Seminar

18 Dec 2024

ex 1

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 9 & 5 & 7 & 10 & 3 & 4 & 6 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

$\sigma^{-2024} = ?$

c) Det permutările $\tau \in S_{10}$ a.î. $\tau^2 = \sigma$

d) Fie $\rho \in S_{10}$ $\text{ord}(\rho) = 10$. Poate fi ρ perm. pară?

e) $(\exists)$ perm de ordin 35 în S_{10}? Dar de ordin 30?

ex 2

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \\ 3 & 5 & 8 & 14 & 11 & 17 & 18 & 6 & 2 & 1 & 9 & 12 & 15 & 7 & 4 & 10 & 13 & 16 \end{pmatrix}$$

a)

$\sigma = (1\ 3\ 8\ 6\ 17\ 13\ 15\ 4\ 14\ 7\ 18\ 16\ 10)\ (2\ 5\ 11\ 9)$

(12)

b) Transpoziții:

$\sigma = (1\ 3)(3\ 8)(8\ 6)(6\ 17)(17\ 13)(13\ 15)(15\ 4)$

$(4\ 14)(14\ 7)(7\ 18)(18\ 16)(16\ 10)(2\ 5)$

$(5\ 11)(11\ 9)$

c) ordinul permutării

$\text{ord}(\sigma) = [13, 4] = 13 \cdot 4 = 52$

d) $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{12+3} = (-1)^{15} = -1 \Rightarrow$ permutare impară

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \\ 3 & 5 & 8 & 14 & 11 & 17 & 18 & 6 & 2 & 1 & 9 & 12 & 15 & 7 & 4 & 10 & 13 & 16 \end{pmatrix}$$

e)

$\sigma^{-1}(\sigma(i)) = i$

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 8 & 14 \\ 1 & 2 & 3 & \dots \end{pmatrix}$$ (ordonăm)

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \\ 10 & 9 & 8 & 15 & 2 & 8 & 14 & 3 & 11 & 16 & 5 & 12 & 17 & 4 & 13 & 18 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

f)

σ^{-1} în produs de cicli disjuncți

$= (1\ 10\ 16\ 18\ 7\ 14\ 4\ 15\ 13\ 17\ 6\ 8\ 3)$

$(2\ 9\ 11\ 5)$

g)

$\sigma^{-2024} = (\sigma^{-1})^{2024} = (\sigma^{2024})^{-1}$

$$\sigma^{2024} = (\sigma_1 \cdot \sigma_2)^{2024} = \sigma_1^{2024} \cdot \sigma_2^{2024} = \sigma_1^{13\cdot 156-4} \cdot (\sigma_2)^{4\cdot 506}$$

$\sigma_1 \sigma_2 = \sigma_2 \cdot \sigma_1$ (comută)

$= \sigma_1^{-4} = (\sigma^{-1})^4$

$= (\sigma^4)^{-1}$

$2024 = 13 \cdot 155 + 9$

$= 13 \cdot 156 - 4$

$\text{ord}(\sigma_1) = 13$

$\text{ord}(\sigma_2) = 4 \Rightarrow \sigma_2^4 = e \in S_{18}$

$$(1\ 2\ 3\ 4)^2 = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}$$

$$= (1\ 3)(2\ 4)$$

$$(1\ 2\ 3\ 4)^3 = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}$$

$$= (1\ 4\ 3\ 2)$$

$\boxed{\text{Pb 1}}$ Fie $\sigma = (a_1, \ldots, a_m)$ un ciclu de lungime $m \in S_n$ și $1 \leq h < m$

$$\sigma^h(a_i) = a_{i+h} \quad (\forall)\ i = \overline{1,m} \quad \text{a.î. pt. } i+h > m$$

$i+h$ se înlocuiește cu restul modulo m

$$\sigma_1 \quad (1\ 3\ 8\ 6\ 17\ 13\ 15\ 4\ 14\ 7\ 18\ 16\ 10)$$

$$\sigma_1^4 = (1\ 17\ 14\ 10\ 6\ 4\ 16\ 8\ 15\ 18\ 3\ 13\ 7)$$

$$a_1 \to a_5 \to a_9 \to a_{13} \to a_4 \to a_8 \to a_{12} \to a_3 \to$$
$$\to a_7 \to a_{11} \to a_2 \to a_6 \to a_{10}$$

$$(\sigma_1^4)^{-1} = (1\ 7\ 13\ 3\ 18\ 15\ 8\ 16\ 4\ 6\ 10\ 14\ 17)$$

$\tau^2 = \sigma$ (Nu are sol. deoarece τ^2 e permutare pară
σ e permutare impară.

$\varepsilon(\tau^2) = $ par

$\varepsilon(\sigma) = $ impar

! La permutări

- produs de cicluri disjuncte
- transpoziții
- ordin
- signatura

Exemplu

$$(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= (1\ 3\ 5)(2\ 4\ 6)$$

$$(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= (1\ 4)(2\ 5)(3\ 6)$$

$$(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= (1\ 5\ 3)(2\ 6\ 4)$$

$$(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)^5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= (1\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2)$$

$$\sigma^6 = e \iff \sigma \cdot \sigma^5 = e \implies \sigma^5 = \sigma^{-1}$$

$\boxed{\text{Pb } 2}$ Fie σ un m-ciclu (= ciclu de lungime m) și $1 \leq h < m$

Dacă $(h, m) = 1$ atunci σ^h este un m-ciclu

Dacă $h \mid m$ atunci σ^h este un produs de h cicluri disjuncte, fiecare având lungimea m / h

$$\sigma^4 = \sigma^{2 \cdot 2} = (\sigma^2)^2 = \left((1\,3\,5)(2\,4\,6) \right)^2$$
$$= (1\;3\;5)^2 \; (2\;4\;6)^2$$
$$= (1\;5\;3)\;(2\;6\;4)$$

σ_{24}^{16} $\qquad (16, 24) = 8$

$(\sigma_{24}^{8})^2 \rightarrow$ (8 cicluri disjuncte de lungime $3)^2$

$(3, 2)$ prime

σ_{24}^{20} $\qquad (24, 20) = 4$

$(\sigma_{24}^{4})^5$

ex 1

4) $\quad ord(\rho) = 10$

cum?

$\rho = \sigma_{i_1} \cdot \ldots \cdot \sigma_{i_r}$ (unica descomp. în cicli disj)

$10 = ord(\rho) = [\, ord(\sigma_{i_1}), \ldots, ord(\sigma_{i_r}) \,]$

$ord(\sigma_{i_1}) + \ldots + ord(\sigma_{i_r}) \leq 10$ (pot fi cicluri de ordin 1)

$1 < ord(\sigma_{i_1}), \ldots, ord(\sigma_{i_r})$

$10 = [1, 2, 2, 5] \quad \Leftarrow \quad [2, 2, 5] = 6$

$\;\;\;\, = [1, 1, 1, 2, 5] \quad\quad\quad [2, 5] = 5$

<u>Sol</u>:

Fie $\rho = (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6\ 7\ 8\ 9)$

$\varepsilon(\rho) = (-1)^{1+1+4} = 1 \Rightarrow \rho$ nu e pară

descomp de cicluri disj $\Rightarrow ord(\rho) = [2, 2, 5] = 10$

$\Rightarrow (\exists)$ permutări pare din S_{10} având ordinul 10

5)

$\rho = \sigma_{i_1} \cdot \ldots \cdot \sigma_{i_r}$ (unica descomp. în cicli disj)

$35 = ord(\rho) = [\ ord(\sigma_{i_1}) \ldots, ord(\sigma_{i_r})\ ]$

$ord(\sigma_{i_1}) + \ldots + ord(\sigma_{i_r}) \leq 10$ (pot fi ciclii de ordin 1)

$1 < ord(\sigma_{i_1}), \ldots, ord(\sigma_{i_r})$

n minim a.î. să existe permutări de ordin 35 este $5 + 7 = 12$ ($35 = [5, 7]$)

3) $\tau^3 = \sigma$

$\tau = \sigma_{i_1} \cdot \ldots \sigma_{i_r}$

$ord(\tau) = [\ ord(\sigma_{i_1}) \cdot \ldots\ ord(\sigma_{i_1})$

$\tau^3 = \sigma = (1\ 2\ 9)\ (3\ 5\ 10\ 8\ 6)\ (4\ 7)$ (0)

Pp. că $(\exists)\ \tau$ sol a ec.

$\Rightarrow \tau^3 = \sigma_{i_1}^3 \cdot \ldots \cdot \sigma_{i_r}^3$

In scrierea lui τ^3 apare un ciclu de lungime 3

$\Rightarrow$ în scrierea lui τ există cel puțin ciclu σ_i de

$3 \mid 3$

lungime $l \vdots 3$

I) $l = 3 \rightarrow \sigma_i^3 = e \Rightarrow$ avem 3 el fixate de τ^3

↯ cu (0)

II) $l = 6 \rightarrow \sigma_i^3$ este produs de 3 cicluri disj de lung 2

(0) ↯ unicitatea descomp. în cicluri disj

3) $l = 9 \rightarrow \sigma_i^3$ este produs de 3 cicluri disj de lung 3 ↯ (0)