MODEL ORIENTATIV EXAMEN
GEOMETRIE SI ALGEBRA LINIARA

Fiecare problemă este noatată cu 0,5 puncte. Nota este suma notelor problemelor plus un punct din oficiu. Pe foaia de examen trebuie scrise numai răspunsurile. Fiecare problemă are un singur răspuns corect.

1. Fie V un spaţiu vectorial peste corpul numerelor reale $\mathbb{R}$. Următoarele afirmaţii sunt adevărate, cu EXCEPŢIA
A) $(\alpha+\beta)v = \alpha v + \beta v$ pentru $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ şi $v \in V$.
B) $vw \in V$ pentru $v, w \in V$
C) $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$ pentru $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ şi $v, w \in V$
D) $\alpha(v+w) = \alpha v + \alpha w$ pentru $\alpha \in \mathbb{R}$ şi $v, w \in V$

2. Fie V, W două spaţii vectoriale peste corpul numerelor reale $\mathbb{R}$, şi $f : V \longrightarrow W$ un morfism. Următoarele afirmaţii sunt adevărate pentru f, cu EXCEPŢIA
A) $f(0_V) = 0_W$
B) $f(v_1+v_2) = f(v_1) + f(v_2)$ pentru $(\forall)$ $v_1, v_2 \in V$
C) $f(1_V) = 1_W$
D) $f(\alpha v) = \alpha f(v)$ pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$ şi $v \in V$.

Pentru problemele **3**, **4**, **5** considerăm pentru fiecare $n \geqslant 2$ matricea $A_n \in M_n(\mathbb{R})$ pentru care elementele de pe poziţia (i, i) sunt egale cu $i-1$ şi toate celelalte elemente ale matricei sunt egale cu 1. Notăm cu $\Delta_n = \det(A_n)$.

3. Atunci:
A) $\Delta_3 = -2$ şi $\Delta_4 = -3$
B) $\Delta_3 = -1$ şi $\Delta_4 = -2$
C) $\Delta_3 = -2$ şi $\Delta_4 = 3$
D) $\Delta_3 = 1$ şi $\Delta_4 = 2$

4. Pentru Δ_n ca mai sus, avem:
A) $\Delta_n = -(n-1)$
B) $\Delta_n = (-1)^n(n-1)$
C) $\Delta_n = -(n-2)$
D) $\Delta_n = -(n-2)!$

5. Fie A_n ca mai sus. Atunci inversa matricei A_3 este:

A) $A_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **B)** $A_3^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ **C)** $A_3^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

D) $A_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Pentru problemele **6**, **7**, **8** considerăm matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

6. Atunci:
A) forma eşalon este I_4 şi $\mathrm{rang}(A) = 4$
B) forma eşalon este $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi $\mathrm{rang}(A) = 3$
C) forma eşalon este $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $\mathrm{rang}(A) = 3$
D) forma eşalon este $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi $\mathrm{rang}(A) = 3$

7. Pentru matricea A de mai sus, spaţiul $L = \{v \in \mathbb{R}^4 \mid Av = 0\}$

A) are $\dim(L) = 0$ şi o bază a spaţiului L este $\varnothing$ (mulţimea vidă)
B) are $\dim(L) = 0$ şi o bază a spaţiului L este 0
C) are $\dim(L) = 1$ şi o bază a spaţiului L este ${}^t(-1, 1, 1, 1)$
D) are $\dim(L) = 1$ şi o bază a spaţiului L este ${}^t(1, 1, 1, 1)$

8. Considerând matricea A de mai sus, spaţiul L din problema precedentă şi produsul scalar euclidian pe $\mathbb{R}^4, < v, w >= \sum_{i=1}^4 v_i w_i$. Complementul ortogonal $L^\perp = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid \; < x, v >= 0, (\forall) v \in L\} \subset \mathbb{R}^4$.
A) are dimensiunea 3 şi ecuaţia $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$
B) are dimensiunea 3 şi ecuaţia $-x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$
C) are dimensiunea 4 şi ecuaţia $-x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$
D) are dimensiunea 4 şi este $\mathbb{R}^4$

9. Vectorii $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

A) sunt liniar independenţi şi formează sistem de generatori în $\mathbb{R}^4$
B) sunt liniar independenţi şi nu formează sistem de generatori în $\mathbb{R}^4$
C) nu sunt liniar independenţi şi formează sistem de generatori în $\mathbb{R}^4$
D) nu sunt liniar independenţi şi nici nu formează sistem de generatori în $\mathbb{R}^4$

10. Considerăm matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ şi morfismul $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, definit prin $f(v) = A \cdot v, (\forall) v \in \mathbb{R}^4$. Fie $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ şi $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$. Atunci

A) $v_1 \in \mathrm{Im}(f)$ şi $v_2 \in \mathrm{Im}(f)$
B) $v_1 \notin \mathrm{Im}(f)$ şi $v_2 \in \mathrm{Im}(f)$
C) $v_1 \in \mathrm{Im}(f)$ şi $v_2 \notin \mathrm{Im}(f)$
D) $v_1 \notin \mathrm{Im}(f)$ şi $v_2 \notin \mathrm{Im}(f)$

Considerăm matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

11. Polinomul caracteristic $P_A(X)$ este
A) $X(X-1)^3$ **B)** $X(X-1)^2$ **C)** $(X-2)(X-1)^3$ **D)** $(X-1)^4$

12. Pentru matricea A de mai sus defect$(A - I_4)$ este
A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4

Pentru problemele **13** şi **14** considerăm forma pătratică

$$Q_\alpha(x, y, z) = \alpha x^2 + y^2 + \alpha z^2 + 2xz$$

13. Forma pătratică $Q_\alpha(x, y, z)$ este pozitiv definită pentru:

A) $\alpha = 1$ **B)** $\alpha > 1$ **C)** $\alpha < -1$ **D)** $\alpha = -1$

14. Pentru $\alpha = 1$ forma canonică a formei pătratice $Q_1(x', y', z')$ este

A) $y'^2 - z'^2$ **B)** $x'^2 + y'^2 + z'^2$ **C)** $x'^2 + y'^2 + 2z'^2$ **D)** $y'^2 + 2z'^2$

Pentru problemele **15** şi **16** considerăm hiperplanul
$H = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1\}$ şi punctul $p = {}^t(1, 0, 1, 0)$

15. Distanţa de la p la H este
A) 1 **B)** 2 **C)** 0 **D)** $\frac{1}{2}$

16. Dreapta care trece prin p şi este perpendiculară pe H are ecuaţia
A) $x_1 + 1 = x_2 = x_3 + 1 = x_4$ **B)** $x_1 + 1 = -x_2 = x_3 + 1 = -x_4$
C) $x_1 - 1 = -x_2 = x_3 - 1 = -x_4$ **D)** $x_1 - 1 = x_2 = x_3 - 1 = x_4$

17. Considerăm conica dată de ecuaţia $2x^2 - 2xy + 2y^2 - 2x - 2y + 2 = 0$. Conica reprezintă
A) două drepte concurente **B)** o elipsă **C)** un punct **D)** o parabolă

18. Intersecţia dintre cuadrica de ecuaţie $x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - 2x - 2y - 2z + 1 = 0$ şi planul $z = 1$ este
A) o hiperbolă **B)** o elipsă **C)** un punct **D)** o parabolă