Nr. I

Structuri algebrice în informatică, **Examen, 4 februarie 2025, seria 14.**
La fiecare subiect se acordă un punctaj între 1 şi 10. Nota lucrării este media notelor celor 4 subiecte.
Timp de lucru: 3 ore

1. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x+1, & \text{dacă } x\le 0,\\ x, & \text{dacă } x>0\end{cases}$.

9
- (a) **(1p)** Să se calculeze $f(-2)$ şi $f(3)$.
- (b) **(2p)** Să se arate că f este surjectivă, dar nu este injectivă.
- (c) **(3p)** Să se calculeze $f([0,1])$, $f([-1,1])$ şi $f^{-1}([-1,1])$.
- (d) **(3p)** Să se arate că funcţia $g:(-\infty,-1]\cup(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$ pentru orice $x\in(-\infty,-1]\cup(0,\infty)$, este bijectivă şi să se calculeze inversa lui g.

2. Pe mulţimea $\mathbb{R}$ considerăm relaţia $\sim$ definită prin

$$x\sim y \text{ dacă şi numai dacă } x^2-x=y^2-y.$$

6
- (a) **(4p)** Să se arate că $\sim$ este relaţie de echivalenţă.
- (b) **(2p)** Să se determine clasa de echivalenţă a lui 2.

(c) **(3p)** Să se construiască funcţii bijective $f:[\frac{1}{2},\infty)\to\mathbb{R}/\sim$ şi $f:(\frac{1}{2},\infty)\to\mathbb{R}/\sim$, unde $\mathbb{R}/\sim$ este mulţimea factor asociată relaţiei de echivalenţă $\sim$.

3. Fie permutarea

$$\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10\\ 4 & 9 & 3 & 7 & 8 & 10 & 1 & 5 & 2 & 6\end{pmatrix}\in S_{10}.$$

7
- (a) **(3p)** Să se scrie σ ca produs de cicluri disjuncte şi ca produs de transpoziţii.
- (b) **(3p)** Să se determine ordinul lui σ în grupul S_{10} şi să se calculeze σ^{100}.
- (c) **(1p)** Să se arate că nu există $\tau\in S_{10}$ astfel încât $\tau^2=\sigma$.

(d) **(2p)** Câte cicluri de lungime 3 există în S_{10}?

4. Fie $A=\{a+b\sqrt{5}\mid a,b\in\mathbb{Z}\}$.

7.6
- (a) **(4p)** Să se arate că A este subinel al lui $\mathbb{R}$, dar nu este subcorp al lui $\mathbb{R}$.
- ?~ (b) **(4p)** Să se arate că există izomorfisme de inele $\frac{\mathbb{R}[X]}{(X^2-5)}\simeq\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ şi $\frac{\mathbb{Z}[X]}{(X^2-5)}\simeq A$.

(c) **(1p)** Să se arate că inelele $\frac{\mathbb{Z}[X]}{(X^2-5)}$ şi $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ nu sunt izomorfe.

$$\frac{9+6+7+6}{4}=\frac{28}{4}=7$$

$$\frac{10+7+8+7}{4}=\frac{32}{4}=8 \;?$$

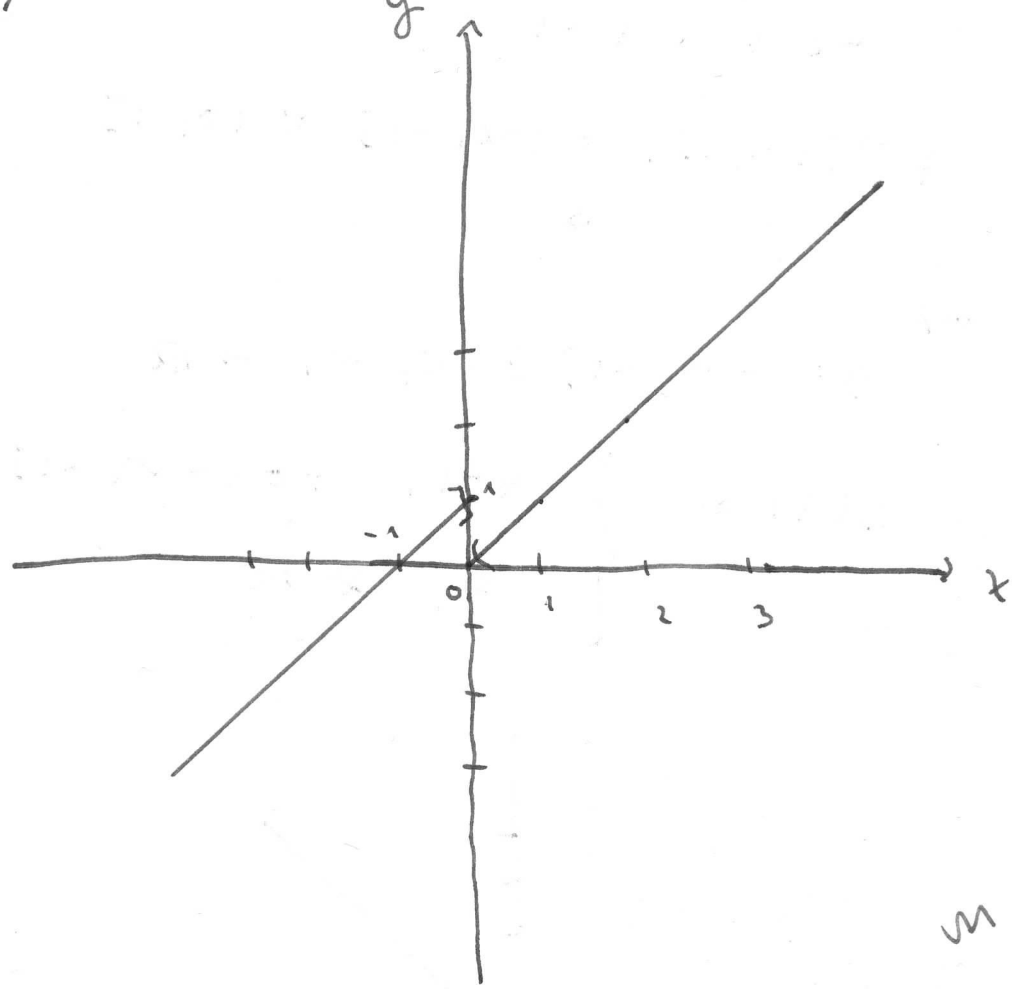
1.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x+1, & x \le 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$

a) $f(-2) = -2+1 = -1$

$f(3) = 3$

b)



Orice paralela la axa Ox intersectează G_f în cel puțin un punct $\Rightarrow f$ surj

Fie dreapta $y = \frac{1}{2}$. Dreapta intersectează G_f în 2 pct $\Rightarrow f$ nu este inj c)

$f([0,1]) = [0,1]$

$f([-1,1]) = f([-1,0]) \cup f((0,1])$

$= [0,1] \cup (0,1] = [0,1]$

$f^{-1}([-1,1])$

$= f^{-1}([-1,0]) \cup f^{-1}((0,1])$

$-1 \leq x+1 \leq 0$ $\qquad$ $0 < x \leq 1$

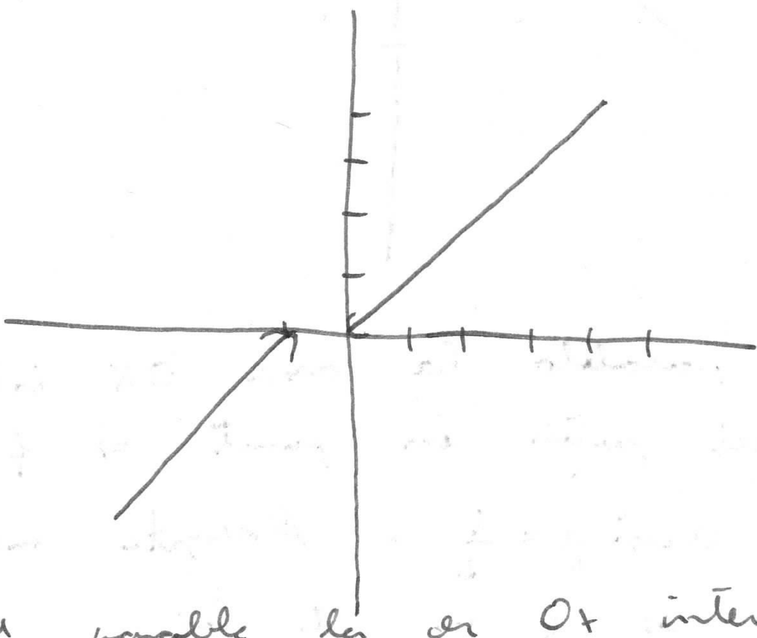
$-2 \leq x \leq -1$

$f^{-1}([-1,1]) = [-2,-1] \cup (0,1]$

d)

$g : (-\infty,-1] \cup (0,\infty) \to \mathbb{R}$

$$g(x) = \begin{cases} x+1, & x \in (-\infty,-1] \\ x, & x > 0 \end{cases}$$



Orice paralelă la ax Ox intersectează Gf în exact un punct $\Rightarrow$ g bij

(2)

$$x \sim y \iff x^2 - x = y^2 - y$$

a)

1) Reflexivitate

$$x^2 - x = x^2 - x \Rightarrow x \sim x$$

2) Simetrie

$$x \sim y \Rightarrow x^2 - x = y^2 - y \iff y^2 - y = x^2 - x \Rightarrow y \sim x$$

3) Tranzitivitate

$$x \sim y,\ y \sim z \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x^2 - x = y^2 - y \\ y^2 - y = z^2 - z \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 - x = z^2 - z$$

(1), (2), (3) $\Rightarrow \sim$ rel de echiv

e) $\hat{2} = \{ x \in \mathbb{R} \mid 2 \sim x \}$

$$2^2 - 2 = x^2 - x$$
$$4 - 2 = x^2 - x$$
$$2 = x^2 - x$$
$$x^2 - x - 2 = 0$$
$$\Delta = 1 + 8 = 9$$
$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{2} \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \hat{2} = \{ x \mid x \in \{-1, 2\} \}$$

c) $(1+2y)^2 = 4y^2 + 4y + 1$

$$x^2 - x - y^2 + y = 0$$
$$\Delta = 1 - 4(-y^2 + y$$
$$= 1 + 4y^2 + 4y =$$
$$= (1-2y)^2$$
$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm (1-2y)}{2}$$

$\hat{x} = \{ x \in$

(3)

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 9 & 3 & 7 & 8 & 10 & 1 & 5 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

a)

Descomp. în prod de cicli disjuncți

$$\sigma = \overset{\sigma_1}{(1\ 4\ 7)}\ \overset{\sigma_2}{(2\ 9)}\ (3)\ \overset{\sigma_3}{(5\ 8)}\ \overset{\sigma_4}{(6\ 10)}$$

Desc. în transpoziții

$$\sigma = (1\ 4)(4\ 7)(2\ 9)(5\ 8)(6\ 10)$$

b) $\mathrm{ord}(\sigma) = [\mathrm{ord}(\sigma_1), \mathrm{ord}(\sigma_2), \mathrm{ord}(\sigma_3), \mathrm{ord}(\sigma_4)]$

$\mathrm{ord}(\sigma_1) = 3$

$\mathrm{ord}(\sigma_2) = 2 = \mathrm{ord}(\sigma_3) = \mathrm{ord}(\sigma_4)$

$\mathrm{ord}(\sigma) = [3, 2, 2, 2] = 6$

$\sigma^6 = e$

$$\begin{array}{l} 100 : 6 = 16 \text{ r } 4 \\ \underline{6} \\ 40 \\ \underline{36} \\ =4 \end{array}$$

$$\sigma^{100} = \sigma^{6 \cdot 16 + 4} = \underbrace{(\sigma^6)^{16}}_{e} \cdot \sigma^4 = \sigma^4$$

$$\sigma^4 = \sigma_1^4 \cdot \sigma_2^4 \cdot \sigma_3^4 \cdot \sigma_4^4$$

$$= \underbrace{(\sigma_1^3)}_{= e} \cdot \sigma_1 \cdot \underbrace{(\sigma_2^2)^2}_{= e} \cdot \underbrace{(\sigma_3^2)^2}_{= e} \cdot \underbrace{(\sigma_4^2)^2}_{= e}$$

$$= \sigma_1$$

$$\Rightarrow \quad \sigma^{100} = (1\ 4\ 7)$$

$$\sigma^{100} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 2 & 3 & 7 & 5 & 6 & 1 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

c) $\tau^2 = \sigma$

$\varepsilon(\tau^2) = 1 \Rightarrow \tau^2$ perm. pară

$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{\text{nr transpoziții}} = (-1)^5 = 1 \Rightarrow$ perm. impară

$\varepsilon(\tau^2) \neq \varepsilon(\sigma) \Rightarrow$ nu există nicio permutare $\tau \in S_{10}$ a.î. $\tau^2 = \sigma$

d)

Fie $\sigma \in S_{101}$, $\sigma = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \ldots \cdot \sigma_n$

$\text{ord}(\sigma_i) = 3$

4.

$A = \{ a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Z} \}$

$\text{subinel} \left\{ \begin{array}{l} A \text{ subinel dacă} \\ \qquad \forall x, y \in A \qquad x - y \in K \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x \cdot y \in K \end{array} \right.$

$\forall x \in A \setminus \{0\}, \quad x^{-1} \in A \setminus \{0\}$

Fie $x, y \in A$

$x = a + b\sqrt{5} \quad , \quad a, b \in \mathbb{Z}$

$y = c + d\sqrt{5} \quad , \quad c, d \in \mathbb{Z}$

- $x - y = a + b\sqrt{5} - c + d\sqrt{5}$

$= \underset{\in \mathbb{Z}}{a - c} + \underbrace{(b - d)}_{\in \mathbb{Z}}\sqrt{5}$

$\Rightarrow x - y \in A$

- $x \cdot y = (a + b\sqrt{5})(c + d\sqrt{5})$

$= ac + ad\sqrt{5} + bc\sqrt{5} + 5bd$

$= \underbrace{ac + 5bd}_{\in \mathbb{Z}} + \underset{\in \mathbb{Z}}{(ad + bc)}\sqrt{5}$

$\Rightarrow x \cdot y \in A$

$\Rightarrow A$ subinel al lui $\mathbb{R}$

m

$a + b\sqrt{5} = 0 \Rightarrow a = 0, -b = 0$

$a = -b\sqrt{5}$

$\frac{a}{b} = -\sqrt{5}$

$\in \mathbb{Z}$

$x = a + b\sqrt{5}, \quad a \neq 0, b \neq 0$

$x^{-1} = \frac{1}{a+b\sqrt{5}}^{\,a-b\sqrt{5}} = \frac{a-b\sqrt{5}}{a^2-5b^2}$

$x^{-1} = \frac{a}{a^2-b^2} + \frac{-b}{a^2-5b^2}\sqrt{5}$

Fie $a = 1, \; b = 2$

$x^{-1} = \frac{1}{1-4} + \frac{-2}{1-50}\sqrt{5}$

$= \frac{-1}{3} + \frac{-2}{-49}\sqrt{5}$

$\in \mathbb{Q} \qquad \in \mathbb{Q}$ (nu sunt întregi)

$\Rightarrow x^{-1} \notin A \Rightarrow A$ nu este grup

4) b)

$$\frac{\mathbb{R}[x]}{(x^2-5)} \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

$$x^2 - 5 = (x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})$$

$$I = (x+\sqrt{5})$$
$$J = (x-\sqrt{5})$$ idealuri

$$\frac{1}{2\sqrt{5}}(x+\sqrt{5}) + \frac{-1}{2\sqrt{5}}(x-\sqrt{5}) = 1$$

$$\cancel{\frac{x}{2\sqrt{5}}} + \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} - \cancel{\frac{x}{2\sqrt{5}}} + \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$\Rightarrow$ I, J comaxi male

$$\frac{\mathbb{R}[x]}{I \cap J} \simeq \frac{\mathbb{R}[x]}{x+\sqrt{5}} \times \frac{\mathbb{R}[x]}{x-\sqrt{5}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mathbb{R}[x]}{x^2-5} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

$$\frac{\mathbb{Z}[x]}{x^2-5} \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

~~[illegible]~~

ex 1 → 9

ex 2 → 6

ex 3 → 7

ex 4 → 6

$$\frac{9+6+7+6}{4} = \frac{28}{4} = 7$$

$$\frac{10+7+5+7}{4} = \underline{32}$$