9,5

Nume: MITRACHE ANTONIE DANIEL
Grupă: 143

Lucrare la Algebră Liniară și Geometrie

13 (1) (3p.) Fie sistemul omogen

$$\begin{cases} x + y - z + 3t = 0 \\ 2x + 6y - 3z + t = 0 \\ 3x + 7y - 4z + 4t = 0 \\ x + 5y - 2z - 2t = 0. \end{cases}$$

(a) Găsiți o bază în spațiul soluțiilor acestui sistem;

(b) Arătați că vectorul $(1, 11, 24, 4)$ este soluție a sistemului și determinați coordonatele sale în raport cu baza obținută.

(2) (4p) Fie endomorfismul $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a cărui matrice în baza canonică este

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 2 \\ 17 & -10 & 5 \\ 10 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

0,5 (a) Scrieți matricea lui f în raport cu baza $\{(1, 2, 1), (0, 1, 2), (1, 3, 2)\}$.

(b) Determinați valorile proprii și vectorii proprii corespunzători.

(c) Determinați nucleul și imaginea lui f.

(3) (2p.) Fie A o matrice cu proprietatea că suma elementelor de pe fiecare coloană este egală cu o constantă r. Arătați că $r \in \sigma(A)$.

1. $\begin{cases} x+y-z+3t=0 \\ 2x+6y-3z+t=0 \\ 3x+7y-4z+4t=0 \\ x+5y-2z-2t=0 \end{cases}$

a) Găsim spațiul soluțiilor

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 6 & -3 & 1 \\ 3 & 7 & -4 & 4 \\ 1 & 5 & -2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_4-L_1]{L_2-2L_1,\ L_3-3L_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -1 & -5 \\ 0 & 4 & -1 & -5 \\ 0 & 4 & -1 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_4-L_2]{L_3-L_2}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -1 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \cdot \frac{1}{4}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{5}{4} \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1-L_2}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{4} & \frac{17}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{5}{4} \end{pmatrix} \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{17}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{5}{4} \end{array}\right)$$

$$x = \frac{3}{4}z - \frac{17}{4}t$$

$$y = \frac{1}{4}z + \frac{5}{4}t$$

$\Rightarrow$ Spațiul soluțiilor $S = \left\{\left(\frac{3}{4}\alpha - \frac{17}{4}\beta, \frac{1}{4}\alpha + \frac{5}{4}\beta, \alpha, \beta\right) \middle| \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\}$

$$\left(\frac{3}{4}\alpha - \frac{17}{4}\beta, \frac{1}{4}\alpha + \frac{5}{4}\beta, \alpha, \beta\right) =$$

$$= \alpha\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, 1, 0\right) + \beta\left(-\frac{17}{4}, \frac{5}{4}, 0, 1\right)$$

Alegem $B = \{(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, 1, 0), (-\frac{17}{4}, \frac{5}{4}, 0, 1)\}$

bază în spațiul soluțiilor.

b) Ar. că $(1, 11, 24, 4)$ sol. a sistemului

$$\begin{cases} 1 + 11 - 24 + 3\cdot 4 = 12 - 24 + 12 = 0 \\ 2\cdot 1 + 6\cdot 11 - 3\cdot 24 + 4 = 68 - 72 + 4 = 0 \\ 3\cdot 1 + 7\cdot 11 - 4\cdot 24 + 4\cdot 4 = 80 + 16 - 96 = 0 \\ 1 + 5\cdot 11 - 2\cdot 24 + 2\cdot 4 = 56 - 2\cdot 28 = 56 - 56 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow (1, 11, 24, 4)$ sol. a sistemului

Coord. în raport cu baza B.

Fie α, β coord.

$$(1, 11, 24, 4) = \alpha\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, 1, 0\right) + \beta\left(-\frac{17}{4}, \frac{5}{4}, 0, 1\right)$$

$$\begin{cases} \frac{3}{4}\cdot\alpha - \frac{17}{4}\cdot\beta = 1 & \text{Verifică} \\ \frac{1}{4}\cdot\alpha + \frac{5}{4}\cdot\beta = 11 & \text{Verifică} \\ \boxed{\alpha = 24} \\ \boxed{\beta = 4} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Coord lui $(1, 11, 24, 4)$ în raport cu B

sunt $24, 4$.

2. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 2 \\ 17 & -10 & 5 \\ 10 & -6 & 3 \end{pmatrix}$

a) Matricea lui f în raport cu

$B = \{(1,2,1), (0,1,2), (1,3,2)\}$

$f[B] = P^{-1} A P$ unde $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Calculăm P^{-1}:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 - L_1]{L_2 - 2L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_3 - 2L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \cdot (-1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[L_2 - L_3]{L_1 - L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} A P = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -4 & 2 \\ 17 & -10 & 5 \\ 10 & -6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -4 & -12 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

h) Valorile proprii și vectorii proprii

Fie λ valoare proprie

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & -4 & 2 \\ 17 & -10-\lambda & 5 \\ 10 & -6 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (7-\lambda)(-10-\lambda)(3-\lambda) - 12\cdot 17$$

$$-200 - 20(-10-\lambda)$$

$$+30(7-\lambda) + 4\cdot 17(3-\lambda) =$$

$$= (21 - 10\lambda + \lambda^2)(-10-\lambda) - \cancel{404} + \cancel{200} + 20\lambda$$

$$+210 - 30\lambda + \cancel{204} - 68\lambda = (21 - 10\lambda + \lambda^2)(-10-\lambda)$$

$$-78\lambda + 210 = -\cancel{210} - 21\lambda + 100\lambda + \cancel{10\lambda^2} - \cancel{10\lambda^2} - \lambda^3$$

$$-78\lambda + \cancel{210} =$$

$$= -\lambda^3 + \lambda = \lambda(-\lambda^2 + 1) = -\lambda(\lambda^2 - 1) =$$

$$= -\lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1)$$

$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 1 \quad \lambda_3 = -1$ valori proprii

$$\sigma(A) = \{0, 1, -1\}$$

Fie $\lambda_1 = 0$, v vector propriu asociat, $v = (a, b, c)$

$$A \cdot v = \lambda \cdot v = 0$$

$$\begin{pmatrix} 7 & -4 & 2 \\ 17 & -10 & 5 \\ 10 & -6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Rezolvam sistemul $\begin{cases} 7a-4b+2c=0 \\ 17a-10b+5c=0 \\ 10a-6b+3c=0 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 7 & -4 & 2 \\ 17 & -10 & 5 \\ 10 & -6 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -\frac{4}{7} & \frac{2}{7} \\ 17 & -10 & 5 \\ 10 & -6 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -\frac{4}{7} & \frac{2}{7} \\ 0 & -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -\frac{4}{7} & \frac{2}{7} \\ 0 & -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -\frac{4}{7} & \frac{2}{7} \\ 0 & -\frac{4}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$a = 0 \quad , b = \frac{1}{2} c$

$V_{\lambda_1} = \{ (0, \frac{1}{2}\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R} \}$

Pt. $\lambda_2 = 1$. Fie $v = (a, b, c)$

$A \cdot v = \lambda_2 \cdot v$

$$\begin{pmatrix} 7 & -4 & 2 \\ 17 & -10 & 5 \\ 10 & -6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 7a-4b+2c=a \\ 17a-10b+5c=b \\ 10a-6b+3c=c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6a-4b+2c=0 \\ 17a-11b+5c=0 \\ 10a-6b+2c=0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & -4 & 2 \\ 17 & -11 & 5 \\ 10 & -6 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 17 & -11 & 5 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & -11 & 17 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$c = a$$
$$b = 2a$$

$$V_{\lambda_2} = \{ (\alpha, 2\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R} \}$$

Für $\lambda_3 = -1$. Für $v = (a, b, c)$

$$A \cdot v = \lambda_3 \cdot v$$

$$\begin{pmatrix} 7 & -4 & 2 \\ 17 & -10 & 5 \\ 10 & -6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ -b \\ -c \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 7a - 4b + 2c = -a \\ 17a - 10b + 5c = -b \\ 10a - 6b + 3c = -c \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 8a - 4b + 2c = 0 \\ 17a - 9b + 5c = 0 \\ 10a - 6b + 4c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 8 & -4 & 2 \\ 17 & -9 & 5 \\ 10 & -6 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 17 & -9 & 5 \\ 5 & -3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 5 & -9 & 17 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} c = -6a \\ b = -a \end{array} \quad V_{\lambda_3} = \{ (\alpha, -\alpha, -6\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R} \}$$

c) $\operatorname{Ker} f = \{ v \in \mathbb{R}^3 \mid Av = 0 \}$

Fie $v = (a, b, c)$

$$\begin{pmatrix} 7 & -4 & 2 \\ 14 & -10 & 5 \\ 10 & -6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Din b) avem soluția $S = \{ (0, \frac{1}{2}\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R} \}$

$\Rightarrow \operatorname{Ker} f = \{ (0, \frac{1}{2}\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R} \}$

$\operatorname{Im} f = \{ Av \mid v \in \mathbb{R}^3 \}$

Fie $v = (a, b, c)$

$$Av = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} c_1 & c_2 & c_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 7 & -4 & 2 \\ 14 & -10 & 5 \\ 10 & -6 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$\det A = 0 \Rightarrow$ nu toți vectorii sunt liniar indep.

$$\operatorname{Rang}(c_1 \mid c_2) = \operatorname{Rang} \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 14 & -10 \\ 10 & -6 \end{pmatrix} = 2 = \text{nr. coloane}$$

$\Rightarrow c_1, c_2$ SLI

$\Rightarrow \operatorname{Im} f = \operatorname{Span}\{ (7, 14, 10), (-4, -10, -6) \}$
$= \langle (7, 14, 10), (-4, -10, -6) \rangle$

3. Fie A^T transpusa lui A

Știm că $\nabla(A) = \nabla(A^T)^{(*)}$

Suma elem pe fiecare linie din $A^T = \lambda$.

Fie $\vec{1}_n = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ cu n elem

$\Rightarrow A^T \cdot \vec{1}_n = \lambda \cdot \vec{1}_n \Rightarrow \lambda \in \nabla(A^T)$

$\overset{(*)}{\Longrightarrow} \lambda \in \nabla(A)$