Câteva probleme tip[+]
structuri algebrice în informatică

① Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}-x^2+1, & \text{dacă } x\le 1\\ x, & \text{dacă } x>1\end{cases}$.

(i) Să se arate că f este surjectivă, dar nu este injectivă.

(ii) Să se calculeze $f([-1,1])$, $f([0,2])$ și $f^{-1}([0,2])$.

(iii) Să se construiască o funcție $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ pentru care $f\circ g=1_{\mathbb{R}}$.

(iv) Să se arate că funcția $h:[0,\infty)\to[-1,0]\cup(1,\infty)$, $h(x)=f(x)$ pentru orice $x\in[0,\infty)$, este bijectivă și să se determine inversa ei.

② Pe mulțimea $\mathbb{Q}$ considerăm relația $\sim$ definită prin $x\sim y \iff x-y\in\mathbb{Z}$.

(i) Să se arate că $\sim$ este relație de echivalență.

(ii) Care dintre elementele $1, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{2}, 3$ sunt echivalente (în raport cu $\sim$)?

(iii) Să se determine clasa de echivalență a lui 0.

(iv) Să se arate că mulțimea factor $\mathbb{Q}/_\sim$ este infinită.

③ Fie $A=\{d \mid d\in\mathbb{N}, d$ îl divide pe 24 și $d\ne 1, d\ne 24\}$ și $B=\{X \mid X\subset\{1,2,3\}, X\ne\emptyset$ și $X\ne\{1,2,3\}\}$.

(i) Să se arate că există o funcție bijectivă $\varphi:A\to B$ și să se construiască o astfel de φ.

(ii) Să se arate că A este mulțime ordonată cu relația de divizibilitate și B este mulțime ordonată cu relația de incluziune.

(iii) Arătați că mulțimile ordonate A și B de la (ii) nu sunt izomorfe.

(iv) Să se dea exemplu de relație de echivalență pe mulțimea

(4) Notăm cu $\hat{i}$ clasa numărului întreg i modulo 9 (adică în $\mathbb{Z}_9$) și cu $\bar{i}$ clasa lui i în $\mathbb{Z}_{12}$.

(a) Să se determine ordinul elementului $(\hat{1}, \bar{3})$ în grupul $\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{12}$.

(b) Să se arate că orice element din $\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{12}$ are ordin cel mult 36 și să se determine toate elementele de ordin 36.

(c) Să se arate că $\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{12}$ nu este ciclic.

(d) Să se determine câte morfisme de grupuri $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{12}$ există și câte morfisme de grupuri $g: \mathbb{Z}_{36} \to \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{12}$ există.

(5) Fie $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 2 & 5 & 7 & 10 & 8 & 6 & 4 & 1 & 3 & 12 & 13 & 9 & 11 \end{pmatrix} \in S_{13}$.

(i) Să se scrie σ ca produs de cicluri disjuncte și ca produs de transpoziții.

(ii) Să se calculeze ordinul lui σ.

(iii) Să se calculeze σ^{500}.

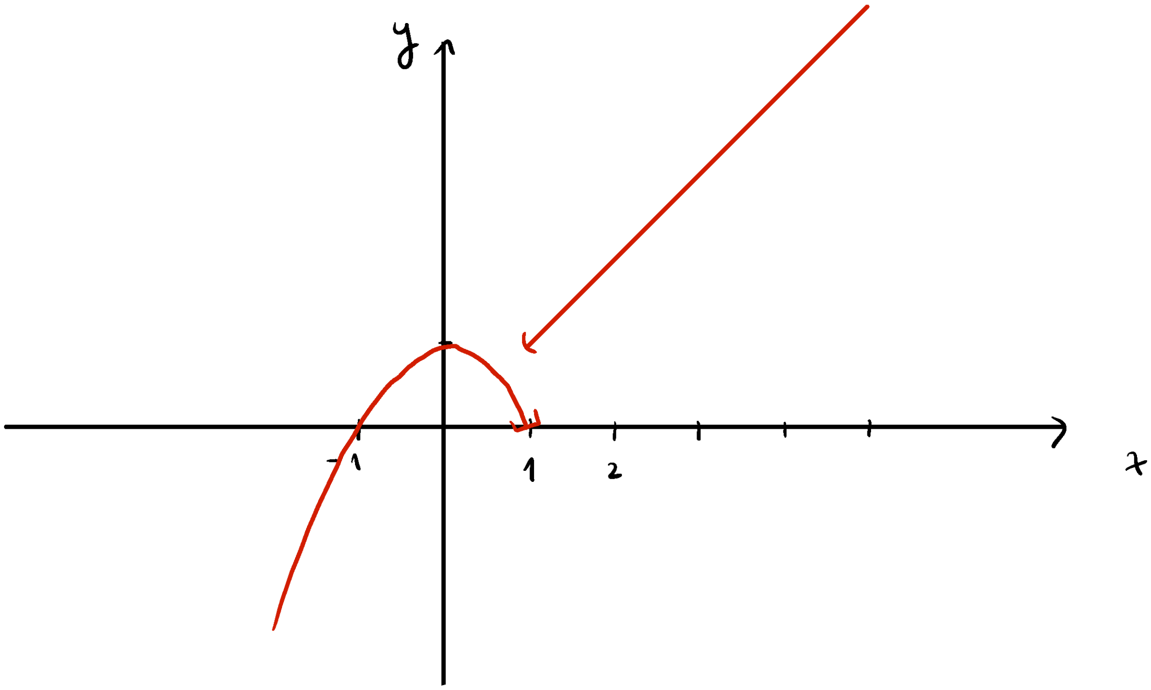
(6) Fie $K = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$. Să se arate că K este subcorp al lui $\mathbb{R}$ și să se calculeze toate morfismele de corpuri $f: K \to K$.

(7) Să se arate că există un izomorfism de inele $\frac{\mathbb{R}[X]}{(X^2-1)} \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ și că inelele $\frac{\mathbb{Z}[X]}{(X^2-1)}$ și $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ nu sunt izomorfe.

(8) Să se arate că $\frac{\mathbb{Z}_2[X]}{(X^3+X+\hat{1})}$ este un corp cu 8 elemente, iar inelul $\frac{\mathbb{Z}_2[X]}{(X^2+\hat{1})}$ are 4 elemente, nu este corp și nu este izomorf cu $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

ex 1

Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} -x^2+1, & \text{dacă } x \le 1 \\ x, & \text{daca } x > 1 \end{cases}$



i)

$f_1 : (-\infty, 1] \to \mathbb{R}$

$f_1(x) = -x^2+1$

$G_{f_1} \cap Ox \Rightarrow f_1(x) = 0 \quad -x^2+1=0 \quad x^2 = 1$

$x_{1,2} = \pm 1 \quad (-1, 0), \ (1, 0)$

$G_{f_1} \cap OY \Rightarrow (0, f_1(0)) = (0, 1)$

$f_2 : (1, +\infty) \to \mathbb{R}, \quad f_2(x)$

$f(1) = 1$

$f(2) = 2$

dr $y = 2$ intersectează graficul în 2 pct $\Rightarrow f$ nu e inj

Orice paralelă la axa Ox intersectează G_f în cel puțin

în punct $\Rightarrow f$ surj

ii)

$$f([-1,1]) = [0,1]$$

$$f([0,2]) = [0,1] \cup (1,2] = [0,2]$$

$$f^{-1}([0,2]) = f^{-1}([0,1]) \cup f^{-1}((1,2])$$

$$0 \leq -x^2+1 \leq 1 \qquad\qquad 1 < x < 2$$

$$-1 \leq -x^2 \leq 0$$

$$0 \leq x^2 \leq 1$$

$$-1 \leq x \leq 1$$

$$f^{-1}([0,2] = [-1,1] \cup (1,2] = [-1,2]$$

iii)

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f \circ g = 1_{\mathbb{R}}$$

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = x$$

Para $x > 1 \Rightarrow g(x) = x$

Para $x \leq 1 \Rightarrow -g^2(x) + 1 = x$

$$-g^2(x) = x - 1$$

$$g^2(x) = 1 - x$$

$$g(x) = \pm\sqrt{1-x}$$

$$g(x) = -\sqrt{1-x}$$

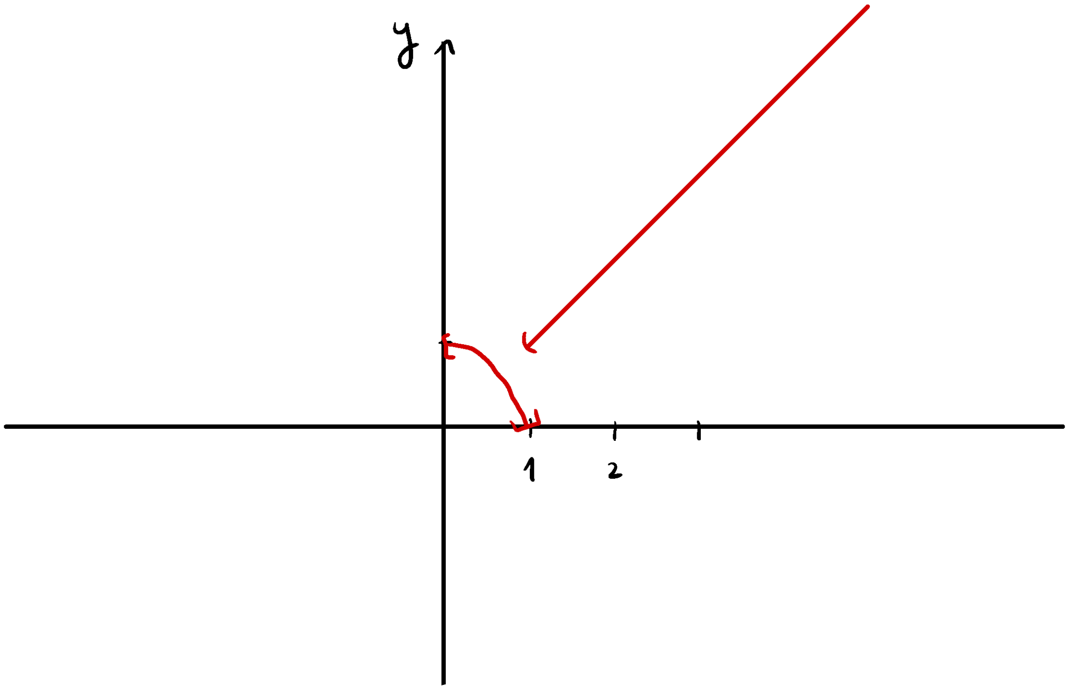
$$g(x) = \begin{cases} -\sqrt{1-x}, & x \leq 1 \\ x, & x > 1 \end{cases}$$

iv)

$h : [0, \infty) \to [0,1] \cup (1, \infty)$

$h(x) = f(x)$

$$h(x) = \begin{cases} -x^2+1, & \text{dacă } x \in [0,1] \\ x, & \text{daca } x > 1 \end{cases}$$



Orice paralelă la axa Ox intersectează G_f în exact un punct $\Rightarrow$ f bij $\Rightarrow$ f inversabilă

$$h^{-1}(y) = \begin{cases} \sqrt{1-y}, & x \in [0,1] \\ y, & x > 1 \end{cases}$$

ex 2

$\mathbb{Q}$

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Z}$$

i)

1) Reflexivitate

$$x - x = 0 \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \sim x$$

2) Simetrie

$$x \sim y \Rightarrow x - y \in \mathbb{Z} \Rightarrow -(y - x) \in \mathbb{Z}$$

$$y - x \in \mathbb{Z} \Rightarrow y \sim x$$

3) Tranzitivitate

$$x \sim y,\ y \sim z \Rightarrow \begin{cases} x - y \in \mathbb{Z} \\ y - z \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (+)$$

$$x - z \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \sim y$$

$\Rightarrow$ $\sim$ rel de echiv

ii) $1 \sim 3 \iff 1 - 3 = -2 \in \mathbb{Z}$

$\frac{3}{2} \sim \frac{5}{2} \iff \frac{3}{2} - \frac{5}{2} = \frac{-2}{2} = 1 \in \mathbb{Z}$

iii) $\hat{0} = \{ x \in \mathbb{Q} \mid 0 \sim x)$

$$\Updownarrow$$

$$\underbrace{0}_{\in \mathbb{Z}} - x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$$

$$\hat{0} = \{ x \mid x \in \mathbb{Z} \}$$

iv)

1) $\forall x \in \mathbb{Q} \Rightarrow x = [x] + \{x\}$

$x - \{x\} = [x] \in \mathbb{Z}$

$\in [0,1)$

$x \sim \{x\} \Rightarrow \{x\} \in S$

2) Fie $u, v \in S$ a.î. $u \sim v \Rightarrow u - v \in \mathbb{Z}$

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leq u < 1 \\ -1 < -v \leq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow -1 < u - v < 1$$

$u - v \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow u - v = 0$

$u = v$

Din (1) și (2) $\Rightarrow [0,1) \cap \mathbb{Q}$ un S.C.R.

$\mathbb{Q}/_\sim = \{ \hat{x} \mid x \in [0,1) \cap \mathbb{Q} \}$

$\mathbb{Q}/_\sim$ este infinit deoarece între 0 și 1 există o inf. de nr. raționale

ex 3

$A = \{ d \mid d \in \mathbb{N},\ d \mid 24,\ d \neq 1,\ d \neq 24 \}$

$B = \{ X \mid X \subset \{1, 2, 3\},\ X \neq 0$ și $X \neq \{1, 2, 3\})$

i)

$A = \{ 2, 3, 4, 6, 8, 12 \}$

$B = \{ \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\} \}$

$|A| = |B| = 6 \Rightarrow \exists$ o funcție $f : A \to B$, f bij

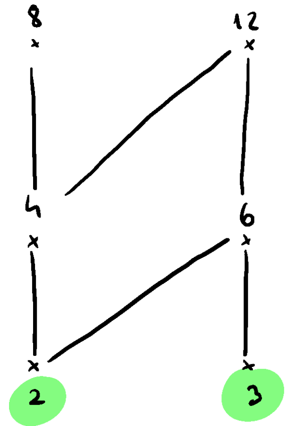
$f(2) = \{1\}$ $\quad f(6) = \{1,3\}$

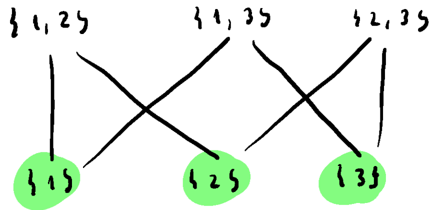
$f(3) = \{2\}$ $\quad f(8) = \{1,2\}$

$f(4) = \{3\}$ $\quad f(12) = \{2,3\}$

ii)

$(A, \mid)$ divizibilitate $\qquad (B, \subset)$ incluziune





$\Rightarrow$ A mulțime ord în raport cu $\mid$

B —||— —||— $\subset$

iii)

Elementele minimale din A : 2, 3

Elementele minimale din B : {1}, {2}, {3}

Fie $f : A \to B$ izo pe mulțimi ordonate

$a \in A$, a el minimal din A

$\Updownarrow$

$f(a) \in B$, $f(a)$ el. minimal din B

A are 2 el. minimale iar B are 3 el. minimale $\Rightarrow$ A și B nu sunt izomorfe

ex 4

a) $ord(\hat{1}, \bar{3})$ în grupul $\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{12}$

$ord(\hat{x}, \bar{y}) = [ord(\hat{x}), ord(\bar{y})]$

$$\left.\begin{array}{l} ord(\hat{1}) = 9 \\ ord(\bar{3}) = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow ord(\hat{1}, \bar{3}) = [9, 4] = 36$$

b)

Fie $(\hat{x}, \bar{y}) \in \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{12}$

$ord(\bar{x}, \bar{y}) = [ord(\hat{x}), ord(\hat{y})]$

În $\mathbb{Z}_9$, ordinele elementelor se află printre divizorii lui 9, deci 1, 3, 9

$ord(\hat{x}) = 3^{\alpha}, \quad 0 \leq \alpha \leq 2$

În $\mathbb{Z}_{12}$, ordinele elementelor se află printre divizorii lui , deci 1, 2, 3, 4, 6, 12

$ord(\bar{y}) = 2^{\beta} \cdot 3^{\gamma} \quad 0 \leq \beta \leq 2$

$0 \leq \gamma \leq 1$

$ord(\hat{x}, \bar{y}) = [3^{\alpha}, 2^{\beta} \cdot 3^{\gamma}]$

ordinul maxim $= 3^{\max(\alpha, \gamma)} \cdot 2^{\beta} = 3^2 \cdot 2^2 = 36$

Elementele de ordin 36 $\Rightarrow$ $[3^{\alpha}, 2^{\beta} \cdot 3^{\gamma}] = 36 = [9, 4]$

Cautăm elementele de ordin 9 în $\mathbb{Z}_9$

$$\text{ord}(\hat{x}) = \frac{9}{(x, 9)} = 9 \Rightarrow (x, 9) = 1$$

$$x \in \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$$

Cautam elementele de ordin 4 in $\mathbb{Z}_{12}$

$$\text{ord}(\bar{y}) = \frac{12}{(y, 12)} = 12 \Rightarrow (y, 12) = 1$$

$$y \in \{1, 5, 7, 11\}$$

Elementele de ordin 36 in $\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{12}$

$\{(\hat{a}, \bar{e}) \mid a \in \{1, 2, 4, 5, 7, 8\},$
$e \in \{1, 5, 7, 11\}\}$

c) Dacă $\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{12}$ ar fi ciclic, atunci ar fi $\simeq \mathbb{Z}_{108}$

$\Leftrightarrow$ Are un element de ordin 108

Ordinul maxim în $\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{12}$ este 36, deci

$\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{12}$ nu este ciclic

d) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{12}$

$\updownarrow$

elem $a \in \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{12}$

$|\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{12}| = 9 \cdot 12 = 108$

$f : \mathbb{Z}_n \to G \Rightarrow$ el $a \in G$ cu $\text{ord}(a) \mid n$

ex 5

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 2 & 5 & 7 & 10 & 8 & 6 & 4 & 1 & 3 & 12 & 13 & 9 & 11 \end{pmatrix}$$

$\sigma \in S_{13}$

i)

Descomp. în produs de cicluri disjuncte

$$\sigma = (1\ 2\ 5\ 8)(3\ 7\ 4\ 10\ 12\ 9)(6)(11\ 13)$$

Descomp. în prod. de transpoziții

$$\sigma = (1\ 2)(2\ 5)(5\ 8)\ (3\ 7)(7\ 4)(4\ 10)(10\ 12)$$
$$(12\ 9)\ (11\ 13)$$

ii) $\operatorname{ord}(\sigma) = [\operatorname{ord}(\sigma_1), \operatorname{ord}(\sigma_2), \operatorname{ord}(\sigma_3)]$

$$= [4, 6, 2] = 12$$

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{\text{nr. transp}} = (-1)^5 = -1$$

iii) $$\sigma^{500} = \sigma^{41 \cdot 12 + 8} = (\underset{e}{\underset{\shortparallel}{\sigma^{12}}})^{4} \cdot \sigma^{8}$$

$500 : 12 = 41$ r 8
$\underline{48}$
$=20$
$\underline{12}$
$=8$

$$\sigma^8 = \sigma_1^{8} \cdot \sigma_2^{8} \cdot \sigma_3^{8}$$
$$= (\underset{e}{\underset{\shortparallel}{\sigma_1^{4}}})^2 \cdot \sigma_2^{6} \cdot \sigma_2^{2} \cdot (\underset{e}{\underset{\shortparallel}{\sigma_3^{2}}})^4$$
$$= \sigma_2^{2}$$

$$\sigma_2^{2} = (3\ 7\ 4\ 10\ 12\ 9)^2$$
$$= (3\ 4\ 12)(7\ 10\ 9)$$

$$\sigma^{500} = (3\ 4\ 12)(7\ 10\ 9)$$

$$\sigma^{500} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 1 & 2 & 4 & 12 & 5 & 6 & 10 & 8 & 7 & 9 & 11 & 3 & 13 \end{pmatrix}$$

ex 6

Fie $K = \{ a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q} \}$

subcorp $\begin{cases} \text{subinel} \begin{cases} \forall x, y \in K \Rightarrow & x - y \in K \\ & x \cdot y \in K \end{cases} \\ x \in K \setminus \{0\}, \quad x^{-1} \in K \end{cases}$

Fie $x = a + b\sqrt{3}$, $a, b \in \mathbb{Q}$

$y = c + d\sqrt{3}$, $c, d \in \mathbb{Q}$

$$x - y = \underbrace{a - c}_{\in \mathbb{Q}} + \underbrace{(b - d)}_{\in \mathbb{Q}}\sqrt{3} \in K$$

$$x \cdot y = \underbrace{ac + 3bd}_{\in \mathbb{Q}} + \underbrace{(ad + bc)}_{\in \mathbb{Q}}\sqrt{3} \in K$$

$\Rightarrow K$ subinel

Fie $x \in K \setminus \{0\}$

$x = a + b\sqrt{3}$ $\Rightarrow a = 0, b = 0$

$x \neq 0 \Rightarrow a + b\sqrt{3} = 0$

$a = -b\sqrt{3}$

$\frac{a}{b} = -\sqrt{3}$

$$x^{-1} = (a + b\sqrt{3})^{-1} = \frac{1}{a + b\sqrt{3}} = \frac{a - b\sqrt{3}}{a^2 - 3b^2}$$

$$= \underbrace{\frac{a}{a^2-3b^2}}_{\in \mathbb{Q}} + \underbrace{\frac{-b}{a^2-3b^2}}_{\in \mathbb{Q}} \sqrt{3} \in K$$

$\Rightarrow K$ subcorp

$f : K \to K$, morfisme

$$\begin{cases} f(x+y) = f(x) + f(y) \\ f(xy) = f(x) \cdot f(y) \\ f(1) = 1 \end{cases}$$

$$f(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)$$

$$f(n) = f(1 + 1 + \ldots + 1) = f(1) + \ldots + f(1)$$

$$= n \cdot f(1) = n, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

$$f(-n) = -f(n) = -n, \ \forall n \in \mathbb{Z}$$

$$f(\underbrace{\tfrac{n}{m} + \tfrac{n}{m} + \ldots + \tfrac{n}{m}}_{m \text{ ori}}) = m \cdot f\left(\tfrac{n}{m}\right) = n$$

$$f\left(\tfrac{n}{m}\right) = \tfrac{n}{m} \quad \forall n, m \in \mathbb{Z}$$

$$f(a) = a, \ \forall a \in \mathbb{Q}$$

$$f(a+b\sqrt{3}) = f(a) + f(b\sqrt{3})$$

$$= a + b \cdot f(\sqrt{3})$$

$$f(\sqrt{3}) = ?$$

$$f(\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}) = f^2(\sqrt{3}) = 3$$

$$f(\sqrt{3}) = \pm\sqrt{3}$$

$$f(a+b\sqrt{3}) = a + b\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow f = I_d \quad \text{morfism}$$

$$f(a+b\sqrt{3}) = a - b\sqrt{3}$$

Verificăm

$$\begin{cases} f(x+y) = f(x) + f(y) \\ f(xy) = f(x)\cdot f(y) \\ f(1) = 1 \end{cases}$$

ex 8

$$\frac{\mathbb{Z}_2[x]}{(x^3+x^2+1)} \quad \text{corp cu 8 el}$$

#

$f \in \mathbb{Z}_2[x]$

$$f = (x^3+x^2+1)\cdot q(x) + ax^2+bx+c$$

$$a, b, c \in \mathbb{Z}_2$$

$$\hat{f} = \widehat{ax^2+bx+c}$$

$$\frac{\mathbb{Z}_2[x]}{(x^3+3x+\hat{1})} = \{ \widehat{ax^2+bx+c} \mid a, b, c \in \mathbb{Z}_2 \}$$