Dorca Fernando - Emanuel
grupa 143

Teorema de clasificare metrică a hipercuadricelor

<u>Definiție</u>

O hipercuadrică algebrică în E^n este un polinom de gradul al II-lea $Q[x] \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$, $x = (x_1, \dots, x_n)$.

Ele se pot scrie:

$$q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_i \cdot x_j + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} a_{i0} \cdot x_i + a_{00}$$

$$a_{i0} = a_{0i} \quad \forall\, i = \overline{1,n}$$

Hipercuadricei algebrice i se asociază hipercuadrica geometrică $Q = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid q(x) = 0 \}$.

<u>Teoremă</u>

Dată o hipercuadrică algebrică $q \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$, $\exists\, f \in Aut(E_0^n)$ a.î. not. $x = f(y)$ și $\tilde{q} = q(f(y))$ are una din formele

I. $\tilde{q}(y_1, \dots, y_n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot y_i^2 + b_{00}$

II. $\tilde{q}(y_1, \dots, y_n) = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \cdot y_i^2 + 2p \cdot y_n$, $\underset{\neq 0}{p}$ = constantă

$$a = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & a_{10} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & a_{n0} \\ a_{01} & \dots & a_{0n} & a_{00} \end{pmatrix}$$

Invarianţii

$\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} = \text{spec } a$

$\Delta = \det A$

$\delta = \det a$

$i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = Tr(a)$

Criteriul principal de clasificare

Hipercuadrice nedegenerate $\Rightarrow \delta \neq 0$

Hipercuadrice degenerate $\Rightarrow \delta = 0$

Clasificarea pentru n=2

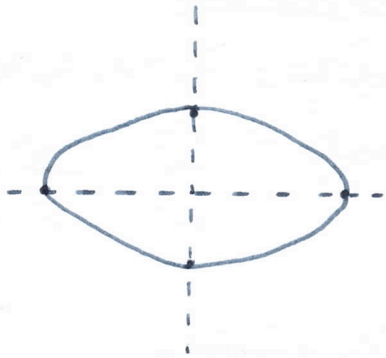
In planul E^2, hipercuadricele sunt conice și se clasifica astfel:

I Conice nedegenerate ($\delta \neq 0$)

1. Elipsa

condiții : $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$

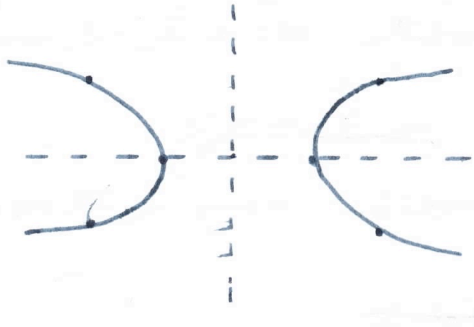
ecuație : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



2. Hiperbola

condiții : $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$
(sau invers)

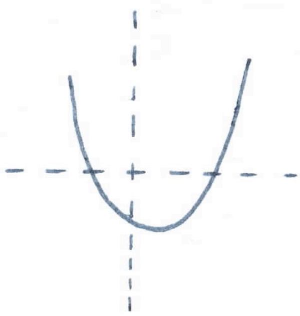
ecuație : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$



3. Parabola

condiții : unul din $\lambda_i = 0$

ecuație : $y^2 = 4ax$



II Caz degenerat ($\delta = 0$)

- punct dublu
- drepte concurente
- drepte paralele
- dreaptă dublă
- mulțimea vidă

Clasificarea pentru $n=3$

In planul E^3, hipercuadricele sunt cuadrice și se clasifică astfel

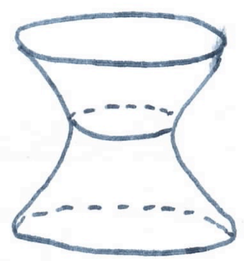
I Cuadrice nedegenerate ($\delta \neq 0$)

1. Elipsoidul

condiții: $\lambda_1>0,\ \lambda_2>0,\ \lambda_3>0$

ecuație: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

2. Hiperboloizi

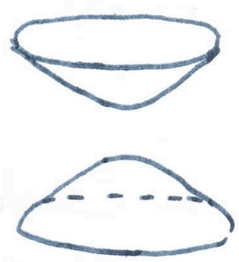


a) cu o pânză

condiții: două $\lambda_i>0$, unul <0

b) cu 2 pânze

condiții: două $\lambda_i<0$, unul >0



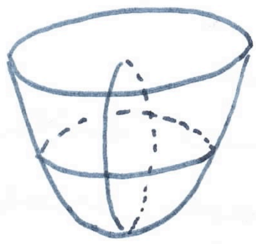
~~condiții~~

ecuație: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c} = \begin{cases} 1 & (\text{o pânză}) \\ -1 & (2\ \text{pânze}) \end{cases}$

3. Paraboloizi

condiții: unul din $\lambda_i = 0$

a) eliptic



condiție: $\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 > 0,\ \lambda_3 = 0$

ecuație: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{z}{c}$

b) hiperbolic

condiții: $\lambda_1 > 0\ \ \lambda_2 < 0,\ \lambda_3 = 0$

ecuație: $\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = \dfrac{z}{c}$

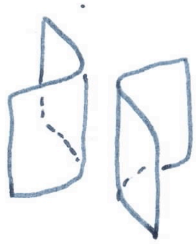
II Cuadrice degenerate ($\delta = 0$)

1. Cilindri

a) eliptic

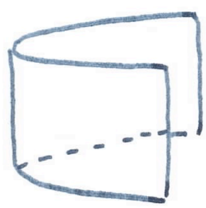
ecuație: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

b) hiperbolic



ecuație $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

c) parabolic



ecuație: $y = a x^2$

2. <u>Alte cazuri degenerate</u>

- conul
- planul dublu
- dreapta dublă
- plane paralele
- plane secante

Bibliografie

Curs 7 Geometrie : A. Teleman