței / etc. în sp. metrice
10. Limita unui șir într-un sp. metric

Topologie

Def

Fie $X \neq \phi$. O mulțime $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ se numește **topologie** pe X dacă

a) $\phi, X \in \mathcal{T}$

b) $\forall D_1, D_2 \in \mathcal{T}$, avem $D_1 \cap D_2 \subset \mathcal{T}$

c) $\forall (D_i)_{i \in J} \subset \mathcal{T}$, avem $\bigcup_{i \in J} D_i \in \mathcal{T}$ $(J \neq \phi)$

Def Fie $X \neq 0$ și $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ o topologie pe X. Perechea $(X, \mathcal{T})$ s.n. **spațiu topologic**

ex 1

Fie $X \neq \phi$ și $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$. Perechea $(X, \mathcal{T})$ este spațiu topologic

ex 2

Fie $X \neq \phi$ și $\mathcal{T} = \{ \phi, X \}$. Perechea $(X, \mathcal{T})$ este spațiu topologic

ex 3

Fie $X = \mathbb{R}$ și $\mathcal{T} = \{ \phi, \mathbb{R} \} \cup \{ (-\infty, a) \mid a \in \mathbb{R} \}$

Perechea $(X, \mathcal{T})$ este spațiu topologic.

Justificare pt ex 3

a) $\emptyset, \mathbb{R} \in \mathcal{Z}$ (evident)

b) Fie $D_1, D_2 \in \mathcal{Z}$

Arătam că $D_1 \cap D_2 \in \mathcal{Z}$

Dacă $D_1 = \emptyset$ sau $D_2 = \emptyset$, atunci $D_1 \cap D_2 = \emptyset \in \mathcal{Z}$

Dacă $D_1 = \mathbb{R}$ sau $D_2 = \mathbb{R}$, atunci $D_1 \cap D_2 = D_1 \in \mathcal{Z}$

sau $D_1 \cap D_2 = D_2 \in \mathbb{R}$

Dacă $D_1 = (-\infty, a_1)$ și $D_2 = (-\infty, a_2)$ cu $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$

Atunci $D_1 \cap D_2 = (-\infty, \min\{a_1, a_2\}) \in \mathcal{Z}$

c) Fie $(D_i)_{i \in J} \subset \mathcal{Z}$. Arătăm că $\bigcup_{i \in J} D_i \in \mathcal{Z}$

Dacă $D_i = \emptyset$, atunci $\bigcup_{i \in J} D_i = \emptyset \in \mathcal{Z}$

Dacă $\exists\, i_0 \in J$ a.î. $D_{i_0} = \mathbb{R}$, atunci $\bigcup_{i \in J} D_i = \mathbb{R} \in \mathcal{Z}$

Fara a restrânge generalitatea, presupunem că

$D_i = (-\infty, a_i)$, $a_i \in \mathbb{R}$, $\forall\, i \in J$

Avem $\bigcup_{i \in J} D_i = (-\infty, \sup_{i \in J} a_i) \in \mathcal{Z}$

$\sup(0, 2) = 2$

$\sup(0, 2] = 2$

Deci $(\underset{\mathbb{R}}{\overset{\shortparallel}{X}}, \mathcal{Z})$ este spațiu topologic

Def

Fie (X, τ) un spațiu topologic

1) O mulțime $D \subset X$ s.n. mulțime deschisă dacă $D \in \tau$

2) O mulțime $F \subset X$ s.n. mulțime închisă dacă $X \setminus F \overset{not}{=} CF \in \tau$

3) O mulțime $K \subset X$ s.n. mulțime compactă dacă din orice acoperire cu mulțimi deschise a sa se poate extrage o subacoperire finită

(i.e. $\forall (D_i)_{i \in I} \subset \tau$ a.î. $K \subset \bigcup_{i \in I} D_i$, $\exists J \in I$, J finită a.î. $K \in \bigcup_{i \in J} D_i$)

Analiza topologică a unei mulțimi

Def

Fie (X, τ) un sp. top., $A \subset X$ și $x_0 \in X$.

Spunem că x_0 este:

1) punct interior al lui A dacă A este vecinătate a lui x_0

2) punct aderent (sau de aderență) al lui A dacă pentru orice vecinătate V al lui x_0, avem $V \cap A \neq \emptyset$

3) punct de acumulare al lui A dacă pentru orice vecinătate V al lui x_0, avem

$V \cap (A \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$

4) punct de frontieră al lui A dacă x_0 este punct aderent al lui și nu este punct interior al lui A

5) punct izolat al lui A dacă x_0 este punct aderent al lui A și nu este punct de acumulare al lui A

<u>Notații</u>

În contextul def. precedente, notăm:

1) $\mathring{A} = \{ x \in X \mid x_0$ punct interior al lui $A \}$

(interiorul lui A)

2) $\bar{A} = \{ x \in X \mid x_0$ punct aderent al lui $A \}$

(închiderea sau aderența lui A)

3) $A' = \{ x \in X \mid x_0$ punct de acumulare al lui $A \}$

(mulțimea punctelor de acumulare al lui A sau mulțimea derivată a lui A)

4) $Fr(A) = \partial A = \{ x \in X \mid x_0$ punct de frontieră al lui $A \}$

(frontiera lui A)

5) $Izo(A) = {}'A = \{ x \in X \mid x_0$ punct izolat al lui $A \}$

$= \bar{A} \setminus A'$ (mulțimea punctelor izolate ale lui A)

Notație

Fie (X, τ) un sp. top. și $x \in X$

$\mathcal{V} \overset{not}{=} \{ V \subset X \mid V$ vecinătate a lui $x \}$

Def

Fie (X, τ) un sp. top., $(x_n)_n \subset X$ și $x \in X$.

Spunem că x este limită a șirului $(x_n)_n$ în raport cu topologia τ și scriem $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$ sau $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\tau} x$ dacă $\forall\, V \in \mathcal{V}_x$, $\exists\, n_V \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall\, n \geq n_V$, avem $x_n \in V$

Obs Sintagma „în raport cu topologia τ" poate fi înlocuită cu sintagma „în sp. top (X, τ)"

exc

Fie $X \neq \emptyset$ și $\tau = \{ \emptyset, X \}$. Pentru orice $x_0 \in X$, avem $\mathcal{V}_{x_0} = \{ X \}$

Fie acum $x \in X$, $y \in X$ și $(x_n)_n \subset X$
$(x \neq y)$

Avem $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n \overset{\tau}{=} x$ și $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = y$

Obs În general, într-un sp. top. un șir poate avea mai multe limite.

Def

Fie $(X, \mathcal{T})$ un sp. top.

Spunem că $(X, \mathcal{T})$ este un spațiu top. separat (sau Hausdorff) dacă $\forall\, x, y \in X,\ x \neq y$, $\exists\, U \in \mathcal{V}_x,\ \exists\, V \in \mathcal{V}_y$ a.î. $U \cap V = \emptyset$

Propoziție În orice sp. top. separat, orice șir are o singură limită

Def

Fie $X \neq \emptyset$.

O funcție $d : X \times X \to \mathbb{R}$ s.n. distanță sau metrică pe X dacă

1) $d(x, y) \geq 0, \quad \forall\, x, y \in X$

2) $d(x, y) = 0 \iff x = y, \quad \forall\, x, y \in X$

3) $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall\, x, y \in X$

4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad \forall\, x, y, z \in X$

(inegalitatea triunghiului)

Def

Fie $X \neq \emptyset$ și $d : X \times X \to \mathbb{R}$ o metrică pe X

Perechea (X, d) s.n. spațiu metric.

Exemple de spaţii metrice

1) Fie $X \neq \emptyset$ şi $d : X \times X \to \mathbb{R}$

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

Perechea (X, d) este spaţiu metrică.

2) Fie $X = \mathbb{R}$ şi $d : X \times X \to \mathbb{R}$,

$$d(x, y) = |x - y|$$

Perechea (X, d) este spaţiu metrică.

3) Fie $n \in \mathbb{N}^*$, $X = \mathbb{R}^n$ şi $d_1 : X \times X \to \mathbb{R}$

$$d_1(\underset{(x_1, \dots, x_n)}{x}, \underset{(y_1, \dots, y_n)}{y}) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \dots + |x_n - y_n| = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

Perechea (X, d_1) este spaţiu metrică.

4) Fie $n \in \mathbb{N}^*$, $X = \mathbb{R}^n$ şi $d_2 : X \times X \to \mathbb{R}$

$$d_2(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Perechea (X, d_2) este spaţiu metrică.

5) Fie $n \in \mathbb{N}^*$, $X = \mathbb{R}^n$ şi $d_\infty : X \times X \to \mathbb{R}$,

$$d_\infty(x, y) = \max \{ |x_i - y_i| \mid i = \overline{1, n} \}$$

Perechea (X, d_∞) este spaţiu metrică.

Def

Fie (X, d) un sp. metric, $x \in X$ și $r > 0$.

1) $B(x, r) \overset{def}{=} \{ y \in X \mid d(x,y) < r \}$

(bilă deschisă de centru x și raza r)

2) $B[x, r] = \bar{B}(x, y) \overset{def}{=} \{ y \in X \mid d(x,y) \leq r \}$

(bilă închisă de centru x și raza r)

Teoremă

Fie (X, d) un sp. metric și

$\tau_d = \{\emptyset\} \cup \{ A \subset X \mid \forall x \in A, \exists r > 0 \text{ a.î. } B(x, r) \subset A \}$

Atunci (X, τ_d) este sp. top.

Demonstrație:

a) $\emptyset \in \tau_d$ (evident)

Fie $x \in X$

Pentru orice $r > 0$ avem $B(x, r) \subset X$

Deci $X \in \tau_d$

b) Fie $D_1 \in \tau_d$ și $D_2 \in \tau_d$

Arătam că $D_1 \cap D_2 \in \tau_d$

Dacă $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, atunci $D_1 \cap D_2 \in \tau_d$

Presupunem că $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$.

Fie $x \in D_1 \cap D_2$. Deci, $x \in D_1$ și $x \in D_2$

$x \in D_1 \in \mathcal{T}_d \Rightarrow \exists\, r_1 > 0$ a.î. $B(x, r_1) \subset D_1$

$x \in D_2 \in \mathcal{T}_d \Rightarrow \exists\, r_2 > 0$ a.î. $B(x, r_2) \subset D_2$

Alegem $r = \min\{r_1, r_2\}$

Avem $B(x, r) \subset B(x, r_1) \cap B(x, r_2) \subset D_1 \cap D_2$

Așadar, $D_1 \cap D_2 \in \mathcal{T}_d$

c) Fie $(D_i)_{i \in J} \subset \mathcal{T}_d$

Arătăm că $\bigcup_{i \in J} D_i \in \mathcal{T}_d$

Dacă $\bigcup_{i \in J} D_i = \emptyset$, atunci $\bigcup_{i \in J} D_i \in \mathcal{T}_d$

Pp. că $\bigcup_{i \in J} D_i \neq \emptyset$

Fie $x \in \bigcup_{i \in J} D_i$. Deci, $\exists\, i_0 \in J$ a.î.

$x \in D_{i_0} \in \mathcal{T}_d \Rightarrow \exists\, r > 0$ a.î. $B(x, r) \subset D_{i_0}$

$B(x, r) \subset D_{i_0} \subset \bigcup_{i \in J} D_i \Rightarrow \bigcup_{i \in J} D_i \in \mathcal{T}_d$

Prin urmare, $(X, \mathcal{T})$ este sp. top

$\square$

<u>Def</u>

Topologia $\mathcal{T}_d$ din def. precedentă s.n. topologia indusă de metrica d

__Obs__

Dându-se un sp. metric (X, d), putem construi spațiul topologic (X, τ_d).

Ca atare, are sens să vorbim despre mulțimi deschise, mulțimi închise, vecinătăți, mulțimi compacte etc într-un spațiu metric (referindu-ne la topologia indusă de metrica resp.)

__Def__ Adaptarea definiției interiorului, aderenței etc în spații metrice

Fie (X, d) un sp. metric., $A \subset X$ și $x_0 \in X$

Spunem că x_0 este

1) punct interior al lui A (i.e. $x_0 \in \mathring{A}$)

dacă $\exists\, r > 0$ a.î. $B(x_0, r) \subset A$

2) punct aderent (sau de aderență) al lui A

(i.e. $x_0 \in \bar{A}$) dacă $\forall\, r > 0$, avem $B(x_0, r) \cap A \neq \emptyset$

3) punct de acumulare al lui A (i.e. $x_0 \in A'$)

dacă $\forall\, r > 0$, avem $B(x_0, r) \cap (A \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$

4) punct de frontieră (i.e. $x_0 \in Fr(A) = \partial A$)

dacă x_0 este punct aderent al lui A și x_0 nu este punct interior al lui A.

5) punct izolat al lui A (i.e. $x_0 \in Izo(A) = {}'A$)

dacă x_0 este punct aderent al lui A și nu este punct de acumulare al lui A

Def

Fie (X, d) un sp. metric, $(x_n)_n \subset X$ și $x \in X$.

Spunem că șirul $(x_n)_n$ are limita x în raport cu metrica d și scriem $\lim_{n \to +\infty} x_n \overset{d}{=} x$ sau $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{d} x$ dacă $\lim_{n \to +\infty} d(x_n, x) = 0$

(i.e. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon$ avem $d(x_n - x) < \varepsilon$)

Propoziție

Fie (X, d) un sp. metric.

Atunci (X, τ_d) este spațiu topologic separat (sau Hausdorff)

Obs În orice sp. metric, orice șir are o singură limită.

Terminologie

În contextul def. precedente, dacă $\lim_{n \to +\infty} x_n \overset{d}{=} x$, spunem că $(x_n)_n$ converge către x în raport cu metrica d.

Obs

Sintagma „în raport cu metrica d" poate fi înlocuită cu sintagma „în spațiul metric (X, d)"