

Curs 6

5 Nov 2024

1. Teorema lui L'Hospital
2. Derivate de ordin n
3. Funcții de clasă C^n
4. Formula lui Taylor cu rest Lagrange

$$f(x) = f(a) + \underbrace{f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}_{T_n(x) \text{ (polinomul Taylor de ordin } n)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}_{R_n(x) = \text{restul de ordinul } n \text{ al Formulei lui Taylor cu rest Lagrange}}$$

5. Tipuri de funcții

6. Convergența simplă

$$f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$

7. Convergența uniformă

$$f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{x \in A} d(f_n(x) - f(x)) \right) = 0$$

ex c

Stud. conv. simplă și uniformă pentru $(f_n)_{n \geq 1}$

$$f_n : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{x}{1 + n^2 x^2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

8. Teorema lui Dini

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ cont} \\ (f_n)_n \text{ monoton} \\ f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f \\ A \text{ compactă} \end{array} \right\} \Rightarrow f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{u} f$$

9. Teorema lui Polya

$$f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\left. \begin{array}{l} f_n \text{ monotoni} \\ f \text{ cont} \\ f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f \end{array} \right\} \Rightarrow f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{u} f$$

10. Teorema lui Bernstein

12. Teorema de permutare a limitelor cu derivata

13. Serii de funcții

14. Convergență simplă / uniformă / absolută

15. Teorema lui Weierstrass

$$\left. \begin{array}{l} |f_n(x)| \leq a_n \\ \sum a_n \text{ conv} \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_n f_n \text{ converge uniform și absolut}$$

ex.

$$\text{Arătați că seria de funcții } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2 + x^2} \text{ converge uniform}$$

$$(|f_n(x)| \leq \frac{1}{n^2} \text{ Weierstrass})$$