Seminar 2

ex 1

$$A = \left\{ x \in \mathbb{Q} \;\middle|\; x = \frac{n^2+1}{2n^2+n+1},\ n \in \{1, 2, \dots, 2024\} \right\}$$

Calculați $|A|$

Sol:

Calculăm abaterea de la a fi injectivă

$f : \{1, 2, \dots, n\} \to \mathbb{Q}$

$$f(n) = \frac{n^2+1}{2n^2+n+1}$$

? Pt ce n și m avem:

$$\frac{n^2+1}{2n^2+n+1} = \frac{m^2+1}{2m^2+m+1}$$

$$\frac{n^2+1}{2n^2+n+1} = \frac{m^2+1}{2m^2+m+1}$$

$$\cancel{2n^2m^2} + n^2m + n^2 + 2m^2 + m + \cancel{1} = \cancel{2n^2m^2} + nm^2 + m^2 + 2n^2 + n + \cancel{1}$$

$$\Leftrightarrow \quad n^2m + \cancel{n^2} + 2\cancel{m^2} + m = nm^2 + \cancel{m^2} + 2\cancel{n^2} + n$$

$$\Leftrightarrow \quad n^2m + m^2 + m = nm^2 + n^2 + n$$

$$\Leftrightarrow \quad n^2 m + m^2 + m - n m^2 - n^2 - n = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad mn(n-m) - (n-m)(n+m) - (n-m) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (n-m)(nm - n - m - 1) = 0$$

$n - m = 0$ sau $nm - n - m - 1 = 0$

$n = m$

Ecuația în x, y cu $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$

$$axy + bx + cy + d = 0$$

are un nr. finit de sol. întregi

$$x(ay + b) + cy + d = 0 \quad \Big| \cdot a$$

$$\Leftrightarrow \quad ax(ay + b) + acy + ad = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad ax(ay + b) + acy + ad + bc - bc = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad ax(ay + b) + c(ay + b) + ad - bc = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (ax + c)(ay + b) = bc - ad$$

Scriem divizorii lui $bc - ad$ și rezolvăm sist. posibile de ecuații liniare

$$nm - n - m - 1 = 0$$

$$n(m-1) - m - 1 = 0$$

$$n(m-1) - m + 1 - 1 - 1 = 0$$

$$n(m-1) - (m-1) - 2 = 0$$

$$(n-1)(m-1) = 2$$

$$\begin{cases} n-1 = 1 \\ m-1 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} n-1 = 2 \\ m-1 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} n = 2 \\ m = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} n = 3 \\ m = 2 \end{cases}$$

Fie $n, m \in \{1, 2, \ldots, 2024\}$ a.î.

$$\frac{n^2+1}{2n^2+n+1} = \frac{m^2+1}{2m^2+m+1}$$

$\Rightarrow |A| = 2023$ (Doar pt $m=2$ şi $n=3$ fracţiile resp. sunt egale. $\forall\, m, n$ exceptând $m=2$ şi $n=3$ fracţiile sunt $\neq$)

$\square$

ex 2

Fie $A = \{1, 2, \ldots, n\}$

1) Câți multiplii de 7 (în general de k) avem în A ?

2) Câte el. ale mulțimii sunt divizibile cu 2 și / sau 3 ?

3) Câte el. ale mulțimii nu sunt divizibile cu 2 și nu cu 3 ?

4) Dacă $n = 2024$ determinați nr. maxim de elemente ale unei submulțimi B a lui A a.î. produsul elementelor să nu fie divizibil cu 36

$\left\lfloor \frac{n}{7} \right\rfloor$ $\left\lceil \frac{n}{7} \right\rceil$

floor ceil

Sol:

1) $n = 7 \cdot k + r$

$$\left[\frac{n}{7} \right] = k$$

Dacă $r = 0$ atunci avem k multiplii de 7 în A, $7 \cdot 1, 7 \cdot 2, \ldots, 7 \cdot k$

Dacă $r \neq 0$ $(0 < r < 7)$ atunci avem

k multiplii de 7 în A ; $7 \cdot 1, 7 \cdot 2, \dots, 7 \cdot k$

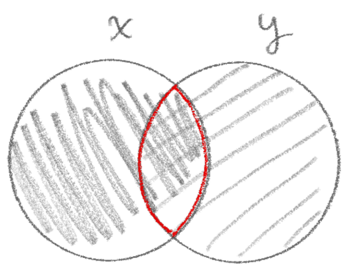
2)

$$A_2 = \{ t \in A \mid 2 \mid t \}$$
$$A_3 = \{ l \in A \mid 3 \mid l \}$$

$$B = \{ m \in A \mid 2 \mid m \text{ şi } 3 \mid m \}$$
$$C = \{ m \in A \mid 2 \mid m \text{ sau } 3 \mid m \}$$

$$B = A_2 \cap A_3 \overset{\text{prop div}}{=} A_6$$
$$C = A_2 \cup A_3$$

$$|B| = |A_6| = \left[\frac{m}{6} \right]$$



$$|x \cup y| = |x| + |y| - |x \cap y|$$

$$C = |A_2 \cup A_3| = |A_2| + |A_3| - |A_2 \cap A_3|$$

$$|C| = \left[\frac{m}{2} \right] + \left[\frac{m}{3} \right] - \left[\frac{m}{6} \right]$$

3) $D = \{ y \in A \mid 2 \nmid y \text{ şi } 3 \nmid y \}$

$$= C_A A_2 \cap C_A A_3$$

$$= C_A (A_2 \cup A_3)$$

$= |A| - |A_2 \cup A_3|$

$= n - \left[\frac{n}{2}\right] - \left[\frac{n}{3}\right] + \left[\frac{n}{6}\right]$

4) $36 = 2^2 \cdot 3^2$

1 2 3 4 5 $\cancel{6}$ 7 8 $\cancel{9}$ ...

2020 2021 ~~2022~~ 2023 2024

$6K$ $\quad 6K+1$ $\quad 6K+2$ $\quad 6K+3$

$6K+4$ $\quad 6K+5$

Fie B o astfel de mulțime maximală și $|B| = t$

Nr. maxim căutat este 1351

Mulțimea $B_0 = \{6K+1,$ și 3 $6K+2, 6K+4, 6K+5, K \in \mathbb{Z}\}$ este o astfel de mulțime care satisface ipoteza problemei iarnă

$2024 = 6 \cdot 337 + 2$

max 1 → 337 elemente de forma $6K$

× 338 — " — " — $6K+1$

$\boxed{}$ 338 — " — " — $6K+2$

337 — " — " — $6K+3$

$\boxed{}$ 337 — " — " — $6K+4$

× 337 — " — " — $6K+5$

$\Rightarrow \quad 338 + 337 + 337 + 338 + 1$

??

ex 3

$A = \{ a_1, \ldots, a_n \}$

$\mathcal{P}(A) = \{ B \mid B \subseteq A \}$

$|B| \in \{ 0, 1, \ldots, n \}$

$A' = \emptyset$

$\mathcal{P}(A') = \{ \emptyset \}$

$\mathcal{P}(\mathcal{P}(A')) = \{ \emptyset, \{ \emptyset \} \}$

$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(A'))) = \{ \emptyset, \{ \emptyset \}, \{ \{ \emptyset \} \}, \{ \emptyset, \{ \emptyset \} \} \}$

$|B| = 0 \iff B = \emptyset$

$|B| = 1 \quad : \quad \binom{n}{1}$

$|B| = 2 \quad \binom{n}{2}$

...

$|B| = n \quad : \quad \binom{n}{n}$

$$|\mathcal{P}(A)| = 1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n}$$

$$= (1 + 1)^n = 2^n$$