7 4

Nume: DONEA FERNANDO-EMANUEL
Grupă: 143

Lucrare la Algebră Liniară și Geometrie

V (1) (3p.) Fie sistemul omogen

$$\begin{cases} x + y - z + 3t = 0 \\ 2x + 6y - 3z + t = 0 \\ 3x + 7y - 4z + 4t = 0 \\ x + 5y - 2z - 2t = 0. \end{cases}$$

(a) Găsiți o bază în spațiul soluțiilor acestui sistem;
(b) Arătați că vectorul $(1, 11, 24, 4)$ este soluție a sistemului și determinați coordonatele sale în raport cu baza obținută.

1 (2) (4p) Fie endomorfismul $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a cărui matrice în baza canonică este

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 2 \\ 17 & -10 & 5 \\ 10 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

0,5 (a) Scrieți matricea lui f în raport cu baza $\{(1,2,1), (0,1,2), (1,3,2)\}$.
0,5 (b) Determinați valorile proprii și vectorii proprii corespunzători.
(c) Determinați nucleul și imaginea lui f.

2 (3) (2p.) Fie A o matrice cu proprietatea că suma elementelor de pe fiecare coloană este egală cu o constantă r. Arătați că $r \in \sigma(A)$.

DONEA FERNANDO-EMANUEL 9.05.2024

Grupa 143

Test algebră

ex 1

a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 6 & -3 & 1 \\ 3 & 7 & -4 & 4 \\ 1 & 5 & -2 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -1 & -5 \\ 0 & 4 & -1 & -5 \\ 0 & 4 & -1 & -5 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -1 & -5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & s & t \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{4} & \frac{17}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{5}{4} \end{pmatrix} \end{array}$$

$$x = \frac{3}{4}s - \frac{17}{4}t$$

$$y = \frac{1}{4}s + \frac{5}{4}t$$

$$S = \left\{ \left(\frac{3}{4}s - \frac{17}{4}t, \ \frac{1}{4}s + \frac{5}{4}t, \ s, \ t \right) \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\left(\frac{3}{4}s - \frac{17}{4}t ,\ \frac{1}{4}s + \frac{5}{4}t ,\ s,\ t \right)$$

$$= \left(\frac{3}{4}s ,\ \frac{1}{4}s,\ s,\ 0\right) + \left(-\frac{17}{4}t,\ \frac{5}{4}t,\ 0,\ t\right)$$

$$= s\left(\frac{3}{4},\ \frac{1}{4},\ 1,\ 0\right) + t\left(-\frac{17}{4},\ \frac{5}{4},\ 0,\ 1\right)$$

$$B = \left\{ \left(\frac{3}{4},\ \frac{1}{4},\ 1,0\right),\ \left(-\frac{17}{4},\ \frac{5}{4},\ 0,1\right) \right\}$$

și $\dim B = 2$

b) $v = (1, 11, 24, 4)$

Pt $s = 24$ și $t = 4$

$$v = 24 \cdot \left(\frac{3}{4},\ \frac{1}{4},\ 1,0\right) + 4 \cdot \left(-\frac{17}{4},\ \frac{5}{4},0,1\right)$$

$$= (18, 6, 24, 0) + (-17, 5, 0, 4)$$

$$= (1, 11, 24, 0)$$

deci v este soluție

Fie $[v]_B = (\alpha, \beta)$

$$v = \alpha \cdot \left(\frac{3}{4},\ \frac{1}{4},\ 1,0\right) + \beta \cdot \left(-\frac{17}{4},\ \frac{5}{4},0,1\right)$$

$$(1,11,24,4) = \left(\frac{3}{4}\alpha,\ \frac{\alpha}{4},\ \alpha,0\right) + \left(-\frac{17}{4}\beta,\ \frac{5}{4}\beta,\ 0,\ \beta\right)$$

$$\begin{cases} \frac{3}{4}\alpha - \frac{17}{4}\alpha = 1 \\ \frac{\alpha}{4} + \frac{5}{4}\alpha = 11 \\ \alpha = 24 \\ \beta = 4 \end{cases} \Rightarrow [v]_\beta = (24, 4)$$

DONEA FERNANDO - EMANUEL

ex 2

a)

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 2 \\ 17 & -10 & 5 \\ 10 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$[f]_B = P^{-1} \cdot A \cdot P, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$P^{-1} =$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 3 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$[f]_B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -4 & 2 \\ 17 & +10 & 5 \\ 10 & -6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -7 & -4 & -12 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

b) $p_A(x) = \begin{vmatrix} 7-x & -4 & 2 \\ 17 & -10x & 5 \\ 10 & -6 & -3x \end{vmatrix}$

$= (7-x)$

DONEA FERNANDO - EMANUEL

ex 2

b)

$$P_A(x) = \det(A - x \cdot I_n)$$

$$= \begin{vmatrix} 7-x & -4 & 2 \\ 17 & -10-x & 5 \\ 10 & -6 & 3-x \end{vmatrix}$$

$$= (7-x)(-10-x)(3-x) + 17\cdot(-6)\cdot 2$$
$$+ (-4)\cdot 5\cdot 10 - 2\cdot 10\cdot(-10-x) - 5\cdot(-6)\cdot(7-x)$$
$$- 17\cdot(-4)\cdot(3-x)$$

$$= -(21 - 10x + x^2)(10+x) - 204 - 200$$
$$- 20\cdot(-1)\cdot(10+x) + 30\cdot(7-x) + 68\cdot(3-x)$$

$$= -(210 - 100x + 10x^2 + 21x - 10x^2 + x^3)$$
$$-\cancel{404} + \cancel{200} + 20x + 210 - 30x + \cancel{204}$$
$$-68x$$

$$= -\cancel{210} + \underline{100x} - \cancel{10x^2} - \underline{21x} + \cancel{10x^2} - x^3$$
$$+ \cancel{210} - 30x - 68x$$

$$= -x^3 - 119x + 100x$$

5

$$-x^3 - 19x = 0$$

$$-x(x^2+19) = 0$$

$$x = 0$$

$$\Rightarrow \quad \sigma(A) = 0$$

Fie $\lambda = 0$ și $v = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$

vectorul propriu asociat

$$A \cdot v^t = \lambda \cdot v^t$$

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 2 \\ 17 & -10 & 5 \\ 10 & -6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 7a - 4b + 2c = 0 \\ 17a - 10b + 5c = 0 \\ 10a - 6c + 3c = 0 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 7 & -4 & 2 \\ 17 & -10 & 5 \\ 10 & -6 & 3 \end{vmatrix} = -210 - 200 - 1$$

DOWEA FERNANDO - EMANUEL

ex 2

c)

$Ker = \{ v \in \mathbb{R}^3 \mid f(v) = 0 \}$

Aflam soluțiile sistemului omogen

$$\begin{cases} 7x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ 17x_1 - 10x_2 + 5x_3 = 0 \\ 10x_1 - 6x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 7 & -4 & 2 \\ 17 & -10 & 5 \\ 10 & -6 & 3 \end{pmatrix} \cdot$$

DONEA FERNANDO - EMANUEL

ex 3

$A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$

$\text{sum}(c_j) = r \quad \forall j = \overline{1,n}$

$\Rightarrow A^T \cdot 1 = r \cdot 1$

unde $1 = (1, 1, 1, \dots, 1)^T$

$\Rightarrow$ 1 este vector propriu asociat lui A^T cu valoarea proprie r

$\Leftrightarrow r \in \sigma(A^T) \quad (1)$

Știm că $\sigma(A) = \sigma(A^T) \quad (2)$

Din (1) și (2) avem că $r \in \sigma(A)$