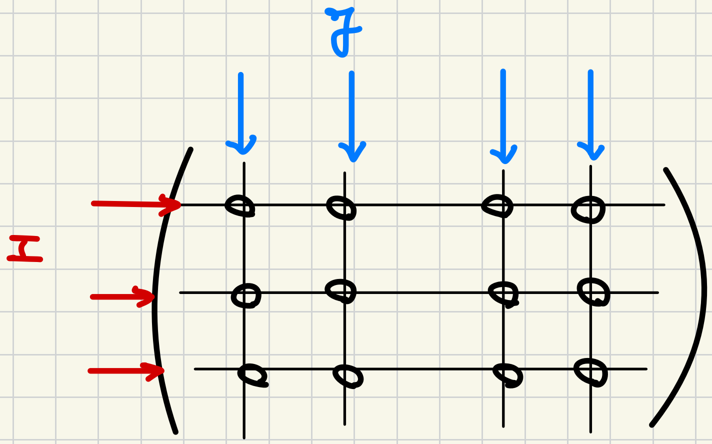
Dezvoltări ale determinanților

Notație: Pentru $p \in \mathbb{N}^*$, $[p] = \{1,2,\dots,p\}$

Pentru o matrice $A \in \mathcal{M}_{p,q}(K)$ și $I \subseteq [p]$, $J \subseteq [q]$

Notez $A_{I,J}$ = submatricea lui A formată din elementele de pe liniile I și coloanele din J



Notez $\bar{I} = [p] \setminus I$, $\bar{J} = [q] \setminus J$ setul complementar de linii / coloane

Să presupunem $A \in \mathcal{M}_n(K)$ și $|I| = |J| = m$

$I = \{i_1 < \dots < i_m\}$ și $J = \{j_1 < \dots < j_m\}$

Atunci $A_{I,J} \in \mathcal{M}_m(K)$, $A_{\bar{I},\bar{J}} \in \mathcal{M}_{n-m}(K)$

Notez $M = \det A_{I,J}$ și $M' = (-1)^{i_1+\dots+i_m+j_1+\dots+j_m} \cdot \det A_{\bar{I},\bar{J}}$

$M = \det A_{I,J}$ s.n. minor de ordin m al lui A

M' = ———"——— complementul algebric al minorului M

Regula lui Laplace:

Fie K corp, $A \in \mathcal{M}_n(K)$, $1 \leq k \leq n$ și

$I = \{i_1 < i_2 < \ldots < i_m\} \subset \{1, \ldots, n\}$. Atunci

$$\det A = \sum{}' M \cdot M' = \sum_{\substack{J = \{j_1, \ldots, j_m\} \\ 1 \leq j_1 < j_2 < j_m \leq n}}' \det A_{I,J} \cdot (-1)^{i_1+i_2+\ldots+i_m+j_1+\ldots+j_m} \cdot \det A_{\bar{I}, \bar{J}}$$

$\boxed{M \text{ minor de ordin } m \text{ cu liniile din } I}$

Spunem că „am dezvoltat $\det A$ după liniile din I".

Analog, putem calcula $\det A$ dezvoltând după un set J de m coloane.

Exemplu:

1) Fie $A = \left(\begin{array}{c|c} N_n & P_{n \times m} \\ \hline 0 & M_m \end{array}\right)_{(n+m) \times (n+m)}$

matrice cu blocuri

$\Rightarrow \det A = \det N \cdot \det M$

2) $A = \left(\begin{array}{c|c} 0 & N_n \\ \hline M_m & P_{m \times n} \end{array}\right) \Rightarrow \det A = (-1)^{mn} \cdot \det N \cdot \det M$

Exemplu:

A matrice triunghiulară $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & * & * & \dots & * \\ & a_{22} & * & \dots & * \\ & & \ddots & & * \\ & 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \det A = a_{11} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{22} & * & * \\ 0 & \ddots & \\ & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Zerouri sub diagonală

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$$

Caz particular - Regula lui Laplace

$\underline{\underline{|I| = 1}} \quad \rightsquigarrow \quad I = \{i\}$

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{i,j}$$

$\leftarrow$ formula de dezvoltare a $\det A$ după linia i

$$A_{I,J} = (a_{ij}) \qquad\qquad A_{i,j} = (-1)^{i+j} \det A_{\bar{i},\bar{j}}$$

minor de ordin 1

complementul său algebric

Analog dezvoltăm după coloană.

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij}$$

Fixăm indice $1 \le p \le n$ și fie $1 \le i \le n$, $i \neq p$.

În matricea A, pe linia p punem linia i.

$$B = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} - - - - - - - - - \\ a_{i1} \ a_{i2} \dots a_{in} \\ a_{i1} \ a_{i2} \dots a_{in} \\ - - - - - - - - - - - - \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ p \\ \\ \\ \end{matrix} \end{array} \Rightarrow \det B = 0 \underset{p \text{ din } B}{\overset{\text{dezv. liniei}}{=\!=}}$$

$$= a_{i1} \cdot A_{p1} + a_{i2} \cdot A_{p2} + \dots + a_{in} \cdot A_{pn}$$

$$(a_{i1} \ a_{i2} \dots a_{in}) \underbrace{\begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{p1} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & \dots & A_{p2} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & \dots & A_{pn} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}}_{A^* \text{ (notație)}} =$$

$$= (0, 0, \dots, \underset{\text{col. } i}{\det A}, \dots, 0)$$

$$\begin{array}{c} i=1 \\ i=2 \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} \det A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det A & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & \det A \end{pmatrix} = \det A \cdot I_n$$

Teoremă: $A \in \mathcal{M}_n(K) \Rightarrow A^* \cdot A = A \cdot A^* = \det A \cdot I_2$

A^* s.n. **matricea adjunctă** a lui A

Teoremă: Dacă $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$, atunci $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$

$A \in \mathcal{M}_n(K)$ $\quad A \cdot A^* = A^* \cdot A = (\det A) \cdot I_n$

Teoremă: Fie K corp și $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Atunci A este inversabilă $\Leftrightarrow \det A \neq 0$.

În acest caz, $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*$.

Dem.:

Def.: Matricea A este inversabilă $\Leftrightarrow (\exists)\ B \in \mathcal{M}_n(K)$ cu $A \cdot B = B \cdot A = I_n$.

Presupunem A inversabilă $\Rightarrow (\exists)\ B \in \mathcal{M}_n(K)$ cu $A \cdot B = I_n$

$$\overset{\det}{\Rightarrow} \det(A \cdot B) = \det(I_n)$$

$$\det A \cdot \det B = 1 \Rightarrow \det A \in \underline{\underline{U(K)}} = K \setminus \underline{\underline{\{0\}}}$$

Presupunem că $\det A \neq 0 \Rightarrow A \cdot A^* = A^* \cdot A = \det A \cdot I_n$

$$A \cdot \left(\frac{1}{\det A} \cdot A^*\right) = \left(\frac{1}{\det A} \cdot A^*\right) \cdot A = I_n$$

$$\Rightarrow (\exists)\ A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*$$

Propoziție:

Dat $A \in \mathcal{M}_n(K)$, dacă $(\exists)\ B \in \mathcal{M}_n(K)$ cu $A \cdot B = I_n$, atunci $BA = I_n$, deci A inversabilă și $B = A^{-1}$.

Dem.:

$$\left.\begin{array}{l} A \cdot B = I_n \overset{\det}{\Longrightarrow} \underset{\det A \cdot \det B}{\underset{\|}{\det AB}} = \det I_n = 1 \end{array}\right| \Rightarrow \det A \neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow (\exists)\ A^{-1} = B$ $\boxtimes$

Regula lui Cramer: rezolvarea sistemelor liniare pătratice

Fie $A \in \mathcal{M}_n(K)$ și sistemul liniar $A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

Atunci sistemul are soluție unică $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$ și atunci: $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$, $(\forall)\ i$, unde $\Delta = \det A$ și

$$\Delta_i = \det \begin{pmatrix} & & b_1 & & \\ & & b_2 & & \\ & & \vdots & & \\ & & b_n & & \end{pmatrix}, \quad i = \overline{1,n}$$

coloanele din A cu excepția coloanei i

Dem.:

Presupunem $\det A \neq 0$.

$$\Rightarrow (\exists)\ A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*$$

$$A^* \setminus A\underline{x} = \underline{b}$$

$$A^* \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = A^* \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$\det A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = A^* \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$x_i = \frac{1}{\det A} \cdot (\text{linia } i \text{ din } A^*) \cdot (\text{coloana } \underline{b})$$

$$x_i = \frac{1}{\Delta}\left(A_{1i} \cdot b_1 + A_{2i} \cdot b_2 + \dots + A_{mi} b_m\right) = \frac{\Delta_i}{\Delta}$$

am dezvoltat după coloana i matricea $\begin{pmatrix} \sim & b_1 & \sim \\ & \vdots & \\ \sim & b_m & \sim \end{pmatrix}$

Rangul unei matrice

Def.: Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$, $\operatorname{rang} A = \max i$ a.î. $(\exists)$ un minor nenul în A de ordin i

$\operatorname{rang} A = r \Leftrightarrow (\exists)$ în A un minor nenul de ordin $\underline{\underline{r}}$

și toți minorii de ordin $> r$
(dacă $(\exists)$ sunt nuli)

$\Leftrightarrow$ $(\exists)$ în A un minor nenul de ordin r
și toți minorii de ordin $r+1$ sunt nuli

Presupunem că $(\forall)$ minor de ordin $r+2$ se scrie ca sumă de minori de ordin $r+1$, $r+3$ —"— $r+2$ etc.

Propoziție: $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$

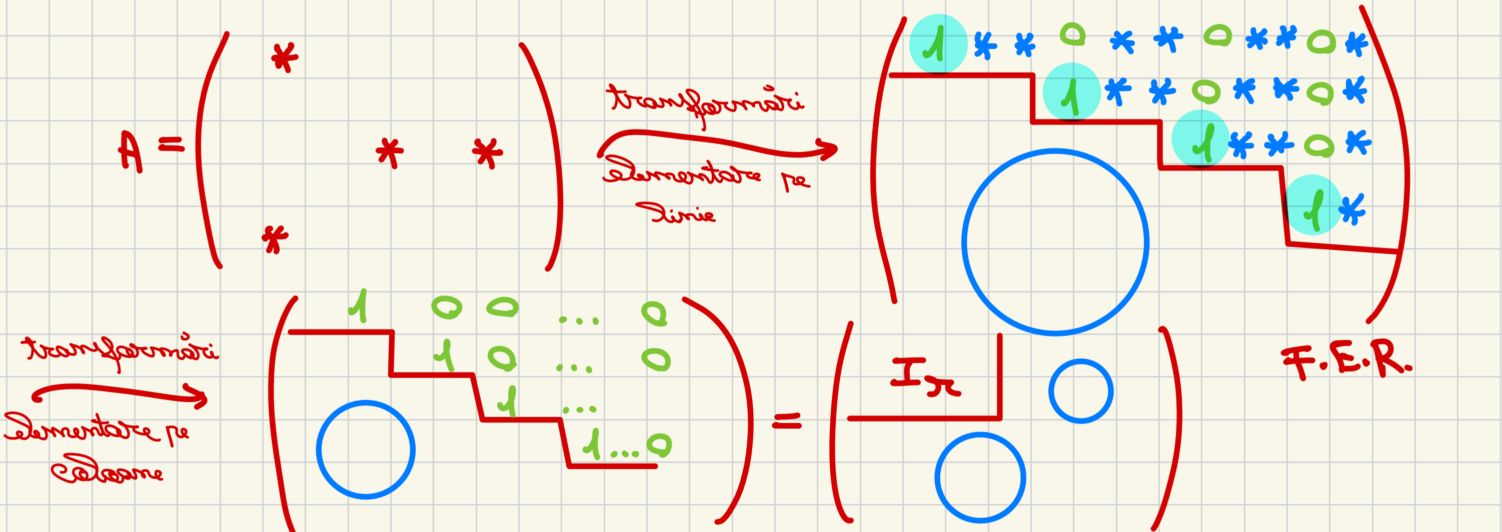
1. $\text{rang}\, A \leq \min\{m, n\}$

   $0 \leq$

2. $\text{rang}\, A = \text{rang}\,(A^T)$

3. rangul se păstrează prin transformări elementare pe linii sau pe coloanele matricei A

Observație! Pornim cu $A \in \mathcal{M}_n(K)$.



facem zerouri
pe liniile cu pivoți

rang A $\uparrow$ ($= r$)

Teoremă: $\underset{r}{\overset{\|}{\text{rang } A}}$ = numărul de pivoți din forma eșalon a matricei A

Teorema lui Kronecker:

Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$.

rang A = numărul de pivoți din forma eșalon

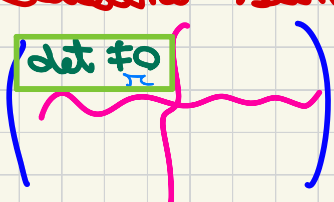
= dim(spațiul vectorial generat de coloanele matricei A)

= dim(spațiul vectorial generat de liniile matricei A)

Algoritmul de bordare

Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$. Presupunem că B este un minor nenul de ordin r în A. **Dacă** toți minorii lui A obținuți din B prin **bordarea** (adăugarea) unei linii și a unei coloane sunt nuli, atunci

rang A = r



Dem.:

Folosiți interpretarea rang A = nr. de pivoți

Determinanții pot fi folosiți la rezolvarea sistemelor liniare (nepătratice): $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$

$A\underline{x} = \underline{b}$ este compatibil $\Leftrightarrow \underline{b} \in \langle c_1(A), c_2(A), \dots, c_n(A) \rangle \Leftrightarrow$ în forma eșalon pentru $\bar{A} = (A|\underline{b})$ nu găsim pivot pe ultima coloană $\Leftrightarrow$ rang A = rang $\bar{A}$

[Teorema Kronecker-Capelli]

În $A \rightsquigarrow$ găsim o submatrice care ne dă rang $A = r$.

$$\left(\begin{array}{c|c} \boxed{(*)}_{r} & \\ & b \end{array}\right)$$

$(*) \to$ minor principal

Teorema Rouché

Sistem compatibil $\Leftrightarrow$ toți minorii obținuți din $(*)$ prin bordarea cu orice altă linie $= \underline{0}$ și cu coloana $\underline{b}$

a.k.a. „minori caracteristici”