Seminar 4

28 Oct 2024

Funcții inj, surj, bij

Def

A, B mulțimi

$f : A \to B$

1) **f injectivă** $\iff \left(\forall\, x_1 \neq x_2,\ x_1, x_2 \in A \implies f(x_1) \neq f(x_2)\right)$

$\iff \left(f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2\right)$

2) **f surjectivă** $\iff \left(\forall\, y \in B\ \exists\, x_0 \in A \text{ a.î. } f(x_0) = y\right)$

$\iff \underset{\substack{\parallel \\ B}}{\operatorname{Im} f} \quad \left(= f(A) = \{ f(x) \mid x \}\right)$

3) **f bijectivă** $\iff$ f inj și f surj

ex 1

$f : \mathbb{Z} \to [0, 1)$, $f(n) = \{ n\sqrt{3} \}$

Este f inj ?

<u>Sol</u>:

$f(n) = \{ n\sqrt{3} \}$ ← partea fracționară

Fie n, m a.î. $f(n) = f(m) \Rightarrow \{ n\sqrt{3} \} = \{ m\sqrt{3} \}$

$(\forall)\ x \in \mathbb{R}$, $x = [x] + \{x\}$ ← $\in [0,1)$

$$n\sqrt{3} - [n\sqrt{3}] = m\sqrt{3} - [m\sqrt{3}]$$

$$n\sqrt{3} - m\sqrt{3} = [n\sqrt{3}] - [m\sqrt{3}]$$

$$\sqrt{3}(n - m) = \underset{\mathbb{Z}}{[n\sqrt{3}]} - \underset{\mathbb{Z}}{[m\sqrt{3}]} \in \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow \sqrt{3}(n - m) \in \mathbb{Z}$

$\sqrt{3}\ (n - m) \in \mathbb{Z}\ (\subseteq \mathbb{Q})$
$n - m \in \mathbb{Z}$
$\Big\} \not\Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{3}(n - m) \in \mathbb{Z}$ doar dacă $n - m = 0$

$\Rightarrow n = m$

$\square$

ex 2

M mulțime și $A, B \subseteq M$

$f : \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$

$$f(\underset{M}{\underset{\cap\mid}{X}}) = (X \cap A, X \cap B)$$

a) f inj $\Leftrightarrow$ $A \cup B = M$

b) f surj $\Leftrightarrow$ $A \cap B = \emptyset$

c) f bij $\Leftrightarrow$ $A \cup B = M$ și $A \cap B = \emptyset$

a)

<u>Sol</u>:

" $\Leftarrow$ " $\boxed{\overset{+}{A \cup B = M}}$

$A \cup B = M$

Fie $X, Y \subseteq M$ ($\Leftrightarrow$ $X, Y \in \mathcal{P}(M)$) a.î. $f(X) = f(Y)$

$$f(X) = (X \cap A, X \cap B)$$
$$f(Y) = (Y \cap A, Y \cap B)$$

$$f(X) = f(Y)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X \cap A = Y \cap A \\ X \cap B = Y \cap B \end{cases}$$

$$(X \cap A) \cup (X \cap B) = X \cap (A \cup B) \overset{(*)}{=} X \cap M = X$$

$$(Y \cap A) \cup (Y \cap B) = Y \cap (A \cup B) \overset{(*)}{=} Y \cap M = Y$$

$\Rightarrow f$ e inj

" $\Rightarrow$ " f e inj. Vrem să dem. că $A \cup B = M$

î contradicție la asta

Pp. prin reducere la absurd că $A \cup B \neq M \Rightarrow$

$\exists\, x \in M \setminus (A \cup B)$

$$f(\{x\}) = (\{x\} \cap A, \{x\} \cap B) = (\emptyset, \emptyset)$$

$$f(\emptyset) = (\emptyset \cap A, \emptyset \cap B) = (\emptyset, \emptyset)$$

$\Rightarrow f$ nu e inj X ipoteza

$\Rightarrow$ Pp. făcută este falsă

b) f surj $\Leftrightarrow$ $A \cap B = \emptyset$

„$\Leftarrow$" Fie $A \cap B = \emptyset$. Vrem să dem că
f surj ($\Leftrightarrow$ $(\forall)$ $(C, D) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$
$\exists\, X_0 \in \mathcal{P}(M)$ a.î. $f(X_0) = (C, D)$)

$$f(X_0) = (C, D) \Leftrightarrow (X_0 \cap A,\ X_0 \cap B) = (C, D)$$

$$\begin{cases} X_0 \cap A = C \\ X_0 \cap B = D \end{cases}$$

$$(X_0 \cap A) \cap (X_0 \cap B) = X_0 \cap (A \cap B) = \emptyset$$

mulțimi disjuncte

$$f(C \cup D) = \big((C \cup D) \cap A,\ (C \cup D) \cap B \big)$$
$$= \big(\underbrace{(C \cap A)}_{= C} \cup \underbrace{(D \cap A)}_{= \emptyset},\ \underbrace{(C \cap B)}_{= \emptyset} \cup \underbrace{(D \cap B)}_{= D} \big)$$
$$= (C, D)$$

Fie $(C, D) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$

$$f(C \cup D) = \big((C \cup D) \cap A,\ (C \cup D) \cap B \big)$$
$$= \ldots$$
$$= (C \cup \emptyset,\ D \cup \emptyset)$$
$$= (C, D)$$

„ $\Rightarrow$ " f surj. Vrem să dem că $A \cap B = \emptyset$

Pp. prin reducere la absurd că $A \cap B \neq \emptyset$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ $(\exists)$ $x_0 \in A \cap B$

Vreau sa ajung la o contradicție a faptului că „ f e surj", adica trebuie sa găsesc un element $(C, D) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ a.î. $f(x) \neq (C, D)$
$\forall x \in \mathcal{P}(M)$