# Seminar 1

ex 1

Fie $x_n = \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Arătați, folosind definiția, că $\lim_{n \to \infty} x_n = 0$

ex 2

Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{Z}$ și $l \in \mathbb{R}$ a.î. $\lim_{n \to \infty} x_n = l$.

Arătați că $l \in \mathbb{Z}$

ex 3

Fie $a \in (0, +\infty)$. Determinați $\lim_{n \to \infty} n \cdot a^n$

ex 4

Fie $a, b \in (0, +\infty)$

Determinați $\lim_{n \to \infty} \left( \frac{a \cdot n^2 + 3n + 5}{b \cdot n^2 + 2n + 3} \right)^n$

ex 5

Determinați $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n}$

ex 6

Fie $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Arătați că $x_n$ e convergent

ex 1

Fie $x_n = \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Arătați, folosind definiția, că $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$

Sol:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = 0 \overset{def}{\iff} \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ a.î. } \forall n \geq n_\varepsilon$$

avem $|x_n - 0| < \varepsilon$

Fie $\varepsilon > 0$, fixat în mod arbitrar

Căutăm $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon$, avem $|x_n - 0| < \varepsilon$

$$|x_n - 0| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$|x_n - 0| < \varepsilon \iff \frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon}$$

Alegem $n_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 \in \mathbb{N}$

$\forall n \geq n_\varepsilon$ avem $n > \frac{1}{\varepsilon}$

Deci $\lim\limits_{x \to \infty} x_n = 0$

$\square$

ex 2

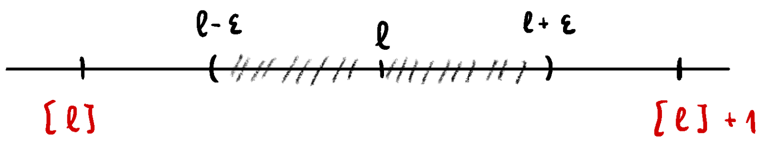
Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{Z}$ și $l \in \mathbb{R}$ a.î. $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = l$.

Arătați că $l \in \mathbb{Z}$

Sol:

Știm că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \ell$, deci știm că $\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall\, n \geq n_\varepsilon$ avem $|x_n - \ell| < \varepsilon$

Presupunem prin absurd că $\ell \notin \mathbb{Z}$




Alegem $\varepsilon > 0$ a.î. $(\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon) \cap \mathbb{Z} = \emptyset$,
deci alegem $\varepsilon > 0$ a.î. $[\ell] < \ell - \varepsilon$ și $\ell + \varepsilon < [\ell] + 1$

$$[\ell] < \ell - \varepsilon \iff \varepsilon < \underbrace{\ell - [\ell]}_{>0}$$

$$\ell + \varepsilon < [\ell] + 1 \iff \varepsilon < \underbrace{[\ell] + 1 - \ell}_{>0}$$

Putem alege un $\varepsilon > 0$ ca mai sus, deoarece
$\ell - [\ell] > 0$ și $[\ell] + 1 - \ell > 0$
Mai exact, putem alege $\forall\, \varepsilon \in (0, \min\{\ell - [\ell], [\ell] + 1 - \ell\})$

Pt $\forall\, \varepsilon > 0$ a.î. $(\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon) \cap \mathbb{Z} = \emptyset$ $\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î.
$\forall\, n \geq n_\varepsilon$, avem $x_n \in (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$
Cum $x_n \in \mathbb{Z}$, $\forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow x_n \in \overbrace{(\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon) \cap \mathbb{Z}}^{''\emptyset} = \emptyset$

✗
(contradicție)

Deci $\ell \in \mathbb{Z}$ $\square$

## Criteriul raportului pentru șiruri cu termeni strict pozitivi

Fie $(x_n)_n \subset (0, +\infty)$ a.î. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \overset{not}{=} \ell \in [0, \infty]$

$[0,\infty) \cup \{\infty\}$

1) Dacă $\ell < 1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

2) Dacă $\ell > 1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$

3) Dacă $\ell = 1$, atunci criteriul nu decide

**ex 3**

Fie $a \in (0, +\infty)$. Determinați $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot a^n$

**Sol:**

Fie $x_n = n \cdot a^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\cdot a^{\cancel{n+1}}}{n \cdot \cancel{a^n}} = a \cdot \lim_{n\to\infty} \overset{=1}{\frac{n+1}{n}} = a$$

Conform Criteriului raportului pentru șiruri cu termeni strict pozitivi avem:

1) Dacă $a < 1$ (i.e. $a \in (0,1)$), atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

2) Dacă $a > 1$ (i.e. $a \in (1, \infty)$), atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$

3) Dacă $a = 1$ atunci criteriul nu decide

Fie $a = 1$

$x_n = n \cdot 1^n = n, \ \forall n \in \mathbb{N}$

Deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$

Am obținut $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \begin{cases} 0, & a \in (0,1) \\ \infty, & a \in [1, +\infty) \end{cases}$ $\square$

## Criteriul radicalului pentru șiruri cu termeni strict pozitivi

Fie $(x_n)_n \subset (0, +\infty)$ a.î. $\exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} \overset{not}{=} \ell \in [0, \infty]$

$[0,\infty) \cup \{\infty\}$

1) Dacă $\ell < 1$, atunci $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$

2) Dacă $\ell > 1$, atunci $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$

3) Dacă $\ell = 1$, atunci criteriul nu decide

ex 4

Fie $a, b \in (0, +\infty)$

Determinați $\lim_{n\to\infty} \left( \dfrac{a \cdot n^2 + 3n + 5}{b \cdot n^2 + 2n + 3} \right)^n$

Sol:

Fie $x_n = \left( \dfrac{a \cdot n^2 + 3n + 5}{b \cdot n^2 + 2n + 3} \right)^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty} \left( \frac{a \cdot n^2 + 3n + 5}{b \cdot n^2 + 2n + 3} \right)^n = \frac{a}{b}$$

Conform Criteriul radicalului pentru șiruri cu termeni strict pozitivi avem:

1) Dacă $\frac{a}{b} < 1$ (i.e. $a < b$), atunci $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$

2) Dacă $\frac{a}{b} > 1$ (i.e. $a > b$), atunci $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$

3) Dacă $\frac{a}{b} = 1$ (i.e. $a = b$), atunci criteriul nu decide

Fie $a = b$

$$x_n = \left( \frac{a \cdot n^2 + 3n + 5}{[redacted] n^2 + 2n + 3} \right)^n$$

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} \left( \frac{a \cdot n^2 + 3n + 5}{a n^2 + 2n + 3} \right)^n \qquad (1^\infty)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left( 1 + \frac{a \cdot n^2 + 3n + 5}{a n^2 + 2n + 3} - 1 \right)^n$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left( 1 + \frac{\cancel{a n^2} + 3n + 5 - \cancel{a n^2} - 2n - 3}{a n^2 + 2n + 3} \right)^n$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left( 1 + \frac{n+2}{a n^2 + 2n + 3} \right)^n$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left[ \left( 1 + \frac{n+2}{a n^2 + 2n + 3} \right)^{\frac{a n^2 + 2n + 3}{n+2}} \right]^{n \cdot \frac{n+2}{a n^2 + 2n + 3}}$$

$$= e^{\lim_{n \to \infty} \frac{n^2 + 2}{a n^2 + 2n + 3}}$$

$$= e^{\frac{1}{a}}$$

Am obținut $\lim_{n \to \infty} x_n = \begin{cases} 0, & a < b \\ \infty, & a > b \\ e^{\frac{1}{a}}, & a = b \end{cases}$

$\square$

## Propoziție

Fie $(x_n)_n \subset (0, +\infty)$ a.î. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \ell \in [0, +\infty]$

Atunci $\exists \lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{x_n} = \ell$

ex 5

Determinați $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{n}$

**Sol:**

Fie $x_n = n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{n+1}{n} = 1 \quad \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{x_n} = 1$$

Deci $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$

$\square$

ex 6

Fie $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Arătați că $x_n$ e convergent

**Sol:**

Arătam că $x_n$ este monoton și mărginit

## Monotonia

Fie $n \in \mathbb{N}^*$

$$x_{n+1} - x_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \ln(n+1)\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n\right)$$

$$= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n$$

$$= \frac{1}{n+1} - \left(\underbrace{\ln(n+1) - \ln(n)}\right)$$

Fie $f_n : [n, n+1] \to \mathbb{R}$, $\quad f_n(x) = \ln(x)$

1) $f_n$ continuă pe $[n, n+1]$

2) $f_n$ derivabilă pe $(n, n+1)$

T. Lagrange

$$\Rightarrow \exists\, c_n \in (n, n+1) \text{ a.î. } f_n'(c_n) = \frac{f_n(n+1) - f_n(n)}{\cancel{n}+1-\cancel{n}}$$

$$f_n'(c_n) = (\ln(c_n))' = \frac{1}{c_n}$$

$$\Rightarrow \exists\, c_n \in (n, n+1) \text{ a.î. } \frac{1}{c_n} = \ln(n+1) - \ln(n)$$

$$n < c_n < \frac{1}{n+1} \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{c_n} < \frac{1}{n} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln(n)} < \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln(n)) < 0$$

Așadar $(x_n)_n$ strict descrescator (1)

## Mărginirea

Deoarece $(x_n)_n$ este s. desc., avem $x_n \leq x_1 = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Fie $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ și $f_k : [k, k+1] \to \mathbb{R}$

$f_k(x) = \ln x$

1) $f_K$ continuă pe $[K, K+1]$

2) $f_K$ derivabilă pe $(K, K+1)$

T. Lagrange

$$\Rightarrow \exists\, c_K \in (K, K+1) \quad \text{a.î.} \quad f_K'(c_K) = \frac{f_K(n+1) - f_K(n)}{\cancel{n+1} - \cancel{n}}$$

$$\Rightarrow \exists\, c_K \in (K, K+1) \quad \text{a.î.} \quad \frac{1}{c_K} = \ln(K+1) - \ln(K)$$

$$K < c_K < K+1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{K+1} < \frac{1}{c_K} < \frac{1}{K}$$

$$K = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} < \cancel{\ln 2} - \ln 1 < 1$$

$$K = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{3} < \cancel{\ln 3} - \cancel{\ln 2} < \frac{1}{2}$$

...

$$K = n \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \cancel{\ln(n)} < \frac{1}{n}$$

$(+)$

$$\dots < \ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \quad \Big| - \ln(n)$$

$$\ln(n+1) - \ln(n) < 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n) \iff$$

$$\iff \quad x_n > \ln(n+1) - \ln(n) > 0$$

Așadar $0 < x_n \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ (i.e. $(x_n)_n$ mărginit) (2)

$$\left.\begin{array}{l}(1)\\(2)\end{array}\right\} \xRightarrow[\text{Weierstrass}]{\text{Th.}} (x_n) \text{ este conv.}$$

$\square$