

684.15
684.15
684.15

Queda hecho el depósito
que marca la ley 11.723.

INGENIERIA DE COMUNICACIONES (COMMUNICATION ENGINEERING)

W. L. EVERITT, Ph. D.

DECANO DE LA ESCUELA DE INGENIERIA
UNIVERSIDAD DE ILLINOIS

G. E. ANNER, M. S. en Ing.

PROFESOR ASOCIADO DE INGENIERIA ELECTRICA
UNIVERSIDAD DE ILLINOIS

VERSIÓN CASTELLANA DE

Ing. ADOLFO DI MARCO

PROFESOR TITULAR DE ELECTRÓNICA
UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

SEGUNDA EDICION EN CASTELLANO

1961



-05157

ARBO S.A.C.I.
Buenos Aires ARGENTINA

IMPRESO EN ARGENTINA

PRINTED IN ARGENTINA

P R E F A C I O

COMMUNICATION ENGINEERING

Copyright 1956, McGraw-Hill Book Company, Inc.

1948, ARBÓ EDITORES S. R. L., (Edición en Castellano) en Buenos Aires, República Argentina. Todos los derechos reservados. Este libro, o partes del mismo, no pueden ser reproducidos, en ninguna forma, sin permiso de los Editores.

Al revisar un texto cualquiera en un campo de actividad que se desarrolla muy rápidamente es más fácil agregar temas que suprimir otros, especialmente cuando los que se han tratado en una edición anterior se han desarrollado explosivamente.

Cuando se planeó la primera edición de este trabajo, no parecía demasiado pretencioso el tratar de incluir en un volumen los conceptos fundamentales más importantes de la ingeniería de la telecomunicación. Desde la publicación de la segunda edición han sido muchos los desarrollos importantes que hemos presenciado y se han escrito numerosos y excelentes libros y colecciones sobre temas particulares del mismo campo. Estas subdivisiones comprenden la física electrónica, las aplicaciones circuitales de las válvulas, antenas y propagación, electroacústica, servomecanismos, teoría de la información, generación de pulsos y conformación de ondas, sistemas de computación, y muchos otros tópicos de importancia referentes a la información, su transformación y su trasmisión.

En esta tercera edición se ha preferido concentrar el esfuerzo en los temas que deben preceder al estudio de todas las divisiones de la telecomunicación, esto es, los fundamentos del análisis y la síntesis de las redes lineales, incluso el empleo de elementos unilaterales. Esta decisión se apoya en que la amplia popularidad de que han gozado las dos primeras ediciones se basa precisamente en el énfasis que en ellas se había puesto en esta área. No obstante, con el fin de poner en evidencia los requisitos de diseño que se imponen a las porciones lineales de los sistemas de comunicación, se desarrolla también el análisis de varios tipos de modulación y la transformación de los transitorios del dominio del tiempo al dominio de las frecuencias.

Naturalmente, aunque ya no podemos pretender cubrir la mayor parte del campo de la "Ingeniería de las Comunicaciones", hemos conservado el título, tan bien conocido.

El autor *senior* desea agradecer a su joven colaborador el haberse hecho cargo de la mayor parte del trabajo de revisión, la que nunca hubiera podido completarse sin su valiosa contribución.

Los autores agradecen a sus colegas Prof. J. E. Williams y M. H. Crothers por sus útiles sugerencias en lo que se refiere a los aparatos sobre transformadores de audio, y al Prof. W. J. Fry por la información que nos ha suministrado sobre cristales piezoelectricos.

Agradecemos también a Berenice B. Anner la tarea de poner en limpio el manuscrito.

W. L. EVERITT

G. E.ANNER

Luis J. Brando
INGENIERO
TECNOLÓGICO
ELECTRÓNICO

*D.C. 1979
e. Osorio
ESTUDIANTE
EN ELECTRÓNICA
UNIVERSIDAD DEL TRABAJO
(URUGUAY) 1979.*

CONTENIDO

	<u>Página</u>
PREFACIO	7
LISTA DE LOS SÍMBOLOS PRINCIPALES	11
CAPÍTULO 1. Principios Fundamentales de los Sistemas de Comunicación	15
2. Métodos de Análisis de las Redes	58
3. Análisis del Estado Estacionario y Teoremas de Red	99
4. Resonancia	142
5. Redes Puentes	200
6. Redes Iterativas	229
7. Filtros de Onda	259
8. La Línea Infinita	303
9. Reflexión	338
10. Líneas de Bajas Pérdidas	369
11. Trasformación de Impedancias	412
12. Adaptación de Impedancias con Secciones de Líneas	460
13. Trasformadores de Impedancia de Banda Ancha	478
14. Ecualización	515
15. Amplificadores Lineales	549
16. Acoplamientos Electromecánicos	604
APÉNDICE Funciones Hiperbólicas	634
INDICE	644

LISTA DE LOS SIMBOLOS PRINCIPALES

<i>A</i>	Amplificación de tensión; ganancia	<i>f</i>	Fuerza mecánica instantánea
<i>A</i>	Parte real de la constante de trasferencia imagen	<i>f</i> ₁	Frecuencia inferior de potencia mitad
<i>B</i>	Densidad de flujo magnético	<i>f</i> ₂	Frecuencia superior de potencia mitad
<i>B</i>	Susceptancia	<i>f</i> _c	Frecuencia de corte
<i>B</i>	Parte imaginaria de la constante de trasferencia imagen	<i>f</i> _h	Frecuencia más alta de importancia
<i>b</i>	Susceptancia normalizada	<i>f</i> _o	Frecuencia central de diseño; frecuencia de cero
<i>BW</i>	Ancho de banda	<i>f</i> _r	Frecuencia de resonancia
<i>C</i>	Capacitancia	<i>f</i> _∞	Frecuencia de atenuación infinita
<i>C</i>	Capacidad de un canal, bits por segundo	Δf	Desviación de frecuencia
<i>C</i>	Cofactor de un determinante	<i>f</i> (<i>t</i>)	Función del tiempo
<i>c</i>	Velocidad del sonido en el aire	<i>G</i>	Conductancia
<i>D</i>	Determinante	<i>g</i>	Conductancia normalizada
<i>d</i>	Diámetro	<i>g</i> _m	Conductancia mutua
<i>Dr()</i>	Función impulsora	<i>g</i> (<i>f</i>)	Pareja de Fourier de <i>f</i> (<i>t</i>)
<i>D_x</i>	Derivada de <i>x</i> respecto del tiempo	<i>H</i>	Factor de escala
<i>E</i>	Tensión	<i>H</i>	Información total, bits
<i>E_o</i>	Tensión de un generador; tensión de reja	<i>I</i>	Corriente
<i>E_{oc}</i>	Tensión de circuito abierto	<i>Im</i> (<i>x</i>)	Parte imaginaria de <i>x</i>
<i>E_R</i>	Tensión en el extremo receptor	<i>i</i>	Corriente instantánea
<i>E_s</i>	Tensión en el extremo transmisor	<i>J_n</i> (<i>x</i>)	Función de Bessel de primera clase y orden <i>n</i>
<i>e</i>	Tensión instantánea	<i>j</i>	$\sqrt{-1}$
<i>e</i>	Base de los logaritmos naturales ($= 2,718 +$)	<i>k</i>	Parámetro de diseño
<i>ε</i>	Intensidad de campo eléctrico	<i>k</i>	Factor de reflexión
<i>F</i>	Factor de atenuación ($= e^{j\alpha}$)	<i>k</i>	Coeficiente de acoplamiento
<i>F</i>	Fuerza mecánica	<i>k</i>	Rigidez de un resorte
<i>F₁</i>	Frecuencia global inferior de potencia mitad	<i>L</i>	Inductancia
<i>F₂</i>	Frecuencia global superior de potencia mitad	<i>L₁₂, L_m</i>	Inductancia mutua
		<i>l</i>	Longitud
		$\ln x$	Logaritmo natural de <i>x</i>
		\mathcal{L}	Función de pérdida de onda estacionaria ($= P_{\text{pérd.}}/\alpha P_{\text{sal.}}$)
		<i>M</i>	Inductancia mutua

M	Menor complementario de un determinante
m	Masa
m	Parámetro de diseño
m_a	Factor de modulación de amplitud
m_f	Indice de modulación de frecuencia
m_p	Indice de modulación de fase
N	Potencia de ruido
N	Número de vueltas
n	Número (de pulsos, bandas laterales, etc.)
n	Parámetro de diseño
n	Relación de trasformación de impedancia ($= R_{t1}/R_{t2}$)
P	Potencia media
p	Frecuencia compleja ($= \delta + j\omega$)
p	Número de mallas, nudos o polos
p	Diferencia instantánea de presión
p_0	Cero
p_x	Polo
Q	Factor de calidad
q	Carga eléctrica instantánea
R	Resistencia
R	Impedancia nominal de un filtro
R_o	Resistencia característica
$R(t)$	Respuesta de una red
$\text{Re}\{x\}$	Parte real de x
r	Resistencia normalizada
r	Radio
r_p	Resistencia de placa de una válvula de alto vacío
S	Potencia de señal
S	Relación de onda estacionaria
S	Elastancia eléctrica ($= 1/C$)
S	Área transversal
s	Distancia entre alambres paralelos
s	Longitud de un "stub"
T	Duración de una señal, período
T	Función trasferencia de una red
t	Tiempo
U	Parte real de la immitancia de una red
$U(t)$	Función escalón unitaria
V	Parte imaginaria de la immitancia de una red
v	Velocidad instantánea

v_g	Velocidad de grupo
v_p	Velocidad de fase
VA	Voltampere
W	Energía
$W(\)$	Función immitancia de una red
X	Reactancia
z	Reactancia normalizada
z	Desplazamiento mecánico
z	Distancia al extremo trasmisor de una línea
z	Variable de frecuencia normalizada
Y	Admitancia ($= G + jB$)
Y_{mm}	Autoadmitancia del nodo m
Y_{mn}	Admitancia nodal mutua entre los nodos m y n
y	Distancia al extremo receptor de una línea
y	Admitancia normalizada
y	Frecuencia normalizada ($= f/f_0$)
y_{mm}	Admitancia de excitación de la malla m
y_{nm}	Admitancia de malla de trasferencia entre las mallas m y n
y'_{mm}	Admitancia nodal de excitación entre el nodo m y el nodo de referencia
y'_{nn}	Admitancia nodal de trasferencia entre los nodos m y n
Z	Impedancia ($= R + jX$)
Z_g	Impedancia de un generador
Z_{J1}, Z_{I2}	Impedancias imágenes
Z_{in}	Impedancia de entrada
Z_{it}	Impedancia iterativa
Z_o	Impedancia característica
Z_{oc}	Impedancia de entrada de una red en circuito abierto
Z_{o1}	Impedancia de entrada en el extremo 1, con el extremo 2 en circuito abierto
Z_{o2}	Impedancia de entrada en el extremo 2, con el extremo 1 en circuito abierto
Z_R	Impedancia del extremo receptor (de terminación)
Z_{sc}	Impedancia de entrada de una red en cortocircuito
Z_{s1}	Impedancia de entrada en el extremo 1, con el extremo 2 en cortocircuito

Z_{s2}	Impedancia de entrada en el extremo 2, con el extremo 1 en cortocircuito
Z_t	Impedancia de trasferencia
Z_{mm}	Autoimpedancia de la malla m
Z_{mn}	Impedancia mutua entre las mallas m y n
z	Número de ceros
z	Impedancia normalizada
z_{mn}	Impedancia de excitación de la malla m
z_{nm}	Impedancia de malla de trasferencia entre las mallas m y n
z'_{mm}	Impedancia nodal de excitación entre el nodo m y el nodo de referencia
z'_{nn}	Impedancia nodal de trasferencia entre los nodos m y n
α	Constante de atenuación
β	Constante de desplazamiento de fase
β	Relación de realimentación
γ	Constante compleja de propagación ($= \alpha + j\beta$)
γ	Sobreimpulso en tanto por ciento
δ	Desviación fraccionaria respecto de resonancia [$= (f - f_r)/f_r$]

δ	Parte real de la frecuencia compleja $p = \delta + j\omega$
δ	Factor de pérdida ($= QP_{\text{pérd}}/P_{\text{ent}}$)
ϵ	Permitividad
Θ	Constante de trasferencia imagen ($= A + jB$)
θ	Angulo
η	Rendimiento
κ	Constante dieléctrica relativa
λ	Longitud de onda
μ	Factor de amplificación
μ	Permeabilidad
Φ	Flujo magnético
ϕ	Angulo
φ	Angulo del coeficiente de reflexión $\rho = \rho /\varphi$
ρ	Frecuencia angular moduladora [$= 2\pi$ (frecuencia moduladora)]
ρ	Coeficiente de reflexión ($= \rho /\varphi$)
ρ	Densidad del aire
σ	Conductividad
τ	Tiempo
τ_g	Retardo de grupo
τ_p	Retardo de fase
τ_r	Tiempo de crecimiento del 10 al 90 por ciento
ω	Frecuencia angular ($= 2\pi f$)

CAPÍTULO I

PRINCIPIOS FUNDAMENTALES DE LOS SISTEMAS DE COMUNICACIÓN

1-1. El problema técnico del ingeniero. El problema fundamental de la ingeniería es el del aprovechamiento de las fuerzas y los materiales que la naturaleza pone a su disposición en beneficio de la humanidad. El problema de la ciencia es el de interpretar a la naturaleza, responder a cuestiones tales como: "Si se da una determinada combinación de elementos y condiciones, ¿qué ocurre?" Los ingenieros, en cierto modo, se plantean la cuestión inversa, vale decir: "Si se desea un determinado resultado, ¿a qué combinación de elementos y condiciones hay que apelar para lograrlo con un grado razonable de aproximación y a un costo no prohibitivo?"

Los problemas de la ciencia son, por consecuencia, problemas de análisis en lo esencial, mientras que los de la ingeniería son problemas de síntesis.

Debe advertirse sin embargo que en el desarrollo de las herramientas de la investigación moderna hay mucho de síntesis, lo que indica que la distinción entre el hombre de ciencia y el ingeniero no es de modo alguno clara ni definida. No obstante, podríamos decir que cuando un científico desarrolla un acelerador de partículas está demostrando su aptitud para desempeñar la función propia del ingeniero. La mayoría de los métodos de síntesis requiere el dominio y la práctica de los métodos del análisis. Por consecuencia, el adiestramiento del ingeniero, cualquiera que sea su especialidad, debe insistir mucho en el análisis.

Uno de los métodos habituales de la síntesis consiste en una sucesión de estimaciones intuitivas, verificar los resultados de cada una de ellas por métodos analíticos, observar el grado en que éstos difieren de los deseados, hacer una nueva estimación y, de esta manera, llegar a la solución por aproximaciones sucesivas. Una buena experiencia en lo que hace al análisis y cierto sentido para juzgar las situaciones físicas son auxiliares inapreciables en semejante método. Pero es una de las metas de la ingeniería la de desarrollar métodos directos de síntesis capaces de eliminar o al menos de acelerar el proceso de aproximaciones sucesivas.

El contraste entre el cálculo diferencial y el cálculo integral ilustra la diferencia que hay entre el análisis y la síntesis. Se conocen métodos directos para el cálculo de la derivada de una función, pero las integrales básicas se han obtenido estimando la respuesta y verificando la derivada. Los resultados pueden tabularse de manera de no tener

que repetir el proceso y es además posible determinar ciertas reglas de combinación auxiliares; pero en la mayoría de los casos nuevos hay que volver a la estimación y la verificación.

Los complejos problemas de la ingeniería pueden clasificarse de diversas maneras. Una de las bases de la clasificación podría ser la siguiente: (1) transformación de la materia; (2) transformación de la energía; (3) transformación de la información¹. Todo problema real involucra las tres clases, pero el ingeniero de telecomunicaciones está principalmente interesado en la reunión, el transporte y la distribución de la información. Para este proceso necesita, por supuesto, materia y energía. Por contraste, el ingeniero electricista ocúpase principalmente de la transformación de la energía química, atómica, o de otro origen, en energía eléctrica, del transporte de ésta con un mínimo de desperdicio, y de su reconversión en alguna forma útil tal como la energía lumínica o mecánica. En este proceso, el ingeniero debe acudir también a la solución de algunos problemas de transformación de información con el fin de controlar sus sistemas, pero tal transformación es sólo auxiliar respecto de su planteo fundamental. Va sin decir que tanto uno como otro especialista se vale de la materia para la realización de sus planes.

Interésase también el ingeniero en el problema de la complementación y la extensión de las aptitudes inherentes del hombre. La transformación de la materia es de importancia primordial en lo que hace a la satisfacción de las necesidades del hombre en relación con el ambiente y el alimento y, asimismo, como fundamento para la satisfacción de sus demás necesidades. La transformación de la energía es de importancia para la suplementación de la energía muscular. Y, a su vez, la transformación de la información tiene como función la de suplementar las aptitudes mentales y nerviosas del ser humano. Por ejemplo, los métodos modernos de comunicación extienden el sentido del oído por medio del teléfono, la radiodifusión y los sistemas de refuerzo acústico, el sentido de la vista por medio de la televisión, el radar, el microscopio electrónico y la radioastronomía, el sentido del tacto con ayuda de los aparatos sensores más diversos, y, por último, aun el sentido del olfato y del gusto. Más todavía, las modernas computadoras electrónicas hacen posible la transformación de la información matemática con una rapidez inmensamente mayor que la que permite el cerebro, y aun tomar decisiones sobre la base de dos o más grupos de valores resultantes del proceso de transformación. Mucho puede argüirse en el sentido de si tales sistemas son verdaderos "cerebros", pero lo cierto es que ellos pueden obviar una gran parte de las más fastidiosas tareas repetitivas que hasta ahora sólo el cerebro humano podía realizar. Por otra parte, estas máquinas permiten atacar problemas mediante la aplicación de métodos computacionales hasta ahora rechazados por el hecho de requerir un número excesivo de "horas-cerebro" y de estar expuestos al error humano.

¹ El término inglés "processing" es más explícito, pero no tiene equivalente en castellano. No obstante, utilizaremos el anglicismo "procesamiento" cuando la claridad de la exposición lo requiera. (N. del T.)

En esta era de la propulsión por retroacción, con velocidades superiores a la del sonido, es preciso optar entre críticas alternativas en el control de las aeronaves dentro de un lapso tan breve que no es posible siquiera plantear el problema si sólo se apela a la instrumentación primitiva y a los sentidos humanos. La solución está en los sistemas electrónicos de comunicación.

1-2. Naturaleza de los sistemas de comunicación. La información proviene de dos fuentes principales: (1) el cerebro del hombre (las ideas), y (2) las modificaciones en el medio físico ambiental. En cualquier caso, la información representa cierto *cambio* de un estado anterior. Las fuentes en las que se producen cambios de un modo más o menos continuos proveen un flujo igualmente continuo de información. Cuanto más rápidos son los cambios, tanto mayor es el monto de información generado por unidad de tiempo.

La información sólo es útil si se la hace llegar a un receptor capaz de interpretarla y aplicarla. En correspondencia con las dos antedichas fuentes de información, hay también dos tipos de receptor (o "sumideros") de información: (1) el cerebro del hombre, y (2) los dispositivos físicos que pueden responder a una señal o a una versión transformada de ella misma.

Cualquier tipo de fuente puede relacionarse con cualquier tipo de receptor. Cuando hay un hombre en cualquiera de los extremos del sistema, adquieren importancia las características del individuo. La sociología experimental es así de inapreciable valor para el ingeniero. El diseño de los equipos debe tomar en cuenta el estudio estadístico de las reacciones medianas de los individuos a los estímulos físicos, y, en algunos casos, aún las características de reacción de un individuo en particular.

En la mayoría de los casos la información original no se encuentra en una forma que permita su fácil transporte hasta el receptor. Debe sufrir cierta transformación o proceso de codificación, a menudo más de una vez. Por ejemplo, nace una idea en el cerebro de un hombre. La idea se traduce en palabras dentro del cerebro mismo. El cerebro, gracias a una larga experiencia y repetida práctica, es capaz de enviar impulsos nerviosos a los músculos de la garganta y la cara de modo de modificar convenientemente el carácter del sonido que deriva su energía de la corriente de aire que pasa entre las cuerdas vocales. Se produce así la palabra. Si el oyente (receptor) está cerca, el sonido de la palabra llega al oído del oyente como ondas acústicas que se propagan a través de un medio de transmisión: el aire. La energía del sonido produce en el oído del oyente impulsos nerviosos que luego son interpretados por el cerebro.

Si, en cambio, el oyente se halla distante y es preciso utilizar un sistema eléctrico de transmisión, hay necesidad de producir una transformación previa en la que la energía acústica de la voz controla o genera cierta energía eléctrica cuya variación representa un facsímil aceptable de la variación original de la energía acústica. Estas señales eléctricas deben ser transportadas por medio de un sistema eléctrico de comunicación. En el párrafo anterior, la palabra "genera" indica que

hay un dispositivo eléctrico que transforma una parte de la energía acústica en energía eléctrica, mientras que la palabra "controla" implica un sistema de conmutación por medio del cual una fuente de energía cierra o abre el flujo de energía en un segundo sistema (como ocurre con una válvula de vapor). El micrófono de carbón y la válvula electrónica constituyen ejemplos de este tipo de dispositivo eléctrico de control.

Por otra parte, algunos sistemas eléctricos (por ejemplo, un cable submarino sin amplificadores intermedios) pueden no ser aptos para transmitir variaciones eléctricas que se producen tan rápidamente como las que resultan de la transformación de la energía de la voz. Esto no significa que en tales condiciones deba renunciarse a la transmisión a distancia de la información. Supongamos que el individuo cuyo cerebro es la fuente de la información expresa sus ideas por medio de la palabra y que a continuación hace una segunda transformación, mental o en el papel, en palabras escritas. Las letras de estas palabras son transformadas a su vez en los puntos y rayas del código Morse. Todo este proceso puede realizarse directamente en el cerebro del hombre, el que entonces envía a la mano impulsos nerviosos para accionar un manipulador telegráfico. Los dispositivos capaces de transformar la información de manera de adecuarla para su transmisión por un sistema dado pueden denominarse "codificadores". Cierta clase de codificador se conoce con el nombre de "moduladores".

Otra clase de dispositivo eléctrico importante es la de los "trasductores". La definición del trasductor según la American Standard Association (ASA) es:

Un trasductor es un dispositivo capaz de ser accionado por ondas que provienen de uno o más sistemas o medios de transmisión y de suministrar ondas correspondientes a uno o más medios o sistemas de transmisión. Nota: Las ondas de entrada y de salida pueden ser o no del mismo tipo (es decir, eléctricas, acústicas, o mecánicas). (ASA C42 65.06.450, 1953.)

Los trasductores pueden ser "activos" o "pasivos":

Un trasductor pasivo es un trasductor cuyas ondas de salida son independientes de cualquier fuente de energía controlada por las ondas actuantes. (ASA C42 65.06.456, 1953.)

Un trasductor activo es un trasductor cuyas ondas de salida dependen de fuentes de energía, aparte de la energía suministrada por las ondas actuantes, cuya energía es controlada por una o más de estas ondas. (ASA C42 65.06.458, 1953.)

Constituyen un grupo importante los trasductores que transforman una clase de energía en otra. Por ejemplo, la definición del trasductor electromecánico es:

Un trasductor electromecánico es un trasductor para recibir ondas de un sistema eléctrico y entregar ondas a un sistema mecánico o viceversa. (ASA C42 65.06.469, 1953.)

Son ejemplos de trasductores electromecánicos los micrófonos y los altavoces, los que se discuten en el Cap. XVI.

El más simple de los sistemas de comunicación contiene por lo tanto los cinco elementos siguientes:

1. Una fuente de información.
2. Un codificador, o trasductor, para transformar la señal de modo de adecuarla para su transporte a lo largo de un sistema de transmisión.
3. Un sistema de transmisión.
4. Un decodificador, o trasductor, para transformar la señal de modo de adecuarla para su interpretación por parte del receptor.
5. Un receptor de información.

Muy a menudo, el medio de transmisión debe ser usado simultáneamente para varias señales, cada una de las cuales proviene de una fuente independiente y debe ser dirigida a un receptor determinado. La radio es un ejemplo. El uso en común se hace posible gracias al oportuno diseño del codificador. Cada codificador debe modificar la señal que proviene de la fuente que le está asociada de modo que exista una diferencia distintiva en ella con respecto a las salidas de los demás codificadores, pero sin destruir la identidad de la información. Este proceso se denomina "modulación" y se describirá más adelante, en este mismo capítulo. Cuando el proceso de codificación involucra un proceso de modulación, es necesario modificar también el decodificador de modo que pueda desempeñar dos funciones adicionales: (1) filtrar, es decir, seleccionar la señal deseada y rechazar las otras; (2) reconvertir la señal en una forma que pueda ser manipulada según el proceso normal de decodificación. El conjunto de estas dos funciones se denomina "demodulación".

Cada sistema completo de comunicación, desde la fuente de información hasta el receptor constituye lo que se da en llamar un canal de información o de comunicación, independientemente de que una porción de tal sistema sea o no común a otros canales.

Se comprenderá que en estos sistemas, como en cualquier otro, pueden introducirse errores. En otros términos, la información puede alterarse durante el proceso de transporte. Los errores tienen dos orígenes posibles:

1. La distorsión de la información en los distintos elementos del canal de información, según se discutirá más adelante.
2. La introducción en el sistema de señales espurias o "ruido" que el receptor interpreta como parte de la señal originada en la fuente. Este ruido puede aparecer en cualquiera de los eslabones del sistema. Como ejemplos de fuentes de ruido pueden citarse las descargas atmosféricas en radio, la interferencia inductiva causada por las líneas de energía u otras líneas telefónicas en telefonía, y el movimiento al azar de los electrones en los conductores eléctricos o en las válvulas de los sistemas amplificadores. La Fig. 1-1 muestra el diagrama en bloques de un sistema de transmisión elemental.

Con el objeto de estar preparado para analizar y sintetizar sistemas y poder reducir al mínimo los disturbios que pueden resultar en error, es necesario considerar en mayor detalle las características de las señales originadas en las fuentes o modificadas por los sistemas de codificación y el análisis de estas señales complejas en componentes

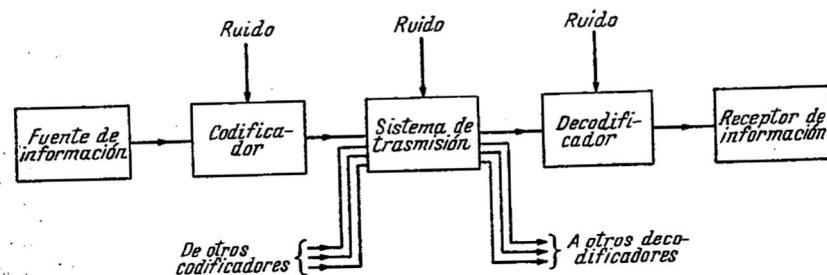


FIG. 1-1. Diagrama en bloques de un canal de comunicación.

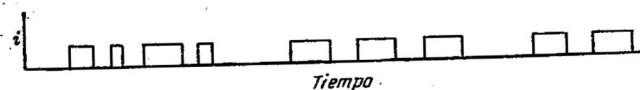


FIG. 1-2. Variación de la corriente en una señal telegráfica.

elementales para que así puedan establecerse los requisitos que deben satisfacer los componentes del sistema.

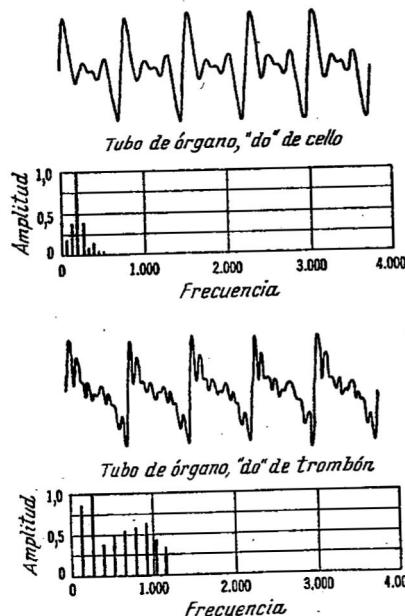


FIG. 1-3. Formas de onda y espectros de dos sonidos musicales.

formación de manera de mantener acordes la "exploración" en el transmisor y la exploración en el receptor. La Fig. 1-5 muestra la forma típica de la señal de televisión monocromática (blanco y negro).

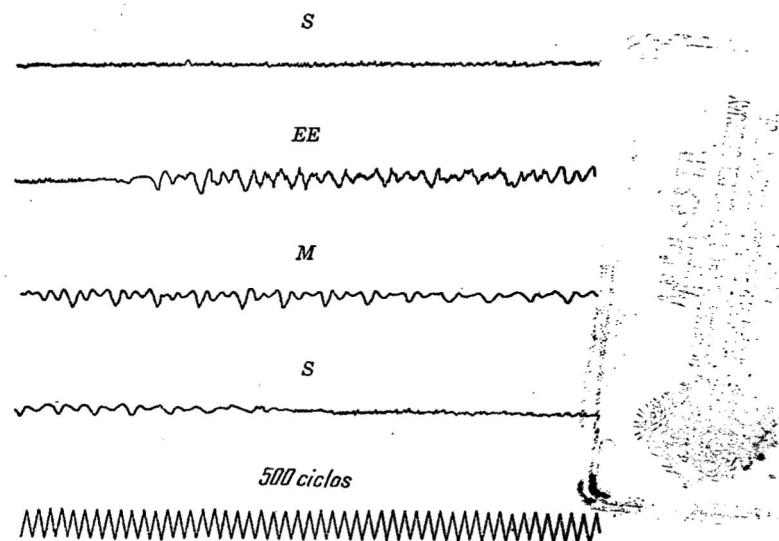


FIG. 1-4. Formas de onda de la palabra inglesa "seems" (se pronuncia "sims").

Los sistemas de radar y computación trabajan con pulsos similares a los de las señales telegráficas, pero de duración mucho más breve, por ejemplo, entre una fracción de microsegundo y varios microsegundos. En todas las señales son características la variación rápida en el extremo transmisor y la "impredecibilidad" en el extremo receptor. La cantidad de información trasportada por la señal se reduce en la medida en que ésta puede ser predicha en el extremo receptor, como ocurre, por ejemplo, cuando una nota musical persiste durante un largo lapso.

Para que sea posible diseñar un sistema eléctrico capaz de aceptar y transmitir señales del tipo de las ilustradas por las Figs. 1-3 a 1-5, es necesario un conocimiento más detallado de la naturaleza de éstas. A este respecto, se verá que las señales variables en el tiempo, por complicadas que sean, pueden ser analizadas en términos de su *espectro de frecuencias*, vale decir, en términos de componentes de distintas frecuencias, con determinadas relaciones de amplitud y fase. Los métodos que permiten determinar estos espectros de frecuencias se estudian en el Cap. II. De momento, nos limitaremos a la exposición de algunas ideas generales.

1-3. Análisis de las formas de onda complejas. Toda corriente que varía en el tiempo puede ser descompuesta en elementos más sim-

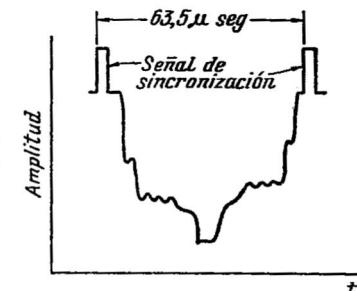


FIG. 1-5. Forma de onda correspondiente a una "línea" de una señal de televisión.

bles. Un método de análisis aplicable a muchos problemas se basa en la reconstrucción, a partir de elementos simples, de una estructura o forma similar a la que se analiza.

En la Fig. 1-6a se muestra la curva de variación de la corriente producida por un micrófono telefónico de carbón cuando sobre su diafragma actúa un tono puro, esto es, una onda sonora sinusoidal.

La onda de la Fig. 1-6a puede ser reconstruida superponiendo las dos componentes ilustradas en la Fig. 1-6b. Se verá en el Cap. III que cada una de las componentes de la Fig. 1-6b se comporta en un circuito *lineal* como si la otra no se hallara presente. En cambio, en los circuitos *alineales*, cada una de las componentes actúa sobre la otra del modo que se verá más adelante.

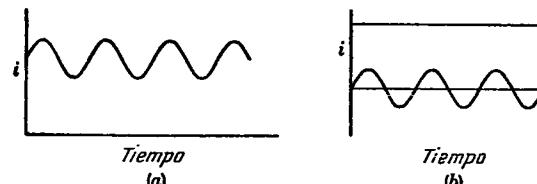


FIG. 1-6. Análisis de una corriente pulsante en sus dos componentes.

Para ilustrar cómo pueden separarse eléctricamente estas dos componentes, consideremos el efecto de aplicar la corriente de la Fig. 1-6a al primario de un transformador. La tensión que aparece en el secundario depende de la *variación* del flujo magnético y no de su valor absoluto. Sólo la componente alterna produce tensión en el secundario, y, si se conecta una carga al secundario, la corriente que circulará por ésta será una reproducción de la componente alterna, con pérdida de la componente continua.

Pueden aplicarse los principios de la c.a. para determinar la transmisión de la corriente de la Fig. 1-6b en un sistema eléctrico cualquiera. Que la corriente invierta o no su sentido, carece de importancia; si varía en el tiempo, ella posee siempre una componente alterna. De hecho, las corrientes continuas pueden considerarse como corrientes alternas de frecuencia cero. *El estudio de las comunicaciones eléctricas tiene como base, por consecuencia, el estudio de los circuitos de corriente alterna.*

1-4. Respuesta de los elementos de circuito a las tensiones sinusoidales y no sinusoidales. La onda sinusoidal se considera la forma de onda fundamental, o más simple, por las razones que luego se verán. Si se aplica una onda de tensión compleja a una resistencia pura, la corriente que fluye tiene la misma forma de onda que la tensión, puesto que, de acuerdo con la ley de Ohm, la corriente es en todo momento proporcional al *valor instantáneo* de la tensión. La Fig. 1-7 muestra el oscilograma de la tensión aplicada a una resistencia y el de la corriente que fluye por ésta.

En cambio, si se aplica una tensión compleja a una capacitancia pura, la corriente es proporcional en todo momento no a la magnitud

sino a la velocidad de variación de la tensión. Así lo expresa la ecuación.

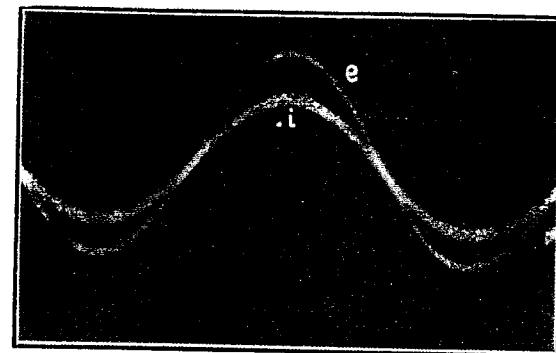


FIG. 1-7. Oscilograma de corriente y tensión en una resistencia.

$$i = C \frac{de}{dt} \quad (1-1)$$

La forma de onda de la corriente resulta entonces muy diferente a la de la tensión aplicada, a menos que la última sea sinusoidal. Si se trata de una onda sinusoidal, es decir, si

$$e = \hat{E} \sin \omega t \quad (1-2)$$

tiénesese, por la Ec. (1-1),

$$i = \omega C \hat{E} \cos \omega t \quad (1-3)$$

y las dos formas de onda son similares a las que aparecen en la Fig. 1-8a. La única diferencia entre una onda de seno y una onda de coseno es un desplazamiento en el tiempo equivalente a un cuarto de período. No hay diferencias de forma, de modo que ambas ondas se llaman "sinusoidales".

De modo similar, al aplicar una onda de tensión a una inductancia pura, la corriente que fluye debe cumplir la relación

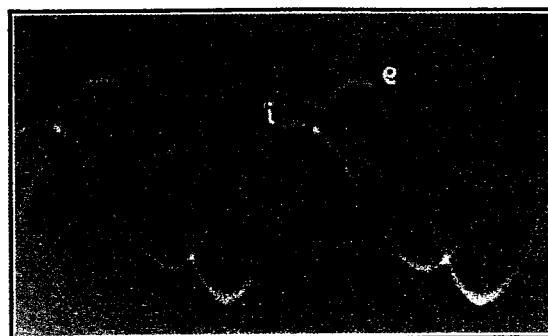
$$e = L \frac{di}{dt} \quad (1-4)$$

La Ec. (1-4) demuestra que, en general, las ondas de tensión y corriente no son similares, excepto cuando la onda de tensión aplicada es sinusoidal. Se tiene en este caso

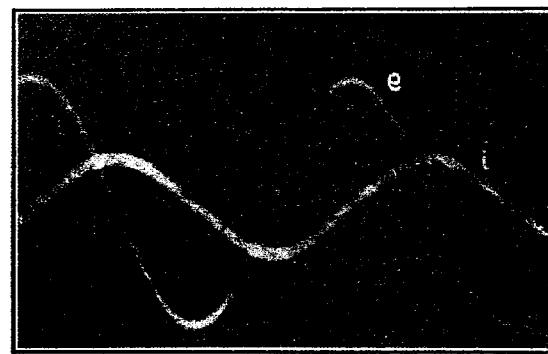
$$\begin{aligned} i &= \frac{1}{L} \int \hat{E} \sin \omega t dt \\ i &= -\frac{\hat{E}}{\omega L} \cos \omega t \end{aligned} \quad (1-5)$$

El correspondiente oscilograma de tensión y corriente es ahora el de la Fig. 1-8b.

En las Figs. 1-9 y 1-10 se muestran oscilogramas de tensiones no sinusoidales y las corrientes correspondientes. En la Fig. 1-9, la tensión está aplicada a un resistor, en la Fig. 1-10a, a un capacitor, y en la Fig. 1-10b, a un inductor. Las formas de onda de corriente y tensión son iguales sólo cuando la impedancia es una resistencia pura. Puede verse que en la Fig. 1-10a la corriente es proporcional a la rapidez de variación de la tensión, mientras que en la Fig. 1-10b, la tensión es proporcional a la rapidez de variación de la corriente.



(a)



(b)

FIG. 1-8. Tensión y corriente en los elementos reactivos. (a) Capacitor. (b) Inductor.

Es conveniente adoptar como convención que al referirnos a una corriente alterna de frecuencia f queremos indicar que la corriente describe f ciclos por segundo con una forma de onda definida. Si se toma una forma de onda arbitraria como patrón, pueden reconstruirse otras formas de onda a partir de la dicha. Por ejemplo, supongamos que la forma de onda arbitraria que se elige es la onda triangular de la Fig. 1-11a. La forma de onda de la Fig. 1-11b, que tiene el mismo período que la anterior, puede ser reconstruida con el grado de exactitud deseado componiendo ondas de forma igual a la de la Fig. 1-11a y cuyas frecuencias son múltiplos enteros de la frecuencia fundamental.

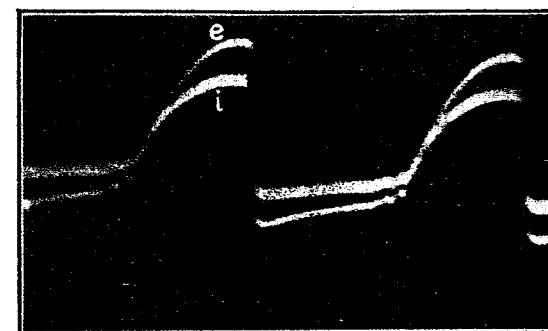
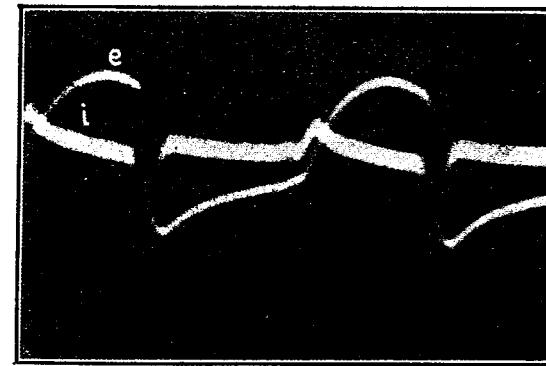
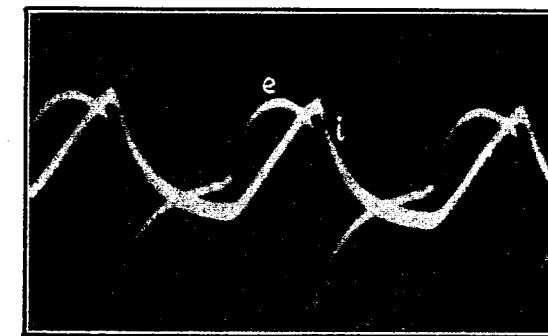


FIG. 1-9. Ejemplo de ondas de corriente y tensión no sinusoidales en un resistor.



(a)



(b)

FIG. 1-10. Tensión y corriente en elementos reactivos. (a) Capacitor. (b) Inductor.

Esto se patentiza observando que puede hacerse pasar una onda triangular por cualquier punto de la onda de la Fig. 1-11b y, evidentemente, por los puntos correspondientes de los ciclos sucesivos. Podrían elegirse

dos ondas triangulares de tal modo que su suma pase por dos puntos cualesquiera del primer ciclo de la onda de la Fig. 1-11b, y, si la frecuencia de una de estas ondas es un múltiplo entero del de la otra, la suma pasará por los puntos correspondientes de los ciclos siguientes.

De modo similar, podrían elegirse tres ondas triangulares cuya suma pase por tres puntos cualesquiera. Si se eligen ondas triangulares, cada una de ellas con una frecuencia igual a un múltiplo entero de la primera y en número suficiente, su suma podrá hacerse pasar por cualquier número deseado de puntos del primer ciclo y por los puntos a éstos correspondientes de los ciclos sucesivos. De esta manera, la suma de un número *infinito* de ondas triangulares podría coincidir exactamente con la curva de la Fig. 1-11b o con cualquier otra onda recurrente.

Por consecuencia, una vez elegida la forma de onda primaria, cualquier otra forma de onda puede ser analizada en términos de cierto número de componentes de diferentes frecuencias, pero cada una de ellas de igual forma que la primaria. *Por esta razón, cuando se habla de una única frecuencia, es necesario saber qué forma de onda se ha elegido como fundamental.*

De elegirse la forma de onda triangular como primaria, surgiría inmediatamente una seria dificultad. En efecto, al aplicar tal onda de tensión a un capacitor, la corriente tendría una forma de onda diferente. Por consecuencia, al aplicar una onda de frecuencia única a un capacitor, la corriente resultante estaría compuesta por un número ilimitado de frecuencias componentes. Es conveniente adoptar como primaria una forma de onda tal que al aplicar una frecuencia única a un resistor, un inductor o un capacitor, pueda considerarse también la corriente resultante como de frecuencia única, es decir, que la corriente tenga la misma forma de onda que la tensión aplicada. Se ha visto que tal cosa ocurre sólo en el caso de la onda sinusoidal, puesto que ésta es la única función recurrente cuya derivada y cuya integral son de la misma forma. Por esta razón es lógico adoptar como forma de onda fundamental la onda sinusoidal y se sobreentiende que al mencionar una única frecuencia f nos estamos refiriendo a una onda sinusoidal de f ciclos/segundo. La amplitud (valor máximo) de una onda en particular puede variar con el tiempo. Las ondas sinusoidales son de amplitud constante. Por consecuencia, si la amplitud de una onda varía con el tiempo, la onda contiene más de una frecuencia componente. Luego, en rigor, no es posible establecer de modo alguno una forma de onda verdaderamente sinusoidal, ya que la corriente tiene que haberse iniciado en algún momento y haber ocurrido así una variación en el transcurso del tiempo. A pesar de ello, se verá que el análisis de las ondas



FIG. 1-11. Formas de onda recurrentes.

en términos de frecuencias únicas conduce a importantes resultados en la teoría de los circuitos reales.

1-5. Análisis de las formas de onda transitorias. Cuando se analizan las formas de onda complejas pero recurrentes según el método de Fourier (Cap. II), las componentes obtenidas son múltiplos enteros, o armónicas, de la frecuencia de recurrencia de la onda. Más bien que ondas repetitivas, los sistemas eléctricos deben transmitir ondas transitorias, es decir, variaciones no recurrentes en las que cada porción difiere en general de las anteriores y de las sucesivas. No obstante, es posible predecir el comportamiento del circuito en estas circunstancias si se conoce la respuesta a las ondas sinusoidales de cualquier frecuencia.

1-6. La integral de Fourier y su significado en la teoría de la comunicación. Si una forma de onda se repite, digamos, 10 veces por segundo, se la puede descomponer en componentes de 10, 20, 30, 40, 50, ... c/s. Si la frecuencia de recurrencia redúcese a 1 c/s, la onda contendrá armónicas cuyas frecuencias son múltiplos enteros de la unidad, esto es, 1, 2, 3, ..., 641, 642, 643, ... c/s. Resultará en general menor la amplitud de las armónicas individuales, pero también disminuirá el intervalo entre armónicas sucesivas. Si se continúa disminuyendo la frecuencia de la onda, las componentes resultarán de amplitud aún menor, pero, en cambio, estarán menos separadas. Finalmente, si ocurre un pulso de tensión una sola vez, la separación entre las componentes sucesivas resultará infinitesimal y será posible representar con una curva continua la relación que entonces existirá entre la amplitud y la frecuencia. A este fin aplicase la integral de Fourier, la que no es sino una extensión de la serie de Fourier al caso de frecuencia cero (o período infinito).

La aplicación de la integral de Fourier en la solución analítica formal de los problemas de transitorios queda limitada a algunos casos relativamente sencillos a causa de la dificultad que se experimenta en la búsqueda de las integrales definidas necesarias. Otro método de ataque, a saber, el de las ecuaciones diferenciales, resulta también impotente cuando la forma de onda de la tensión aplicada es complicada. *No obstante, la existencia de la integral de Fourier nos proporciona el conocimiento de que toda tensión o corriente aplicada transitoria puede expresarse a modo de una banda continua de frecuencias, y de que la respuesta — o corriente o tensión resultante en cualquier parte de la red — puede expresarse también como una banda continua de frecuencias y de manera tal que la relación de cualquier componente de frecuencia de la onda aplicada a la correspondiente componente de frecuencia de la onda de respuesta queda determinada por la característica de estado estacionario de la red a la misma frecuencia.* Esta es probablemente una de las ideas fundamentales más importantes en la ingeniería de la comunicación, dado que todo el método de ataque de los problemas de los circuitos de comunicación está basado sobre ella. Se la desarrollará con mayor detalle en el capítulo siguiente.

Debido a la continua variación de la forma de onda de la señal en los sistemas de comunicación, no es posible determinar analíticamente

la distribución o la magnitud relativa de las componentes de frecuencia que se utilizan en una transmisión cualquiera tal como la de la palabra, música, código telegráfico, televisión, etc. No obstante es posible establecer esa distribución estadísticamente. Recúrrese a la estadística cuando es imposible la predicción exacta de un suceso individual, pero la estadística permite predecir la distribución de un grupo de sucesos. Por ejemplo, no es posible predecir con precisión la fecha exacta de la muerte de un individuo, pero la estabilidad financiera de las compañías de seguro depende de su capacidad para determinar estadísticamente la distribución de las épocas de muerte de una gran cantidad de individuos.

La determinación estadística de la distribución de frecuencia de los impulsos de carácter transitorio, por ejemplo los correspondientes a la palabra, puede encararse más o menos así: Se establece un sistema de trasmisión telefónico capaz de trasmisitir sólo una banda definida y controlable de frecuencias y se envían por él sílabas o palabras no relacionadas. En el extremo receptor hay un observador que registra los sonidos que escucha. Comparando los registros hechos en los dos extremos del sistema puede establecerse el tanto por ciento de palabras comprendidas en función del ancho de la banda de frecuencias trasmisitida. Para que el experimento tenga significado cierto, es necesario hacer miles de observaciones, pues, en común con otros métodos estadísticos, los resultados sólo son significativos cuando provienen de un gran

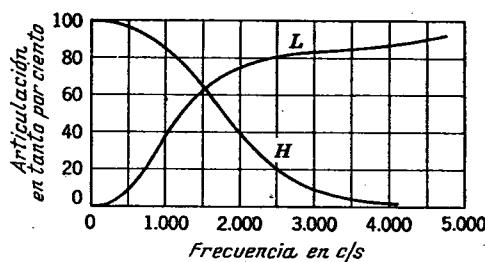


FIG. 1-12. Efecto de la gama de frecuencia sobre la articulación.

número de observaciones. La Fig. 1-12 muestra dos curvas obtenidas por Crandall y MacKenzie, las que indican tanto por ciento de sílabas entendidas; la curva *L* representa el tanto por ciento de sílabas entendidas cuando se trasmiten todas las frecuencias inferiores a las indicadas en el eje de las abscisas y se suprimen todas las superiores; la curva *H* representa el tanto por ciento de sílabas entendidas cuando se suprime las frecuencias inferiores a las indicadas y se trasmiten las superiores. Las curvas de este tipo se utilizan para determinar el ancho de banda que debe trasmisitirse para obtener una inteligibilidad conveniente de las palabras en los sistemas telefónicos. Ellas demuestran que la limitación de la banda trasmisitida entre 400 y 3.000 c/s podría ser aceptable en los casos en que es primordial sólo la inteligibilidad.

En muchas ocasiones no basta con entender lo que se dice, sino que se pretende reproducir la voz y la música con naturalidad. Tal es el caso de la radiodifusión y el disco. Interviene entonces el juicio artístico en la determinación estadística y se acepta con generalidad que para la reproducción de "alta fidelidad" es necesario trasmisitir la banda que va de 30 ó 50 c/s a 15.000 c/s. Ciertos sonidos exigen la reproducción de frecuencias aun mayores, tal como ocurre, por ejemplo, con los originados por los instrumentos de percusión. En general, el aumento del ancho de banda significa el aumento del coste de la instalación, de modo que se requiere un criterio práctico adecuado para establecer el debido equilibrio entre el comportamiento del sistema y su coste.

El análisis precedente nos conduce a la siguiente paradoja: Debido a que la comunicación se realiza *exclusivamente por transitorios*, una gran parte del análisis del comportamiento de los sistemas se basa en la respuesta de éstos al régimen *estacionario* de c. a., determinándose esta respuesta sobre la banda de frecuencias más importante, establecida estadísticamente, para el tipo de señal que se trasmite.

Cuando es importante la trasmisión de pulsos, como ocurre en televisión y radar, cobra gran importancia el análisis de la respuesta a las variaciones repentinas y es preciso entonces analizar directamente la respuesta transitoria. Se verá en el Cap. II que la respuesta estacionaria está directamente relacionada con la respuesta transitoria.

1-7. Respuesta del oído. El oído constituye una parte importante del sistema decodificador en la comunicación oral o musical y, de hecho, desempeña un importante papel en la determinación de las curvas del tipo de las de la Fig. 1-12. No responde por igual a todas las frecuencias. Fletcher y Munson han determinado un juego de curvas de igual respuesta, ilustradas por la Fig. 1-13. No se produce sensación alguna cuando la intensidad para una frecuencia cualquiera cae por debajo de la curva 0, la que marca el llamado *umbral de audibilidad*. La escala de las ordenadas está dada en decibeles, esto es, 10 veces el logaritmo de la potencia de la señal dividida por cierta potencia de referencia, según se explica en el Cap. VI. El nivel cero corresponde a un sonido cuya densidad de potencia es de 10^{-16} watt/cm², la que, en condiciones normales de presión y temperatura del aire, corresponde a una presión acústica sinusoidal cuyo valor eficaz es de $2,04 \cdot 10^{-4}$ dina/cm².

En la trasmisión de la palabra o la música, si una componente del sonido original cae por debajo del umbral de audibilidad, no hay objeto en trasmisitirla eléctricamente. Por consecuencia, cualquiera que sea la forma de onda, considérase por lo general necesario trasmisitir sólo las frecuencias comprendidas dentro de una banda limitada, aunque la onda original contenga componentes que están fuera de esta banda. La misma observación es aplicable a otros tipos de señal, de modo que, para cada aplicación, el circuito sólo debe ser capaz de trasmisitir una banda limitada de frecuencias. La banda en cada caso necesaria depende de la naturaleza de la señal tal como sale del codificador y de los requisitos del receptor (en algunos casos, del decodificador) para que cada señal sea reconocida dentro de los límites de error permisibles.

1-8. Naturaleza de la distorsión. Según se ha dicho anteriormente, todo sistema de comunicación debe entregar en el extremo receptor una señal que sea tan parecida a la original como las consideraciones técnicas y económicas lo permitan. Dado que se utilizan en estos sistemas elementos de control tal como las válvulas de alto vacío y los transistores, la magnitud de la salida puede ser mayor que la de la entrada, caso en el cual dícese que el sistema introduce una "ganancia" o puede ser menor, caso en que el sistema introduce una "pérdida"

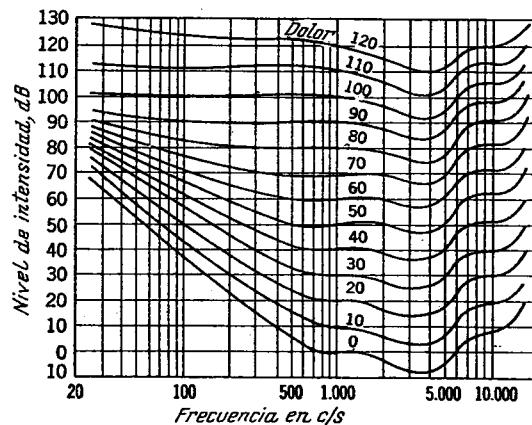


FIG. 1-13. Contornos de igual respuesta del oído. (Bell Telephone Laboratories.)

Dado que los circuitos de comunicación pueden introducir ganancia o pérdida, éstas no se consideran como variaciones fundamentales de la señal original. En cambio, la alteración de la *forma de onda* modifica el carácter de la señal y significa probablemente una pérdida de parte de la información original. Esta alteración de la forma de onda de una señal denominase "distorsión".

Admitido que toda onda compleja puede descomponerse en una banda de ondas sinusoidales, pueden ocurrir tres tipos de distorsión en un sistema de transmisión. Se los define con precisión en el Cap. VI, pero de momento podemos describirlos de la manera siguiente:

Distorsión de frecuencia es la forma de distorsión en la que se alteran las magnitudes relativas de las componentes de frecuencia de la onda trasmisiva.

Distorsión de retardo es la forma de distorsión en la que no es constante el tiempo (o retardo) de trasmisión de las distintas componentes de frecuencia.

Distorsión alineal es la forma de distorsión que resulta cuando la salida no es directamente proporcional a la entrada. El resultado más importante de este tipo de distorsión es la aparición en la salida de componentes de frecuencia que no se hallan presentes en la onda de entrada.

Las distorsiones de frecuencia y de retardo se deben en general a la acción de elementos lineales cuya impedancia depende de la frecuencia, tales como los inductores y los capacitores. La distorsión de retardo no es generalmente percibida por el oído siempre que las diferencias de retardo se mantengan dentro de ciertos límites; por consecuencia sólo es de interés, en la telefonía, en el caso de las líneas muy largas. En cambio, ella es de particular importancia en la telegrafía, en la que la señal recibida es interpretada por dispositivos mecánicos, y en la televisión.

Si se aplica una onda de tensión (o de corriente) sinusoidal pura a una impedancia alineal, la onda de corriente (o de tensión) resultante no es sinusoidal. Esta onda puede descomponerse en dos o más ondas sinusoidales y, de esta manera, introducense en la salida frecuencias que no se hallan presentes en la entrada. Si la señal de entrada es sinusoidal, las nuevas frecuencias son múltiplos o armónicas de la original. Pero si la señal de entrada tiene más de una componente de frecuencia, aparecen en la salida términos adicionales cuyas frecuencias son sumas y diferencias entre las frecuencias de la señal de entrada y sus múltiplos enteros.

Por lo general, en un sistema de comunicación, es conveniente que cada unidad esté tan libre de distorsión como sea posible. No obstante, es a menudo posible corregir la distorsión de *frecuencia* o la de *retardo* por medio de mallas o elementos adicionales que proveen una distorsión contrapuesta a la que se desea corregir. Por ejemplo, en un cable, las frecuencias altas avanzan más rápidamente y son atenuadas (sufren pérdidas) mayores que las más bajas. Para corregir este efecto puede utilizarse en el extremo una "red ecualizadora" que atenúa las frecuencias bajas y retarde las altas. Estas redes discútense en el Cap. XIV.

No es posible en general compensar la distorsión alineal de esta manera. Una vez producidas, las nuevas frecuencias sólo pueden eliminarse si caen fuera de la banda que ocupan las frecuencias deseadas o si no hay distorsión de retardo en absoluto, caso éste en que podría utilizarse al efecto una impedancia alineal de curvatura opuesta. Las frecuencias que caen fuera de la banda deseada pueden eliminarse mediante redes llamadas "filtros". Estas redes trasmiten ciertas bandas de frecuencias y atenúan grandemente otras bandas. Son tema del Cap. VII. Por regla general es necesario prevenir la distorsión alineal más bien que tratar de corregirla.

1-9. Traslación de frecuencia o modulación. La distorsión alineal, sin embargo, es un recurso de gran importancia para los fines de la codificación. Es principio fundamental de la comunicación que una onda compleja, representada por cierta banda de frecuencias, pueda ser trasladada a otra banda cualquiera de por lo menos igual ancho, si se desea, y luego retrasladada a su banda original. Esta operación puede ser deseable porque es mayor la eficacia del sistema de trasmisión en la nueva banda, o porque se quiere aprovechar el mismo medio de trasmisión para la propagación de varios mensajes simultáneos. Esta translación puede realizarse utilizando impedancias alineales y aprovechando el hecho de que las corrientes resultantes en estas impedancias con-

tienen frecuencias iguales a las sumas y las diferencias de las que se hallan presentes en la tensión aplicada.

Esta posibilidad se explota en la trasmisión por radio y en la trasmisión telefónica por onda portadora. No es posible construir una antena de radio que sea capaz de radiar con buen rendimiento las audiofrecuencias. La longitud de una antena debe ser del orden de un cuarto de la longitud de onda que se desea trasmisir. Para 1.000 c/s, esa longitud sería del orden de 75 Km. Por otra parte, semejante antena no podría radiar eficazmente las frecuencias correspondientes a la mitad o el doble de su longitud de onda natural y no podría de modo alguno trasmisir la banda mínima de 400 a 3.000 c/s necesaria para la inteligibilidad de la palabra. Por lo tanto, la banda telefónica debe ser trasladada a una banda superior, apta para su radiación mediante una antena, por ejemplo, de 1.000.150 a 1.002.750 c/s.

Esta traslación, o modulación, puede compararse con un método de codificación. Supongamos, por ejemplo, que numeramos de 1 a 10.000 todas las palabras de un diccionario abreviado. Podríamos entonces hablar con número, y, con el tiempo, los números nos serían tan familiares como las palabras que ahora utilizamos.

7.536-899-7.781-5.791-2.845-567 podría significar "tenemos buen tiempo, ojalá estuvieras aquí". Pero imaginemos ahora que un individuo hereda una máquina de escribir que sólo puede imprimir los números comprendidos entre 120.000 y 160.000 y que quiere escribir una carta a su amada. La información podrá ser trasmisita tan bien por medio de la banda de 120.001 a 130.000 como con la banda de 1 a 10.000, a condición de convenir que el corresponsal reste 120.000 a cada uno de los números recibidos. El mensaje emitido sería entonces 127.536-120.899-127.781 - 125.791 - 122.345 - 120.567.

Supongamos que al mismo tiempo quiere enviar un mensaje a otro miembro de la familia, tal como "gire telegráfico cien pesos". Podría el individuo convenir con el nuevo corresponsal que el mensaje será trasmisido en la banda de 150.001 a 160.000. La decodificación se haría restando 150.000 a los números de este grupo. Antes de la codificación el mensaje podría ser 3.145 - 7.450 - 1.798 - 6.777, y, después de la codificación, 153.145 - 157.450 - 151.798 - 156.777.

Más aún, sería posible mezclar este mensaje con el anterior sin confusión alguna; es decir, los dos mensajes juntos serían, por ejemplo, 127.536 - 153.145 - 157.450 - 120.899 - 127.781 - 151.798 - 125.791 - 122.345 - 156.777 - 120.567. Cada corresponsal sabría en qué banda está contenido el mensaje que se le dirige y seleccionaría sólo los números de esa banda antes de decodificarlos.

De igual modo, varios mensajes, originalmente en la misma banda de frecuencias, pero en diferentes canales (ver Fig. 1-1), podrían ser codificados, es decir, trasladados a nuevas bandas por medio de impedancias alineales, introducidos y trasmisidos en el mismo medio, separados en el extremo receptor por medio de redes de filtro, traspuestos o decodificados por otras impedancias alineales, y entregados a los receptores que correspondan con sustancialmente las mismas formas que los originales.

El principio de la modulación es tan importante que será desarrollado aquí con cierta extensión a fin de que se comprenda sus implicaciones en el diseño de las redes tal cual se trata este problema en el presente volumen. No obstante, el lector deberá consultar otros textos sobre los detalles de los moduladores y demoduladores prácticos.

La modulación es un proceso mediante el cual una característica determinada de una onda de frecuencia mayor que cualquier componente de la señal y llamada "onda portadora" se modifica de acuerdo con la variación temporal de la señal. Una onda alterna puede expresarse con toda generalidad mediante la ecuación.

$$e = A \operatorname{sen}(\omega t + \phi) \quad (1-6)$$

Conócense tres grupos de métodos de modulación:

1. Modulación de amplitud, en la que se varía A .
2. Modulación angular, en la que se varía ϕ .
3. Modulación pulsativa, en la que la señal se deja pasar o no a modo de pulsos, y en la que los pulsos mismos se modulan en amplitud o tiempo de ocurrencia de acuerdo con los valores instantáneos de la señal.

1-10. Modulación de amplitud.¹ En una onda modulada en amplitud, la amplitud se varía en torno de su valor medio en proporción con el valor instantáneo de la señal. Supongamos que la señal original (por ejemplo, la presión acústica) esté representada por la función $f(t)$. Entonces, el factor de amplitud A de la Ec. (1-6) modificase por acción de $f(t)$ según la ecuación

$$e = A[1 + bf(t)] \operatorname{sen}(\omega t + \phi) \quad (1-7)$$

donde b es un factor determinado por el diseño del sistema modulador y tiene dimensiones tales que $bf(t)$ resulta un número puro; b es por lo general una constante del sistema, pero en algunos casos es función de la frecuencia de la señal. Por ejemplo, si b varía oportunamente con la frecuencia de la señal, pueden compensarse por lo menos en parte algunas deficiencias de la característica de frecuencia del sistema.

La amplitud de una onda no puede ser negativa. Por consecuencia, el factor b ha de elegirse de modo tal que $1 + bf(t)$ no se haga jamás negativo, por lo que $bf(t)$ no debe tener un valor absoluto mayor que la unidad. Este valor absoluto del máximo de $bf(t)$ se llama *factor de modulación de amplitud* y se denota con m_a .

Si la señal $f(t)$ es sinusoidal y de frecuencia $\rho/2\pi$, la Ec. (1-7) deviene

$$e = A(1 + m_a \operatorname{sen} \rho t) \operatorname{sen} \omega t \quad (1-8)$$

La curva de esta ecuación se halla ilustrada en la Fig. 1-14 para $m_a = 0,5$ y $\omega/\rho = 10$. Se observará que la onda cruza el eje a intervalos de tiempo regulares e iguales a $2\pi/\omega$ seg tanto con modulación como sin ella.

¹ W. L. Everitt, Frequency Modulation, Trans. AIEE, vol. 59, p. 613, noviembre de 1940.

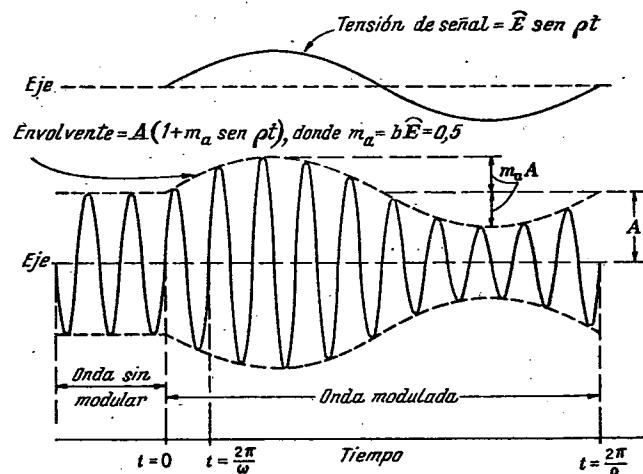


FIG. 1-14. Onda modulada en amplitud.

En los fenómenos alternos, una frecuencia única se representa por medio de la proyección de un fasor de longitud constante y velocidad angular constante $\omega = 2\pi f$. La onda descrita por la Ec. (1-7) puede ser también representada de esta manera, pero haciendo variar la longitud del fasor de acuerdo con la ecuación

$$\text{Longitud del fasor} = A[1 + bf(t)] \quad (1-9)$$

El término $A[1 + bf(t)]$ se llama envuelta de la onda. En la Ec. (1-8) la envuelta es $A(1 + m_a \operatorname{sen} pt)$ y está ilustrada en la Fig. 1-14.

Al dibujar los fasores representativos de una variación alterna, es de práctica corriente asumir que el observador se halla sobre una plataforma que gira también con la velocidad angular ω alrededor del mismo centro. El fasor original aparece entonces estacionario y se necesita un solo dibujo para representarlo. En cambio, si la magnitud, o la fase, del fasor varía con el tiempo, necesitase una serie de dibujos para mostrar lo que está ocurriendo.

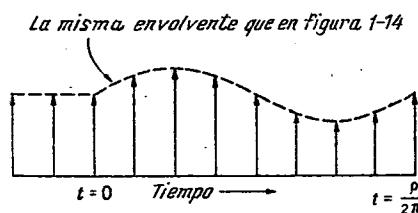


FIG. 1-15. Diagrama de fasores de la onda modulada en la Fig. 1-14 para instantes sucesivos.

En el receptor, el demodulador debe producir una respuesta proporcional a la envuelta de modulación (excepto la componente continua).

1-11. Interferencia de dos ondas moduladas en amplitud. Si una onda modulada de igual frecuencia y fase de portadora se suma a la onda de la Fig. 1-14, la onda resultante tendrá una envuelta igual a la suma de las envueltas de las dos ondas, puesto que los fasores se

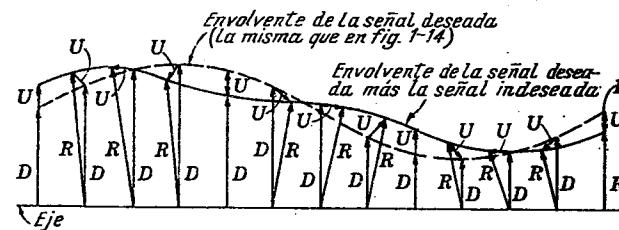


FIG. 1-16. Interferencia con una onda modulada en amplitud de una portadora de frecuencia ligeramente diferente. (D es la onda deseada, U la indeseada, y R la resultante.)

sumarán en fase. El efecto interferente será notable aún si la señal interferente representa sólo el 1 por ciento de la señal deseada. Es por lo tanto conveniente hacer el valor de m_a lo mayor posible, puesto que el operador de un sistema de comunicación dado no puede evitar la modulación de la onda deseada por la onda indeseada.

Si la frecuencia de la onda interferente es algo diferente de la onda deseada (pero demasiado pequeña como para eliminar la onda interferente por medio de filtros), la onda interferente producirá una variación de la amplitud de la envuelta, variación que tiene una amplitud igual a la magnitud de la onda interferente (aunque no esté modulada). Esta variación adicional ocurrirá a una frecuencia igual a la diferencia entre las frecuencias portadoras de las dos señales (la deseada y la interferente) y producirá una modulación interferente que se superpone a su vez a la modulación deseada. Este efecto está ilustrado por el diagrama de fasores de la Fig. 1-16, donde la señal indeseada tiene una frecuencia de portadora que excede la de la señal deseada en $1,5 \rho/2\pi$. Se ve que la envuelta resultante es modificada por una componente adicional igual a la magnitud de la onda indeseada, de modo que se introduce una interferencia proporcional a la magnitud de la onda indeseada.

Se observa una vez más que la amplitud de la envuelta de la señal deseada debe hacerse lo mayor posible con el objeto de reducir al mínimo el efecto de la interferencia. Si la Ec. (1-7) representa corriente o tensión, es posible aumentar la amplitud de la envuelta aumentando la potencia o el factor de modulación (m_a).

1-12. Modulación angular. En la modulación angular (de la cual la modulación de frecuencia es una subdivisión), el ángulo ϕ se hace una función del tiempo relacionada, pero no siempre en forma directamente proporcional, con la función de señal de $f(t)$. Las dos subdivisiones principales de la modulación angular son la modulación de fase y la modulación de frecuencia.

1-13. Modulación de fase. En este tipo de modulación, el ángulo de fase ϕ se hace variar en proporción con la señal. Es decir,

$$\phi = b_1 f(t) \quad (1-10)$$

donde b_1 es una constante determinada por el sistema. Al introducir la Ec. (1-10) en la Ec. (1-6), resulta

$$e = A \operatorname{sen} [\omega t + b_1 f(t)] \quad (1-11)$$

El valor máximo de $b_1 f(t)$ se llama *índice de modulación de fase*, m_p . Es el número máximo de radianes en que la fase de la portadora se modifica durante la modulación. Si la señal es sinusoidal de frecuencia $\rho/2\pi$, la Ec. (1-11) deviene

$$e = A \operatorname{sen} (\omega t + m_p \operatorname{sen} \rho t) \quad (1-12)$$

1-14. Modulación de frecuencia. En este tipo de modulación, se hace variar la *frecuencia instantánea* respecto del valor medio $\omega/2\pi$, en proporción con el valor instantáneo de la señal. Por definición, extiéndese el uso de la palabra "frecuencia" a la ecuación general (1-6) según la relación

$$2\pi f_{\text{inst}} = \omega + \frac{d\phi}{dt} \quad (1-13)$$

Puesto que ω es una constante (2π veces la frecuencia portadora), la señal debe modificar el término $d\phi/dt$, de modo que la frecuencia instantánea esté dada por la relación

$$f_{\text{inst}} = \frac{\omega}{2\pi} + b_2 f(t) \quad (1-14)$$

donde b_2 es una constante de diseño. El valor máximo de $b_2 f(t)$ es la desviación máxima de la frecuencia instantánea de la onda modulada respecto de la frecuencia de la onda no modulada y se llama *desviación de frecuencia*, Δf . Si $f(t)$ es una onda sinusoidal de frecuencia $\rho/2\pi$,

$$b_2 f(t) = \Delta f \operatorname{sen} \rho t \quad (1-15)$$

Si se combinan las Ecs. (1-13), (1-14) y (1-15),

$$2\pi f_{\text{inst}} = \omega + 2\pi \Delta f \operatorname{sen} \rho t = \omega + \frac{d\phi}{dt}$$

lo que da

$$\phi = \int 2\pi \Delta f \operatorname{sen} \rho t dt = -\frac{\Delta f}{f_p} \cos \rho t \quad (1-16)$$

donde f_p es la frecuencia de la señal moduladora. La Ec. (1-16) puede escribirse

$$\phi = -m_f \cos \rho t \quad (1-16a)$$

donde m_f se llama *índice de modulación de frecuencia*. Si se introduce este ángulo de fase en la Ec. (1-6), el resultado es

$$e = A \operatorname{sen} (\omega t - m_f \cos \rho t) \quad (1-17)$$

Las ecuaciones (1-17) y (1-12), aplicables a una señal moduladora de frecuencia determinada, no difieren apreciablemente (excepto por un desplazamiento de 90° en la fase de la modulación). En la Ec. (1-17) el máximo desplazamiento de fase (correspondiente al factor de modulación de fase m_p) es

$$m_f = \frac{\Delta f}{f_p} \quad (1-18)$$

Los factores m_p en la modulación de fase y Δf en la modulación de frecuencia son factores arbitrarios de diseño. A diferencia de la modulación de amplitud, ellos no están limitados a la unidad como valor máximo, puesto que m_p puede ser de cientos de radianes y Δf de miles de ciclos por segundo si se desea. Las limitaciones impuestas a m_p y Δf quedan determinadas, más bien, por el espectro de frecuencias disponible y se discutirán más adelante.

La distinción entre la modulación de fase y la de frecuencia es la siguiente: si la frecuencia, pero no la amplitud de la señal moduladora varía, m_p es constante en la modulación de fase y Δf es constante en la modulación de frecuencia.

Se desprende de la Ec. (1-18) que en la modulación de frecuencia la desviación de fase es inversamente proporcional a la frecuencia de modulación. Por otra parte, en la modulación de fase, la desviación de frecuencia es directamente proporcional a la frecuencia de modulación.

La Fig. 1-17 es una ilustración de la modulación angular tal como la describe la Ec. (1-12) y para el caso en que $m_p = 0,5$ y $\omega/\rho = 12$. A primera vista, ésta parecería una onda de frecuencia única. No obstante, los intervalos de intersección del eje horizontal varían a lo largo del ciclo de audio. Para mostrar más claramente este detalle, se han expandido los ciclos primero, cuarto, séptimo, décimo y décimotercero en la Fig. 1-18. Se apreciará que el desplazamiento variable de la fase produce también una variación de la frecuencia durante el transcurso de cada ciclo de audio (b.f.).

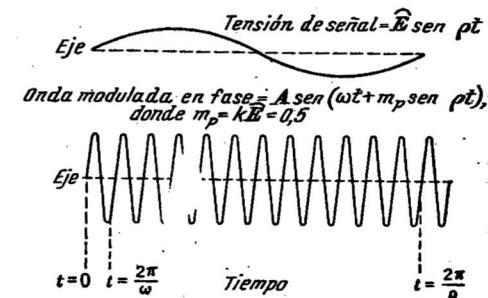


Fig. 1-17. Onda con modulación angular.

Los diagramas sucesivos de fasor de la onda modulada angularmente de la Fig. 1-17 (correspondientes a los diagramas de la Fig.

1-15 para el caso de la modulación de amplitud) se ilustran en la Fig. 1-19. Inclúyese la onda de señal para mejor identificación de los diversos instantes considerados.

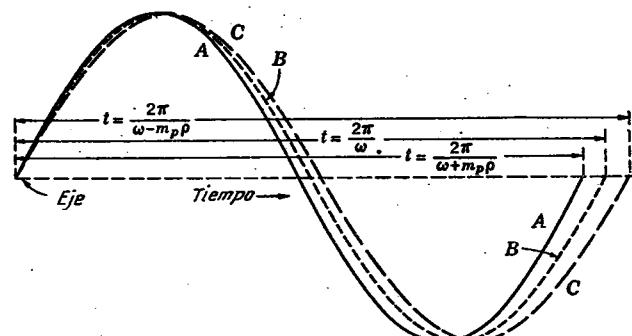


FIG. 1-18. Expansión de algunos ciclos individuales de la Fig. 1-17. A, primer y décimotercer ciclo; B, cuarto y décimo ciclo; C, séptimo ciclo.

La diferencia que existe entre la modulación de fase y la modulación de frecuencia puede ilustrarse considerando el aspecto que presenta el fasor resultante a un observador que gira con el fasor de portadora. En la modulación de fase, dos señales de audio de igual amplitud, pero diferentes frecuencias, producirán iguales *amplitudes* aparentes en las desviaciones del fasor resultante. En la modulación de frecuencia, dos señales de audio de igual amplitud producirían iguales *velocidades* angulares máximas en las desviaciones del fasor resultante. En este último caso (modulación de frecuencia), el máximo ángulo de oscilación del fasor sería inversamente proporcional a la frecuencia de audio —según lo indica la Ec. (1-18)—. Esto está indicado por la Fig. 1-20, donde se han dibujado los fasores para modulación de fase y modulación de frecuencia en correspondencia con dos señales moduladoras que están en la relación de frecuencias de 2:1. Obsérvese que en la modulación de fase el ángulo máximo ϕ_m es el mismo para las dos señales, mientras que en la modulación de frecuencia, el ángulo máximo ϕ_m para la señal A (la de más baja frecuencia) es el doble que para la señal B. Puesto que la *velocidad* angular es proporcional al valor instantáneo de la señal en la modulación de frecuencia, el fasor alcanza su máximo ángulo de desviación cuando la señal es cero, mien-

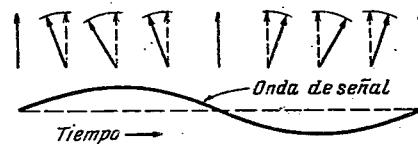


FIG. 1-19. Diagramas de fasores de la onda modulada angularmente de la Fig. 1-17, para instantes sucesivos. Los fasores dibujados con línea llena corresponden a la onda modulada; los de línea cortada, a la onda sin modular.

tras que en la modulación de fase, el mismo fasor alcanza el máximo ángulo de desviación cuando la señal es máxima.

En la radiotransmisión por modulación angular, el decodificador cuenta con medios adecuados para que la señal detectada resulte proporcional a la modulación angular (del tipo que en particular se elija)

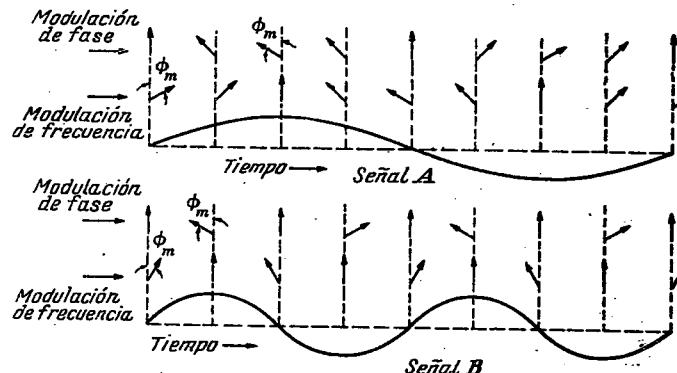


FIG. 1-20. Comparación de las modulaciones de fase y de frecuencia por medio de los diagramas de fasor. Nota: ϕ_m es el mismo para las dos señales en la modulación de fase. ϕ_m es inversamente proporcional a la frecuencia de la señal en la modulación de frecuencia. La máxima velocidad de los fasores es la misma en los dos casos con modulación de frecuencia.

y que al mismo tiempo la señal detectada sea insensible a las variaciones de amplitud.

1-15. Interferencia entre dos señales con modulación angular. Cuando se componen dos ondas con modulación angular y de igual frecuencia portadora, la modulación angular total no es la suma de las dos modulaciones individuales.

Esto se demuestra en la Fig. 1-21, donde se representa una onda angularmente modulada, B, por medio de un fasor cuyo ángulo varía con el tiempo. Este fasor se suma a un fasor de mayor amplitud, A, el que por el momento supóngase no modulado. El fasor resultante, R, será la suma de los dos fasores componentes.

Es evidente que si B es menor que A, cualquiera que sea la variación angular de B (aún centenares de radianes), la diferencia angular



FIG. 1-21. Diagrama fasorial para ilustrar la interferencia en la modulación angular. A, fasor de la señal deseada (no modulada). B, fasor de la señal interferente (igual frecuencia de portadora). R, fasor de la onda resultante ($A + B$).

total entre R y A no puede exceder nunca de $\text{tg}^{-1}(B/A)$. Por ejemplo, si $B/A = 0,5$, el valor máximo de m_p para el fasor R cuando A no está modulado es $m_p = 0,46$. Si $B/A = 0,5$ y A está a su vez modulado, la

diferencia entre el ángulo de A y el de R no puede exceder, entonces, de 0,46 radián en instante alguno. Si el factor de modulación m_p de A se hace grande en comparación con 0,46, la interferencia producida por B resulta despreciable, a pesar del hecho de que la magnitud de B no es de modo alguno despreciable frente a la de A .

Este análisis justifica el resultado experimental que muestra que cuando un receptor recibe simultáneamente dos señales con modulación de frecuencia la interferencia es despreciable cuando la señal deseada excede la interferente en la relación 2:1 o mayor.

Se advertirá también que cuanto mayor es m_p en la señal deseada, tanto mayor es su inmunidad frente a la interferencia, y que esta inmunidad no depende para nada del m_p de la señal interferente.

La inmunidad frente a la interferencia obtenida con la modulación angular es válida para cualquier tipo de interferencia. En particular, las descargas atmosféricas pueden representarse mediante un fasor de fase y amplitud variables. Los circuitos selectivos del receptor admiten sólo las componentes que se encuentran dentro de su banda pasante. Si la amplitud del ruido admitido no excede la mitad de la amplitud de la señal deseada, es muy poco el ruido que aparece en la salida. Cuanto mayor es la desviación de fase media en comparación con 0,46 (aproximadamente 0,5), tanto mayor será la discriminación en contra del ruido. Debe observarse también que las componentes del fasor de ruido cuya frecuencia difiere de la frecuencia portadora hasta el punto en que la frecuencia diferencia es mayor que el límite de la gama de frecuencias audibles no contribuyen para nada al ruido, siempre que éste sea pequeño en comparación con la señal.

En radio, encuéntrese que, si se transporta un receptor portátil con un automóvil alejándolo de la estación transmisora, no se escucha prácticamente ningún ruido hasta tanto que la señal deseada se mantenga por encima del doble de la señal de ruido (en amplitud, y tomando en cuenta sólo las componentes de la señal de ruido aceptadas por el receptor). A partir de este punto, el ruido comienza a aumentar rápidamente, de modo que puede decirse que hay un umbral bien definido.

Dentro de la distancia limitada por este umbral, es posible mejorar la relación de señal a ruido (S/N) sea aumentando la potencia de la emisión, sea aumentando el factor de modulación (de frecuencia o de fase). Dado que la potencia es proporcional al cuadrado de la tensión o de la corriente en un sistema dado, la duplicación de la desviación de frecuencia en un sistema de modulación de frecuencia tiene el mismo efecto que el cuadricular la potencia, sobre la relación S/N . En general, el aumento de la desviación máxima de frecuencia en la relación n tiene, sobre la relación S/N , el mismo efecto que el aumento de la potencia en la relación n^2 .

La mayor objeción que puede hacerse al uso de una gran desviación de frecuencia es que con ella limitase el número de estaciones que pueden funcionar en un área determinada si se asigna un ancho de banda total fijo para el servicio.

Es necesario entonces armonizar los factores en pugna y establecer

normas para que los receptores puedan funcionar con todos los transmisores. Esta es una función de la administración. Con el fin de estudiar el problema de la asignación de frecuencias, es preciso analizar el espectro de frecuencias de las distintas clases de modulación.

1-16. Análisis del espectro de la modulación de amplitud. La onda de la Ec. (1-18) puede expandirse por medio de simples identidades trigonométricas. Esta ecuación deviene

$$e = A \operatorname{sen} \omega t + \frac{m_a A}{2} \cos (\omega - \rho)t - \frac{m_a A}{2} \cos (\omega + \rho)t \quad (1-19)$$

La Ec. (1-19) demuestra que una onda modulada en amplitud por una única frecuencia puede descomponerse en tres frecuencias componentes con las siguientes designaciones:

$A \operatorname{sen} \omega t$	portadora
$\frac{m_a A}{2} \cos (\omega - \rho)t$	frecuencia lateral inferior
$\frac{m_a A}{2} \cos (\omega + \rho)t$	frecuencia lateral superior

Las tres componentes pueden representarse mediante sendos fasores de diferentes velocidades angulares. Si el observador gira con el fasor de portadora, este fasor aparece como estacionario. El fasor correspondiente a la frecuencia lateral superior aparece girando en sentido opuesto al de las agujas del reloj con una velocidad angular ρ , mientras que el fasor de la frecuencia angular inferior aparece girando en el sentido de las agujas del reloj, con la misma velocidad angular.

La Fig. 1-22 ilustra los tres fasores correspondientes a la onda de la Fig. 1-14. Se observará que los fasores correspondientes a las frecuencias laterales superior e inferior se suman para dar como resultado un fasor M , llamado fasor de modulación, que está siempre en fase con el fasor de portadora, pero varía en magnitud.

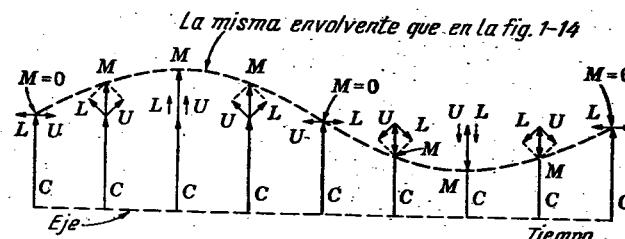


FIG. 1-22. Diagrama de fasores de portadora y frecuencias laterales en la modulación de amplitud. C , fasor de portadora (longitud constante). U , fasor de frecuencia lateral superior. L , fasor de frecuencia lateral inferior. M , fasor de modulación ($U + L$). El fasor de la onda completa es $C + M$.

Las tres frecuencias componentes de la Ec. (1-19) están representadas en la Fig. 1-23.

Si la señal original fuera una onda compleja en lugar de una única frecuencia, el análisis espectral demostraría la presencia de una banda de frecuencias. En lugar de una frecuencia lateral inferior y una superior, se tendrían dos bandas de frecuencias con el ancho de cada una igual al de la señal original. Por ejemplo, si la señal moduladora estuviera restringida a entre 0 y 5.000 c/s, las dos bandas laterales se extenderían hasta 5.000 c/s por debajo y 5.000 c/s por arriba de la portadora. Dado que la calidad de una señal depende del ancho de la banda que puede trasmitirse, una mejora de la calidad de la trasmisión exigiría la extensión del espectro de frecuencias ocupado por la onda de radio. En cambio, cuanto más estrecha es la banda de frecuencias usada por la señal, tanto mayor es el número de estaciones que pueden funcionar simultáneamente. En la práctica es preciso llegar a una solución de compromiso. Las estaciones normales de radiodifusión tienen asignadas frecuencias portadoras que están comprendidas en la gama de 535 a 1.605 Kc/s, en escala mundial, y las frecuencias individuales están escalonadas a intervalos de 10 Kc/s. Con el fin de prevenir la interferencia es imperativo el uso de circuitos resonantes en los receptores, los cuales (los circuitos) son tan agudos en los receptores comerciales que atenúan ya notablemente las componentes de las bandas laterales que se apartan más de 3.000 c/s respecto de la portadora. De ahí que la calidad posible en el servicio comercial esté severamente limitada por el problema, más importante, de la interferencia.

1-17. Análisis espectral de la modulación angular. La onda angularmente modulada de la Ec. (1-12) puede expandirse aprovechando las identidades

$$\text{sen}(m_p \text{ sen } x) = 2[J_1(m_p) \text{ sen } x + J_3(m_p) \text{ sen } 3x + J_5(m_p) \text{ sen } 5x + \dots] \quad (1-20a)$$

$$\begin{aligned} \cos(m_p \text{ sen } x) &= J_0(m_p) + 2[J_2(m_p) \cos 2x \\ &\quad + J_4(m_p) \cos 4x + J_6(m_p) \cos 6x + \dots] \end{aligned} \quad (1-20b)$$

donde $J_n(m_p)$ es la función de Bessel de primera clase y orden n . La Ec. (1-12) puede escribirse

$$e = A[\text{sen } \omega t \cdot \cos(m_p \text{ sen } \rho t) + \cos \omega t \cdot \text{sen}(m_p \text{ sen } \rho t)] \quad (1-21)$$

Si las Ecs. (1-20a) y (1-20b) se introducen en la Ec. (1-21), obtiénesce

$$\begin{aligned} e &= A\{J_0(m_p) \text{ sen } \omega t + J_1(m_p)[\text{sen}(\omega + \rho)t - \text{sen}(\omega - \rho)t] \\ &\quad + J_2(m_p)[\text{sen}(\omega + 2\rho)t + \text{sen}(\omega - 2\rho)t] + J_3(m_p)[\text{sen}(\omega + 3\rho)t \\ &\quad - \text{sen}(\omega - 3\rho)t] + J_4(m_p)[\text{sen}(\omega + 4\rho)t + \text{sen}(\omega - 4\rho)t] + \dots \\ &\quad + J_n(m_p)[\text{sen}(\omega + n\rho)t + (-1)^n \text{sen}(\omega - n\rho)t] + \dots\} \end{aligned} \quad (1-22)$$

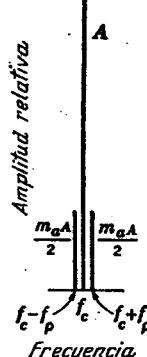


FIG. 1-23. Análisis espectral de una onda modulada en amplitud. f_c , frecuencia portadora; m_p , frecuencia de la señal. $m_p = 0,5$.

bandas laterales que se apartan más de 3.000 c/s respecto de la portadora. De ahí que la calidad posible en el servicio comercial esté severamente limitada por el problema, más importante, de la interferencia.

Esto indica que una única frecuencia de señal da lugar a la aparición de un número infinito de frecuencias laterales. No obstante, la situación no es tan mala como aparece a primera vista, porque, para un valor dado cualquiera de m_p , hay siempre un valor de n por arriba del cual los coeficientes $J_n(m_p)$ disminuyen rápidamente y resultan ya despreciables. Así lo exemplifica la Fig. 1-24. Por ejemplo, si m_p es $\frac{1}{2}$ radián o menos, sólo es importante el primer par de frecuencias laterales. En cambio, si m_p es igual a 20 radián, resultan todavía apreciables las frecuencias laterales del 24º par. Para los valores grandes de n , la caída rápida de los coeficientes $J_n(m_p)$ comienza justamente por arriba de $n = m_p$. Obsérvese también que siempre se reduce la amplitud de la portadora cuando hay modulación, dado que $J_0(m_p)$ es menor que uno para todo valor de m_p diferente de cero. En cambio en la modulación de amplitud, el valor de la portadora no es afectado por la modulación.

La Fig. 1-17 se ha trazado para un factor de modulación de fase de 0,5, de modo que sólo el primer par de frecuencias laterales es importante. Si se desprecian efectivamente todas las demás frecuencias laterales, los diagramas fasoriales para diversos instantes resultan ser los de la Fig. 1-25, donde se representa también la onda de señal para mejor identificación. Los fasores de portadora y resultante son los mismos que en la Fig. 1-19. El fasor de modulación, que es la suma de los dos fasores de frecuencia lateral, está siempre 90° fuera de fase respecto del fasor de portadora y varía de magnitud del mismo modo que en la modulación de amplitud. El despreciar las frecuencias laterales de orden superior equivale, matemáticamente, a despreciar la diferencia entre el arco y su tangente en los ángulos pequeños.

Cuando se agrega el fasor de modulación al fasor de portadora, el fasor resultante es adelanta y se atrasa, alternativamente, respecto del fasor de portadora. El adelanto y el atraso máximos alcanzan a aproximadamente $\frac{1}{2}$ radián. La longitud del fasor resultante se mantiene casi constante. Al agregar las demás frecuencias laterales, la longitud de R resulta ser rigurosamente constante.

Si el índice de modulación de fase excede de $\frac{1}{2}$ radián, es necesario incluir frecuencias laterales adicionales porque ya el arco difiere mucho de la cuerda. La adición de los fasores correspondientes a estas frecuencias laterales está ilustrada en la Fig. 1-26 para $m_p = 1$ y para un cuarto

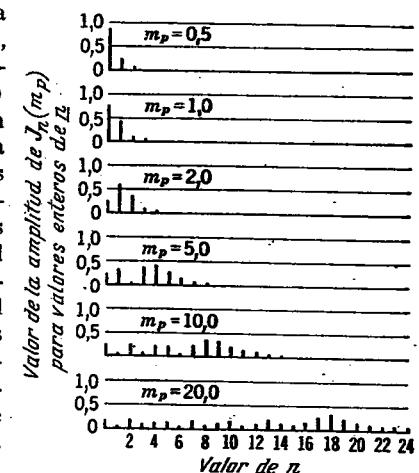


FIG. 1-24. Valores de la función de Bessel de primera clase de órdenes enteros.

de ciclo de audio. Se observará que cada par de frecuencias laterales está asociado con un fasor de modulación que conserva una posición de fase constante respecto de la portadora (suponiendo que las inversiones de fase se consideran como cambios de signo).

Si la onda modulada representa una cantidad cuyo cuadrado es proporcional a la potencia en un sistema dado, la potencia media (promedio)

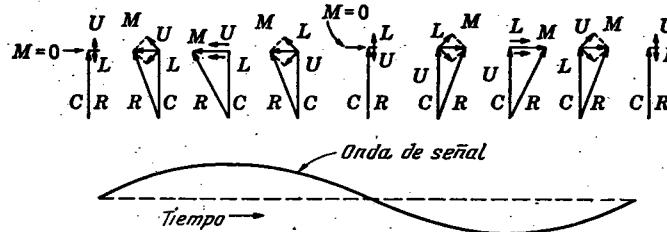


FIG. 1-25. Diagrama de fasores para la portadora y el primer par de frecuencias laterales de una onda con modulación angular para bajos valores del índice de modulación. C, fasor de portadora. U, fasor de frecuencia lateral superior. L, fasor de frecuencia lateral inferior. M, fasor de modulación ($U + L$). R, fasor resultante ($C + M$).

diada sobre un período de la frecuencia portadora) no es afectada por la modulación, ya que el valor eficaz de la onda portadora no se ve modificado si la amplitud permanece constante. Por lo tanto, la suma de los cuadrados de la portadora y de todas las componentes laterales permanece constante cualquiera que sea el valor de m_p . La potencia de las bandas laterales se obtiene a costa de la potencia de la portadora. Esta conclusión queda demostrada también por la bien conocida relación

$$J_0^2(m_p) + 2 \sum_{n=1}^{n=\infty} J_n^2(m_p) = 1 \quad (1-23)$$

para todos los valores de m_p . El número de términos de importancia en la serie puede evaluarse poniendo

$$J_0^2(m_p) + 2 \sum_{n=1}^{n=s} J_n^2(m_p) \geq \lambda$$

Si se toma λ igual a un valor determinado menor que la unidad, la suma puede terminarse con un valor finito de n igual a s . Si se hace $\lambda = 0,999$, entonces el 99,9 por ciento de la potencia de la onda se deberá a las componentes correspondientes a la portadora y a los valores de n iguales o menores que s . Por ejemplo, si $m_p = 4$ y se toman seis componentes de cada lado de la portadora,

$$\begin{aligned} J_0^2(m_p) + 2 \sum_{n=1}^{n=6} J_n^2(m_p) &= 0,157688 + 2(0,004356 + 0,132569 \\ &+ 0,185072 + 0,079017 + 0,017450 + 0,002411) = 0,999438 \end{aligned}$$

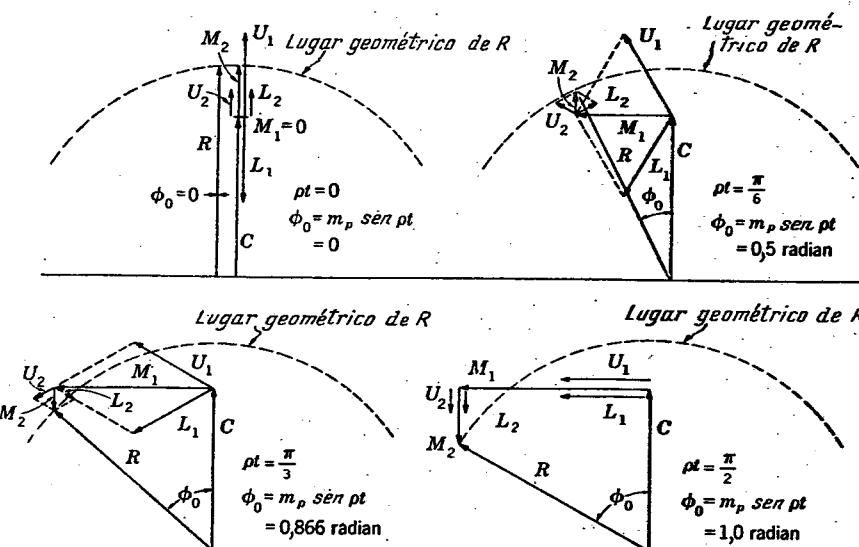


FIG. 1-26. Diagrama de fasor de una portadora y dos pares de frecuencias laterales de una onda angularmente modulada con $m_p = 1$. U_1 , L_1 y $M_1 = U_1 + L_1$, son respectivamente los fasores de la primera frecuencia lateral superior, la primera frecuencia lateral inferior y primero de modulación. U_2 , L_2 y $M_2 = U_2 + L_2$, corresponden respectivamente, al segundo par de frecuencias laterales. C, fasor de portadora. R, fasor resultante.

y todas las componentes correspondientes a $n > 6$ representarían sólo el 0,0562 por ciento de la potencia.

La constancia de la potencia de la onda representa una importante diferencia respecto de la modulación de amplitud, en la que permanece constante la potencia de la portadora y se agrega a ésta la potencia de las frecuencias laterales. Por esta razón simplifican algunos problemas de diseño en los transmisores de modulación angular.

1-18. Comparación del espectro de la modulación de fase con el de la modulación de frecuencia. En la modulación de fase, el valor de m_p se hace directamente proporcional a la máxima amplitud de la señal. Si dos señales diferentes tienen igual amplitud y modulan la onda en sucesión, el número de componentes necesarios es el mismo en ambos casos y todas estas componentes tienen las mismas amplitudes relativas. Se ha demostrado que para aprovechar plenamente las ventajas de la modulación angular en la reducción de las interferencias es necesario utilizar un valor grande de m_p para la señal deseada. Si se toma $m_p = 20$ en un caso dado, es aparente, según la Fig. 1-24 que se tendrán aproximadamente 24 componentes laterales a cada lado de la portadora. Por consecuencia, si se transmite una señal de audio que tiene componentes de hasta 15.000 c/s, la banda ocupada por la modulación tiene un ancho aproximado de $2 \times 24 \times 15.000 = 720.000$ c/s, el que es excesivo para las aplicaciones prácticas. Por esta razón, rara vez se utiliza la modulación de fase en la radiotransmisión.

En cambio, en la modulación de frecuencia se hace Δf directamente proporcional a la amplitud máxima de la señal. Si dos diferentes señales de audio tienen igual amplitud y modulan en sucesión una portadora con iguales valores de Δf , de la Ec. (1-18) resulta que los valores de m_f son inversamente proporcionales a las frecuencias de la señal de audio. Así, si m_f es igual a 4 para 15.000 c/s, sería igual a 40 para 1.500 c/s y a 400 para 150 c/s. El estudio de la Fig. 1-24 muestra que el número de componentes de magnitud apreciable es sólo algo mayor que m_f . Por lo tanto, a medida que se reduce la frecuencia de modulación, aumenta el número de componentes necesarias, pero la onda modulada ocupa un ancho prácticamente constante en el espectro. Como ejemplo, supongamos un caso en que se admite como máxima desviación de frecuencia la de 60.000 c/s. Si se quiere transmitir una señal de audio de alta calidad, con componentes de hasta 15.000 c/s y se trasmite esta frecuencia máxima de señal con la desviación máxima, se tendría

$$\frac{60.000}{15.000} = 4 \text{ radian}$$

Para este caso, la Fig. 1-24 demuestra que hay seis componentes importantes a cada lado de la portadora, de modo que el ancho de banda de la onda modulada viene a ser, prácticamente, $2 \times 6 \times 15.000 = 180.000$ c/s. En cambio, si la portadora se modula con una desviación máxima de 60.000 c/s por efecto de una onda de señal de 3.000 c/s, se tiene $m_f = 60.000/3.000 = 20$, con aproximadamente 24 componentes, separadas de 3.000 en 3.000 c/s, a cada lado de la portadora. El ancho de banda práctico de esta señal sería $2 \times 24 \times 3.000 = 144.000$, es decir algo menos que lo necesario con $m_f = 4$ con 15.000 c/s. La tabla 1-1 se ha calculado para una desviación máxima de 60.000 c/s, suponiendo constante la amplitud de la señal de audio.

TABLA 1-1

Frecuencia de señal	m_f para 60.000 c/s de desviación	Número aproximado de frecuencias laterales necesarias	Ancho de banda aproximado, Kc/s
80	2.000	4.030	120,06
60	1.000	2.020	120,20
600	100	208	124,8
2.500	24	46	140
3.000	20	24	144
5.000	12	30	150
10.000	6	16	160
15.000	4	12	180

En la Fig. 1-27 ilustrase el análisis espectral para una desviación de 60 Kc/s y frecuencias moduladoras de 2.500, 5.000, 10.000, y 15.000 c/s. Se apreciará que la señal está contenida dentro de un ancho de banda de aproximadamente 200 Kc/s en todos los casos.

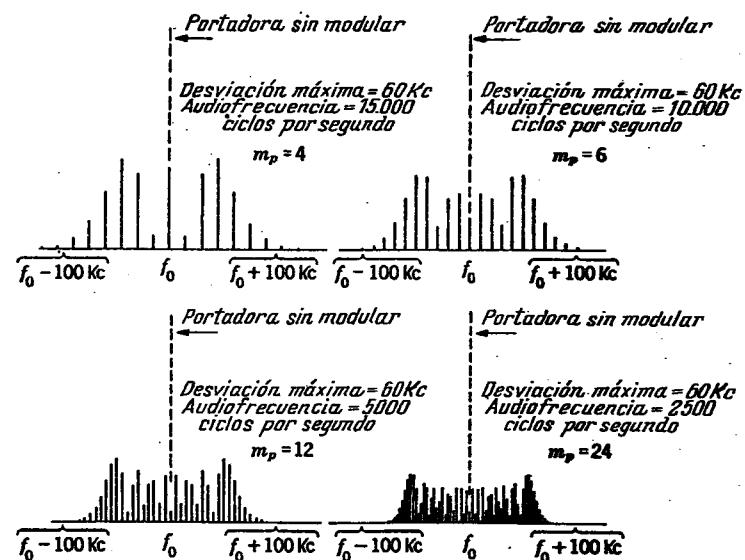
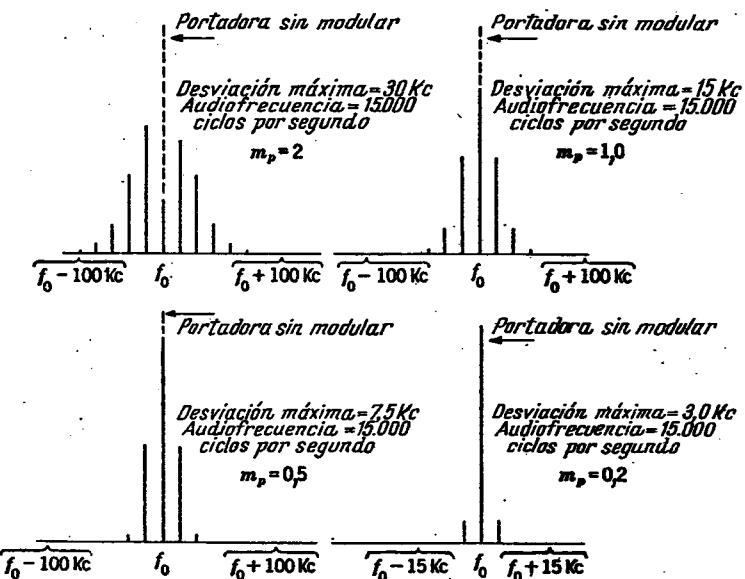
FIG. 1-27. Análisis espectral de la modulación de frecuencia para desviación Δf constante y diferentes frecuencias moduladoras.

FIG. 1-28. Análisis espectral de la modulación de frecuencia para frecuencia moduladora constante y diferentes desviaciones de frecuencia.

De hecho, en las señales típicas de audiofrecuencia, la mayor parte de la energía está concentrada en la región que queda por debajo de los 2.000 c/s y las amplitudes decaen rápidamente a medida que aumenta la frecuencia. Dado que Δf es proporcional a la amplitud de la señal, la naturaleza misma de las señales contribuye a mantener prácticamente constante el ancho de banda. Por esta razón se encuentra posible en la práctica usar una desviación máxima de 75.000 c/s, para la frecuencia máxima de señal de 15.000 c/s, sin exceder el ancho de banda total de 200 Kc/s.

En la Fig. 1-28 se muestran los espectros de frecuencia correspondientes a una frecuencia moduladora de 15.000 c/s con desviaciones máximas de respectivamente 30, 15, 7,5 y 3,0 Kc/s.

De las Figs. 1-27 y 1-28 despréndese que cuando la desviación de frecuencia es grande en comparación con la frecuencia de la señal, el ancho de banda requerido es aproximadamente igual a dos veces la desviación máxima, mientras que, cuando la frecuencia de la señal es grande en comparación con la desviación, el ancho de banda tiende a ser igual a dos veces la frecuencia de la señal. Este último caso coincide con el de la modulación de amplitud. En otros términos, el ancho de banda requerido es aproximadamente igual a dos veces la mayor de las dos frecuencias (señal o desviación). Si la frecuencia de la señal y la desviación son aproximadamente iguales, el ancho de banda requerido es aproximadamente igual a cuatro veces el mayor de los dos valores de frecuencia (ver la Fig. 1-28, $m_v = 0,5, 1, y 2$).

Los espectros de las Figs. 1-27 y 1-28 pueden usarse para cualesquier otras combinaciones de frecuencias de señal y de desviación que estén en la misma relación de desviación m_v , con sólo modificar la escala de las abscisas de modo que el intervalo entre dos componentes sucesivas sea igual a la frecuencia de la señal de baja frecuencia.

Débe advertirse especialmente qué si una señal contiene dos o más componentes de frecuencia, no es posible obtener el espectro resultante por simple suma de los espectros individualmente correspondientes a las frecuencias componentes de la señal (tal como, en cambio, puede hacerse en el caso de la modulación de amplitud). Sin embargo, el espectro total quedará comprendido prácticamente dentro de los límites calculados tomando sólo la componente de señal de mayor frecuencia o la máxima desviación de frecuencia cuando ésta es grande.

Aunque la discriminación en contra del ruido es proporcional a m_v , no es práctico usar valores grandes de m_v para todas las frecuencias de señal en razón del ancho de banda involucrado. No obstante, el ruido y la interferencia son el resultado compuesto de un gran número de componentes de ruido. De emplearse modulación de frecuencia, a cada componente de la señal le corresponde el máximo valor de m_v compatible con el ancho de banda asignado. Por consiguiente, la modulación de frecuencia es el tipo de modulación angular que mejor protección ofrece contra el ruido (dentro de un ancho de banda fijo).

1-19. Modulación simultánea. Pueden trasmítirse dentro de la misma banda de frecuencias una onda con modulación de amplitud y una onda con modulación angular siempre que se trasmitan las dos bandas

laterales de cada una de ellas. Conócense métodos para la detección de la modulación de amplitud que no responden a la modulación angular, y, viceversa, métodos de detección de la modulación angular que no responden a la modulación de amplitud. No obstante, cuando se trasmiten simultáneamente dos señales por modulación de amplitud y modulación angular, los requisitos prácticos impuestos al sistema de trasmisión son muy severos. Si una de las bandas laterales retarda más que la otra, la onda modulada angularmente presentará variaciones de amplitud proporcionales a la señal moduladora, mientras que, a su vez, la onda modulada en amplitud ofrecerá variaciones angulares también proporcionales a la señal moduladora propia. Los mismos resultados advienen si los pares de frecuencias correspondientes a una componente dada de la señal de baja frecuencia no se trasmiten con la misma ganancia o la misma pérdida. En tales condiciones habría, pues, interferencia (llamada de ordinario diafonía) entre las dos señales.

Para los fines de la modulación simultánea, en lugar de usar modulación angular pura para una de las señales, puédese trasmítir ésta usando sólo las componentes laterales de primer orden, aunque la amplitud del fasor de modulación excede el 50 por ciento de la de la portadora. Con esto manténgase igual el ancho de bandas de ambas señales moduladas. Este tipo de modulación se llama modulación "en cuadratura". La modulación de amplitud podría llamarse, correspondientemente, modulación "en fase". La modulación simultánea en fase y en cuadratura se usa en la práctica para la trasmisión de dos de las tres señales de video necesaria en la televisión en color.

1-20. Trasmisión de banda lateral única (SSB). Es posible eliminar una de las bandas laterales de una onda modulada y trasmítir así la información dentro del propio ancho de banda de la señal moduladora sin otras complicaciones de codificación. En la práctica recurrrese a la modulación de amplitud para producir la onda modulada original, de la cual se descarta luego una de las bandas laterales. Eliminada una de las bandas laterales, en el residuo varían a la vez en relación con la señal moduladora tanto la amplitud como la fase, de modo que sólo puede trasmítirse una señal dentro de una banda dada. Dado que la portadora de modulación de amplitud no contiene información alguna, se la puede eliminar, también, en el extremo trasmisor del sistema. No obstante, la frecuencia de la portadora es en sí misma una información necesaria para la demodulación, puesto que la diferencia entre ella y la de cada componente lateral de la onda trasmisida identifica la correspondiente frecuencia de la señal de audio.

La portadora puede ser reintroducida localmente en el receptor siempre que se conozca su frecuencia. Esto es simple en el caso de la trasmisión de banda lateral única, pues la frecuencia repuesta necesita ser sólo aproximadamente igual a la portadora original suprimida. En cambio, si se usan las dos bandas laterales, la frecuencia portadora local no sólo debe ser exacta en cuanto a la frecuencia, sino que también debe reproducirse correctamente la fase para conservar la identidad de la modulación original, de amplitud o angular. Por lo tanto, en la modulación simultánea es necesario trasmisir la portadora y con-

servar rigurosamente su relación de fase respecto de las dos bandas laterales.

1-21. Modulación entrelazada. Cuando se analizan según el método de Fourier señales del tipo cuasirrecurrente, tales como las que vienen de la exploración de líneas en la televisión, encuéntrense en el espectro crestas de potencia espaciadas a intervalos de frecuencias iguales a la frecuencia de recurrencia de la señal (en el caso de la televisión, a intervalos iguales al producto del número de líneas por la frecuencia de cuadro). Resulta entonces posible introducir en la misma banda de frecuencias, otra señal similar, con igual frecuencia de recurrencia, de tal modo que la interferencia resulte despreciable. Las crestas de potencia de la segunda señal ocupan las posiciones medias entre las de la primera señal, siempre que se adopten las precauciones del caso. Este método se utiliza en el sistema de televisión en color compatible de la FCC, en el que la segunda señal está además modulada simultáneamente en fase y en cuadratura. Las dos señales así entrelazadas trasmiten de esta manera las tres porciones de la información de video que resultan necesarias para identificar el brillo y el color, dentro del mismo ancho de banda utilizado para la televisión monocromática. Según se ha indicado, las señales de esta clase imponen muy severos requisitos de limitación de la distorsión de retardo y amplitud en el sistema de transmisión, pues de otro modo habría interferencia entre los tres componentes del color.

1-22. Modulación de pulsos. Tanto la modulación de amplitud como la angular permiten la separación de distintas señales por medio de las redes o los filtros selectivos que se describirán en otros capítulos. Los sistemas que aprovechan este método de transmisión de varias señales por un mismo medio se denominan por lo general "sistemas por división de frecuencia".

El uso de la modulación de pulsos introduce como posible otro método de identificación de las señales que se trasmiten por el mismo canal o medio. La modulación de pulsos basa en el concepto de "toma de muestras" de una señal de acuerdo con el siguiente teorema:

Una señal de duración T cuya frecuencia más alta de importancia es f_h queda completamente especificada cuando se toman $2Tf_h$ [o $2T(AB)$, siendo AB el ancho de banda de la red pasabajos necesaria para trasmisir la señal] muestras a intervalos de tiempo iguales de $1/2f_h$ seg.

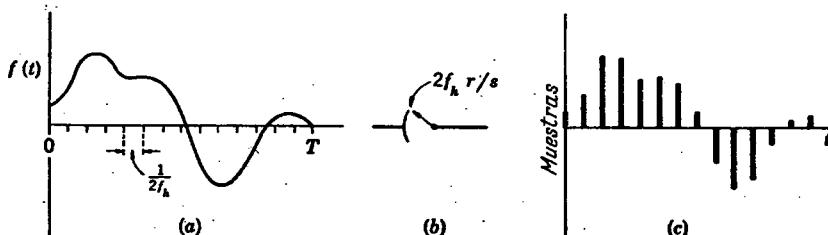


FIG. 1-29. Idea básica de la toma de muestras. (a) Una señal $f(t)$ de duración T . (b) sencilla llave rotativa para la toma de muestras. (c) Muestras de amplitud correspondientes a (a).

Esta idea está ilustrada en la Fig. 1-29. El teorema puede demostrarse del siguiente modo: La señal $f(t)$ puede expandirse en una serie de Fourier con las armónicas de $1/T^*$, esto es,

$$f(t) = B_0 + \sum_{k=1}^n B_k \cos \frac{2\pi k}{T} t + \sum_{k=1}^n A_k \operatorname{sen} \frac{2\pi k}{T} t \quad (1-24)$$

(En realidad al usar la serie de Fourier, ésta repite la señal indefinidamente, pero toda la información del caso puede extraerse dentro del tiempo T .)

Según nuestra hipótesis, f_h es la frecuencia más alta de interés; por lo tanto, n , el orden de la armónica más alta de la Ec. (1-24), será

$$n = \frac{f_h}{1/T} = f_h T$$

Hay, por consecuencia, $2f_h T + 1$ términos en la Ec. (1-24) cuyas amplitudes pueden evaluarse escribiendo $2f_h T + 1$ ecuaciones simultáneas de igual forma que la Ec. (1-24) para los valores t correspondientes a las tomas de muestra. Para los valores prácticos de f_h , $2f_h T + 1$ es esencialmente igual a $2f_h T$. Por consecuencia, las muestras contienen toda la información necesaria para especificar $f(t)$.

Dado que la señal contiene presumiblemente componentes cuyas frecuencias se extienden desde cero hasta f_h , la frecuencia significativa más elevada, es a menudo conveniente reemplazar f_h con AB , es decir, el ancho de banda de la señal en sí y también de la red necesaria para trasmisirla.

En el caso de una señal continua (en lugar de una de duración T), el teorema puede enunciarse diciendo:

Una señal continua cuya frecuencia más alta de importancia es AB , puede especificarse de manera completa tomando muestras a razón de $2AB$ por segundo.

Se deduce que, si se toma un número adecuado de muestras y se identifica la magnitud de cada una de éstas por medio de alguna característica conveniente de una sucesión de pulsos breves de una onda de alta frecuencia (por ejemplo, la amplitud o la posición relativa en el tiempo), estos pulsos pueden considerarse como una representación codificada de la señal. Pero, además, estos pulsos no tienen por qué ocupar todo el tiempo de trasmisión, de modo que los pulsos codificados correspondientes a dos o más canales de señal pueden ser entremezclados en el tiempo, siempre que tanto en el trasmisor como en el receptor se cuente con un método sincrónico para identificar cada pulso en particular con el canal que le corresponde. Este método de transmisión simultánea se denomina "método de división (o múltiplex) de tiempo".

* Las series de Fourier se describen en detalle en el Cap. II. Se sugiere que el estudiante vuelva a este apartado una vez estudiado el Cap. II.

Además de las ventajas de la trasmisión múltiplex en sí, algunas formas de modulación de pulsos ofrecen importantes ventajas en lo que se refiere a la relación de señal a ruido. Como en el caso de la modulación de frecuencia, esta mejora lógrase a expensas del mayor ancho de banda ocupado por la trasmisión.

1-23. Ley de Hartley-Shannon. Se ha visto que el monto de información contenido en una señal de duración T y frecuencia máxima AB puede ser representado por $2T(AB)$ pulsos, cada uno con la amplitud determinada por el valor de la señal en el instante en que se toma la muestra correspondiente. En el extremo receptor, la amplitud de una señal recibida no tiene jamás un valor absolutamente definido sino que resulta, por así decirlo, "embarrada" por la introducción de *ruido* a causa de los disturbios casuales que se le superponen en ruta. Por consecuencias, el valor de una señal de potencia S sólo se conoce dentro del grado de error determinado por la potencia de ruido N que la acompaña.

Es conveniente definir la cantidad de información contenida en una señal. En el "interrogatorio" judicial se busca siempre obtener simples "sí" y "no" como respuestas a todas las preguntas. De hecho, si a una pregunta complicada se da una respuesta también complicada, es siempre posible descomponer la primera en una cantidad de preguntas que pueden ser respondidas sí o no.¹

Esto es particularmente fácil si la respuesta es cuantitativa. Por ejemplo, si se pide a un individuo que piense en un número comprendido entre 0 y 63, basta con 6 preguntas con respuestas sí-no para determinar el valor del número. Supongamos que el número elegido sea 43. Deben hacerse entonces las siguientes preguntas, basadas en la división sucesiva de los números posibles en dos grupos iguales (se dan además las respuestas):

PREGUNTA	Respuesta	Conclusión
1. ¿Es $0 \leq x \leq 31$ verdadero?	No	$32 \leq x \leq 63$
2. ¿Es $32 \leq x \leq 47$ verdadero?	Sí	$32 \leq x \leq 47$
3. ¿Es $32 \leq x \leq 39$ verdadero?	No	$40 \leq x \leq 47$
4. ¿Es $40 \leq x \leq 43$ verdadero?	Sí	$40 \leq x \leq 43$
5. ¿Es $x = 41$?	No	$x = 42$ ó 43
6. ¿Es $x = 42$?	No	$x = 43$

Los 64 posibles valores entre 0 y 63 inclusive pueden ser especificados con no más que $\log_2 64 = 6$ respuestas a un número igual de preguntas que sólo pueden ser contestadas sí o no. Por definición toda elección posible entre 64 valores posibles se define como equivalente a 6 bits de información*. El número de bits representa el número máximo de lugares que se necesita en el sistema binario de numeración para representar el número de elecciones posibles. El sistema binario

* Véase Mateos 5:37.

* El término "bit" es contracción de "binary digit", dígito binario.

de numeración es de gran interés en la comunicación porque representa el método más simple de realizar operaciones aritméticas y de almacenar información. No obstante, dado que este libro se ocupará principalmente de la respuesta de las redes a las señales continuas más bien que a las señales cuantificadas, no insistiremos sobre este sistema numérico.

Volvamos ahora a la consideración de la información contenida en una serie de pulsos descriptivos de una señal, en la que cada pulso tiene una amplitud de tensión o de corriente proporcional a $\sqrt{S + N}$, con una incertidumbre proporcional a \sqrt{N} . Por consecuencias, el número de posibles valores reconocibles de la señal en presencia de ruido es

$$n = \log_2 \sqrt{\frac{S+N}{N}} = \frac{1}{2} \log_2 \left(1 + \frac{S}{N} \right) \quad (1-25)$$

Puesto que la información contenida en la señal original puede ser representada por $2T(AB)$ pulsos, la información total H contenida en la señal será

$$H = T(BW) \log_2 \left(1 + \frac{S}{N} \right) \text{ bits} \quad (1-26)$$

La velocidad de trasmisión de la información, o capacidad del canal, en bits por segundo viene a ser

$$C = \frac{H}{T} = BW \log_2 \left(1 + \frac{S}{N} \right) \text{ bits/seg} \quad (1-27)$$

La ecuación (1-27) expresa la llamada ley de Hartley-Shannon. Hartley originó el concepto del efecto del ancho de banda. Shannon agregó el efecto de la relación S/N .

Esta ley demuestra que es posible aumentar la capacidad de un canal sea aumentando la potencia o el ancho del canal, sea disminuyendo el nivel de ruido. Debe reconocerse, sin embargo, que no todos los sistemas de comunicación explotan al máximo las posibilidades inherentes al ancho de banda y la potencia utilizada. El diseño del sistema de codificación y decodificación tiene mucho que ver en lo que al aprovechamiento de la total capacidad del canal se refiere. La modulación de frecuencia no es sino un medio de obtener una mejor relación S/N a expensas de un mayor ancho de banda. Ciertas formas de modulación de pulsos obtienen resultados similares a costa del ancho de banda requerido y la complejidad de la codificación y la decodificación. La complicación adicional de la codificación puede introducir también un retardo de tiempo apreciable en la ejecución de la codificación.

El hecho de que la capacidad de información de un canal depende de la relación S/N no fue reconocido en un principio. Consideremos, sin embargo, las posibilidades de un canal absolutamente libre de ruido. En este sistema se podría reconocer la amplitud de cada pulso con graduaciones tan finas como se quiera. Entonces, con un solo pulso

podrían enviarse tantas informaciones diferentes como valores de amplitud pudiesen reconocerse, es decir, en número infinito en este caso. O, en otros términos, podría hacerse una lista anticipada de mensajes (lo que es teóricamente posible, aunque no práctico) y asociarse cada mensaje con una posible magnitud del pulso. Pero el hecho mismo de que una tensión (o una corriente) sólo pueda medirse con una precisión finita indica que esta incertidumbre de la medición se debe a alguna característica casual (o estadística) que es equivalente al ruido en sentido general. Limitase así la cantidad de información que puede obtenerse con una sola lectura. En la práctica es a menudo más sencillo utilizar n pulsos cuya presencia o ausencia se identifica con las respuestas si o no más bien que producir los equivalentes 2^n valores reconocibles en la magnitud de un pulso único.

El alcance último de todo sistema de comunicación es el que se tiene cuando la señal ha decaído hasta un valor en el que la relación S/N no es ya tolerable. Este umbral puede ser relativamente alto cuando la señal se transmite con fines de entretenimiento, por ejemplo, en la radiodifusión, porque si el ruido es excesivo, resulta muy fácil apagar el receptor y buscar placer en otras cosas. Se toleran en cambio valores mucho más bajos cuando la comunicación es vital, por ejemplo, en las aplicaciones militares. No obstante, aún en este último caso, cuando la relación S/N deviene demasiado pequeña, la señal no puede ser interpretada por el receptor y la comunicación es inútil.

Es importante observar que una vez que la relación S/N ha decaído por debajo del límite tolerable, no es ya posible restaurar la señal por medio de amplificadores, porque éstos amplifican el ruido junto con la señal. El amplificador de más cuidadoso diseño introduce siempre cierta cantidad de ruido, debido al movimiento casual de los electrones tanto en los circuitos de entrada como en las válvulas y los transistores. Por consecuencias, aun las señales originalmente casi libres de ruido y transmitidas sobre circuitos que introducen muy poco ruido, no deben dejarse decaer hasta un nivel muy bajo, pues se llegaría al punto en que ya no pueden restaurarse a un nivel útil para su interpretación por medio del amplificador. Por esta razón, en los sistemas telefónicos alámbricos de larga distancia, es necesario intercalar amplificadores a intervalos regulares más bien que aplicar toda la amplificación sólo en los extremos. Consideremos por ejemplo el caso de un cable submarino, el que introduce una gran pérdida en la transmisión de las frecuencias propias de la voz humana. La comunicación telefónica por cable no fue posible hasta que desarrollaron métodos adecuados para permitir la intercalación de amplificadores en el cable mismo, a intervalos frecuentes, a pesar de que el cable está sumergido en el mar.

La Fig. 1-30 ejemplifica los niveles de energía, representados en escala logarítmica en función de la distancia, que se encuentran a lo largo de un sistema telefónico alámbrico. Se ha supuesto el sistema más ruidoso que lo habitual con fines ilustrativos.

Debe observarse que se introduce ya ruido en el extremo trasmisor a causa de los sonidos presentes en la habitación donde se habla y de la deficiencia del micrófono utilizado. El ruido de la habitación es

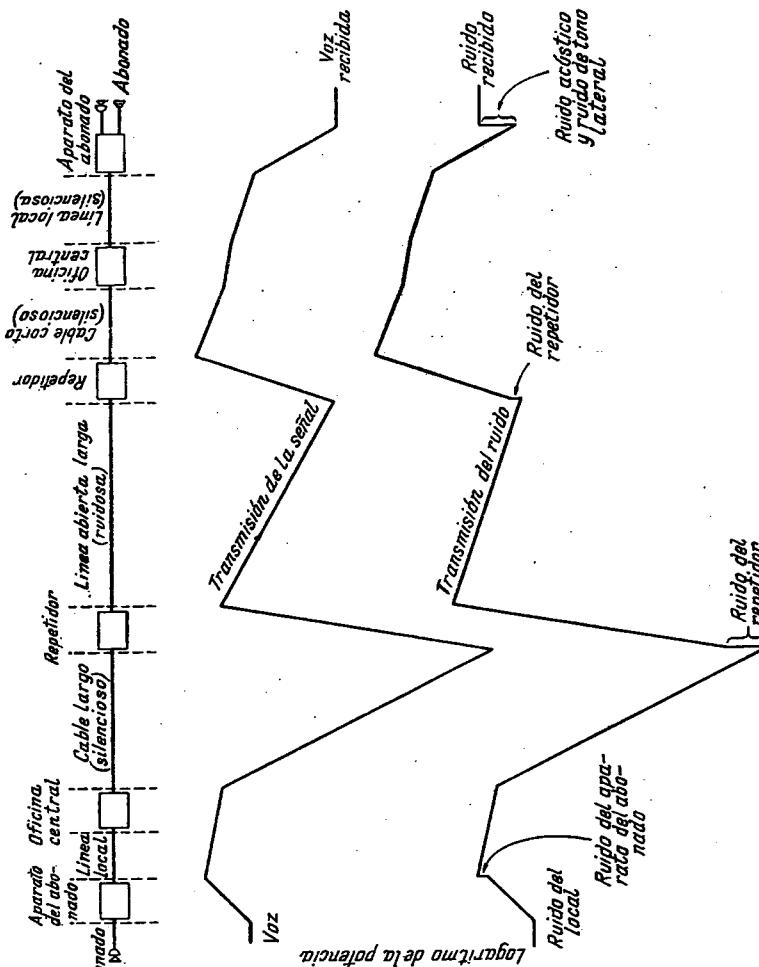


Fig. 1-30 Niveles de señal y ruido en un sistema telefónico. (Se han exagerado los niveles de ruido con fines de ilustración.)

amplificado por el micrófono trasmisor junto con la señal. Se supone que la central local y la primera sección de la línea introducen un monto de ruido despreciable. No obstante, la pérdida producida en la primera sección de la línea de larga distancia es tan grande que se necesita una ganancia considerable en el primer repetidor, de modo que el ruido inherente del amplificador es apreciable en comparación con la señal. La combinación de señal y ruido emerge del repetidor con una relación S/N más pobre que la de entrada. Se supone que la segunda sección de línea es una línea aérea que corre junto a una línea de energía eléctrica, de modo que, a pesar de las precauciones habituales, se introduce en esta sección un ruido apreciable por inducción. Supóngase luego que el ruido introducido en el resto del sistema no es ya apreciable, de modo que la relación S/N se conserva hasta llegar al aparato del abonado que escucha. En este lugar se introducen nuevos ruidos, principalmente debidos al ruido ambiental, el que entra por dos caminos. Uno de ellos es por el oído mismo del abonado (ruido acústico); el otro es el que entra por el micrófono local, el que lo amplifica y lo introduce en el aparato del abonado, aunque atenuado. Esta causa de ruido se llama "tono lateral". Por lo tanto, la señal llega al oído del escucha con una relación S/N menor que la que tenía cuando se originó.

El hecho de que no puede transmitirse tanta información por un sistema ruidoso como por un sistema silencioso en un lapso dado queda ilustrado cualitativamente por las frecuentes repeticiones que son necesarias cuando hay mucho ruido en una línea telefónica.

Es función del diseño de todo sistema de comunicación, teléfono, radio, televisión, radar, computador, o lo que sea, asegurar que (1) la relación S/N no caiga por debajo del límite admisible; (2) la señal en sí tenga la amplitud suficiente para ser interpretada o decodificada por el destinatario de la información, hombre, máquina o una combinación de ambos.

1-24. Resumen. En el diseño de los sistemas de comunicación eléctricos las señales complejas que representan funciones del tiempo deben ser codificadas, transformándolas en señales eléctricas. Estas señales pueden entonces ser transmitidas directamente a su destino por medio de una red adecuada, o pueden ser sujetas a una nueva codificación por traslación de frecuencia u otros medios antes de ser introducidas en el sistema de transmisión.

En general, el aspecto distintivo del diseño de los sistemas de comunicación involucra la síntesis de redes de C. A. capaces de transmitir las señales deseadas, representadas por un ancho de banda constante, sin distorsión apreciable, y aptas para rechazar las señales o porciones de señales no deseadas. En esta síntesis se hará uso de elementos pasivos, resistencias, inductancias y capacitancias, y de elementos activos, tales como válvulas y transistores. El resto de este volumen se dedicará al análisis y la síntesis de las redes lineales.

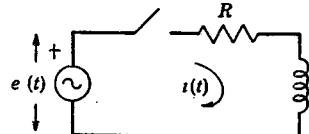
De comparable importancia en la preparación del ingeniero en telecomunicación son los temas de:

1. Dinámica de los iones y los electrones, de importancia en las válvulas electrónicas.
2. Física del estado sólido, de importancia en los transistores.
3. Teoría del campo electromagnético y aplicación de las condiciones límites impuestas por las antenas y las guías de onda a las ecuaciones de Maxwell.
4. Aplicación de la alinealidad para obtener dispositivos para la modulación, la demodulación y la amplificación de las ondas moduladas.
5. Teoría estadística de la información.
6. Diseño de los sistemas electrónicos.

Es obvio qué no resulta ya posible comprender todos estos temas, aunque sólo sea en lo esencial, en los límites de un único volumen.

CAPITULO II
METODOS DE
ANALISIS DE LAS REDES

En el estudio de los circuitos de comunicación entran dos conceptos básicos: *análisis*, en el que está dada la red y se pretende calcular su comportamiento; y *síntesis* en la que ha de diseñarse una red para lograr un comportamiento dado. Es fundamental para los dos conceptos la idea de comportamiento de una red. El presente capítulo se ocupará de los distintos medios que permiten la especificación del comportamiento dicho y de las relaciones que existen entre tales medios.

FIG. 2-1. Circuito RL en serie.

2-1. Respuesta transitoria y respuesta estacionaria. Consideremos el sencillo circuito de la Fig. 2-1, donde $e(t)$ es una tensión cosinusoidal repentinamente aplicada en el instante $t = 0$, de modo que

$$e(t) = 0 \quad t < 0$$

$$e(t) = \hat{E} \cos \omega t \quad t > 0$$

Se pide expresar la corriente i como función del tiempo. Por lo tanto, en esta caso, la red relaciona $i(t)$ con $e(t)$. (Como alternativa podría pedirse la caída de tensión a través de L o de R). Uno de los métodos básicos para hallar la corriente consiste en escribir una ecuación que vincule $i(t)$ y sus derivadas (también sus integrales si es necesario) con la función impulsora $e(t)$ y los parámetros circuitales; así, por la regla de tensiones de Kirchhoff,

$$L \frac{di}{dt} + Ri = \hat{E} \cos \omega t \quad t > 0 \quad (2-1)$$

Es bien sabido, de acuerdo con la teoría de las ecuaciones diferenciales, que la solución completa de la Ec. (2-1) consta de dos partes: (1) la función complementaria, que es independiente de $\hat{E} \cos \omega t$ y solución de la ecuación homogénea que se obtiene igualando a cero la función impulsora en la ecuación; (2) la integral particular, que depende de la función impulsora y es una solución de la Ec. (2-1). Se verá más adelante que estas dos partes de la solución completa tienen significaciones físicas especiales.

Según se ha dicho ya, la ecuación homogénea correspondiente a la Ec. (2-1) es

$$L \frac{di}{dt} + Ri = 0 \quad (2-1a)$$

Esta ecuación puede resolverse por separación de variables:

$$\int \frac{di}{i} = - \int \frac{R}{L} dt \quad (2-1b)$$

$$\ln i = - \frac{R}{L} t + \ln K$$

donde K = constante

\ln = logaritmo neperiano o natural

Reordenando y tomando logaritmos,

$$i = Ke^{-Rt/L} \text{ función complementaria} \quad (2-2)$$

La integral particular de la Ec. (2-1) puede hallarse por aplicación de métodos directos en razón de que la función impulsora es cosinusoidal, ya que entonces las derivadas y las integrales son también cosinusoidales. Puede suponerse que la integral particular es de la forma $i = |\hat{I}| \cos (\omega t + \phi)$; donde $|\hat{I}|$ y ϕ son constantes cuyos valores hay que determinar. Por razón de conveniencia puede expresarse i de otra manera, aprovechando la identidad de Euler:

$$|\hat{I}| e^{j(\omega t + \phi)} = |\hat{I}| \cos (\omega t + \phi) + j|\hat{I}| \sin (\omega t + \phi)$$

$$i = |\hat{I}| \cos (\omega t + \phi) = \operatorname{Re} \{ |\hat{I}| e^{j(\omega t + \phi)} \} \quad (2-3)$$

donde Re significa "parte real de".

Llevando la Ec. (2-3) a la Ec. (2-1),

$$L \operatorname{Re} \{ j\omega |\hat{I}| e^{j(\omega t + \phi)} \} + R \operatorname{Re} \{ |\hat{I}| e^{j(\omega t + \phi)} \} = \operatorname{Re} \{ \hat{E} e^{j\omega t} \} \quad (2-4)$$

Puesto que $\operatorname{Re} \{ \cdot \}$ y $e^{j\omega t}$ son comunes a todos los términos, la Ec. (2-4) puede escribirse en la forma $\operatorname{Re} e^{j\omega t} \{ |\hat{I}| e^{j\phi} (R + j\omega L) \} = \hat{E}$. Por lo tanto,

$$\operatorname{Re} e^{j\omega t} \{ |\hat{I}| e^{j\phi} \} = \frac{\hat{E}}{R + j\omega L} = \frac{\hat{E}}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} e^{-j \operatorname{arctg} \omega L / R} \quad (2-5)$$

$$\text{de donde } |\hat{I}| = \frac{\hat{E}}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \quad \phi = - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\omega L}{R} \quad (2-5a)$$

Luego, la integral particular de la Ec. (2-1) es

$$i = \operatorname{Re} \{ |\hat{I}| e^{j(\omega t + \phi)} \}$$

$$= |\hat{I}| \cos (\omega t + \phi) \text{ integral particular} \quad (2-6)$$

La solución completa de la Ec. (2-1) obténese sumando las Ecs. (2-2) y (2-6):

$$i = Ke^{-Rt/L} + \frac{\hat{E}}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cos (\omega t + \phi) \quad (2-7)$$

La constante K resulta de las condiciones iniciales prevalecientes en el instante $t = 0$. Dado que la corriente no puede variar de modo

discontinuo a través de una inductancia, $i = 0$ para $t = 0$. Luego, sustituyendo en la Ec. (2-7),

$$\hat{K} = -\frac{\hat{E}}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cos \phi$$

Según la Fig. 2-2, $\cos \phi = R/\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$; así, la solución completa es

$$i = -\frac{\hat{E}R}{R^2 + (\omega L)^2} e^{-Rt/L} + \frac{\hat{E}}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cos(\omega t + \phi) \quad (2-8)$$

El primer término de la Ec. (2-8) es la *parte transitoria de la solución* y es importante sólo para los valores finitos del tiempo cerca de $t = 0$. El segundo término es la parte *estacionaria* de la solución. En muchos circuitos los parámetros tienen valores tales que el término transitorio deviene despreciable al cabo de una fracción de segundo y sólo prevalece entonces el término estacionario. Diremos que el término estacionario describe el comportamiento del circuito una vez que todos los transitorios se han reducido a valores despreciables.

2-2. Respuesta estacionaria. Pueden hacerse varias observaciones respecto de los métodos útiles para obtener la respuesta estacionaria o integral particular en el caso de una función impulsora sinusoidal, tal como el considerado en el apartado anterior. Este ejemplo sirve para la introducción del método del operador j , o de los números complejos, para resolver los problemas circuitales de C. A.

1. Una vez seguida la solución paso a paso para fundamentar el método, es de práctica omitir $\text{Re}\{ \cdot \}$ y $e^{j\omega t}$ en la Ec. (2-4).

2. La derivada respecto del tiempo $d(\cdot)/dt$ se reemplaza multiplicando por el operador $j\omega$, mientras que la integral respecto del tiempo $\int(\cdot) dt$ se reemplaza multiplicando por el operador $1/j\omega$. (Esta última proposición no ha sido demostrada en el apartado anterior, pero puede ser probada por el estudiante.)

3. En la Ec. (2-5), el término $R + j\omega L$ puede ser identificado con la impedancia compleja usual

$$Z = R + j\omega L \quad (2-9a)$$

la que tiene una *magnitud*

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \quad (2-9b)$$

y un *argumento* o *ángulo*

$$\phi = \text{arc tg } \frac{\omega L}{R} \quad (2-9c)$$

4. Es de práctica corriente en los circuitos de C. A. utilizar los valores eficaces de $|I|$ más bien que $|i|$, luego

$$|\hat{I}| = \sqrt{2} |I| \quad (2-10a)$$

mientras que la "corriente compleja" queda representada por

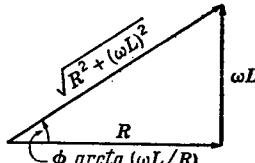


FIG. 2-2. Diagrama de fasores para evaluar $\cos \phi$.

$$I = |I|e^{j\phi} = |I|/\phi \quad (2-10b)$$

El conocimiento de las características propias del estado estacionario de una red en función de la frecuencia es en general muy útil. Esta información puede obtenerse calculando la respuesta a una función sinusoidal de amplitud constante para muchas frecuencias y representando gráficamente el resultado en función de la frecuencia. Dado que la respuesta está en general expresada por un número complejo, intervienen tres cantidades. Por vía de ilustración, I , para el circuito de la Fig. 2-1, se representa isométricamente como un lugar geométrico único en la Fig. 2-3a, suponiendo que los parámetros circuitales son $R = 10$ ohm, $L = 1,59$ mH, $E = 5$ V. En la figura, las coordenadas son las partes real e imaginaria de I y la frecuencia.

Es obvio que ha de resultar conveniente algún método simplificado para presentar esta información, dado que un lugar geométrico tridimensional es difícil de dibujar en el plano y aún más difícil de interpretar. Hay tres métodos en uso corriente.

El primero consiste en representar la proyección de la curva tridimensional en el plano $(\text{Re}\{I\}) - (\text{Im}\{I\})$. Dado que en esta proyección se produce el colapso de la escala de frecuencias, desaparece el eje correspondiente a ésta. Esta dificultad se salva en ocasiones identificando algunos puntos de la proyección mediante los correspondientes valores de la frecuencia, como se ha hecho en la Fig. 2-3b. En otros casos, cuando sólo interesa primordialmente la forma de la curva, indícase con una flecha el sentido de crecimiento de la frecuencia.

Otro método consiste en resolver el lugar geométrico de la Fig. 2-3a en sus coordenadas polares $|I|$ y ϕ :

$$I = |I|e^{j\phi} = |I| \cos \phi + j|I| \sin \phi \quad (2-10c)$$

$$= \text{Re}\{I\} + j \text{Im}\{I\}$$

para representar luego éstas, independientemente, en función de la frecuencia, Fig. 2-3c.

El tercer método utiliza dos proyecciones del lugar geométrico tridimensional: $\text{Re}\{I\}$ en el plano $(\text{Im}\{I\})$, (f), e $\text{Im}\{I\}$ en el plano $(\text{Re}\{I\})$, (f). Así lo ilustra la Fig. 2-3d.

En muchas aplicaciones las frecuencias a las cuales es de interés el comportamiento de la red abarcan una gama tan amplia que resulta conveniente una compresión del eje de las frecuencias. El comportamiento sicológico del oído humano sirve como oportuna base para esta compresión. El oído identifica iguales *relaciones* de frecuencia como iguales *intervalos* musicales. Por ejemplo, si las dos frecuencias 128 y 64 c/s se escuchan simultáneamente, ellas parecen separadas por el mismo intervalo que 1.024 y 512 c/s, aunque la diferencia absoluta es de 64 c/s en el primer caso y de 512 c/s en el segundo. Lo que ocurre es que en los dos casos la *relación* de frecuencia es de 2:1 y esta relación equivale a una *octava*. La respuesta del oído es pues logarítmica, en cuanto a la frecuencia, y la escala logarítmica puede usarse como escala comprimida de frecuencias. Puede usarse una escala de *octavas*, basadas en las potencias de 2, caso en que las frecuencias 100, 200, 400, 800, ... c/s estarían separadas por distancias iguales a lo largo

del eje de las frecuencias. No obstante, a causa de la disponibilidad de los papeles semilogarítmicos, es de práctica corriente el empleo de una escala de *décadas*, basada en las potencias de 10. En este caso las frecuencias 10, 100, 1.000, 10.000, ... c/s se encuentran a distancias iguales sobre el eje de las frecuencias. También resulta que el uso de la

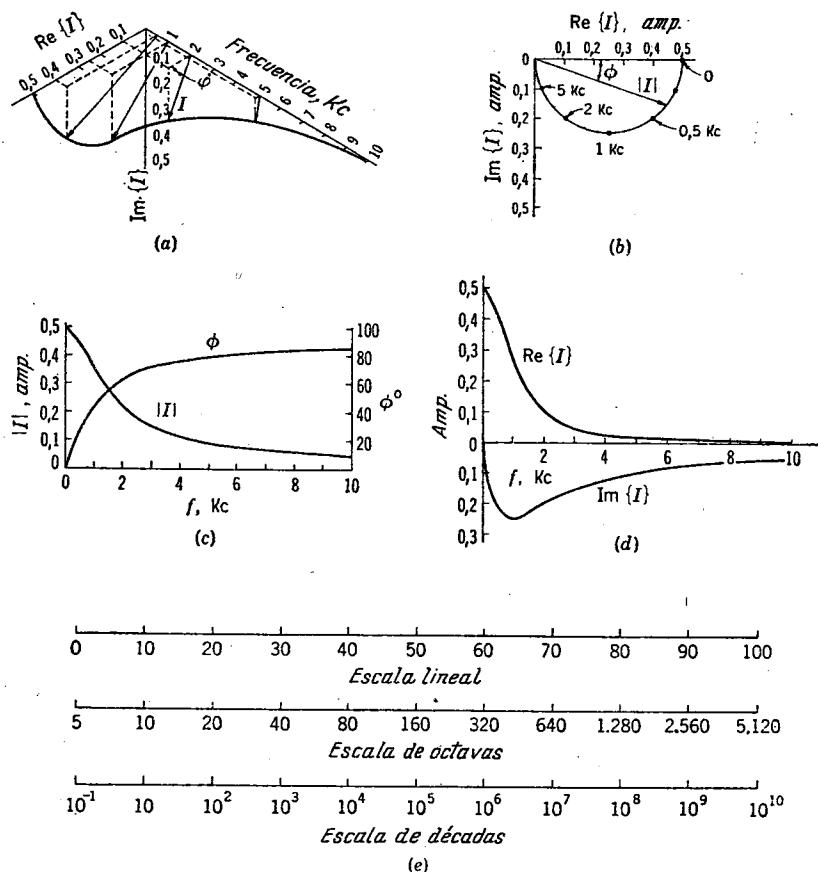


FIG. 2-3. Métodos de alternativa para representar la corriente estacionaria de la Fig. 2-1. (a) Representación isométrica del lugar geométrico de la corriente. (b) Proyección del lugar geométrico en el plano (Re {I}), (Im {I}). (c) Representación cartesiana de las coordenadas polares de b en función de la frecuencia. (d) Proyecciones del lugar geométrico tridimensional sobre los planos (Re {I}), (f) e (Im {I}). (e) Comparación entre las escalas lineal y logarítmica.

escala logarítmica simplifica la presentación de la información en muchos casos. Por ejemplo, en el Cap. IV se hace simétrica una curva de respuesta típica, y el Cap. XIV una curva resulta lineal dentro de una amplia gama de frecuencias gracias al uso de escalas logarítmicas. Las diversas escalas ilustranse en la Fig. 2-3e.

Aunque se ha elegido la corriente para la representación gráfica de la Fig. 2-3, el estudiante advertirá que no tiene por qué ser así, necesariamente, en todos los casos. Por ejemplo, en el caso de la Fig. 2-1 hubiera podido elegirse como característica de interés del circuito la impedancia o la tensión a través de *L*, según los requisitos del problema en particular.

2-3. Respuesta transitoria a la función impulsora escalón. Al evaluar la corriente en el circuito de la Fig. 2-1, se ha visto que el factor constante *K* de la parte transitoria de la Ec. (2-7) es una función de las condiciones iniciales que prevalecen en el circuito en el instante *t* = 0 y de la frecuencia de la función impulsora. Con vistas a la provisión de una base uniforme para la comparación de distintos circuitos, conviene establecer una condición normal para la respuesta transitoria. Es una norma adecuada la de admitir que el circuito se halla inicialmente en reposo, es decir, que no hay corrientes iniciales ni cargas en los capacitores en el instante *t* = 0. La Fig. 2-4 muestra una función escalón unitaria (una función escalón de amplitud unitaria). Matemáticamente describese esta función mediante

$$\begin{aligned} f(t) &= 0 & t < 0 \\ f(t) &= 1 & t > 0 \end{aligned} \quad (2-11)$$

y se la simboliza de ordinario por medio de *U* (*t*) o *S* (*t*). Se observará que al multiplicar una función *f* (*t*) por *U* (*t*) obtiénes una nueva función que es igual a *f* (*t*) para *t* > 0 y que es idénticamente nula para *t* < 0. Consideremos, ahora, la respuesta transitoria del circuito de la Fig. 2-1 a una función escalón de tensión *EU* (*t*). Según la regla de tensiones de Kirchhoff

$$L \frac{di}{dt} + Ri = EU(t) \quad (2-12)$$

Como antes, la función complementaria es la Ec. (2-2), pero la integral particular es

$$i = \frac{E}{R} \quad (2-13)$$

lo que el estudiante puede verificar por sustitución en la Ec. (2-12). Puede demostrarse que *K* es igual a *-E/R*, de modo que la respuesta transitoria a *EU* (*t*) es

$$i = \frac{E}{R} (1 - e^{-Rt/L}) \quad (2-14)$$

Hay muchas razones para elegir la función escalón como base para el cálculo de la respuesta transitoria. Por ejemplo, puede demostrarse

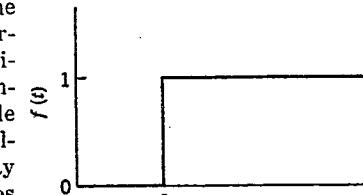


FIG. 2-4. Función escalón unitaria *U* (*t*).

que cualquier función impulsora no recurrente puede analizarse como una integración de funciones escalones infinitesimales adecuadamente "pesadas" en amplitud y tiempo. Esto es equivalente al método de la integral de Fourier, por el cual una función no recurrente se analiza como la integración de sinusoides infinitesimales "pesadas" en amplitud y fase. Otra razón para la elección de la función escalón como básica para la respuesta transitoria es que la respuesta transitoria así calculada está relacionada con la respuesta estacionaria, según se verá más adelante en este mismo capítulo.

2-4. Dominios de tiempo y frecuencia. En un apartado anterior se ha considerado un problema de análisis circuital, en verdad muy sencillo, en el que se calculó una corriente variable con el tiempo como respuesta del circuito a una tensión variable también con el tiempo. Obtúvose la corriente como solución de una ecuación diferencial. Este método ofrece algunas dificultades, en particular en el caso de las redes de varias mallas, en el que la solución de las ecuaciones simultáneas de la red da lugar a ecuaciones diferenciales de orden superior y, por lo tanto, a ecuaciones algebraicas de grado superior. En tales casos, un método de solución basado en la respuesta estacionaria de la red, simplifica mucho la tarea. En este método, considerase la red como un operador que es función de la frecuencia, $W(f)$. Luego, si una función impulsora variable con el tiempo, $Dr(t)$, puede ser transformada en una correspondiente función de la frecuencia, $Dr(f)$, será posible aplicar el operador $W(f)$ a $Dr(f)$ para obtener así la respuesta $R(f) = W(f)Dr(f)$. Requiere luego una segunda transformación para hallar la respuesta como función del tiempo, $R(t)$. Este método involucra, pues, la transformación de la función impulsora del dominio de tiempo al dominio de frecuencia, la multiplicación por el operador $W(f)$, y la transformación de la respuesta resultante del dominio de frecuencia al dominio de tiempo.

Una limitación fundamental de este método es que la red debe ser *lineal*, i.e., la magnitud de la respuesta tiene que ser proporcional a la magnitud de la función impulsora. De no existir semejante relación lineal, la consecuencia es la aparición de la *modulación*, de modo que una dada componente de frecuencia de $R(f)$ no es ya función exclusiva de la correspondiente componente de $Dr(f)$.

Antes de considerar las transformaciones directa e inversa del dominio de tiempo al de frecuencia, son oportunas algunas proposiciones respecto de $W(f)$. $W(f)$ es simplemente la respuesta estacionaria antes discutida del sistema. Ella puede expresar la relación entre tensión y corriente en un único par de terminales, o puede relacionar la tensión o la corriente en un par de terminales con la tensión en otro par de terminales o la corriente en otra malla de la red. Por consecuencia, esta función tendrá la dimensión de una impedancia o de una admitancia cuando relaciona tensión y corriente, y será un número abstracto cuando relaciona tensión y tensión o corriente y corriente. Bode¹ ha sugerido

¹ H. W. Bode, "Network Analysis and Feedback Amplifier Design" D. Van Nostrand Company, Inc., Nueva York, 1945.

como nombres adecuados para $W(f)$ los de "adpedancia" o "immitancia", este último de más aceptación.

La función de red será siempre una función continua de la frecuencia. Si la fuerza impulsora es recurrente, tanto ella como la respuesta tendrá sólo componentes cuyas frecuencias son múltiplos enteros de la frecuencia fundamental. Como consecuencia, si el fenómeno ocurre menos y menos a menudo, el número de componentes comprendido en un determinado intervalo de frecuencias deviene más y más grande. En el límite, si el fenómeno producise una sola vez, el espectro de frecuencias resulta continuo. Este concepto se desarrollará más ampliamente dentro de poco.

2-5. Serie de Fourier. La necesaria transformación de la función impulsora del dominio de tiempo al dominio de frecuencia puede realizarse mediante el "análisis de Fourier" si $Dr(t)$ es una función repetitiva o recurrente. Por este método, $Dr(t)$ puede descomponerse en un número de componentes sinusoidales cuya suma se conoce con el nombre de "serie de Fourier" y es idéntica a $Dr(t)$. Según se explicó en el Cap. I, las frecuencias de estas ondas componentes son múltiplos enteros del número de veces por segundo que se repite la onda no sinusoidal. Estos múltiplos enteros se denominan "armónicas". En interés de la mayor generalidad, la serie de Fourier se considerará en términos de una función general variable con el tiempo, $f(\theta)$, donde θ es ot y tiene un período de $\theta = 2\pi$.¹

Si todos los términos armónicos arrancaran en el mismo instante, habría necesariamente simetría entre los semicírculos sucesivos, del tipo de la Fig. 2-5a debido a las armónicas impares, o del tipo de la Fig. 2-5b debido a las armónicas pares. Para que la segunda parte del ciclo pueda ser controlada independientemente de la primera, es necesario controlar independientemente tanto la *magnitud* como la *fase* de los términos armónicos. Una armónica, cualquiera que sea su frecuencia, puede controlarse en ambos aspectos expresándola como la suma de dos términos en cuadratura, de la forma $A_n \sin n\theta + B_n \cos n\theta$.

Cuando el valor medio de la onda extendido a un ciclo completo no es nulo, hay también una componente continua que agregar a la serie armónica.

La ecuación general, o serie de Fourier, para una onda recurrente cualquiera es, por lo tanto,

$$f(\theta) = A_1 \sin \theta + A_2 \sin 2\theta + A_3 \sin 3\theta + \dots + B_0 + B_1 \cos \theta + B_2 \cos 2\theta + B_3 \cos 3\theta + \dots \quad (2-15)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \sin n\theta + B_n \cos n\theta) \quad (2-15a)$$

¹ Los matemáticos imponen restricciones adicionales a $f(\theta)$ para que pueda expandirse en una serie de Fourier. Estas restricciones se conocen con el nombre de condiciones de Dirichlet. Véase, por ejemplo, E. A. Guillemin, "The Mathematics of Circuit Analysis", p. 463, John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1949. Es afortunado para el ingeniero el que la mayoría de las funciones recurrentes del mundo físico satisfaga estas restricciones, las qué, por consecuencia, no se tomarán en cuenta aquí.

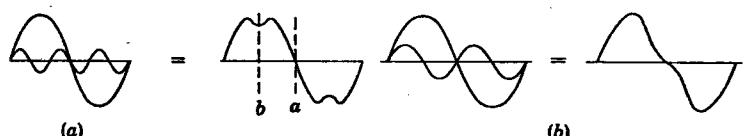


FIG. 2-5. Simetría. (a) Simetría producida entre las dos alternancias del ciclo por las armónicas impares. Nota: Las ondas tienen simetría par respecto de b y simetría impar respecto de a . (b) Simetría debida a las armónicas pares cuyos valores son nulos cuando 0 es la fundamental.

donde, por supuesto, las A y B han de determinarse para cada $f(\theta)$ en particular. Esto puede hacerse de la siguiente manera:

Multiplicando la Ec. (12-15a) por $\cos k\theta d\theta$ (siendo k un entero) e integrando sobre un período completo desde θ_1 a $\theta_1 + 2\pi$,

$$\begin{aligned} \int_{\theta_1}^{\theta_1+2\pi} f(\theta) \cos k\theta d\theta &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\theta_1}^{\theta_1+2\pi} (A_n \sin n\theta \cos k\theta + B_n \cos n\theta \cos k\theta) d\theta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\theta_1}^{\theta_1+2\pi} \left\{ \frac{A_n}{2} [\sin(n+k)\theta + \sin(n-k)\theta] \right. \\ &\quad \left. + \frac{B_n}{2} [\cos(n+k)\theta + \cos(n-k)\theta] \right\} d\theta \quad (2-16) \end{aligned}$$

Parece haber un gran número de términos por evaluar en el segundo miembro de la Ec. (2-16). No obstante, demuéstrase fácilmente que la suma infinita se reduce a una sencilla expresión. La integral de un término seno o coseno sobre un ciclo completo o un número entero de ciclos completos es cero, ya que para una mitad del ciclo el término es positivo y para la otra mitad, negativo. Por consecuencia, los términos con $k \neq n$, del segundo miembro de la Ec. (2-16) son todos nulos.

Por otra parte, los términos con $k = n$ y $n \neq 0$ reducen a

$$\int_{\theta_1}^{\theta_1+2\pi} f(\theta) \cos n\theta d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_1+2\pi} \left[\frac{A_n}{2} \sin 2n\theta + \frac{B_n}{2} (\cos 2n\theta + 1) \right] d\theta \quad (2-16a)$$

Los dos términos trigonométricos se reducen nuevamente a cero y se tiene

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_1+2\pi} f(\theta) \cos n\theta d\theta \quad n \neq 0 \quad (2-16b)$$

Si $k = n = 0$, la Ec. (2-16a) da

$$B_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_1+2\pi} f(\theta) d\theta \quad (2-16c)$$

Multiplicando la Ec. (2-15a) por $\sin k\theta d\theta$ e integrando de θ_1 a $\theta_1 + 2\pi$, el estudiante puede demostrar que

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_1+2\pi} f(\theta) \sin n\theta d\theta \quad (2-16d)$$

Si la función $f(\theta)$ puede expresarse por medio de una ecuación, es posible evaluar analíticamente las Ecs. (2-16b) a (2-16d), pero, en muchos casos, $f(\theta)$ sólo puede expresarse gráficamente. En estas circunstancias es preciso obtener las integrales de estas ecuaciones mediante la aplicación de un método de punto por punto, tal como el de la regla de los trapezios o regla de Simpson. El análisis de Fourier puede aplicarse a toda onda recurrente, y $f(\theta)$ puede representar en estas ecuaciones cualquier cantidad física o matemática que sea función de θ .

2-6. Simetría par e impar. En las Ecs. (2-16b) a (2-16d), θ_1 , el límite inferior de integración, puede ser un ángulo cualquiera, pues el único requisito es que la integración se haga sobre un ciclo completo.

Dado que $f(\theta)$ es recurrente, y se repite a intervalos de 2π para todos los valores de θ , puede elegirse el ángulo $\theta = 0$, arbitrariamente. Tanto θ_1 como $\theta = 0$ se elige, según la función del caso, de manera de simplificar las integraciones. Por ejemplo, si $\theta = 0$ puede elegirse de modo que

$$f(-\theta) = -f(\theta) \quad (2-17)$$

la función resulta de simetría impar. Tal sería el caso de la Fig. 2-5b si se eligiera a de modo que $\theta = 0$ para este punto. En estas condiciones, el estudiante puede demostrar que

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\theta) \sin n\theta d\theta \\ B_n &= B_0 = 0 \end{aligned} \quad (2-17a)$$

También, si $\theta = 0$ puede elegirse de modo que

$$f(-\theta) = f(\theta) \quad (2-18)$$

la función es de simetría especular o "par" y

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\theta) \cos n\theta d\theta \\ B_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(\theta) d\theta \\ A_n &= 0 \end{aligned} \quad (2-18a)$$

Tal sería el caso si se eligiera el ángulo b como $\theta = 0$ en la Fig. 2-5b.

2-7. Cálculo de la respuesta de un circuito por medio de la serie de Fourier. Si la función de interés es recurrente en el tiempo y de período $T = 1/f_1$, y se denota $2\pi f_1$ con ω_1 , las ecuaciones resultan ser

$$f(t) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sin n\omega_1 t + B_n \cos n\omega_1 t) \quad (2-19)$$

donde $B_0 = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) dt$ (2-20)

$$B_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \cos n\omega_1 t dt \quad n \neq 0 \quad (2-21)$$

$$A_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \sin n\omega_1 t dt \quad (2-22)$$

en las que puede también elegirse t_1 para mayor conveniencia.

Sería más simple si las Ecs. (2-19) a (2-22) pudieran agruparse en una sola. No obstante, si las Ecs. (2-20) a (2-22) se insertaran en la (2-19), podría haber confusión porque la integración respecto de t no debe afectar los términos $\sin n\omega_1 t$ y $\cos n\omega_1 t$ de la Ec. (2-19). Una manera de evitar la confusión consistiría en utilizar una diferente variable, tal como τ , en las Ecs. (2-20) a (2-22), dado que, después de la integración, una vez aplicados los límites, desaparecerá esta variable. Las Ecs. (2-19) a (2-22) podrían escribirse entonces en una sola del modo:

$$f(t) = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(\tau) d\tau + \frac{2}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{t_1}^{t_1+T} f(\tau) (\sin n\omega_1 \tau \sin n\omega_1 t \\ + \cos n\omega_1 \tau \cos n\omega_1 t) d\tau \quad (2-23)$$

Las integraciones respecto de (τ) en la Ec. (2-23) producirían los coeficientes A_n y B_n para todos los valores de n , y no habría confusión alguna entre la variable tiempo τ , que debe ser integrada para determinar la magnitud de cada una de las componentes en el espectro de frecuencias, y la variable tiempo t asociada con cada componente individual en la serie.

La Ec. (2-23) puede también escribirse:

$$f(t) = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(\tau) d\tau + \frac{2}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{t_1}^{t_1+T} f(\tau) \cos n\omega_1(t-\tau) d\tau \quad (2-24)$$

Pero $\cos n\omega_1(t-\tau) = \frac{e^{jn\omega_1(t-\tau)} + e^{-jn\omega_1(t-\tau)}}{2}$

Por lo tanto $f(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{t_1}^{t_1+T} f(\tau) e^{jn\omega_1(t-\tau)} d\tau \quad (2-24a)$

donde el primer término, o término continuo, de la Ec. (2-19) se toma ahora en cuenta con $n = 0$.

En las Ecs. (2-23) y (2-24) se observará que la integración para cada valor de n determina la magnitud de la correspondiente componente en el espectro de frecuencias y que la suma de todas estas componentes da la función original del tiempo $f(t)$. La integración es por lo tanto un proceso de análisis y la suma, un proceso de síntesis. El realizar los dos procesos sin ninguna modificación intermedia vendría a equivaler a desarmar una máquina y volverla a armar acto seguido. Esto puede ser

muy instructivo, pero posiblemente muy poco útil. Por el contrario, si las partes se modifican después de separadas, al volver a armarlas se obtendrá una nueva máquina. De modo similar, si se determinan las componentes de una función impulsora que es función del tiempo y se las somete a una modificación por medio de una red, la correspondiente respuesta que se obtiene al volver a agrupar las componentes será una nueva función del tiempo. Consideremos el caso en que la fuerza impulsora es una corriente $i(t)$, función recurrente del tiempo. Esta corriente puede descomponerse entonces en un espectro de frecuencias por medio de las Ecs. (2-20) a (2-22). Supongamos que ha de calcularse una respuesta de tensión. Se podrá calcular cada componente de tensión, en magnitud y fase, si se conoce la impedancia de la red que vincula la fuerza impulsora y la respuesta. Si se computa cada una de las componentes de tensión y se la expresa como función del tiempo para sumar luego el total, se obtendrá por resultado la respuesta de tensión de la red como función del tiempo.

Admitamos que la impedancia de la red para la frecuencia nf_1 esté dada por la relación

$$Z_n = R_n + jX_n \quad (2-25)$$

Sea asimismo la componente de corriente a esta frecuencia

$$i_n = A_n \sin n\omega_1 t + B_n \cos n\omega_1 t \quad (2-26)$$

la que encuentra la impedancia Z_n . La resistencia producirá una tensión en fase con la corriente, y la reactancia, una componente de tensión adelantada 90° respecto de la corriente si X_n es positiva. Por lo tanto, la correspondiente componente de tensión a través de la impedancia será

$$e_n = R_n(A_n \sin n\omega_1 t + B_n \cos n\omega_1 t) \\ + X_n \left[A_n \sin \left(n\omega_1 t + \frac{\pi}{2} \right) + B_n \cos \left(n\omega_1 t + \frac{\pi}{2} \right) \right] \\ = R_n(A_n \sin n\omega_1 t + B_n \cos n\omega_1 t) + X_n(A_n \cos n\omega_1 t - B_n \sin n\omega_1 t) \\ = (R_n A_n - X_n B_n) \sin n\omega_1 t + (R_n B_n + X_n A_n) \cos n\omega_1 t \quad (2-27)$$

La Ec. (2-23) puede ser modificada, por lo tanto, de manera que dé la relación entre una corriente $i(t)$ y una tensión $e(t)$ vinculadas por una impedancia que es función de la frecuencia, del modo siguiente:

$$e(t) = \frac{R_0}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} i(\tau) d\tau + \frac{2}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{t_1}^{t_1+T} i(\tau) [(R_n \sin n\omega_1 \tau \\ - X_n \cos n\omega_1 \tau) \sin n\omega_1 t + (R_n \cos n\omega_1 \tau + X_n \sin n\omega_1 \tau) \cos n\omega_1 t] d\tau \quad (2-28)$$

donde, por la Ec. (2-25), R_0 es la resistencia de C.C.

Para generalizar la Ec. (2-28), esté la fuerza impulsora representada por una función $D(t)$ y la respuesta, por $R(t)$. Supongamos además que ambas están relacionadas a la frecuencia nf por una función de la red (o immitancia)

$$W_n = U_n + jV_n \quad (2-29)$$

donde U_n produce una componente de respuesta en fase con la correspondiente fuerza impulsora, y V_n una componente de respuesta que está adelantada 90° respecto de la fuerza impulsora. La Ec. (2-28) deviene, entonces

$$R(t) = \frac{U_0}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} Dr(\tau) d\tau + \frac{2}{T} \sum_{n=-1}^{\infty} \int_{t_1}^{t_1+T} Dr(\tau) [(U_n \operatorname{sen} n\omega_1 t - V_n \cos n\omega_1 t) \operatorname{sen} n\omega_1 \tau + (U_n \cos n\omega_1 t + V_n \operatorname{sen} n\omega_1 t) \cos n\omega_1 \tau] d\tau \quad (2-30)$$

W_n puede ser una impedancia, una admitancia, o un número adimensional, según cómo la fuerza impulsora esté relacionada con la respuesta.

Se ha hecho notar que, en el análisis de los circuitos, conviene reemplazar las funciones seno y coseno con funciones exponenciales. Luego, si una red está descrita por una función compleja como la Ec. (2-29), puede obtenerse la respuesta por simple multiplicación. Así, si la componente de una fuerza impulsora a la frecuencia $n\omega_1$ es

$$Dr_n = A_n \operatorname{sen} n\omega_1 t + B_n \cos n\omega_1 t \quad (2-31)$$

dado que $e^{jn\omega_1 t} = \cos n\omega_1 t + j \operatorname{sen} n\omega_1 t$

se la puede escribir

$$Dr_n = \operatorname{Re} \{(B_n - jA_n)e^{jn\omega_1 t}\} \quad (2-32)$$

donde, como antes, el símbolo Re significa "parte real de". Luego si la función de red está dada por la Ec. (2-29), la correspondiente componente de la respuesta es

$$\begin{aligned} R_n &= \operatorname{Re} \{(U_n + jV_n)(B_n - jA_n)e^{jn\omega_1 t}\} \\ &= \operatorname{Re} \{[U_n B_n + V_n A_n + j(V_n B_n - U_n A_n)]e^{jn\omega_1 t}\} \\ &= (U_n A_n - V_n B_n) \operatorname{sen} n\omega_1 t + (U_n B_n + V_n A_n) \cos n\omega_1 t \end{aligned} \quad (2-33)$$

Conviene comparar la Ec. (2-33) con la (2-27).

Un procedimiento de alternativa consiste en considerar el uso de frecuencias positivas y negativas. En todas las funciones de red se encuentra que la parte real, U , involucra sólo potencias pares de ω_1 , y la parte imaginaria, V , potencias impares de ω_1 en el numerador y potencias pares en el denominador. Por lo tanto, si se consideran a la vez los valores positivos y negativos de n ,

$$\begin{aligned} U_n &= U_{-n} \\ V_n &= -V_{-n} \end{aligned}$$

La Ec. (2-31) puede volverse a escribir, con exponentiales,

$$Dr_n = A_n \frac{e^{jn\omega_1 t} - e^{-jn\omega_1 t}}{2j} + B_n \frac{e^{jn\omega_1 t} + e^{-jn\omega_1 t}}{2}$$

Si los valores de $e^{jn\omega_1 t}$ se multiplican por $U_n + jV_n = W_n$ y los

valores de $e^{-jn\omega_1 t}$ por $U_n - jV_n = W_{-n}$, el resultado será el siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{U_n A_n e^{jn\omega_1 t}}{2j} + \frac{V_n A_n e^{jn\omega_1 t}}{2} - \frac{U_n A_n e^{-jn\omega_1 t}}{2j} + \frac{V_n A_n e^{-jn\omega_1 t}}{2} \\ + \frac{U_n B_n e^{jn\omega_1 t}}{2} - \frac{V_n B_n e^{jn\omega_1 t}}{2j} + \frac{U_n B_n e^{-jn\omega_1 t}}{2} + \frac{V_n B_n e^{-jn\omega_1 t}}{2j} \\ = (U_n A_n - V_n B_n) \operatorname{sen} n\omega_1 t + (U_n B_n + V_n A_n) \cos n\omega_1 t \end{aligned} \quad (2-34)$$

que es la misma expresión que la de la Ec. (2-33).

La Ec. (2-34) evita el molesto escribir de $\operatorname{Re} \{ \cdot \}$, debido a que los términos imaginarios que aparecen en el primer miembro de la Ec. (2-34) se cancelan recíprocamente.

De ahí que sea evidente que la Ec. (2-30) pueda simplificarse de manera similar a la Ec. (2-24a) en la forma

$$R(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{t_1}^{t_1+T} W_n Dr(\tau) e^{jn\omega_1(t-\tau)} d\tau. \quad (2-35)$$

Como alternativa, la Ec. (2-35) puede descomponerse en las tres ecuaciones siguientes:

$$Dr_n = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} Dr(\tau) e^{-jn\omega_1 t} d\tau \quad (2-36a)$$

$$R_n = W_n Dr_n \quad (2-36b)$$

$$R(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_n e^{jn\omega_1 t} \quad (2-36c)$$

No es necesario usar (τ) en lugar de (t) en la Ec. (2-36a) porque no puede haber confusión si se hace la integración primero. La Ec. (2-36a) representa el análisis de la fuerza impulsora como función del tiempo en su espectro de frecuencia. La Ec. (2-36b) representa la operación de la red que determina el espectro de frecuencia de la respuesta. La Ec. (2-36c) expresa, a su vez, la síntesis del espectro de frecuencia en la función de tiempo de la respuesta.

2-8. La integral de Fourier. Si la frecuencia de recurrencia de la función impulsora se hace cada vez menor mientras se mantiene su forma invariable, la función se approxima a la condición en la que los transitorios desaparecen entre los eventos sucesivos. En el límite, el evento ocurre una sola vez y se obtiene entonces la solución transitoria. La suma de la serie de Fourier transformase en una integral, la que se conoce como integral de Fourier. Consideraremos ahora la transición de la serie a la integral.

Para mayor conveniencia sea t_1 , el límite inferior en la Ec. (2-35), igual a $-T/2$, y sea f una componente de frecuencia cualquiera en el espectro. Entonces, la frecuencia fundamental será

$$f_1 = \frac{1}{T} \quad y \quad n = \frac{f}{f_1} \quad n\omega_1 = \omega \quad (2-37)$$

Supongamos que el evento ocurre sólo entre los instantes $-T_0/2$ y $+T_0/2$, de modo que en todos los otros instantes entre $-T/2$ y $+T/2$ es $Dr(t) = 0$. Luego, la Ec. (2-36a) dará la componente para un valor cualquiera de ω que sea múltiplo de ω_0 , del siguiente modo:

$$Dr(\omega) = \frac{1}{T} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} Dr(t) e^{-j\omega t} dt \quad (2-38)$$

Por vía de ejemplo específico, consideremos un pulso cuadrado repetitivo de duración $T_1 = 1 \mu\text{seg}$, de período T y amplitud E , como lo ilustra la Fig. 2-6. Tenemos

$$Dr(t) = E \quad -\frac{T_1}{2} < t < \frac{T_1}{2}$$

$$Dr(t) = 0 \begin{cases} -\frac{T_1}{2} < t < -\frac{T_1}{2} \\ \frac{T_1}{2} < t < \frac{T}{2} \end{cases}$$

Por las Ecs. (2-38)

$$\begin{aligned} Dr(\omega) &= \frac{1}{T} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} E e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{E}{T} \left[\frac{e^{-j\omega T_1/2}}{-j\omega} - \frac{e^{j\omega T_1/2}}{j\omega} \right] = \frac{2E}{\omega T} \frac{e^{j\omega T_1/2} - e^{-j\omega T_1/2}}{2j} \end{aligned}$$

Multiplicando el numerador y el denominador por $T_1/2$,

$$Dr(\omega) = \frac{T_1 E}{T} \frac{\sin(\omega T_1/2)}{\omega T_1/2} \quad (2-38a)$$

La Ec. (2-38a) da la *envolvente* del espectro de la fuerza impulsora pulsativa cuadrada, pero su magnitud tiene significado cierto sólo para las frecuencias que son múltiplos enteros de la frecuencia fundamental de repetición $1/T$. Así se lo ilustra en la Fig. 2-6, donde se muestran los espectros correspondientes a tres diferentes valores de T , con T_1 constante. Si el pulso ocurre 500.000 veces por segundo ($T = 2 \mu\text{seg}$), el espectro contiene componentes de 500, 1.500, 2.500 kc/s y todos los demás múltiplos impares de 500 kc/s, como se ve en la Fig. 2-6a. Si el pulso ocurre 50.000 veces por segundo ($T = 20 \mu\text{seg}$), el espectro contiene todas las frecuencias que son múltiplos impares de 50 kc/s, como se ve en la Fig. 2-6b. En el segundo caso hay diez veces más componentes de frecuencia en el espectro. Las envolventes tienen la misma forma, pero en el segundo caso, su amplitud es $1/10$ de la del primero. Dado que la potencia es proporcional a la amplitud de la tensión (o de la corriente), la potencia *total* en el segundo caso es el 10 por ciento de la del primero (10 veces más componentes con una potencia relativa por componente de $1/10^2$).

En la Fig. 2-6c ilustrase un tercer caso, con $T = 2.000 \mu\text{seg}$. La envolvente tiene todavía la misma forma, pero en comparación con el primer caso, hay 1.000 veces más componentes, la amplitud de la envolvente reducida a la milésima parte y la potencia total, al 0,1 por ciento. En el límite,

cuando $T \rightarrow \infty$, la función impulsora deviene un único pulso, el espectro se transforma en *continuo* y en él se hallan presentes *todas* las frecuencias con una amplitud infinitesimal.¹ Así lo demostrarímos.

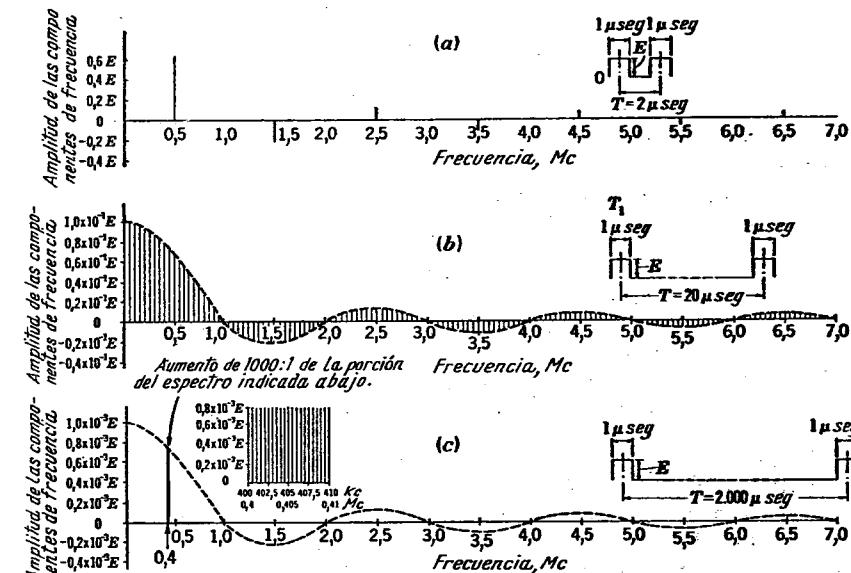


FIG. 2-6. Espectros de frecuencias para un pulso cuadrado repetitivo. En cada caso se indica la duración y el periodo de repetición del pulso. En el detalle se muestra una porción ampliada del espectro ω .

A medida que el intervalo de recurrencia deviene más y más grande, $1/T$ se hace muy pequeño y resulta entonces preferible expresar la frecuencia fundamental (que al mismo tiempo es el intervalo de frecuencias entre componentes) en la forma $f_1 = \Delta f = 1/T$. La Ec. (2-35) adopta entonces la forma

$$R(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Delta\omega \int_{-T/2}^{T/2} W_{n\omega_0} Dr(\tau) e^{jn\omega_0(t-\tau)} d\tau \quad (2-39)$$

Pero, en el límite para $T \rightarrow \infty$, Δf tiende a df y la suma se transforma en una integración. Por lo tanto, para un evento no recurrente

$$R(t) = \int_{-\infty}^{\infty} df \int_{-\infty}^{\infty} W(f) Dr(\tau) e^{j\omega(t-\tau)} d\tau \quad (2-40)$$

donde la función red exprésase ahora como $W(f)$, puesto que $n\omega_0$ ha sido reemplazado por ω y el espectro es continuo.

Obsérvese que hay una cantidad finita de energía en el pulso, pero, dado que para computar la potencia, hay que dividir esta energía finita por un tiempo infinito, la potencia total de todas estas componentes es en realidad cero.

La Ec. (2-40) puede escribirse también como tres ecuaciones que son correspondientemente análogas a las Ecs. (2-36a) a (2-36c):

$$Dr(f) = \int_{-\infty}^{\infty} Dr(t)e^{-j2\pi ft} dt \quad (2-41a)$$

$$R(f) = W(f)Dr(f) \quad (2-41b)$$

$$R(t) = \int_{-\infty}^{\infty} R(f)e^{j2\pi ft} df \quad (2-41c)$$

La Ec. (2-41a) analiza la función impulsora del tiempo como espectro de frecuencia *continuo*. La Ec. (2-41b) determina el correspondiente espectro de la respuesta como resultado de la acción de la red. Finalmente, la Ec. (2-41c) sintetiza el espectro de frecuencia en una función del tiempo.

Debe observarse que, si bien el espectro es ahora continuo, la amplitud de cada una de las componentes se ha tornado infinitesimal. No obstante, la suma de todos estos infinitésimos da una respuesta finita. No es sorprendente, dado que en todas las integrales que tienen un valor obtéñese este valor como la suma de un número infinito de infinitésimos.

En la Ec. (2-41a) los límites de integración se extienden sobre todo el tiempo. Si la función impulsora tiene valor sólo dentro de un intervalo de tiempo limitado, la integral tendrá correspondientemente límites finitos. La misma observación es aplicable a la Ec. (2-40).

Es a menudo deseable investigar el espectro de frecuencia de funciones impulsoras particulares a fin de determinar su carácter. De particular interés es el caso de un pulso de C. C. Supongamos que la función impulsora está descrita por las ecuaciones

$$\begin{aligned} e(t) &= 0 & t < 0 \\ e(t) &= E & 0 < t < T_1 \\ e(t) &= 0 & t > T_1 \end{aligned} \quad (2-42)$$

El análisis por medio de la Ec. (2-41a) da

$$e(f) = \int_0^{T_1} Ee^{-j\omega t} dt = -\left[\frac{E}{j\omega} e^{-j\omega t}\right]_0^{T_1} = -\frac{E}{j\omega} (e^{-j\omega T_1} - 1) \quad (2-43)$$

$$e(f) = E \left(\frac{\sin \omega T_1}{\omega} - j \frac{1 - \cos \omega T_1}{\omega} \right) \quad (2-44)$$

En este análisis la parte real representa la envolvente del espectro de los términos coseno y la negativa, de la parte imaginaria da el espectro de los términos seno. Como caso general, el espectro debe estar representado por dos funciones, las que pueden ser indistintamente funciones de los términos seno y coseno, o funciones de amplitud y fase.

Como en el caso de la serie de Fourier, el análisis puede a menudo simplificarse y reducirse a una única función si se elige el eje de tiempo de modo que la función exhiba una conveniente simetría. Por ejemplo, supongamos que elegimos el origen del tiempo de modo que el pulso empiece en el instante $t = -T_1/2$ y termine en el instante $+T_1/2$.

(El pulso considerado es entonces el caso límite para $T \rightarrow \infty$ de la Fig. 2-6.) Hay entonces sólo términos coseno y la Ec. (2-41a) da

$$\begin{aligned} e(f) &= \int_{-T_1/2}^{T_1/2} Ee^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{E}{j\omega} (-e^{-j\omega T_1/2} + e^{j\omega T_1/2}) \\ e(f) &= \frac{2E}{\omega} \operatorname{sen} \frac{\omega T_1}{2} = ET_1 \frac{\operatorname{sen} (\omega T_1/2)}{\omega T_1/2} \end{aligned} \quad (2-45)$$

Puesto que $e(f)$ es real, hay sólo términos coseno con la amplitud relativa dada por la Ec. (2-45). La forma general de este espectro para valores positivos de la frecuencia es la que muestra la envolvente en las Figs. 2-6a a 2-6c. Dado que el factor $(\operatorname{sen} u)/u$ es una función par de u , el espectro correspondiente a las frecuencias negativas es la imagen especular del correspondiente a las frecuencias positivas.

Las Ecs. (2-41a) a (2-41c) son muy importantes, por cuanto establecen que la característica transitoria de una red está determinada únicamente por las características estacionarias de la misma red. Esto es consecuencia inmediata de las Ecs. (2-41). Si se conoce $Dr(t)$, dado que $Dr(f)$ es única, $R(f)$, y por lo tanto $R(t)$, queda determinada únicamente por el operador $W(f)$ aplicado a $Dr(f)$. Para dar mayor énfasis a la proposición asentada en el Cap. I la reiteraremos aquí: Sólo gracias a la transformación que permite la integral de Fourier es posible realizar gran parte del análisis y la síntesis de los circuitos de comunicación sobre la base del régimen estacionario sinusoidal a pesar de que las señales son esencialmente transitorias.

Consideraremos ahora la aplicación de la integral de Fourier en el cálculo de la respuesta de las así llamadas redes *ideales*, con el objeto de ilustrar el procedimiento. Un importante resultado de estos cálculos demostrará que estos circuitos en particular no son físicamente realizables. Otros resultados pueden extenderse a los circuitos prácticos como conclusiones intuitivas convenientes.

2-9. Respuesta transitoria de un filtro pasabajo (LP) ideal a una función escalón. Consideraremos la respuesta a la función impulsora escalón de la Fig. 2-4. Podría esperarse que la descomposición de esta función escalón exige sólo hacer $T_1 \rightarrow \infty$ en la Ec. (2-43). No obstante, prefieren otros métodos a causa de la dificultad para interpretar el significado de las funciones sinusoidales en el límite infinito¹.

El filtro LP ideal consiste en una red que tiene la propiedad de transmitir todas las frecuencias componentes entre $-f_c$ y $+f_c$ sin modificación, excepto por un posible retardo de tiempo t_d , y que elimina

¹ Se insiste en este capítulo de manera particular en la integral de Fourier y la transformada de Fourier porque se cree que el estudiante, en esta etapa del estudio, podrá comprender mejor la filosofía de la intercambiabilidad del tiempo y la frecuencia real según la interpretación de Fourier. No obstante, en el análisis moderno de los circuitos se utiliza con preferencia la transformada de Laplace, la que extiende la idea de frecuencia al plano complejo, como se hace, por otra parte, en este libro, para ciertas aplicaciones. La transformada de Laplace elimina muchos de los difíciles problemas de convergencia que se encuentran en el límite infinito en el caso de la transformada de Fourier, como en el caso de la función escalón. Las transformadas de Fourier y Laplace son formalmente similares y utilizan las mismas tablas.

por completo todas las frecuencias de valor absoluto mayor que f_c , esto es

$$\begin{aligned} W(f) &= e^{-j\omega t_d} & -f_c < f < f_c \\ W(f) &= 0 & |f| > f_c \end{aligned} \quad (2-46)$$

Introduciendo entonces las Ecs. (2-43) y (2-46) en la Ec. (2-41c)

$$R(t) = E \int_{-f_c}^{f_c} \frac{1 - e^{-j\omega T_1}}{j\omega} e^{j\omega(t-t_d)} df \quad (2-46a)$$

Por simetría tenemos

$$\begin{aligned} R(t) &= E \int_0^{\infty} \frac{e^{j\omega(t-t_d)} - e^{-j\omega(t-t_d)} - e^{j\omega(T_1-t_d)} + e^{-j\omega(T_1-t_d)}}{2j\pi f} df \\ &= \frac{E}{\pi} \int_0^{\omega_c} \left[\frac{\sin \omega(t - t_d)}{\omega} + \frac{\sin \omega(T_1 - t + t_d)}{\omega} \right] d\omega \end{aligned} \quad (2-47)$$

Ahora, la función trascendental definida por la expresión

$$\int_0^x \frac{\sin u}{u} du$$

se llama "seno integral de x " y se abrevia $\text{Si}(x)$. La serie correspondiente a esta función puede obtenerse integrando término a término:

$$\begin{aligned} \text{Si}(x) &= \int_0^x \frac{\sin u}{u} du = \int_0^x \left(1 - \frac{u^2}{3} + \frac{u^4}{5} - \frac{u^6}{7} + \dots \right) du \\ \text{Si}(x) &= x - \frac{x^3}{3!3} + \frac{x^5}{5!5} - \frac{x^7}{7!7} + \dots \end{aligned}$$

Los valores de esta función se dan en muchos manuales¹, y la Fig. 2-7

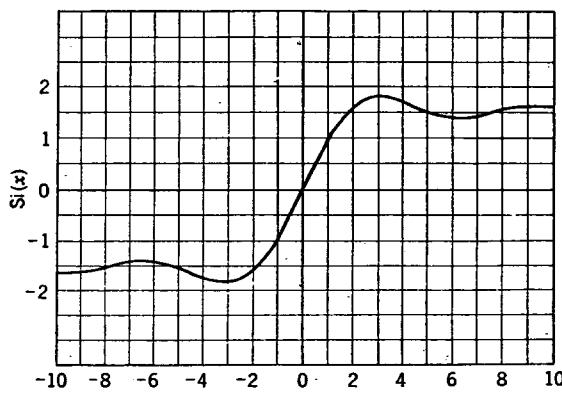


FIG. 2-7. Gráfica de $\text{Si}(x)$.

¹ Ver, por ejemplo, E. Jahnke and F. Emde, "Tables of Functions". Dover Publications, New York, 1945.

muestra su gráfica. Cuando $x \rightarrow \infty$, el valor de $\text{Si}(x) \rightarrow \pi/2$. La Ec. (2-47) puede escribirse

$$R(t) = \frac{E}{\pi} \{ \text{Si}[\omega_c(t - t_d)] + \text{Si}[\omega_c(T_1 - t + t_d)] \} \quad (2-48)$$

Si se hace ahora tender a infinito T_1 de modo que, para cualquier valor de $t - t_d$, es T_1 mucho mayor que $t - t_d$, entonces, cualquiera que sea el valor de ω_c , la Ec. (2-48) deviene

$$R(t) = \frac{E}{2} + \frac{E}{\pi} \text{Si}[\omega_c(t - t_d)] \quad (2-49)$$

La Fig. 2-8 ilustra la representación gráfica de esta expresión, que no es sino la respuesta transitoria del filtro LP ideal a la función escalón.

Es evidente que el efecto de aumentar el valor de T_1 hasta infinito en el pulso aplicado consiste en introducir un término continuo $E/2$ en la expresión. Debe observarse en la Fig. 2-8:

1. El punto de 50 por ciento de respuesta, $E/2$, se produce un lapso t_d después de $t = 0$. Además, la curva de respuesta de la Fig. 2-8 comienza en $t = -\infty$. Esto significaría que el circuito tiene una propiedad anticipatoria y comienza a responder antes de aplicar la función impulsora. Es evidente que esta situación es imposible y surge en este problema por el hecho de haberse elegido independiente y arbitrariamente las características estacionarias de amplitud y fase (o retardo) de la red.

2. El "tiempo de crecimiento", o "repentinidad", de la respuesta en la vecindad de $t = t_d$ está relacionado con la frecuencia de corte f_c

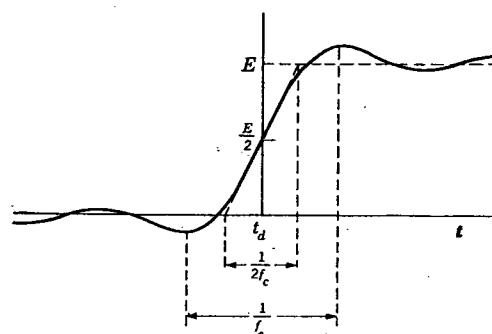


FIG. 2-8. Respuesta del filtro ideal LP a la función escalón $EU(t)$.

del filtro. Las dos conclusiones respecto del retardo y del tiempo de crecimiento pueden extenderse cualitativamente a los circuitos físicos.

Puede derivarse de modo similar otra regla cualitativa considerando un filtro LP en el que la característica estacionaria de frecuencia decaea

gradual más bien que abruptamente¹. Puede demostrarse que se reduce así, con el corte gradual, el "sobreimpulso" o pico de la respuesta transitoria.

Es de interés observar que, si se introduce la función de las Ecs. (2-46) directamente en la Ec. (2-41a), la ecuación deviene

$$\begin{aligned} e(f) &= E \int_0^{\infty} e^{-j\omega t} dt \\ &= - \left[\frac{Ee^{-j\omega t}}{j\omega} \right]_0^{\infty} \end{aligned} \quad (2-50)$$

La sustitución directa del límite infinito en la Ec. (2-50) no da una respuesta, pero el análisis precedente demuestra que el efecto del límite infinito es el de producir un término continuo de modo tal que el espectro comprenderá un término constante de valor $E/2$ y un espectro continuo de infinitésimos de valor $E/j\omega$.

La respuesta completa se obtendrá entonces sumando la respuesta al término constante a la respuesta obtenida integrando los infinitesimales.

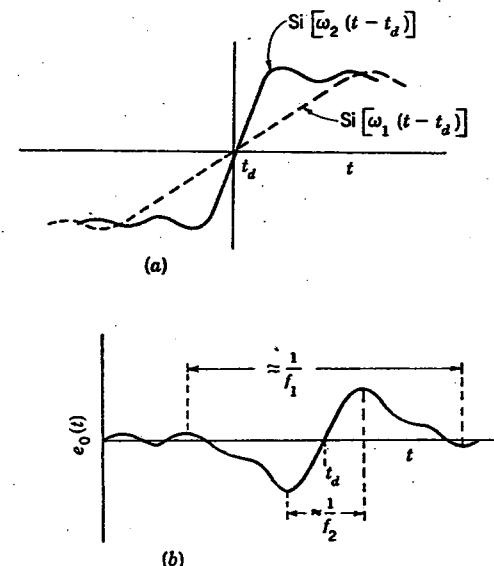


FIG. 2-9. Respuesta del filtro BP ideal a $EU(t)$. (a) Componentes seno integrales de la respuesta. (b) Forma general de la respuesta obtenida sumando las dos curvas de a.

2-10. Respuesta transitoria de un filtro pasabanda ideal (BP) a una función escalón. En un filtro BP ideal se transmiten sólo las frecuencias comprendidas entre f_1 y f_2 , las dos frecuencias de corte, y,

¹ Ver, por ejemplo, Colin Cherry, "Pulses and Transients in Communication Circuits" p. 169. Dover Publications, New York, 1960.

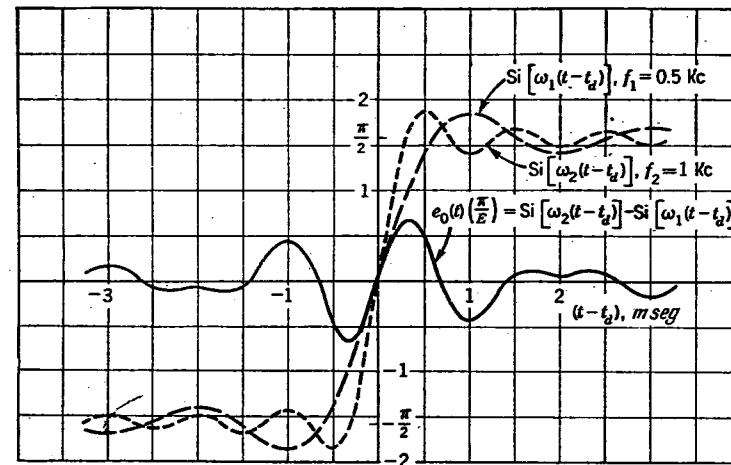


FIG. 2-10. Respuesta de un filtro pasabanda ideal (BP) a $EU(t)$ con $f_1 = 500$ c/s, $f_2 = 1.000$ c/s. La respuesta y sus componentes se representan en su forma normalizada.

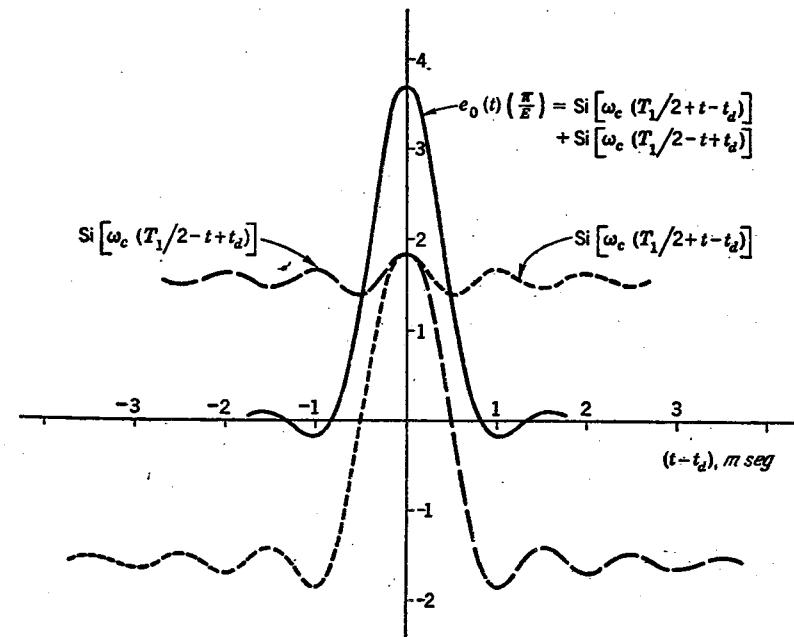


FIG. 2-11. Respuesta de un filtro pasabajos (LP) ideal a un pulso rectangular de duración $T_1 = 1$ mseg. La frecuencia de corte del filtro es $f_c = 1$ Kc/s. La respuesta y sus componentes se representan en forma normalizada.

cuando se usan expresiones en que intervienen frecuencias negativas, también las frecuencias comprendidas entre $-f_1$ y $-f_2$. Hay asimismo un retardo de tiempo t_d . No interviene ningún término constante, puesto que no es transmitido.

La tensión de salida es, según la Ec. (2-41c),

$$\begin{aligned} e_o(t) &= E \int_{-f_1}^{-f_2} \frac{e^{j\omega(t-t_d)}}{j\omega} df + E \int_{f_1}^{f_2} \frac{e^{j\omega(t-t_d)}}{j\omega} df \\ &= \frac{E}{\pi} \int_{f_1}^{f_2} \frac{\sin 2\pi f(t-t_d)}{f} df \\ &= \frac{E}{\pi} \{ \text{Si}[\omega_2(t-t_d)] - \text{Si}[\omega_1(t-t_d)] \} \end{aligned} \quad (2-51)$$

Las dos funciones $\text{Si}[\omega_2(t-t_d)]$ y $\text{Si}[\omega_1(t-t_d)]$ aparecen entonces como en la Fig. 2-9a. La tensión de salida está ilustrada en la Fig. 2-9b.

Obsérvese que la duración de la respuesta principal es inversamente proporcional a la frecuencia de corte más baja, mientras que el tiempo de crecimiento es inversamente proporcional a la frecuencia de corte más alta. En la Fig. 2-10 dase a ver una representación gráfica de precisión para el caso en que $f_2 = 2f_1$.

2-11. Pulso rectangular de duración T_1 aplicado a un filtro LP ideal. En este caso aplicase la tensión de la Ec. (2-45) a un filtro LP. Si se introducen las condiciones producidas por el filtro ideal en la

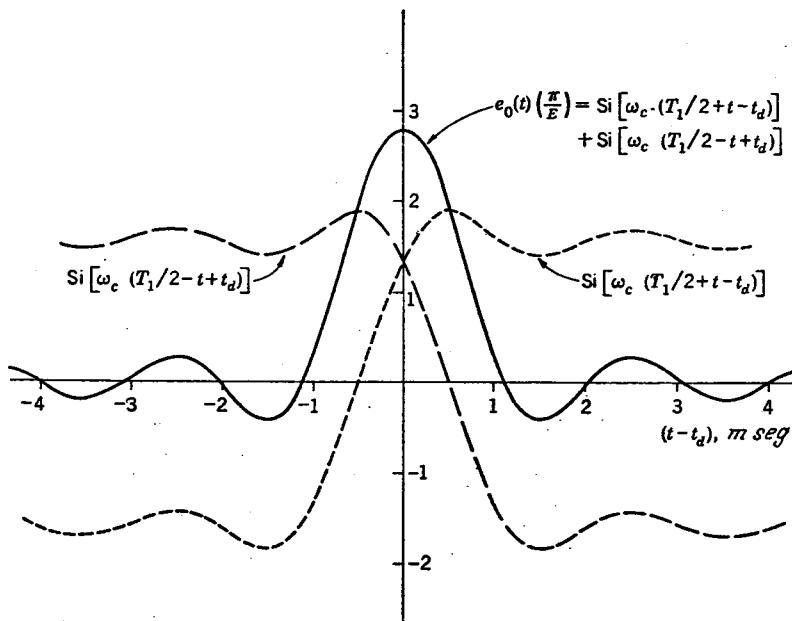


FIG. 2-12. Respuesta de un filtro LP ideal a un pulso rectangular de duración $T_1 = 1$ mseg. con $f = 500$ c/s.

Ec. (2-41c), la expresión es

$$\begin{aligned} e_o(t) &= \frac{E}{\pi} \int_0^{\omega_c} \frac{\sin \omega(T_1/2 - t + t_d) + \sin \omega(T_1/2 + t - t_d)}{f} df \\ &= \frac{E}{\pi} \left\{ \text{Si} \left[\omega_c \left(\frac{T_1}{2} - t + t_d \right) \right] + \text{Si} \left[\omega_c \left(\frac{T_1}{2} + t - t_d \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (2-52)$$

Las dos funciones de la Ec. (2-52) aparecen entonces como en la Fig. 2-11 para el caso en que $f_c = 1/T_1$. La función $e_o(t)$ está también representada en la Fig. 2-11.

Se observará que la solución de la Ec. (2-52) es la misma que la que se obtiene superponiendo dos soluciones del tipo de la obtenida con la Ec. (2-49), con un adecuado desplazamiento de los ejes de tiempo.

Si f_c es igual a $1/2T_1$, las dos funciones y su suma aparecen como en la Fig. 2-12. Si f_c es igual a $2/T_1$, las dos funciones y su suma son como se ve en la Fig. 2-13. Por lo tanto, a medida que la frecuencia de corte aumenta, la tensión de salida se va pareciendo más a la tensión de entrada. Es evidente que f_c tiene que ser por lo menos igual a $1/2T_1$ para que la reproducción del pulso sea aceptable.

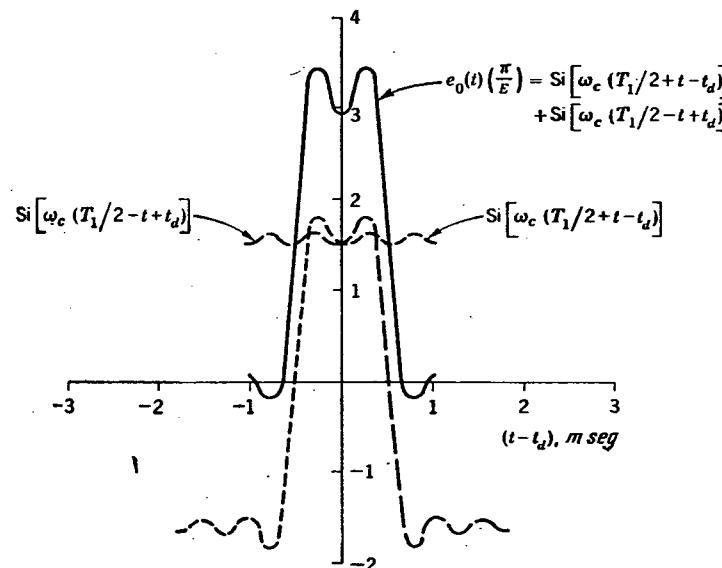


FIG. 2-13. Respuesta de un filtro LP ideal a un pulso rectangular de duración $T_1 = 1$ mseg. con $f_2 \approx 2$ Kc/s.

Estos hechos permiten sacar ciertas conclusiones con respecto a los circuitos de comunicación. En los circuitos telegráficos de teleimpre-
sor se asignan siete intervalos de tiempo a cada grupo de código literal, y
durante 5 de estos intervalos puede o no estar aplicada la tensión in-
terior por intervalo, según el código literal trasmisido. Si se trasmiten

60 palabras por minuto y cada palabra contiene 5 letras, el número de pulsos posibles por minuto es

$$n = 60 \times 5 \times 7 = 2.100$$

vale decir, hay 35 pulsos posibles por segundo; luego $T_1 = 1/35$. El sistema de trasmisión debe diseñarse para transmitir frecuencias de hasta 18 c/s o preferiblemente más.

En televisión, por otra parte, se ha establecido que deben trasmisirse 30 imágenes por segundo con un detalle de alrededor de 250.000 puntos cada una. Por lo tanto, el pulso más breve por reconocer tendría una duración aproximada de 1/7.500.000 seg. Luego, el sistema debe ser capaz de trasmisir hasta la frecuencia de 3.500.000 c/s, por lo menos. El ancho de banda de los trasmisores de video se ha normalizado en 4 Mc/s.

2-12. Trasformadas de Fourier, o funciones apareadas. Se ha dicho antes que la función de red $W(f)$ de los circuitos físicos es una función continua de la frecuencia. En muchos casos, esta propiedad conduce a un método simplificado para hallar la respuesta por medio de la integral de Fourier.

En la Ec. (2-41a) se da la expresión para el análisis de cualquier función del tiempo como función de la frecuencia. Es conveniente calcular tablas que dan por un lado funciones del tiempo, y correspondientemente, por otro lado, las respectivas funciones de la frecuencia. Estas pueden ser representadas por las relaciones de las Ecs. (2-41a) y (2-41c), con $W(f)$ igual a la unidad, es decir,

$$g(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-pt} dt \quad (2-53)$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(f) e^{pt} df \quad (2-54)$$

donde por conveniencia $p = j2\pi f$. En la mayoría de los casos, si se construyen tablas a partir de la Ec. (2-53), sólo ocasionalmente será necesario usar la Ec. (2-54) puesto que la correspondencia de $g(t)$ a $f(t)$ puede tomarse también en sentido inverso.

Las Ecs. (2-53) y (2-54) se llaman trasformadas de Fourier¹. Se ilustrará el método empleado para construir estas tablas. Consideremos la función

$$\begin{aligned} f(t) &= 0 & t < 0 \\ f(t) &= e^{-\beta t} & t > 0 \end{aligned} \quad (2-55)$$

La Ec. (2-53) deviene, entonces,

$$\begin{aligned} g(f) &= \int_0^{\infty} e^{-(p+\beta)t} dt \\ &= \left[\frac{-e^{-(p+\beta)t}}{p+\beta} \right]_0^{\infty} \end{aligned}$$

¹ En el caso de la trasformada de Laplace p se considera complejo y se reemplaza por lo general con $p = \delta + j\omega$.

En el límite infinito, $e^{-(p+\beta)t} = 0$ si β tiene una parte real positiva, por pequeña que sea; por lo tanto

$$g(f) = \frac{1}{p + \beta} \quad (2-55a)$$

y la ecuación (2-55a) es la pareja de la Ec. (2-55). Además, puesto que la Ec. (2-55a) es válida si β tiene una parte real positiva, por pequeña que ésta sea, debe existir el límite cuando la parte real tiende a cero, de modo que la ecuación es válida aunque β sea totalmente imaginaria. Por consecuencia, la Ec. (2-55a) es generalmente válida siempre que β no contenga una parte real negativa.

La pareja para el producto de dos funciones puede obtenerse directamente o aprovechando la relación que se desarrolla a continuación. Sea

$f_1(t)$ la pareja de $g_1(f)$

$f_2(t)$ la pareja de $g_2(f)$

$f(t)$ la pareja de $g_1(f)g_2(f)$, que se busca

Por la Ec. (2-54)

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(f)g_2(f) e^{j2\pi ft} df \quad (2-56)$$

pero, por la Ec. (2-53),

$$g_1(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (2-57)$$

La Ec. (2-57) no puede introducirse directamente en la Ec. (2-56) porque habría confusión respecto de la variable tiempo en las dos integraciones separadas. No obstante, la Ec. (2-57) puede también escribirse

$$g_1(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (2-57a)$$

ecuación que puede introducirse directamente en la Ec. (2-56). Tendríamos así

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) e^{-j2\pi f\tau} g_2(f) e^{j2\pi ft} d\tau df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} g_2(f) e^{j2\pi f(t-\tau)} df \right] d\tau \end{aligned} \quad (2-58)$$

Pero, por la Ec. (2-54)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} g_2(f) e^{j2\pi f(t-\tau)} df &= f_2(t - \tau) \\ f(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \end{aligned} \quad (2-59)$$

Como ejemplo de aplicación de la Ec. (2-59), sea

$$f_1(t) = e^{-\alpha t} \quad f_2(t) = e^{-\beta t} \quad t > 0$$

$$\text{Entonces } g_1(f) = \frac{1}{p + \alpha} \quad g_2(f) = \frac{1}{p + \beta}$$

El problema es el de hallar la pareja $f(t)$ de la función

$$g(f) = \frac{1}{(p + \alpha)(p + \beta)} \quad (2-60)$$

Por definición de $f_2(t)$, ésta sólo tiene valor cuando t es positiva. Por lo tanto $f_2(t)$ tiene valor sólo cuando τ es menor que t . $f_1(\tau)$ tiene valor sólo cuando τ es mayor que cero. Por lo tanto, al hacer la sustitución en la Ec. (2-59), los límites se trasforman en cero y t y la Ec. (2-59) deviene para este caso

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_0^t e^{-\alpha\tau} e^{-\beta(t-\tau)} d\tau \\ &= e^{-\beta t} \int_0^t e^{-(\alpha-\beta)\tau} d\tau \\ &= e^{-\beta t} \left[\frac{-e^{-(\alpha-\beta)\tau}}{\alpha - \beta} \right]_0^t = \frac{-e^{-\alpha t} + e^{-\beta t}}{\alpha - \beta} \end{aligned} \quad (2-60a)$$

La Ec. (2-60a) da entonces la pareja de la función (2-60)

Del mismo modo que de la Ec. (2-59) se obtuvo la pareja de $g_1(f)g_2(f)$, puede demostrarse que la pareja de $f_1(t)f_2(t)$ está dada por la expresión

$$g(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(-x)g_2(f+x) dx \quad (2-61)$$

donde en este caso x es la variable introducida a los fines de la integración.

En las ecuaciones correspondientes a las parejas es evidente que, si $g_1(f)$ y $g_2(f)$ son las parejas, respectivamente, de $f_1(t)$ y $f_2(t)$, $g_1(f) + g_2(f)$ es la pareja de $f_1(t) + f_2(t)$. Como ejemplo de la aplicación de este principio, consideremos la función

$$\cos at = \frac{e^{iat} + e^{-iat}}{2} \quad t > 0$$

La pareja de e^{iat} es $1/(p - ja)$, mientras que la de e^{-iat} es $1/(p + ja)$. Por lo tanto, la pareja de $\cos at$ es $\frac{1}{2}[1/(p - ja) + 1/(p + ja)] = p/(p^2 + a^2)$. De modo similar, la pareja de $\sin at$ para $t > 0$ es $a/(p^2 + a^2)$.

Puesto que un multiplicador constante A no afecta la integración, si $f(t)$ y $g(f)$ son parejas, también lo son $Af(t)$ y $Ag(f)$.

Si se toman las derivadas de los dos miembros de la Ec. (2-54) respecto del tiempo, obtiénes la relación

$$D_t f(t) = p \int_{-\infty}^{\infty} g(f) e^{i2\pi ft} df \quad (2-62)$$

donde D_t significa "derivada respecto del tiempo de". Por lo tanto, si $f(t)$ es la pareja de $g(f)$, $D_t f(t)$ es la pareja de $pg(f)$. De modo similar, $D_t g(f)$ es la pareja de $-j2\pi t f(t)$. Además, por integración,

$$\int_{-\infty}^t f_1(t) dt \text{ es pareja de } \frac{1}{p} g_1(f) \quad (2-63)$$

$$\int_{-\infty}^f g_1(f) df \text{ es pareja de } -\frac{1}{j2\pi t} f_1(t) \quad (2-64)$$

Algunas de las relaciones hasta aquí derivadas se resumen en la tabla 2-1. La tabla más extensa conocida hasta el momento es la de G. B. Campbell, The Practical Application of Fourier Integral, Bell System Technical Journal, vol. 7, p. 639, octubre de 1928. Las tablas de transformadas de Laplace que aparecen en muchos libros y manuales pueden usarse del mismo modo.

2-13. Desarrollo por fracciones parciales. Un método de alternativa y muy poderoso para determinar parejas es el del desarrollo en fracciones parciales. Se sabe del álgebra que una fracción del tipo

$$f(x) = \frac{(x-a)(x-b)(x-c)\dots(x-n)}{(x-a)(x-b)(x-c)\dots(x-n)}$$

TABLA 2-1. PAREJAS DE TRANSFORMADAS DE FOURIER

Par	$g(f)$	$f(t)$
1	$\frac{1}{p}$	$U(t)$
2	$\frac{1}{p + \alpha}$	$e^{-\alpha t}, t > 0$
3	$\frac{1}{p(p + \alpha)}$	$\frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha}, t > 0$
4	$\frac{1}{(p + \alpha)^2}$	$te^{-\alpha t}, t > 0$
5	$\frac{1}{(p + \alpha)(p + \beta)}$	$\frac{e^{-\beta t} - e^{-\alpha t}}{\alpha - \beta}, t > 0$
6	$\frac{p}{(p + \alpha)(p + \beta)}$	$\frac{\alpha e^{-\alpha t} - \beta e^{-\beta t}}{\alpha - \beta}, t > 0$
7	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$	$\cos \omega t, t > 0$
8	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	$\sin \omega t, t > 0$
9	$pg_1(f)$	$D_t f_1(t)$
10	$\frac{1}{p} g_1(f)$	$\int_{-\infty}^t f_1(t) dt$
11	$\int_{-\infty}^f g_1(f) df$	$-\frac{1}{j2\pi t} f_1(t)$

Nota: $g_1(f)$ es la pareja de $f_1(t)$.

puede expandirse en la forma

$$\begin{aligned} \frac{A}{x - a} + \frac{B}{x - b} + \frac{C_1}{x - c} + \frac{C_2}{(x - c)^2} + \dots + \frac{C_m}{(x - c)^m} \\ + \dots + \frac{N}{x - n} \end{aligned}$$

donde $A, B, C_1, C_2, \dots, C_m, \dots, N$ son constantes. Valen las siguientes reglas:

1. A todo factor de primer grado, tal como $(x - a)$, del denominador le corresponde una fracción parcial de la forma $A/(x - a)$.
2. A todo factor repetido m veces, como $(x - c)^m$ en el denominador, le corresponde una serie de m fracciones parciales de la forma

$$\frac{C_1}{x - c} + \frac{C_2}{(x - c)^2} + \dots + \frac{C_m}{(x - c)^m}$$

Las constantes pueden evaluarse del siguiente modo: Cuando x está en la vecindad del valor de a , el valor de la suma de las fracciones parciales está determinada casi enteramente por el término $A/(x - a)$. Por lo tanto, en la región dicha

$$\frac{f(x)}{(x - a)(x - b)(x - c)^m \dots (x - n)} \approx \frac{A}{x - a}$$

o

$$\frac{f(x)}{(x - b)(x - c)^m \dots (x - n)} \approx A \quad (2-65)$$

Esta aproximación es tanto más exacta cuanto más próximo a a se halla x . Luego, en el límite, es decir, cuando x es igual a a , la Ec. (2-65) deviene una identidad y

$$\frac{f(a)}{(a - b)(a - c)^m \dots (a - n)} = A \quad (2-66)$$

$$\frac{f(b)}{(b - a)(b - c)^m \dots (b - n)} = B \quad (2-67)$$

Se aplican expresiones similares a todas las constantes cuando a, b, \dots, n , son diferentes.

Para ilustrar la aplicación del método, consideremos nuevamente el problema de hallar la pareja de $g(f) = 1/(p + a)(p + \beta)$. Se tiene

$$\frac{1}{(p + a)(p + \beta)} = \frac{A}{p + a} + \frac{B}{p + \beta}$$

Aplicando las Ecs. (2-66) y (2-67)

$$A = \frac{1}{-\alpha + \beta}$$

$$B = \frac{1}{-\beta + \alpha}$$

$$\text{Por lo tanto } \frac{1}{(p + \alpha)(p + \beta)} = \frac{1}{\beta - \alpha} \left(\frac{1}{p + \alpha} - \frac{1}{p + \beta} \right)$$

Pero la pareja de $1/(p + \alpha)$ es $e^{-\alpha t}$, y la pareja de $1/(p + \beta)$ es $e^{-\beta t}$. Por lo tanto, la pareja de $\frac{1}{(p + \alpha)(p + \beta)}$ es $\frac{1}{\beta - \alpha} (e^{-\alpha t} - e^{-\beta t})$, expresión ya obtenida anteriormente.

Si hay dos o más factores idénticos en el denominador, es necesario

modificar el procedimiento. Consideremos la fracción $\frac{f(x)}{(x - a)^m Q(x)}$, donde $Q(x)$ no tiene ningún factor $(x - a)$. Entonces

$$\frac{f(x)}{(x - a)^m Q(x)} = \frac{A}{(x - a)^m} + \frac{B}{(x - a)^{m-1}} + \dots + \frac{M}{x - a} + \dots \quad (2-68)$$

Cuando x tiene a a , el miembro de la derecha estará dominado por el término $A/(x - a)^m$ y, por consiguiente,

$$A = \frac{f(a)}{Q(a)} \quad (2-69)$$

La fracción puede también escribirse

$$\frac{f(x)}{(x - a)^m Q(x)} = \frac{A}{(x - a)^m} + \frac{f(x) - AQ(x)}{(x - a)^m Q(x)} \quad (2-70)$$

Pero el segundo término del segundo miembro de la Ec. (2-70) debe ser igual a la suma de todos los términos del segundo miembro de la Ec. (2-68) excepto el primero. Pero si estos términos se combinan en una sola fracción tendrán en el denominador el factor $(x - a)$ elevado sólo a la potencia $(m - 1)$. Por lo tanto $f(x) - AQ(x)$ tiene un factor $x - a$ que puede ser cancelado en el segundo término de la Ec. (2-70).

Sea entonces la fracción $\frac{f(x) - AQ(x)}{(x - a)^m Q(x)}$ de la forma $\frac{f_1(x)}{(x - a)^{m-1} Q_1(x)}$

Por el mismo proceso que el utilizado en la derivación de la ecuación (2-69), la expresión de B será

$$B = \frac{f_1(a)}{Q_1(a)} \quad (2-71)$$

Del mismo modo pueden obtenerse todos los coeficientes de las fracciones parciales.

Como ejemplo, consideremos la función

$$\frac{p + r}{(p + a)^2(p + c)} = \frac{A}{(p + a)^2} + \frac{B}{p + a} + \frac{C}{p + c}$$

Por la Ec. (2-69)

$$A = \frac{-a + r}{-a + c}$$

El segundo término de la derecha de la Ec. (2-70) deviene

$$\begin{aligned} \frac{f(p) - AQ(p)}{(p + a)^2 Q(p)} &= \frac{(p + r) - \frac{r - a}{c - a}(p + c)}{(p + a)^2(p + c)} \\ &= \frac{(p + r)(c - a) - (r - a)(p + c)}{(p + a)^2(p + c)(c - a)} \\ &= \frac{pc - pr - ar + ac}{(p + a)^2(p + c)(c - a)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(p+a)(c-r)}{(p+a)^2(p+c)(c-a)} \\
 &= \frac{c-r}{(p+a)(p+c)(c-a)}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto $\frac{B}{p+a} + \frac{C}{p+c} = \frac{c-r}{(p+a)(p+c)(c-a)}$

Entonces $B = \frac{c-r}{(-a+c)(c-a)} = \frac{c-r}{(c-a)^2}$
 $C = \frac{c-r}{(-c+a)(c-a)} = \frac{r-c}{(c-a)^2}$

y la expresión original deviene

$$\frac{p+r}{(p+a)^2(p+c)} = \frac{r-a}{(c-a)(p+a)^2} + \frac{c-r}{(c-a)^2(p+a)} - \frac{c-r}{(c-a)^2(p+c)} \quad (2-72)$$

La pareja de $1/(p+a)^2$ puede determinarse usando la Ec. (2-59) y es te^{-at} . Usando la Ec. (2-72), la pareja de $\frac{p+r}{(p+a)^2(p+c)}$ será la suma de las parejas de las funciones del segundo miembro, esto es,

$$f(t) = \frac{r-a}{c-a} te^{-at} + \frac{c-r}{(c-a)^2} (e^{-at} - e^{-ct}) \quad (2-73)$$

Con estas relaciones es fácil hallar la mayoría de los pares de interés. En la tabla 2-1 se muestran sólo los más comunes.

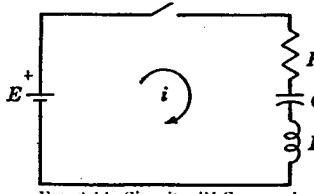


Fig. 2-14. Circuito RLC en serie.

Como ejemplo del método de las transformaciones aplicadas a la solución de un problema transitorio típico, consideremos el caso planteado por la Fig. 2-14, en el que se cierra el interruptor en el instante $t = 0$.

Entonces la función de tiempo de tensión puede obtenerse de la tabla, par 1. El mismo resultado se obtiene poniendo $\alpha = 0$ en el par 2 y multiplicando los dos lados por la constante E . Por lo tanto, la correspondiente función de f será

$$Dr(f) = e(f) = \frac{E}{p} = \frac{E}{j2\pi f}$$

Una vez obtenida la tensión como función de f , la corriente se determina rápidamente también como función de f . La impedancia del circuito de la Fig. 2-14 es

$$\begin{aligned}
 Z &= R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \\
 &= R + pL + \frac{1}{pC}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la corriente en función de f será

$$\begin{aligned}
 i(f) &= \frac{e(f)}{Z(f)} = \frac{E}{p(R + pL + 1/pC)} \\
 &= \frac{E}{L[p^2 + (R/L)p + 1/LC]}
 \end{aligned}$$

Esta tiene la forma de $g(f)$ del par 5 de la tabla 2-1, donde α y β son las raíces, con signo cambiado, de la ecuación $p^2 + Rp/L + 1/LC = 0$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} \\
 \beta &= \frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}
 \end{aligned}$$

Luego, la corriente como función del tiempo está dada por la función $f(t)$ del par 5, esto es

$$i(t) = \frac{E [\exp (-R/2L + \sqrt{R^2/4L^2 - 1/LC}) t - \exp (-R/2L - \sqrt{R^2/4L^2 - 1/LC}) t]}{2L \sqrt{R^2/4L^2 - 1/LC}}$$

donde $\exp(x)$ significa e^x . Si $1/LC > R^2/4L^2$, puede escribirse

$$\begin{aligned}
 i &= \frac{E}{L \sqrt{1/LC - R^2/4L^2}} e^{-Rt/2L} \operatorname{sen} \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} t \\
 &= \frac{E}{\omega_1 L} e^{-Rt/2L} \operatorname{sen} \omega_1 t
 \end{aligned}$$

donde $\omega_1 = \sqrt{1/LC - R^2/4L^2}$, la que es la solución deseada.

2-14. Polos y ceros. Se ha demostrado que las respuestas estacionaria y transitoria están únicamente relacionadas por intermedio de la integral de Fourier. Se demostrará ahora que los polos y ceros (que definiremos luego) de la función de la red determinan únicamente tanto las características transitorias como las estacionarias de la red, excepto por un factor de escala H . Por razones de conveniencia, conservaremos la notación p utilizada en los dos últimos apartados.

En los circuitos físicamente realizable, la función de red, o inmittenza, $W(p)$ de una red de parámetros concentrados puede expresarse por medio de una fracción racional,¹ es decir, como la razón entre dos polinomios en p ,

$$W(p) = \frac{a_1 p^m + a_2 p^{m-1} + \dots + a_m}{b_1 p^n + b_2 p^{n-1} + \dots + b_n} \quad (2-74)$$

Factoreando $a_1/b_1 = H$,

$$W(p) = H \frac{p^m + c_1 p^{m-1} + \dots + c_m}{p^n + d_1 p^{n-1} + \dots + d_n} \quad (2-74a)$$

¹Este punto se desarrolla con mayor detalle en los Caps. IV y XIV.

donde $c_k = a_k/a_1$
 $d_k = b_k/b_1$

Ahora si el numerador de la Ec. (2-74a) se iguala a cero, las raíces de la ecuación resultante pueden denominarse $p_{o1}, p_{o2}, \dots, p_{on}$ y el numerador puede escribirse como el producto de los factores $p - p_{ok}$. De modo similar, el denominador puede escribirse como el producto de los factores $p - p_{xk}$, donde $p_{x1}, p_{x2}, \dots, p_{xn}$ son las raíces del denominador igualado a cero. Luego, la Ec. (2-74a) puede volverse a escribir en la forma

$$W(p) = H \frac{(p - p_{o1})(p - p_{o2}) \cdots (p - p_{on})}{(p - p_{x1})(p - p_{x2}) \cdots (p - p_{xn})} \quad (2-74b)$$

Si p toma ahora cualquiera de los valores p_{ok} , $W(p)$ se anula; por esta razón, dícese que $p_{o1}, p_{o2}, \dots, p_{on}$ son los *ceros* de $W(p)$. De modo similar, si p toma cualquiera de los valores p_{xk} , $W(p)$ tiende a infinito; por esta razón, dícese igualmente que $p_{x1}, p_{x2}, \dots, p_{xn}$ son los *polos* de $W(p)$. Tanto los polos como los ceros pueden ser reales, imaginarios o complejos, pero, cuando son complejos aparecen siempre como pares conjugados de la forma general $p_{a1} = \delta_a + j\omega_a$, $p_{a2} = \delta_a - j\omega_a$. En los casos físicos, δ_a es siempre negativo.

Según la Ec. (2-74b), es evidente que si están especificados los ceros, los polos y el factor de escala H , la función $W(p)$ queda únicamente determinada. Por consecuencia, entonces, podemos decir que el comportamiento de una red puede especificarse indistintamente por (1) su respuesta estacionaria como función de la frecuencia, o (2) su respuesta a una función escalón como función del tiempo, o (3) por sus polos, ceros y factor de escala.

Es interesante observar ahora cómo puede obtenerse gráficamente la immitancia de estado estacionario, $W(\omega)$ o $W(f)$ mediante representaciones en el plano complejo de $\delta_a + j\omega_a$. En general, los factores del numerador y del denominador de la Ec. (2-74b) son complejos, y pueden escribirse en la forma polar como

$$\begin{aligned} p - p_{ok} &= \beta_k / \phi_k \\ p - p_{xk} &= \gamma_k / \theta_k \end{aligned} \quad (2-75)$$

Introduciendo estas expresiones en la Ec. (2-74b),

$$W(p) = H \frac{\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_m}{\gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_n} \cdot \frac{1}{(\phi_1 + \phi_2 + \cdots + \phi_m) - (\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n)} \quad (2-74c)$$

La Fig. 2-15 ilustra una situación típica para un circuito que tiene dos polos complejos conjugados y un único cero, real y negativo. El cero y los polos se representan en el plano complejo. β_1, γ_1 y γ_2 se leen en escala en el diagrama para un valor particular de $\omega = \omega_1$; luego

$$W(\omega_1) = H \frac{\beta_1}{\gamma_1 \gamma_2}$$

θ_1, θ_2 y ϕ_1 pueden también medirse, y el argumento de $W(\omega_1)$ será

$\phi_1 - (\theta_1 + \theta_2)$. El estudiante observará que $W(\omega)$ se obtiene haciendo variar el punto ω_1 de $-\infty$ a $+\infty$ a lo largo del eje de las frecuencias reales, el que es el eje vertical en la Fig. 2-15.

De lo expuesto anteriormente en este mismo capítulo resulta evidente que los polos y los ceros de la función de la red determinan también la respuesta a cualquier función impulsora. Una sencilla extensión de estos conceptos conduce a una conclusión de gran importancia en los circuitos de comunicación, esto es, la de que el *carácter* de la respuesta — oscilatoria o no oscilatoria — está determinado por los polos de la red.

Usando la notación p del último apartado, la Ec. (2-41b) muestra que la respuesta de una red descrita por $W(p)$ es

$$R(p) = W(p) D(p) \quad (2-76)$$

$D(p)$ puede ser una función escalón, digamos, de tensión, de modo que según el par 1 de la tabla 2 es $D(p) = E/p$. Como se ha dicho antes, $W(p)$ es una fracción racional; por lo tanto, $W(p)E/p$ será también una fracción racional y la Ec. (2-76) puede describirse entonces en la forma (2-74a) o (2-74b). Debe observarse que el denominador de estas ecuaciones, expresado como un polinomio en p , tendrá coeficientes

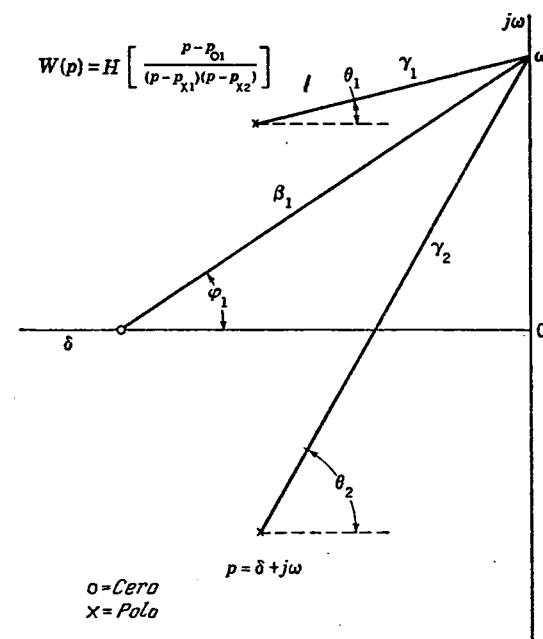
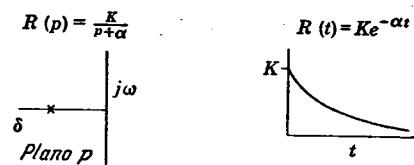
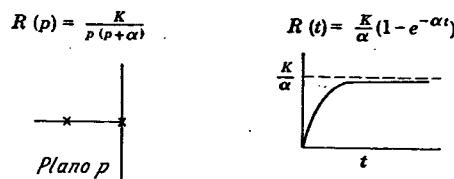


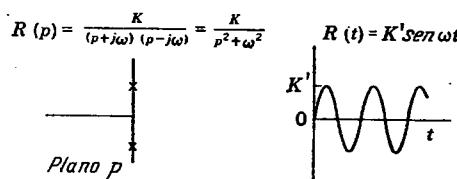
FIG. 2-15. Determinación gráfica de la característica estacionaria para ω_1 a partir de la posición de los ceros y los polos en el plano complejo.



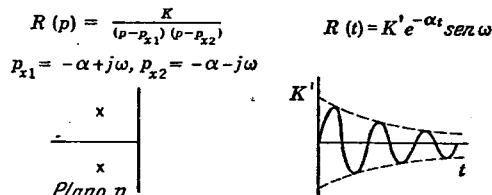
(a) Polo real, negativo



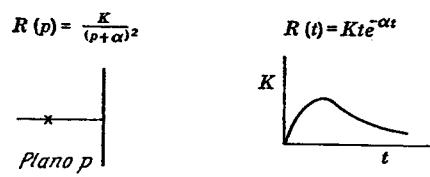
(b) Polo real, negativo, + polo en el origen



(c) Polos imaginarios conjugados



(d) Polos complejos conjugados



(e) Polo real, negativo, de segundo orden

FIG. 2-16. Efecto de las combinaciones básicas de polos sobre la respuesta transitoria.
Nota: Despréciese el ángulo de fase en c.y d.

reales; por lo tanto, los polos son o reales o complejos conjugados. Luego, si se expande $R(p)$ en fracciones parciales, ella tendrá la forma general

$$R(p) = EH \left(\frac{A}{p - p_{x1}} + \cdots + \frac{F}{p - p_{xJ}} + \frac{F}{p + p_{xJ}^*} + \cdots \right) \quad (2-76a)$$

En esta ecuación, p_{xJ} y p_{xJ}^* son complejos conjugados. $R(t)$ puede ser entonces hallado identificando cada término con su pareja en la tabla 2-1. Se verá, entonces, que a cada polo real y a cada par de polos complejos conjugados de $R(p)$ corresponde un término variable en el tiempo en $R(t)$, siendo el primero exponencial y el segundo, oscilatorio. Puesto que sólo los polos aparecen explícitamente en la Ec. (2-76a), se concluye que son los polos de $R(p)$ los que determinan el carácter —exponencial, sinusoidal, sinusoidal amortiguada— de la respuesta transitoria. Los ceros de $R(p)$ afectan la amplitud de los distintos términos de $R(t)$. Algunas formas comunes se hallan reunidas en la Fig. 2-16.

2-15. Respuestas del amplificador con acoplamiento RC . El amplificador de banda ancha con acoplamiento RC , cuyo circuito equivalente se da en la Fig. 2-17a servirá como buen ejemplo para resumir los resultados de los apartados anteriores y para ilustrar las aproximacio-

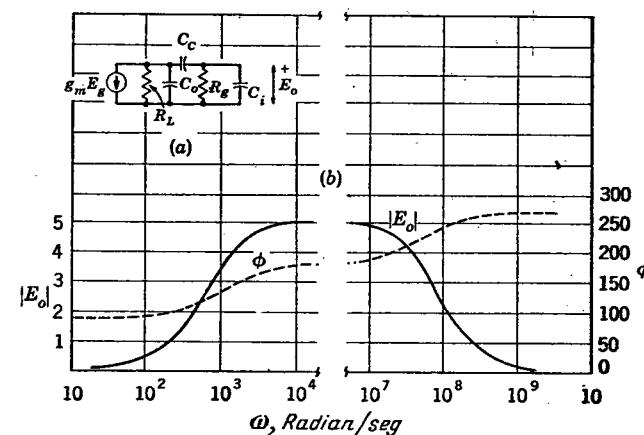


FIG. 2-17. Amplificador con acoplamiento RC . (a) Circuito equivalente. (b) Respuesta de estado estacionario. Nótese la discontinuidad en la escala de ω . $R_L = 1$ kilohm, $R_x = 100$ kilohm, $C_o = 6$ pF, $C_i = 14$ pF, $g_m E_g = -5$ mA, $C_c = 0.1$ μ F.

nes típicas que pueden aprovecharse para computar la respuesta de los circuitos. Según se explicará en el Cap. XV, los valores típicos para los parámetros circuitales en la Fig. 2-17a son

$$\begin{aligned} R_L &= 1 \text{ kilohm} & R_g &= 100 \text{ kilohm} \\ C_i &= 14 \text{ pF} & C_o &= 6 \text{ pF} \\ & & C_c &= 0.01 \text{ } \mu\text{F} \end{aligned}$$

Se observará que la función impulsora es la corriente $g_m E_g$, y que la respuesta deseada es la tensión de salida E_o . Puede demostrarse con

los métodos propios del análisis estacionario que la función de red $W(\omega)$ está dada por

$$W(\omega) = \frac{-j\omega C_s}{\frac{1}{R_L R_g} + j\omega \left(\frac{C_i + C_c}{R_L} + \frac{C_o + C_c}{R_g} \right) + (j\omega)^2 [C_s C_i + C_c (C_o + C_i)]} \quad (2-77)$$

Ahora bien, el ingeniero, para simplificar su tarea, toma nota de los valores relativos de las cantidades involucradas en sus cálculos. Así, dado que $C_o < C_i \ll C_c$,

$$C_i + C_c \approx C_c \quad C_o + C_c \approx C_c$$

y, puesto que $R_L \ll R_g$,

$$\frac{C_i + C_c}{R_L} + \frac{C_o + C_c}{R_g} \approx C_c \left(\frac{1}{R_L} + \frac{1}{R_g} \right) \approx \frac{C_c}{R_L}$$

Además, $C_o C_i \ll C_c (C_o + C_i)$; luego

$$C_o C_i + C_c (C_o + C_i) \approx C_c (C_o + C_i) = C_c C_s$$

donde $C_s = C_o + C_i$. Por consecuencia, la Ec. (2-77) puede simplificarse en la forma

$$W(\omega) = \frac{-j\omega C_s}{1/R_L R_g + j\omega C_c / R_L + (j\omega)^2 C_c C_s} \quad (2-78)$$

Factoreando $j\omega C_c / R_L$ del denominador y reordenando los términos,

$$W(\omega) = \frac{-R_L}{1 + j(\omega C_s R_L - 1/\omega C_c R_g)} \quad (2-78a)$$

La respuesta estacionaria a una función impulsora de corriente sinusoidal será entonces

$$E_o(\omega) = W(\omega) g_m E_g(\omega) = -\frac{g_m R_L E_g}{1 + j(\omega C_s R_L - 1/\omega C_c R_g)} \quad (2-78b)$$

La Ec. (2-78b) puede usarse para calcular la respuesta estacionaria del amplificador RC, sujeto el cálculo, desde luego, a las aproximaciones que se han hecho. Antes de hacerlo así, no obstante, conviene observar que la respuesta en diferentes rangos de frecuencias está controlada por distintos parámetros circuitales. Obsérvese que $\omega C_s R_L = 2 \times 10^{-8} \omega$, mientras que $1/\omega C_c R_g = 10^3/\omega$. Por lo tanto, para las frecuencias muy altas es $1/\omega C_c R_g \ll \omega R_L C_s$, y la respuesta se simplifica en la forma

$$(E_o)_{alta} = \frac{-g_m R_L}{1 + j\omega C_s R_L} E_g \quad (2-79a)$$

$$= \frac{g_m R_L E_g}{\sqrt{1 + (\omega C_s R_L)^2}} / -180^\circ - \text{arc tg } \omega C_s R_L \quad (2-79b)$$

Por otra parte, para las frecuencias muy bajas, $\omega C_s R_L \ll 1/\omega C_c R_g$, y la respuesta se simplifica en la forma

$$(E_o)_{baja} = \frac{-g_m R_L}{1 - j/\omega C_c R_g} E_g \quad (2-79c)$$

$$= \frac{g_m R_L E_g}{\sqrt{1 + (1/\omega C_c R_g)^2}} / -180^\circ + \text{arc tg } \frac{1}{\omega C_c R_g} \quad (2-79d)$$

Para cierta frecuencia en particular, $\omega_0/2\pi$, es $\omega_0 C_s R_L = 1/\omega_0 C_c R_g$, y la respuesta resulta ser

$$(E_o)_{media} = -g_m R_L = g_m R_L / -180^\circ \quad (2-79e)$$

En la práctica, C_s y C_c tienen un efecto despreciable sobre la respuesta dentro de un rango considerable de frecuencias, el que se llama a menudo "banda de las frecuencias medias" o simplemente "banda media". En la Fig. 2-17b se ha representado la respuesta estacionaria del amplificador en cuestión, con $g_m = 5 \times 10^{-3}$ siemens y $E_g = 1$ volt. En el Cap. XV se verá una presentación más elegante de esta respuesta, en términos de las variables normalizadas.

Consideremos, ahora, la respuesta transitoria del amplificador RC de la Fig. 2-17a. Reemplazando $j\omega$ por p y factoreando $C_s C_c$ del denominador en la Ec. (2-78), la función de red deviene

$$W(p) = -\frac{p}{C_s (p^2 + p/R_L C_s + 1/R_L R_g C_s C_c)} \quad (2-80)$$

En este caso, en que se desea la respuesta transitoria, sea la corriente impulsora una función escalón *negativa* tal que

$$i(t) = 0 \quad t < 0 \\ i(t) = -g_m E_g \quad t > 0 \quad (2-81)$$

(Elíjese el signo negativo para que la función respuesta pueda ser representada como función positiva del tiempo.) Luego, según la tabla 2-1, $I(p) = -g_m E_g / p$. La tensión de salida será

$$E_o(p) = W(p) I(p) = \frac{g_m E_g}{C_s} \frac{1}{p^2 + p/R_L C_s + 1/R_L R_g C_s C_c} \quad (2-82)$$

Puesto que el denominador es un polinomio de segundo grado, la Ec. (2-82) tendrá dos polos, p_{x1} y p_{x2} , y puede escribirse en la forma

$$E_o(p) = \frac{g_m E_g}{C_s} \frac{1}{(p - p_{x1})(p - p_{x2})} \quad (2-83)$$

Por las parejas de la tabla 2-1

$$e_o(t) = \frac{g_m E_g}{C_s (p_{x1} - p_{x2})} (e^{p_{x1} t} - e^{p_{x2} t}) \quad (2-84)$$

Los dos polos pueden evaluarse igualando a cero el denominador de la

Ec. (2-82) y buscando las raíces de la ecuación resultante con la fórmula cuadrática; así:

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} p_{x1} \\ p_{x2} \end{aligned} \right\} &= -\frac{1}{2R_L C_s} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2R_L C_s}\right)^2 - \frac{1}{R_L R_g C_s C_c}} \\ &= -\frac{1}{2R_L C_s} \left(1 \mp \sqrt{1 - \frac{4R_L C_s}{R_g C_c}}\right) \quad (2-85) \end{aligned}$$

Ahora, para los valores dados, $R_L \ll R_g$ y $C_s \ll C_c$; por lo tanto, $4R_L C_s / R_g C_c \ll 1$. El segundo término del radicando es así muy pequeño en comparación con 1, pero no se lo puede despreciar, porque de lo contrario desaparecería la diferencia entre los dos polos y se confundiría el carácter de la respuesta.

En una situación como ésta, la precisión de la regla de cálculo es inadecuada, pero puede recurrirse a la expansión binomial, a saber,

$$\sqrt{1 + a} = 1 + \frac{a}{2} - \frac{a^2}{4 \cdot 2} + \frac{3a^3}{8 \cdot 3} - \dots$$

Si $a \ll 1$, la serie converge tan rápidamente que sólo los dos primeros términos son significativos y dan una precisión en el cómputo numérico mejor que la de la regla de cálculo. Aplicando esta expansión a la Ec. (2-85), los polos resultan

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} p_{x1} \\ p_{x2} \end{aligned} \right\} &= -\frac{1}{2R_L C_s} \left[1 \mp \left(1 - \frac{2R_L C_s}{R_g C_c}\right) \right] \\ \text{esto es } p_{x1} &= -\frac{1}{R_g C_s} = \frac{-1}{10^5 \times 10^{-8}} = -10^3 \\ p_{x2} &\approx -\frac{1}{R_L C_s} = -\frac{1}{10^3 (0.2 \times 10^{-10})} = -5 \times 10^7 \quad (2-85a) \end{aligned}$$

Observando que $p_{x1} - p_{x2} \approx 1/R_L C_s$, la Ec. (2-84) deviene

$$e_o(t) = g_m E_g R_L (e^{+10^3 t} - e^{-5 \times 10^7 t}) \quad (2-86)$$

Obsérvese así que la respuesta es proporcional a la suma de dos exponentiales. La forma general de la Ec. (2-86) está ilustrada en la Fig. 2-18a, donde puede observarse que la respuesta consiste en un crecimiento de relativamente corta duración seguido por un decaimiento largo y lento. Esto es consecuencia de la gran diferencia entre p_{x1} y p_{x2} y simplifica la tarea de representar gráficamente la verdadera respuesta.

Para valores de t vecinos a cero, digamos del orden de 1 μ seg o menos, $e^{pxit} \approx 1$, y la respuesta transitoria de "tiempo breve" puede expresarse como

$$e_o(t)_{\text{breve}} = g_m E_g R_L (1 - e^{-5 \times 10^7 t}) \quad (2-86a)$$

Puesto que el "frente" de la función escalón aplicada ocurre en el instante $t = 0$, $e_o(t)_{\text{breve}}$ puede llamarse "respuesta de frente". En el caso del amplificador RC la respuesta de frente tiene la forma de una exponencial creciente.

Para valores mayores del tiempo, por ejemplo, del orden de los 100 μ seg o más, $e^{pxit} \approx 0$, y la respuesta transitoria de "tiempo largo" puede escribirse

$$e_o(t)_{\text{largo}} = g_m E_g R_L e^{-10^3 t} \quad (2-86b)$$

Esta es la ecuación de una función exponencial decreciente y es consecuencia de la incapacidad del circuito para dejar pasar un término de C. C. debido a la presencia del capacitor C_c . En razón de la forma del exponencial, $e_o(t)_{\text{largo}}$ se denomina a menudo "sagita" o "flecha". La respuesta transitoria del circuito de la Fig. 2-17a está representada en la Fig. 2-18.

Es importante anotar las siguientes conclusiones respecto del amplificador RC:

1. La respuesta al estado estacionario puede considerarse en tres distintos rangos o bandas de frecuencias: bajo, medio y alto. La respuesta en la banda baja depende de los parámetros C_c y R_g ; la respuesta en la banda alta, de los parámetros R_L y C_s .

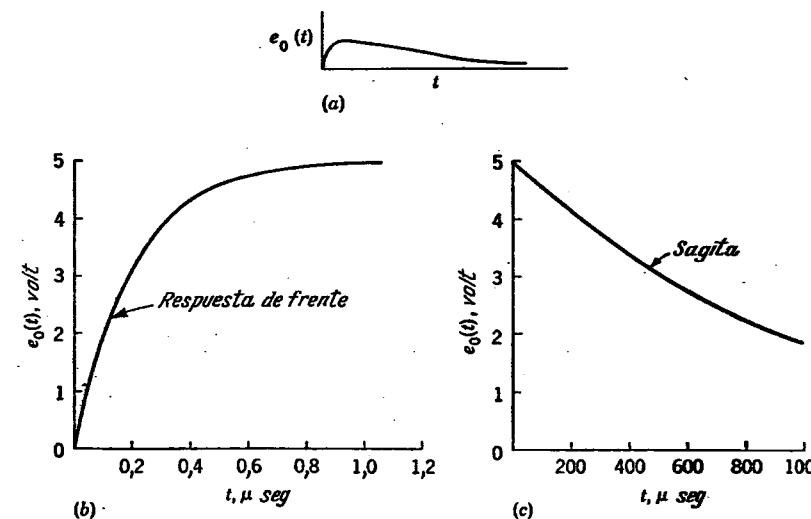


FIG. 2-18. Respuesta del amplificador RC a una función escalón. (a) Forma general de $e_o(t)$. (b) Respuesta de frente para pequeños valores de t . (c) Respuesta en sagita o flecha para valores grandes de t . Obsérvese el cambio de la escala de tiempo en comparación con b.

2. La respuesta transitoria puede considerarse en dos intervalos de tiempo distintos: breve (respuesta de frente) y largo (sagita). La respuesta de frente depende de R_L y C_s , y está por lo tanto relacionada con la respuesta estacionaria a las frecuencias altas. La sagita depende de R_g y C_c y está por lo tanto relacionada con la respuesta estacionaria de baja frecuencia.

Estas ideas sirven como importantes guías en la consideración del comportamiento de los circuitos de comunicación e ilustran cuantitativamente algunas de las conclusiones a que se arribó en el Cap. I.

PROBLEMAS

- 2-1. Reemplazar el inductor de la Fig. 2-1 por un capacitor C . Hallar la solución completa para $i(t)$ y verificar que la integración con respecto al tiempo corresponde a la multiplicación por $1/j\omega$ en el dominio de frecuencia.
- 2-2. Esbozar las curvas de impedancia estacionaria de un circuito serie RLC de tres distintas maneras.
- 2-3. Calcular y esbozar la respuesta transitoria a $EU(t)$ del circuito del Prob. 2-1.
- 2-4. Verificar la Ec. (2-16d).
- 2-5. (a) Calcular y esbozar la envolvente del espectro de frecuencias de una onda de diente de sierra recurrente de amplitud E y período T . (b) Repetir para un único pulso de diente de sierra no recurrente de amplitud E y duración T . (c) ¿Cómo están relacionadas estas dos envolventes?
- 2-6. Cierto filtro idealizado tiene la siguiente función de red: $W(\omega) = A, -\omega_1 < \omega < +\omega_1$; $W(\omega)$ es lineal entre 0 para $-\omega_2$ y A para $-\omega_1$; $W(\omega)$ es lineal entre A para ω_1 y 0 para ω_2 . El retardo es t_d para todas las frecuencias.
 - a. Obtener una expresión para la respuesta transitoria a $EU(t)$.
 - b. ¿Cómo varía el sobreimpulso dejando fijo ω_1 y aumentando ω_2 ?
- 2-7. Calcular y representar gráficamente el espectro de frecuencias de $U(t)$, Fig. 2-4.
- 2-8. Un pulso rectangular de corriente de duración T_1 se aplica a una carga RC en paralelo. Definiendo la frecuencia de corte como $f_c = 1/2\pi CR$.
 - a. Derivar una expresión para la tensión a través de RC como función del tiempo.
 - b. Calcular y representar gráficamente $e_o(t)$ si $f_c = 2/T_1$.
- 2-9. Una función escalón de corriente $IU(t)$ se aplica a una combinación en paralelo de R , L , C . Usando el método de la transformada de Fourier, calcular la tensión a través de la combinación en paralelo para los tres casos en que $1/(2RC)^2$ es mayor, igual y menor, que $1/LC$. Esbozar la respuesta en cada caso. Comparar sus resultados con los del problema ilustrativo del Ap. 2-13.

CAPÍTULO III

ANALISIS DEL ESTADO ESTACIONARIO Y TEOREMAS DE RED

Las reglas de tensiones y de corrientes de Kirchhoff son las herramientas básicas para resolver los problemas de red. Se ha insistido tradicionalmente en la regla de tensiones y en su consecuencia natural, el método de las mallas para la resolución de los circuitos, mientras quedaba relegada a segundo plano la regla de las corrientes y el método correspondiente de los nodos. En realidad, en el caso de los circuitos de comunicación, es el análisis nodal el que se presta mejor, la mayoría de las veces, para encarar los circuitos físicos. Hay dos razones que justifican esta proposición: (1) En el análisis nodal las fuentes son generadoras de corriente constante, y esta condición se satisface muy aproximadamente en los circuitos que emplean pentodos en clase A; (2) al correlacionar los cálculos teóricos con las mediciones experimentales es conveniente considerar en lo posible las cantidades que más fácilmente pueden medirse en el laboratorio. Una ligera reflexión demuestra que en general es más fácil medir tensiones que medir corrientes en los circuitos electrónicos. En efecto, en el circuito de placa de una válvula, las tensiones y corrientes consisten en sendas componentes continuas y alternas. La medición de la componente alterna de tensión se realiza fácilmente por medio de un voltímetro electrónico para C. A., mientras que no se conoce un medio práctico para medir independientemente la componente alterna de una corriente. Dado que los métodos usuales de análisis consideran sólo las componentes alternas, parece evidente que las ecuaciones deben dar como resultado tensiones, porque éstas pueden comprobarse fácilmente por medición directa. Por consecuencia, el método de los nodos merece, entonces, por lo menos tanta atención como el de las mallas. También se apreciará que en muchos casos el análisis nodal requiere menos ecuaciones que el de mallas, como ocurre, por ejemplo, cuando hay que tomar en cuenta las capacitancias interelectródicas de una válvula.

Hay ventajas en el estudiar estos dos métodos básicos a la vez. Póngase así en evidencia la existencia de un principio general de *dualidad* entre ciertas redes, principio que puede resultar de suma utilidad en la solución de los problemas de red.

A causa de su importancia básica, es aconsejable rever las aplicaciones de las dos reglas de Kirchhoff tal como se las usa en el análisis de los circuitos de más de una malla. Esta revisión aclarará también los conceptos de dualidad general y de equivalencia.

3-1. Convenciones acerca de los signos. En un circuito de C. A. las corrientes fluyen alternadamente en los dos sentidos posibles en cada rama del circuito. No obstante, con el fin de poder sumar o restar sus efectos en los nudos, como lo requiere la regla de corrientes de Kirchhoff, es necesario decidir *arbitrariamente* cuál de los dos sentidos ha de ser considerado como positivo. Esta asignación se hace por lo común agregando flechas al diagrama circuital y considerando como positivas las corrientes de rama que fluyen en el sentido indicado por la flecha respectiva. Es importante observar que la asignación de los sentidos positivos es *arbitraria* en el diagrama y que, sin embargo, una vez hecha, debe respetársela en todo el análisis.

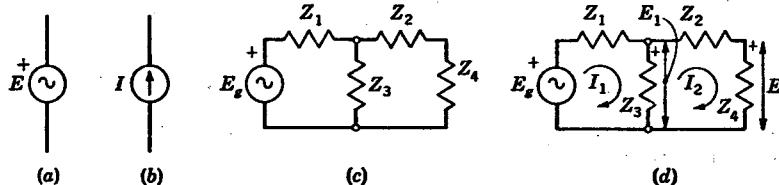


FIG. 3-1. Convenciones de signo. (a) Fuente de tensión. (b) Fuente de corriente. (c) Circuito de dos mallas. (d) Una posible asignación de sentidos positivos para las corrientes y polaridades de las tensiones en la red c.

La corriente compleja en sí puede denotarse de muchas maneras, pero en todo este libro se usa una notación de un solo subíndice: la corriente se identifica con la letra I , a la que se agrega un solo subíndice, I_a , I_1 , I_2 ... La magnitud o módulo de la corriente compleja I_x se indica $|I_x|$. De modo similar, es necesario asignar un sentido, *positivo* a las diferencias de potencial entre pares de puntos del circuito, lo que en este volumen se hace mediante una flecha de dos puntas con el signo + aplicado en un extremo. Las dos puntas de la flecha indican los puntos del circuito a que se refiere la tensión y ésta tomase como positiva cuando el extremo con signo + está a un potencial más alto que el del extremo opuesto.

La tensión compleja se identifica con la notación E seguida por un solo subíndice, E_a , E_1 , E_2 , mientras que la magnitud se indica con $|E_x|$.

Estas convenciones están ilustradas en las Figs. 3-1a y b, para la tensión y la corriente, respectivamente. La aplicación de esta notación se aclara considerando el circuito de la Fig. 3-1c. Antes de que sea posible una solución cualquiera, es preciso asignar los sentidos positivos arbitrarios a las tensiones y corrientes. Una de las maneras de hacerlo es la indicada en la Fig. 3-1d.

Consideremos el problema de expresar la tensión que aparece a través de Z_3 en términos de las corrientes I_1 e I_2 . El sentido en que apunta la flecha de I_1 es tal que cuando esta corriente es positiva ella hace que el extremo superior de Z_3 esté a un potencial más elevado que el del extremo inferior; dado que el extremo superior de E_1 está marcado +, la componente de E_1 causada por I_1 es $+I_1 Z_3$.

El sentido de la flecha de I_2 , en cambio, es tal que la corriente positiva hace que el extremo superior de Z_3 esté a un potencial inferior

al del extremo inferior. Entonces, la componente de E_1 causada por I_2 es $-I_2 Z_3$. Luego

$$E_1 = I_1 Z_3 - I_2 Z_3 = (I_1 - I_2) Z_3$$

3-2. Reglas de las tensiones de Kirchhoff; análisis de mallas. La regla de las tensiones de Kirchhoff puede expresarse diciendo que: *La suma algebraica de todas las tensiones a lo largo de un camino cerrado (lazo) cualquiera de una red es nula.*

Como aplicación directa de esta regla, tomemos el circuito de la Fig. 3-2. Nos proponemos determinar la corriente que circula por Z_2 . Dos de los lazos, o mallas, que pueden elegirse para resolver este problema son los indicados por las flechas de las corrientes I_1 e I_2 . Debe insistirse nuevamente en que la asignación de los sentidos positivos de las corrientes y las tensiones es arbitraria.

La aplicación de la regla de las tensiones a los dos lazos da:

$$\text{Malla 1: } (Z_a + Z_1)I_1 + Z_3(I_1 - I_2) - E_a = 0 \quad (3-1)$$

$$\text{Malla 2: } (Z_2 + Z_b)I_2 + Z_3(I_2 - I_1) + E_b = 0 \quad (3-2)$$

Los términos pueden reunirse o reagruparse de la manera más conveniente. Dado que las dos ecuaciones son lineales, se las puede resolver fácilmente con el método de los determinantes; para ello se hace el reagrupamiento de manera que en el primer miembro las columnas verticales contengan las mismas corrientes y que las tensiones aparezcan todas en el segundo miembro. Así,

$$(Z_a + Z_1 + Z_3)I_1 - Z_3 I_2 = E_a \quad (3-3)$$

$$-Z_3 I_1 + (Z_2 + Z_3 + Z_b)I_2 = -E_b \quad (3-4)$$

Las ecuaciones (3-3) y (3-4) escribense a menudo en la forma simplificada

$$Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 = E_1 \quad (3-3a)$$

$$Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 = E_2 \quad (3-4a)$$

donde Z_{11} y Z_{22} son las sumas de todas las impedancias de las respectivas mallas, esto es,

$$Z_{11} = Z_a + Z_1 + Z_3 \quad Z_{22} = Z_2 + Z_3 + Z_b$$

$$Z_{12} = Z_{21} = -Z_3$$

Luego, aplicando la regla de Cramer,

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} Z_{11} & E_1 \\ Z_{21} & E_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{vmatrix}} = \frac{Z_{11}E_2 - Z_{21}E_1}{Z_{11}Z_{22} - Z_{21}Z_{12}} \quad (3-5)$$

$$= \frac{Z_3 E_a - (Z_a + Z_1 + Z_2) E_b}{(Z_a + Z_1)(Z_2 + Z_3 + Z_b) + Z_3(Z_2 + Z_b)} \quad (3-5a)$$

3-3. Generalización para una red de p mallas. Puede demostrarse que una red compuesta de B ramas y N empalmes o nodos tiene siempre p mallas independientes, siendo $p = B - N + 1$. Estas redes se llaman a menudo redes de p mallas y quedan descritas por un sistema de p ecuaciones simultáneas, cada una de las cuales tiene la forma general indicada en las Ecs. (3-3a) y (3-4a), esto es,

$$\begin{aligned} Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 + Z_{13}I_3 + \cdots + Z_{1p}I_p &= E_1 \\ Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 + Z_{23}I_3 + \cdots + Z_{2p}I_p &= E_2 \\ \vdots &\vdots \\ Z_{p1}I_1 + Z_{p2}I_2 + Z_{p3}I_3 + \cdots + Z_{pp}I_p &= E_p \end{aligned} \quad (3-6)$$

donde hay una ecuación para cada malla independiente. Cada uno de los coeficientes de impedancia que aparece en estas ecuaciones tiene un significado especial que consideraremos en seguida.

3-4. Impedancia de malla. Tomemos como malla 1 la malla a la cual se ha asignado la corriente I_1 . Luego, si todas las mallas de la red, excepto la malla 1, se abren, todas las corrientes de malla se anulan excepto I_1 , y de la primera ecuación obtiénesentonces

$$Z_{11} = \left(\frac{E_1}{I_1} \right)_{I_n=0} \quad n = 2, 3, 4, \dots, p \quad (3-7)$$

Por tanto, Z_{11} es la impedancia total de la malla 1 cuando todas las otras mallas están abiertas. De otro modo, Z_{11} es la suma de todas las impedancias por las cuales fluye la corriente I_1 y se llama impedancia de malla o de lazo, o autoimpedancia. Del mismo modo, Z_{22} es la impedancia de malla de la malla 2, es decir, la malla a la cual ha sido asignada arbitrariamente la corriente 2 y es igual a $(E_2/I_2) I_n = 0, n = 1, 3, 4, \dots, p$. En general, Z_{mm} es la impedancia de malla de la malla m . Como ejemplo específico, en la Fig. 3-3 es $Z_{22} = Z_b + Z_c + Z_d + Z_e$.

3-5. Impedancia mutua. Supongamos que todas las mallas de la red descrita por las Ecs. (3-6) están abiertas, excepto la 2. Luego, todas las corrientes excepto I_2 son nulas, y obsérvese entonces que la tensión inducida en la malla 1, que llamaremos E'_1 , es $E'_1 = Z_{12}I_2$, ó

$$Z_{12} = \left(\frac{E'_1}{I_2} \right)_{I_n=0} \quad n = 1, 3, 4, \dots, p \quad (3-8)$$

Así, Z_{12} es la relación entre la tensión inducida en la malla 1 y la corriente que circula por la malla 2, con todas las mallas excepto la 2 en circuito abierto, y se la denomina "impedancia mutua" entre las mallas 1 y 2. Esta tensión podría medirse conectando un voltímetro (teóricamente de impedancia interna infinita y capaz de medir fase al mismo tiempo que tensión) entre los extremos abiertos de la malla 1 y haciendo pasar una corriente conocida por la malla 2.

De igual manera defínense los demás coeficientes del tipo Z_{mn} de las Ecs. (3-6), cada uno de los cuales es la impedancia mutua entre las mallas m y n . Por ejemplo, la impedancia mutua entre las mallas 3 y 2 de la Fig. 3-3a podría medirse de la manera indicada en la Fig. 3-3b y estaría dada por la relación $Z_{32} = E'_3/I_2$, medida por el voltímetro V .

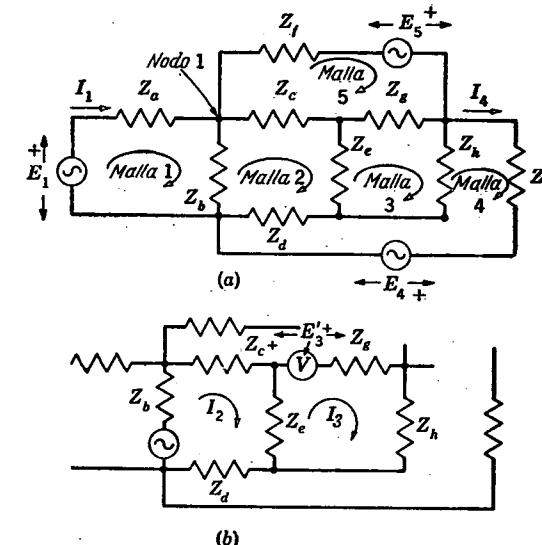


FIG. 3-3. (a) Red de múltiples mallas. (b) Método para determinar la impedancia mutua entre la segunda y la tercera malla.

El estudiante observará en la Fig. 3-3b que $E'_3 = -Z_e I_2$, es decir, que

$$Z_{32} = -Z_e$$

Por consecuencia, la impedancia mutua Z_{mn} entre las mallas m y n viene a ser igual a la suma de todas las impedancias por las cuales fluyen simultáneamente las corrientes I_m e I_n en la red original. La impedancia mutua es positiva si los sentidos positivos de las dos corrientes coinciden en los elementos de impedancia comunes y negativa en caso contrario. Resulta además que cuando una red contiene sólo elementos pasivos, tales como resistores, capacitores e inductores, la impedancia mutua es bilateral, esto es, $Z_{mn} = Z_{nm}$.

En los casos en que la impedancia mutua se debe a una inductancia mutua, hay que tener mucho cuidado al determinar su signo, puesto que hay que considerar, además de los sentidos positivos de las corrientes, los sentidos de arrollamiento de las dos bobinas.

Cuando se dispone de un diagrama figurativo de la bobina, como el de la Fig. 3-4a, no hay ambigüedad; puede aplicarse la ley de Lenz para determinar el signo asociado con la impedancia mutua. En gene-

ral, sin embargo, no se dispone de semejante diagrama y se requiere cierta notación adicional para aportar la misma información. A este fin, en el presente libro, indicaremos los extremos de arrollamiento de igual polaridad por medio de un punto grueso, como lo ilustra la Fig. 3-4b.¹ Una vez conocidas las posiciones de estos puntos, el signo de la impedancia mutua puede establecerse mediante las reglas siguientes:

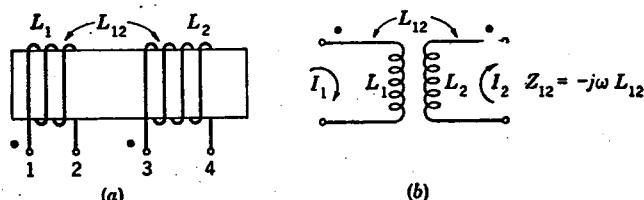


FIG. 3-4. Determinación del signo de la impedancia mutua entre dos circuitos acoplados por medio de una inductancia mutua.

1. La inductancia mutua L_{mn} se toma siempre como positiva.
2. Si los sentidos positivos de I_m e I_n entran (o salen) ambos por los extremos marcados con los puntos, la impedancia mutua es positiva, es decir, $Z_{mn} = j\omega L_{mn}$. Si los sentidos positivos arbitrarios son tales que uno entra y otro sale del terminal marcado con el punto, la impedancia mutua es negativa. Así, por ejemplo, en la Fig. 3-4b, la impedancia mutua es $-j\omega L_{12}$.

3-6. Resumen: ecuaciones de malla. Los resultados de los párrafos anteriores pueden resumirse en un juego de reglas que permiten escribir el sistema de p ecuaciones simultáneas que describe toda red de p mallas. En la ecuación de la malla de orden m :

1. El coeficiente de I_m es la suma de todas las impedancias por las cuales fluye I_m y se denota con Z_{mm} la autoimpedancia de la malla m .

2. El coeficiente de I_n , $n \neq m$, es la suma de todas las impedancias por las cuales fluyen simultáneamente I_m e I_n , y se denota Z_{mn} , impedancia mutua entre las mallas m y n . Si I_m e I_n tienen el mismo sentido positivo a través de los elementos mutuos, la impedancia mutua es positiva. En caso contrario, ella es negativa.

3. Las fuentes de tensión de la malla m aparecen en el segundo miembro de la ecuación, con signo positivo si ellas tienen una polaridad supuesta tal que tienden a producir una corriente positiva, y con signo negativo en caso contrario.

Estas reglas pueden aplicarse sucesivamente a todas las mallas, hasta obtener así las p ecuaciones del tipo (3-6). El estudiante observará que estas reglas permiten la escritura directa de las Ecs. (3-3) y (3-4) sin necesidad de escribir las ecuaciones preliminares (3-1) y (3-2), resultantes, estas últimas, de la aplicación directa de las reglas de Kirchhoff.

¹ Pueden también numerarse todos los terminales de bobina según la secuencia de arrollamiento. Así, todos los terminales impares tienen la misma polaridad, como la tienen asimismo todos los terminales pares. Este sistema se usa en el Bell Telephone System.

Las incógnitas en las Ecs. (3-6) son las corrientes I_1, I_2, \dots, I_p , mientras que las magnitudes conocidas son las impedancias y las tensiones. El problema, por tanto, consiste en hallar una o más de las corrientes en términos de las impedancias y las tensiones. Dado que las p ecuaciones son lineales, la solución obtiénesse convenientemente por medio del método de los determinantes. Debido a las limitaciones de espacio, no desarrollaremos aquí la teoría de los determinantes,¹ pero para la solución de las ecuaciones sólo necesitamos unas pocas definiciones. Usaremos la siguiente notación:

Obtiénesse el determinante de las impedancias D incluyendo todas las impedancias en la forma

$$D = \begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \dots & Z_{1p} \\ Z_{21} & Z_{22} & \dots & Z_{2p} \\ Z_{31} & Z_{32} & \dots & Z_{3p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{p1} & Z_{p2} & \dots & Z_{pp} \end{vmatrix} \quad (3-9)$$

Según se ha dicho, si la red contiene sólo elementos bilaterales, $Z_{mn} = Z_{nm}$; por lo tanto, para estas redes, el determinante es simétrico respecto de la diagonal principal. También puede anticiparse que en muchos tipos de redes propios de las comunicaciones, particularmente en las del tipo escalera, muchos términos Z_{mn} son nulos.

El "menor" M_{mn} es el determinante que se obtiene eliminando la fila m y la columna n en el determinante D . El cofactor C_{mn} defíñese en términos del menor M_{mn} mediante la relación $C_{mn} = (-1)^{m+n}M_{mn}$. Luego, según la teoría de los determinantes, la corriente de la malla m de la red de p mallas es

$$I_m = \frac{C_{1m}}{D} E_1 + \frac{C_{2m}}{D} E_2 + \dots + \frac{C_{mm}}{D} E_m + \dots + \frac{C_{pm}}{D} E_p, \quad (3-10)$$

Se observará que el coeficiente de cada tensión en el segundo miembro de la Ec. (3-10) es dimensionalmente una admittance; por lo tanto, adoptando la definición

$$y_{mn} = \frac{C_{mn}}{D} \quad (3-11)$$

se observa que las soluciones para las corrientes de una red de p mallas están dadas por

$$\begin{aligned} I_1 &= y_{11}E_1 + y_{12}E_2 + y_{13}E_3 + \dots + y_{1p}E_p, \\ I_2 &= y_{21}E_1 + y_{22}E_2 + y_{23}E_3 + \dots + y_{2p}E_p, \\ &\vdots \\ I_m &= y_{m1}E_1 + y_{m2}E_2 + y_{m3}E_3 + \dots + y_{mp}E_p, \\ &\vdots \\ I_p &= y_{p1}E_1 + y_{p2}E_2 + y_{p3}E_3 + \dots + y_{pp}E_p, \end{aligned} \quad (3-12)$$

¹ Remitimos al lector a cualquier buen texto de álgebra. Véase, por ejemplo, W. L. Hart, "College Algebra", D. C. Heath and Company, Boston, 1926, o E. A. Guillemin, "The Mathematics of Circuit Analysis", John Wiley & Sons, Inc., New York, 1949.

Las diferentes admitancias que aparecen en estas ecuaciones tienen significación física y reciben nombres especiales, lo que consideraremos a continuación.

3-7. Admitancia e impedancia de malla de excitación.* Supongamos que todas las mallas de la red original estén cerradas pero que al mismo tiempo se han reemplazado todos los generadores, excepto los de la malla m , por sus impedancias internas. De esta manera se eliminan todas las tensiones generadas, de modo que $E_n = 0$, $n \neq m$. De las Ecs. (3-12) obtiene así

$$\begin{aligned} I_m &= y_{mm}E_m & E_n &= 0 & n &\neq m \\ y_{mm} &= \left(\frac{I_m}{E_m} \right)_{E_n=0} & n &\neq m \end{aligned} \quad (3-13)$$

Esta cantidad se denomina "admitancia de excitación de la malla m ".

Por ejemplo, en la Fig. 3-3a, la admitancia de excitación de la primera malla sería la relación $Y_{11} = I_1/E_1$, con las tensiones E_4 y E_5 reducidas a cero, pero con las mallas cerradas, es decir, conectadas como se muestra en la figura.

La recíproca de y_{mm} es una cantidad útil, la impedancia de excitación de la malla m , y será renombrada con el símbolo Z_{mm} . Debe observarse que Z_{mm} no es igual a $Z_{m,m}$, la impedancia de malla. La admitancia de excitación y la impedancia de excitación de una malla cualquiera pueden calcularse en términos de las impedancias de la red original por medio de la Ec. (3-11).

Estas relaciones pueden aclararse considerando como ejemplo el circuito de la Fig. 3-2. La impedancia de excitación de la malla 1, o la impedancia de excitación en los terminales del generador E_1 , esto es, z_{11} , se determina por inspección. Por definición debe reducirse E_2 a cero; luego, reemplazando E_2 por un cortocircuito,

$$z_{11} = Z_a + Z_1 + \frac{Z_3(Z_2 + Z_b)}{Z_3 + Z_2 + Z_b} \quad (3-14)$$

Sugírese que el estudiante compruebe este resultado por medio de los determinantes, usando la Ec. (3-5) como verificación del resultado.

Debe observarse, además, que en los casos especiales en que hay un solo generador conectado al circuito, la impedancia de excitación en los terminales del generador se llama a menudo "impedancia de entrada", y su recíproca, "admitancia de entrada". La notación puede ser la misma que para el caso general o Z_{in} e Y_{in} , respectivamente.

3-8. Admitancia e impedancia de malla de trasferencia. Las restantes admitancias de las Ecs. (3-12) son de la forma general y_{nm} . Siguiendo el mismo método que en el apartado anterior, supongamos que todas las mallas de la red están cerradas y que todos los generadores excepto E_m han sido reemplazados por sus impedancias internas. En estas condiciones, de la Ecs. (3-12),

* Adoptaremos en esta versión las denominaciones "admitancia de excitación" e "impedancia de excitación" para referirnos a las que en inglés se llaman, respectivamente, "driving-point admittance" y "driving-point impedance". (N. del T.)

$$\begin{aligned} I_n &= y_{nm}E_m & E_n &= 0 & n &\neq m \\ y_{nm} &= \left(\frac{I_n}{E_m} \right)_{E_n=0} & n &\neq m \end{aligned} \quad (3-15)$$

Esta cantidad se denomina "admitancia de trasferencia" entre las mallas m y n . Por ejemplo, en la Fig. 3-3a, la admitancia de trasferencia entre la primera y la cuarta malla sería $y_{41} = I_4/E_1$, con las tensiones E_4 y E_5 reducidas a cero, pero con las mallas cerradas como en la figura. La recíproca de y_{nm} es la "impedancia de trasferencia" y se designará con z_{nm} . Los valores de estas dos cantidades pueden determinarse a partir de las impedancias de la red por medio de la Ec. (3-11). Debe observarse que la impedancia de trasferencia z_{nm} *no* es igual a la impedancia mutua Z_{nm} . Podemos usar nuevamente el circuito de la Fig. 3-2 para ilustrar este concepto. Haciendo $E_2 = 0$ en la Ec. (3-5) tenemos

$$z_{21} = \frac{E_1}{I_2} = \frac{(Z_a + Z_1)(Z_2 + Z_3 + Z_b) + Z_3(Z_2 + Z_b)}{Z_3} \quad E_2 = 0 \quad (3-16)$$

La recíproca es y_{21} .

3-9. Resumen. Los resultados de los apartados anteriores pueden resumirse del siguiente modo: Si se aplica la regla de las tensiones de Kirchhoff sucesivamente a las p mallas independientes de una red, obtiénense p ecuaciones lineales simultáneas del tipo general

$$Z_{m1}I_1 + Z_{m2}I_2 + \cdots + Z_{mm}I_m + \cdots + Z_{mp}I_p = E_m$$

donde Z_{mm} es la autoimpedancia de la malla m y todas las demás impedancias son las impedancias mutuas entre la malla m y las demás mallas de la red.

De las p ecuaciones de tensión pueden despejarse los valores de las p corrientes de malla, obteniéndose para cada una de éstas una expresión del tipo general

$$I_m = y_{m1}E_1 + y_{m2}E_2 + \cdots + y_{mm}E_m + \cdots + y_{mp}E_p$$

En esta ecuación de corriente y_{mm} es la admitancia de excitación de la malla m , y todas las otras admitancias son las admitancias de *trasferencia* entre la malla m y las demás mallas de la red.

En los sistemas de comunicación utilizan las redes de mallas múltiples para conectar un generador a una carga. Como consecuencia, dos son las corrientes de mayor interés: la corriente en el generador y la corriente en la carga. En tales casos, las dos impedancias importantes son la impedancia de excitación de la malla de entrada y la impedancia de trasferencia entre la malla de entrada y la de salida, dado que estas cantidades relacionan la corriente deseada en la carga con la tensión del generador.

3-10. Generadores de corriente. Aunque los métodos del análisis de mallas pueden utilizarse para resolver cualquier problema de red, el método nodal es a menudo más fácil de aplicar y puede resultar más útil en un problema dado. En este último método es preferible tra-

jar con generadores de corriente más bien que con generadores de tensión.

Los generadores de corriente aparecen difícilmente en la práctica, salvo el caso de las válvulas pentódicas; no obstante, cualquier generador de tensión puede ser reemplazado por un generador de corriente

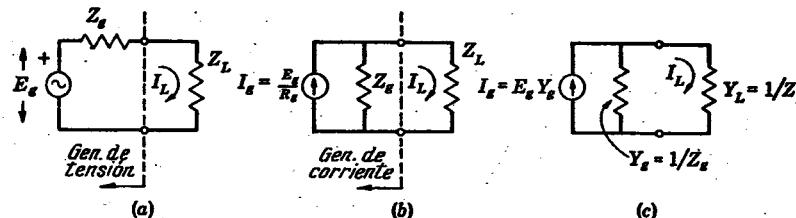


FIG. 3-5. Generadores de tensión y de corriente que producen la misma corriente en la carga.

a los fines del análisis sin alterar las condiciones en la carga. Por ejemplo, la Fig. 3-5a muestra un generador de tensión con una tensión generada E_g y una impedancia interna Z_g , conectado a una carga Z_L . En b, el generador de tensión ha sido reemplazado por un generador de corriente constituido por una fuente de corriente de valor $I_g = E_g/Z_g$ en paralelo con la impedancia del generador original Z_g . El estudiante puede comprobar fácilmente que los dos generadores producen la misma corriente I_L en la carga Z_L , siempre que permanezcan inalterados Z_g y E_g .

En el análisis nodal se prefiere el uso de las admitancias en lugar de las impedancias por razones de conveniencia. La Fig. 3-5c muestra el circuito con generador de corriente después de reemplazar las impedancias por admitancias. El valor de I_L es el mismo en los tres circuitos de la figura.

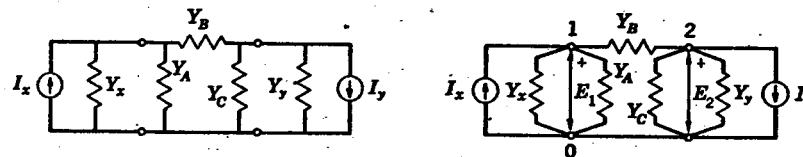


FIG. 3-6. Circuito para ilustrar el análisis nodal.

3-11. Regla de las corrientes de Kirchhoff; análisis nodal. La regla de las corrientes de Kirchhoff puede enunciarse diciendo: *La suma algebraica de todas las corrientes que concurren a un nudo es cero.*

Como aplicación directa de la regla, consideremos el circuito de la Fig. 3-6. La tensión a través de la admittance Y_C debe ser determinada en términos de las corrientes conocidas I_x e I_y y de las admittancias. El circuito se vuelve a dibujar en b para ilustrar una posible elección de los nudos y una posible asignación de polaridades positivas para las tensiones que aparecen entre los nudos 1 y 2 y el nudo de referencia

identificado como 0. La aplicación de la regla de las corrientes a los nudos 1 y 2 da

$$\text{Nudo 1: } (Y_x + Y_A)E_1 + Y_B(E_1 - E_2) - I_x = 0 \quad (3-17)$$

$$\text{Nudo 2: } (Y_C + Y_y)E_2 + Y_B(E_2 - E_1) + I_y = 0 \quad (3-18)$$

Los términos pueden ser ahora reagrupados y combinados de modo conveniente para la solución por medio de los determinantes. Así

$$(Y_x + Y_A + Y_B)E_1 - Y_B E_2 = I_x \quad (3-19)$$

$$-Y_B E_1 + (Y_B + Y_C + Y_y)E_2 = -I_y \quad (3-20)$$

Las dos últimas ecuaciones se simplifican a menudo en la forma

$$Y_{11}E_1 + Y_{12}E_2 = I_x \quad (3-19a)$$

$$Y_{21}E_1 + Y_{22}E_2 = I_y \quad (3-20a)$$

donde Y_{11} e Y_{22} son las sumas de todas las admitancias directamente conectadas a los respectivos nodos e Y_{12} , la suma de las admitancias conectadas entre los dos nodos, es decir,

$$Y_{11} = Y_x + Y_A + Y_B \quad Y_{22} = Y_B + Y_C + Y_y \quad (3-20b)$$

$$Y_{12} = Y_{21} = -Y_B$$

Aplicando la regla de Cramer, la tensión buscada, E_2 , es

$$E_2 = \frac{\begin{vmatrix} Y_{11} & I_x \\ Y_{21} & I_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{vmatrix}} = \frac{Y_{11}I_2 - Y_{21}I_1}{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}}$$

$$= \frac{Y_B I_x - (Y_x + Y_A + Y_B)I_y}{(Y_x + Y_A)(Y_B + Y_C + Y_y) + Y_B(Y_C + Y_y)} \quad (3-21)$$

3-12. Generalización para una red de $(p + 1)$ nudos. Puede demostrarse que toda red de nudos múltiples con $(p + 1)$ nudos todos ellos *acoplados conductivamente* queda descrita por un sistema de p ecuaciones nodales independientes. Por lo tanto, un nudo cualquiera puede elegirse como "común" o nudo de "referencia" y pueden escribirse p ecuaciones en términos de las tensiones entre todos los demás nudos y el nudo de referencia. Cada una de estas ecuaciones tendrá la forma general de las Ecs. (3-19a) y (3-20a), y el sistema de p ecuaciones tendrá la forma

$$Y_{11}E_1 + Y_{12}E_2 + Y_{13}E_3 + \cdots + Y_{1p}E_p = I_1$$

$$Y_{21}E_1 + Y_{22}E_2 + Y_{23}E_3 + \cdots + Y_{2p}E_p = I_2$$

$$Y_{31}E_1 + Y_{32}E_2 + Y_{33}E_3 + \cdots + Y_{3p}E_p = I_3 \quad (3-22)$$

$$\cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots$$

$$Y_{p1}E_1 + Y_{p2}E_2 + Y_{p3}E_3 + \cdots + Y_{pp}E_p = I_p$$

Cada uno de los coeficientes de admittance que aparecen en estas ecuaciones tiene un significado especial, el que consideraremos a continuación

3-13. Admitancia de nudo. En las Ecs. (3-22), se supone que E_1 es la diferencia de potencial entre el nudo 1 y el nudo de referencia, que E_2 es la diferencia de potencial entre el nudo 2 y el nudo de referencia, etc. Luego, si todos los nudos excepto el 1 se ponen en cortocircuito con el nudo de referencia, todas las tensiones son nulas excepto E_1 , y por la primera de las Ecs. (3-22) tiénesse

$$Y_{11} = \left(\frac{I_1}{E_1} \right)_{E_2=0} \quad n = 2, 3, 4, \dots, p \quad (3-23)$$

Así, Y_{11} es la admitancia total entre el nudo 1 y el nudo de referencia, con todos los demás nudos puestos en cortocircuito con el de referencia. Por inspección adviértese en la Fig. 3-6b que $Y_{11} = Y_x + Y_4 + Y_n$, es decir, igual a la suma de todas las admitancias directamente unidas al nudo 1. Esta cantidad se llama "autoadmitancia" del nudo 1. De modo similar, Y_{22} es la autoadmitancia del nudo 2 y es la suma de todas las admitancias directamente unidas al nudo 2. En general, Y_{mm} es la autoadmitancia del nudo m . Como ejemplo específico, la autoadmitancia del nudo 1 de la Fig. 3-3a es $Y_{11} = 1/Z_a + 1/Z_b + 1/Z_c + 1/Z_d$.

3-14. Admitancia nodal mutua. Supongamos que todos los nudos, excepto el 2, de la red descrita por las Ecs. (3-22) se ponen en cortocircuito con el nudo de referencia. Entonces anulanse todas las tensiones nodales excepto E_2 y la corriente que pasa del nudo 1 al nudo 2, digamos, I'_1 , es $Y_{12}E_2$. Por lo tanto, Y_{12} , la "admitancia nodal de trasferencia" entre los nudos 2 y 1, es la relación de I'_1 a E_2 , con todos los nudos excepto el 2 en cortocircuito con el nudo de referencia. Ilústrase este concepto en la Fig. 3-7, donde el nudo de referencia se indica con 0. La red original aparece en a, mientras que en b se lo ha vuelto a dibujar para mostrar los nudos 1 y 3 puestos en cortocircuito con el nudo de referencia. La corriente I'_1 que pasa del nudo 1 al nudo 2 podría medirse por medio de un amperímetro (teóricamente de impedancia interna nula y capaz de medir la fase al mismo tiempo que la corriente) intercalando en la rama Y_4 ; la admitancia nodal mutua sería entonces $Y_{12} = -I'_1/E_2$.

El estudiante observará en la Fig. 3-7b que $I'_1 = -Y_4E_2$, es decir,

$$Y_{12} = -Y_4$$

Así, cuando la red contiene sólo elementos pasivos simples, resistores, inductores y capacitores, la admitancia nodal mutua entre dos nudos cualesquiera mn resulta igual a la suma de todas las admitancias conectadas directamente entre los dos nudos. La admitancia nodal mutua es positiva cuando las dos tensiones nodales tienen polaridades asignadas opuestas con respecto al nudo de referencia y negativa en caso contrario. Se deduce que la admitancia nodal mutua entre dos nudos es bilateral, esto es, que $Y_{mn} = Y_{nm}$, cuando la red solo contiene resistores, inductores y capacitores simples. Cuando en la red se utilizan válvulas de alto vacío o transistores (dentro de su zona lineal), es válido el mismo análisis, pero entonces, en general, $Y_{nm} \neq Y_{mn}$.

3-15. Resumen de las ecuaciones nodales. Como en el caso de las ecuaciones de malla, las ecuaciones finales, (3-22), para la red de $(p + 1)$ nudos pueden escribirse por inspección sin necesidad de aplicar primero directamente la regla de las corrientes a los nudos y reagrupar después los términos de las ecuaciones así obtenidas. Por ejemplo, una ligera práctica demuestra que las Ecs. (3-19a) y (3-20a) pueden escribirse de entrada sin escribir primero las ecuaciones preliminares (3-17) y (3-18). Para ello aplicanse sucesivamente a todos

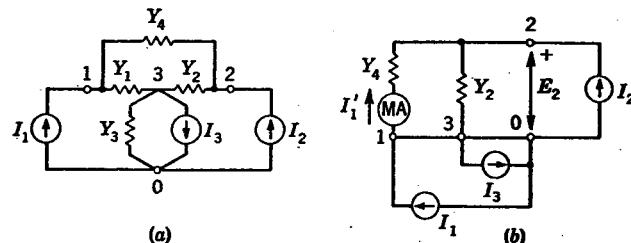


FIG. 3-7. Diagrama de circuito para la determinación de la admitancia nodal mutua entre dos nudos.

los nudos las siguientes reglas, las que resumen las conclusiones anteriores. En la ecuación correspondiente al nudo m :

1. El coeficiente de E_m es la suma de todas las admitancias conectadas directamente al nudo m y puede ser designada como Y_{mm} , la autoadmitancia del nudo m .

2. El coeficiente de E_n , $n \neq m$, es la suma de todas las admitancias que unen directamente el nudo m con el n , y se lo designa con Y_{mn} , la admitancia mutua entre los nudos m y n . (Esta regla no es válida cuando $Y_{mn} \neq Y_{nm}$, vale decir, cuando la red incluye válvulas o transistores, a menos que éstos se reduzcan a sus circuitos equivalentes.) La admitancia nodal mutua es negativa si E_m y E_n tienen las mismas polaridades positivas asignadas respecto del nudo de referencia; de lo contrario, es positiva.

3. Las fuentes de corriente conectadas al nudo m aparecen en el segundo miembro de la ecuación, con signo positivo si su sentido positivo está dirigido hacia el nudo y con signo negativo en caso contrario.

Se presumen conocidas las admitancias y las corrientes en las Ecs. (3-22), de modo que son incógnitas las diversas tensiones nodales. Estas últimas pueden calcularse por medio del método de los determinantes. El determinante de admitancias, D' , se obtiene incluyendo todas las admitancias en la forma

Los menores y los cofactores se obtienen de D' del mismo modo que en el caso del determinante D del análisis de mallas. Siempre que haya posibilidad de confusión, indicaremos con C'_{mn} y M'_{mn} los términos derivados del determinante de admitancias D' . En un problema dado en que no hay tal posibilidad de confusión, se omitirán las tildes.

La solución de las Ecs. (3-22) por el método de los determinantes da la expresión general

$$E_m = \frac{C'_{1m}}{D'} I_1 + \frac{C'_{2m}}{D'} I_2 + \cdots + \frac{C'_{mm}}{D'} I_m + \cdots + \frac{C'_{pm}}{D'} I_p \quad (3-24)$$

Se observará que los coeficientes de los términos de corriente del segundo miembro de la Ec. (3-24) son dimensionalmente impedancias; por lo tanto, definiendo

$$z'_{mn} = \frac{C'_{nm}}{D'} \quad (3-25)$$

la Ec. (3-24) da lugar a las siguientes expresiones para las tensiones nodales en la red de $(p+1)$ nudos:

$$\begin{aligned} E_1 &= z'_{11}I_1 + z'_{12}I_2 + z'_{13}I_3 + \cdots + z'_{1p}I_p \\ E_2 &= z'_{21}I_1 + z'_{22}I_2 + z'_{23}I_3 + \cdots + z'_{2p}I_p \\ &\dots \\ E_m &= z'_{m1}I_1 + z'_{m2}I_2 + z'_{m3}I_3 + \cdots + z'_{mp}I_p \\ &\dots \\ E_p &= z'_{p1}I_1 + z'_{p2}I_2 + z'_{p3}I_3 + \cdots + z'_{pp}I_p \end{aligned} \quad (3-26)$$

Las diversas impedancias que aparecen en estas ecuaciones tienen significación física y reciben denominaciones especiales, lo que consideraremos a continuación.

3-16. Impedancia y admittance nortales de excitación. En la red general descrita por las Ecs. (3-22), supongamos que todos los generadores de corriente, excepto I_m , se reemplazan por sus admitancias internas. Esta condición se obtiene interrumpiendo el circuito de todas las fuentes de corriente, excepto I_m , de modo que $I_n = 0$, $n \neq m$. Por las Ecs. (3-26) se tiene

$$\begin{aligned} E_m &= z'_{mm}I_m \quad I_n = 0 \quad n \neq m \\ z'_{mm} &= \left(\frac{E_m}{I_m} \right)_{I_n=0} \quad n \neq m \end{aligned} \quad (3-27)$$

Esta cantidad denominase "impedancia nodal de excitación" entre el nudo m y el nudo de referencia.

Como ejemplo, la impedancia nodal de excitación entre el nudo 1 y el nudo de referencia en la Fig. 3-7a sería la relación $z'_{11} = E_1/I_1$ abriendo las ramas que contienen I_2 e I_3 .

La reciproca de z'_{mm} es también una cantidad útil, el que se denomina "admitancia nodal de excitación" entre el nudo m y el nudo de referencia, y será representada con el símbolo y'_{mm} . Debe observarse

que y'_{mm} no es igual a la autoadmitancia del nudo, Y_{mm} ; z'_{mm} e y'_{mm} pueden calcularse a partir de las admitancias de la red original por medio de la Ec. (3-25).

Para aclarar estas relaciones, tomemos el circuito de la Fig. 3-6a. La admitancia nodal entre el nudo 1 y el nudo de referencia puede determinarse por inspección: interrumpiendo la rama I_y , tiénesse, por inspección,

$$y'_{11} = Y_x + Y_A + \frac{Y_B(Y_C + Y_v)}{Y_B + Y_C + Y_v} \quad (3-28)$$

El estudiante puede comprobar este resultado aplicando determinantes.

3-17. Impedancia y admittance nortales de trasferencia. Las demás impedancias de las Ecs. (3-26) tienen la forma general z'_{nm} . Se las puede interpretar interrumpiendo todas las fuentes de corriente excepto I_n (dejando las admitancias de los generadores en sus respectivos lugares). En estas condiciones se tiene

$$\begin{aligned} E_n &= z'_{nm}I_m \quad I_n = 0 \quad n \neq m \\ z'_{nm} &= \left(\frac{E_n}{I_m} \right)_{I_n=0} \quad n \neq m \end{aligned} \quad (3-29)$$

Esta cantidad es la "impedancia nodal de trasferencia" entre los nudos m y n . Por ejemplo, en la Fig. 3-7, la impedancia nodal de trasferencia entre los nudos 1 y 2 sería la relación $z'_{21} = E_2/I_1$, con las ramas que contienen I_2 e I_3 abiertas. La reciproca de z'_{21} es la "admitancia nodal de trasferencia" entre los nudos 1 y 2 y se designa con y'_{21} . y'_{21} no es igual a Y_{21} , la admittance mutua entre los nudos 1 y 2.

Puede usarse asimismo el circuito de la Fig. 3-6 para ilustrar este concepto, puesto que poniendo I_y igual a cero se tiene en la Ec. (3-21)

$$y_{21} = \frac{I_x}{E_2} = \frac{(Y_x + Y_A)(Y_B + Y_C + Y_v) + Y_B(Y_C + Y_v)}{Y_B} \quad (3-30)$$

3-18. Resumen. Los resultados de los apartados anteriores pueden resumirse como sigue: La aplicación del análisis nodal a una red que contiene $p+1$ nudos interconectados conductivamente da lugar a un sistema de p ecuaciones simultáneas de la forma general

$$Y_{11}E_1 + Y_{21}E_2 + \cdots + Y_{m1}E_m + \cdots + Y_{p1}E_p = I_x$$

Y_{mm} es la autoadmitancia del nudo m , y las demás admittencias que aparecen en la ecuación son las admittencias mutuas entre el nudo m y los demás nudos de la red.

La solución de las p ecuaciones de corriente por medio del método de los determinantes u otros conduce a ecuaciones que expresan las tensiones desconocidas entre los nudos y el nudo de referencia. Estas ecuaciones tienen la forma general

$$E_m = z'_{m1}I_1 + z'_{m2}I_2 + \cdots + z'_{mm}I_m + \cdots + z'_{mp}I_p$$

donde z'_{mn} es la impedancia nodal de excitación entre el nudo m y el nudo de referencia y las otras impedancias son las impedancias nodales de trasferencia entre el nudo m y los demás nudos de la red.

3-19. Ejemplo. Es evidente que toda red dada puede ser resuelta mediante las ecuaciones de mallas o de nudos, independientemente del tipo de generador, pero los valores computados directamente pueden no re-

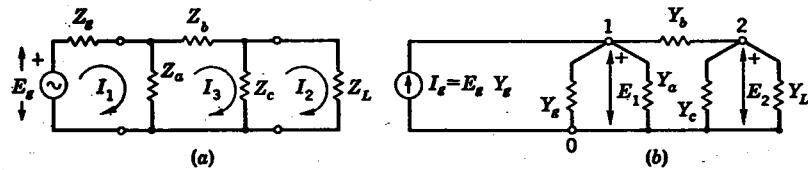


FIG. 3-8. Circuito para comparar el análisis de mallas con el análisis de nudos.

sultar en realidad las características finales deseadas. Como ejemplo, consideremos el caso de una red π intercalada entre un generador y una carga Z_L . El diagrama para el análisis de mallas es el de la Fig. 3-8a. Dado que hay tres mallas, se establecerán tres ecuaciones. Obsérvese que la secuencia de las mallas 1, 2, 3, es arbitraria. Es muy común llamar 1 a la malla de entrada y 2 a la malla de salida. Las tres ecuaciones de malla son

$$\begin{aligned} (Z_a + Z_a)I_1 &= 0 & -Z_aI_3 &= E_g \\ 0 + (Z_c + Z_L)I_2 & & -Z_cI_3 &= 0 \\ -Z_aI_1 & & -Z_cI_2 + (Z_a + Z_b + Z_c)I_3 &= 0 \end{aligned}$$

La admittance de malla de trasferencia entre las mallas de entrada y de salida es, según la Ec. (3-15)

$$\begin{aligned} y_{21} &= \frac{I_2}{E_g} \\ &= \frac{Z_aZ_c}{(Z_a + Z_a)(Z_c + Z_L)(Z_a + Z_b + Z_c) - Z_a^2(Z_c + Z_L) - Z_c^2(Z_a + Z_a)} \end{aligned}$$

y la impedancia de malla de trasferencia z_{21} es igual a $1/y_{21}$.

Para el análisis nodal, el circuito correspondiente es el de la Fig. 3-8b. El único cambio es que se ha reemplazado el generador de tensión constante E_g en serie con su impedancia interna Z_g por un generador de corriente constante I_g en paralelo con la admittance $Y_g = 1/Z_g$, a la vez que para mayor conveniencia las distintas ramas de la red se han designado por sus valores de admittance. Dado que sólo hay dos nodos además del nodo de referencia, sólo dos ecuaciones son necesarias. Éstas son

$$\begin{aligned} (Y_g + Y_a + Y_b)E_1 - Y_bE_2 &= I_g \\ -Y_bE_1 + (Y_b + Y_c + Y_L)E_2 &= 0 \end{aligned}$$

La impedancia nodal de trasferencia es, según la Ec. (3-29)

$$z'_{21} = \frac{E_2}{I_g} = \frac{Y_b}{(Y_g + Y_a + Y_b)(Y_b + Y_c + Y_L) - Y_b^2}$$

y la impedancia nodal de trasferencia, y'_{21} , igual a $1/z'_{21}$.

Obsérvese que la impedancia nodal de trasferencia no da la corriente que circula por la carga, sino más bien la tensión a través de ella para una corriente dada del generador. Hay sin embargo una relación entre las impedancias de trasferencia de malla y nodal, para este circuito, que puede determinarse del modo siguiente:

$$\begin{aligned} I_g &= E_g Y_g \\ E_2 &= \frac{I_L}{Y_L} = \frac{I_2 \text{ (de la Fig. 3-8a)}}{Y_L} \\ z'_{21} &= \frac{E_2}{I_g} = \frac{I_2}{E_g Y_g Y_L} = \frac{1}{z_{21} Y_g Y_L} \\ z'_{21} z_{21} &= Z_g Z_L \end{aligned}$$

Se deja a cargo del estudiante la demostración de la coherencia de estas ecuaciones.

3-20. Dualidad general, redes duales. La comparación de las Ecs. (3-6) y (3-22) revela que existe una simetría formal entre las formas de malla y de nudo del análisis; este hecho puede aprovecharse favorablemente al estudiar ciertos tipos de circuito.

Cuando dos redes exhiben la propiedad por la cual las ecuaciones nodales de una red son similares, término a término, a las ecuaciones de malla de la otra red, intercambiando tensión con corriente e impedancia con admittance, dícese que los dos circuitos exhiben la propiedad de una *dualidad general*. Se hallará que tales circuitos tienen propiedades similares en lo que se refiere a las impedancias en uno y a las admittancias en el otro. Los circuitos de las Figs. 3-2 y 3-6 son dos de tales redes. El primero está descrito por las ecuaciones de malla (3-3) y (3-4), y el segundo, por las ecuaciones nodales (3-19) y (3-20). Estos pares de ecuaciones son iguales término a término si se cambia admittance por impedancia y corriente por tensión.

A menudo hay que considerar redes pasivas duales, por ejemplo, las estructuras T y π . La primera es la porción de la red comprendida entre los terminales indicados en la Fig. 3-2. Poniendo Z_a y Z_b igual a cero con el fin de considerar sólo la estructura de cuatro terminales, se tienen las ecuaciones de malla

$$\begin{aligned} (Z_1 + Z_3)I_1 - Z_3I_2 &= E_a \\ -Z_3I_1 + (Z_2 + Z_3)I_2 &= E_b \end{aligned} \quad (3-31)$$

La porción de red comprendida entre los terminales indicados en la Fig. 3-6 constituye una estructura π . Poniendo Y_x e Y_y igual a cero para considerar sólo la estructura π , obtenemos las ecuaciones de nudo

$$\begin{aligned} (Y_A + Y_B)E_1 - Y_BE_2 &= I_x \\ -Y_BE_1 + (Y_B + Y_C)E_2 &= I_y \end{aligned} \quad (3-32)$$

Puede verse que las Ecs. (3-31) y (3-32) son similares, término a término, con los siguientes intercambios:

$$\begin{aligned} Y_A &\text{ en lugar de } Z_1 & E_a &\text{ en lugar de } I_x \\ Y_C &\text{ en lugar de } Z_2 & E_b &\text{ en lugar de } I_y \\ Y_B &\text{ en lugar de } Z_3 \end{aligned} \quad (3-33)$$

Luego, las redes T y π satisfacen el principio de dualidad general. Demostremos ahora una consecuencia directa de esta proposición. Consideremos la impedancia de excitación de malla $(z_{11})_T$ de la red T y la admittance de excitación nodal $(y'_{11})_\pi$ de la red π . $(z_{11})_T$ puede determinarse resolviendo las ecuaciones de malla para despejar de ellas la relación E_a/I_1 , con $E_b = 0$. Es instructivo, sin embargo, evaluar esta magnitud por inspección: consiste en Z_1 en serie con la combinación en paralelo de Z_2 y Z_3 (con E_b igual a cero), o

$$(z_{11})_T = Z_1 + \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3} \quad (3-34)$$

De modo similar, $(y'_{11})_\pi$ de la red π es I_s/E_1 , con $I_2 = 0$, o, por inspección, Y_A en paralelo con la combinación en serie de Y_B e Y_C ,

$$(y'_{11})_\pi = Y_A + \frac{Y_B Y_C}{Y_B + Y_C} \quad (3-35)$$

Un resultado de la dualidad de las estructuras T y π es inmediatamente aparente en las Ecs. (3-34) y (3-35), $(y'_{11})_\pi$ puede derivarse de la expresión de $(z_{11})_T$ haciendo las sustituciones indicadas en la (3-33).

Otro ejemplo de este principio se obtiene comparando $(z_{12})_T$ con $(y'_{21})_\pi$. Para la primera se tiene, por solución de las Ecs. (3-31),

$$\begin{aligned} (z_{12})_T &= \frac{E_2}{I_1} \quad E_1 = 0 \\ &= \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_1 Z_3}{Z_3} \end{aligned} \quad (3-36)$$

Luego, utilizando el principio de la dualidad general y las sustituciones (3-33), se obtiene para $(y'_{21})_\pi$

$$(y'_{21})_\pi = \frac{Y_A Y_C + Y_A Y_B + Y_C Y_B}{Y_B} \quad (3-37)$$

Se recomienda que el estudiante verifique las dos últimas ecuaciones. Se hallará que el principio de la dualidad general puede simplificar grandemente el estudio de las redes adaptadoras de impedancia.

En ciertos casos, los dos circuitos que satisfacen el principio de dualidad general exhiben además la propiedad por la cual la inductancia, la capacitancia y la resistencia de uno son reemplazadas respectivamente por la capacitancia, la inductancia y la conductancia en el otro. En tales casos, dícese que son *redes duales*, o simplemente, que son *duales*. Esta propiedad de las redes duales se aprovecha en los capítulos sobre filtros y equalizadores.

3-21. Teoremas circuitales. Aunque las leyes de Ohm y Kirchhoff son las herramientas básicas en la resolución de los problemas de red, economízase mucho tiempo recurriendo a ciertos teoremas. Por medio de estos teoremas llega a tal punto la facilidad de resolución de ciertos problemas específicos que se los puede considerar como las "máquinas herramientas" de la teoría de los circuitos redificados. El empleo de

las leyes de Ohm y Kirchhoff en sus formas más simples, en comparación, es como usar lima y sierra cuando puede emplearse un torno.

Hay muchas cosas en la vida común que son respectivamente equivalentes, y una vez que se las ha reconocido como situaciones similares, la experiencia que se consigue enfrentando uno de los casos se extiende rápidamente para la consideración de los problemas similares. Es la capacidad para reconocer la posibilidad de aplicar procedimientos conocidos a situaciones aparentemente nuevas lo que permite que algunos individuos hagan en la vida tanto más que otros.

Del mismo modo, si hay ciertas similitudes fundamentales entre nuevas y complicadas estructuras por una parte y redes más sencillas por la otra, no hay por qué empezar desde el principio cada vez que se presenta un nuevo problema. Los teoremas estudiados en este capítulo ponen de relieve estas similitudes. Tal vez el más importante de todos estos teoremas es el de superposición.

3-22. Teorema de superposición. Este principio establece que: *En toda red compuesta de impedancias lineales, la corriente que pasa por un punto es igual a la suma de todas las corrientes que pasarían por el mismo punto si cada generador fuera considerado independientemente, reemplazando al mismo tiempo todos los demás generadores por sus respectivas impedancias internas.*

Este teorema puede demostrarse rigurosamente sobre la base de lo expuesto en los apartados anteriores. Consideremos un circuito de mallas múltiples en el que el número de mallas independientes es p . Luego, por complicada que sea, la red queda descrita por un sistema de p ecuaciones simultáneas como el (3-6). Además, por la Ec. (3-10), la corriente en una malla cualquiera m es

$$I_m = \frac{C_{1m}E_1}{D} + \frac{C_{2m}E_2}{D} + \dots + \frac{C_{mm}E_m}{D} + \dots + \frac{C_{pm}E_p}{D}$$

Esta solución constituye una prueba del teorema de superposición, ya que cada término del segundo miembro expresa la contribución de cada tensión individual a la corriente total I_m en términos de la impedancia de malla de excitación o de la impedancia de malla de transferencia, y demuestra que esta contribución es independiente de las demás tensiones. Se deja al estudiante, como ejercicio, la demostración de la forma dual del teorema, esto es: En toda red constituida por impedancias lineales y generadores de corriente, la tensión entre un nudo cualquiera y el nudo de referencia es la suma de todas las tensiones que aparecerían entre estos dos nudos si cada generador de corriente se considerara independientemente, reemplazando al mismo tiempo todos los demás generadores por sus respectivas admitancias internas.

El uso del teorema de superposición permite la solución de las redes sin necesidad de plantear un gran número de ecuaciones simultáneas porque sólo se necesita considerar un generador por vez. Otra ventaja del teorema de superposición es que, si se introducen nuevos generadores en el sistema, no es necesario comenzar de nuevo desde el principio. Un ejemplo en el que se da este caso es el de una línea telefónica expuesta a una interferencia inductiva.

Si las tensiones introducidas son de diferentes frecuencias, el teorema de superposición permite obtener una solución para cada frecuencia individual y cada solución es independiente de las demás. Por consiguiente, las corrientes de una frecuencia circulan por la red como si las demás frecuencias se hallaran ausentes, siempre que las impedancias de la red sean lineales.

Otras aplicaciones típicas del teorema de superposición quedarán ilustradas en las demostraciones de algunos de los siguientes teoremas de circuito.

3-23. Teorema de reciprocidad. En todo sistema compuesto de impedancias lineales, si se aplica una tensión E entre dos terminales cualesquiera y se mide la corriente I debida a la tensión E en una rama cualquiera, su relación (la impedancia de trasferencia) es igual a la relación que se obtiene intercambiando las posiciones de E e I . La demostración de este teorema es consecuencia inmediata de los resultados obtenidos en los apartados anteriores. Una red lineal bilateral contiene sólo elementos R , L , C , lineales; por lo tanto, las dos impedancias de trasferencia

$$z_{mn} = \frac{D}{C_{nm}} \quad \text{y} \quad z_{nm} = \frac{D}{C_{mn}}$$

son iguales.

En la aplicación del teorema de reciprocidad debe observarse que no se intercambie impedancia alguna al hacer el intercambio de E e I . El teorema no es aplicable en el caso del intercambio de un generador con impedancia interna y la impedancia de carga, a menos que estas dos impedancias sean iguales.

Una importante conclusión a partir del teorema de reciprocidad es que una red de impedancias bilaterales transmite con igual eficacia en los dos sentidos cuando el generador y la carga tienen la misma impedancia.

3-24. Teorema de compensación (alteración). En una red lineal, si se modifica en la cantidad ΔZ una impedancia Z por la cual circula una corriente I , el incremento de corriente causada por esta modificación en un punto cualquiera de la red es igual al que se produciría al intercalar un generador de fem $I\Delta Z$ en serie con la impedancia modificada.

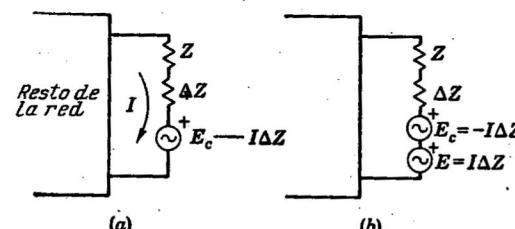


FIG. 3-9. Circuito para la demostración del teorema de compensación.

Consideremos la red de la Fig. 3-9, una de cuyas ramas se muestra en detalle. Introduzcamos una fem de compensación $E_c = -I\Delta Z$ simultáneamente con ΔZ , como se ve en *a*. En estas condiciones, la corriente de esta rama, como las del resto de la red, permanece invariada.

Agreguemos ahora una segunda fem $E = +I\Delta Z$, como en *b*. De acuerdo con el teorema de superposición, se modificarán las corrientes en todo el resto del circuito. Sin embargo, $E + E_c = 0$; luego, el cambio de impedancia ΔZ debe producir por sí solo el mismo efecto que la tensión $E = I\Delta Z$ intercalada en la rama que contiene Z , ΔZ y $E_c = -I\Delta Z$. Dado que E_c compensa exactamente la caída en ΔZ , el teorema queda demostrado. Este teorema simplifica mucho el estudio del efecto de las tolerancias de impedancia en el diseño de las redes.

La aplicación del teorema de compensación en la consideración de las tolerancias en una red puede ilustrarse mediante un sencillo ejemplo de c.c. Se desea calcular la variación en I , en la Fig. 3-10 cuando la resistencia de la derecha aumenta en un 20 por ciento. En el circuito original,

$$I_2 = \frac{10}{150} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{30} \text{ amp}$$

En *b*, la resistencia aumenta a 120 ohm, y, según el teorema de compensación, se agrega en serie una tensión $E = I_2 \Delta R = 2/3$ V. Luego, por el teorema de superposición,

$$\Delta I = \frac{2}{3} \times \frac{1}{170} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{510} \text{ amp}$$

El estudiante puede verificar este resultado por aplicación directa de las reglas de Kirchhoff.

En el apartado siguiente se considera una forma más simple y general de este teorema, la que se denominará teorema de compensación A. Se la introduce a causa de su aplicación en el Cap. IX.

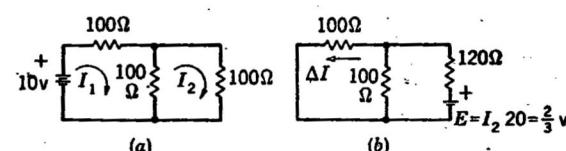


FIG. 3-10. Circuito para ilustrar la aplicación del teorema de compensación.

3-25. Teorema de compensación A. Toda impedancia de una red lineal (o a lineal) puede ser reemplazada por un generador de impedancia interna nula, cuya tensión generada es instante por instante igual a la diferencia de potencial producida a través de la impedancia reemplazada por la corriente que circula por ella.

Consideremos la red de la Fig. 3-11. En la Fig. 3-11a una rama de impedancia Z , por la que circula la corriente I , se considera separadamente del resto del sistema. Las ecuaciones de Kirchhoff determinan todas las corrientes y potenciales del sistema. Estas ecuaciones, expresando la suma algebraica de todas las tensiones a lo largo de una malla, no se alteran si se modifica la red de la Fig. 3-11a en la forma

de la Fig. 3-11b, y, por lo tanto, este cambio no altera las corrientes en el resto del sistema.

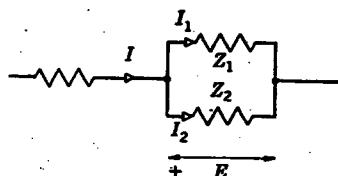
Debe observarse, al aplicar el teorema de compensación A, que si luego se modifica otra parte del sistema es necesario modificar el valor



FIG. 3-11. Redes equivalentes para demostrar el teorema de compensación A.

de E . Obsérvese también que no hay restricción alguna en este teorema en cuanto a tipos de impedancias en la red: ellas pueden ser bilaterales o unilaterales, lineales o alineales.

3-26. Teorema de división de las corrientes. En un circuito pasivo de dos ramas la relación de la corriente de una rama a la corriente total es igual a la impedancia de la otra rama dividida por la suma de las dos impedancias de rama. La prueba de este teorema se reduce a escribir E de la Fig. 3-12 en términos de las corrientes y las impedancias por aplicación de la ley de Ohm.



$$E = I \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} = I_1 Z_1 = I_2 Z_2$$

de donde

$$\frac{I_1}{I} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}, \quad \frac{I_2}{I} = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} \quad (3-38)$$

FIG. 3-12. Circuito para demostrar el teorema de división de las corrientes.

El teorema de la división de corrientes simplifica el análisis de muchos circuitos, particularmente los de los amplificadores valvulares lineales.

3-27. Redes pasivas equivalentes. Es a menudo cierto que el análisis de un problema de circuito puede simplificarse mucho reemplazando alguna porción del circuito original por una red pasiva *equivalente* cuyo comportamiento es ya conocido o fácilmente calculable.

Por definición:

Una red equivalente es una red que, en ciertas condiciones de uso, puede reemplazar a otra red sin efecto sustancial sobre el comportamiento eléctrico. Nota: Si una red puede reemplazar a otra red en un sistema cualquiera sin alterar de modo alguno el funcionamiento eléctrico de la porción del sistema externa a las redes consideradas, dícese que estas redes son "redes de equivalencia general". Si una red puede reemplazar a otra red sólo en cierto sistema en particular sin alterar de modo alguno el funcionamiento eléctrico de la porción del sistema externa a las redes consideradas, dícese que estas redes son "redes de equivalencia limitada". Ejemplos de estas últimas son las redes que son equivalentes sólo para una frecuencia única, para una única banda de frecuencias, en un sentido sola-

mente, o sólo con ciertas condiciones terminales (tales como las redes H y T). (ASA C42 65.06.500.)

Así, dos redes lineales y pasivas pueden decirse *equivalentes* si, cuando se aplican tensiones idénticas (de cualquier valor) a terminales correspondientes de las dos redes, aparecen corrientes idénticas en terminales correspondientes de las dos redes. Este concepto de equivalencia está ilustrado en la Fig. 3-13. Las redes N y N' son *equivalentes* si

$$I_A = I'_A \quad \text{y} \quad I_B = I'_B$$

cuando se aplican las tensiones E_A y E_B de un valor arbitrario cualquiera a ambas redes. De satisfacerse esta condición, la red N puede ser sustituida por la N' sin alterar para nada las porciones restantes del circuito de que forma parte la red N .

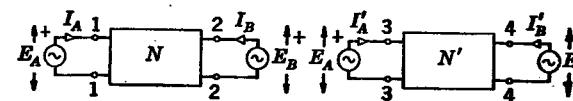


FIG. 3-13. Las redes N y N' son equivalentes si $I_A' = I_A$ e $I_B' = I_B$.

En los apartados siguientes se considerarán las condiciones de equivalencia de redes de dos, tres y cuatro terminales.

3-28. Redes pasivas equivalentes de dos terminales. El más simple ejemplo de equivalencia entre redes es el de la red de dos terminales ilustrado en la Fig. 3-14a. Se desea construir una red que tenga la misma impedancia Z_{in} que la red a . Podría considerarse primero la cuestión de cuantos elementos complejos de impedancia se necesitan para sintetizar Z_{in} a una sola frecuencia. Esta cuestión se responde tomando en cuenta cuántas condiciones han de satisfacerse. En general, si Z_{in} es compleja, las condiciones son dos: se debe obtener la magnitud dada $|Z_{in}|$ y el argumento dado θ_{in} , o, si se prefiere, la parte real dada R_{in} y la parte imaginaria dada X_{in} . Por consecuencia, la impedancia deseada debe tener por lo menos una resistencia y una reactancia. A su vez, estos componentes pueden conectarse en serie, como

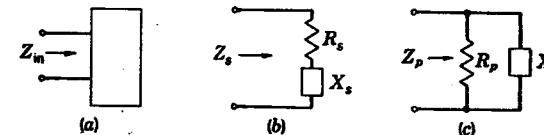


FIG. 3-14. Redes pasivas de dos terminales, equivalentes.

en b, o en paralelo, como en c. Los valores de la forma en serie pueden evaluarse del modo siguiente: Z_s debe ser igual a Z_{in} , de modo que

$$Z_s = R_s + jX_s = Z_{in}/\theta_{in} = |Z_{in}|(\cos \theta_{in} + j \sin \theta_{in})$$

de donde $R_s = |Z_{in}| \cos \theta_{in}$ $X_s = |Z_{in}| \sin \theta_{in}$ (3-39)

La red en paralelo de la Fig. 3-14c puede manipularse más cómodamente en forma de admitancias; entonces Y_p debe ser igual a $1/Z_{in}$, de modo que

$$Y_p = \frac{1}{R_p} - \frac{j}{X_p} = \frac{1}{|Z_{in}|} / -\theta_{in} = \frac{1}{|Z_{in}|} (\cos \theta_{in} - j \sin \theta_{in})$$

de donde $R_p = \frac{|Z_{in}|}{\cos \theta_{in}}$ $X_p = \frac{|Z_{in}|}{\sin \theta_{in}}$ (3-40)

Para que el estudiante no crea que las Ecs. (3-39) y (3-40) son sólo "fórmulas" para memorizar, tomemos un ejemplo típico que ocurre a menudo en el laboratorio.

Debe hacerse un ensayo sobre una línea artificial que debe estar cargada por una impedancia de $500 - j153,5$ ohm a una frecuencia de 796 c/s. Los elementos disponibles para sintetizar esta impedancia son una caja de décadas de resistencias de 1 a 1.000 ohm, y una caja de décadas de capacitancias de 0,001 a 1 μF . Entonces la forma serie de la impedancia será

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \times 796 = 5.000 \text{ radián/seg}$$

$$Z_s = 500 - j153,5$$

$$= R_s - \frac{j}{\omega C_s}$$

Los elementos en serie requeridos son

$$R_s = 500 \text{ ohm}$$

$$C_s = \frac{1}{\omega \times 153,5} = \frac{1}{5 \times 10^3 (1,535 \times 10^3)} = 1.3 \mu\text{F}$$

Puesto que el valor de C_s es mayor que el disponible, es necesario considerar la forma en paralelo de la red.

$$\begin{aligned} Y_p &= \frac{1}{Z} = \frac{1}{523/-17,1^\circ} = 1,911 \times 10^{-3}/17,1^\circ \\ &= (1,827 + j0,561) \times 10^{-3} \\ &= \frac{1}{R_p} + j\omega C_p \end{aligned}$$

Los componentes en paralelo necesarios son

$$R_p = \frac{10^3}{1,827} = 534 \text{ ohm}$$

$$C_p = \frac{0,561 \times 10^{-3}}{5 \times 10^3} = 0,1121 \mu\text{F}$$

Este juego de valores es muy satisfactorio dado que pueden realizarse con una precisión de tres cifras significativas con los elementos disponibles.

En general, dado que las componentes reactivas varían con la frecuencia, la equivalencia es válida para una sola frecuencia. La síntesis de una impedancia compleja sobre una gama extensa de frecuencias

es un problema complicado y requiere por lo general más que los dos elementos usados en el ejemplo anterior.

3-29. Redes pasivas equivalentes de tres terminales. Otra configuración común es la red de tres terminales ilustrada en la Fig. 3-15a, esto es, una red con dos pares de terminales en los que un terminal

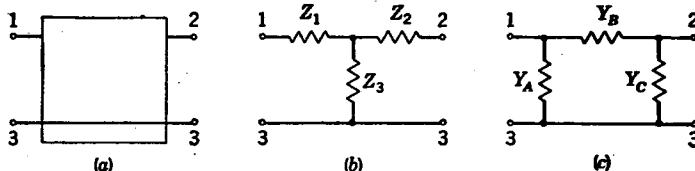


FIG. 3-15. Redes pasivas de tres terminales, equivalentes.

de cada par se hace común por medio de una conexión directa. Puede demostrarse ahora que la definición básica de equivalencia impone algunas restricciones en las impedancias de malla de excitación y de transferencia de las dos redes equivalentes; sean pues N y N' de la Fig. 3-13 dos redes de tres terminales. Para la red N puede escribirse

$$I_A = \frac{E_A}{z_{11}} + \frac{E_B}{z_{12}} \quad I_B = \frac{E_A}{z_{21}} + \frac{E_B}{z_{22}} \quad (3-41)$$

y, para la red N' ,

$$I'_A = \frac{E_A}{z_{33}} + \frac{E_B}{z_{34}} \quad I'_B = \frac{E_A}{z_{43}} + \frac{E_B}{z_{44}} \quad (3-42)$$

Luego, si las corrientes correspondientes han de ser iguales para que pueda establecerse la equivalencia, debe cumplirse que

$$z_{11} = z_{33} \quad z_{22} = z_{44} \quad (3-43)$$

$$z_{12} = z_{34} \quad z_{21} = z_{43} \quad (3-44)$$

Siempre que las redes sean lineales y bilaterales

$$z_{12} = z_{21} \quad z_{34} = z_{43}$$

y las Ecs. (3-44) pueden ser reemplazadas por la única condición

$$z_{12} = z_{34} \quad (3-45)$$

Se deduce de las Ecs. (3-43) y (3-45) que las dos redes serán también equivalentes si tienen idénticas impedancias de malla de excitación y de transferencia. Esta condición es necesaria y suficiente para la equivalencia; por lo tanto, podrá diseñarse una red equivalente si se conocen estas tres impedancias en la red original.

Supongamos que queremos diseñar una red de tres terminales que sea equivalente a la red original de la Fig. 3-15a. En interés de la economía, la red equivalente debe contener el mínimo número de elementos que sea posible. Puede encontrarse este número mínimo siguiendo dos líneas de razonamiento. Primero, para establecer la equivalencia hay que satisfacer tres condiciones de diseño (dos impedancias

de excitación y una de trasferencia); por lo tanto, la red equivalente debe contener por lo menos tres elementos independientes. En general, las impedancias especificadas son complejas, de modo que los tres elementos desconocidos resultarán también complejos. Segundo, si el estudiante trata de interconectar tres terminales con elementos de impedancia, encontrará que sólo puede usar tres elementos sin poner dos o más de ellos en serie o en paralelo entre un mismo par de terminales. Encontrará también que los tres elementos pueden disponerse como una T o como una π , según se ve en b y c en la Fig. 3-15. En la electrotecnia, estas configuraciones se denominan "estrella" y "delta", respectivamente. Luego, puede diseñarse como equivalente a la red original tanto una red T como una red π .

El diseño de una red equivalente T o π sobre esta base es particularmente ventajoso cuando se conoce la estructura interna de la red original, pues entonces los elementos desconocidos pueden calcularse en términos del determinante de impedancias y los cofactores de la red original.¹

Como ilustración, supongamos que la red original contenga p mallas y que éstas se numeran de modo que la malla 1 incluya la entrada y la malla 2, la salida. La red queda entonces descrita por las Ecs. (3-6), excepto porque ahora son nulas todas las tensiones excepto E_1 y E_2 , ya que la red en sí es pasiva. Las corrientes de entrada y de salida son entonces, según la Ec. (3-10),

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{C_{11}}{D} E_1 + \frac{C_{12}}{D} E_2 = \frac{E_1}{z_{11}} + \frac{E_2}{z_{12}} \\ I_2 &= \frac{C_{12}}{D} E_1 + \frac{C_{22}}{D} E_2 = \frac{E_1}{z_{12}} + \frac{E_2}{z_{22}} \end{aligned} \quad (3-46)$$

Luego, si queremos que la red π de la Fig. 3-15c sea equivalente a la red original, podemos escribir

$$\begin{aligned} I_1 &= (Y_A + Y_B)E_1 + Y_B E_2 \\ I_2 &= +Y_B E_1 + (Y_B + Y_C)E_2 \end{aligned} \quad (3-47)$$

y se tiene finalmente

$$Z_A = \frac{1}{Y_A} = \frac{D}{C_{11} - C_{12}} \quad Z_C = \frac{1}{Y_C} = \frac{D}{C_{22} - C_{12}} \quad Z_B = \frac{1}{Y_B} = \frac{D}{C_{12}} \quad (3-48)$$

El estudiante deberá consultar la referencia citada al pie para una extensión de estas ideas.

En la técnica de la telecomunicación, las redes de tres terminales pueden tener una longitud física considerable, con los terminales 1 y 3 dispuestos a gran distancia del otro par, 2 y 3. Por esta razón son difíciles las mediciones de impedancia de extremo a extremo. Por consecuencia, si se quiere construir una red equivalente sobre la base

¹ M. B. Reed, General Formulas for "T" and " π " Network Equivalents, Proc. IRE, vol. 33, N° 12, p. 897, diciembre de 1945.

de mediciones practicadas sobre la red original, debe reemplazarse la impedancia de trasferencia por algún otro valor.

Las impedancias de más fácil medición son las impedancias de excitación en circuito abierto y en cortocircuito en cada par de terminales. En este libro se designarán esas impedancias con los símbolos siguientes, de uso muy común:

Z_{o1} = impedancia de entrada en el extremo 1 con los terminales del extremo 2 abiertos.

Z_{o2} = impedancia de entrada en el extremo 2 con los terminales del extremo 1 abiertos.

Z_{s1} = impedancia de entrada en el extremo 1 con los terminales del extremo 2 en cortocircuito.

Z_{s2} = impedancia de entrada en el extremo 2 con los terminales del extremo 1 en cortocircuito.

Una manera de encarar la síntesis de una sección T que sea equivalente a la red original de tres terminales es la de ver si la impedancia de malla de trasferencia z_{12} queda especificada únicamente en términos de Z_{o1} , Z_{o2} , Z_{s1} y Z_{s2} . Un modo de ataque más directo consiste en comprobar si los elementos de la sección T en sí pueden evaluarse a partir de estas cuatro impedancias. Así, según la Fig. 3-15b,

$$Z_{o1} = Z_1 + Z_3 \quad (3-49)$$

$$Z_{s1} = Z_1 + \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3} \quad (3-50)$$

$$Z_{o2} = Z_2 + Z_3 \quad (3-51)$$

$$Z_{s2} = Z_2 + \frac{Z_1 Z_3}{Z_1 + Z_3} \quad (3-52)$$

Luego, los elementos de impedancia de la sección T equivalente deben ser los siguientes: Reordenando las Ecs. (3-49) y (3-51),

$$Z_1 = Z_{o1} - Z_3 \quad (3-53)$$

$$Z_2 = Z_{o2} - Z_3 \quad (3-54)$$

Introduciendo las Ecs. (3-53) y (3-54) en la Ec. (3-50),

$$Z_{s1} = \frac{Z_{o1} Z_{o2} - Z_{o1} Z_3 - Z_{o2} Z_3 + Z_3^2 + Z_{o1} Z_3 - Z_3^2 + Z_{o2} Z_3 - Z_3^2}{Z_{o2}}$$

En el numerador se cancelan todos los términos excepto dos, de modo que multiplicando por el denominador

$$\begin{aligned} Z_{s1} Z_{o2} &= Z_{o1} Z_{o2} - Z_3^2 \\ Z_3 &= \pm \sqrt{Z_{o2}(Z_{o1} - Z_{s1})} \end{aligned} \quad (3-55)$$

Las Ecs. (3-53) a (3-55) completan el diseño de la sección T equivalente excepto por una ambigüedad en el signo.

Es de interés considerar los productos $Z_{o1}Z_{s2}$ y $Z_{o2}Z_{s1}$. De las Ecs. (3-49) a (3-52),

$$\begin{aligned} Z_{o1}Z_{s2} &= Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + Z_1Z_3 \\ Z_{o2}Z_{s1} &= Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + Z_1Z_3 \end{aligned} \quad (3-56)$$

Por lo tanto $Z_{o1}Z_{s2} = Z_{o2}Z_{s1}$ (3-57)

La Ec. (3-57) muestra que sólo tres de las cuatro impedancias Z_{o1} , Z_{o2} , Z_{s1} y Z_{s2} son independientes y conduce así a otra expresión para Z_3 de la sección T equivalente,

$$Z_3 = \pm \sqrt{Z_{o1}(Z_{o2} - Z_{s2})} \quad (3-58)$$

Puede usarse un procedimiento similar para evaluar los componentes de la red π equivalente a la red original de la Fig. 3-15. Una vez más, tratándose de una red π , es preferible trabajar con admitancias; de la Fig. 3-15c

$$\begin{aligned} Y_{o1} &= Y_A + \frac{Y_B Y_C}{Y_B + Y_C} & Y_{o2} &= Y_C + \frac{Y_A Y_B}{Y_A + Y_B} \\ Y_{s1} &= Y_A + Y_B & Y_{s2} &= Y_C + Y_B \end{aligned} \quad (3-59)$$

con las ecuaciones de diseño de la sección π equivalente, excepto por una ambigüedad en el signo, son

$$Y_A = Y_{s1} - Y_B \quad (3-60)$$

$$Y_C = Y_{s2} - Y_B \quad (3-61)$$

$$Y_B = \pm \sqrt{Y_{s2}(Y_{s1} - Y_{o1})} = \pm \sqrt{Y_{s1}(Y_{s2} - Y_{o2})} \quad (3-62)$$

La comparación de las ecuaciones de diseño de la sección π con las de la sección T demuestra, una vez más, que hay una dualidad general entre estos dos tipos de red. Se observará que poniendo Y_A por Z_1 , Y_C por Z_2 , y Y_B por Z_3 , además de intercambiar la admittance de cortocircuito con la impedancia de circuito abierto, se obtienen las ecuaciones de diseño de la sección π a partir de las de la sección T.

En las ecuaciones de diseño anteriores adviéntese que hay ambigüedad en cuanto al signo de Z_3 o Y_B . Esto indica que las ecuaciones de diseño dan dos T o dos π , pero sólo una de cada par puede ser equivalente a la red original. Para resolver esta dificultad se necesita alguna información adicional acerca de la red original. En una importante clase de problemas, obtiéñese esta información conociendo el ángulo de fase entre I_1 e I_2 cuando la red está cargada con una impedancia determinada. Esta situación ilustrase con el ejemplo siguiente:

Las mediciones practicadas sobre una red de tres terminales, a 1 Kc/s, proveen la siguiente información: $Z_{o1} = 10 + j50$ ohm, $Z_{o2} = 5 + j0$ ohm, $Z_{s1} = 510 + j50$ ohm. I_2 está atrasada respecto de I_1 cuando el extremo 2 se termina sobre una carga resistiva. Diseñar la sección T equivalente. Se tiene

$$\pm Z_3 = \pm \sqrt{Z_{o2}(Z_{o1} - Z_{s1})} = \pm \sqrt{5/0^\circ 500/-180^\circ} = \mp j50 \text{ ohm}$$

Solución A. Eligiendo el signo positivo

$$\begin{aligned} Z_3 &= +j50 \text{ ohms} \\ Z_1 &= Z_{o1} - Z_3 = 10 + j0 \text{ ohm} \\ Z_2 &= Z_{o2} - Z_3 = 5 - j50 \text{ ohm} \end{aligned}$$

Estos valores dan la sección T ilustrada en la Fig. 3-16a.

Solución B. Eligiendo el signo negativo,

$$\begin{aligned} Z_3 &= -j50 \text{ ohm} \\ Z_1 &= 10 + j100 \text{ ohm} \\ Z_2 &= 5 + j50 \text{ ohm} \end{aligned}$$

valores que dan la sección T de la Fig. 3-16b.

Los diagramas de fasores de las dos redes, ilustrados también en estas figuras, demuestran que b es el circuito equivalente buscado, ya que en este caso I_2 está atrasada respecto de I_1 .

3-30. Realizabilidad física de las secciones equivalentes. Debe observarse que las ramas de una sección T equivalente a una estructura física no son necesariamente físicamente realizables. Es muy posible que una de esas ramas aparezca con una componente resistiva negativa, es decir, que la impedancia compleja pueda hallarse en cualquiera de los cuatro cuadrantes. Si la red que la sección representa es física, la suma de las RI^2 de todas las ramas es necesariamente positiva, pero puede ser negativo el término RI^2 de una cualquiera de las ramas. La presencia de resistencias negativas en las ramas de una

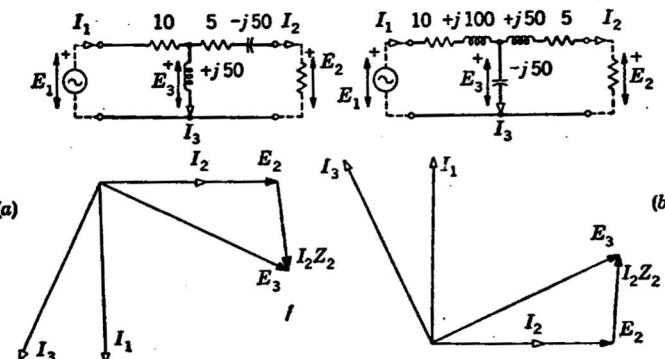


FIG. 3-16. Circuitos con iguales impedancias en circuito abierto y en cortocircuito, pero con diferentes ángulos de fase.

red equivalente no excluye el uso de ésta en los cálculos, puesto que la resistencia negativa no ofrece dificultad alguna en el papel. La estructura equivalente puede también ser realizada físicamente si la rama que contiene resistencia negativa está en serie o en paralelo con una impedancia externa cuya resistencia pueda ser combinada con la resistencia negativa de la red de modo de obtener una impedancia cuya resistencia total es positiva.

3-31. Equivalencia entre las redes T y π . En los apartados anteriores se han derivado secciones T y π equivalentes a la misma red de tres terminales. Luego, en virtud del familiar axioma "cosas igual-

les a la misma cosa son también iguales", no es difícil llegar a la conclusión de que puede diseñarse una sección π equivalente a una sección T dada, y viceversa. Las ecuaciones que relacionan los elementos de impedancia de una T con los elementos de impedancia de una sección π equivalente se conocen con el nombre de "trasformaciones T- π ".

Desde cierto punto de vista, estas trasformaciones han sido ya derivadas, puesto que, dada una sección T, es posible hallar Y_{s1} , Y_{s2} y evaluar así los elementos de la sección π por medio de las Ecs. (3-60) a (3-62). Es sin embargo deseable poner estas trasformaciones en términos explícitos de los elementos componentes, lo que es posible a partir de las ecuaciones anteriores. Emplearemos, no obstante, otro método de derivación, basado en la definición original de la equivalencia, con el fin de ilustrar una manera diferente de encarar el problema.

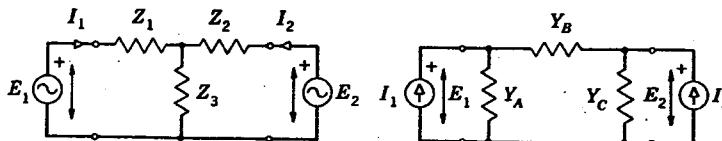


FIG. 3-17. Circuitos para derivar las trasformaciones T- π .

Las redes T y π de la Fig. 3-17 son las que queremos hacer equivalentes. Apliquemos las tensiones E_1 y E_2 de la manera indicada a ambas redes. Se tiene

$$(Y_A + Y_B)E_1 - Y_B E_2 = I_1 \\ - Y_B E_1 + (Y_B + Y_C)E_2 = I_2$$

y por la regla de Cramer,

$$E_1 = \frac{\begin{vmatrix} I_1 & -Y_B \\ I_2 & Y_B + Y_C \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Y_A + Y_B & -Y_B \\ -Y_B & Y_B + Y_C \end{vmatrix}} = \frac{Y_B + Y_C}{Y_T^2} I_1 + \frac{Y_B}{Y_T^2} I_2 \quad (3-63)$$

$$E_2 = \frac{Y_B}{Y_T^2} I_1 + \frac{Y_A + Y_B}{Y_T^2} I_2 \quad (3-64)$$

donde $Y_T^2 = Y_A Y_B + Y_B Y_C + Y_A Y_C$ (3-65)

Las ecuaciones de malla para la red T son

$$(Z_1 + Z_3)I_1 + Z_3 I_2 = E_1 \quad (3-66)$$

$$Z_3 I_1 + (Z_2 + Z_3)I_2 = E_2 \quad (3-67)$$

Por definición, si las dos redes son equivalentes, las tensiones y corrientes correspondientes son iguales; por lo tanto, los coeficientes de los términos correspondientes de las Ecs. (3-63) y (3-66) y de las (3-64) y (3-67) han de ser iguales. Así, despejando las Z obtiénense las trasformaciones π -T

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{Y_C}{Y_T^2} & Z_1 &= \frac{Z_A Z_B}{Z_T} \\ Z_2 &= \frac{Y_A}{Y_T^2} & Z_2 &= \frac{Z_B Z_C}{Z_T} \\ Z_3 &= \frac{Y_B}{Y_T^2} & Z_3 &= \frac{Z_A Z_C}{Z_T} \end{aligned} \quad (3-68)$$

$$Y_T^2 = Y_A Y_B + Y_B Y_C + Y_A Y_C \quad Z_T = Z_A + Z_B + Z_C$$

El estudiante puede demostrar que las correspondientes trasformaciones T- π son

$$\begin{aligned} Y_A &= \frac{Z_2}{Z_T^2} \\ Y_B &= \frac{Z_3}{Z_T^2} & Z_T^2 &= Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_1 Z_3 \\ Y_C &= \frac{Z_1}{Z_T^2} \end{aligned} \quad (3-69)$$

3-32. Redes equivalentes de cuatro terminales. Una red de cuatro terminales, o de dos pares de terminales (Fig. 3-18) puede carecer de la conexión común propia de la red de tres terminales, pero no puede distinguirse de esta última en lo que respecta a las equivalencias, siempre que no exista conexión adicional entre los generadores de entrada y de salida por medio de un tercer conductor, tal como el de masa. Esto es consecuencia del hecho de que las mediciones de las impedancias Z_{s1} , Z_{s2} , Z_{s1} y Z_{s2} se hacen sólo en uno u otro extremo de la red. Para determinar si existe o no una conexión común dentro de

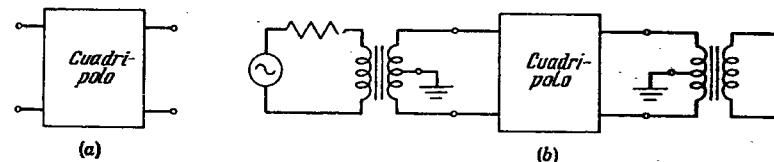


FIG. 3-18. Redes de cuatro terminales o de dos pares de terminales. En b es ilustrada una disposición equilibrada respecto de masa.

la red es necesaria una medición adicional de extremo a extremo. Puede concluirse entonces que es posible diseñar una red T o π que sea equivalente a una red de dos pares de terminales.

El estudiante debe saber que ciertos tipos de red empleados en las comunicaciones, por ejemplo, las líneas telefónicas, se hacen de intento equilibradas respecto de tierra (o masa). Esto significa que los dos lados de la red tienen iguales admitancias en paralelo a tierra e iguales impedancias en serie. Las redes de este tipo funcionan entre generadores que son dispositivos de tres terminales, uno de los cuales va conectado a tierra (en la práctica, sólo por medio de las capacidades dispersas), como se ve en la Fig. 3-18b. Si se reemplaza una red conectada entre dos terminales de estos dispositivos de tres ter-

minales por una red T o π , con el tercer terminal a tierra, el conductor común de la red de sustitución puede destruir el equilibrio original. Para obtener equivalente *equilibrado* para la red de cuatro terminales, sólo es necesario repartir Z_1 y Z_2 , en la red, por partes iguales entre la rama serie superior y la rama serie inferior, con lo que se obtiene una red T o H equilibrada del tipo que ilustra la Fig. 3-19a. Al dividir de modo similar la impedancia serie de una red π obtiénes una red π u O equilibrada, Fig. 3-19b. Se advertirá que estas modificaciones de las estructuras originales no alteran para nada las impedancias de circuito abierto y de cortocircuito ni las ecuaciones de diseño de las redes T y π .

3-33. Red en celosía. Una de las redes de cuatro terminales más frecuentes en la práctica es la red en celosía o puente ilustrada en

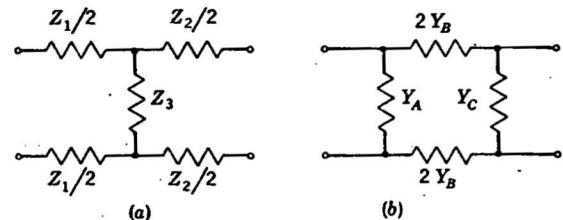


FIG. 3-19. Redes equilibradas. (a) Sección T o H equilibrada. (b) Sección π u O equilibrada.

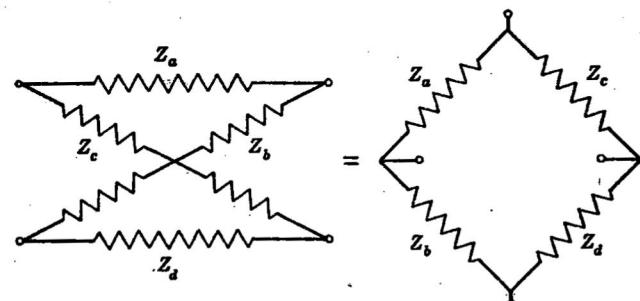


FIG. 3-20. Red en celosía o puente.

la Fig. 3-20. Derivaremos ahora las transformaciones celosía-T en términos de las impedancias componentes. Si aplicamos a la Fig. 3-20 la notación adoptada en el apartado anterior, obténense las siguientes relaciones:

$$Z_{o1} = \frac{(Z_a + Z_b)(Z_c + Z_d)}{Z_a + Z_b + Z_c + Z_d} \quad (3-70)$$

$$Z_{o2} = \frac{(Z_a + Z_c)(Z_b + Z_d)}{Z_a + Z_b + Z_c + Z_d} \quad (3-71)$$

$$Z_{z1} = \frac{Z_a Z_b Z_c + Z_a Z_c Z_d + Z_a Z_d Z_b + Z_b Z_c Z_d}{(Z_a + Z_c)(Z_b + Z_d)} \quad (3-72)$$

$$Z_{z2} = \frac{Z_a Z_b Z_c + Z_a Z_c Z_d + Z_a Z_b Z_d + Z_b Z_c Z_d}{(Z_a + Z_b)(Z_c + Z_d)} \quad (3-73)$$

Luego $Z_{o1} - Z_{z1} = \frac{(Z_b Z_c - Z_a Z_d)^2}{(Z_a + Z_b + Z_c + Z_d)(Z_a + Z_c)(Z_b + Z_d)}$ (3-74)

Introduciendo los resultados de las Ecs. (3-74) y (3-71) en la Ec. (3-55) para obtener una de las ramas de la sección T equivalente,

$$Z_3 = \pm \sqrt{\frac{(Z_b Z_c - Z_a Z_d)^2}{(Z_a + Z_b + Z_c + Z_d)^2}} \quad (3-75)$$

Es de interés observar que la celosía se transforma en una sección π en el caso particular de $Z_d = 0$, de modo que la Ec. (3-75) reduzca correspondientemente a la de la transformación π -T. Se utilizará por lo tanto la raíz positiva, con lo que la Ec. (3-75) deviene

$$Z_3 = \frac{Z_b Z_c - Z_a Z_d}{Z_a + Z_b + Z_c + Z_d} \quad (3-76)$$

Insertando las Ecs. (3-75), (3-70) y (3-71) en las Ecs. (3-53) y (3-54),

$$Z_1 = \frac{Z_a Z_c + 2Z_a Z_d + Z_b Z_d}{Z_a + Z_b + Z_c + Z_d} \quad (3-77)$$

$$Z_2 = \frac{Z_a Z_b + 2Z_a Z_d + Z_c Z_d}{Z_a + Z_b + Z_c + Z_d} \quad (3-78)$$

Las estructuras en celosía se prefieren a veces a las secciones en escalera (redes T y π). Trátase de aplicaciones especiales, de modo que las relaciones de diseño de la estructura en celosía se considerará en un capítulo posterior, después de desarrolladas las relaciones propias de las estructuras repetidas o iterativas.

3-34. Redes activas equivalentes. Si bien la discusión de la equivalencia se ha restringido hasta ahora al caso de las redes pasivas, las mismas ideas básicas son aplicables al caso de las redes que contienen fuentes de tensión o corriente, pero en tales casos es necesaria una nueva definición de equivalencia: *Dícese que dos redes activas son equivalentes si producen la misma corriente en las cargas cuando éstas tienen el mismo valor arbitrario de impedancia.* Ofrecemos a continuación dos teoremas relativos a la equivalencia entre circuitos activos.

3-35. Teorema de Thévenin. *La corriente que circula por una impedancia cualquiera Z_R conectada a dos terminales de una red es la misma que si Z_R estuviera conectada a un generador simple, cuya tensión generada fuera igual a la tensión de circuito abierto entre los terminales en cuestión y cuya impedancia interna es igual a la impedancia que presenta la red entre esos mismos terminales cuando todos sus generadores se reemplazan por sus respectivas impedancias internas.*

En la Fig. 3-21 la parte superior es una representación diagramática del teorema de Thévenin. E_{oc} es la tensión medida entre los terminales 1, 2, con Z_R desconectada, y Z_g es la impedancia medida entre esos mismos terminales mirando hacia la red. Al medir esta impedancia se supone que todos los generadores de la red han dejado de funcionar, es decir, que se los ha reemplazado por las impedancias internas.

La red original puede reducirse a la estructura simple de la Fig.

3-21c, con sólo tres elementos de impedancia y un generador. Si hay más de un generador, el teorema de superposición permite considerar separadamente cada uno de ellos para esta demostración. Una vez que todos ellos han sido reducidos al circuito simple de la derecha, las tensiones generadas quedan conectadas todas en serie y pueden ser reemplazadas por un único generador. La demostración es por lo tanto válida cualquiera que sea el número de generadores de la red.

En la Fig. 3-21c, la solución de la red T da

$$I_2 = \frac{EZ_3}{Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + Z_1Z_3 + Z_R(Z_1 + Z_3)} \quad (3-79)$$

La Ec. (3-79) puede volverse a escribir de manera que Z_R aparezca en el denominador *aisladamente*. Se tiene

$$I_2 = \frac{EZ_3/(Z_1 + Z_3)}{\frac{Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + Z_1Z_3}{Z_1 + Z_3} + Z_R} \quad (3-80)$$

Esta corriente es la misma que la que circula para cualquier valor de Z_R si ésta se conecta a un generador cuya tensión generada es $EZ_3/(Z_1 + Z_3)$ y cuya impedancia interna es $(Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + Z_1Z_3)/(Z_1 + Z_3)$

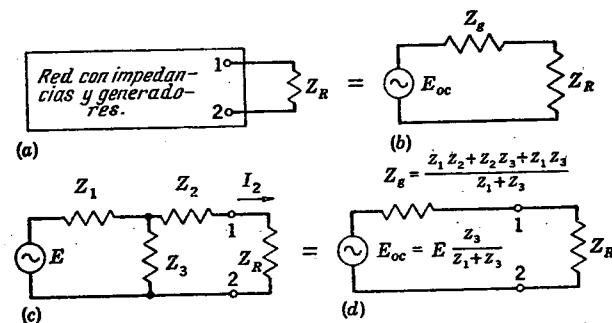


FIG. 3-21. Redes equivalentes según el teorema de Thévenin.

Desconectando Z_R , la tensión entre terminales de la red T sería

$$E_{oc} = E \frac{Z_3}{Z_1 + Z_3} \quad (3-81)$$

y si se desconectara Z_R y se reemplazara E por un cortocircuito, la impedancia entre los terminales 1, 2 sería

$$Z_s = Z_2 + \frac{Z_1Z_3}{Z_1 + Z_3} = \frac{Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + Z_1Z_3}{Z_1 + Z_3} \quad (3-82)$$

Comparando las Ecs. (3-80) a (3-82), adviéntese que la Ec. (3-80) da la corriente que circula cuando Z_R se conecta a un generador cuya

fem es la dada por la Ec. (3-81) y cuya impedancia interna es la dada por la Ec. (3-82). Esto demuestra el teorema de Thévenin.

Si bien el teorema de Thévenin puede aplicarse sin dificultad cuando se conocen los elementos internos y la configuración del generador, encuéntrase en la práctica otro caso en que se necesita un poco de ingenio además del teorema. Supongamos que tenemos un generador en el laboratorio, por ejemplo un oscilador de audio. Se desea determinar su circuito de Thévenin equivalente con el fin de poder predecir su comportamiento cuando se lo utiliza como fuente de tensión para el análisis de una red complicada. ¿Qué mediciones hay que realizar sobre el oscilador para poder sintetizar el generador equivalente? Recordemos, además, que debemos estar seguros de que la fuente se comporta como una red lineal.

Según desprédense de la Fig. 3-21d hay que determinar dos cantidades: $|E_{oc}|$ (se necesita sólo la magnitud, puesto que el ángulo de fase puede tomarse igual a cero) y Z_s . En muchos osciladores típicos de laboratorio se emplea realimentación, de manera que no puede anularse la fem interna sin alterar al mismo tiempo la impedancia interna equivalente; luego, no es posible la determinación de Z_s por medio de un puente. Las mediciones de precisión de c.a. no son fáciles; por consecuencias, el problema trasfórmase en el siguiente: ¿Cuántas mediciones de tensión se necesitan? Dado que hay tres incógnitas, se necesitan tres mediciones de tensión. Los diferentes valores de tensión se obtienen para diferentes condiciones de carga.

1. $|E_{oc}|$ puede obtenerse por medición directa en vacío, es decir, con $Z_R = \infty$.

2. Sea $Z_R = R_1 + jX_1$; la tensión a través de la carga es entonces

$$E_1 = E_{oc} \frac{R_1 + jX_1}{(R_s + R_1) + j(X_s + X_1)} \quad (3-83)$$

Tomando las magnitudes, elevando al cuadrado y reordenando,

$$(R_s + R_1)^2 + (X_s + X_1)^2 = \left| \frac{E_{oc}}{E_1} \right|^2 (R_1^2 + X_1^2) \quad (3-84)$$

3. Sea $Z_R = R_2 + jX_2$; luego, de modo similar,

$$(R_s + R_2)^2 + (X_s + X_2)^2 = \left| \frac{E_{oc}}{E_2} \right|^2 (R_2^2 + X_2^2) \quad (3-85)$$

Restando la Ec. (3-85) de la (3-84) y desarrollando

$$\begin{aligned} R_s^2 + 2R_sR_1 + R_1^2 + X_s^2 + 2X_sX_1 + X_1^2 - R_s^2 - 2R_sR_2 - R_2^2 \\ - X_s^2 - 2X_sX_2 - X_2^2 = \left| \frac{E_{oc}}{E_1} \right|^2 (R_1^2 + X_1^2) - \left| \frac{E_{oc}}{E_2} \right|^2 (R_2^2 + X_2^2) \end{aligned} \quad (3-86)$$

$$\begin{aligned} 2(R_1 - R_2)R_s + 2(X_1 - X_2)X_s \\ = (R_1^2 + X_1^2) \left(\left| \frac{E_{oc}}{E_1} \right|^2 - 1 \right) - (R_2^2 + X_2^2) \left(\left| \frac{E_{oc}}{E_2} \right|^2 - 1 \right) \end{aligned} \quad (3-87)$$

Es ahora necesario reducir al mínimo la cantidad de cálculos necesarios para hallar R_g y X_g . Se trata de elegir inteligentemente los valores de la carga. Si se eligen $X_1 = X_2$, la Ec. (3-87) permite despejar R_g en función de cantidades conocidas. Luego puede determinarse X_g con la Ec. (3-84) o la (3-85). Nótese, sin embargo, que ambas ecuaciones son cuadráticas, de modo que habría ambigüedad en cuanto al signo X_g .

Si, en cambio, se eligen $R_1 = R_2$, el valor de X_g puede despejarse de la Ec. (3-87), sin ambigüedad en el signo:

$$X_g = \frac{(R_1^2 + X_1^2)(|E_{oc}/E_1|^2 - 1) - (R_1^2 + X_2^2)(|E_{oc}/E_1|^2 - 1)}{2(X_1 - X_2)} \quad (3-87a)$$

R_g se calcula entonces con la Ec. (3-84) o la (3-85), puesto que la elección del signo no constituye problema dado que R_g debe ser siempre positiva. Así, R_g , X_g (con su signo) y $|E_{oc}|$ se obtienen como resultado de tres mediciones de tensión.

Hay una simplificación ulterior si $|E_1|$ y $|E_2|$ se miden con cargas capacitivas puras, haciendo $R_1 = R_2 = 0$. En estas condiciones

$$X_g = \frac{X_1^2(|E_{oc}/E_1|^2 - 1) - X_2^2(|E_{oc}/E_2|^2 - 1)}{2(X_1 - X_2)} \quad (3-88)$$

y, según la Ec. (3-84)

$$R_g^2 = \left| \frac{E_{oc}}{E_1} \right|^2 X_1^2 - (X_g + X_1)^2 \quad (3-89)$$

sobreentendiéndose que X_1 y X_2 son cantidades *negativas*. No puede obtenerse una simplificación similar de la Ec. (3-87) suponiendo cargas puramente inductivas porque la condición $R_1 = R_2 = 0$ no puede realizarse con suficiente aproximación con inductores físicos.

Un ejemplo familiar de la aplicación del teorema de Thévenin es el del circuito equivalente de placa de la electrónica, mediante el cual se reemplaza por un generador equivalente de fem μE_g en serie con la resistencia dinámica de placa una válvula que supone funcionar en clase A lineal. Estos dos componentes equivalentes en serie sirven para calcular la componente alterna de la corriente que circula por la carga. El empleo de este teorema permite así reemplazar la compleja estructura interna de la válvula por medio de un generador y una impedancia en serie equivalentes en lo que concierne al cálculo de la corriente alterna en la carga.

3-36. Teorema de Norton. Un teorema sugerido por E. L. Norton, de los Bell Telephone Laboratories es: *La corriente que circula por una impedancia Z_R conectada a dos terminales de una red es la misma que si Z_R estuviera conectada a un generador de corriente constante cuya corriente generada es igual a la corriente que circula por los terminales dichos cuando se los pone en cortocircuito y que está en paralelo con una impedancia igual a la que se presenta entre los terminales considerados mirando hacia la red y con todos los generadores de ésta reemplazados por sus respectivas impedancias internas.*

Este teorema es simplemente el dual del teorema de Thévenin. Lo

ilustra la Fig. 3-22. Si se parte del teorema de Thévenin, de la Ec. 3-22b resulta

$$I_R = \frac{E_{oc}}{Z_g + Z_R} \quad (3-90)$$

La corriente de cortocircuito es

$$I_{sc} = \frac{E_{oc}}{Z_g} \quad (3-91)$$

En la Fig. 3-22c la corriente por Z_R es

$$I_R = \frac{I_{sc} Z_g}{Z_g + Z_R} \quad (3-92)$$

Combinando las Ecs. (3-91) y (3-92),

$$I_R = \frac{E_{oc}}{Z_g + Z_R} \quad (3-93)$$

lo que demuestra la equivalencia de b y c en la Fig. 3-22 y, por lo tanto, la equivalencia de c a a..

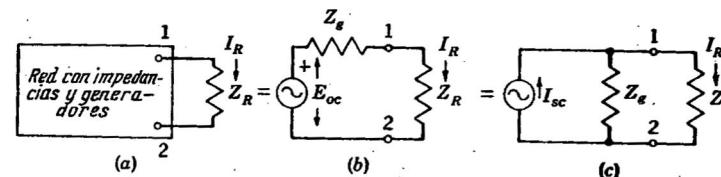


FIG. 3-22. Redes equivalentes según el teorema de Norton. (Comparar con la Fig. 3-5.)

Una de las aplicaciones más comunes del teorema de Norton es la forma en paralelo del circuito equivalente de placa de la válvula electrónica en funcionamiento clase A. En este caso, reemplázase el circuito de placa de la válvula por un generador de corriente $g_m E_g$ en paralelo con la resistencia dinámica de placa, en lo que concierne al cálculo de la corriente alterna en la carga. Otra aplicación de este teorema se ha considerado en el Ap. 3-10.

3-37. Limitaciones de los teoremas de Thévenin y Norton. El estudiante debe prestar especial atención al enunciado de los dos teoremas anteriores. La equivalencia prevista por los teoremas de Thévenin y de Norton refiere a la corriente en la carga y no al estado del generador en sí. Si se deja de reconocer esta limitación no es difícil caer en conclusiones ridículas.

Para ilustrar este punto, demostraremos que la potencia disipada dentro del generador de la Fig. 3-21c no es la misma que la que se disipa en el generador equivalente de d.

Supongamos que todas las impedancias son resistencias puras para simplificar el razonamiento. Así, en el primer circuito, en la condición

sin carga ($Z_R \rightarrow \infty$), la potencia disipada dentro del generador es $P_g = E^2/(R_1 + R_3)$, mientras que es nula la potencia disipada en las mismas condiciones en el generador equivalente de Thévenin. Ni el circuito equivalente de Thévenin ni el de Norton pueden usarse para calcular el rendimiento de un circuito.

3-38. Otros teoremas. En capítulos posteriores se introducirán otros teoremas una vez presentada la teoría subsiguiente. Ejemplos importantes son el teorema de reactancia de Foster y el de máxima transferencia de potencia.

3-39. Propiedades especiales de las redes T y π . El espacio dedicado a las redes T y π demuestra su importancia en el análisis de los circuitos de la telecomunicación. A causa de esta importancia, es oportuno investigar ciertas propiedades especiales que poseen, propiedades que se refieren principalmente a sus características de impedancia: iterativa, imagen y característica.

3-40. Redes T y π asimétricas. La impedancia de la red T que consideraremos en primer término es la impedancia *iterativa*. Por definición: "La impedancia iterativa de un tránsductor es la impedancia que, conectada a un par de terminales, produce una impedancia igual en el otro par de terminales." (ASA C42 65.08.387.) Aplicando esta definición a la sección T asimétrica, es decir, en la que $Z_1 \neq Z_2$, de la Fig. 3-23, por definición, si $Z_R = Z_{it}$, entonces $Z_{in} = Z_{it}$, y se puede calcular Z_{it} a partir de los componentes conocidos de la red. Así

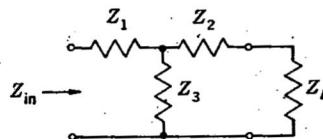


FIG. 3-23. Sección T asimétrica utilizada para calcular Z_{it} .

por definición, si $Z_R = Z_{it}$, entonces $Z_{in} = Z_{it}$, y se puede calcular Z_{it} a partir de los componentes conocidos de la red. Así

$$Z_{in} = Z_1 + \frac{Z_3(Z_2 + Z_{it})}{Z_2 + Z_3 + Z_{it}} = Z_{it} \quad (3-94)$$

de donde

$$\begin{aligned} Z_1(Z_2 + Z_3 + Z_{it}) + Z_3(Z_2 + Z_{it}) &= Z_{it}(Z_2 + Z_3 + Z_{it}) \\ Z_{it}^2 + (Z_2 - Z_1)Z_{it} - (Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + Z_1Z_3) &= 0 \end{aligned} \quad (3-95)$$

y, con la fórmula cuadrática,

$$\begin{aligned} Z_{it} &= \frac{Z_1 - Z_2}{2} \pm \sqrt{\frac{(Z_1 - Z_2)^2}{4} + (Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + Z_1Z_3)} \\ &= \frac{Z_1 - Z_2}{2} \pm \sqrt{\frac{(Z_1 + Z_2)^2}{4} + (Z_1 + Z_2)Z_3} \end{aligned} \quad (3-96)$$

Como regla general, la elección del signo delante del radical está regida por la posibilidad de realizar físicamente Z_{it} . Si esta última debe estar constituida por una estructura física pasiva, su parte real debe ser positiva, condición que se satisface por lo general eligiendo el signo positivo.

El estudiante debe observar que el valor de Z_{it} dado por la Ec. (3-96) es aplicable sólo cuando Z_1 está del lado de *entrada* de la sección T. Si se invierte la sección T, poniendo Z_1 del otro lado, el nuevo valor

de Z_{it} no coincide con el de la Ec. (3-96). La derivación del nuevo valor se deja como ejercicio para el estudiante.

La utilidad del concepto de Z_{it} en el análisis de los circuitos resultará evidente al estudiar las redes iterativas, en el Cap. VI.

De manera similar puede hallarse la impedancia iterativa de una red π asimétrica, es decir, una en que $Z_A \neq Z_C$. Si se prefiere, puede también aplicarse el principio de dualidad general entre las secciones T y π y escribir para la admitancia iterativa Y_{it} con Y_A en el extremo de entrada,

$$Y_{it} = \frac{Y_A - Y_C}{2} \pm \sqrt{\frac{(Y_A + Y_C)^2}{4} + (Y_A + Y_C)Y_B} \quad (3-97)$$

Las redes asimétricas de cuatro terminales se caracterizan también por otro par de impedancias, las impedancias *ímágines*. Por definición: "Las impedancias imágenes de un tránsductor son las impedancias que cargan simultáneamente todas sus entradas y salidas de tal modo que en cada una de sus entradas y salidas son iguales las impedancias vistas en los dos sentidos." (ASA C42 65.08.390.)

Más específicamente, para las estructuras de tres y de cuatro terminales, tales como las redes T y π , las dos impedancias imágenes, Z_{I1} y Z_{I2} , son dos valores de impedancia tales que si el extremo 1 de la red se carga con la impedancia Z_{I1} , la impedancia de entrada en el extremo 2 resulta ser Z_{I2} ; mientras que si el extremo 2 se carga con la impedancia Z_{I2} , la impedancia de entrada en el extremo 1 viene a ser Z_{I1} . A partir de esta definición, los valores de las impedancias imágenes pueden determinarse en términos de los componentes de la sección de la Fig. 3-24.

La impedancia de entrada en los terminales 1, 2, cuando Z_{I2} se conecta entre los terminales 3, 4, es, por definición, Z_{I1} . Por lo tanto

$$Z_{I1} = Z_1 + \frac{(Z_2 + Z_{I2})Z_3}{Z_2 + Z_3 + Z_{I2}} \quad (3-98)$$

De modo similar, cuando Z_{I1} se conecta entre los terminales 1, 2, la impedancia de entrada entre los terminales 3, 4 es Z_{I2} . Luego

$$Z_{I2} = Z_2 + \frac{(Z_1 + Z_{I1})Z_3}{Z_1 + Z_3 + Z_{I1}} \quad (3-99)$$

Resolviendo este par de ecuaciones simultáneas obtiénense

$$Z_{I1} = \sqrt{\frac{Z_1 + Z_3}{Z_2 + Z_3} (Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + Z_1Z_3)} \quad (3-100)$$

$$Z_{I2} = \sqrt{\frac{Z_2 + Z_3}{Z_1 + Z_3} (Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + Z_1Z_3)} \quad (3-101)$$

El estudiante puede reconocer que los factores del radicando son las impedancias de cortocircuito y de circuito abierto de la red T. Por lo tanto, otras expresiones para las impedancias imágenes son

$$\begin{aligned} Z_{I1} &= \sqrt{Z_o Z_{s1}} \\ Z_{I2} &= \sqrt{Z_o Z_{s2}} \end{aligned} \quad (3-102)$$

Pueden derivarse expresiones análogas para las admitancias imágenes de las redes asimétricas π aplicando el principio de dualidad general. Se verá a su tiempo, en el Cap. XI, que el concepto de impedancia imagen resulta muy útil en el diseño de las redes adaptadoras de impedancia.

3-41. Redes T y π simétricas. La sección T simétrica es la que tiene iguales sus dos ramas en serie, esto es, $Z_1 = Z_2$. En estas condiciones, por la Ec. (3-96),

$$Z_u = \sqrt{Z_1^2 + 2Z_1Z_3} \quad (3-103)$$

y, por las Ecs. (3-100) y (3-101).

$$Z_{I1} = Z_{I2} = \sqrt{Z_1^2 + 2Z_1Z_3} \quad (3-104)$$

De estas ecuaciones desprédese que en las redes T simétricas las impedancias iterativas e imágenes se confunden en una única impedancia, la que recibe la denominación especial de *impedancia característica de la red*, Z_o . La misma situación presentase en las redes π simétricas, en las que $Y_A = Y_C$.

Es de práctica usual adoptar una notación especial cuando se trata de las secciones T simétricas. Las dos ramas en serie se designan indiferentemente con $Z_1/2$, y la rama en paralelo, con Z_2 , según lo ilustra la Fig. 3-25. Es conveniente derivar expresiones para la impedancia característica según esta nueva notación; así, la impedancia característica Z_o es el valor de la impedancia que, conectada como carga de la red, hace que Z_{in} sea igual a Z_o . Matemáticamente, si

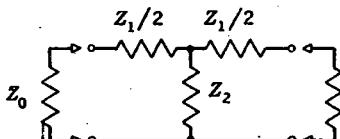


FIG. 3-25. Red T simétrica para el cálculo de la impedancia característica.

la sección de la Fig. 3-25 está cargada con Z_o ,

$$Z_{in} = Z_o = \frac{Z_1}{2} + \frac{Z_2(Z_1/2 + Z_o)}{Z_1/2 + Z_2 + Z_o} \quad (3-105)$$

Despejando Z_o ,

$$Z_o = \sqrt{Z_1 Z_2 + \frac{Z_1^2}{4}} \quad (3-106)$$

La Ec. (3-106) permite el cálculo de Z_o cuando se conocen Z_1 y Z_2 . No está en la forma óptima cuando las impedancias son complejas. La forma reordenada

$$Z_o = \sqrt{\frac{Z_1}{2} \left(2Z_2 + \frac{Z_1}{2} \right)} \quad (3-106a)$$

es mucho más adecuada para este propósito, como puede verificarse considerando un ejemplo numérico.

En el laboratorio presentase a menudo el problema de determinar la impedancia característica de una red simétrica desconocida, es decir, en la que no se conocen Z_1 y Z_2 . En este caso se pueden medir las impedancias de cortocircuito y de circuito abierto. A causa de la simetría de la red

$$\begin{aligned} Z_{o1} &= Z_{o2} = Z_{oc} \\ Z_{s1} &= Z_{s2} = Z_{sc} \end{aligned}$$

Luego, dado que Z_o y las impedancias imágenes de una red simétrica son iguales,

$$Z_o = \sqrt{Z_{oc} Z_{sc}} \quad (3-107)$$

La Ec. (3-107) es aplicable a la sección T simétrica de igual modo que a una red simétrica desconocida. Se sugiere que el estudiante verifique esta proposición evaluando Z_{oc} y Z_{sc} en términos de Z_1 y Z_2 para demostrar la identidad de las Ecs. (3-106) y (3-107).

Resulta así que las componentes de una red T simétrica pueden calcularse a partir de las impedancias de cortocircuito y de circuito abierto. Usando la nueva notación, las Ecs. (3-53) y (3-55) reducen a

$$\begin{aligned} \frac{Z_1}{2} &= Z_{oc} - Z_2 \\ Z_2 &= \sqrt{Z_{oc}(Z_{oc} - Z_{sc})} \end{aligned} \quad (3-108)$$

PROBLEMAS

- 3-1. (a) Mediante el análisis nodal, calcular la admittance de entrada entre los terminales 1, 4 de la red T-puenteada de la Fig. 3-26. (b) ¿Cuál es la impedancia de entrada entre los mismos dos terminales? (c) ¿Cuál es la admittance nodal de transferencia entre los terminales 1, 4 y 3, 4?

3-2. Repetir el problema 3-1 aplicando el análisis de malla.

- 3-3. (a) Una impedancia de dos terminales consiste en una resistencia de 1.000 ohm en paralelo con una inductancia de 450 mH. Calcular los componentes de una red equivalente en serie, a 159 c/s. (b) ¿Son las dos redes equivalentes a 796 c/s?

- 3-4. Una red desconocida con dos pares de terminales arroja las siguientes mediciones, con I_2 atrasada respecto de I_1 cuando la carga es resistiva:

$$\begin{aligned} Z_{o1} &= 0 & Z_{o2} &= +j200 \text{ ohms} \\ Z_{s1} &= -j50 \text{ ohms} & Z_{s2} &= \infty \end{aligned}$$

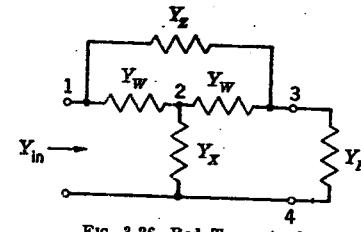


FIG. 3-26. Red T-puenteada.

- a. Calcular los componentes de una red T equivalente.
 b. Calcular los componentes de una red π equivalente.
- 3-5. Reducir la red T-puenteada de la Fig. 3-26 a una red π equivalente y verificar los resultados del Prob. 3-1a.
- 3-6. Construir una red que comprenda ocho elementos de resistencia y reducir luego esta red a una red T y a una red π equivalentes.
- 3-7. Construir una red que comprenda ocho elementos de impedancia, cada uno de ellos compuesto por una resistencia y una reactancia, y reducir luego esta red a las redes T y π equivalentes.
- 3-8. Una red de cuatro terminales equilibrada respecto de tierra y que contiene ramas en serie inductivas arroja los siguientes resultados:

$$\begin{aligned} Z_{o1} &= 10 + j10 \text{ ohm} & Z_{o2} &= 10 + j10 \text{ ohm} \\ Z_{s1} &= 10 - j10 \text{ ohm} \end{aligned}$$

Calcular los componentes de una red T *equilibrada* equivalente.

- 3-9. Un transformador tiene dos terminales de entrada y dos de salida, con las siguientes mediciones:

$$Z_{o1} = 400 + j4.000 \quad Z_{o2} = 100 + j1.000 \quad Z_{s2} = 38 + j380$$

Determinar las secciones T y π equivalentes.

- 3-10. Un generador de fem igual a 1 volt y una impedancia interna de $1.200 + j1.900$ ohm se conecta a los terminales de entrada del transformador del Prob. 3-9. Determinar, aplicando el teorema de Thévenin, el generador equivalente que puede reemplazar la red y el generador real en lo que concierne a la corriente en la carga.

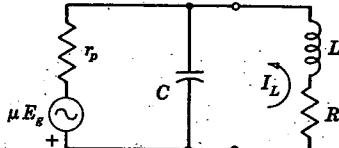


FIG. 3-27. Circuito para el Prob. 3-11.

- a. Derivar los componentes del circuito en serie equivalente en lo que concierne a la corriente I_L .
 b. Si la reactancia de C es despreciablemente pequeña en comparación con r_p , ¿qué simplificación puede introducirse en el circuito equivalente?
 c. ¿Cuál es el valor de I_L en forma polar, en las condiciones de b?
- 3-12. Demostrar que las transformaciones T- π dan circuitos que son equivalentes para todas las frecuencias, siempre que la T esté compuesta sólo por inductancias o sólo por capacitancias.

- 3-13. De un generador de estructura desconocida obtiénense los siguientes datos, a 1 Kc/s: (1) La tensión en circuito abierto es de 10 volt. (2) La tensión a través de una resistencia de carga de 500 ohm es de 5,25 volt. (3) La tensión a través de una resistencia de carga de 250 ohm es de 3,46 volt.

- a. Determinar los componentes del generador equivalente de Thévenin.
 b. Determinar los componentes del generador equivalente de Norton.
- 3-14. (a) Calculando la pérdida de potencia dentro de los dos generadores obtenidos en el Prob. 3-13, demostrar que la equivalencia no se mantiene dentro de los generadores. (b) Calculando la potencia disipada en una car-

ga resistiva de 400 ohm, demostrar que la equivalencia es válida para la carga.

- 3-15. Calcular las impedancias iterativas e imagen de una red T en la cual

$$\begin{aligned} Z_1 &= 30 + j7,5 \text{ ohm} & Z_s &= -j3.220 \text{ ohm} \\ Z_2 &= 50 + j10 \text{ ohm} \end{aligned}$$

- 3-16. En una red

$$\begin{aligned} Z_{o1} &= Z_{o2} = 100 - j7,2 \text{ ohm} \\ Z_{s1} &= 90 + j22 \text{ ohm} \end{aligned}$$

Calcular los componentes de una sección T equilibrada equivalente para $\omega = 5.000$ radian/seg.

CAPÍTULO IV
RESONANCIA

En las redes utilizadas para la distribución industrial de la energía eléctrica, la resistencia y la reactancia inductiva desempeñan los papeles más importantes, mientras que la reactancia capacitiva es sólo de importancia secundaria. Este empleo restrictivo de las reactancias capacitivas se justifica por el gran tamaño y costo de los capacitores capaces para manejar potencias reactivas tan elevadas como las que son comunes en estos sistemas de distribución.

A medida que aumenta la frecuencia, aumenta la reactancia inductiva y disminuye la reactancia capacitativa. Por consecuencia, ni siquiera la reactancia inductiva ni la susceptancia capacitativa de un conductor largo que une dos elementos cualesquiera pueden despreciarse cuando la frecuencia es alta. Aprovechase, por lo tanto, el hecho de que una susceptancia capacitativa se puede neutralizar por medio de una inductancia en paralelo o el de que una reactancia inductiva en serie puede anularse por medio de una reactancia capacitativa en serie, del mismo valor. Este fenómeno se denomina "resonancia".

Dado que uno de los tipos de reactancia aumenta con la frecuencia mientras que el otro disminuye, la reactancia o la susceptancia total pueden reducirse a cero a sólo una frecuencia. Por esta causa, sin embargo, la resonancia encuentra importantes aplicaciones, por cuanto permite diseñar circuitos capaces de transmitir libremente ciertas frecuencias con eficaz exclusión de las otras. Esto permite el empleo de un medio único, tal como la línea telefónica o el espacio libre, para la transmisión de varios mensajes simultáneos, pues los circuitos selectivos entonces empleados en el extremo receptor permiten elegir la banda de frecuencias asociada con el mensaje esperado y dirigir éste a su destino previsto.

Puede hablarse de dos tipos de resonancia: (1) la resonancia en serie, o neutralización de la *reactancia en serie*, y (2) la resonancia en paralelo, o neutralización de la *susceptancia en paralelo*. La resonancia en paralelo se llama a menudo, y preferiblemente, "antirresonancia" a fin de distinguirla de la resonancia en serie. Cualquiera de los dos tipos de resonancia pueden ocurrir para distintas frecuencias más de una vez en una red dada; el número de resonancias posibles en una red depende del número y carácter de las mallas que componen esta última.

4-1. Resonancia en serie. El circuito resonante más sencillo es el que consiste en la conexión en serie de resistencia, inductancia y capacitancia, como el de la Fig. 4-1. En este circuito en serie, defíñese

la *resonancia* como la condición para la cual la reactancia neta total es cero. La frecuencia de resonancia f_r es la frecuencia a que ocurre la resonancia. En esta figura se ofrecen también los diagramas fasoriales correspondientes a los casos en que la frecuencia es menor, igual y mayor que la de resonancia. Se verá que cuando la reactancia del inductor es igual a la reactancia del capacitor, es nula la suma fasorial de las caídas de tensión en estos dos elementos. La tensión total, que es igual a la suma fasorial de las tres caídas individuales de tensión, es entonces mínima para una corriente dada e igual a la caída debida a la resistencia. Si se aumenta la frecuencia por encima de su valor de resonancia aumenta la reactancia total y es mayor, así, la caída de tensión para una corriente dada. De igual modo, al disminuir la frecuencia, aumentan la reactancia total y la caída de tensión.

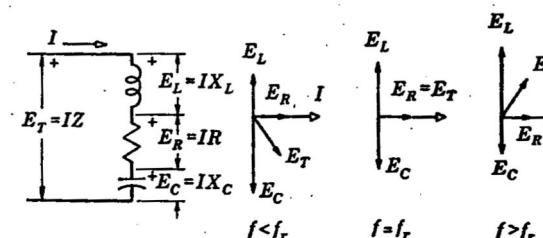


FIG. 4-1. Resonancia en el circuito en serie.

Puede determinarse la impedancia total de un circuito en serie sumando las impedancias individuales complejas

$$Z = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \quad (4-1)$$

Obsérvese que $|Z|$ es mínima cuando

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} \quad (4-2)$$

y qué la frecuencia de resonancia es

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (4-3)$$

A esta frecuencia desaparece el término reactivo, que es el único que varía con la frecuencia. En resonancia, por lo tanto,

$$Z_r = R \quad (4-4)$$

y el factor de potencia del circuito es la unidad. Para las frecuencias más bajas $1/\omega C > \omega L$, y la reactancia total es capacitativa, mientras que para las frecuencias mayores que la de resonancia, $\omega L > 1/\omega C$ y el circuito presenta como inductivo. Al determinar cómo varía con la frecuencia la reactancia de semejante circuito pueden utilizarse las curvas que representan el comportamiento de los elementos individuales.

4-2. Curvas de reactancia. En la Fig. 4-2a se muestra una curva que ilustra la variación de la reactancia de un capacitor en función de la frecuencia. Es la hipérbola $X_C = -1/\omega C$. La Fig. 4-2b da la correspondiente curva para la reactancia de un inductor, la que redúcese ahora a la línea recta $X_L = \omega L$. En la Fig. 4-2c se han combinado estas dos curvas para obtener la reactancia total X_T . La frecuencia de resonancia corresponde al punto en que esta curva corta el eje de las abscisas.

En los circuitos verdaderos no hay reactancias puras y la resistencia R es principalmente parte del inductor, pero las consideraciones generales son las mismas, excepto en cuanto que la caída de tensión medida a través de un elemento es entonces la suma fasorial de las caídas IX e IR .

Las curvas de la Fig. 4-2 pueden presentarse de distinta manera a fin de obtener un nomograma muy útil para el cálculo de reactancias y frecuencias de resonancia. Este nomograma resulta de representar

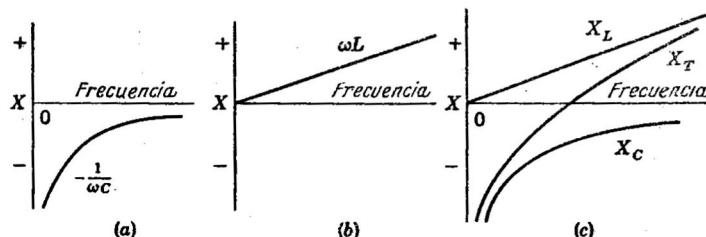


FIG. 4-2. Curvas de reactancia del circuito resonante en serie.

las curvas de reactancia en papel doble logarítmico. Consideremos la reactancia del inductor L ,

$$X_L = \omega L = 2\pi f L \quad (4-5)$$

y, tomando logaritmos,

$$\log X_L = \log 2\pi f + \log L \quad (4-6)$$

La Ec. (4-6) es la de una recta de pendiente unidad y que corta el eje y en el punto de ordenada igual a $\log 2\pi f L$. De manera similar, la reactancia del capacitor C es¹

$$X_C = \frac{-1}{\omega C} = \frac{-1}{2\pi f C} \quad (4-7)$$

¹ De acuerdo con la recomendación de ASA, utilízase aquí el símbolo X_C para representar la reactancia capacitive $-1/\omega C$. Hay una variación respecto de la práctica anterior en este aspecto, pues muchas veces se usaba $X_C = +1/\omega C$. El estudiante debe prestar atención al criterio que se sigue en las diversas publicaciones que consulte.

X_L se define como $+\omega L$. Una reactancia general X lleva su propio signo. La reactancia de una inductancia y una capacitancia en serie se escribe $X = X_L + X_C$. Correspondientemente $B_L = -1/\omega L$ y $B_C = +1/\omega C$. La susceptancia total de una inductancia y una capacitancia en paralelo es $B = B_L + B_C$.

y tomando los logaritmos de los módulos

$$\log |X_C| = \log \frac{1}{2\pi C} - \log f \quad (4-8)$$

La Ec. (4-8) es también la de una línea recta con pendiente unidad negativa y que corta el eje y en el punto de ordenada igual a $\log (1/2\pi C)$. Si las Ecs. (4-6) y (4-8) se representan sobre papel doble logarítmico para diferentes valores de L y C resulta la familia de rectas

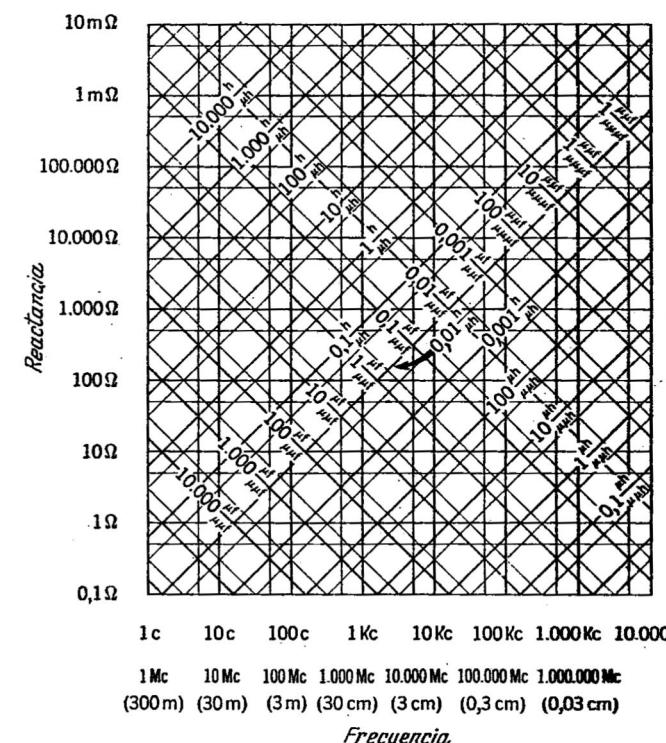


FIG. 4-3. Nomograma de reactancias. Utilízase siempre las escalas correspondientes, es decir, las dos inferiores o las dos superiores. (General Radio Company.)

de la Fig. 4-3. Este nomograma puede utilizarse indiferentemente para determinar reactancias y frecuencias de resonancia, puesto que la Ec. (4-2) está representada en la Fig. por la intersección de las dos rectas que corresponden a los valores particulares de L y C del caso.

4-3. Lugares geométricos de la impedancia y de la admittance en el circuito en serie. El lugar geométrico del extremo del fasor impedancia a medida que varía la frecuencia, es la línea recta ilustrada en la Fig. 4-4a. Puesto que

$$Z = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)$$

el lugar geométrico es una recta paralela y a la distancia R de éste, el eje de las reactancias. A medida que aumenta la frecuencia, el fasor impedancia está sucesivamente representado por Z_1, Z_2, Z_3, \dots , con el extremo siempre sobre la recta dicha.

Determinaremos ahora el lugar geométrico de la admitancia correspondiente. La derivación se hará a base de consideraciones geométricas para relacionarla luego con el circuito eléctrico. En la Fig. 4-4b la circunferencia $OBGO$ se ha construido con un diámetro $OG = 1/OR$. Se desea hallar la relación que existe entre un punto cualquiera de la recta vertical que pasa por R y un punto B , que es el de intersección

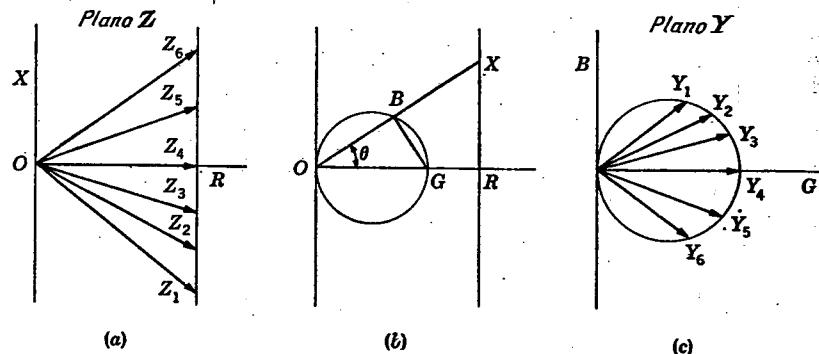


FIG. 4-4. Lugares geométricos de la impedancia y de la admisión del circuito resonante en serie.

de la recta OX y la circunferencia. El ángulo OBG , inscrito en una semicircunferencia, vale 90° . Luego, dado que los triángulos OBG y ORX son semejantes,

$$\frac{OB}{OG} = \frac{OR}{OX} \quad (4-9)$$

Pero, por construcción de la circunferencia,

$$OG = \frac{1}{OR} \quad \text{o} \quad OG \cdot OR = 1 \quad (4-10)$$

Por lo tanto

$$OB = \frac{1}{OX} \quad (4-11)$$

Puesto que X es un punto *cualquier* de la vertical, se concluye que la transformación (4-11) es una transformación conforme de la linea vertical, punto por punto, en la circunferencia.

Estos resultados geométricos pueden ahora aplicarse al circuito eléctrico. Para toda red de dos terminales, la impedancia y la admisión están relacionadas por medio de las ecuaciones

$$Y = \frac{1}{Z} \quad \text{o} \quad |Y|/\theta_y = \frac{1}{|Z|/\theta_z}$$

de donde

$$Y = \frac{1}{|Z|} \quad \theta_y = -\theta_z \quad (4-12)$$

Dado que el circuito eléctrico requiere el cambio de signo en el ángulo θ , la mitad inferior de la recta de impedancia se transforma en la mitad superior de la circunferencia de admisión y la mitad superior de la recta de impedancia, en la mitad superior de la circunferencia de admisión.

Ahora bien, la variación de Z con la frecuencia está representada, en el circuito resonante en serie, por la línea vertical del plano Z correspondiente a un valor constante de R y un valor variable de X . Así, la admisión correspondiente queda representada por una circunferencia de diámetro $G = 1/R$ coincidente con el eje real del plano de admisión. Esta situación está ilustrada por *a* y *c* en la Fig. 4-4, donde los valores correspondientes de Z e Y se identifican con iguales subíndices. Este diagrama circular halla importantes aplicaciones en el caso de las impedancias electromecánicas, por ejemplo la de los auriculares telefónicos, los cristales piezoelectricos y los osciladores magnetoestrictivos, en los que los sistemas mecánicos oscilantes reflejan sus características sobre la red eléctrica, y en el análisis de las máquinas rotativas asincrónicas y sincrónicas. La transformación $Y = 1/Z$ es también útil en el estudio de las líneas de transmisión.

El principio que se acaba de ilustrar, por el cual una recta que representa la Ec. (4-1) en el plano complejo Z se transforma en una circunferencia en el plano Y no es sino un ejemplo de las llamadas transformaciones lineales de la teoría de las funciones de variable compleja. Esta transformación

$$y = \frac{\alpha + \beta z}{\gamma + \delta z} \quad (4-13)$$

donde α, β, γ y δ son constantes complejas, transforma las circunferencias del plano complejo z en circunferencias del plano complejo y , sobreentendiendo que las rectas son circunferencias de radio infinitamente grande. Si α, β y γ se ponen igual a cero y δ igual a la unidad, la Ec. (4-13) reducirse al caso particular especificado por la Ec. (4-12).

4-4. Factor de calidad Q . Las ecuaciones que describen la resonancia pueden simplificarse introduciendo el factor de calidad Q del circuito resonante, el que definiremos a continuación.

Básicamente Q se define como el factor de calidad de un inductor y como tal es una medida de la eficiencia con que se realiza el almacenamiento de energía en el inductor cuando éste está recorrido por una corriente alterna. Matemáticamente la definición es

$$Q = 2\pi \frac{\text{máxima energía almacenada}}{\text{energía disipada/ciclo}} \quad (4-14)$$

o, multiplicando numerador y denominador por f , la frecuencia de la corriente,

$$Q = \frac{\text{máxima energía almacenada}}{\text{potencia media disipada}} \quad (4-14a)$$

En este libro, el Q de un inductor será identificado con el subíndice L . Q_L puede expresarse en términos de las componentes resistiva e inductiva del inductor y de la frecuencia de la corriente. Para ilustrar esta proposición, supongamos que por el inductor representado en la Fig. 4-5a circula una corriente de valor eficaz I y frecuencia f . R y L son, respectivamente, la resistencia en serie y la inductancia del inductor a la frecuencia f . Entonces

$$\begin{aligned} \text{Energía máx. almacenada} &= \frac{L}{2} I^2 \\ &= \frac{L}{2} |\sqrt{2} I|^2 = L|I|^2 \end{aligned} \quad (4-15)$$

$$y \quad \text{Potencia media disipada} = |I|^2 R \quad (4-16)$$

Introduciendo las Ecs. (4-15) y (4-16) en la (4-14a) obtiénese

$$Q_L = \frac{\omega L}{R} \quad (4-17)$$

Debe observarse que Q_L depende de la frecuencia, de modo que el valor numérico de Q_L sólo tiene significado cierto cuando se conoce

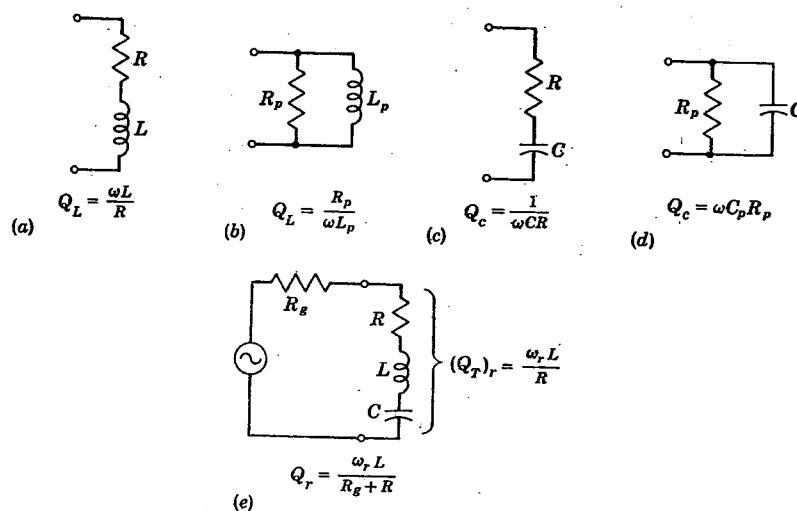


FIG. 4-5. Circuitos para calcular el factor de calidad Q .

la frecuencia. De la Ec. (4-17) podría concluirse que Q_L varía linealmente con la frecuencia. No es así, en general, porque tanto L como R varían también con la frecuencia en los inductores físicos. Las razones de esta variación se discuten más adelante en este mismo capítulo.

El inductor puede especificarse también, en una frecuencia determinada, en términos de sus componentes inductivo y resistivo en paralelo, L_p y R_p , como se ve en la Fig. 4-5b. Queda como ejercicio para el estudiante el demostrar que la expresión de Q_L en estos términos es

$$Q_L = \frac{R_p}{\omega L_p} \quad (4-18)$$

Si bien el concepto de Q fue originalmente aplicado a los inductores, se lo puede extender de modo que la eficiencia de almacenamiento de energía de un capacitor, o de un circuito cualquiera de dos terminales, se exprese también en términos de los componentes del circuito y la frecuencia. Así, por ejemplo, si la resistencia y la capacitancia en serie de un capacitor son, respectivamente, R y C , como en la Fig. 4-5c, la evaluación para una corriente de valor eficaz $|I|$ y frecuencia f muestra que el factor de calidad del capacitor es

$$Q_c = \frac{1}{\omega CR} \quad (4-19)$$

En cambio, si el capacitor se representa por sus componentes en paralelo R_p y C_p , el factor de calidad resulta ser

$$Q_c = \omega C_p R_p \quad (4-19a)$$

En la práctica, reemplázase a menudo Q_c por su recíproca, el *factor de disipación*.

La extensión ulterior de la definición de Q al caso de una red de dos terminales que contiene inductancia y capacitancia viene a ser útil para el análisis de los circuitos. Así, en la Fig. 4-5e es posible determinar el factor de calidad Q_T del circuito formado por R , L y C en serie. Debe observarse, sin embargo, que en la Ec. (4-14a) aparece la energía máxima almacenada por ciclo; por lo tanto, Q_T se expresará en términos de L o de C , según que la frecuencia de la corriente sea mayor o menor que la frecuencia de resonancia de la combinación. Así lo ilustra el ejemplo que sigue.

En el circuito resonante en serie de la Fig. 4-5e, la energía máxima almacenada por ciclo en la capacitancia es

$$(W_C)_m = \frac{|\hat{E}_C|^2 C}{2} = |E_C|^2 C = \frac{|I|^2}{\omega^2 C}$$

y la energía máxima almacenada por ciclo en la inductancia,

$$(W_L)_m = |I|^2 L$$

En las frecuencias inferiores a la de resonancia, $f < f_r$, y $\omega L < 1/\omega C$. Luego

$$(W_C)_m > (W_L)_m$$

Entonces, por debajo de la resonancia, por la Ec. (4-14a),

$$Q_T = \frac{1}{\omega CR} \quad f < f_r$$

En cambio, por encima de la resonancia $(W_C)_m < (W_L)_m$, y el factor de calidad viene a ser

$$Q_T = \frac{\omega L}{R}, \quad f > f_r.$$

En la frecuencia de resonancia la energía máxima almacenada es la misma para la inductancia y para la capacitancia, de modo que el factor de calidad puede expresarse indiferentemente en términos de L o de C como

$$(Q_T)_r = \frac{\omega_r L}{R} = \frac{1}{\omega_r C R}. \quad (4-20)$$

En ciertos casos se requiere el factor de calidad del circuito completo, incluso la resistencia del generador de la Fig. 4-5e. En estos casos se usa en las fórmulas la resistencia neta total del circuito, es decir, en el caso de la figura,

$$Q_r = \frac{\omega_r L}{R_g + R}. \quad (4-21)$$

Este valor puede relacionarse con el de Q_T de la Ec. (4-20) dividiendo el numerador y el denominador por R , para obtener así

$$Q_r = \frac{\omega_r L / R}{1 + R_g / R} = \frac{(Q_T)_r}{1 + R_g / R}. \quad (4-22)$$

En el apartado siguiente se verán algunas aplicaciones del concepto de factor de calidad de los inductores y los circuitos al estudiar la resonancia. Se discutirán asimismo métodos para la medición de Q .

4-5. Agudeza de resonancia. Se ha demostrado en un apartado anterior que la admittance de un circuito resonante en serie como función de la frecuencia se representa como una circunferencia en el plano complejo Y . Obtiéñese una representación de alternativa y muy útil representando $|Y|$ y θ , como función de la frecuencia en un sistema de coordenadas rectangulares, Fig. 4-6. La ordenada de la Fig. 4-6a representa también la corriente que circula por el circuito a tensión constante. Si se aumenta la resistencia del circuito, la admittance disminuye para todas las frecuencias, pero la disminución es más marcada en la vecindad de la frecuencia de resonancia. Obtiéñese en estas condiciones una curva más achatada. En la Fig. 4-6, la curva 2 se ha trazado para una combinación con mayor resistencia que en la curva 1. La curva 1 ofrece una mayor discriminación a favor de las frecuencias próximas a la de resonancia y se dice entonces que el circuito es en este caso "más selectivo".

Con el fin de especificar el grado de agudeza de la curva se acostumbra computar la banda de frecuencias dentro de la cual la admittance excede cierta proporción preestablecida del máximo. Esta proporción puede tomarse arbitrariamente; sólo es necesario usar el mismo criterio en todas las curvas que se comparan. Los puntos límites más convenientes son aquellos para los cuales el valor de la reactancia ha

aumentado desde su valor cero para resonancia a un valor igual a la resistencia. Esto ocurre para dos frecuencias, una superior y otra inferior a la de resonancia. En estos puntos, dado que $|X| = R$ y $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$, $Z = \sqrt{2}R$, la admitancia es el 70,7 por ciento de la admittance máxima, y la potencia disipada para una tensión dada, $|I|^2R$, es la mitad de la que se disipa en resonancia. Estas dos frecuencias, que denotaremos f_1 y f_2 , respectivamente, se llaman frecuencias de media potencia, inferior y superior.

En la mayoría de los circuitos de radiofrecuencia, las reactancias del inductor y del capacitor son, individualmente, mucho mayores que el valor de la resistencia, de modo que, en la vecindad de la resonancia, la reactancia total es la diferencia pequeña entre dos cantidades grandes. Es preferible y conveniente calcular, entonces, de modo directo

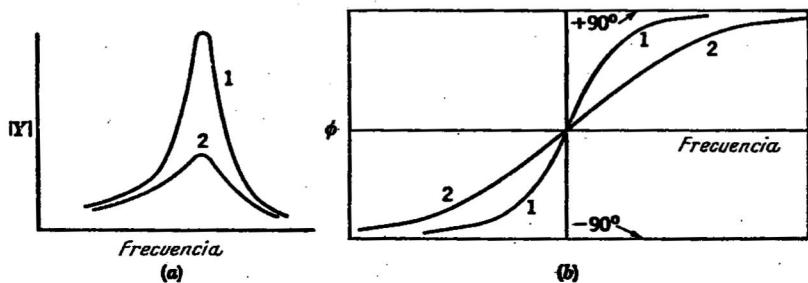


FIG. 4-6. Curva de resonancia de un circuito con R , L , y C en serie.

esta diferencia. En la Fig. 4-2a, la pendiente de la curva de reactancia para la capacitancia es

$$\frac{dX_C}{df} = +\frac{1}{2\pi f^2 C} \quad (4-23)$$

En la Fig. 4-2b, la pendiente de la curva de reactancia de la inductancia es

$$\frac{dX_L}{df} = 2\pi L \quad (4-24)$$

En la frecuencia de resonancia

$$2\pi f_r L = \frac{1}{2\pi f_r C} \\ 2\pi L = \frac{1}{2\pi f_r^2 C} \quad (4-25)$$

Por lo tanto, de las Ecs. (4-23) a (4-25), en la frecuencia de resonancia

$$\left(\frac{dX_C}{df}\right)_r = \left(\frac{dX_L}{df}\right)_r \quad (4-26)$$

lo que significa que, al introducir una variación Δf en la vecindad de la resonancia, la reactancia capacitiva aumenta *algebraicamente* en sentido positivo en la misma magnitud que la reactancia inductiva. Dado que la reactancia capacitiva es negativa, su valor *absoluto decrece* en el mismo monto en que aumenta el valor de la reactancia inductiva. El aumento de la reactancia de una inductancia cuando la frecuencia aumenta en Δf es

$$\Delta X_L = 2\pi \Delta f L$$

Por lo tanto, la variación de la reactancia de un circuito en serie en la región de resonancia, para una variación Δf de la frecuencia, es el doble de la variación de la reactancia inductiva, de modo que

$$\Delta X = 4\pi \Delta f L \quad (4-27)$$

Esta expresión simplifica los cálculos de la selectividad.

Cuando hay que determinar la banda de frecuencias dentro de la cual la potencia es igual o mayor que la mitad de la potencia máxima, supongamos que f_1 es la frecuencia inferior para la cual la potencia disipada es la mitad de la máxima, y f_2 , la frecuencia superior que satisface la misma condición. Sea f_r , además, la frecuencia de resonancia. Se ha explicado que la reactancia es nula en resonancia y que ella es igual a R en las frecuencias f_1 y f_2 . Por otra parte $\Delta f = f_r - f_1 = f_2 - f_r$. Luego, por la Ec. (4-27)

$$\begin{aligned} 4\pi(f_r - f_1)L &= R \\ 4\pi(f_2 - f_r)L &= R \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$f_2 - f_1 = \frac{R}{2\pi L} \quad (4-28)$$

La agudeza de la resonancia de un circuito depende entonces de la relación R/L y puede vincularse con el factor de calidad del circuito resonante en serie.

Sea

$$BW = f_2 - f_1 = \text{ancho de banda de potencia mitad} \quad (4-28a)$$

Dividamos los dos miembros de la Ec. (4-28a) por f_r . Dado que BW es la diferencia entre los dos puntos de potencia mitad,

$$\frac{BW}{f_r} = \frac{f_2 - f_1}{f_r} = \frac{R}{2\pi f_r L} = \frac{1}{Q_r} \quad (4-29)$$

El ancho de banda *relativo* BW/f_r de un circuito resonante en serie es, por lo tanto, inversamente proporcional al factor Q_r .

A veces es conveniente examinar la variación de la tensión a través de cada componente individual. Por ejemplo, si el circuito de reja de una válvula de alto vacío se conecta a través del capacitor, es la tensión que se desarrolla sobre éste la que determina la corriente en el circuito de placa. La Fig. 4-7 muestra la curva de resonancia de las tres variables $|E_c|$, $|E_L|$ e $|I|$, de la Fig. 4-1. Se observará que las tres curvas tienen prácticamente la misma agudeza, con las dos curvas de

tensión algo inclinadas respecto de la curva de corriente. Las tres curvas verifican la Ec. (4-29) en cuanto a la agudeza de resonancia.

Se observará en la Fig. 4-7 que $|E_L|$ y $|E_c|$ alcanzan sus máximos prácticamente en la frecuencia de resonancia, fenómeno que se ha de-

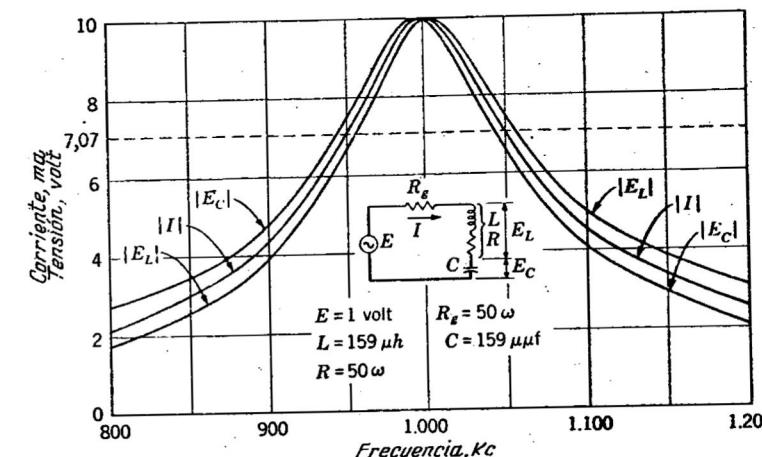


FIG. 4-7. Curvas de resonancia para un circuito en serie.

nominado "sobretensión de resonancia". Puede demostrarse que la tensión máxima depende de Q y de la tensión aplicada. En resonancia

$$I = \frac{E}{R_g + R} = \frac{E}{R_t} \quad (4-30)$$

de modo que la tensión a través del capacitor tiene la magnitud

$$|E_c| = \frac{|I|}{\omega C} = \frac{|E|}{\omega C R_t} \quad (4-31)$$

Pero, en resonancia, $\omega L = 1/\omega C$. Por lo tanto

$$|E_c| = |E| \frac{\omega L}{R_t} = |E| Q_r \quad (4-32)$$

Para el inductor vale una *aproximación* similar. Recordando que todo inductor físico tiene cierta resistencia, por ejemplo R en la Fig. 4-7, la magnitud de la tensión a través del inductor puede escribirse

$$|E_L| = \frac{|E|}{R_t} \sqrt{R^2 + X_L^2} \quad (4-33)$$

Pero si el factor de calidad del inductor satisface la inecuación

$$Q_L = \frac{X_L}{R} \geq 10 \quad f = f_r \quad (4-34)$$

la Ec. (4-33) puede escribirse, con gran aproximación,

$$|E_L| \approx |E| \frac{X_L}{R_t} = |E| Q_L \quad (4-35)$$

Las Ecs. (4-32) y (4-35) pueden utilizarse para comprobar la información dada por la Fig. 4-7.

4-6. Efecto de la impedancia de la fuente. Para los fines de la comparación que se hará más adelante en relación con la discusión de la antirresonancia, la Fig. 4-8 muestra las mismas tres variables para el caso extremo en que la fuente es en realidad un generador de corriente constante. En el generador de corriente constante la ten-

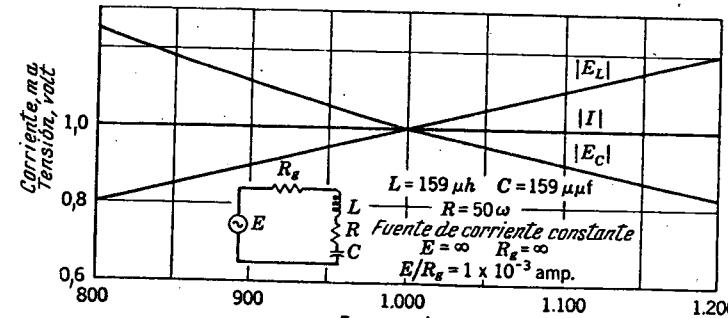


FIG. 4-8. Curvas de resonancia de un circuito en serie alimentado por un generador de corriente constante.

sión generada es infinita pero la resistencia interna es también infinita y de tal modo que la relación de tensión generada a resistencia interna es igual a la corriente suministrada por el generador. Se verá que en estas condiciones el circuito resonante en serie no provee discriminación alguna respecto de la frecuencia.

4-7. Curva universal de resonancia. La Fig. 4-6 muestra las curvas de selectividad para dos circuitos resonantes en serie de diferentes valores de Q . Si bien estas curvas exhiben diferentes valores de cresta y diferentes valores de selectividad, ambas tienen la misma forma. Es así, porque las dos curvas responden a la misma ecuación básica

$$I = \frac{E}{R + j(\omega L - 1/\omega C)}$$

donde R es la resistencia en serie total del circuito, incluso la del generador. La similitud entre las dos curvas se patentiza mejor escribiendo la ecuación anterior en la forma *normalizada*. Así, si la corriente se divide por su valor de cresta o de resonancia, y la frecuencia por el valor de resonancia, estas dos cantidades se reducen a grandezas adimensionales y se obtiene una ecuación normalizada que es aplicable a todos los circuitos resonantes en serie. El proceso de normalización se lleva a cabo del siguiente modo:

Factoreamos R en el denominador de la ecuación básica:

$$I = \frac{E}{R} \frac{1}{1 + j(1/R)(\omega L - 1/\omega C)} \quad (4-36)$$

Factoreamos ωL del segundo término del denominador:

$$I = \frac{E}{R} \frac{1}{1 + j(\omega L/R)(\omega/\omega_r - 1/\omega_r LC)} \quad (4-37)$$

Pero $\frac{E}{R} = I_r$, $\frac{\omega L}{R} = Q_r$, $\frac{1}{LC} = \omega_r^2$ $\quad (4-38)$

Introduciendo las Ecs. (4-38) en la Ec. (4-37), y dividiendo por I_r , resulta

$$\frac{I}{I_r} = \frac{1}{1 + jQ_r(f/f_r - f_r/f)} \quad (4-39)$$

La Ec. (4-39) está en la forma normalizada deseada y puede usarse para el cálculo con regla de la magnitud y la fase de la relación de corrientes. Debe observarse que la deducción supone que R se mantiene constante en la región de resonancia. En realidad R depende de la frecuencia, pero el uso del Q del circuito definido en resonancia elimina R de la ecuación, de modo que, en realidad, se hace la hipótesis de que el factor de calidad del circuito se mantiene constante en su valor de resonancia. La validez de esta hipótesis se discute más adelante.

Si bien la Ec. (4-39) está en una forma que permite el fácil cálculo con regla de cálculo, interesa reducirla a la forma polar, esto es,

$$\left| \frac{I}{I_r} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + [Q_r(f/f_r - f_r/f)]^2}} \quad (4-40a)$$

y $\theta = -\text{arc tg } Q_r \left(\frac{f}{f_r} - \frac{f_r}{f} \right)$ $\quad (4-40b)$

Si la Ec. (4-40a), que da la respuesta de corriente normalizada del circuito resonante en serie, se representa gráficamente con f/f_r , como variable independiente, se halla que la curva resultante es *simétrica* desde el punto de vista geométrico, esto es, $|I/I_r|$ tiene el mismo valor para dos frecuencias f_a y f_b , cuya media geométrica es f_r , la frecuencia de resonancia. Esto puede demostrarse así:

Elijamos dos frecuencias tales que

$$f_a f_b = f_r^2 \quad (4-41)$$

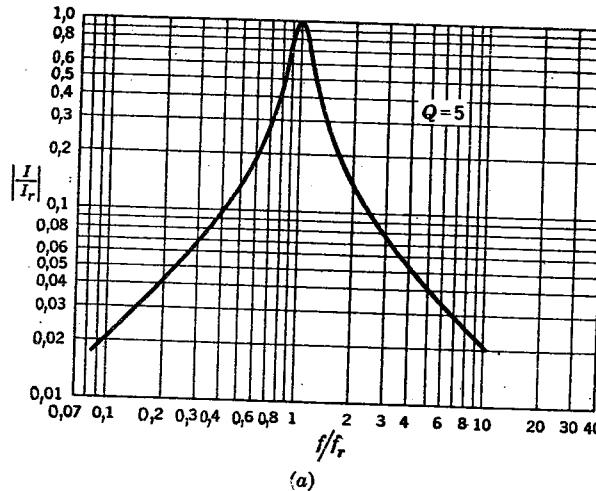
Entonces la cantidad $f_a/f_r - f_r/f_a$ es igual a

$$\left(\frac{f_a}{f_r} - \frac{f_r}{f_a} \right)^* = \frac{f_r^2}{f_b f_r} - \frac{f_r f_b}{f_r^2} = - \left(\frac{f_b}{f_r} - \frac{f_r}{f_b} \right)^* \quad (4-42)$$

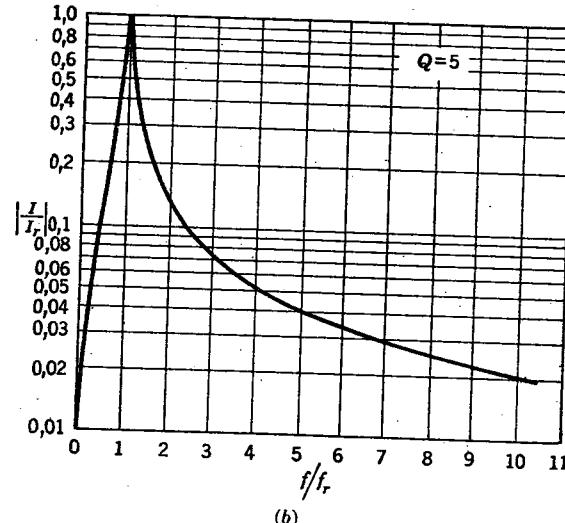
Debido a la identidad de las dos cantidades marcadas con asterisco, resulta evidente que en la Ec. (4-40a) $|I/I_r|$ tiene el mismo valor para

f_a y para f_b , con lo que se demuestra la simetría geométrica de la curva. También debe observar que si f_a y f_b son dos frecuencias cualesquiera cuya media geométrica es f_r , el ángulo θ tiene para ambas la misma magnitud, pero signos opuestos.

Una de las principales consecuencias de la geometría simétrica es que la Ec. (4-40a) resulta en una curva simétrica cuando se la representa gráficamente en función de una escala *logarítmica* de frecuencias. Así se aprecia en la Fig. 4-9a, donde se ha representado la Ec. (4-40a)



(a)



(b)

FIG. 4-9. Comparación de curvas de resonancia representadas (a) con escala logarítmica de frecuencia y (b) con escala lineal de frecuencias.

para $Q_r = 5$. La misma ecuación se ha representado en la Fig. 4-9b con escala lineal de frecuencias para mostrar la asimetría que resulta cuando una curva geométricamente simétrica se representa en escala lineal. Debe advertirse que en ambas representaciones es logarítmica la escala de las ordenadas para permitir una conveniente representación del amplio margen de valores, casi 100:1. Este recurso no afecta la simetría a lo largo del eje horizontal, por razones más o menos obvias.

No obstante, si se examina cuidadosamente la segunda curva, se advierte que *parece simétrica* en la vecindad de la resonancia, es decir, para valores de f/f_r próximos a 1. Aprovechase esta circunstancia para derivar una simplificación aproximada de la curva de resonancia universal —Ec. (4-39)— que puede usarse en la *región de resonancia*. Derivaremos ahora esta forma aproximada y veremos sobre qué gama de frecuencias es válida.

Definamos δ como la desviación relativa respecto de la resonancia, es decir,

$$\delta = \frac{f - f_r}{f_r} \quad (4-43)$$

Sumando 1 a los dos miembros de esta ecuación

$$1 + \delta = 1 + \frac{f - f_r}{f_r} = \frac{f}{f_r} \quad (4-44)$$

$$\text{de donde } \frac{f}{f_r} - \frac{f_r}{f} = 1 + \delta - \frac{1}{1 + \delta} = \frac{1 + 2\delta + \delta^2 - 1}{1 + \delta} \\ = \delta \frac{2 + \delta}{1 + \delta} \quad (4-45)$$

Si la variación de frecuencia se restringe a la vecindad de la resonancia, de modo que $\delta \ll 1$, se tiene la aproximación.

$$\frac{f}{f_r} - \frac{f_r}{f} \approx 2\delta \quad (4-46)$$

con lo que la ecuación (4-39) adopta la forma aproximada

$$\frac{I}{I_r} \approx \frac{1}{1 + j2Q_r\delta} \quad (4-47)$$

y las componentes polares de I/I_r devienen

$$\left| \frac{I}{I_r} \right| \approx \frac{1}{\sqrt{1 + (2Q_r\delta)^2}} \quad (4-48)$$

$$\theta \approx -\text{arc tg } 2Q_r\delta \quad (4-49)$$

La Ec. (4-48) tiene simetría *aritmética*, es decir, adopta el mismo valor para dos frecuencias f_a y f_b cualesquiera tales que $f_r - f_a = f_b - f_r$. El estudiante puede demostrarlo como ejercicio.

Las Ecs. (4-48) y (4-49) están representadas en la Fig. 4-10 como curva de resonancia universal. Debe observarse que se usa $Q_r\delta$ como va-

riable independiente, más bien que sólo δ , para que así la curva resulte independiente de los valores particulares de Q_r . Debe insistirse en que la curva es válida mientras sea $|\delta| \ll 1$.

Es de utilidad una breve explicación acerca del signo de θ en la Fig. 4-10 y la Ec. (4-49). Según la ecuación, θ es el ángulo de I relativo

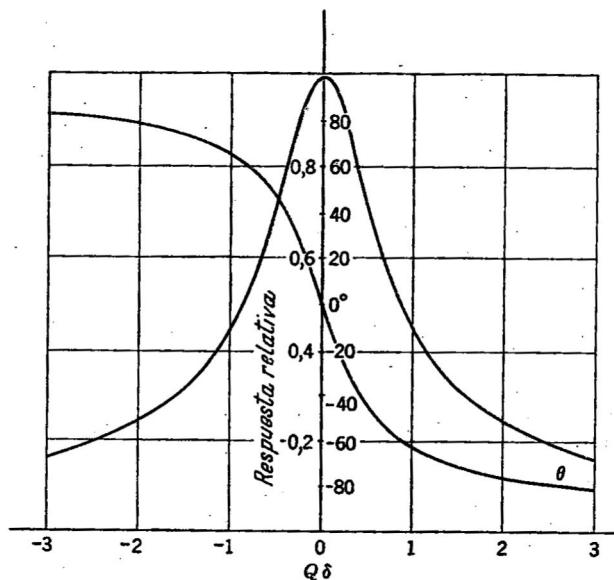


FIG. 4-10. Curva universal de resonancia.

a I_r . Si θ es negativo, I está atrasada respecto de I_r . Pero en resonancia, la corriente y la tensión aplicada están en fase; luego, θ negativo implica que la corriente atrasa respecto de la tensión aplicada, es decir, que el ángulo de fase del circuito es positivo.

4-8. Error de la forma aproximada. Puede obtenerse una idea de la magnitud de los errores involucrados en el uso de la ecuación aproximada (4-48), observando la Fig. 4-11, donde se han representado las ecuaciones exacta y aproximada para los valores de Q_r de 5 y 10. Pueden observarse los siguientes hechos: (1) Las curvas aproximadas están inclinadas hacia la izquierda en torno del punto de máxima respuesta, de modo que para una respuesta dada, las frecuencias dadas por la ecuación aproximada son menores que las dadas por la ecuación exacta. (2) La diferencia entre las frecuencias exacta y aproximada decrece a medida que nos acercamos a la condición de resonancia. (3) La diferencia entre las curvas exacta y aproximada disminuye al aumentar Q_r . Estos puntos pueden verificarse analíticamente a partir de las ecuaciones anteriores.

Es interesante observar que la ecuación aproximada puede utilizarse para determinar el ancho de banda, digamos, $(\Delta f)_a$ entre las dos fre-

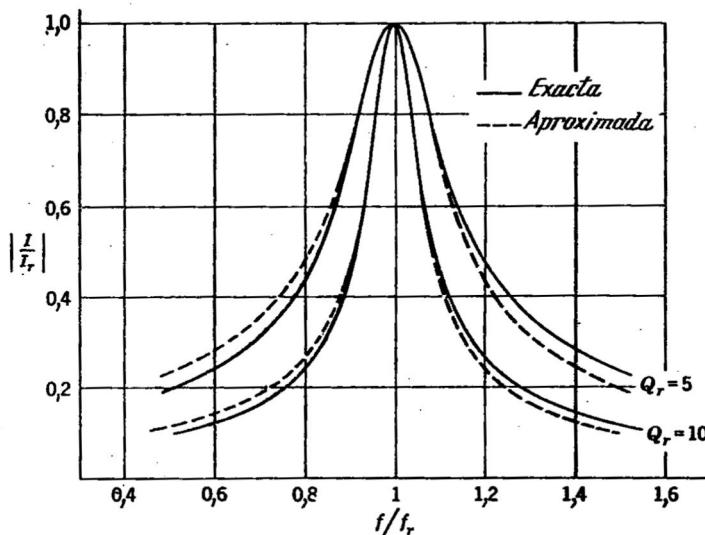


FIG. 4-11. Comparación entre las curvas de resonancia exacta y aproximada, para dos valores de Q .

cuencias para las cuales la respuesta normalizada tiene el valor $1/a$. De la Ec. (4-40a)

$$\frac{Q_r}{f_r} \left(f_a - \frac{f_r^2}{f_a} \right) = \frac{Q_r}{f_r} (\Delta f)_a = \sqrt{a^2 - 1}$$

de donde $(\Delta f)_a = \frac{f_r}{Q_r} \sqrt{a^2 - 1} = (BW) \sqrt{a^2 - 1}$ exacta (4-50a)

De las formas aproximadas (4-43) y (4-48),

$$\frac{2Q_r}{f_r} (f_a - f_r) = \frac{Q_r}{f_r} (\Delta f)_a = \sqrt{a^2 - 1}$$

$(\Delta f)_a = (BW) \sqrt{a^2 - 1}$ aproximada (4-50b)

Puesto que las Ecs. (4-50a) y (4-50b) son idénticas queda demostrada nuestra proposición.

Sin embargo, si queremos conocer las frecuencias para las cuales la respuesta es $1/a$, la aproximación introduce un error, el que es función de Q , y del valor de la respuesta normalizada. Sea

$f'_{\text{a}} =$ frecuencia exacta por debajo de la resonancia para la cual la respuesta es $1/a$

$f_{\text{a}} =$ frecuencia aproximada por debajo de la resonancia para la cual la respuesta es $1/a$.

Supongamos que se quiera averiguar el valor de Q para el cual la diferencia entre estos dos valores no excede de $100k$ por ciento. Esto es

$$\frac{f'_b - f_b}{f'_b} \leq k \quad \text{o} \quad \frac{f_b}{f'_b} = y \geq 1 - k$$

Luego, por la Ec. (4-40a)

$$Q_r \left(\frac{f'_b}{f_r} - \frac{f_r}{f'_b} \right) = -\sqrt{a^2 - 1}$$

eliéndose el signo negativo porque $f'_b/f_r < f_r/f'_b$. Luego

$$f'_b = f_r \left(-\frac{\sqrt{a^2 - 1}}{2Q_r} \pm \sqrt{\frac{a^2 - 1}{4Q_r^2} + 1} \right)$$

Debe elegirse el signo positivo para que f'_b resulte positivo. Expandiendo el segundo radical por la serie binomial,

$$f'_b \approx f_r \left(-\frac{\sqrt{a^2 - 1}}{2Q_r} + 1 + \frac{a^2 - 1}{8Q_r^2} \right) \quad (4-51)$$

De manera similar, obténese a partir de las Ecs. (4-43) y (4-48)

$$2Q_r \frac{(f_b - f_r)}{f_r} = -\sqrt{a^2 - 1}$$

$$\text{o} \quad f_b = f_r \left(1 - \frac{\sqrt{a^2 - 1}}{2Q_r} \right) \quad (4-52)$$

Luego, introduciendo y en términos de f'_b y f_b y despejando Q_r ,

$$Q_r = \frac{\sqrt{a^2 - 1}}{4} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{2}{1/y - 1}} \right) \quad (4-53)$$

donde ha de elegirse el signo positivo para reducir al mínimo el error introducido por conservar sólo los dos primeros términos de la serie binomial en la Ec. (4-51).

Por hipótesis, $y \geq 1 - k$. Introduciendo en la Ec. (4-53) se obtiene finalmente

$$Q_r \geq \frac{\sqrt{a^2 - 1}}{4} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2}{k}} \right) \quad (4-54)$$

La Ec. (4-54) está representada en la Fig. 4-12 para $k = 0,01$ y $0,03$. Por ejemplo, con $Q_r = 25$, las frecuencias determinadas con la ecuación aproximada son correctas dentro del 1 por ciento entre los puntos para los cuales la respuesta relativa es 1/10.

4-9. Sintonía: Resonancia en serie con capacitancia variable. En la discusión anterior se ha supuesto que los parámetros del circuito permanecen fijos mientras varía la frecuencia de la tensión aplicada. Se ha dicho que hay resonancia para la frecuencia que hace $X_L = -X_C$.

En la práctica, la resonancia puede obtenerse de otra manera. Si se mantienen constantes la amplitud y la frecuencia de la tensión aplicada, es posible variar los parámetros del circuito hasta llegar a la condición de resonancia, es decir, a $X_L = -X_C$. Este procedimiento se

conoce como *sintonía* y se practica de ordinario variando la **capacitancia** del circuito.

Cuando se usa la **capacitancia** como abscisa de la curva de resonancia, es también fácil especificar la agudeza de la curva en términos de la variación entre los puntos de potencia mitad, es decir, la varia-

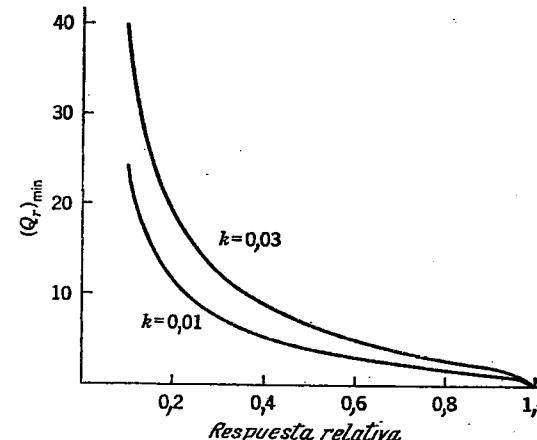


FIG. 4-12. Curvas que muestran el error entre las curvas de resonancia exacta y aproximada. El error entre las dos formas es igual a $100k$ por ciento.

ción de **capacitancia** necesaria para aumentar la corriente de $0,707 I_{\max}$ a I_{\max} y reducirla nuevamente a $0,707 I_{\max}$. En cada uno de los puntos extremos la reactancia total es igual a la resistencia, en magnitud. Sea

- C_1 = **capacitancia** en el punto de potencia mitad inferior
- C_2 = **capacitancia** en el punto de potencia mitad superior
- C_r = **capacitancia** en resonancia

$$\frac{1}{\omega C_1} - \omega L = R$$

$$\omega L - \frac{1}{\omega C_2} = R$$

$$\frac{1}{\omega C_1} - \frac{1}{\omega C_2} = 2R$$

$$\frac{C_2 - C_1}{\omega C_1 C_2} = 2R$$

Pero C_r^2 es aproximadamente igual a $C_1 C_2$ y si ΔC es la variación de la **capacitancia** entre los dos puntos de potencia mitad,

$$\frac{C_2 - C_1}{\omega C_1 C_2} = \frac{\Delta C}{\omega C_r^2} = 2R$$

$$\frac{\Delta C}{C_r} = 2R\omega C_r = \frac{2R}{\omega L} = \frac{2}{Q} \quad (4-55)$$

La Ec. (4-55) es muy similar a la Ec. (4-29), de modo que para hallar el Q y la resistencia de un circuito físico puede usarse indiferentemente la medición de la agudeza de resonancia por variación de frecuencia o por variación de capacitancia.

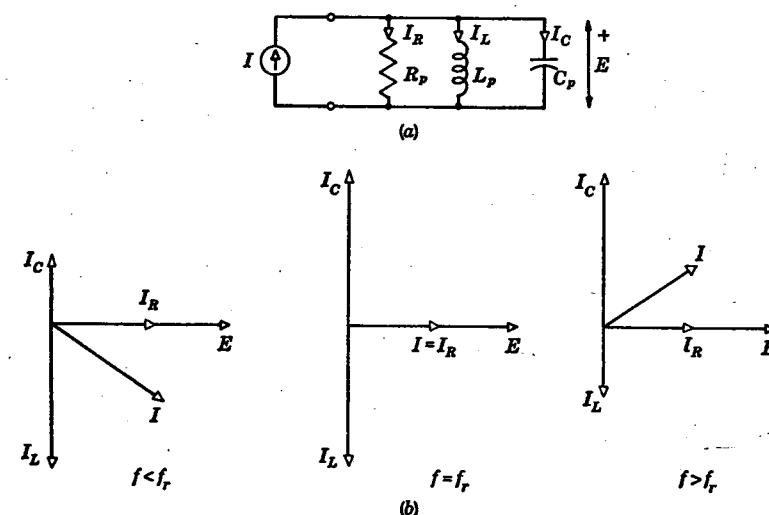


FIG. 4-13. Antirresonancia en un circuito en paralelo.
Nota: El circuito es el dual del de la Fig. 4-1.

4-10. Resonancia en paralelo. En la resonancia en paralelo, o antirresonancia, opónense dos susceptancias de igual magnitud y distinto signo, de modo que en la frecuencia de resonancia es mínima la admitancia en lugar de la impedancia.

La situación está representada en la Fig. 4-13. La admitancia total del circuito en paralelo puede determinarse sumando las admitancias individuales en forma compleja

$$Y = G_p + j \left(\omega C_p - \frac{1}{\omega L_p} \right) \quad (4-56)$$

La comparación de esta ecuación, que describe el circuito en paralelo de la Fig. 4-13a, con la Ec. (4-1) del circuito en serie, demuestra que estos dos circuitos son duales exactos, es decir, las ecuaciones son idénticas término a término, excepto por el intercambio de impedancia por admitancia. Así, la admitancia del circuito en paralelo se comporta frente a las variaciones de la frecuencia exactamente del mismo modo que la impedancia del circuito en serie. Luego, en virtud del principio de dualidad, se pueden trazar inmediatamente los diagramas polares de admitancia e impedancia del circuito en paralelo, Fig. 4-14. En la misma figura muéstranse las curvas de susceptancia.

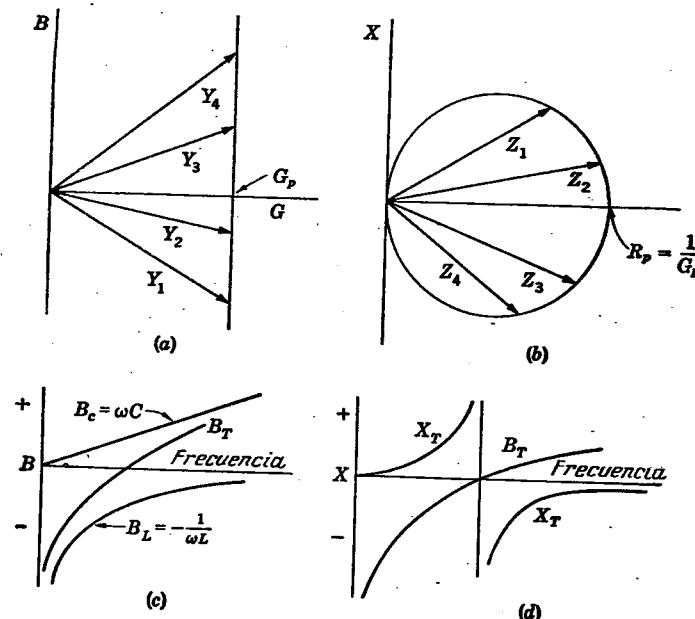


FIG. 4-14. Curvas de admitancia y susceptancia para el circuito en paralelo de la Fig. 4-13.

La ecuación que da la caída de tensión a través de los elementos en paralelo es

$$E = \frac{I}{Y} = \frac{I}{G_p + j(\omega C_p - 1/\omega L_p)} \quad (4-57)$$

y del principio de dualidad se deduce inmediatamente que E y Z (dado que I es constante) obedecen a la curva universal de resonancia. Esta conclusión es inmediata, por cuanto la Ec. (4-57) puede ser reducida a la forma normalizada

$$\frac{E}{E_r} = \frac{1}{1 + jQ_r(f/f_r - f_r/f)} \approx \frac{1}{1 + j2Q_r \delta} \quad (4-58)$$

Debe observarse que en este caso, sin embargo, en que R_p ($= 1/G_p$) está en paralelo con L_p , el factor de calidad del circuito está dado por la Ec. (4-18), vale decir, $Q_r = R_p/\omega_r L_p$; puesto que en resonancia $\omega_r L_p = 1/\omega_r C_p$, puede también escribirse

$$Q_r = \omega_r C_p R_p \quad (4-59)$$

Podría observarse que la forma en paralelo del circuito antirresonante que se acaba de discutir no es el circuito antirresonante "usual" con que se está probablemente familiarizado; R debería estar en serie con L más bien que en paralelo. Puede responderse que el comportamiento

miento de la mayor parte de los circuitos antirresonantes, en r.f., puede describirse indiferentemente sobre la base de cualquiera de las dos representaciones. De todos modos, ambas son aproximaciones de primer orden del sistema físico. Volveremos sobre esta cuestión más adelante, pero por el momento recogeremos esa observación. Consideremos, así, la representación más familiar del circuito antirresonante ilustrada en la Fig. 4-15.

En este diagrama se verá que la componente capacitiva de la susceptancia neutraliza la componente inductiva en la frecuencia de resonancia. De no haber resistencia, la corriente total sería nula y la admis-

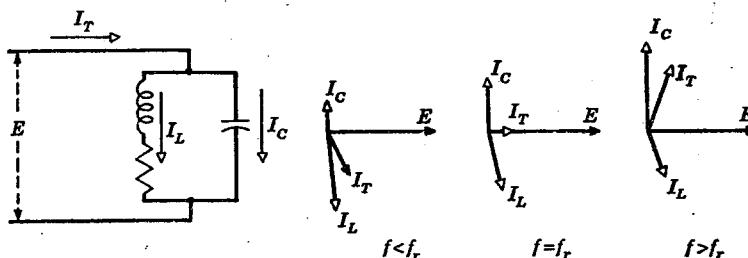


FIG. 4-15. Antirresonancia en un circuito paralelo de forma modificada.

tancia, cero. A esta frecuencia, el factor de potencia es la unidad. Este punto se considerará en seguida algebraicamente. En las frecuencias inferiores a la de resonancia, el circuito es inductivo, y, en las frecuencias superiores a la de resonancia, capacitivo; esto es, al revés de lo que ocurre en la resonancia en serie.

Es a menudo deseable en los circuitos que contienen elementos reactivos determinar de manera aproximada la variación de la reactancia respecto de la frecuencia. Esto puede hacerse en ocasiones despreciando las resistencias y representando la variación de las reactancias al variar la frecuencia. Se discutirán diversas representaciones de esta clase en el presente capítulo, los que encuentran una aplicación práctica en la discusión de los filtros y del teorema de las reactancias de Foster.

Así, si despreciamos R en la Fig. 4-15, las susceptancias del circuito son idénticas a las del circuito en paralelo (Fig. 4-14a) y son aplicables las curvas de las Figs. 4-14c y d. En todas las curvas de reactancia en que se desprecia la resistencia, la pendiente es *necesariamente positiva* para todas las frecuencias.

Para calcular algebraicamente la impedancia del circuito de la Fig. 4-15, sumemos las admitancias.

Llamando Y a la admitancia total,

$$Y = Y_L + Y_C = \frac{1}{R + jX_L} + \frac{1}{jX_C} = \frac{R + j(X_L + X_C)}{(R + jX_L)jX_C} \quad (4-60)$$

$$Z = \frac{1}{Y} = \frac{-X_L X_C + jR X_C}{R + j(X_L + X_C)} \quad (4-61)$$

Racionalizando

$$Z = \frac{RX_C^2}{R^2 + (X_L + X_C)^2} + j \frac{X_C^2 X_L + X_C X_L^2 + R^2 X_C}{R^2 + (X_L + X_C)^2} \quad (4-62)$$

4-11. Condición de factor de potencia unidad en el circuito resonante en paralelo. Para que Z_T sea una resistencia pura, es necesario que se anule la parte imaginaria de la Ec. (4-62).

Por lo tanto, para factor de potencia unidad;

$$\begin{aligned} X_C^2 X_L + X_C X_L^2 + R^2 X_C &= 0 \\ R^2 &= -X_L(X_C + X_L) \end{aligned} \quad (4-63)$$

Se observará que, para factor de potencia unidad, el criterio no es exactamente el mismo para la resonancia en paralelo que para la resonancia en serie, pues en esta última X_L debe ser igual a $-X_C$. Sin embargo, como ocurre a menudo en los circuitos de r.f., si el factor de calidad Q es alto, por ej., mayor que 10, $X_L \gg R$, y la Ec. (4-63) reduzce aproximadamente a

$$X_L = -X_C \quad (4-64)$$

Por ejemplo, sea

$$X_L = 1.000 \text{ ohm}$$

$$R = 20 \text{ ohm}$$

Para hallar el valor de X_C correspondiente al factor de potencia unidad, obtenemos de la Ec. (4-63)

$$\begin{aligned} X_C &= -\left(X_L + \frac{R^2}{X_L} \right) \\ &= -(1.000 + 0,4) = -1.000,4 \end{aligned} \quad (4-65)$$

de magnitud prácticamente igual a X_L .

Cuando la resistencia es apreciable en comparación con la reactancia, la reactancia inductiva no es igual a la reactancia capacitativa y entre las corrientes I_L e I_C hay una relación definida distinta de la unidad. Este hecho puede aprovecharse para llevar el circuito a la condición de factor de potencia unidad intercalando un amperímetro en cada rama. La relación se computa del modo siguiente: De la Ec. (4-63)

$$\begin{aligned} R^2 + X_L^2 &= -X_L X_C \\ \frac{R^2 + X_L^2}{X_C^2} &= -\frac{X_L}{X_C} \end{aligned}$$

Introduciendo el valor de $-X_C$ de la Ec. (4-65),

$$\frac{R^2 + X_L^2}{X_C^2} = \frac{X_L^2}{X_L^2 + R^2}$$

Pero $|I_C/I_L| = \sqrt{R^2 + X_L^2/|X_C|}$. Por lo tanto, para factor de potencia unidad,

$$\left| \frac{I_C}{I_L} \right| = \frac{X_L}{\sqrt{X_L^2 + R^2}} \quad (4-66)$$

Los circuitos de los radiotransmisores se llevan a veces a resonancia aprovechando la Ec. (4-66).

4-12. Condición de impedancia máxima en el circuito resonante paralelo. Puede ocurrir que en lugar de la condición de factor de potencia unidad se desee en el circuito la *impedancia máxima*. Al hacer el ajuste puede variarse la capacitancia, la frecuencia o la inductancia. Es común ajustar la capacitancia en todos los circuitos resonantes porque es más fácil construir capacitores variables que inductores variables. La Ec. (4-61) es la más conveniente para establecer la condición que da el máximo valor de $|Z|$. Dado que nos interesan los valores absolutos, es preferible trabajar con el cuadrado de la impedancia. Con esto se eliminan las raíces cuadradas y, por otra parte, $|Z|$ es máximo cuando lo es $|Z|^2$.

De la Ec. (4-61), hallando los cuadrados de los valores absolutos del numerador y el denominador

$$|Z|^2 = \frac{(R^2 + X_L^2)X_C^2}{R^2 + (X_L + X_C)^2} \quad (4-67)$$

La Ec. (4-67) es más fácil de aplicar que la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los dos términos de la Ec. (4-62).

Para hallar la condición de máximo respecto de X_C ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial |Z|^2}{\partial X_C} &= \frac{(R^2 + X_L^2)\{2X_C[R^2 + (X_L + X_C)^2] - 2X_C^2(X_L + X_C)\}}{[R^2 + (X_L + X_C)^2]^2} = 0 \\ R^2 + X_L^2 + 2X_L X_C + X_C^2 - X_L X_C - X_C^2 &= 0 \\ R^2 &= -X_L(X_C + X_L) \end{aligned} \quad (4-68)$$

Se ve que las Ecs. (4-68) y (4-63) son idénticas, de modo que cuando se ajusta el capacitor de modo que la impedancia resulte ser la máxima, obtiénes al mismo tiempo la condición de factor de potencia unidad.

Si se ajusta el circuito de la Fig. 4-15 a resonancia variando la inductancia, la resistencia puede también variar. La aproximación más aceptable es la que se obtiene admitiendo que ambos parámetros varían proporcionalmente; es decir, al variar la inductancia, varía la magnitud de Z_L pero no su ángulo. Pero

$$\begin{aligned} |Z_L|^2 &= R^2 + X_L^2 \\ X_L &= |Z_L| \operatorname{sen} \theta \end{aligned}$$

La Ec. (4-67) puede escribirse en la forma

$$|Z|^2 = \frac{|Z_L|^2 X_C^2}{|Z_L|^2 + 2|Z_L|X_C \operatorname{sen} \theta + X_C^2} \quad (4-69)$$

en la que $|Z_L|$ representa la magnitud absoluta de la impedancia de la rama inductiva. Para hallar el máximo respecto de Z_L

$$\begin{aligned} \frac{\partial |Z|^2}{\partial |Z_L|} &= \\ \frac{X_C^2 [2|Z_L|(|Z_L|^2 + 2|Z_L|X_C \operatorname{sen} \theta + X_C^2) - |Z_L|^2(2|Z_L| + 2X_C \operatorname{sen} \theta)]}{(|Z_L|^2 + 2|Z_L|X_C \operatorname{sen} \theta + X_C^2)^2} &= 0 \\ |Z_L|^2 + 2|Z_L|X_C \operatorname{sen} \theta + X_C^2 - |Z_L|^2 - |Z_L|X_C \operatorname{sen} \theta &= 0 \\ -X_C = |Z_L| \operatorname{sen} \theta &= X_L \end{aligned} \quad (4-70)$$

Por lo tanto, la manera de hacer $|Z|$ máximo variando $|Z_L|$ consiste en hacer que las reactancias inductiva y capacitativa tengan igual magnitud. Se ha visto que, cuando la resistencia es pequeña, este criterio coincide prácticamente con el factor de potencia unidad.

Puede hallarse el valor máximo de la impedancia introduciendo la Ec. (4-70) en la Ec. (4-61). Luego,

$$Z_m = -\frac{X_L X_C}{R} + j \frac{R X_C}{R} = -X_C(Q_r - j) \quad (4-71)$$

Tomando la magnitud,

$$|Z_m| = |X_C| \sqrt{Q_r^2 + 1} \quad (4-72)$$

y, una vez más, si Q_r es grande con respecto a 1, con buena aproximación

$$|Z_m| = |X_C| Q_r = \frac{L}{RC} \quad (4-73)$$

De manera similar puede hallarse la condición de máxima impedancia cuando se varía la frecuencia. Se hallará que cuando Q_r es grande, la Ec. (4-64) es muy aproximada, de modo que la frecuencia de antirresonancia es, prácticamente,

$$f_r = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}} \quad (4-74)$$

4-13. Resonancia con inductancia y capacitancia en las dos ramas. Las ecuaciones anteriores pueden aplicarse también al circuito de la Fig. 4-16 siempre que se aplique el término X_L a la reactancia total de una rama y X_C a la reactancia total de la otra rama. Para que exista resonancia en paralelo, una de las ramas tiene que tener más reactancia inductiva que capacitativa y la otra al revés.

En la Fig. 4-17 se muestra un circuito en que se toma una derivación en un punto intermedio de la inductancia. La condición que debe satisfacerse para que haya resonancia entre a y c es que la reactancia inductiva de una rama sea de igual magnitud que la reactancia capacitativa de la otra, es decir,

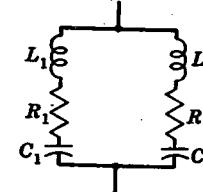


FIG. 4-16. Circuito resonante en paralelo con R , L y C en las dos ramas.

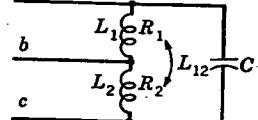


FIG. 4-17. Circuito resonante en paralelo con derivaciones.

$$\omega(L_1 + L_2 + 2L_{12}) = \frac{1}{\omega C} \quad (4-75)$$

Esto es lo mismo que decir que tiene que ser cero la reactancia inductiva total medida *alrededor* de la malla $L_1 L_2 C$ (incluso el efecto de la inductancia mutua entre L_1 y L_2).

Para que haya resonancia entre b y c , la reactancia inductiva de L_2 debe ser igual a la magnitud de la reactancia capacitiva de la rama $L_1 C$, esto es, $-\omega(L_1 + 2L_{12}) = 1/\omega C$. Luego

$$\omega L_2 = \frac{1}{\omega C} - \omega(L_1 + 2L_{12}) \quad (4-76)$$

Pero las Ecs. (4-75) y (4-76) son idénticas, y, por lo tanto, si hay resonancia entre dos puntos de un circuito en paralelo, para una frecuencia dada, la hay también entre otros dos puntos cualesquiera del mismo circuito.

Debe tenerse presente que si la capacitancia que hay entre las conexiones a y b es apreciable en comparación con C , el movimiento de la derivación de a a b puede tener efecto sobre la frecuencia de resonancia.

Si bien no se ha modificado la frecuencia de resonancia al pasar la derivación de a a b , la impedancia entre b y c es menor que entre a y c . Puede demostrarse que

$$Z_{ac} = \frac{1}{\omega_r C} \left[\frac{\omega_r(L_1 + L_2 + 2L_{12})}{R_1 + R_2} - j \right] \approx \frac{[\omega_r(L_1 + L_2 + 2L_{12})]^2}{R_1 + R_2} \quad (4-77)$$

siempre que

$$\frac{\omega_r(L_1 + L_2 + 2L_{12})}{R_1 + R_2} \gg 1$$

y

$$Z_{bc} = R_2 + j\omega_r L_2 - \left\{ \frac{R_2^2 - [\omega_r(L_2 + L_{12})]^2 + j2R_2\omega_r(L_1 + L_{12})}{R_1 + R_2} \right\} \approx \frac{[\omega_r(L_2 + L_{12})]^2}{R_1 + R_2} \quad (4-78)$$

siempre que

$$\frac{\omega_r L_2}{R_2} \gg 1$$

donde Z_{ac} = impedancia a resonancia entre los puntos a y c .

Z_{bc} = impedancia a resonancia entre los puntos b y c .

4-14. Agudeza de resonancia en el circuito en paralelo. Es evidente que cuando una combinación en paralelo de inductancia y capacitancia se conecta a través de un generador de tensión con impedancia interna nula, la tensión que aparece a través del circuito es independiente de la frecuencia. En cambio, si el generador tiene una alta im-

pedancia, la caída de tensión en esta impedancia es mínima en la frecuencia de antirresonancia, para la cual es mínima la corriente. Por consecuencia, la tensión a través del circuito será máxima para esta frecuencia. La corriente en cada una de las ramas será también, aproximadamente, máxima cuando lo sea la caída de tensión. A medida que aumenta la resistencia del generador, la curva se hace más puntiada.

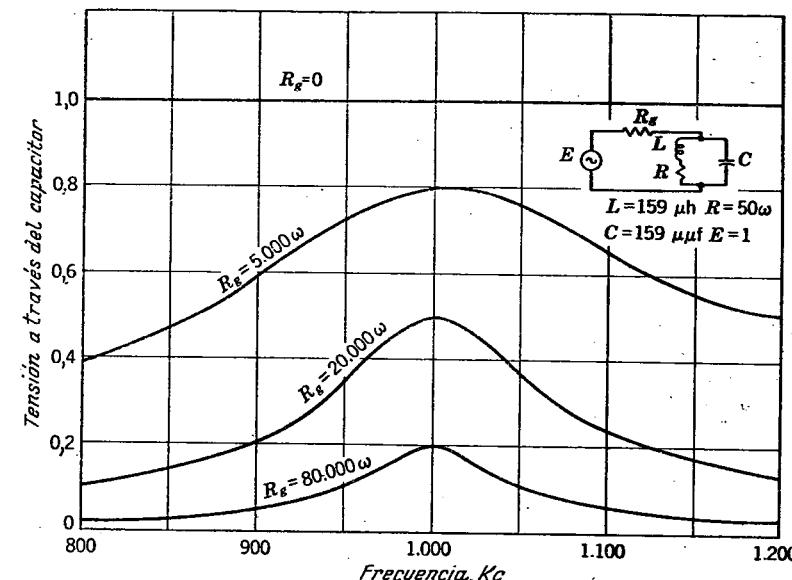


FIG. 4-18. Efecto de la resistencia del generador sobre la tensión a través de un circuito resonante en paralelo.

guda, a causa de que la caída de tensión en el generador aumenta más a las frecuencias fuera de resonancia que a la frecuencia de resonancia. La Fig. 4-18 ilustra la variación de la tensión a través del capacitor en función de la frecuencia, para tres valores de la resistencia del generador.

Con el fin de comparar las agudezas de las curvas de resonancia de la Fig. 4-18, conviene volverlas a dibujar como en la Fig. 4-19, es decir, con la siguiente modificación: La tensión del generador se ha aumentado al mismo tiempo que su resistencia interna, para hacer coincidir los máximos de todas las curvas en el mismo punto. Esta condición se encuentra aproximadamente en la práctica, porque por lo general las mayores tensiones generadas están asociadas con mayores resistencias internas, tanto en el caso de las válvulas como en el de los generadores electromagnéticos. También se ha incluido en la Fig. 4-19 el caso del generador de corriente constante, para mostrar que, a diferencia del circuito en serie, es éste el caso de máxima agudeza.

Con el fin de ofrecer una comparación entre las variables, respecto de la frecuencia, de los circuitos en serie y en paralelo, se han

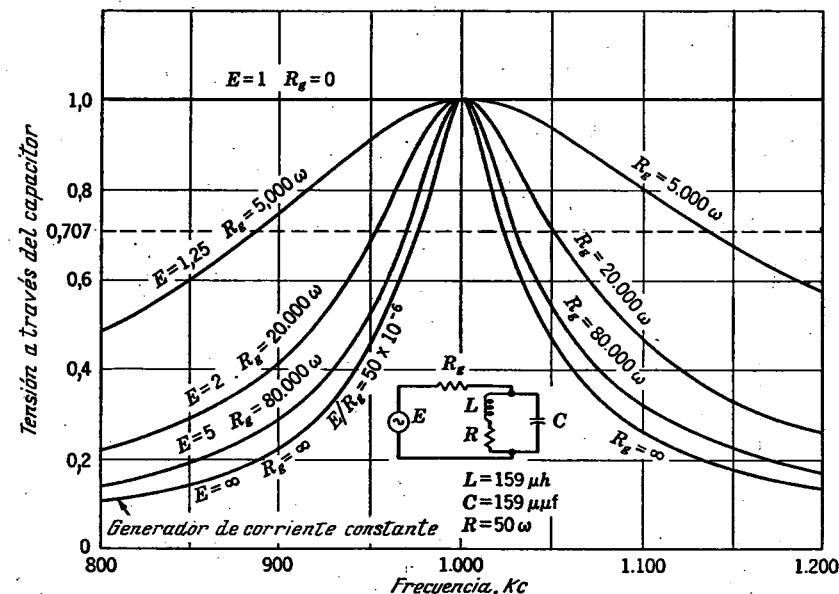


FIG. 4-19. Curvas de resonancia de la Fig. 4-18 con las tensiones del generador modificadas de modo de hacer coincidir los máximos.

trazado las curvas de la Fig. 4-20 y de la Fig. 4-21. En la Fig. 4-20, el circuito en paralelo presenta en antirresonancia una impedancia igual a la interna del generador (20.000 ohm). Esta condición debe compararse con la del caso del circuito en serie de la Fig. 4-7, donde los mismos valores de R , L y C ofrecen, en resonancia en serie, una impedancia de 50 ohm, igual a la del generador correspondiente. Se observa que, salvo el distinto significado de las escalas, las curvas de la Fig. 4-7 pueden superponerse a las de la Fig. 4-20. Pero la curva de corriente total de la Fig. 4-7 corresponde, por su forma, a la curva de tensión total de la Fig. 4-20; la tensión a través del capacitor de la Fig. 4-7, corresponde a la corriente del inductor en la Fig. 4-20; y la tensión a través del inductor en la Fig. 4-7, corresponde a la corriente a través del capacitor en la Fig. 4-20.

Las curvas de la Fig. 4-21 corresponden al caso en que es nula la impedancia del generador y deben ser comparadas con las de la Fig. 4-8, con las cuales pueden superponerse, con las mismas observaciones que en el caso de las Figs. 4-7 y 4-20.

Como conclusión puede decirse que *para obtener agudeza de sintonía con un generador de baja impedancia hay que usar un circuito resonante en serie, mientras que hay que usar un circuito resonante en paralelo, con el mismo objeto, cuando la impedancia del generador es alta*. Como la mayor parte de los generadores utilizados en los cir-

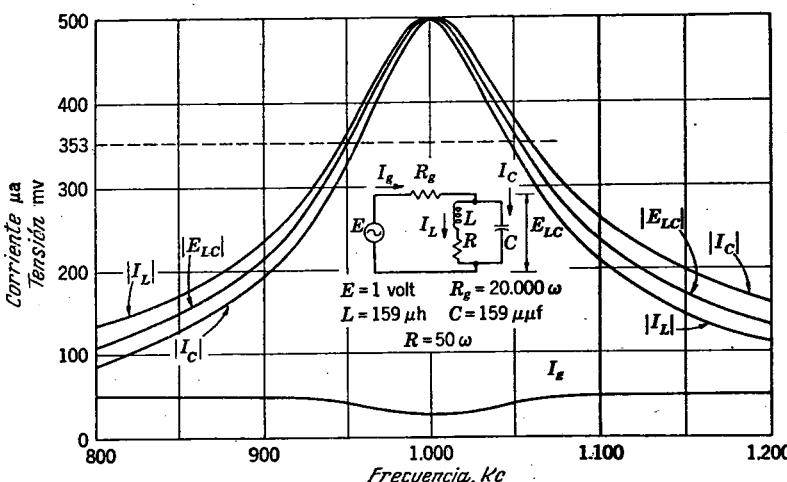


FIG. 4-20. Curvas de resonancia de un circuito en paralelo.

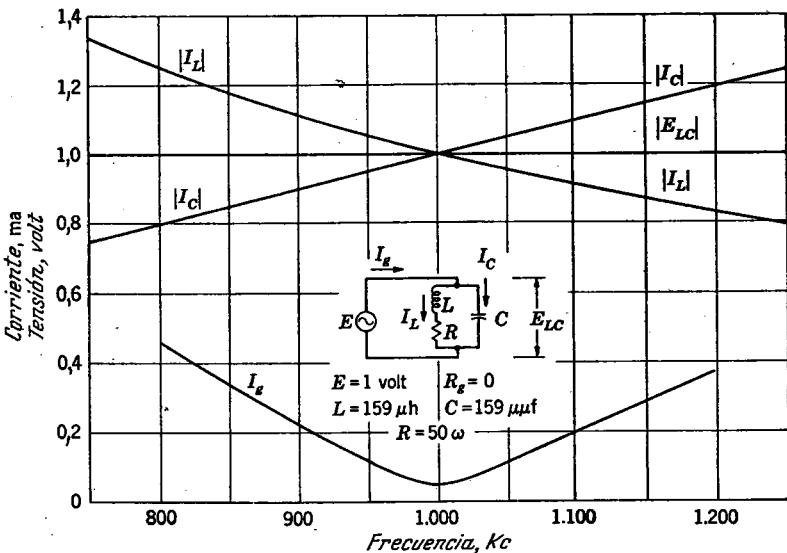


FIG. 4-21. Curvas de resonancia de un circuito en paralelo excitado por un generador de tensión constante.

cuitos de telecomunicación son de alta impedancia, la resonancia en paralelo se usa mucho más que la resonancia en serie.

4-15. Curva universal de resonancia. En los apartados anteriores se ha observado el comportamiento dual de los circuitos resonantes en serie y en paralelo. Demostraremos ahora que la misma curva universal es aplicable a los dos casos, a condición de definir adecuadamente el factor Q . Consideremos el circuito de la Fig. 4-22a. La aplicación del teorema de Norton al generador da lugar al circuito equi-

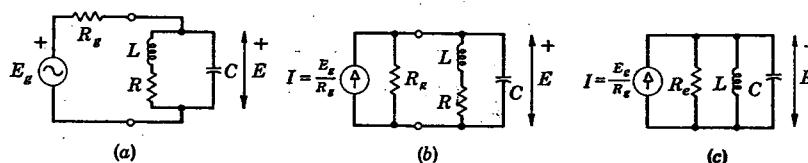


FIG. 4-22. Circuitos resonantes en paralelo.

valente de la Fig. 4-22b. Es conveniente reducir este circuito al de la Fig. 4-22c.

Así, modificando la rama RL a su forma equivalente en paralelo:

$$Y = \frac{1}{R + j\omega L} = \frac{R - j\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}$$

Si el Q_L del inductor es de 10 o más, $(\omega L)^2 \gg R^2$ y

$$Y \approx \frac{R}{(\omega L)^2} - \frac{j}{\omega L} \quad (4-79)$$

Esta admitancia es la de una resistencia $(\omega L)^2/R$ y una inductancia L en paralelo. La resistencia efectiva neta en paralelo, R_e en la Fig. 4-22c, es la combinación en paralelo de $(\omega L)^2/R$ con R_g , y

$$R_e = \frac{R_g(\omega L)^2/R}{R_g + (\omega L)^2/R} = \frac{(\omega L)^2}{R + (\omega L)^2/R} \quad (4-80)$$

Dado que R_e y L están en paralelo, el Q del circuito en resonancia es

$$Q_e = \frac{R_e}{\omega_r L} = \frac{\omega_r L}{R + (\omega_r L)^2/R_g} = \frac{(Q_L)_r}{1 + (\omega_r L)^2/R_g R} = \frac{(Q_L)_r}{1 + (Q_L)_r \omega_r L / R_g} \quad (4-81)$$

El último paso se obtiene dividiendo el numerador y el denominador de la expresión por R .

Luego, para el circuito final de la Fig. 4-22c,

$$E = \frac{I}{Y} = \frac{I}{1/R_e + j(\omega C - 1/\omega L)} \quad (4-82)$$

Multiplicando el numerador y el denominador por R_e y factorizando $1/\omega_r L$,

$$E = \frac{IR_e}{1 + (R_e/\omega_r L)(\omega_r LC - \omega_r/\omega)} \quad (4-82a)$$

Observando que $IR_e = E_r$, la tensión en antirresonancia, e introduciendo las cantidades conocidas,

$$\frac{E}{E_r} = \frac{1}{1 + jQ_e(f/f_r - f_r/f)} \quad (4-83)$$

Esta expresión es idéntica a la de I/I_r del circuito resonante en serie; por lo tanto, la curva universal de resonancia de la Fig. 4-10 es apli-

cable a la tensión normalizada del circuito antirresonante. Este hecho se utiliza en el estudio de los circuitos amplificadores sintonizados en el Cap. XV.

Dado que el circuito en consideración es el dual del circuito resonante en serie, puede esperarse un aumento resonante de corriente en cada rama, lo que puede demostrarse del modo siguiente: La corriente que circula por el capacitor en la Fig. 4-22c es, a resonancia,

$$|I_C| = \frac{E_r}{|X_C|} = \frac{IR_e}{X_L} = IQ_e \quad (4-84)$$

Si se multiplica el primer miembro de la Ec. (4-83) por I_r/I , la ecuación da la impedancia normalizada del circuito antirresonante

$$\frac{Z}{Z_{ar}} = \frac{1}{1 + jQ_e(f/f_r - f_r/f)} \quad (4-83a)$$

La Ec. (4-83a) permite evaluar la impedancia en serie equivalente del circuito antirresonante, como se ha hecho en la Fig. 4-23. Estas curvas se han trazado para la aproximación de simetría aritmética.

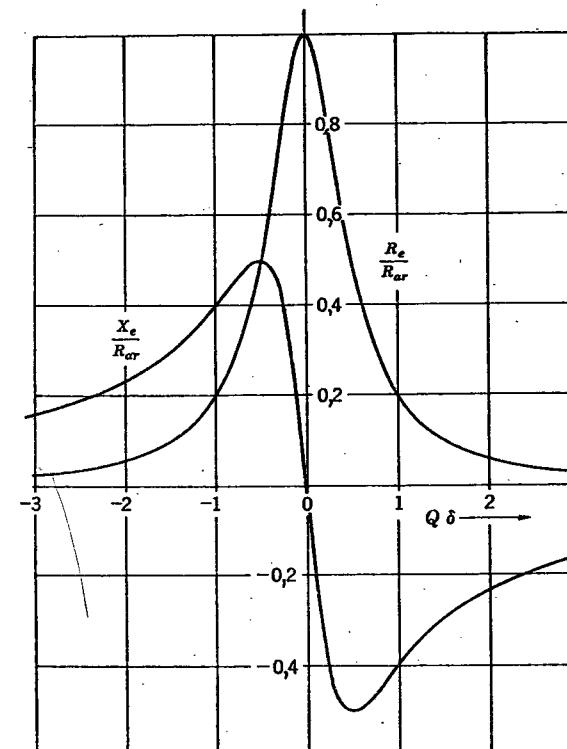


FIG. 4-23. Impedancia equivalente en serie de un circuito resonante en paralelo.

4-16. Diseño de un circuito antirresonante. Un problema que se presenta a menudo es el de diseñar un circuito antirresonante capaz de convertir una rama resistiva en una resistencia definida mayor en antirresonancia. El circuito comúnmente utilizado es el de la Fig. 4-15. De la Ec. (4-62), la impedancia en antirresonancia es una resistencia pura dada por

$$R_{ar} = \frac{RX_C^2}{R^2 + (X_L + X_C)^2} \quad (4-85)$$

Según la Ec. (4-63), $(X_L + X_C)^2 = R^2/X_L^2$. Introduciendo esta igualdad en la Ec. (4-85),

$$R_{ar} = \frac{X_C^2 X_L^2}{R(R^2 + X_L^2)} \quad (4-86)$$

Además, también por la Ec. (4-63), $-X_L X_C = R^2 + X_L^2$. Luego

$$\begin{aligned} R_{ar} &= \frac{R^2 + X_L^2}{R} \\ X_L &= \sqrt{R(R_{ar} - R)} \\ -X_L X_C &= R_{ar} R \end{aligned} \quad (4-87)$$

$$X_C = \frac{R_{ar} R}{X_L} = -R_{ar} \sqrt{\frac{R}{R_{ar} - R}} \quad (4-88)$$

Una de las aplicaciones más importantes de este circuito antirresonante se encuentra en la sintonía de la carga de placa del amplificador clase C. En esta aplicación, trasfórmase la relativamente pequeña resistencia de carga R en un valor mucho mayor R_{ar} , necesario para cargar adecuadamente la válvula. El circuito sintonizado sirve para otra importante función en esta aplicación, por cuanto su característica de selectividad discrimina en contra de las armónicas de orden superior que se hallan presentes en la corriente de placa. La supresión satisfactoria de estas armónicas requiere que la rama inductiva tenga un Q_L de 10 ó más. Esta cuestión impone un problema de diseño, dado que el circuito contiene sólo dos parámetros ajustables, X_L y X_C , y no puede por lo tanto diseñárselo para satisfacer tres valores arbitrarios, R_{ar} , R y Q_L . Se demostrará que, especificando Q_L , la relación de transformación de impedancias

$$n = \frac{R_{ar}}{R} \quad (4-89)$$

debe ser mayor que cierto valor mínimo. Por definición $Q_L = X_L/R$. Introduciendo esta igualdad en la Ec. (4-87),

$$Q_L = \sqrt{\frac{R_{ar} - R}{R}} = \sqrt{n - 1}$$

de donde

$$n = Q_L^2 + 1 \quad (4-90)$$

La Ec. (4-90) puede llevarse a las (4-87) y (4-88) para obtener

$$\begin{aligned} X_C &= -\frac{R_{ar}}{Q_L} \\ X_L &= X_C \frac{Q_L^2}{Q_L^2 + 1} \end{aligned} \quad (4-91)$$

Así, para obtener un Q_L de 10 ó más, la relación de transformación debe ser de 101 ó más, y, con buena aproximación, $X_L = X_C$.

Si con esta relación R_{ar} resulta excesiva, hay que recurrir a otras soluciones, por ejemplo, tomar una derivación sobre la bobina, como se ha visto en el Ap. 4-13.

4-17. Componentes de circuito en radio frecuencia. En los apartados anteriores se ha supuesto que los parámetros circuitales R , L y C son independientes de la frecuencia y se han considerado como *constantes* del circuito. En la realidad esto puede no ser verdad; los tres parámetros varían con la frecuencia y la variación puede ser significativa en r.f. Consideraremos este aspecto de la cuestión.

4-18. Inductores. Se acostumbra a imaginar como circuito equivalente de una bobina de inductancia la combinación de una inductancia pura L en serie con una resistencia R , como la anterior, constante. Este circuito tan sencillo no es adecuado para alta frecuencia. Si el estudiante piensa detenidamente en la construcción de una bobina, se dará cuenta de que hay tres elementos de impedancia presentes: inductancia debido al concatenamiento de flujo cuando la bobina está recorrida por una corriente; resistencia debida a la conductividad finita del alambre de que está hecha la bobina; y capacitancia distribuida por toda la estructura, entre espira y espira y entre extremo y extremo.

La resistencia efectiva del alambre aumenta con la frecuencia a causa del efecto pelicular y el efecto de proximidad. En cuanto al primero, puede demostrarse que el aumento de la frecuencia causa una redistribución de la corriente respecto del área transversal del conductor, haciendo que los filetes de corriente tiendan a circular cerca de la superficie del conductor. La resultante disminución del área transversal efectiva determina un aumento de la resistencia proporcional a la raíz cuadrada de la frecuencia.

Por otra parte, la distribución de la corriente en el conductor es también afectada por la corriente que circula por los conductores próximos, lo que ocasiona una nueva disminución de la sección efectiva y el correspondiente aumento de la resistencia. Este fenómeno conócese como *efecto de proximidad*.

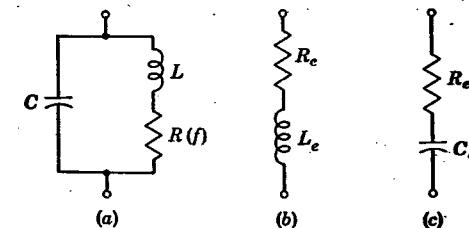


FIG. 4-24. Circuitos equivalentes del inductor. (a) Aproximación de primer orden. (b) Debajo de la frecuencia de resonancia. (c) Arriba de la frecuencia de resonancia.

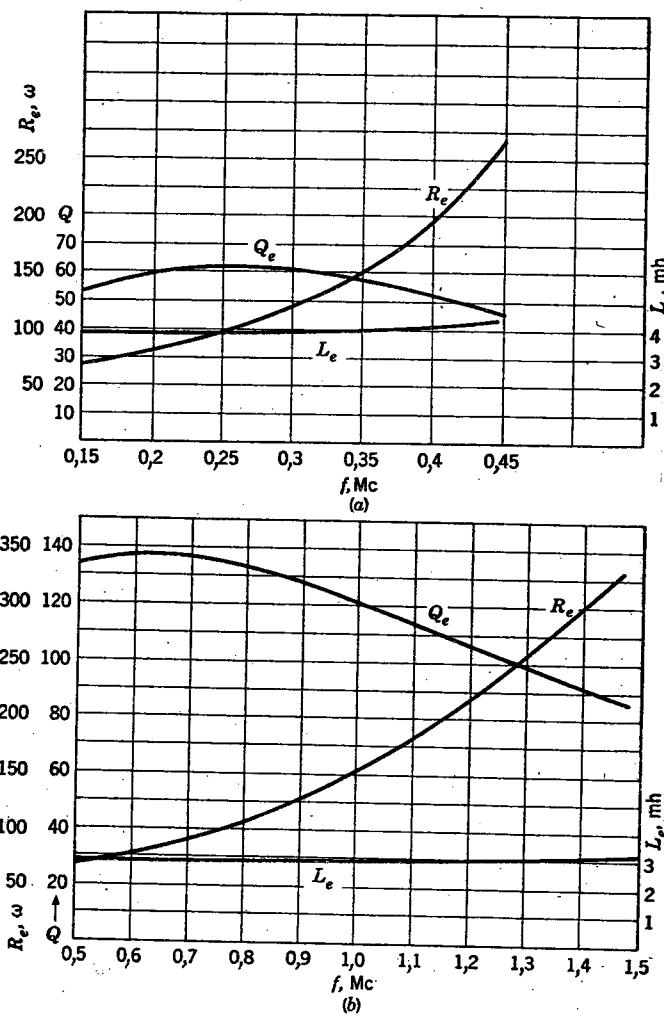


FIG. 4-25. Variación de los parámetros de un inductor típico con la frecuencia. (a) Con núcleo de aire. (b) Con núcleo metálico.

Puede verse fácilmente que la construcción de un equivalente exacto de una bobina es complicada, por lo que hay que recurrir a una aproximación de primer orden. Este circuito equivalente se ilustra en la Fig. 4-24a. Se observará que este circuito es precisamente un circuito antirresonante, estudiado en los apartados anteriores, los resultados de los cuales son aquí aplicables. Con el objeto de insistir en el hecho de que la resistencia depende de la frecuencia, se la indica con $R(f)$. La impedancia en serie equivalente del inductor puede determinarse

por medio de la Ec. (4-62) y está representada, suponiendo que $R(f)$ es constante, en la Fig. 4-23. Las curvas muestran que el circuito es inductivo para las frecuencias inferiores a la de resonancia, $f_r = 1/2\pi\sqrt{LC}$, y capacitivo para $f > f_r$. Por consecuencia, si el inductor debe presentar efectivamente una reactancia inductiva, hay que usarlo por debajo de la frecuencia de resonancia propia. También puede demostrarse con la misma ecuación que la inductancia efectiva en serie para las frecuencias mucho menores que f_r está dada aproximadamente por

$$L_e = \frac{L}{1 - (f/f_r)^2} \quad (4-92)$$

siempre que $Q_r = \omega L/R \geq 10$ dentro de la gama de frecuencias de interés. Esta desigualdad es por lo general satisfecha por los inductores prácticos para r.f.

De manera similar puede demostrarse que la resistencia en serie efectiva para las frecuencias mucho menores que f_r es

$$R_e = \frac{R(f)}{[1 - (f/f_r)^2]^2} \quad (4-93)$$

donde no se conoce de modo general la variación de $R(f)$ con la frecuencia, aunque se sabe que aumenta en proporción algo mayor que \sqrt{f} .

La Fig. 4-25 ilustra la variación medida de R_e , L_e y $Q_e = \omega L_e / R_e$ para dos inductores típicos. Se observará que el factor Q_e permanece, dentro de un determinado rango de frecuencias, más constante que R_e , cuyo comportamiento es difícil de prever. Por esta razón las ecuaciones de la curva de resonancia universal se expresan en términos del valor de Q a la frecuencia de resonancia.

Es de práctica común, en r.f., la de rodear los inductores con un blindaje de aluminio puesto a masa, con el fin de reducir al mínimo el acoplamiento magnético y eléctrico con los componentes próximos.

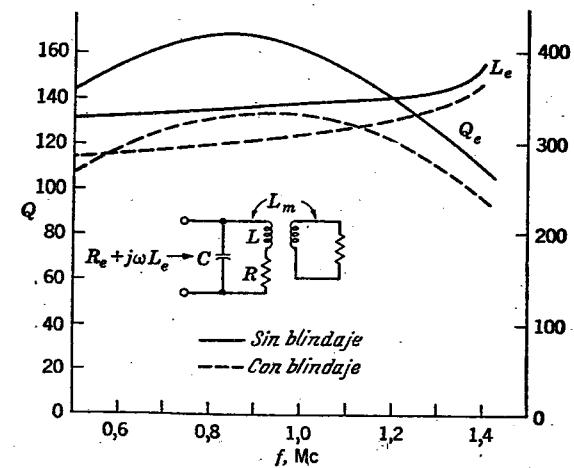


FIG. 4-26. Efecto del blindaje metálico sobre los parámetros de un inductor.

Este blindaje complica aún más la representación circuital del inductor, por cuanto actúa como un circuito secundario de inductancia y resistencia acoplado por inductancia mutua con el inductor. En la Fig. 4-26 se ilustra la aproximación de primer orden correspondiente. El estudiante puede comprobar, por lo menos cualitativamente, que el blin-

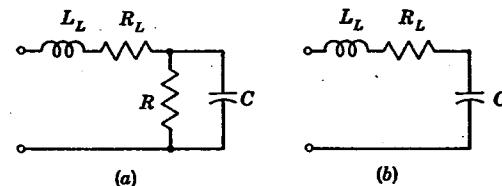


FIG. 4-27. Circuitos equivalentes del capacitor.

daje actúa en el sentido de reducir L_e y aumentar R_e . En la misma figura se representan los valores medios de L_e y Q_e de un inductor típico, con y sin blindaje.

4-19. Capacitores. El circuito equivalente correspondiente a la aproximación de primer orden de un capacitor es el ilustrado en la Fig. 4-27a. R representa las pérdidas en el dieléctrico del capacitor, L_L y R_L representan la inductancia y la resistencia del chicote de conexión. En los buenos capacitores con dieléctrico de aire o de mica, puede suponerse que R es infinitamente grande, con lo que se obtiene el circuito resonante en serie de la Fig. 4-27b. En este caso, la inductancia del chicote puede llegar a ser muy importante a frecuencias del orden de 100 Mc/s o más. En este orden de frecuencia, la inductancia de un chicote está dada con buena aproximación por

$$L = 0,0002l \left(\ln \frac{4l}{d} - 1 \right) \text{ } \mu\text{h} \quad (4-94)$$

donde l = longitud del chicote en mm.

d = longitud del chicote en mm.

Así, si un capacitor de 100 μF tiene un chicote de 25 mm en cada extremo, de alambre de 0,3 mm de diámetro, la reactancia inductiva de las dos conexiones a 100 Mc/s es de unos 30 ohm. Teniendo en cuenta que la reactancia de C , sólo es, de -16 ohm a esa frecuencia, se observa que a 100 Mc/s el pretendido capacitor tiene una reactancia *inductiva* de 14 ohm.

4-20. Medición de los parámetros circuitales. Las conclusiones a que hemos llegado en los dos apartados anteriores demuestran que el diseño de los circuitos de r.f. se ve complicado a causa de los parámetros circuitales que no son constantes. Esto es particularmente cierto cuando se trata de las frecuencias muy altas (v.h.f.) (30 a 300 Mc/s), y ultra altas (300 a 3.000 Mc/s). En estas altas frecuencias es preferible determinar los parámetros efectivos por medición directa en la frecuencia deseada. Los parámetros en serie de un inductor pueden determinarse muy fácilmente en r.f. por medio de instrumentos conocidos comercialmente como "Q-metros" (medidores de Q). Se ex-

plicará el funcionamiento de estos instrumentos, porque ellos representan una muy interesante aplicación práctica de la resonancia en serie. El circuito básico es el de la Fig. 4-28a, y el circuito equivalente, el de la Fig. 4-28b. La corriente I' , provista por un oscilador calibrado,

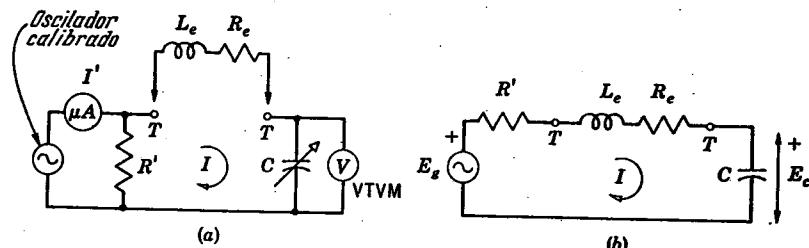


FIG. 4-28. Circuito del Q-metro, utilizado para medir los parámetros de un inductor.

se mantiene constante por medio de controles adecuados y amperímetro de termocupla. La aplicación del teorema de Thévenin da el circuito equivalente de la derecha. Con la bobina desconocida conectada a los terminales T , ajústase el capacitor variable hasta que el voltímetro electrónico indica el máximo de tensión. Este máximo ocurre en resonancia, cuando

$$I = \frac{E_g}{R' + R_e} \quad (4-95)$$

de modo que

$$|E_c| = I|X_C| = \frac{E_g|X_C|}{R' + R_e} \quad (4-96)$$

Pero en resonancia son iguales los valores de X_L y $|X_C|$; luego

$$|E_c| = |E_g| \frac{X_L}{R' + R_e} \quad (4-97)$$

En una versión comercial típica del instrumento, R' es 0,04 ohm y puede despreciarse, en general, en comparación con R_e ; así

$$|E_c| = |E_g| Q_e \quad (4-98)$$

Si, por lo tanto, se fija en un valor determinado I' , y con ella E_g , es posible calibrar el voltímetro directamente en valores de Q_e . La inductancia efectiva está dada por

$$L_e = \frac{1}{\omega_e^2 C} \quad (4-99)$$

Esta descripción cubre sólo dos de las muchas mediciones que pueden hacerse con el Q-metro. Las demás propiedades de la resonancia pueden aprovecharse para la medición de la capacitancia distribuida de los inductores y mediciones similares. Si bien el Q-metro sirve para determinar el factor de calidad de un circuito inductivo, no sirve

para determinar el Q_r de un circuito resonante a la frecuencia de resonancia a causa de que entonces la impedancia en serie del circuito medido es una resistencia pura. Esta dificultad se salva midiendo Q , según el método del ancho de banda de potencia mitad. Por ejemplo, en el circuito de la Fig. 4-5e, la frecuencia de la tensión aplicada puede variarse de f_1 a f_2 , frecuencias para las cuales la corriente disminuye al 70,7 por ciento del valor de resonancia. Luego, según la Ec. (4-29), el Q , del circuito completo, incluso el generador, es $Q_r = f_r/(f_2 - f_1)$.

Por otra parte, si se quiere medir el factor de calidad del circuito *RLC* solo, puede recurrirse a mediciones de impedancia, pues la reactancia total es

$$X = X_L + X_C = \omega L - \frac{1}{\omega C}$$

Diferenciando con respecto a f ,

$$\frac{dX}{df} = 2\pi L + \frac{1}{2\pi C f^2}$$

Pero a la frecuencia de resonancia, la derivada tiene el valor

$$\left(\frac{dX}{df}\right)_r = 2\pi L + \frac{1}{2\pi C f_r^2} = 4\pi L \quad (4-100)$$

Luego, según la expresión de Q_r (para los circuitos en paralelo) y la Ec. (4-100),

$$(Q_L)_r = \frac{\omega_r L}{R} = \frac{f_r}{2R} \left(\frac{dX}{df}\right)_r \quad (4-101)$$

Dado que R y $(dX/df)_r$, pueden determinarse con mediciones de impedancia, puede aprovecharse la Ec. (4-101) para determinar $(Q_L)_r$, a base de los datos obtenidos. Esta ecuación es también útil para determinar el Q de las secciones resonantes de línea de transmisión.

El factor de calidad de un circuito antirresonante puede determinarse del mismo modo. Las frecuencias de potencia mitad son las frecuencias para las cuales la tensión a través del circuito (alimentado por un generador de corriente constante) cae al 70,7 por ciento del valor de resonancia. Luego, la Ec. (4-29) da el factor de calidad del circuito completo, incluso la impedancia del generador (si ésta no puede considerarse como infinita).

El Q del circuito antirresonante sólo puede determinarse a base de mediciones de admitancia. Por el principio de dualidad, tiénesse, según puede demostrarse,

$$Q = \frac{R_p f_r}{2} \left(\frac{dB}{df}\right)_r = \frac{f_r}{2G_p} \left(\frac{dB}{df}\right)_r \quad (4-102)$$

donde G_p es la conductancia equivalente del circuito en la frecuencia de antirresonancia.

4-21. Resonancia múltiple: Es posible que una red sea resonante para una frecuencia y antirresonante para otra; de hecho, el número de frecuencias de resonancia y de antirresonancia de un circuito depende sólo del número de elementos capacitivos e inductivos que contiene. Los circuitos que tienen más de una frecuencia de resonancia o antirresonancia se llaman circuitos de *resonancia múltiple*.

Un ejemplo del empleo de un circuito que es resonante a una frecuencia y antirresonante en otra es el caso en que se inserta una combinación en paralelo de inductancia y capacitancia en un circuito de antena para presentar alta impedancia a una señal interferente. Esta combinación se llama "trampa de onda". Al mismo tiempo el circuito en conjunto está sintonizado de modo de que acepte la señal deseada.

Cuando las redes de este tipo son algo complicadas, se acostumbra a analizarlas en cuanto a su comportamiento admitiendo que sólo contienen reactancias puras, vale decir, se desprecian o suponen nulas las pequeñas resistencias asociadas con los elementos reactivos. Según se ha explicado anteriormente, esta práctica simplifica mucho la tarea, disponiéndose, además, de medios para corregir los resultados tomando en cuenta las componentes resistivas.

Sujeto a esta hipótesis simplificativa, puede aprenderse mucho acerca de los circuitos de resonancia múltiple a partir de sus curvas de reactancia o susceptancia, similares a las de las Figs. 4-2 y 4-1c y d. La manera de utilizar estas curvas se ilustra considerando el ejemplo de la Fig. 4-29.

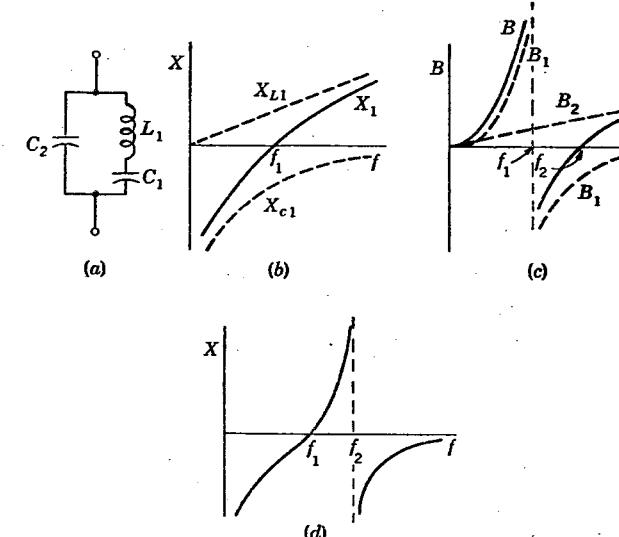


FIG. 4-29. Circuito de resonancia múltiple.

En *b* se suman las reactancias de L_1 y C_1 para obtener la reactancia combinada X_1 en función de la frecuencia. Dado que las dos ramas L_1C_1 y C_2 están en paralelo, es mejor considerar sus susceptancias. Así, en *c*, B_1 es la reciproca de X_1 y se suma gráficamente a $B_2 = \omega C_2$. La reciproca de la suma aparece en *d*. Esta curva representa la reactancia total de la combinación de tres elementos considerada.

La inspección de la curva de *d* demuestra que en f_1 es nula la impedancia total; por lo tanto, f_1 es una frecuencia de resonancia en serie, o lo que se llama un *cero*. En cambio, la impedancia total es infinita (recuerde que se suponen elementos ideales) en f_2 ; luego, f_2 es una frecuencia de antirresonancia o *polo*.

Pueden determinarse las frecuencias a las que ocurren los ceros y los polos escribiendo la ecuación de Z , impedancia de excitación:

$$Z = \frac{(-j/\omega C_2)j(\omega L_1 - 1/\omega C_1)}{j(\omega L_1 - 1/\omega C_1 - 1/\omega C_2)}$$

Factoreando L_1/ω en el denominador y el numerador,

$$Z = -\frac{j}{\omega C_2} \frac{\omega^2 - 1/L_1 C_1}{\omega^2 - L_1 C_1 C_2/(C_1 + C_2)} \quad (4-103)$$

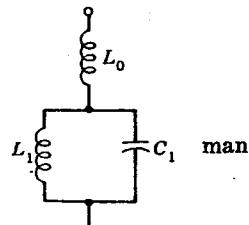
Es evidente que para $\omega^2 = 1/L_1 C_1$ es $Z = 0$, lo que define un cero o frecuencia de resonancia en serie. Luego, adoptando la notación

$$\omega_1^2 = \frac{1}{L_1 C_1} \quad \omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} \quad (4-104)$$

De modo similar, para $\omega^2 = \frac{1}{L_1 C_1 C_2/(C_1 + C_2)}$, es $Z \rightarrow \infty$, lo que define un polo o frecuencia de antirresonancia. Luego

$$\omega_2^2 = \frac{1}{L_1 C_1 C_2/(C_1 + C_2)} \quad \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1 C_2/(C_1 + C_2)}} \quad (4-105)$$

Introduciendo las Ecs. (4-104) y (4-105) en la Ec. (4-103), obtiénes la forma simplificada



$$Z = \frac{-j}{\omega C_2} \left[\frac{(\omega^2 - \omega_1^2)}{(\omega^2 - \omega_2^2)} \right] \quad (4-106)$$

El circuito de la Fig. 4-30 puede ser analizado de manera similar y da

$$Z = j\omega L_0 \left[\frac{(\omega^2 - \omega_2^2)}{(\omega^2 - \omega_1^2)} \right] \quad (4-107)$$

donde ω_1 es un polo de valor

$$\omega_1^2 = \frac{1}{L_1 C_1} \quad (4-108)$$

y ω_2 es un cero de valor

FIG. 4-30. Circuito cuya impedancia está dada por la Ec. (4-107).

$$\omega_2^2 = \frac{1}{L_0 L_1 C_1 / (L_0 + L_1)} \quad (4-109)$$

Los subíndices de las ω se eligen en el orden de sus valores, esto es $\omega_2 > \omega_1$.

Se observará que las Ecs. (4-106) y (4-107) son de formas muy similares, ya que difieren solamente por el coeficiente que precede a las barras y los subíndices de las ω . Esta similitud responde a un principio general que puede patentizarse extrapolando estos resultados. Así, la impedancia de excitación de cualquier red de dos terminales sin pérdidas tiene la forma

$$Z = x \frac{(\omega^2 - \omega_{o1}^2)(\omega^2 - \omega_{o2}^2)(\omega^2 - \omega_{os}^2) \cdots (\omega^2 - \omega_{on}^2)}{(\omega^2 - \omega_{x1}^2)(\omega^2 - \omega_{x2}^2)(\omega^2 - \omega_{xs}^2) \cdots (\omega^2 - \omega_{xn}^2)} \quad (4-110)$$

donde $x = j\omega H$ ó $x = H/j\omega$.

El estudiante observará que esta sentencia se establece sin prueba. Los resultados anteriores muestran simplemente que *dos* configuraciones circuitales compuestas por elementos sin pérdidas presentan impedancias de excitación de forma especial. La demostración general se encontrará en los textos más avanzados.

4-22. Teorema de las reactancias, de Foster. En la Ec. (4-110) cada frecuencia $\omega_{ok}/2\pi$ es un cero, pues si $f = f_{ok}$, $Z = 0$. Además estos valores de frecuencia se denominan *ceros internos*, lo que significa simplemente que son finitos y distintos de cero. De modo similar, cada frecuencia $\omega_{xk}/2\pi$ es un polo *interno*, si $f = f_{xk}$, $Z \rightarrow \infty$ y f_{xk} será siempre finito y distinto de cero. Con estas definiciones y la Ec. (4-110), puede enunciarse el teorema de las reactancias, de Foster: *La impedancia de excitación de toda red de dos terminales libre de pérdidas está unívocamente especificada por sus polos y ceros internos, los que corresponden a frecuencias reales, y por un factor de escala *H*.* Esto es consecuencia del hecho de que *H* y las singularidades internas son las únicas constantes de la Ec. (4-110).

Hay dos corolarios de importancia:

Corolario 1. *Los polos y los ceros de una red de dos terminales libre de pérdidas ocupan posiciones alternadas a lo largo de la escala de las frecuencias.* Este resultado se conoce como *propiedad de separación* de las redes dichas y puede ser demostrado derivando la Ec. (4-110). Se encuentra que $dZ/d\omega > 0$, lo que significa que las curvas de reactancia tienen siempre pendiente positiva. (Esto resulta también de la observación de que las curvas de reactancia y de susceptancia de los elementos libres de pérdidas tienen pendiente positiva.) Luego, dado que Z sólo cambia de signo en los polos y en los ceros, la propiedad de separación queda demostrada.

Una consecuencia de esta propiedad de separación es que el número de ceros *internos*, z , y el número de polos *internos*, p , no pueden diferir jamás en más de 1.

En los ejemplos numéricos conviene ordenar los subíndices de las singularidades internas de modo que $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 \dots$ Es por con-

secuencia conveniente expandir la Ec. (4-110) de dos maneras alternativas, según las dos posibles formas del factor externo x .

Si $x = j\omega H$, $\omega = 0$ y $Z = 0$ para la corriente continua. Luego, en virtud de la propiedad de separación, la singularidad siguiente (o primera singularidad interna) debe ser un polo, después del cual se alternan los ceros y los polos subsiguientes. Luego, para $x = j\omega H$, la Ec. (4-110) puede escribirse

$$Z = j\omega H \frac{(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_3^2) \cdots (\omega^2 - \omega_{2z}^2)}{(\omega^2 - \omega_2^2)(\omega^2 - \omega_4^2) \cdots (\omega^2 - \omega_{2z+1}^2)} \quad (4-110a)$$

En cambio, si $x = H/j\omega$, $Z \rightarrow \infty$ para $\omega = 0$, lo que indica la presencia de un polo externo para corriente continua. Por la propiedad de separación, la primera singularidad interna debe ser un cero, después del cual se alternan los polos y los ceros al aumentar la frecuencia. Luego, para $x = H/j\omega$, la Ec. (4-110) puede escribirse

$$Z = \frac{H}{j\omega} \frac{(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_3^2) \cdots (\omega^2 - \omega_{2p+1}^2)}{(\omega^2 - \omega_2^2)(\omega^2 - \omega_4^2) \cdots (\omega^2 - \omega_{2p}^2)} \quad (4-110b)$$

Corolario 2. Sólo pueden obtenerse cuatro distintos tipos de curvas de reactancia con las redes de dos terminales libres de pérdidas. Este corolario puede demostrarse observando las propiedades inherentes de las Ecs. (4-110a) y (4-110b), esto es, que z y p pueden ser iguales o diferir en 1. Dado que hay dos ecuaciones y dos posibilidades en cada una, Z tiene cuatro formas posibles. Estas se hallan ilustradas en la Fig. 4-31.

Consideremos un ejemplo específico, por ejemplo, $x = j\omega H$ y $z = p$. Luego, alternan en igual número las dos clases de singularidad interna, comenzando con un polo y terminando con un cero. Por la propiedad de separación hay además un polo en la frecuencia infinita. Esta última proposición puede también ser verificada mediante la Ec. (4-110a). Factoreando ω^2/ω^2 y tomando el límite para $\omega \rightarrow \infty$,

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} Z = \lim_{\omega \rightarrow \infty} j\omega H \frac{[1 - (\omega_2/\omega)^2][1 - (\omega_4/\omega)^2] \cdots [1 - (\omega_{2z}/\omega)^2]}{[1 - (\omega_1/\omega)^2][1 - (\omega_3/\omega)^2] \cdots [1 - (\omega_{2z-1}/\omega)^2]}$$

Este caso está ilustrado por la Fig. 4-31a. En los diagramas, indicanse los ceros con un pequeño círculo y los polos, con una cruz.

En la figura se dan también, para cada caso, dos de las posibles configuraciones circuitales. Es de interés cómo puede verificarse la correspondencia entre las curvas y los circuitos mediante consideraciones físicas. Así, prosiguiendo con el ejemplo anterior, que corresponde a a en la figura, consideremos el comportamiento del circuito en serie. Para c.c., hay un camino directo de cortocircuito por las inductancias $L_0, L_1, L_3, \dots, L_{2z-1}$, lo que da $Z = 0$ para c.c. Para la frecuencia infinita, es también infinita la reactancia de L_0 , pero como esta inductancia está en serie con el resto del circuito, $Z \rightarrow \infty$ para la frecuencia infinita. De esta manera hemos verificado las dos singularidades externas de la curva de reactancia: un cero para c.c. y polo para frecuencia infinita. Además, como los distintos circuitos antirre-

sonantes del tipo L_1C_1 están todos en serie, debe haber un polo para la frecuencia de antirresonancia de cada uno de estos circuitos; luego el número de circuitos antirresonantes debe ser igual al número de polos internos de la curva de reactancia.

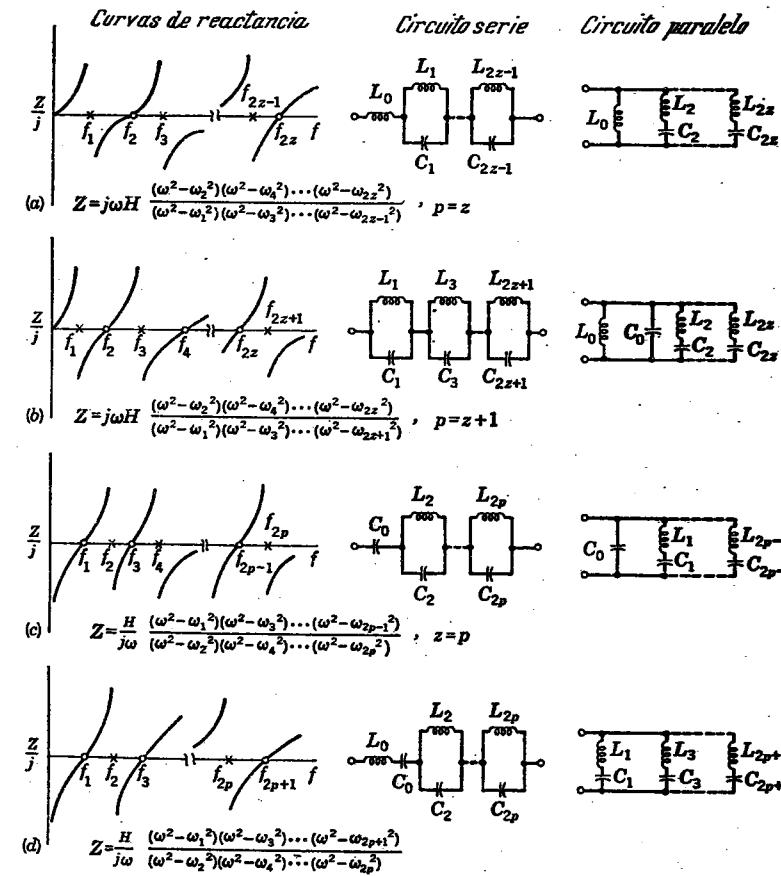


FIG. 4-31. Resumen de las redes básicas, de Foster.

El circuito en paralelo puede ser verificado del mismo modo. Dado que cada una de las ramas en paralelo contiene una inductancia en serie, Z es infinita para la frecuencia infinita. El número de ramas resonantes en serie conectadas en paralelo debe ser ahora igual al número de ceros internos de la curva de reactancia, dado que la impedancia se anula para la frecuencia de resonancia en serie de cada una de estas ramas.

Las otras posibilidades están también ilustradas en la Fig. 4-31 y pueden ser verificadas del mismo modo.

4-23. Formas canónicas. El estudiante debe tomar nota del hecho de que en cada una de las redes de Foster de la Fig. 4-31, el número total de elementos exceden en 1 el número de singularidades internas (la suma de los ceros y los polos internos) y que este número es el *mínimo* que puede usarse para sintetizar una curva de reactancia dada. Por esta razón las redes de Foster se consideran como formas fundamentales o *canónicas*. El valor de las formas canónicas en el diseño de las estructuras de mínimo número de elementos se pondrá en evidencia al considerar la síntesis de las redes reactivas.

4-24. Síntesis de las redes de Foster. Los componentes de una red de Foster que son necesarios para obtener una curva de reactancia dada pueden ser determinados expandiendo la Ec. (4-110) con el número adecuado de ceros y polos, en *fracciones parciales*, según se ha descrito en el Ap. 2-13. Esta expansión reduce la ecuación a una serie de términos, cada uno de los cuales puede ser identificado con una capacitancia y una inductancia en paralelo, es decir, con un circuito antirresonante. Este procedimiento se aclarará considerando un ejemplo típico.

Se quiere sintetizar una red reactiva que proporcione la respuesta ilustrada en la Fig. 4-31b, con dos polos internos, ω_1 y ω_3 , y un cero interno, ω_2 . En este caso, reducense la Ec. (4-110) a

$$Z = j\omega H \frac{(\omega^2 - \omega_2^2)}{(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_3^2)} \quad (4-111)$$

El grado de ω en el numerador es 3, y en el denominador, 4. Luego, Z es una fracción racional *propia*, y la expansión en fracciones parciales¹ en términos de ω^2 es

$$Z = j\omega H \left[\frac{A}{(\omega^2 - \omega_1^2)} + \frac{B}{(\omega^2 - \omega_3^2)} \right] \quad (4-112)$$

Dado que las dos ecuaciones (4-111) y (4-112) deben ser idénticas, pueden evaluarse los coeficientes A y B igualando los términos entre paréntesis:

$$\frac{A}{(\omega^2 - \omega_1^2)} + \frac{B}{(\omega^2 - \omega_3^2)} = \frac{(\omega^2 - \omega_2^2)}{(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_3^2)}$$

Reduciendo a común denominador,

$$A(\omega^2 - \omega_3^2) + B(\omega^2 - \omega_1^2) = (\omega^2 - \omega_2^2)$$

Sea $\omega = \omega_1$.

$$A(\omega_1^2 - \omega_3^2) = (\omega_1^2 - \omega_2^2)$$

$$A = \frac{(\omega_1^2 - \omega_2^2)}{(\omega_1^2 - \omega_3^2)} \quad (4-113)$$

Sea $\omega = \omega_3$.

$$B(\omega_3^2 - \omega_1^2) = (\omega_3^2 - \omega_2^2)$$

$$B = \frac{(\omega_3^2 - \omega_2^2)}{(\omega_3^2 - \omega_1^2)} \quad (4-114)$$

¹ Ver, por ejemplo, W. L. Hart, "College Algebra", D. C. Heath and Company, Boston, 1926.

Luego, dado los valores de los polos y los ceros, pueden obtenerse los valores numéricos de A y B . La Ec. (4-112) deviene, entonces,

$$Z = \frac{j\omega HA}{(\omega^2 - \omega_1^2)} + \frac{j\omega HB}{(\omega^2 - \omega_3^2)} \quad (4-115)$$

Dado que la impedancia total de dos redes en serie es la *suma* de las impedancias individuales, la Ec. (4-115) representa dos combinaciones de impedancias en serie. Cada combinación puede ser identificada con la Fig. 4-32, donde se tabulan algunas combinaciones básicas de reactancia. Así, cada término de la Ec. (4-115) es una combinación *LC* en paralelo, de modo que pueden calcularse los componentes del primer término. De la Ec. (4-115) y la Fig. 4-32,

$$C_1 = \frac{1}{|HA|} \quad (4-116)$$

$$L_1 = \frac{1}{\omega_1^2 C_1}$$

Los componentes de las otras partes de la red se calculan de manera similar y se observará entonces que se ha derivado la forma en serie de la red de la Fig. 4-31b.

	Elemento	Z	Y	Singularidad interna
a		$j\omega L$	$\frac{1}{j\omega L}$	Ninguna
b		$\frac{1}{j\omega C}$	$j\omega C$	Ninguna
c		$j \frac{L_1}{\omega} (\omega^2 - \omega_1^2)$	$\frac{\omega}{jL_1(\omega^2 - \omega_1^2)}$	$\omega_1^2 = \frac{1}{L_1 C_1}$
d		$\frac{\omega}{jC_2(\omega^2 - \omega_2^2)}$	$\frac{jC_2(\omega^2 - \omega_2^2)}{\omega}$	$\omega_2^2 = \frac{1}{L_2 C_2}$

FIG. 4-32. Resumen de los elementos básicos para la síntesis de redes de Foster.

En los problemas específicos se necesita un dato más, aparte de los ceros y los polos, para que pueda evaluarse H . Esto se ilustra en el siguiente ejemplo numérico:

Diseñar una red de Foster del tipo en serie para obtener una impedancia de excitación de $+j100$ ohm a la frecuencia $\omega = 1$ megarradián/s. Debe haber un cero a 3 megarradianes/s y polos a 2 y 4 megarradianes/s. Siguiendo la notación anterior para ordenar los subíndices, sea

$$\begin{aligned}\omega_1 &= 2 \text{ megarradián/s} \\ \omega_2 &= 3 \text{ megarradián/s} \\ \omega_3 &= 4 \text{ megarradián/s}\end{aligned}$$

Para hallar H , introducamos $\omega = 1$ megarradián/s en la Ec. (4-111):

$$\begin{aligned}j100 &= j(1 \times 10^6)H \frac{(1 \times 10^6)^2 - (3 \times 10^6)^2}{[(1 \times 10^6)^2 - (2 \times 10^6)^2][(1 \times 10^6)^2 - (4 \times 10^6)^2]} \\ &= -jH \frac{8 \times 10^{-6}}{45} \\ H &= -\frac{45 \times 10^2}{8 \times 10^{-6}} = -5,63 \times 10^8\end{aligned}$$

Por la Ec. (4-113)

$$A = \frac{(\omega_1^2 - \omega_2^2)}{(\omega_1^2 - \omega_3^2)} = \frac{(4 - 9) \times 10^{12}}{(4 - 16) \times 10^{12}} = +0,416$$

Por la Ec. (4-114)

$$B = \frac{(\omega_3^2 - \omega_2^2)}{(\omega_3^2 - \omega_1^2)} = \frac{(16 - 9) \times 10^{12}}{(16 - 4) \times 10^{12}} = +0,584$$

Por la Ec. (4-116)

$$C_1 = \frac{1}{|HA|} = \frac{1}{(5,63 \times 10^8)(0,416)} = 4,250 \mu\mu f$$

$$L_1 = \frac{1}{\omega_1^2 C_1} = 58,7 \mu h$$

$$\text{y } C_3 = \frac{1}{|HB|} = \frac{1}{(5,63 \times 10^8)(0,584)} = 3,040 \mu\mu f$$

$$L_3 = \frac{1}{\omega_3^2 C_3} = 20,5 \mu h$$

L_1 y C_1 están en paralelo. C_3 y L_3 están en paralelo. Las dos combinaciones en paralelo están en serie. Con esto complétase el diseño de la red requerida.

El estudiante puede preguntarse ahora cómo se deriva la forma en paralelo de la red de Foster de la Fig. 4-31b. En esta forma hay cierto número de ramas en paralelo. Por lo tanto, una buena manera de encarar el problema es el de considerar las admitancias en lugar de las impedancias, ya que las admitancias en paralelo pueden sumarse directamente. Luego, para obtener el equivalente en paralelo de la red ya derivada, es sólo necesario invertir la ecuación de impedancia (4-111) y expandirla en fracciones parciales. Así, invirtiendo la Ec. (4-111),

$$Y = \frac{1}{j\omega H} \frac{(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_3^2)}{(\omega^2 - \omega_2^2)} \quad (4-117)$$

Como en el ejemplo anterior, hay que expandir en fracciones parciales en términos de ω^2 , por lo que es conveniente multiplicar todo por ω/ω , lo que da

$$Y = \frac{\omega}{jH} \frac{(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_3^2)}{\omega^2(\omega^2 - \omega_2^2)} \quad (4-117a)$$

Ahora Y incluye una fracción racional *impropia*, porque el grado de ω no es menor en el numerador que en el denominador. Entonces, para hacer el desarrollo en fracciones parciales se divide una vez por el denominador.

$$\begin{aligned}Y &= \frac{\omega}{jH} \left(1 + \frac{C}{\omega^2} + \frac{D}{\omega^2 - \omega_2^2} \right) \\ &= \frac{\omega}{jH} + \frac{C}{jH\omega} + \frac{\omega D}{jH(\omega^2 - \omega_2^2)}\end{aligned} \quad (4-118)$$

Recordando que H , C y D pueden ser positivos o negativos, según los valores específicos de las singularidades, se puede, comparando cada término con las formas básicas de la Fig. 4-32, identificarlos del siguiente modo:

$$\frac{\omega}{jH}: \text{una capacitancia de valor } C_0 = \frac{1}{|H|} \quad (4-119)$$

$$\frac{C}{jH\omega}: \text{una inductancia de valor } L_0 = \frac{|H|}{|C|} \quad (4-120)$$

$$\frac{\omega D}{jH(\omega^2 - \omega_2^2)}: \text{un circuito resonante en serie con } f_2 \text{ como frecuencia de resonancia, en el que}$$

$$L_2 = \left| \frac{H}{D} \right| \text{ y } C_2 = \frac{1}{\omega_2^2 L_2} \quad (4-121)$$

Las tres ramas se conectan en paralelo para obtener la forma en paralelo de Foster de la Fig. 4-31b. Es evidente que las dos constantes C y D se evalúan del mismo modo que A y B del circuito en serie.

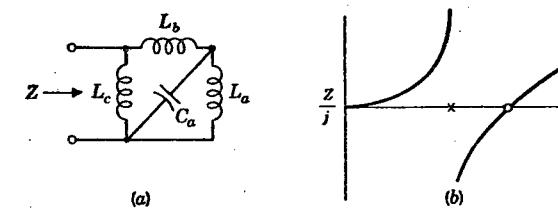


FIG. 4-33. Una red redundante. La Fig. 4-30 proporciona la misma función impedancia con el mínimo número de elementos.

4-25. Simplificación de las redes redundantes. Se ha puntualizado (pero no demostrado) que las redes de Foster son canónicas, por cuanto sintetizan una curva de reactancia dada con el mínimo número de elementos reactivos. Este hecho puede aprovecharse para simplificar las redes redundantes. La repetida adición de las curvas de reactancia y susceptancia demuestra que el circuito de la Fig. 4-33 posee un polo y un cero internos, como se ve en b. Luego, dado que el circuito contiene cuatro elementos en lugar de sólo tres, la red original es redundante.

Podrá por lo tanto diseñarse una red de Foster con sólo tres elementos, por ejemplo, la de la Fig. 4-30. De hecho, cuando en una red el número de inductores difiere del número de capacitores en más de una unidad, hay elementos redundantes. No obstante, puede haber redundancia aunque no se cumpla esta regla y el método más simple para descubrir las redundancias es el de representar gráficamente las curvas de reactancias.

4-26. Redes de Cauer. El estudiante no debe creer que las formas de Foster de la Fig. 4-31 son los únicos tipos de redes canónicas. Otras configuraciones son también posibles; por ejemplo, cuando se necesitan sólo cuatro singularidades internas, puede usarse una estructura en T-puenteada (ver Prob. 4-15). En el caso general, cualquiera que sea el número de polos y ceros, es posible utilizar una red de Cauer en lugar de la red de Foster. Las estructuras de Cauer son redes en escalera y tienen la forma general ilustrada en la Fig. 4-34a. Se las obtiene expandiendo la función impedancia en *fracciones continuas* más bien que en fracciones parciales. La expansión de una función impedancia de excitación en fracción continua, en el caso de una red en escalera de dos terminales, puede demostrarse a partir de la estructura en escalera de tipo general de la Fig. 4-34a. Los elementos en serie de la red se expresan como impedancias, y los elementos en paralelo, como admittancias, para conveniencia de la expansión, la que comienza por el extremo derecho de la red.

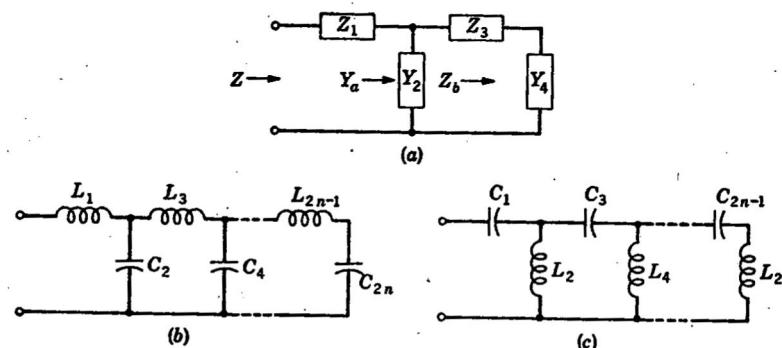


FIG. 4-34. Redes de Cauer.

La impedancia de excitación de los dos últimos elementos puede obtenerse invirtiendo Y_4 y sumándola a Z_3 :

$$Z_b = Z_3 + \frac{1}{Y_4}$$

La admittance de excitación de los tres últimos elementos resulta, a su vez, de invertir Z_b y sumársela a Y_2 :

$$Y_a = Y_2 + \frac{1}{Z_b + 1/Y_4}$$

Luego, la impedancia de excitación de toda la red es

$$Z = Z_1 + \frac{1}{Y_2 + 1/(Z_3 + 1/Y_4)} \quad (4-122)$$

La Ec. (4-122) tiene la forma de una fracción continua y se la escribe a menudo con la notación

$$Z = Z_1 + \frac{1}{[Y_2]} + \frac{1}{[Z_3]} + \frac{1}{[Y_4]} \quad (4-122a)$$

donde el símbolo $[]$ es una notación abreviada de la fracción continua.

En general, toda función de impedancia de excitación puede sintetizarse con dos distintas redes de Cauer, el tipo *L*-serie de la Fig. 4-34b, y el tipo *C*-serie de la Fig. 4-34c. Para el tipo *L*-serie la fracción continua es del tipo

$$Z = j\omega L_1 + \frac{1}{[j\omega C_2]} + \frac{1}{[j\omega L_3]} + \frac{1}{[j\omega C_4]} + \dots \quad (4-123)$$

Esta forma puede obtenerse ordenando la expresión analítica de Z según las potencias *decrescientes* de ω y realizando un proceso de división repetida, invirtiendo el resto después de cada división. La expresión resultante tendrá la forma de la Ec. (4-123), pero el coeficiente de cada término $j\omega$ tendrá un valor numérico. Luego, cada elemento de la red podrá ser identificado con su correspondiente término en la fracción continua y así podrá ser evaluado.

Para la red de Cauer del tipo *C*-serie, la fracción continua de Z tendrá la forma

$$Z = \frac{1}{j\omega C_1} + \frac{1}{[1/j\omega L_2]} + \frac{1}{[1/j\omega C_3]} + \frac{1}{[1/j\omega L_4]} + \frac{1}{[1/j\omega C_5]} + \dots \quad (4-124)$$

La forma numérica de la Ec. (4-124) obtiénese, en contraste con el caso de la estructura tipo *L*-serie, ordenando la expresión analítica de Z según las potencias *crecientes* de ω antes del proceso de división repetida. Estos métodos serán ilustrados más adelante con ejemplos numéricos.

El estudio de las redes de Foster nos ha demostrado que sólo pueden obtenerse cuatro tipos de curva de reactancia con redes de dos terminales libres de pérdidas. También se ha visto que el carácter de las singularidades externas imponen ciertas restricciones a los elementos de la red. Dado que las redes de Cauer son también estructuras de dos terminales sin pérdidas, valen para ellas las mismas observaciones. El conocimiento de estas restricciones puede servir de guía para la manipulación que debe llevarse a cabo en el proceso de síntesis.

Consideremos las restricciones para el caso de la red del tipo *L*-serie, Fig. 4-34b. Si la impedancia debe ser cero para c.c., hay que poner en cortocircuito C_{2n} para que exista un camino de c.c. entre los dos terminales, provisto por las inductancias. En cambio, si debe haber un cero para la frecuencia infinita, hay que eliminar L_1 por cortocircuito para que exista un camino puramente capacitivo entre terminal y terminal. Este último hecho puede verificarse en la Ec. (4-123). Si L_1

es distinto de cero, $Z \rightarrow \infty$ para la frecuencia infinita. Si L_1 se pone en cortocircuito, $Z = 0$ para la frecuencia infinita.

En las redes del tipo C-serie pueden imponerse restricciones similares, Fig. 4-34c. Si la impedancia tiene que ser cero para la c.c., debe eliminarse C_1 por cortocircuito para que L_2 provea así un camino directo para la c.c. Este hecho puede verificarse en la Ec. (4-124). Además, debe eliminarse por cortocircuito L_{2n} cuando tiene que existir un cero en la frecuencia infinita.

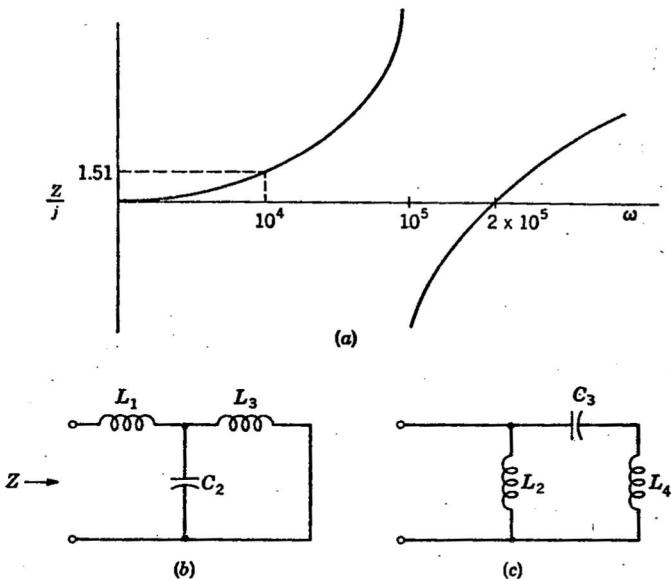


FIG. 4-35. Ejemplos de redes de Cauer con su curva de impedancia.

Podemos ahora ilustrar el proceso de síntesis de una red de Cauer a partir de la función impedancia deseada.

Diseñar una red de dos terminales sin pérdidas para satisfacer las siguientes especificaciones: $Z = j1,51$ ohm a $1,59$ Kc/s, con dos singularidades internas, un polo en $15,9$ Kc/s y un cero en $31,8$ Kc/s.

Según las especificaciones, puede predecirse que la curva de reactancia ha de tener la forma indicada en la Fig. 4-35a. Dado que la curva tiene un cero en la frecuencia cero, el factor x en la Ec. (4-110) es $j\omega H$. Además, por la Ec. (4-110), la expresión de Z debe ser

$$Z = j\omega H \frac{(\omega^2 - \omega_2^2)}{(\omega^2 - \omega_1^2)}$$

donde $\omega_2 = 2\pi(31,8 \times 10^3) = 2 \times 10^5$ radián/s

$\omega_1 = 2\pi(15,9 \times 10^3) = 1 \times 10^5$ radián/s

y puede anticiparse que la forma de la red del tipo L-serie será la ilustrada por la Fig. 4-35b. El valor de H puede determinarse reemplazando en la

ecuación los valores de las singularidades y el de Z para $\omega = 2\pi(1,59 \times 10^3) = 1 \times 10^4$ radián/s. Así,

$$H = j \frac{1,51}{j10^4} \frac{10^8 - 10^{10}}{10^8 - 4 \times 10^{10}} = 0,375 \times 10^{-4}$$

Por lo tanto, la expresión analítica de la función impedancia requerida es

$$Z = j\omega(0,375 \times 10^{-4}) \frac{\omega^2 - 4 \times 10^{10}}{\omega^2 - 10^{10}}$$

La red de Cauer del tipo L-serie se obtiene del modo siguiente: Haciendo la multiplicación indicada en el numerador y ordenando los términos según las potencias decrecientes de ω ,

$$Z = \frac{(0,375 \times 10^{-4})j\omega^3 - (1,5 \times 10^6)j\omega}{\omega^2 - 10^{10}}$$

Luego, por división repetida,

$$\begin{aligned} & 0,375 \times 10^{-4}j\omega \\ & \overline{\omega^2 - 10^{10})(0,375 \times 10^{-4})j\omega^3 - (1,5 \times 10^6)j\omega} \\ & \quad \underline{(0,375 \times 10^{-4})j\omega^3 - (0,375 \times 10^6)j\omega} \\ & \quad \quad \quad - 1,125 \times 10^6j\omega \end{aligned}$$

$$0 \quad Z = (0,375 \times 10^{-4})j\omega - \frac{(1,125 \times 10^6)j\omega}{\omega^2 - 10^{10}}$$

Para obtener la forma de fracción continua, el resto, o segundo término, se invierte y se repite el proceso de división.

$$\begin{aligned} & 0,889 \times 10^{-6}j\omega \\ & -(1,125 \times 10^6)j\omega \overline{\omega^2 - 1 \times 10^{10}} \\ & \quad \underline{\omega^2} \\ & \quad \quad \quad - 1 \times 10^{10} \\ & 0 \quad Z = (0,375 \times 10^{-4})j\omega + \frac{1}{(0,889 \times 10^{-6})j\omega} + \frac{10^{10}}{1,125 \times 10^6j\omega} \end{aligned}$$

Reordenando el resto,

$$Z = (0,375 \times 10^{-4})j\omega + \frac{1}{(0,889 \times 10^{-6})j\omega} + \frac{1}{(1,125 \times 10^6)j\omega}$$

Pero, según la Fig. 4-35b, Z , en términos de los elementos circuitales debe ser

$$Z = j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_2} + \frac{1}{j\omega L_3}$$

Luego, comparando los coeficientes de las dos últimas ecuaciones,

$$L_1 = 0,375 \times 10^{-4} = 37,5 \mu\text{h}$$

$$C_2 = 0,889 \times 10^{-6} = 0,889 \mu\text{f}$$

$$L_3 = 1,125 \times 10^{-4} = 112,5 \mu\text{h}$$

Con esto completase el diseño de la red de Cauer del tipo L-serie. Se observa que el número de elementos de circuito excede en una unidad el número de singularidades internas; por lo tanto, la estructura es canónica. El estudiante observará que en este caso la estructura de Cauer coincide

con la de Foster. Este hecho no se verifica cuando el número de singularidades internas es mayor que dos.

Para ilustrar aún más completamente el método de las fracciones continuas, desarrollemos una red de Cauer del tipo C-serie para la misma función impedancia. Esto se hace ordenando primero la expresión analítica de Z según las potencias *crecientes* de ω :

$$Z = \frac{(1,5 \times 10^6)j\omega - (0,375 \times 10^{-4})j\omega^3}{10^{10} - \omega^2}$$

Se ha visto ya que debe haber un cero para c.c.; luego, C_1 debe ser infinito (un cortocircuito) en la red y se anticipa así la forma ilustrada en la Fig. 4-35c. Dado que la reactancia de C_1 debe ser nula, se invierte la ecuación de Z y se comienza el proceso de división, invirtiendo cada vez el resto, del mismo modo que antes. La expresión resultante es

$$Z = \left[\frac{1}{0,667 \times 10^4} + \frac{1}{2 \times 10^6} + \frac{1}{(0,375 \times 10^{-4})j\omega} \right]$$

Pero según la figura

$$Z = \left[\frac{1}{1/j\omega L_2} + \frac{1}{1/j\omega C_3} + \frac{1}{1/j\omega L_4} \right]$$

Luego, igualando los términos correspondientes,

$$L_2 = \frac{1}{0,667 \times 10^4} = 150 \mu\text{h}$$

$$C_3 = \frac{1}{2 \times 10^6} = 0,5 \mu\text{F}$$

$$L_4 = \frac{0,375 \times 10^{-4}}{0,75} = 50 \mu\text{h}$$

con lo que se completa el diseño de la estructura de Cauer del tipo C-serie, la que es también canónica porque el número de elementos excede en una unidad el número de singularidades internas.

4-27. Elección de la forma canónica. Los resultados obtenidos hasta ahora indican que para cada función impedancia dada son posibles por lo menos cuatro formas canónicas, dos del tipo Foster, y dos del tipo Cauer. Teóricamente, por lo menos, las cuatro formas tienen el mismo comportamiento y el estudiante podría preguntarse por qué hemos estudiado las cuatro cuando con una bastaría. Aparte de las razones pedagógicas, la respuesta se halla en el problema práctico de realizar físicamente la red.

Por ejemplo, según se ha visto, los inductores están inevitablemente asociados con sus capacitancias internas en paralelo. El efecto de estas capacitancias es principalmente el de provocar variaciones indeseables de la inductancia efectiva, especialmente cuando la frecuencia de trabajo se acerca a la frecuencia de resonancia propia del inductor. Desde este punto de vista parece preferible la red de Foster del

tipo en serie, porque en ella siempre hay una capacitancia en serie C en paralelo con cada inductancia, excepto posiblemente una de éstas. Esta capacitancia se integra en parte con la capacitancia distribuida de la bobina, para lo cual basta con ajustar el capacitor físico de modo que la capacitancia C requerida se complemente con la propia y la de la bobina. Este procedimiento no es viable con la forma en paralelo de la red de Foster, pero ésta ofrece, en cambio, la ventaja de tener una conexión de masa común.

Otra consideración práctica es la que se refiere al tamaño y coste de los componentes necesarios para cada tipo de red. En general cada una de éstas requiere un diferente juego de valores. Luego, convendrá elegir el circuito que resulte más económico. En este aspecto conviene observar los siguientes hechos en relación con los componentes utilizados en los circuitos de bajo nivel, es decir, de baja tensión y corriente.

Los capacitores fijos se hacen por lo general con tres tipos de dielectrico: papel, cerámica y mica, en el orden creciente de coste. Los rangos nominales de capacitancia son:

Cerámica	1 pF — 0,01 μF
Mica	5 pF — 0,01 μF
Papel	500 pF — 1 μF

Como regla general, el coste y el tamaño aumentan con la capacitancia. Los capacitores con dielectrico de papel son los de más altas pérdidas y cambian más de valor con el tiempo y la temperatura. Luego, es deseable usar valores de capacitancia que no excedan de 0,01 μF , realizable con dielectrico de cerámica o de mica.

Los capacitores variables, útiles para el ajuste definitivo de los parámetros circuitales, pueden obtenerse también con tres tipos de dielectricos. Los rangos nominales son:

Cerámica	50 pF máx. relación 7:1
Aire	500 pF máx. relación 10:1
Mica	0,001 μF máx. relación 10:1

En cuanto a los inductores, los que tienen inductancias de hasta 100 μH son a menudo del tipo autosoportado y pueden ajustarse dentro de una pequeña gama de valores variando la separación entre espiras. En otro tipo de construcción, las bobinas se arrollan sobre tubo de papel tratado o de cerámica, con núcleo ajustable. Los núcleos de alta permeabilidad, tales como los de aleaciones magnéticas pulverizadas o cerámicas (ferritos) aumentan la inductancia de la bobina cuando se los centra respecto del arrollamiento. Los núcleos de material conductor (de cobre plateado) reducen la inductancia a medida que se los aproxima al centro del arrollamiento. En general, el desplazamiento del núcleo produce una variación de 2 ó 3 a 1 en la inductancia de la bobina. El núcleo de alta permeabilidad aumenta la inductancia en mayor medida que la resistencia efectiva, con lo que pueden obtenerse valores de Q del orden de 100 ó más.

En el rango del milihenry, el arrollamiento de una sola capa deja su lugar a bobinas formadas por un grupo de varias bobinas de capas

múltiples pero de ancho muy pequeño. Las bobinas de 100 mH o más se construyen por lo general con núcleos cerrados de alta permeabilidad.

4-28. Curvas de reactancia para redes disipativas. Las curvas de reactancia ilustradas hasta ahora corresponden a elementos ideales de resistencia nula. Las reactancias resultantes se invierten, pasando por infinito, en los polos o frecuencias de antirresonancia. Tales elementos no existen y tampoco admite la naturaleza los valores infinitos

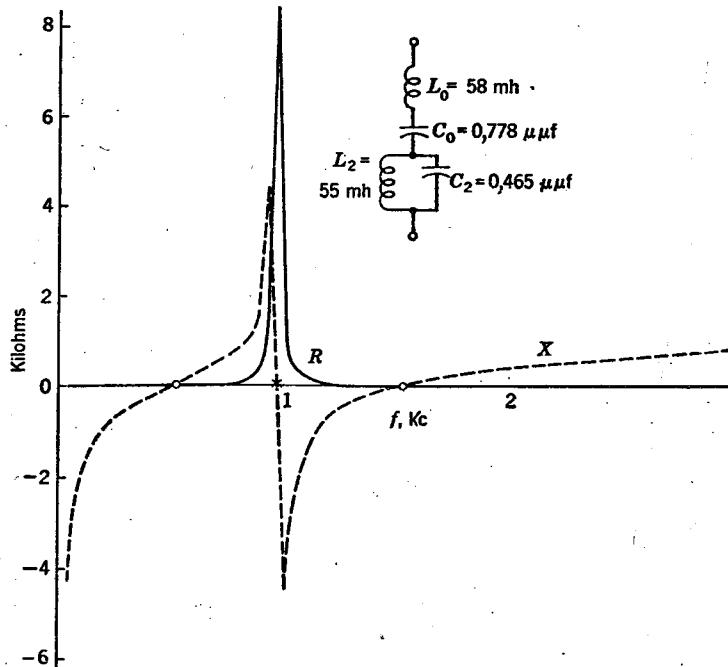


FIG. 4-36. Efecto de las pérdidas del inductor sobre la función impedancia de una red de Foster.

de impedancia o admitancia. Por consecuencia, las curvas reales de reactancia deben invertirse pasando por cero en antirresonancia. Así se ha visto en la Fig. 4-23. A causa del comportamiento de la parte real de la impedancia, la magnitud de la impedancia pasa por un gran máximo, pero finito, en los polos. La manifestación de estos efectos está ilustrada en la Fig. 4-36.

La red del caso responde a las siguientes especificaciones: $Z = +j400$ ohm a 2 Kc/s; ceros internos en 500 c/s y 1,5 Kc/s; polo interno en 1 Kc/s. Los valores calculados de las inductancias, esto es, $L_0 = 58,2$ mH, $L_2 = 54,6$ mH, se reprodujeron con una precisión equivalente a dos cifras significativas por medio de inductores de década. Los factores de calidad de los dos inductores fueron $Q_0 = 90$, $Q_2 = 81$, ambos medidos a 1 Kc/s.

El valor medido de Z en 2 Kc/s fue de $14,1 + j405$ ohm. Los polos y los ceros coincidieron con los valores previstos dentro de un error máximo del 3 por ciento, lo que está dentro del error de calibración del oscilador y del equipo utilizado para medir las inductancias.

Los valores medidos de resistencia fueron menores de 20 ohm de 0 a 590 ciclos y por encima de 1,7 Kc/s. El estudiante debe observar que, aunque X pasa por cero en el polo, $|Z|$ es grande, aproximadamente 8.500 ohm, a causa del agudo aumento de la componente resistiva.

4-29. Los circuitos resonantes como redes transformadoras de impedancia. En el apartado 4-16 se ha visto cómo puede utilizarse un circuito resonante paralelo para trasformar una baja resistencia intercalada en una de sus ramas para adaptarla a un generador de alta impedancia. En el Cap. XI veremos cómo puede usarse un circuito resonante paralelo para adaptar dos impedancias cualesquiera externas al circuito, función que puede desempeñar con particular eficacia en las estrechas bandas de frecuencias utilizadas en r.f., en condiciones en que no puede realizarse eficientemente un transformador inductivo ordinario.

PROBLEMAS

4-1. Dibujar un ábaco de reactancia en función de la frecuencia, en papel doble logarítmico, para los siguientes valores de inductancia y capacitancia: 1, 2, 4, 6, 8, y 10 mH; 0,01, 0,02, 0,04, 0,06, 0,08 y 0,1 μF, cubrir la gama de frecuencias de 10 c/s a 1 Mc/s.

4-2. Por inversión geométrica, derivar el lugar geométrico de admittance de un circuito en serie formado por una inductancia constante L en serie con un resistor R que varía desde cero a infinito.

4-3. Repetir el problema 4-2 para un circuito con C constante en serie con una resistencia R que varía desde cero a infinito.

4-4. Un resistor de 53 ohm está en serie con un inductor. La inductancia en paralelo del inductor es de 100 μH y su resistencia en paralelo, de 56,5 kilohm.

a. Reducir la red a un circuito equivalente en serie, y hallar Q_L y Q para 1 Mc/s.

b. Verificar el valor obtenido de Q según la definición básica en términos de la energía máxima almacenada y la energía disipada.

4-5. Una inductancia de 200 μH tiene un Q de 50, el que se supone independiente de la frecuencia. Esta inductancia es conectada en serie con una capacitancia de 100 μF a un generador de fem igual a 1 volt. El generador tiene una resistencia interna constante igual a la resistencia de la bobina en resonancia. Construir una tabla mediante la cual puedan trazarse las curvas de corriente, tensión a través del capacitor, y tensión a través del inductor, en función de la frecuencia.

4-6. Verificar los resultados del Prob. 4-5 por medio de la curva universal de resonancia.

4-7. Usando la Ec. (4-48), verificar que $BW = f_r/Q$.

4-8. Una antena de radio tiene una resistencia en serie efectiva de 25 ohm y una tensión inducida de 250 μV. La antena está conectada en serie

con una bobina y un capacitor variable. La bobina tiene una inductancia $L = 270 \mu\text{H}$ y su Q varía del modo siguiente:

$f, \text{ kc} \dots \dots$	550	800	1,000	1,200	1,400	1,600
$Q \dots \dots$	60	81	92	99	100	94

a. Trazar una curva de C_r en función de f , siendo C_r la capacitancia necesaria para obtener la resonancia.

b. Representar gráficamente $|E|_C$ en función de f .

4-9. Verificar la Ec. (4-83) reduciendo el circuito de la Fig. 4-22a a un circuito equivalente en serie. Esto puede hacerse aplicando el teorema de Thévenin a la parte del circuito que está a la izquierda del capacitor.

4-10. Una inductancia de $200 \mu\text{H}$ tiene un Q constante de 50 y está en paralelo con un capacitor de 100 pF . La combinación en paralelo está unida a los terminales de un generador cuya resistencia interna es igual a la resistencia de antirresonancia del circuito sintonizado. La tensión generada es de 100 volt. Representar gráficamente la tensión a través del circuito en función de la frecuencia, en la vecindad de la frecuencia de antirresonancia.

4-11. Un amplificador clase C tiene que trabajar con una carga resistiva de 10 kilohm a 500 Kc/s. La carga física es de 72 ohm, resistiva pura, y está conectada en serie con una inductancia cuya resistencia es despreciable. Esta combinación está en paralelo con una capacitancia C , con lo que se forma un circuito tanque sintonizado.

a. Calcular los valores necesarios de L y C .

b. ¿Cuál es el Q de la carga sintonizada?

c. Se encuentra que las componentes fundamental y de segunda armónica de la corriente de placa de la válvula tienen amplitudes relativas de 0,325 y 0,26, respectivamente. Calcular sus amplitudes relativas en la resistencia de 72 ohm. ¿En qué tanto por ciento se reduce la relación de la segunda armónica a la fundamental?

4-12. Una inductancia de $200 \mu\text{H}$ tiene un Q de 100. A través de sus terminales se conectan dos captores en serie. Un generador que tiene una resistencia interna de 10.000 ohm se conecta a su vez a uno de los captores. ¿Cuáles deben ser las capacitancias de ambos captores para que la carga presentada por el circuito al generador sea resistiva pura y de 10.000 ohm? ¿Cuál será en este caso la corriente en cada rama y la suministrada por el generador? $f = 1.000.000 \text{ c/s}$.

4-13. La inductancia a baja frecuencia de una bobina es de $20 \mu\text{H}$, pero la bobina es autorresonante en $20,5 \text{ Mc/s}$.

a. Calcular la inductancia en serie, efectiva, para 10 Mc/s .

b. ¿Hasta qué frecuencia la inductancia en serie de la bobina se conserva dentro del 1 por ciento respecto de su valor de baja frecuencia?

c. ¿Cuál es la capacitancia en derivación de la bobina?

4-14. Un Q-metro tiene un oscilador de frecuencia fija que funciona a 1 Mc/s . La capacitancia C es variable de 30 a 450 pF .

a. Trazar una curva de calibración para demostrar cómo podría calibrarse directamente el capacitor para indicar valor de inductancia en serie. ¿Hay ventaja en el empleo de papel doble logarítmico para representar la curva de L en función de C ? Explicar.

b. ¿Cuál debería ser la frecuencia del oscilador para la calibración directa del capacitor entre $0,1$ y $1,5 \text{ mH}$?

4-15. El circuito T-puenteada de la Fig. 4-37 tiene los valores

$$L_1 = L_2 = 100 \mu\text{H}.$$

$$C_1 = C_2 = C_3 = 100 \text{ pF}.$$

a. Calcular los ceros y los polos internos de la red.

b. Esbozar las curvas de reactancia de excitación en función de la frecuencia.

c. ¿Es esta red canónica, es decir, tiene el mismo número de elementos?

4-16. Sintetizar una red de Foster del tipo en serie que tenga la misma impedancia de entrada que el circuito del Prob. 4-15.

4-17. Sintetizar una red de Foster del tipo en paralelo para obtener la Z de la Ec. (4-110a).

4-18. El circuito de la Fig. 4-38a tiene un polo en $\omega_1 = 10^6$ radián/s y un cero en $\omega_2 = 1,5 \times 10^6$ radián/s. La impedancia de entrada es $+j1.000 \text{ ohm}$ para $\omega = 0,8 \times 10^6$ radián/s. Diseñar una red de Foster del tipo en serie que sea equivalente a la red original.

4-19. Diseñar una red de Cauer para sintetizar la impedancia

$$Z = \frac{2 \times 10^{10} - 9,5 \times 10^{-5} \omega^2 + 2,5 \times 10^{-10} \omega^4}{j\omega - 3,5 \times 10^{-15} j\omega^3}$$

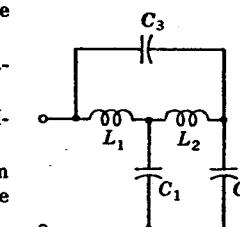


FIG. 4-37. Red T-puenteada para el problema 4-15.

CAPÍTULO V
REDES PUENTES

Una clase importante entre las redes utilizadas en la ingeniería de la telecomunicación es la de las redes de cero o puentes. Estos circuitos adoptan por lo general la forma de una red de dos pares de terminales cuyos elementos están dispuestos de tal manera que hay una frecuencia particular para la cual son infinitas las impedancias nodal y de malla de trasferencia entre los dos pares de terminales. Esta propiedad puede aprovecharse para medir relaciones de trasferencia de tensión, impedancias y frecuencias. La propiedad de impedancia de trasferencia infinita se explota también para separar dos señales que se originan en puntos distintos pero que recorren una red en común, p.e., dos mensajes telefónicos o telegráficos que se transmiten por la misma línea en sentidos opuestos. Se considerarán tres tipos básicos de circuitos de cero y algunas de sus aplicaciones más importantes: el puente de Wheatstone y la red T-paralela y T-puenteada. También se detallarán ciertas aplicaciones de las redes puentes que emplean inductancia mutua.

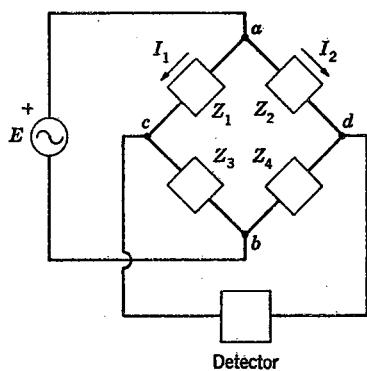


Fig. 5-1. Puente de Wheatstone para mediciones con corriente alterna.

electrónico. El detector suele comprender un amplificador, el que lo hace más sensible. Es conveniente que este amplificador sea sintonizable a la frecuencia de trabajo. Un analizador armónico sensible constituye un detector casi ideal en relación con los puentes.

Cuando el puente está equilibrado, los puntos *c* y *d* están a un mismo potencial y no circula ninguna corriente por el circuito del detector, cualquiera que sea su impedancia. En la condición de equilibrio, entonces, puede escribirse

$$I_1 Z_1 = I_2 Z_2 \quad (5-1)$$

$$I_1 Z_3 = I_2 Z_4 \quad (5-2)$$

y

Por lo tanto, en equilibrio,

$$\frac{Z_1}{Z_3} = \frac{Z_2}{Z_4} \quad \text{o} \quad Z_1 Z_4 = Z_2 Z_3 \quad (5-3)$$

La Ec. (5-3) es la ecuación de equilibrio del puente de Wheatstone de c.a., es decir, si las cuatro impedancias satisfacen la Ec. (5-3), no circula corriente por el detector, la impedancia de trasferencia entre los pares de terminales *a*, *b*, y *c*, *d*, es infinita y dícese que el puente está en equilibrio.

En el caso general, las cuatro impedancias son complejas; luego, la ecuación de equilibrio impone dos requisitos al circuito, una condición en cuanto a las magnitudes de las impedancias, y otra condición en cuanto a sus ángulos de fase, pues la Ec. (5-3) puede escribirse

$$\frac{|Z_1|/\theta_1}{|Z_3|/\theta_3} = \frac{|Z_2|/\theta_2}{|Z_4|/\theta_4} \quad (5-4)$$

$$\text{de donde } \frac{|Z_1|}{|Z_3|} = \frac{|Z_2|}{|Z_4|} \quad \text{y} \quad \theta_1 - \theta_3 = \theta_2 - \theta_4 \quad (5-5)$$

También es posible derivar un juego similar de condiciones para las componentes reales e imaginarias de las impedancias.

Cuando el puente se utiliza para la medición de impedancias, se acostumbra a hacer que Z_1 y Z_2 sean resistencias puras. Para esta condición, la Ec. (5-3) adopta la forma simplificada

$$\frac{R_1 + j0}{R_3 + jX_3} = \frac{R_2 + j0}{R_4 + jX_4} \quad (5-6)$$

Invertiendo la ecuación,

$$\frac{R_3}{R_1} + j \frac{X_3}{R_1} = \frac{R_4}{R_2} + j \frac{X_4}{R_2} \quad (5-7)$$

Para que se satisfaga la Ec. (5-7), deben ser respectivamente iguales las componentes reales e imaginarias de los dos miembros. Luego, si Z_3 es la impedancia desconocida, sus componentes pueden determinarse del modo siguiente:

Igualando las componentes reales,

$$\frac{R_3}{R_1} = \frac{R_4}{R_2} \quad \text{o} \quad R_3 = \frac{R_1}{R_2} R_4 \quad (5-8)$$

Igualando las componentes imaginarias,

$$\frac{X_3}{R_1} = \frac{X_4}{R_2} \quad \text{o} \quad X_3 = \frac{R_1 X_4}{R_2} \quad (5-9)$$

O, como alternativa, de las Ecs. (5-4) y (5-5),

$$|Z_3| = \frac{R_1}{R_2} |Z_4| \quad (5-10a)$$

$$\theta_3 = \theta_4 \quad (5-10b)$$

y

Las Ecs. (5-10) establecen que deben equilibrarse las coordenadas polares de las impedancias, y las Ecs. (5-8) y (5-9) dicen que esto es equivalente a equilibrar las componentes rectangulares. De ambos pares de ecuaciones despréndese que para equilibrar el puente hay que hacer dos ajustes. No es así en el puente de c.c., en el que en principio basta un solo ajuste (aunque en la práctica se establece primeramente la rama de relación en un ajuste previo conveniente).

5-2. Ajuste del puente de Wheatstone. Los ajustes físicos pueden hacerse de modo que correspondan al equilibrio sea en la forma polar, sea en la forma rectangular. Supongamos, p. e., que se desconozca la impedancia Z_3 en la Fig. 5-1. Admitamos que Z_4 está constituida por una reactancia variable en serie con una resistencia variable. Dentro de una amplia gama de medición, R_1 y R_2 pueden ser fijos, de modo que, si son ajustables, se los variará solamente de a pasos relativamente grandes. La reactancia variable X_4 , ajústase entonces de modo de satisfacer la Ec. (5-9), mientras que la resistencia variable R_4 se ajusta (más cualquier resistencia inherente al elemento reactivo) de modo de satisfacer la Ec. (5-8). Se busca así el equilibrio por el de las coordenadas rectangulares.

Es más fácil construir resistores variables que reactancias variables. A menudo, por lo tanto, para las mediciones de b.f., el patrón reactivo X_4 es fijo en magnitud. En estas condiciones, puédese obtener el equilibrio haciendo variable uno de los resistores de la rama de relación, R_1 o R_2 , además de R_4 . El ajuste requiere, entonces, dar a R_4 un valor de resistencia tal que el ángulo de Z_4 sea igual al ángulo de la impedancia desconocida Z_3 , satisfaciendo así la Ec. (5-10b), y, luego, ajustar las resistencias de relación R_1 o R_2 de modo de satisfacer la Ec. (5-10a). Obtiéñese así el equilibrio para las coordenadas polares de la impedancia desconocida.

En la práctica, no es posible equilibrar exactamente una de las coordenadas antes de equilibrar la otra. En cualquiera de los dos tipos de ajuste, uno de los controles debe variarse hasta que la indicación se aproxime a un mínimo. Luego se ajusta el otro control para mejorar este mínimo. Moviendo alternativamente los dos controles, puédese así llegar a un equilibrio exacto por aproximaciones sucesivas. El número de alternaciones necesario se reduce con la experiencia del operador.

Se sugiere a veces la conveniencia de equilibrar primero las resistencias con corriente continua. Esta operación carece de valor en la mayoría de los casos, dado que la resistencia efectiva de casi todas las redes o elementos de impedancia depende de la frecuencia. Esta variación de la resistencia efectiva con la frecuencia (y también las variaciones similares de la inductancia o la capacitancia), introduce una dificultad en el procedimiento de equilibrio si la fuente de tensión no provee

una onda perfectamente sinusoidal, puesto que, alcanzado el equilibrio para la fundamental, el puente no está necesariamente equilibrado para las armónicas. Cuando se usa un auricular telefónico como detector, el operador debe concentrar su atención en el tono fundamental, y, con la práctica, llega a distinguirlo perfectamente y a notar cuando desaparece, siempre que las armónicas no sean demasiado intensas. Si se utiliza un sistema selectivo como detector, obtiéñese el mismo efecto sintonizando la frecuencia fundamental.

El hecho de que el equilibrio de un puente dependa de la frecuencia puede aprovecharse para determinar una frecuencia desconocida. En este caso, el elemento variable puede estar calibrado directamente en valores de frecuencia. El puente suele utilizarse también como analizador armónico.

Dado que no es posible construir inductores de resistencia nula o despreciable, ocurre a veces que hay que agregar resistencia a la rama Z_3 , desconocida, más bien que a la Z_4 . Tiéñese un ejemplo de este caso cuando, en el equilibrio por coordenadas polares, el factor de potencia de la incógnita es menor que el de la bobina patrón. El inductor patrón debe ser del tipo de núcleo de aire, para prevenir los efectos de saturación, por lo que su factor de potencia es grande en comparación con el de los inductores provistos de núcleos magnéticos.

5-3. Sensibilidad de un puente. Es posible elegir entre una gran diversidad de combinaciones de Z_1 y Z_2 capaces de permitir el equilibrio del puente de la Fig. 5-1, si Z_4 es también ajustable. Es entonces conveniente elegir un orden de magnitud para estas impedancias que asegure la máxima sensibilidad del equilibrio¹. Supongamos, en la Fig. 5-1, que Z_1 , Z_2 , Z_3 y Z_4 estén inicialmente en equilibrio. Admitamos que Z_3 es la impedancia incógnita y que Z_4 se varía en el factor pequeño p . La impedancia de esta rama pasa entonces al valor $(1 + p)Z_4$. La sensibilidad puede computarse calculando la tensión que aparece entre los terminales c y d con el detector desconectado. Sea esta tensión ΔE . El valor de I_1 es

$$I_1 = \frac{E}{Z_1 + Z_3} \quad (5-11)$$

y el de I_2 ,

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{E}{Z_2 + (1 + p)Z_4} \\ \Delta E &= I_1 Z_1 - I_2 Z_2 \\ \frac{\Delta E}{E} &= \frac{Z_1}{Z_1 + Z_3} - \frac{Z_2}{Z_2 + (1 + p)Z_4} \\ &= \frac{Z_1 Z_4 + p Z_1 Z_4 - Z_2 Z_3}{(Z_1 + Z_3)(Z_2 + Z_4 + p Z_4)} \end{aligned} \quad (5-12)$$

Según la Ec. (5-3), $Z_1 Z_4 = Z_2 Z_3$. Si p es pequeño, puede despreciarse $p Z_4$ en el denominador de la Ec. (5-12). Luego

¹ Véase el Catálogo de General Radio para otras consideraciones sobre la sensibilidad de los puentes.

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{pZ_1Z_4}{(Z_1 + Z_3)(Z_2 + Z_4)} \quad (5-12a)$$

Sea

$$\begin{aligned} \frac{Z_3}{Z_1} &= \frac{Z_4}{Z_2} = r \\ \frac{Z_1 + Z_3}{Z_1} &= \frac{Z_2 + Z_4}{Z_2} = 1 + r \end{aligned}$$

Luego la Ec. (5-12a) deviene

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{pZ_1Z_4}{(1+r)^2Z_1Z_2} = \frac{pr}{(1+r)^2} \quad (5-12b)$$

donde todas las cantidades son complejas. El problema consiste ahora en determinar el valor de r que hace $|\Delta E/E|$, y, por lo tanto, la sensibilidad, un máximo. Luego, tomando magnitudes,

$$\left| \frac{\Delta E}{E} \right| = \frac{|p| \cdot |r|}{|1+r|^2} \quad (5-13)$$

Para mayor conveniencia sea

$$r = |r|/\theta = |r| \cos \theta + j|r| \sin \theta$$

Entonces

$$\begin{aligned} |1+r|^2 &= (1+|r| \cos \theta)^2 + |r|^2 \sin^2 \theta \\ &= 1 + 2|r| \cos \theta + |r|^2 \end{aligned} \quad (5-14)$$

Llevando este valor a la Ec. (5-13)

$$\left| \frac{\Delta E}{E} \right| = \frac{|p| \cdot |r|}{1 + 2|r| \cos \theta + |r|^2}$$

Diferencia ahora con respecto a $|r|$ e igualando a cero para hallar la condición de máximo,

$$\frac{d|\Delta E/E|}{d|r|} = |p| \frac{1 + 2|r| \cos \theta + |r|^2 - (2 \cos \theta + 2|r|)|r|}{1 + 2|r| \cos \theta + |r|^2} = 0 \quad (5-15)$$

$$y \quad |r| = 1 \quad (5-16)$$

Esto demuestra que para máxima sensibilidad la impedancia Z_1 debe ser del mismo orden de magnitud que Z_3 , y, por lo tanto, del mismo orden de magnitud que Z_4 . En otros términos, si hay que medir una impedancia cuya magnitud es del orden de los 1.000 ohm, se obtendrá el puente de mayor sensibilidad cuando las ramas de impedancia tienen una magnitud del orden de 1.000 ohm, mientras que si la incógnita es del orden de 1 megohm, las otras ramas del puente deben tener un orden similar de grandezza.

Si el detector es de impedancia finita y su indicación depende de la potencia que se le entrega, es fácil hallar la impedancia óptima

del detector. Aplicando el teorema de Thévenin, la tensión de circuito abierto de la red que alimenta al detector queda dada por la Ec. (5-12b). Si la impedancia del generador es despreciable, la impedancia de la red entre los terminales c, d es

$$Z_{cd} = \frac{Z_1Z_3}{Z_1 + Z_3} + \frac{Z_2Z_4}{Z_2 + Z_4}$$

Cuando todas las ramas tienen la misma magnitud, Z_{cd} es igual a la impedancia de una rama. Por consiguiente, el detector debe tener una magnitud de impedancia del mismo orden que la de la incógnita. Si el detector responde a la tensión solamente y no a la potencia, su impedancia debe ser lo más alta posible.

5-4. Tierra de Wagner. Al preparar un circuito para el funcionamiento en b. f. o r. f. aparecen por lo general parámetros circuitales que no figuran en el circuito esquemático elemental. Los más importantes son las capacitancias de los diversos elementos físicos que componen el sistema con respecto a los demás y con respecto a tierra. Al tratar de equilibrar un puente en las frecuencias de audio, se observará a menudo que el punto aparente de equilibrio se desplaza conforme el operador se mueve de un punto a otro, particularmente si se utiliza como detector un par de auriculares telefónicos. Esto se debe a la capacitancia dispersa entre el detector y tierra. Si el detector estuviera al potencial de tierra, no se produciría tal efecto. La mejor manera de evitar este efecto consiste en el empleo de una rama de equilibrio independiente, como la ilustrada en la Fig. 5-2. En este caso es conveniente hacer las ramas de relación puramente resistivas, de modo que el equilibrio auxiliar pueda obtenerse también con resistencias pures. El puente se equilibra primero de la manera usual con la llave de dos vías en la posición e . Pásase luego este commutador a la posición f y ajustántese a equilibrio las resistencias R_5 y R_6 , de modo que $R_5/R_6 = R_1/R_2$. El punto c se encuentra entonces al potencial de masa. Los resistores R_5 y R_6 deben tener resistencias lo bastante bajas como para que su admisión sea grande en comparación con las de las capacitancias que puedan existir entre los puntos a y b por una parte y tierra por la otra. Una vez logrado el equilibrio de la tierra de Wagner, se vuelve el commutador a la posición e y se afina el equilibrio del puente. Puede ser necesario repetir el ajuste de la tierra de Wagner y así sucesivamente.

5-5. Puente de Maxwell. Otro puente de importancia es el de la Fig. 5-3. Dado que su configuración general es la misma que la del puente de la Fig. 5-1, es aplicable la Ec. (5-3). El estudiante puede verificar que, en la condición de equilibrio, los componentes rectangulares de la incógnita son

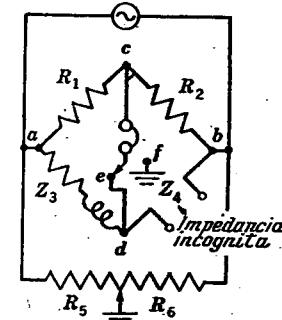


FIG. 5-2. Uso de la tierra de Wagner para eliminar los efectos de las capacitancias dispersas a masa al equilibrar un puente.

$$R_4 = \frac{R_2 R_3}{R_1} \quad (5-17a)$$

$$L_4 = R_2 R_3 C_1 \quad (5-17b)$$

Las ecuaciones indican que el equilibrio es independiente de la frecuencia, condición que es válida, sin embargo, sólo cuando los elementos de impedancia son ellos mismos independientes de la frecuencia.

El puente de Maxwell es especialmente conveniente para la medición de grandes inductancias, porque es posible hacer las cuatro ramas del puente del mismo orden de magnitud.

El circuito básico es menos adaptable para este caso porque el inductor, con núcleo de aire, no puede, en la práctica, tener razonablemente una inductancia superior a 1 H.

Este puente provee también uno de los mejores métodos para las mediciones de inductancias *incrementales* típicamente grandes en audiofrecuencia, p. e., la inductancia de un arrollamiento de transformador con c.c. La c.c. puede introducirse por medio de una fuente adecuada en serie con el generador o con el detector, ya que el equilibrio del puente no depende de la impedancia de estas ramas externas.

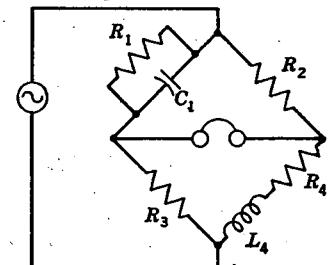


FIG. 5-3. Puente de Maxwell.

medio de una fuente adecuada en serie con el generador o con el detector, ya que el equilibrio del puente no depende de la impedancia de estas ramas externas.

5-6. Puente de Wien. Hasta ahora, en la discusión del puente de Wheatstone, se ha admitido implícitamente que el puente se utiliza para hallar una impedancia incógnita. No siempre es éste necesariamente el caso, no obstante, pues, por ejemplo, pueden usarse puentes para medir frecuencias.

El puente de Maxwell no sería satisfactorio para esta finalidad por cuanto las condiciones de equilibrio son independientes de la frecuencia. Podría obtenerse un puente sensible a la frecuencia realizando las impedancias Z_1 , Z_2 y Z_3 como resistencias puras y Z_4 como un circuito resonante en serie en el circuito básico de la Fig. 5-1. El capacitor de Z_4 se ajusta hasta conseguir un mínimo en el detector; luego, la frecuencia

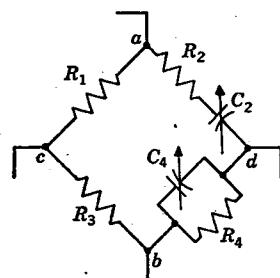


FIG. 5-4. Puente de Wien.

ajusta hasta conseguir un mínimo en el detector; luego, la frecuencia de la señal aplicada sería

$$f = \frac{1}{2\pi \sqrt{L_4 C_4}} \quad (5-18)$$

Es interesante examinar cuál sería el rango de frecuencias primario de semejante puente de frecuencias. Suponiendo que L_4 es constante, el rango de frecuencias dependería del rango de capacitancias del capacitor variable C_4 . En general, los capacitores variables con dieléctrico de aire tienen un rango máximo de capacitancias de 10:1. Luego el rango primario de frecuencias del puente sería de $\sqrt{10}:1$, aproximadamente.

Esta reducción del rango de medición en comparación con el rango del elemento variable puede obviarse recurriendo al puente de Wien ilustrado en la Fig. 5-4. Dado que la configuración básica es la misma que la de la Fig. 5-1, puede aplicarse la Ec. (5-3); luego, $Z_1 Z_4 = Z_2 Z_3$, e, introduciendo los elementos de impedancia,

$$R_1 \frac{R_4}{1 + j\omega C_4 R_4} = R_3 \frac{1 + j\omega C_2 R_2}{j\omega C_2} \quad (5-19)$$

de donde

$$j\omega C_2 R_1 R_4 = R_3 [(1 - \omega^2 C_4 R_4 C_2 R_2) + j\omega (C_4 R_4 + C_2 R_2)]$$

Igualando las partes reales,

$$f = \frac{1}{2\pi \sqrt{C_4 R_4 C_2 R_2}} \quad (5-20a)$$

Igualando las partes imaginarias,

$$C_2 R_1 R_4 = R_3 (C_4 R_4 + C_2 R_2) \quad (5-20b)$$

Haciendo ahora $R_2 = R_4$ y $C_2 = C_4$, resulta

$$f = \frac{1}{2\pi C_4 R_4} \quad (5-21)$$

y

$$R_1 = 2R_3$$

Las Ecs. (5-21) indican que si los dos capacitores C_2 y C_4 tienen la misma capacitancia y un rango de 10:1, el rango de frecuencias es también de 10:1, que es lo que se buscaba.

El puente de Wien diseñado para satisfacer las Ecs. (5-21) es particularmente conveniente porque las capacitancias de 10:1 permiten calibrar los controles en décadas de frecuencia. Puede pasarse de una década a otra cambiando los valores de R_1 y R_4 en un factor de 10. Esta disposición se utiliza también en los osciladores de audio, en los que el puente de Wien se emplea como red determinante de la frecuencia. El estudiante debe observar, sin embargo, que el puente de Wien no da algo por nada. El precio que se paga por la extensión del rango de frecuencias es el coste de un capacitor variable adicional, C_2 , el que debe estar acoplado mecánicamente con C_4 , de modo que ambos puedan ajustarse simultáneamente por medio de un único control.

5-7. Métodos de sustitución. En los métodos anteriores, la medición de impedancia es absoluta en cuanto que se obtiene una sola condición de equilibrio que permite determinar la impedancia incógnita en términos de otras tres impedancias, éstas conocidas. Cuando se aplica este método de medición en la gama de las r. f., introduzcanse inevitablemente numerosos errores residuales debidos a las capacidades dispersas y otros factores similares. Para salvar esta deficiencia,

recúrrese a los métodos de medición por sustitución, en los que el puente se equilibra dos veces, una vez con la incógnita, y otra vez sin ella.

De esta manera, los errores residuales tienden a compensarse, y la incógnita determinase en términos del *cambio* de los valores de los elementos del puente. El método de sustitución puede ilustrarse con ayuda del circuito puente de la Fig. 5-5, que es el circuito básico del puente de impedancias de General Radio, tipo 916A. En el modelo comercial de este puente se utiliza además un elaborado sistema de blindajes, el que se omite en el diagrama porque no tiene efecto sobre la condición de equilibrio. Dado que el puente tiene la misma forma general que el de la Fig. 5-1, es válida la Ec. (5-3). Se considerará primero la condición de equilibrio con la incógnita Z_x intercalada, identificando, para este caso, los valores de C_a y C_p con el subíndice 2. Luégo, por la Ec. (5-3), $Z_1Z_4 = Z_2Z_3$,

$$\frac{R_a(jX_{a2})}{R_a + jX_{a2}} [(R_p + R_x) + j(X_p + X_{p2})] = R_b(jX_n) \quad (5-22)$$

De donde

$$(R_p + R_x)R_aX_{a2} + j(X_p + X_{p2})R_aX_{a2} = R_aR_bX_n + jX_{a2}R_bX_n \quad (5-23)$$

Igualando las partes reales,

$$R_p + R_x = R_b \frac{X_n}{X_{a2}} \quad (5-24)$$

Igualando las partes imaginarias,

$$X_p + X_{p2} = \frac{R_b}{R_a} X_n \quad (5-25)$$

Consideraremos ahora la condición de equilibrio con Z_x en cortocircuito. Los correspondientes valores de los elementos variables se distinguen con el subíndice 1. Así, de las Ecs. (5-24) y (5-25), si $Z_x = 0$,

$$R_p = R_b \frac{X_n}{X_{a1}} \quad (5-26)$$

$$X_{p1} = \frac{R_b}{R_a} X_n \quad (5-27)$$

Restando la Ec. (5-26) de la (5-24),

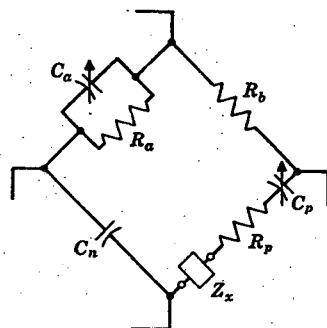


FIG. 5-5. Circuito básico del puente General Radio Company 916-A, para impedancias, el que se basa en el método de sustitución.

valores de C_a y C_p con el subíndice 2. Luégo, por la Ec. (5-3), $Z_1Z_4 = Z_2Z_3$,

$$\frac{R_a(jX_{a2})}{R_a + jX_{a2}} [(R_p + R_x) + j(X_p + X_{p2})] = R_b(jX_n) \quad (5-22)$$

De donde

$$(R_p + R_x)R_aX_{a2} + j(X_p + X_{p2})R_aX_{a2} = R_aR_bX_n + jX_{a2}R_bX_n \quad (5-23)$$

Igualando las partes reales,

$$R_p + R_x = R_b \frac{X_n}{X_{a2}} \quad (5-24)$$

Igualando las partes imaginarias,

$$X_p + X_{p2} = \frac{R_b}{R_a} X_n \quad (5-25)$$

Consideraremos ahora la condición de equilibrio con Z_x en cortocircuito. Los correspondientes valores de los elementos variables se distinguen con el subíndice 1. Así, de las Ecs. (5-24) y (5-25), si $Z_x = 0$,

$$R_p = R_b \frac{X_n}{X_{a1}} \quad (5-26)$$

$$X_{p1} = \frac{R_b}{R_a} X_n \quad (5-27)$$

Restando la Ec. (5-26) de la (5-24),

$$R_x = R_b X_n \left(\frac{1}{X_{a2}} - \frac{1}{X_{a1}} \right) = \frac{R_b}{C_n} (C_{a2} - C_{a1}) \quad (5-28)$$

Igualando las Ecs. (5-25) y (5-27),

$$X_x = X_{p1} - X_{p2} = \frac{1}{\omega} \left(\frac{1}{C_{p2}} - \frac{1}{C_{p1}} \right) \quad (5-29)$$

Las dos últimas ecuaciones indican que la incógnita queda determinada por la *diferencia* entre las dos lecturas de los capacitores variables C_a y C_p .

Es muy conveniente que un instrumento de este tipo tenga los diales calibrados directamente en los valores de la incógnita, R_x y X_x . Esta calibración puede obtenerse del siguiente modo: En el puente verdadero, los capacitores C_a y C_p están en paralelo con pequeños capacitores de compensación (no indicados en el diagrama), los que pueden ajustarse por medio de controles de "equilibrio inicial", independientes de los diales de C_a y C_p . Entonces, con la incógnita en cortocircuito, los diales de C_a y C_p se llevan a la lectura cero. El equilibrio obtiene, en seguida, por medio de los controles de equilibrio inicial. Con este procedimiento se hace $C_{a1} = 0$ y $1/C_{p1} = 0$. Las ecuaciones anteriores devienen, entonces,

$$R_x = \frac{R_b}{C_n} \frac{1}{C_{a2}} \quad (5-30)$$

$$X_x = \frac{1}{\omega C_{p2}}$$

Dejando fijos los capacitores de equilibrio inicial, se inserta la impedancia incógnita y se obtiene un segundo equilibrio con C_a y C_p . Las Ecs. (5-30) permiten así calibrar directamente el dial de C_a de modo que pueda leerse el valor de R_x en ohm. Lo mismo puede hacerse con el dial de C_p , con una excepción. Dado que el valor de X_x en la condición de equilibrio depende de la frecuencia, el dial puede calibrarse correctamente en ohm para sólo una frecuencia, por ejemplo 1 Mc/s. Si se hace

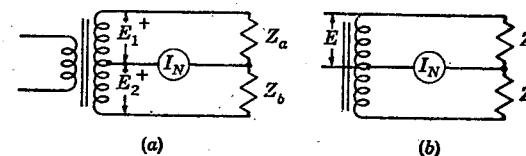


FIG. 5-6. Equilibrio en una distribución monofásica de tres hilos.

la medición a otra frecuencia, la lectura debe corregirse aplicando un factor de corrección f_{Mc} .

5-8. Uso de la inductancia mutua en los puentes. En algunas aplicaciones de los puentes no es conveniente aplicar la tensión entre los puntos a y b de la Fig. 5-1. Es posible llevar a la condición de

equilibrio un puente en el que la tensión de mención se aplique entre cualesquiera dos de los puntos *a*, *b*, *c* y *d*, siempre que se introduzca una oportuna *impedancia mutua* para acoplar dos ramas adyacentes. Es un ejemplo de este sistema la distribución monofásica de tres hilos utilizada en las instalaciones de energía eléctrica, de la cual se dan dos posibilidades en la Fig. 5-6.

En la Fig. 5-6a se utiliza un transformador para producir dos tensiones, E_1 y E_2 , en fase. Si se ajustan las impedancias Z_a y Z_b de modo que $E_1/E_2 = Z_a/Z_b$, no circula corriente alguna por el neutro. No es necesario que el transformador sea de dos arrollamientos, puesto que puede utilizarse igualmente un autotrasformador, como se ve en la

Fig. 5-6b. En este último caso el instrumento I_N puede considerarse como el detector, y las dos mitades del autotrasformador y las impedancias Z_a y Z_b como las cuatro ramas de un puente. Observárase que en este puente se aplica la tensión E a través de una de las cuatro ramas y que el equilibrio es posible gracias a la inductancia mutua o acción transformadora.

En la Fig. 5-7 se ilustra la disposición general de un puente con impedancia mutua entre las dos ramas Z_1 y Z_3 . La tensión E aplicase a dos circuitos, uno de los cuales está constituido por Z_2 , Z_4 y Z_3 en serie, y la otra, por Z_1 . Entre Z_1 y Z_3 hay una impedancia mutua Z_m , por lo general una inductancia mutua. La impedancia mutua hace que la corriente de una rama induzca una tensión en la otra. Sumando las caídas de tensión y las tensiones inducidas en los dos circuitos citados, caídense las siguientes relaciones:

Circuito de Z_1 :

$$E = I_1 Z_1 - I_2 Z_m \quad (5-31)$$

Circuito de Z_2 , Z_3 y Z_4 : $E = I_2 (Z_2 + Z_3 + Z_4) - I_1 Z_m \quad (5-32)$

Multiplicando la Ec. (5-31) por Z_m/Z_1 ,

$$E \frac{Z_m}{Z_1} = I_1 Z_m - I_2 \frac{Z_m^2}{Z_1} \quad (5-31a)$$

Sumando la Ec. (5-31a) a la Ec. (5-32),

$$\begin{aligned} E \left(1 + \frac{Z_m}{Z_1}\right) &= I_2 \left(Z_2 + Z_3 + Z_4 - \frac{Z_m^2}{Z_1}\right) \\ I_2 &= E \frac{Z_1 + Z_m}{Z_1 (Z_2 + Z_3 + Z_4) - Z_m^2} \end{aligned} \quad (5-33)$$

En la condición de equilibrio el potencial de *d* respecto de *c* debe ser nulo, es decir,

$$I_2 Z_2 = E \quad (5-34)$$

Introduciendo la Ec. (5-34) en la (5-33),

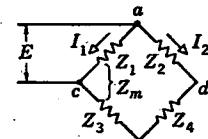


FIG. 5-7. Puente de c.a. con impedancia mutua.

$$\frac{I_2 (Z_1 + Z_m) Z_2}{Z_1 (Z_2 + Z_3 + Z_4) - Z_m^2} = I_2$$

$$Z_1 Z_2 + Z_m Z_2 = Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_1 Z_4 - Z_m^2$$

La ecuación de equilibrio es, por lo tanto,

$$Z_1 Z_3 + Z_1 Z_4 = Z_2 Z_m + Z_m^2 \quad (5-35)$$

Si la impedancia mutua es una inductancia mutua pura, $Z_m = j\omega L_m$.

Si Z_1 y Z_2 son dos arrollamientos de un transformador, en el cual prácticamente todo el flujo de un arrollamiento concatena todas las espiras del otro;

$$Z_1 Z_3 \approx Z_m^2 \quad (5-36)$$

Aplicando este resultado a la Ec. (5-35), ésta deviene

$$Z_1 Z_3 + Z_1 Z_4 = Z_2 \sqrt{Z_1 Z_3} + Z_1 Z_3$$

$$\sqrt{\frac{Z_1}{Z_3}} = \frac{Z_2}{Z_4} \quad (5-37)$$

Pero si las resistencias de Z_1 y Z_3 pueden despreciarse en comparación con sus reactancias y si n_1/n_3 es la relación de vueltas del transformador,

$$\frac{Z_1}{Z_3} = \frac{n_1^2}{n_3^2}$$

y se obtiene el equilibrio si

$$\frac{Z_2}{Z_4} = \frac{n_1}{n_3} \quad (5-37a)$$

5-9. Medición del desplazamiento de fase con puente de inductancia mutua. El puente puede utilizarse para la medición de la relación de dos tensiones en fase y magnitud. Se tiene como ejemplo la medición del desplazamiento de fase en un filtro o línea artificial, lo que está ilustrado en la Fig. 5-8 para un circuito típico.

$$I_1 = \frac{E_1}{R_1 + j\omega L_1}$$

$$E' = j\omega L_m I_1 = \frac{j\omega L_m E_1}{R_1 + j\omega L_1}$$

Si R_1 y L_m se ajustan hasta que no haya indicación en el detector, $E' = E_2$, y

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{j\omega L_m}{R_1 + j\omega L_1} \quad (5-38)$$

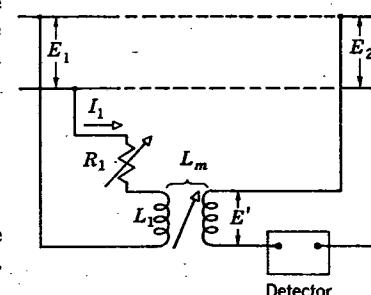


FIG. 5-8. Medición de la relación compleja entre dos tensiones por medio del puente de inductancia mutua.

Puesto que la inductancia mutua puede hacerse positiva o negativa por rotación, la relación compleja E_2/E_1 puede medirse en cualquiera de los cuatro cuadrantes.

5-10. Otras aplicaciones. Hasta ahora en este capítulo nos hemos limitado a la aplicación de los puentes en el campo de las mediciones. Sin embargo, la posibilidad de equilibrio o de impedancia de transferencia infinita del puente encuentra otras muchas útiles e interesantes aplicaciones en las telecomunicaciones. Estas se relacionan prin-

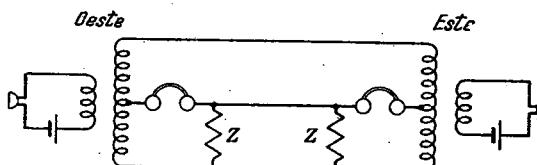


FIG. 5-9. Circuito anti-tono-lateral.

cipalmente con la separación o la combinación de dos señales en un medio común de transmisión. Discutiremos algunas de estas aplicaciones, primero en telefonía y telegrafía y luego en radio.

5-11. Circuitos anti-tono-lateral. En muchas aplicaciones telefónicas es deseable que el sonido que se introduce en el micrófono no sea escuchado en el receptor local. Así ocurre, por ejemplo, en los medios ambientes ruidosos, pues el ruido local tiende a enmascarar el mensaje deseado que llega del punto distante. Los circuitos que impiden que el receptor reciba las señales que se introducen en el trasmisor local se denominan circuitos anti-tono-lateral. Hay un ejemplo de esta aplicación en el aparato telefónico común. Tiene la ventaja de hacer que el usuario hable más fuerte, al no escucharse a sí mismo.

La Fig. 5-9 muestra una de las muchas combinaciones posibles basadas en el circuito puente de las Figs. 5-6 y 5-7. La impedancia Z debe ser igual en magnitud y fase a la impedancia de entrada de la línea telefónica, incluso el efecto de la terminación en el otro extremo. El diseño de estas redes se considera al final del Cap. VIII. La precisión con que ha de ajustarse Z depende de la aplicación en particular de que se trate. En los aparatos telefónicos el ajuste es sólo aproximado, de modo que el efecto no es completo.

Cuando se excita el trasmisor del extremo este, no produce efecto alguno sobre el receptor adyacente, pero aplica en cambio una tensión a la línea, la que afecta el receptor del otro extremo. De modo similar, el funcionamiento del trasmisor del extremo oeste produce sonido en el receptor este, pero no en el instrumento correspondiente del extremo oeste.

La mitad de la energía disponible se pierde en la impedancia Z , pero esto se compensa por el hecho de que no se pierde energía en el receptor local. Con valores adecuados de las resistencias del trasmisor y el receptor, tampoco hay pérdidas en la impedancia Z del otro extremo de la línea, de manera que el rendimiento del sistema es prácticamente el mismo que el de un sistema con tono lateral. Las condiciones de equilibrio se estudiarán con más detalle en la discusión de los repetidores telefónicos, donde el equilibrio exacto es más importante.

5-12. Circuitos dúplex. Sería posible, en un circuito similar al de la Fig. 5-9, tener dos mensajes unilaterales recorriendo la línea en sentidos opuestos. Una persona ubicada en el extremo oeste podría hablar continuamente a un individuo que escuchara en el extremo este, mientras que podría igualmente hablarse al mismo tiempo en sentido opuesto. Los circuitos comerciales deben sin embargo permitir la comunicación bilateral, de modo que este circuito se utiliza en telefonía no para permitir las conversaciones simultáneas, sino sólo para impedir la interferencia de los ruidos locales.

En telegrafía, por otra parte, los mensajes se transmiten por lo general de manera continua, mientras que las respuestas se envían posteriormente. En estas condiciones es posible trabajar en los dos sentidos simultáneamente, con la única condición de que los operadores (o las máquinas) no pidan repetición sino raramente. La mayor parte del tráfico telegráfico moderno se hace por medio de máquinas que pueden ajustarse para trabajar a velocidad constante con un número mínimo de errores. En estas condiciones, la transmisión simultánea de por lo menos dos mensajes por un mismo alambre representa una considerable economía en la planta exterior. Cuando pueden enviarse al mismo tiempo dos mensajes en sentidos opuestos, el sistema se denomina "dúplex".

El necesario equilibrio puede obtenerse en los sistemas telegráficos de cualquiera de las dos maneras ilustradas en la Fig. 5-10.

En la Fig. 5-10a obtiene el equilibrio por medio de un relé con bobina diferencial. La línea artificial, AL , debe tener igual impedancia que la entrada de la línea dentro de la gama de frecuencias necesarias para la telegrafía. Esta línea artificial consiste por lo general en la conexión en paralelo de un capacitor y un resistor. Hay cuatro posibles

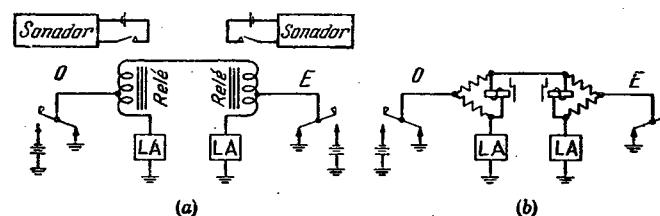


FIG. 5-10. Circuito telegráfico dúplex.

combinaciones entre los dos manipuladores. El relé del extremo oeste debe accionar sólo bajo el control del manipulador del extremo este, y viceversa. Las cuatro combinaciones son:

Condición 1. Ningún manipulador cerrado. No hay corriente y ningún relé está por lo tanto excitado.

Condición 2. Manipulador E cerrado; manipulador O abierto. La corriente se divide en dos partes iguales en el relé "este", una mitad por la línea física, la otra por la línea artificial. Estas dos corrientes se compensan magnéticamente y el relé no acciona. En el extremo "oeste", la corriente fluye por una mitad del arrollamiento del relé y

va a tierra por el contacto de reposo del manipulador, de modo que el relé acciona.

Condición 3. Manipulador *O* apretado; manipulador *E* abierto. Esta condición es la inversa de la condición 2, de modo que estará accionado el relé "este" y no el relé "oeste".

Condición 4. Ambos manipuladores apretados. Los dos extremos de la línea física están al mismo potencial y por ella no circula corriente, como tampoco así por las secciones de los arrollamientos de los relés a ellas conectadas. Las corrientes de las baterías locales circulan por el otro arrollamiento de cada relé y los dos relés accionan.

El examen de las cuatro condiciones posibles demuestra que se satisfacen los requisitos para la trasmisión simultánea de señales en ambos sentidos.

El circuito de la Fig. 5-10b funciona de manera similar, pero en él el equilibrio obtiénesse eléctricamente en lugar de magnéticamente.

Cuando se alteran las condiciones de la línea física, por ejemplo por reducción de la resistencia de aislación como consecuencia de la humedad del tiempo, puede alterarse el equilibrio y el sistema deja de funcionar correctamente hasta que se reajustan las líneas artificiales.

Si los relés son del tipo polar, es decir, accionan cuando la f.m.m. tiene un sentido determinado y no en caso contrario, no tiene que ser tan exacto el equilibrio de la línea artificial y el circuito puede funcionar en condiciones de línea física muy variable. Por esta razón, la mayoría de los circuitos telegráficos dúplex utilizan relés polares y los manipuladores invierten la polaridad de la batería en lugar de simplemente conectarla y desconectarla como en los dos circuitos de la Fig. 5-10.

5-13. Circuitos fantasma. Todo medio que permita aumentar el número de canales de comunicación trasportado por un número dado de alambres tiende a reducir el coste relativo del plantel externo, el que constituye una parte importante de los costes de explotación de los sistemas de comunicación de larga distancia. Una manera simple de aumentar el número de canales de comunicación consiste en el aprovechamiento de los circuitos "fantasma". El circuito fantasma permite obtener un canal telefónico adicional por cada dos pares de hilos, con lo que la capacidad de tráfico del sistema aumenta en el 50 por ciento. Se basa en un principio de equilibrio, similar al del puente. El equipo terminal necesario es muy simple, pues reduzce a un par de bobinas repetidoras (o transformadores) en cada extremo del



FIG. 5-11. Circuito telefónico fantasma.

circuito fantasma. La conexión está ilustrada en la Fig. 5-11. Los circuitos físicos se llaman circuitos "físicos" o "laterales". Los terminales de los circuitos físicos y fantasmas se llevan al mismo campo de conjuntos en el tablero de larga distancia, de manera que la operadora no hace ninguna diferencia entre ellos.

Gracias al principio de superposición, las señales pueden considerarse una por una. Una tensión aplicada al circuito fantasma en el extremo oeste de la Fig. 5-11 hace entrar una corriente por el punto medio de cada bobina repetidora. Si las *impedancias de los dos conductores de cada circuito físico* son exactamente iguales, la corriente se divide en partes iguales y no produce por lo tanto ninguna f.m.m. en la bobina repetidora. Las corrientes debidas a las señales aplicadas al circuito fantasma circulan en el mismo sentido por los dos conductores del circuito físico 1 y en sentido opuesto por los dos conductores del circuito físico 2. En el extremo remoto, las dos corrientes vuelven a producir f.m.m. iguales y opuestas en las bobinas repetidoras, sin ningún efecto neto sobre los circuitos físicos. Además, la inductancia de las bobinas repetidoras no tiene tampoco ningún efecto sobre las señales del circuito fantasma. De esta manera, el sistema puede conducir tres conversaciones simultáneas, una en cada circuito físico y una en el circuito fantasma, sin interferencias recíprocas.

En la Fig. 5-11 indícanse los sentidos de las diversas señales en cierto instante.

Para que las f.m.m. se cancelen exactamente en las bobinas repetidoras, es necesario que el flujo de dispersión sea despreciable. Esto se consigue arrollando las dos mitades de la bobina secundaria con alambres adyacentes, como lo ilustra la Fig. 5-12. También se usan núcleos toroidales al mismo efecto.

Es extremadamente importante que las impedancias de los dos lados de cada línea física sean tan aproximadamente iguales como sea posible. En caso contrario, las corrientes fantasmas de los dos lados no resultan exactamente iguales y llegan a producir una f.m.m. no nula en las bobinas repetidoras. Aparece así cierta "diafonía", o interferencia, entre los circuitos físicos y el circuito fantasma. Si los dos circuitos físicos están desequilibrados, el fantasma provee un camino por el cual puede producirse diafonía también entre los dos circuitos físicos.

La trasmisión por el circuito fantasma es en realidad superior en comparación con la que tiene lugar por los circuitos físicos, porque el primero dispone de dos conductores en cada lado.

Con el fin de impedir que las corrientes que circulan por un par de conductores de un cable induzcan tensiones en los otros pares del mismo cable, los pares se retuercen de una manera continua en toda su extensión. En las líneas abiertas (al aire), los alambres se "trasponen" a ciertos intervalos con el mismo propósito. Cuando se impone

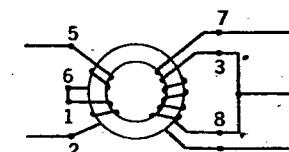


FIG. 5-12. Arrollamientos de una bobina repetidora para circuito fantasma.

un circuito fantasma sobre dos pares, cada uno de éstos debe tratarse como un único conductor, de modo que se retuerzen también estos dos pares como si se tratara de los dos alambres de un par físico. En las líneas aéreas deben trasponerse los pares del circuito fantasma según el mismo criterio. El par de pares así tratado en un cable recibe el nombre de "cuadrete".



FIG. 5-13. Repetidor telefónico bilateral (dos vías) que no puede funcionar a causa del "canto".

dos en las líneas telefónicas. Al aumentar la longitud de una línea telefónica, las pérdidas que en ella tienen lugar alcanzan un límite para el cual no es ya posible la explotación comercial de la línea. Es entonces necesario introducir una amplificación para compensar las pérdidas. Los circuitos telefónicos deben trabajar en los dos sentidos. Por lo tanto, los amplificadores deben ser también bilaterales. La primera idea que se le ocurriría al novato sería la de conectar dos amplificadores de la manera indicada en la Fig. 5-13, uno para trabajar en un sentido, el otro para trabajar en sentido opuesto. El circuito de la Fig. 5-13 no sirve porque entra inmediatamente en oscilación (o "canta"). En efecto, la salida de un amplificador queda aplicada a la entrada del otro, y la salida amplificada del segundo vuelve a ser introducida en la entrada del primero. Es por lo tanto necesario aislar la salida de cada amplificador respecto de la entrada del otro y separar además las señales que circulan por la línea de manera que las de un sentido sean amplificadas por un amplificador y las de sentido opuesto, por el otro. Resúlvese este problema aplicando el mismo principio que en el caso del tono lateral, Fig. 5-9. El circuito de un repetidor bilateral es en lo esencial el de la Fig. 5-14. Esta disposición se conoce con el nombre de "repetidor tipo 22", donde las cifras significan "dos vías, dos elementos"

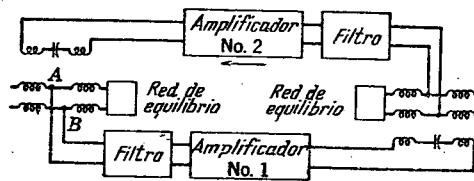


FIG. 5-14. Repetidor telefónico tipo 22.

El transformador se llama "bobina híbrida". La salida de uno de los amplificadores induce una tensión en el secundario, la que se divide por igual entre la línea y la red de equilibrio (o línea artificial). Si la impedancia de la red de equilibrio¹ es igual a la de la línea física, dentro de la gama de frecuencias que se desea amplificar, no hay diferencia de tensión entre los puntos A y B como consecuencia de la salida

¹ En el Cap. VIII discútense algunos circuitos de equilibrio para líneas tónicas.

del amplificador 2, como no la había a través del receptor en el circuito de la Fig. 5-9 por efecto del trasmisor local. De esta manera, la entrada de cada amplificador está aislada de la salida del otro. En cambio, una tensión proveniente de la línea es transferida a la entrada del amplificador conectada entre los puntos A y B. Esta señal es así amplificada y la mitad de la potencia de salida del amplificador respectivo es entregada a la otra línea, perdiéndose la otra mitad en la línea artificial.

5-15. Relaciones de impedancia en los repetidores 22. El análisis del circuito de la Fig. 5-14 se facilita considerando el transformador de dos arrollamientos de la Fig. 5-15. Esto puede hacerse porque el único propósito del tercer arrollamiento de la Fig. 5-14 es el de mantener la línea equilibrada respecto de tierra.

El generador y la impedancia R_p representan en la Fig. 5-15 el efecto del circuito de salida del amplificador. Z_1 representa la impedancia de entrada de la línea, Z_2 la de la red de equilibrio, y Z_3 , la del circuito de entrada del otro amplificador. A fin de evitar el canto, la tensión E no debe producir corriente alguna en Z_3 . Para satisfacer esta condición, si ac y cb son arrollamientos idénticos, debe cumplirse la condición

$$Z_1 = Z_2$$

Es deseable hacer que la transferencia de energía desde el amplificador a la línea sea tan eficiente como resulte posible. Para ello es necesario ajustar al valor óptimo la relación de vueltas del transformador. Sea n_1 el número de espiras de la bobina ef , y n_2 el de la bobina ab . Dado que $Z_1 = Z_2$, la carga total sobre el secundario es $2Z_1$. Si la línea está cargada en el extremo remoto por su impedancia característica Z_o , se tiene $Z_1 = Z_o$, según se verá en el Cap. VI. (Si la línea no está así terminada, se producen reflexiones indeseables.) Entonces, la relación correcta de vueltas es

$$\frac{n_1}{n_2} = \sqrt{\frac{R_p}{2Z_o}} \quad (5-39)$$

Es conveniente que la impedancia de entrada que ofrece el repetidor entre los terminales a y d sea igual a Z_o , para evitar la reflexión de las señales que llegan a este punto. Para ello es necesario seleccionar adecuadamente la impedancia Z_3 .

Supongamos por un momento que Z_2 está desconectada. Entre los terminales a y b del transformador aparece una impedancia igual a $2Z_o$ si se satisface la Ec. (5-39). Entre los terminales a y c la impedancia es $Z_o/2$, puesto que la impedancia es proporcional al cuadrado del número de vueltas. Si Z_2 está desconectada, el valor de Z_3 que hará que la impedancia entre a y d sea igual a Z_o será

$$Z_3 = \frac{Z_o}{2} \quad (5-40)$$

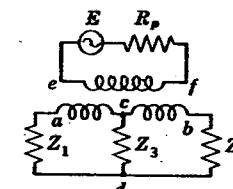


FIG. 5-15. Circuito equivalente para el análisis del repetidor telefónico.

La caída de tensión entre a y c sería igual, entonces, a la caída de tensión entre c y d . La potencia de llegada se dividiría así en dos partes iguales, disipándose una mitad en Z_3 y la otra mitad en R_p . Dado que la potencia se divide por dos tanto a la entrada como a la salida del repetidor, la potencia de salida de éste es la cuarta parte de la que se obtendría de la misma unidad si se la utilizara como unilateral. La corriente que circula por el arrollamiento ac induce una tensión en la otra mitad del secundario, cb , la que sería igual a la tensión sobre ac si el transformador fuera perfecto. En la práctica esta igualdad se cumple muy aproximadamente. Pero dado que $E_{ac} = E_{cb}$ y $E_{ac} = E_{cd}$, la tensión entre b y d es cero: $E_{bd} = 0$.

Por consecuencia, respecto de las señales que llegan por la línea tanto da que Z_2 esté conectada como que no esté conectada, y las conclusiones anteriores para Z_2 desconectada siguen siendo válidas cuando se conecta esta impedancia. La principal conclusión es que, de cumplirse la Ec. (5-39), debe satisfacerse también la Ec. (5-40) para evitar reflexiones en la línea.

Si hay desequilibrio en las dos redes, el repetidor 22 canta u oscila. Dado que no es posible asegurar un equilibrio perfecto para todas las frecuencias, es preciso limitar la ganancia del repetidor, pues la tendencia al canto es tanto más pronunciada cuanto mayor es la ganancia. Con el fin de impedir el canto en las frecuencias ajenas a la gama necesaria para la transmisión de la voz, intercálase un filtro para eliminar las frecuencias innecesarias. La frecuencia de corte del filtro se elige por lo común igual a la frecuencia más alta que interesa trasmisitir.

5-16. Repetidor de dos vías, un elemento. Es posible construir un repetidor en el que la línea misma actúe como red de equilibrio.

Se necesita entonces un solo amplificador para amplificar en los dos sentidos. Se trata así de un repetidor tipo 21, o de dos vías, un elemento. Su circuito aparece en la Fig. 5-16.¹ El repetidor tipo 21 sólo puede usarse entre líneas de características muy similares. Además, envía la mitad de la potencia de salida de vuelta hacia la estación trasmisora y da así lugar a un fuerte "eco". Por esta razón este repetidor no puede usarse en las líneas largas que requieren más de una amplificación.

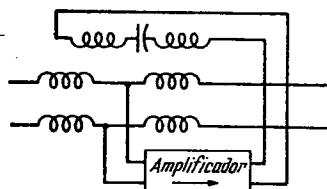


Fig. 5-16. Repetidor telefónico tipo 21.

5-17. Repetidor de cuatro hilos. En el repetidor tipo 22 de la Fig. 5-14 se separan las señales que viajan en sentidos opuestos. Cada elemento amplificador podría ser reemplazado por una línea larga con una sucesión de amplificadores de una vía. En este caso sólo se necesitarían bobinas híbridas y redes de equilibrio en los terminales. Se utiliza así un par para la transmisión en un sentido, y otro par para la

¹ La simplicidad comparativa del repetidor tipo 21 lo hace conveniente en las aplicaciones militares. En los sistemas telefónicos de campaña, su introducción en una línea aumenta entre el 30 y el 50 por ciento la distancia útil de transmisión, según el tipo de línea utilizado.

transmisión en sentido opuesto, esto es, un circuito de cuatro hilos. La ventaja que ofrece semejante disposición está en que la ganancia de cada repetidor es mayor, a causa de que no hay pérdidas en las bobinas híbridas, y en que no hay posibilidad de canto en un repetidor de una vía correctamente diseñado. En tal caso, puede reducirse el número de repetidores, disminuirse el calibre de los conductores, o ambas cosas. La mayoría de los circuitos de cable de larga distancia utilizan este sistema.

5-18. Circuitos puente en los amplificadores de radiofrecuencia. Otra aplicación de los circuitos puente se halla en la unilateralización de las válvulas; esto es, mediante un circuito puente puede impedirse que la energía presente en el circuito de placa sea realimentada al circuito de rejilla.

Por ejemplo, uno de los problemas principales de los amplificadores de r.f. sintonizados basados en el empleo de un tríodo de alto vacío es la tendencia a oscilar. Esta tendencia débese al camino de realimentación ofrecido por la capacitancia interelectrónica entre rejilla y placa, C_{gp} . La Fig. 5-17a muestra el circuito de c.a. básico de semejante amplificador. A causa de C_{gp} , la válvula no funciona como un verdadero elemento unilateral; la tensión de placa da lugar a la aparición de una tensión entre la rejilla y el cátodo. El problema inmediato es entonces el de *neutralizar* el efecto de C_{gp} . Esto se consigue modificando el circuito de la manera que da a ver la Fig. 5-17b.

La inspección del circuito redibujado en c muestra que la carga sintonizada de placa, C_{gp} , y el capacitor de neutralización C_N forman un circuito puente con acoplamiento por inductancia mutua entre dos ramas, como en la Fig. 5-7. C sintoniza la inductancia a resonancia, y la gran corriente de circulación ayuda también a mantener la tensión a través de ad en fase con la tensión entre d y b . Por lo tanto, el adecuado ajuste de C_N permite equilibrar el puente. En estas condiciones, la tensión de salida que aparece entre a y d , no tiene efecto sobre la tensión de rejilla entre c y d porque la impedancia de transferencia entre estos dos pares de terminales es infinita.

Otras variantes del circuito de neutralización difieren en algunos aspectos de la ilustrada en la Fig. 5-17, pero el principio es el mismo. En ambos casos el circuito se lleva a la forma de un puente de modo

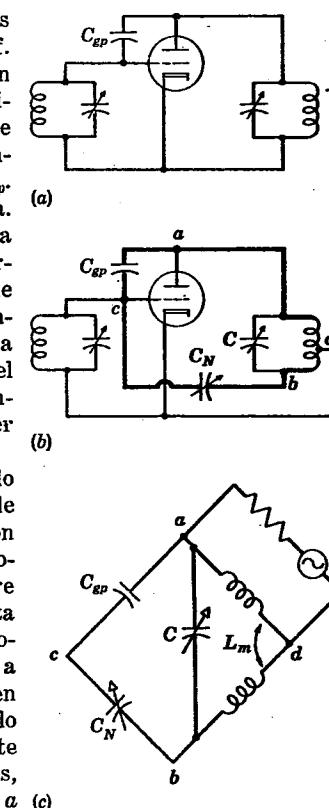


Fig. 5-17. Circuito puente para neutralizar un amplificador tríodico sintonizado.

que la condición de cero impide la realimentación de energía del circuito de placa al de rejilla.

5-19. Suma de dos señales. En la telecomunicación es a menudo necesario hacer que dos generadores entreguen potencia a una impedancia de carga común sin que exista interacción alguna entre los generadores. Si bien puede obtenerse este resultado aprovechando la propiedad unilateral de las válvulas, se la puede lograr asimismo por medio de redes pasivas en puente, como se indica en la Fig. 5-18. Si $R_1 = R_2$ y $X_3 = X_4$, el puente está equilibrado y E_A no puede producir corriente a través de E_B ni E_B a través de E_A . Así, los dos generadores están separados el uno del otro, pero ambos entregan al mismo tiempo, pero independientemente, energía a la carga representada por R_1 y R_2 . Debe observarse que si X_3 y X_4 son reactores sencillos e idénticos, el equilibrio resulta independiente de la frecuencia.

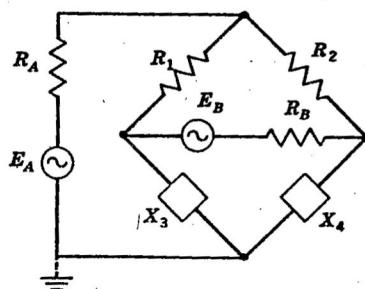


FIG. 5-18. Circuito para sumar señales provenientes de dos generadores, sin interacción.

misor de sonido. Las dos unidades entregan simultáneamente potencia a las dos antenas, R_1 y R_2 .

5-20. Circuito de cero T-doble. Otra forma básica del circuito de cero, aparte del puente de Wheatstone, es el circuito de T-doble. Determinaremos primero la ecuación de equilibrio para el circuito básico ilustrado en la Fig. 5-19a. Luego consideraremos el comportamiento del circuito con un grupo determinado de componentes.

El circuito básico de la Fig. 5-19a está en equilibrio, la tensión de salida E_2 es nula. Se obtiene la ecuación de equilibrio planteando, por ejemplo, las ecuaciones circuitales en la forma nodal e imponiendo luego la condición $E_2 = 0$. Aplicando las reglas de Kirchhoff se tiene

$$\begin{array}{lcl} (Y_g + Y_1 + Y_3)E_1 & + 0 & -Y_2E_3 \\ 0 & + (Y_L + Y_2 + Y_4)E_2 & -Y_3E_1 \\ -Y_2E_1 & -Y_4E_2 & + (Y_3 + Y_4 + Y_6)E_3 \\ -Y_1E_1 & -Y_2E_2 & + 0 \end{array} \quad \begin{array}{lcl} -Y_1E_4 & = I \\ -Y_2E_4 & = 0 \\ +0 & = 0 \\ +(Y_1 + Y_2 + Y_6)E_4 & = 0 \end{array} \quad (5-41)$$

Luego, para que haya cero, se puede escribir $E_2 = IC'_{12}/D' = 0$. La condición de equilibrio se satisface así si el cofactor $C'_{12} = 0$. De la

Ec. (5-41) se obtiene, entonces,

$$Y_3Y_4(Y_1 + Y_2 + Y_6) + Y_1Y_2(Y_3 + Y_4 + Y_6) = 0 \quad (5-42)$$

La Ec. (5-42) es la ecuación de equilibrio para la estructura T-doble básica. En común con el puente de Wheatstone, la condición de equilibrio de esta estructura es independiente de las admitancias de la carga y del generador. Si Y_L representa un detector, el circuito puede usarse como un puente de impedancias o de frecuencias del modo descrito antes en este mismo capítulo. En las mediciones de r. f. se recurre por lo general al método de sustitución (ver Prob. 5-12).

El circuito T-doble exhibe una curva de selectividad que se acerca mucho a la de un circuito antirresonante y es interesante observar que para obtener esta curva no se necesita un inductor. Además, el Q efectivo puede ser mucho mayor que en un circuito antirresonante convencional.

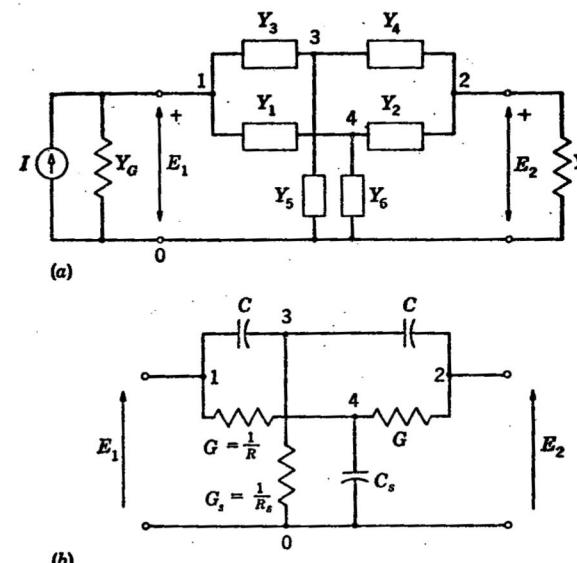


FIG. 5-19. Circuitos T-doble.

Esta propiedad del circuito T-doble se aprovecha a menudo en la práctica y conviene por lo tanto investigarla. En esta aplicación es usual formar las ramas Y_1 e Y_2 con resistores iguales, Y_3 e Y_4 con capacitores iguales, Y_5 con un resistor, e Y_6 con un capacitor. Así, para el circuito de la Fig. 5-19b,

$$\begin{array}{ll} Y_1 = Y_2 = G & Y_3 = Y_4 = j\omega C \\ Y_5 = G_s & Y_6 = j\omega C_s \end{array} \quad (5-43)$$

Y llevando estos valores a la condición de cero (5-42)

$$-(\omega_0 C)^2(2G + j\omega_0 C_s) + G^2(j2\omega_0 C + G_s) = 0 \quad (5-44)$$

donde ω_0 es 2π veces la frecuencia de cero. Luego, igualando las partes reales,

$$2(\omega_0 C)^2 G = G^2 G_s \quad (5-45)$$

y las imaginarias

$$(\omega_0 C)^2 \omega_0 C_s = 2\omega_0 C G^2 \quad (5-46)$$

Por lo tanto, según las dos últimas ecuaciones, la frecuencia de cero está dada por

$$\omega_0^2 = \frac{G G_s}{2C^2} = \frac{2G^2}{C_s C} \quad (5-47)$$

Así, dados los componentes del circuito, es posible determinar la frecuencia para la cual se obtiene el cero.

¿Cómo se diseñaría un circuito T-doble del tipo RC de modo de obtener una frecuencia de cero f_0 predeterminada? Hay que elegir cuatro valores de componentes para satisfacer la Ec. (5-47). Con el fin de simplificar el procedimiento, conviene elegir un parámetro de diseño, n , del siguiente modo: Reordenando la segunda igualdad de la Ec. (5-47),

$$n = \frac{G_s}{2G} = \frac{2C}{C_s} \quad (5-48)$$

Con lo que ω_0^2 resulta

$$\begin{aligned} \omega_0^2 &= \frac{G G_s}{2C^2} = \frac{G}{2C^2} 2G_n = n \frac{G^2}{C^2} \\ \text{o} \quad \omega_0 &= \frac{\sqrt{n}}{RC} \end{aligned} \quad (5-49)$$

Luego, si se busca una frecuencia específica f_0 , pueden elegirse arbitrariamente dos cualesquiera de las tres incógnitas, R , C y n para calcular la tercera con la Ec. (5-49). Se utiliza luego la Ec. (5-48) para obtener R_s y C_s .

5-21. Selectividad. Puede demostrarse que el valor del parámetro de diseño n controla la selectividad de la red de modo muy parecido a como lo hace el factor Q en el circuito antirresonante. La investigación de la selectividad permite entonces elegir inteligentemente el valor de n y eliminar uno de los grados de arbitrariedad en el diseño de las redes RC del tipo T-doble.

Resultan algunas simplificaciones al observar que la red T-doble se encuentra por lo general entre dos pentodos cuando se la utiliza como circuito selectivo. En este caso, Y_g , la admitancia de la fuente, es $1/r_p$ de la válvula excitadora. En general r_p es muy grande en comparación con las impedancias de la red, de modo que Y_g resulta despreciable en la Ec. (5-41). De modo similar, Y_L es la recíproca de la impedancia de entrada de una válvula y puede suponerse, también, despreciable. Se simplifica aun más nuestra tarea al expresar las incógnitas en términos de G , ω_0 , y n ; luego, de la Ec. (5-49),

$$C = \sqrt{n} \frac{G}{\omega_0} \quad (5-50)$$

y de la Ec. (5-48),

$$C_s = \frac{2C}{n} = \frac{2G}{\sqrt{n} \omega_0} \quad (5-51)$$

$$G_s = 2nG \quad (5-52)$$

Introduciendo estos valores en la Ec. (5-41), obtiénes como determinante del circuito

$$\begin{vmatrix} G + j\sqrt{n}G\frac{\omega}{\omega_0} & 0 & -j\sqrt{n}G\frac{\omega}{\omega_0} & -G \\ 0 & G + j\sqrt{n}G\frac{\omega}{\omega_0} & -j\sqrt{n}G\frac{\omega}{\omega_0} & -G \\ -j\sqrt{n}G\frac{\omega}{\omega_0} & -j\sqrt{n}G\frac{\omega}{\omega_0} & j2\sqrt{n}G\frac{\omega}{\omega_0} + 2nG & 0 \\ -G & -G & 0 & 2G + j\frac{2G}{\sqrt{n}\omega_0} \end{vmatrix}$$

Por definición, la función de trasferencia de la red es E_2/E_1 . Pero, en términos de los cofactores y el determinante del circuito,

$$E_2 = I \frac{C'_{12}}{D'} \quad \text{y} \quad E_1 = I \frac{C'_{11}}{D'}$$

de donde $E_2/E_1 = -M'_{12}/M'_{11}$. La evaluación de los dos menores complementarios M'_{12} y M'_{11} conduce a la siguiente expresión de la función de trasferencia:

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{1 - (f/f_0)^2}{[1 - (f/f_0)^2] + j2(\sqrt{n} + 1/\sqrt{n})(f/f_0)} \quad (5-53)$$

Esta es, entonces, la ecuación básica cuya magnitud da la selectividad y cuyo ángulo da el ángulo de desplazamiento de fase de la red T-doble.

La Ec. (5-53) no se encuentra por cierto en la forma óptima para el cálculo con regla. Para esto último, la mejor forma es $1/[1 + jaf(f)]$. Para llegar a esta forma, se dividen el numerador y el denominador de la Ec. (5-53) por $1 - (f/f_0)^2$, con lo que se obtiene

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{1}{1 + j \frac{2(\sqrt{n} + 1/\sqrt{n})f/f_0}{1 - (f/f_0)^2}} = \frac{1}{1 - j2 \frac{\sqrt{n} + 1/\sqrt{n}}{f/f_0 - f_0/f}} \quad (5-54)$$

Comparando este resultado con la Ec. (4-39), obsérvese que la función de trasferencia es geométricamente simétrica respecto de f_0 en cuanto a la frecuencia, y respecto de 1 en cuanto a n . Vale decir, $n = 2$ y $n = 1/2$ dan la misma curva de selectividad. El estudiante puede demostrarlo fácilmente.

Es ahora posible determinar qué valor de n da la curva más selec-

tiva. La Fig. 5-20 ilustra dos curvas de selectividad típicas, para dos distintos valores de n . La curva de trazo continuo es más aguda y por lo tanto más selectiva. El criterio para elegir la curva más selectiva es que $|E_2/E_1|$ sea máxima para cualquier frecuencia arbitraria distinta de f_0 . Luego, si se diferencia la magnitud de E_2/E_1 en la Ec. (5-54) con respecto a n y se iguala la derivada a cero, encuéntrense que $n = 1$ es la condición de máxima selectividad.

La Fig. 5-21 da la curva de selectividad de una red RC del tipo T-doble típica. La red está diseñada para dar un cero en 5 Kc/s y con $n = 1$; la relación $|E_2/E_1|$ se representa en escala logarítmica. Los círculos representan los valores medidos en el laboratorio. Se observa que hay muy buena coincidencia entre los resultados teóricos y los medidos, excepto en la vecindad del punto de cero. Esta discrepancia se debe a tres factores principales. En primer término, el oscilador utilizado tiene cierto contenido de armónicas. Así, cuando se lo ajusta a 5 Kc/s, hay también presentes señales de 10 y de 15 Kc/s, las que dan cierta tensión de salida, aunque pequeña. Segundo, no es posible obte-

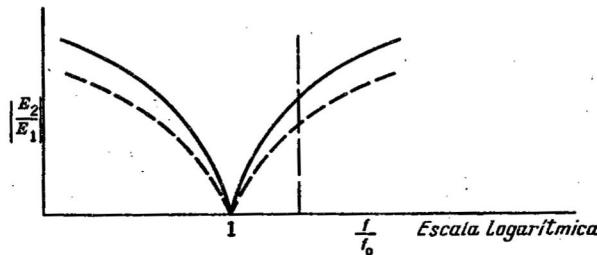


FIG. 5-20. Curvas de selectividad para la red T-doble.

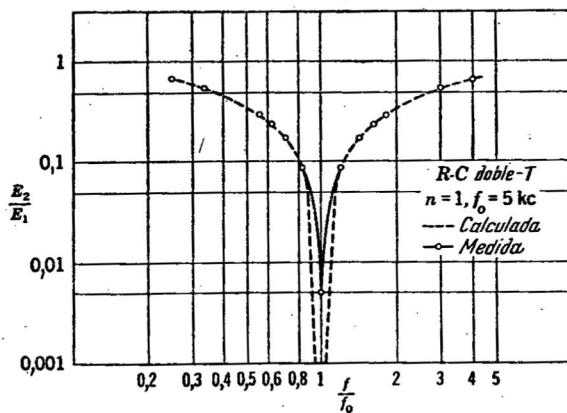


FIG. 5-21. Curvas medida y calculada de la función de trasferencia de una red T-doble.

ner un cero perfecto porque la red física tiene capacitancias dispersas que no se han tomado en cuenta en el análisis teórico. Estas capacitancias dispersas crecen en importancia a medida que se eleva la frecuencia de trabajo. Por ejemplo, si se diseña una red similar con un cero en 50 Kc/s, la discrepancia entre la curva medida y la curva teórica sería aún mayor. En tercer lugar, los componentes del puente se realizaron con una precisión de tres cifras significativas, solamente.

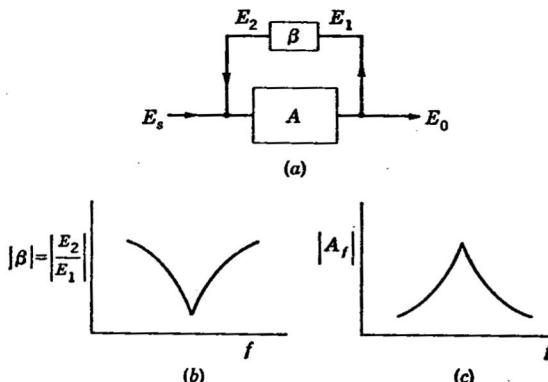


FIG. 5-22. Amplificador realimentado con una red T-doble en el lazo de realimentación.

En general, la red T-doble tipo RC es de máxima utilidad como circuito de cero en las frecuencias más bajas de audio, porque provee un Q efectivo mayor que el que puede obtenerse con los circuitos LC a estas frecuencias. Además, económicamente, ofrece la ventaja de que se lo construye con elementos que son más baratos que los inductores de alta inductancia.

Respecto de las frecuencias de audio más elevadas, la posición de la red T-doble no es tan ventajosa, puesto que pueden entonces emplearse inductores de baja L en los circuitos antirresonantes convencionales. Pero en las frecuencias aún superiores, este circuito ofrece una posible ventaja sobre el puente de Wheatstone debido a la presencia de una conexión común de masa. No obstante, hay que prestar especial atención a las capacitancias dispersas.

5-22. Aplicación típica. Es bien sabido en la electrónica que si el amplificador de la Fig. 5-22a tiene una gran amplificación $|A|$, la ganancia total con realimentación es

$$A_f = -\frac{1}{\beta}$$

donde β es la respuesta de la red de realimentación. Luego, si se usa una red T-doble como red de realimentación, con una función de transferencia como la de b , la respuesta de amplitud del amplificador total es proporcional a $|E_1/E_2|$, o la recíproca de la Ec. (5-54), como se muestra en c . Obtiéñese, por lo tanto, la característica virtual de un amplificador sintonizado. Un amplificador de este tipo puede utilizarse

ventajosamente con el detector de un puente de impedancias. La aguda selectividad reduce al mínimo el efecto de las armónicas del oscilador y permite obtener un cero más definido en el puente de medición. La conexión común de tierra del circuito T-doble resulta particularmente ventajosa en esta aplicación.

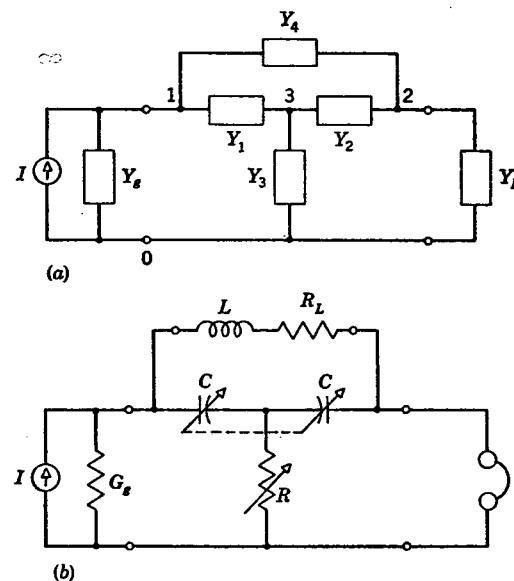


FIG. 5-23. Redes de cero del tipo T-puenteada.

5-23. Red T-puenteada. Otro tipo de red de cero de uso común es la red T-puenteada cuyo circuito básico se ofrece en la Fig. 5-23a. La manera de tratar este circuito para determinar la ecuación de equilibrio y la selectividad es similar al que acabamos de emplear para la red T-doble y la red T-puenteada ofrece también la ventaja de tener una conexión común de tierra para la entrada y la salida.

PROBLEMAS

5-1. Demostrar que, en equilibrio, el intercambio de posición entre el generador y el detector de un puente no afecta el equilibrio.

5-2. Conectando R_1C_1 en serie en la Fig. 5-3 obtéñese el llamado "puente de Hay". Derivar la ecuación de equilibrio para este puente.

5-3. Se desea diseñar un puente de Wien para cubrir el rango de frecuencias de 1 a 10 Kc/s. Se dispone de un capacitor variable de dos secciones, cada una de las cuales cubre el rango de 40 a 400 pF. Se requiere usar un valor de 1.000 ohm para R_s . Determinar las restantes resistencias del circuito para máxima selectividad.

5-4. El circuito de la Fig. 5-24 puede usarse para medir la constante de propagación compleja, γ , de la red N , la que está definida por $e\gamma = E_1/E_2$. Suponiendo que L y R han sido ajustadas de modo de obtener un cero en el detector, derivar una ecuación para calcular γ en la forma compleja.

5-5. Un sistema telegráfico "simplex" es el resultado de explotar un canal telegráfico entre tierra y un par telefónico balanceado respecto de tierra. Dibujar un esquema para este sistema y demostrar que el canal telefónico y el canal telegráfico pueden funcionar sin interferencias recíprocas.

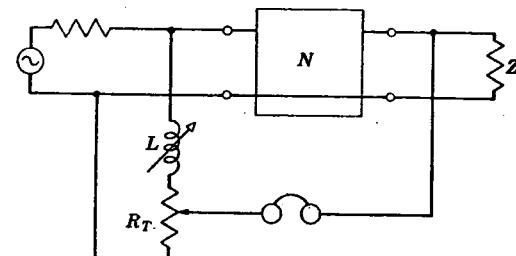


FIG. 5-24. Puente para determinar γ en el Prob. 5-4.

5-6. Una línea telefónica de dos conductores tiene que ser conectada a un radiotransmisor y un radioreceptor. La línea tiene que aceptar conversaciones bilaterales. El trasmisor y el receptor sólo aceptan comunicaciones unilaterales. Idear un sistema adecuado, empleando una bobina híbrida, para realizar la conexión de dos hilos a cuatro hilos.

5-7. En el circuito de neutralización de la Fig. 5-17, la bobina del circuito de placa tiene su derivación al 30 por ciento de las espiras contadas desde el fondo de la bobina. En estas condiciones, el coeficiente de acoplamiento entre las dos partes de la bobina es 0,48. La autoinductancia de la parte superior es $L_{ud} = 20 \mu\text{H}$, y la de la parte inferior, $L_{bd} = 6 \mu\text{H}$. Si $C_{sp} = 8,6 \text{ pF}$, determinar el valor nominal de C_N para obtener la neutralización en la frecuencia $\omega = 10^6 \text{ radian/seg}$.

5-8. En el circuito de la Fig. 5-18, derivar una ecuación para la relación de fase entre las dos componentes de tensión producidas a través de R_t por los generadores E_A y E_B .

5-9. (a) Calcular los componentes de una red T-doble para obtener la curva de selectividad de la Fig. 5-21. Usar $R = 1,5 \text{ kilohm}$. (b) Repetir para $f_0 = 5 \text{ Kc/s}$ y con $n = 0,25, 0,5, 2$, y 4 . Trazar las curvas de selectividad de todos los casos.

5-10. (a) Siguiendo el método general utilizado para la red T-doble, determinar la curva de selectividad para el puente de Wien de la Fig. 5-4 en términos de f/f_0 . Usar d como nodo de referencia, a como nodo 1, c como nodo 2, y b como nodo 3. Suponer nulas las admittancias del generador y de la carga. (b) ¿Depende la selectividad del valor de R_1 o del de R_2 ? (c) Comparar los méritos de la red T-doble y del puente de Wien como red de realimentación para un amplificador selectivo. (d) ¿Cuál de los dos circuitos puede hacerse más selectivo?

5-11. Trasformar el circuito T-doble de la Fig. 5-19b en una sección "pi" equivalente y demostrar que Z_b de la sección "pi" equivalente se comporta como una inductancia virtual para $f < f_0$.

5-12. La Fig. 5-25 muestra el circuito del equipo para medición de impedancias General Radio tipo 821. El circuito puede ser identificado como una estructura T-doble. C_b y C_a son variables y se usa el método de sustitución. Obtener ecuaciones para G_x y B_x en la frecuencia de cero en términos de los parámetros de la red.

5-13. (a) Derivar la ecuación de cero para la red T-puenteada de la Fig. 5-23a. (b) ¿Es posible obtener un cero si la red contiene sólo resistencia y capacitancia y si $Y_1 = Y_2$?

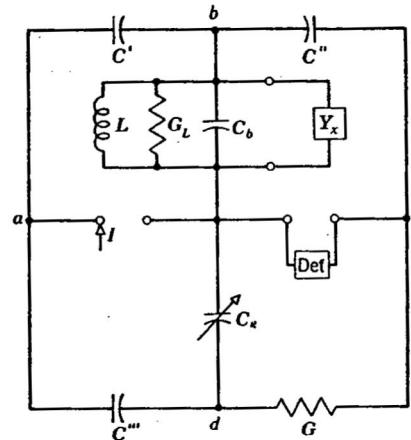


FIG. 5-25. Circuito básico del medidor de impedancias General Radio tipo 821-A.

5-14. Se desean verificar los valores de L , R_L y Q_L de una producción de bobinas, a la frecuencia de 1,59 Kc/s, con el circuito T-puenteada de la Fig. 5-23b.

- ¿Cuáles son las ecuaciones de L , R_L y Q_L en la frecuencia de cero?
- Si los valores medios de las bobinas son $L = 100$ mH y $Q_L = 25$, ¿qué valores medios se necesitan para C y R en la red?
- ¿Qué diales, dado el caso, pueden calibrarse directamente en términos de las incógnitas?

CAPÍTULO VI

REDES ITERATIVAS

Muchas redes utilizadas a menudo en la ingeniería de la telecomunicación consisten en circuitos *iterativos*, es decir, un número de etapas pasivas idénticas conectadas en cascada, o tandem, entre un generador y una carga, como se ve en la Fig. 6-1. Son ejemplos típicos de estas redes la línea artificial y el filtro de onda. Para una terminación general Z_R es posible el cálculo de la tensión y la corriente en cualquiera de los empalmes de la cascada por aplicación de los métodos del Cap. III, pero la tarea puede resultar larga y tediosa. Por ejemplo,

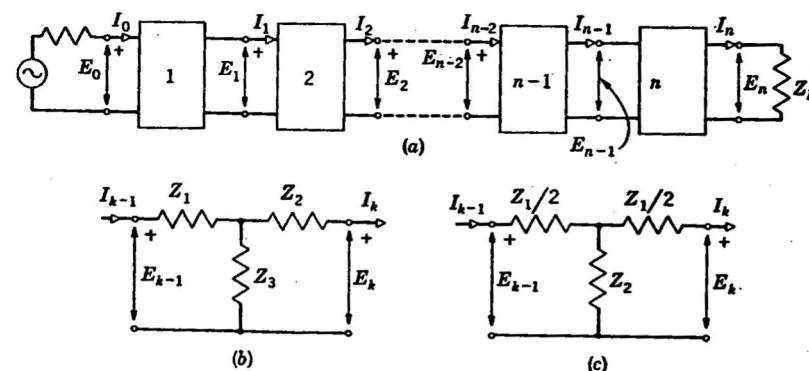


FIG. 6-1. Una cascada de redes idénticas de constantes concentradas.

si, en la Fig. 6-1, hay 20 secciones T idénticas, habría que escribir y resolver 21 ecuaciones simultáneas para calcular una cualquiera de las corrientes. Si, en cambio, como ocurre a menudo, Z_R es la *impedancia iterativa* de cada una de las secciones, es posible calcular el comportamiento de cada sección *independientemente* de las demás. El resultado es una gran simplificación del problema.

En el Cap. III se halló que, si una red como la de la Fig. 6-1b está terminada en su impedancia iterativa, la impedancia de entrada de la red es también igual a la impedancia iterativa. Aplicando esta idea a la cascada, es evidente que si $Z_R = Z_{it}$, cada etapa de la cascada está terminada en Z_{it} , y todas las etapas se comportan de manera idéntica.

Esto es evidentemente cierto cualquiera que sea el número de secciones de la cascada. Si hay alguna disipación de energía en la red, el efecto de la impedancia de terminación es más y más pequeño a medida que el número de secciones se hace más y más grande. Entonces, si el número de secciones es infinito, la impedancia de entrada es siempre igual a la impedancia iterativa. También es evidente que, cualquiera que sea la terminación, a medida que aumenta el número de secciones de una secuencia finita, la impedancia de entrada se aproxima asintóticamente (aunque posiblemente de un modo oscilatorio) a la impedancia iterativa.

Si las etapas componentes son simétricas, como en la Fig. 6-1c, la impedancia iterativa recibe la designación especial de *impedancia característica*. Dado que, en una cascada de secciones asimétricas terminada en Z_{it} , la única diferencia con respecto a una cascada de secciones simétricas se halla en los dos extremos, el estudio del caso simétrico da la clave, también, para el análisis del caso asimétrico. Por lo tanto, haremos el análisis para el caso de secciones simétricas.

6-1. La constante de propagación compleja. Consideremos la sección simétrica en T, típica, de la Fig. 6-1c. Supongamos que se aplica la tensión E_{k-1} a los terminales de entrada *y que la sección está terminada en su impedancia característica Z_{ot}* . Se tienen entonces las corrientes I_{k-1} e I_k , la última de las cuales produce la tensión E_k a través de Z_{ot} . En el caso general, Z_1 y Z_2 son complejos; por lo tanto I_{k-1} difiere de I_k y E_{k-1} de E_k tanto en magnitud como en fase. Luego, en el diagrama, por el teorema de división de la corriente, resulta, para la relación compleja de corrientes,

$$\frac{I_{k-1}}{I_k} = \frac{Z_1/2 + Z_2 + Z_{ot}}{Z_2} \quad (6-1)$$

Por definición de la impedancia característica Z_{ot} , la impedancia de entrada de la sección T es también Z_{ot} ; luego

$$E_{k-1} = I_{k-1} Z_{ot} \quad (6-2)$$

$$E_k = I_k Z_{ot} \quad (6-3)$$

Dividiendo la Ec. (6-2) por la Ec. (6-3) e introduciendo la Ec. (6-1),

$$\frac{E_{k-1}}{E_k} = \frac{I_{k-1}}{I_k} = \frac{Z_1/2 + Z_2 + Z_{ot}}{Z_2} \quad (6-4)$$

Dado que cada sección de la cascada se comporta del mismo modo cuando $Z_R = Z_{ot}$, la Ec. (6-4) puede generalizarse para obtener las relaciones de tensiones y corrientes a lo largo de toda la estructura iterativa; así

$$\begin{aligned} \frac{E_0}{E_1} &= \frac{E_1}{E_2} = \frac{E_2}{E_3} = \dots = \frac{E_{n-1}}{E_n} \\ &= \frac{I_0}{I_1} = \frac{I_1}{I_2} = \frac{I_2}{I_3} = \dots = \frac{I_{n-1}}{I_n} = \frac{Z_1/2 + Z_2 + Z_{ot}}{Z_2} \end{aligned} \quad (6-5)$$

La Ec. (6-5) muestra que es la misma para todas las secciones T la relación entre la corriente de entrada y la corriente de salida. Esto es consecuencia del hecho de que la rama en derivación de cada sección

drena la misma proporción, más bien que la misma magnitud de corriente; es por consecuencia conveniente expresar las relaciones de corrientes y tensiones de la Ec. (6-5) logarítmicamente. Esto puede hacerse definiendo una constante de propagación compleja, γ , de tal modo que

$$e^\gamma = \frac{I_{k-1}}{I_k} = \frac{E_{k-1}}{E_k} = \frac{Z_1/2 + Z_2 + Z_{ot}}{Z_2} \quad (6-6)$$

Por cuanto el segundo miembro de la Ec. (6-6) es complejo, también lo es γ ; sea, pues,

$$\gamma = \alpha + j\beta \quad (6-7)$$

Es ahora posible determinar las coordenadas rectangulares de γ . Expresemos la relación compleja de la Ec. (6-6) en forma polar, digamos, $|I_{k-1}/I_k|/\phi$; luego

$$\begin{aligned} e^\gamma &= \left| \frac{I_{k-1}}{I_k} \right| / \phi \\ 0 & \qquad \qquad \qquad e^{\alpha+i\beta} = \left| \frac{I_{k-1}}{I_k} \right| e^{j\phi} \end{aligned} \quad (6-8)$$

Tomando logaritmos naturales

$$\alpha + j\beta = \ln \left| \frac{I_{k-1}}{I_k} \right| + j\phi \quad (6-9)$$

Igualando las partes reales,

$$\alpha = \ln \left| \frac{I_{k-1}}{I_k} \right| = \ln \left| \frac{Z_1/2 + Z_2 + Z_{ot}}{Z_2} \right| \quad \text{neper/sección} \quad (6-10)$$

y las partes imaginarias,

$$\beta = \phi = \arg \frac{Z_1/2 + Z_2 + Z_{ot}}{Z_2} \quad \text{radián/sección} \quad (6-11)$$

donde "arg" significa "argumento de".

En la Ec. (6-10) se ve que α , la parte real de la constante de propagación compleja, es una medida de la variación de la magnitud de la corriente o la tensión en cada sección T; se la conoce con el nombre de constante de atenuación.

Por su parte, como es evidente, β mide la diferencia de fase entre las corrientes o las tensiones de entrada y de salida. Se la llama constante de fase, constante de retardo o constante de longitud de onda de la red. β es positiva cuando la corriente (o tensión) de salida está atrasada respecto de la corriente (o tensión) de entrada.

El valor de la constante de propagación compleja como ayuda para la resolución de los problemas que involucran estructuras iterativas con $Z_R = Z_{it}$ se advierte ahora con facilidad. Supongamos que se quiera hallar la corriente de salida de la etapa de orden k en la Fig. 6-1a. Se tiene

$$\frac{I_0}{I_k} = \frac{I_0}{I_1} \frac{I_1}{I_2} \frac{I_2}{I_3} \dots \frac{I_{k-2}}{I_{k-1}} \frac{I_{k-1}}{I_k} \quad (6-12)$$

Pero, por las Ecs. (6-5) y (6-6),

$$\frac{I_0}{I_k} = (e^{\gamma})^k = e^{k\gamma} \quad (6-13)$$

lo que vale decir que la atenuación total de k secciones en cascada es igual a $k\alpha$ neper, y que el correspondiente desplazamiento de fase es de $k\beta$ radianes. La correspondiente relación de tensiones está dada también por $e^{k\gamma}$. Debe insistirse en que estas relaciones sólo son válidas cuando la cascada está terminada de modo tal que $Z_R = Z_{oT}$ (o $Z_R = Z_{o\pi}$ en el caso de secciones componentes asimétricas). Si Z_R difiere de este valor, ocurren reflexiones en la carga y el desarrollo anterior no es ya aplicable. El tema de las reflexiones se considerará en el Cap. IX.

Respecto de las dimensiones de α , β , y γ , deben advertirse los siguientes hechos: Dado que todos los exponentes deben ser adimensionales, debe serlo $k\gamma$ en la Ec. (6-13). Dado que k es un número (de secciones), α , β y γ son números adimensionales "por sección". El estudiante observará que α se da en neper por sección y β , en radian por sección en las Ecs. (6-10) y (6-11). Los términos "neper" y "radian" expresan magnitudes adimensionales, pero los nombres sirven para recordar que se están usando logaritmos naturales o neperianos. La designación es necesaria y conveniente, pues, como veremos, la atenuación α puede expresarse en otra unidad adimensional, el decibel, que deriva de los logaritmos vulgares de base 10. También, β puede expresarse en grados a fin de simplificar los cálculos.

6-2. Secciones relacionadas. Aunque las Ecs. (6-10) y (6-11) han sido derivadas para una estructura en escalera formada por secciones T simétricas, puede demostrarse fácilmente que ellas son también aplicables a una escalera de secciones π simétricas, siempre que las secciones T y π se "armen" a partir de la misma sección L básica.

Consideremos la sección L básica de la Fig. 6-2a. Si se conectan dos de estas secciones L básicas en cascada uniendo sus ramas en derivación, las dos ramas en derivación, cada una de valor $2Z_2$, dan por resultante Z_2 , con lo que se obtiene la sección T simétrica de la Fig. 6-2b. En cambio, si las dos secciones básicas se unen en cascada de manera que se junten las dos ramas en serie, las dos ramas en serie, cada una de valor $Z_1/2$ se combinan para dar Z_1 , y se obtiene la sección π simétrica de la Fig. 6-2c.

Debe observarse que las secciones T y π de la Fig. 6-2 no son secciones equivalentes, sino redes *relacionadas* por el hecho de que se las arma a partir de la misma sección L básica; sus impedancias de cortocircuito y de circuito abierto no son respectivamente iguales.

Ahora bien, si se conectan en cascada varias secciones T, sus ramas en serie pueden combinarse de modo de obtener la estructura iterativa en escalera de la Fig. 6-2d. De modo similar, combinando varias secciones π relacionadas con las anteriores de igual manera, las ramas en paralelo se combinan de modo de dar lugar a la misma estructura en escalera (Fig. 6-2d).

Dado que una cascada de secciones T, cualquiera que sea su extensión, sólo puede diferir de una cascada de igual número de secciones π relacionadas en la disposición de las secciones L terminales, y puesto que el efecto de éstas sobre la relación de la corriente de entrada a la corriente de salida puede hacerse despreciable tomando un número grande de secciones, la constante de propagación debe ser la misma para las secciones T y π relacionadas. La conclusión es que la cons-

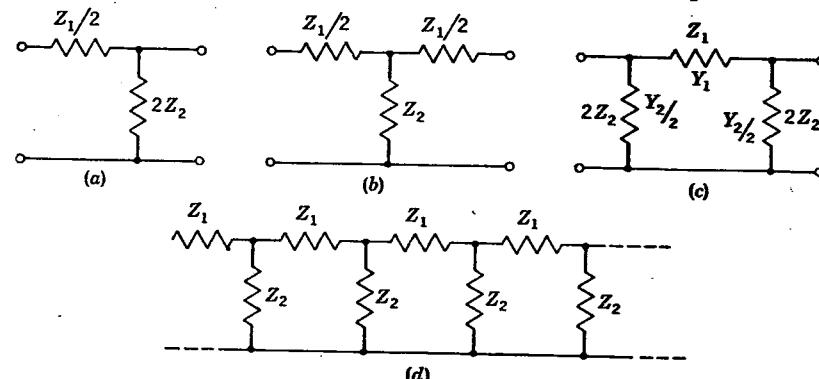


FIG. 6-2. Secciones relacionadas. Las secciones L, T y π se forman con idénticos valores básicos de Z_1 y Z_2 .

tante de propagación tanto para la sección T como para la sección π relacionada está dada por la Ec. (6-6) o

$$\gamma = \ln \frac{Z_1/2 + Z_2 + Z_{oT}}{Z_2} \quad (6-14)$$

donde $Z_{oT} = Z_o$ de la sección simétrica T.

$$= \sqrt{Z_1 Z_2 + Z_1^2/4}$$

El estudiante puede hallar la forma dual de la Ec. (6-14) a partir de la sección π relacionada. Ella es

$$\gamma = \ln \frac{Y_2/2 + Y_1 + Y_{o\pi}}{Y_1} \quad (6-14a)$$

donde $Y_{o\pi} = \sqrt{Y_1 Y_2 + Y_2^2/4}$, demostrar que da el mismo valor de γ .

6-3. Relaciones de impedancia en las redes relacionadas. Por cuanto las impedancias en circuito abierto y en cortocircuito no son las mismas para las redes T y π relacionadas, las dos redes tienen distintos valores de impedancia característica. Designemos con Z_{oT} la impedancia característica de la sección T y con $Z_{o\pi}$ la impedancia característica (y con $Y_{o\pi}$ la admittance característica) de la sección π relacionada. Luego, por la Ec. (3-106),

$$Z_{oT} = \sqrt{Z_1 Z_2 + \frac{Z_1^2}{4}} \quad (6-15)$$

Por el principio de dualidad general, la admitancia característica de la sección π es

$$Y_{o\text{II}} = \sqrt{Y_1 Y_2 + \frac{Y_2^2}{4}} \quad (6-16)$$

o, expresando las admitancias en términos de las correspondientes impedancias,

$$\frac{1}{Z_{o\text{II}}} = \sqrt{\frac{1}{Z_1 Z_2} + \frac{1}{4Z_2^2}} = \frac{1}{Z_1 Z_2} \sqrt{Z_1 Z_2 + \frac{Z_1^2}{4}} \quad (6-17)$$

Esta interrelación entre $Z_{o\text{T}}$, $Z_{o\pi}$ y los elementos básicos Z_1 y Z_2 tiene una importancia particular por cuanto la sección básica L puede

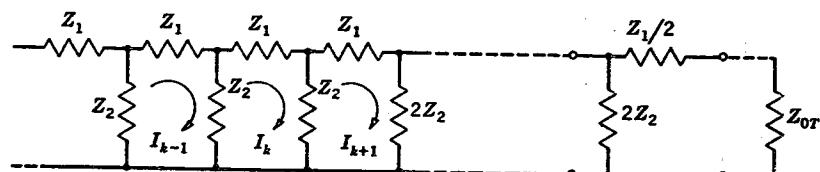


FIG. 6-3. Una estructura iterativa en escalera.

trasformar $Z_{o\text{T}}$ en $Z_{o\pi}$, y viceversa. Para ilustrar este principio, supongamos que el lado con rama en paralelo de la sección L (Fig. 6-2a) está terminado en $Z_{o\pi}$. La impedancia de entrada en el otro lado es, entonces,

$$Z_{in} = \frac{Z_1}{2} + \frac{2Z_2 Z_{o\text{II}}}{2Z_2 + Z_{o\text{II}}}$$

Introduciendo el valor de $Z_{o\pi}$ dado por la Ec. (6-17),

$$Z_{in} = \frac{Z_1}{2} + \frac{2Z_2 Z_1 Z_2 / Z_{o\text{T}}}{2Z_2 + Z_1 Z_2 / Z_{o\text{T}}}$$

Reduciendo a común denominador y simplificando,

$$Z_{in} = Z_{o\text{T}} \quad (6-17a)$$

Puede demostrarse de manera similar que si el extremo con rama en serie de la sección L se termina en $Z_{o\text{T}}$, la impedancia de entrada en el otro extremo viene a ser $Z_{o\pi}$. Estas propiedades transformadoras de impedancia de la sección L son de particular utilidad en el diseño de los filtros de onda (Cap. VII). Puede apreciarse una aplicación inmediata de esta propiedad al considerar el problema de terminar una estructura iterativa en escalera. Si la estructura está formada por secciones π simétricas, el extremo remoto de la cascada acaba en una rama en paralelo de valor $2Z_2$, como se ve en la Fig. 6-3. Luego si la estruc-

tura debe estar correctamente terminada para que se conserve la validez de la Ec. (6-6) o (6-7), debe ser $Z_R = Z_{o\pi}$.

Puede ocurrir que los elementos de resistencia y reactancias necesarios para formar $Z_{o\pi}$ no tengan valores tan convenientes como los adecuados para constituir $Z_{o\text{T}}$. Luego, si se agrega una sección L adicional (o una semi-sección) al extremo remoto de la línea, como se ve en la Fig. 6-3, la terminación correcta viene a ser $Z_R = Z_{o\text{T}}$ y podrán usarse las Ecs. (6-6) y (6-7) para el cálculo de las corrientes y tensiones.

6-4. γ en términos de funciones hiperbólicas. La Ec. (6-14) expresa γ en términos del logaritmo natural de una relación compleja de impedancias. Pueden derivarse otras expresiones de γ en términos de funciones hiperbólicas. Estas formas de alternativa son a menudo muy útiles en el estudio de los filtros de onda y de las líneas de transmisión. Una de ellas puede derivarse planteando una "ecuación de diferencia" para la sección de orden k en la Fig. 6-3. Aplicando la regla de tensiones de Kirchhoff a la malla de orden k ,

$$-Z_2 I_{k-1} + (Z_1 + 2Z_2) I_k - Z_2 I_{k+1} = 0 \quad (6-18)$$

Dividiendo ambos miembros por $-I_k/2Z_2$,

$$\frac{I_{k-1}}{2I_k} - \frac{Z_1 + 2Z_2}{2Z_2} + \frac{I_{k+1}}{2I_k} = 0$$

Pero; $e^\gamma = I_{k-1}/I_k = I_k/I_{k+1}$; luego,

$$\frac{e^\gamma + e^{-\gamma}}{2} = 1 + \frac{Z_1}{2Z_2}$$

Introduciendo la definición de coseno hiperbólico [Ec. (A-2)],¹

$$\cosh \gamma = 1 + \frac{Z_1}{2Z_2} \quad (6-19)$$

El estudiante podría creer que la Ec. (6-19) es más fácil de usar que la Ec. (6-14), pero no es necesariamente así a menos que Z_1 y Z_2 sean ambas reales, o ambas imaginarias, como se las puede considerar en la teoría de los filtros de onda. En cualquiera de los dos casos, $\cos \gamma$ es real, y la determinación de las partes real e imaginaria de γ es cosa sencilla. En cambio, si Z_1 y Z_2 son complejas, la determinación de α y β resulta en general más difícil que usando la Ec. (6-14). Despues de una considerable manipulación (véase el Apéndice) puede demostrarse que los valores de α y β en términos de la Ec. (6-19) están dados por las ecuaciones

Sea $1 + Z_1/2Z_2 = A + jB$, conociéndose A y B . Entonces

$$\cosh \alpha = \frac{\sqrt{(1+A)^2 + B^2} + \sqrt{(1-A)^2 + B^2}}{2}$$

$$\cos \beta = \frac{\sqrt{(1+A)^2 + B^2} - \sqrt{(1-A)^2 + B^2}}{2} \quad (6-20)$$

¹ Las ecuaciones señaladas con "A" se hallan en el Apéndice.

Dado que los segundos miembros de estas ecuaciones son números reales, los valores de α y β pueden obtenerse de las tablas de funciones hiperbólicas reales y trigonométricas.

Puede obtenerse todavía otra expresión para la constante de propagación compleja de una red en escalera, ésta en función de la tangente hiperbólica más bien que del coseno. De las Ecs. (A-9) y (6-19),

$$\begin{aligned}\operatorname{senh} \gamma &= \sqrt{\cosh^2 \gamma - 1} \\ &= \sqrt{\left(1 + \frac{Z_1}{2Z_2}\right)^2 - 1} = \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2} + \left(\frac{Z_1}{2Z_2}\right)^2} \\ &= \frac{1}{Z_2} \sqrt{Z_1 Z_2 + \frac{Z_1^2}{4}} = \frac{Z_{oT}}{Z_2} \quad (6-21)\end{aligned}$$

Dividiendo la Ec. (6-21) por la (6-19),

$$\operatorname{tgh} \gamma = \frac{\operatorname{senh} \gamma}{\cosh \gamma} = \frac{Z_{oT}}{Z_2 + Z_1/2}$$

Pero, para la sección T, $Z_{oc} = Z_1/2 + Z_2$ y por la Ec. (3-107), $Z_{oT} = \sqrt{Z_{oc} Z_{sc}}$. Por lo tanto,

$$\operatorname{tgh} \gamma = \sqrt{\frac{Z_{sc}}{Z_{oc}}} \quad (6-22)$$

Aunque la Ec. (6-22) tiene una forma fácil de recordar, ofrece el mismo problema que la Ec. (6-19) en cuanto a la determinación de α y β . En general, Z_{oc} y Z_{sc} son impedancias complejas, de modo que $\operatorname{tgh} \gamma$ es compleja e igual, digamos, a $C + jD$. Puede demostrarse (ver Apéndice) que α y β pueden calcularse independientemente mediante las ecuaciones

$$\begin{aligned}\operatorname{tgh} 2\alpha &= \frac{2C}{1 + C^2 + D^2} \\ \operatorname{tg} 2\beta &= \frac{2D}{1 - (C^2 + D^2)} \quad (6-23)\end{aligned}$$

Las Ecs. (6-23) son deseables pero de modo alguno esenciales para el cálculo de α y β a partir de la Ec. (6-22) en un caso numérico. Puede recurrir, en efecto, a la reducción de la tangente hiperbólica a la forma exponencial, según se procede en el ejemplo siguiente:

Hallar α y β para la red simétrica de cuatro terminales cuyas impedancias de circuito abierto y de cortocircuito son

$$Z_{oc} = 552/-59,5^\circ \text{ ohm} \quad Z_{sc} = 501/-14,1^\circ \text{ ohm}$$

Los cálculos deben realizarse con precisión de regla. Por las Ecs. (6-23) y (A-3),

$$\begin{aligned}\operatorname{tgh} \gamma &= \frac{e^\gamma - e^{-\gamma}}{e^\gamma + e^{-\gamma}} = \frac{e^{2\gamma} - 1}{e^{2\gamma} + 1} = \sqrt{\frac{Z_{sc}}{Z_{oc}}} \\ &= \sqrt{\frac{501/-14,1^\circ}{552/-59,5^\circ}} = \sqrt{0,909/45,4^\circ} \\ &= 0,953/22,7^\circ = 0,779 + j0,368 \\ e^{2\gamma} - 1 &= (0,779 + j0,368)(e^{2\gamma} + 1) \\ e^{2\gamma} &= \frac{1,779 + 0,368}{0,221 - j0,368} = \frac{1,814/11,7^\circ}{0,429/-59,0^\circ} = 4,24/70,7^\circ\end{aligned}$$

Luego $\alpha = \frac{1}{2} \ln 4,24 = 1,442/2 = 0,721$ neper/sección y $\beta = 70,7/2 = 35,4^\circ/\text{sección}$.

Estos resultados pueden comprobarse con las Ecs. (6-23):

$$C = 0,779 \quad D = 0,368$$

Sustituyendo

$$\begin{aligned}\operatorname{tgh} 2\alpha &= \frac{2(0,779)}{1 + (0,779)^2 + (0,368)^2} = \frac{1,558}{1 + 0,606 + 0,136} \\ &= \frac{1,558}{1,742} = 0,893 \\ \alpha &= \frac{1,44}{2} = 0,72 \text{ neper/sección}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y \quad \operatorname{tg} 2\beta &= \frac{2(0,368)}{1 - (0,606 + 0,136)} = \frac{0,736}{0,258} = 2,85 \\ \beta &= \frac{70,7}{2} = 35,4^\circ/\text{sección}.\end{aligned}$$

6-5. Diseño de la sección T. A menudo se presenta en la práctica el problema de diseñar una estructura iterativa en escalera con valores determinados de impedancia característica y de constante de propagación compleja. Es conveniente derivar ecuaciones que dan los elementos T directamente en términos de las cantidades especificadas; por otra parte, esa derivación ilustra una aplicación de las formas hiperbólicas de γ .

Se ha visto en el Cap. III que los elementos de una sección T pueden expresarse en términos de las impedancias de cortocircuito y de circuito abierto. Es por lo tanto conveniente expresar γ y Z_o en términos de Z_{oc} y Z_{sc} . De las tres ecuaciones que se han derivado para γ , entonces, la Ec. (6-22) es la más útil para nuestros propósitos inmediatos. Elevando al cuadrado la Ec. (6-22),

$$\frac{Z_{sc}}{Z_{oc}} = \operatorname{tgh}^2 \gamma \quad (6-24)$$

y, por la Ec. (3-107)

$$Z_{sc} Z_{oc} = Z_o^2 \quad (6-25)$$

Multiplicando las Ecs. (6-24) y (6-25) y despejando Z_{sc} ,

$$Z_{sc} = Z_o \operatorname{tgh} \gamma \quad (6-26)$$

Dividiendo la Ec. (6-25) por la (6-24) y despejando Z_{oc} ,

$$Z_{oc} = \frac{Z_o}{\operatorname{tgh} \gamma} \quad (6-27)$$

El diseño de la sección T simétrica puede completarse aplicando las Ecs. (3-108):

$$\begin{aligned} Z_2 &= \sqrt{Z_{oc}(Z_{oc} - Z_{sc})} = \sqrt{Z_o \frac{\cosh \gamma}{\operatorname{senh} \gamma} \left(Z_o \frac{\cosh \gamma}{\operatorname{senh} \gamma} - Z_o \frac{\operatorname{senh} \gamma}{\cosh \gamma} \right)} \\ &= \sqrt{Z_o^2 \frac{\cosh^2 \gamma - \operatorname{senh}^2 \gamma}{\operatorname{senh}^2 \gamma}} \\ Z_2 &= \frac{Z_o}{\operatorname{senh} \gamma} \end{aligned} \quad (6-28)$$

De modo similar,

$$\begin{aligned} \frac{Z_1}{2} &= Z_{oc} - Z_2 = Z_o \frac{\cosh \gamma}{\operatorname{senh} \gamma} - \frac{Z_o}{\operatorname{senh} \gamma} \\ &= \frac{Z_o(\cosh \gamma - 1)}{\operatorname{senh} \gamma} \end{aligned}$$

Esta expresión puede simplificarse con las fórmulas para los ángulos mitad,

$$\cosh \gamma - 1 = 2 \operatorname{senh}^2 \frac{\gamma}{2} \quad (6-29)$$

$$\operatorname{senh} \gamma = 2 \operatorname{senh} \frac{\gamma}{2} \cosh \frac{\gamma}{2} \quad (6-30)$$

Luego, sustituyendo y simplificando,

$$\frac{Z_1}{2} = Z_o \operatorname{tgh} \frac{\gamma}{2} \quad (6-31)$$

Las Ecs. (6-28) y (6-31) permiten diseñar la sección T requerida para satisfacer los valores de Z_o y γ especificados.

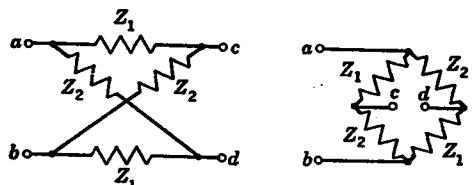


FIG. 6-4. Red en celosía. La forma b simplifica el cálculo de las impedancias de cortocircuito y de circuito abierto.

6-6. La red en celosía. Hasta ahora hemos supuesto en el presente capítulo que la estructura iterativa está compuesta por secciones T o π. Esto no es de modo alguno necesario; por ejemplo, encuéntranse en la práctica estructuras iterativas formadas por secciones en celosía

simétricas. La Fig. 6-4 ilustra una celosía simétrica típica. Dado que esta red es simétrica, sus impedancias iterativa e imagen son idénticas a Z_o y, en virtud de la ecuación (3-107), $Z_o = \sqrt{Z_{oc} Z_{sc}}$. Por la Fig. 6-4.

$$Z_{oc} = \frac{Z_1 + Z_2}{2} \quad (6-32)$$

$$Z_{sc} = 2 \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad (6-33)$$

de donde

$$Z_o^2 = Z_1 Z_2 \quad (6-34)$$

La constante de propagación compleja puede determinarse en términos de Z_1 y Z_2 por la Ec. (6-22):

$$\operatorname{tgh} \gamma = \sqrt{\frac{Z_{sc}}{Z_{oc}}} = \frac{2Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad (6-35)$$

Introduciendo la Ec. (6-34) y la definición de la tangente hiperbólica, Ec. (A-3),

$$\frac{e^{2\gamma} - 1}{e^{2\gamma} + 1} = \frac{2Z_o}{Z_1 + Z_o^2/Z_1} = \frac{2Z_o Z_1}{Z_1^2 + Z_o^2}$$

Despejando $e^{2\gamma}$,

$$e^{2\gamma} = \left(\frac{Z_1 + Z_o}{Z_1 - Z_o} \right)^2$$

$$\text{de donde } e^\gamma = \pm \frac{Z_1 + Z_o}{Z_1 - Z_o} = \frac{1 + Z_1/Z_o}{1 - Z_1/Z_o} \quad (6-36)$$

En el último paso se elige el signo negativo a partir de consideraciones físicas.

Dado que se conocen γ y Z_o para la sección en celosía, la tensión y la corriente a lo largo de la estructura iterativa se calculan mediante la ecuación

$$\frac{E_0}{E_k} = \frac{I_0}{I_k} = e^{k\gamma}$$

siempre que la estructura esté correctamente terminada en Z_o .

6-7. Moción ondulatoria. Si en una cascada de múltiples secciones se aplica un disturbio repentino a la entrada, el efecto de éste no se siente inmediatamente en la salida, sino al cabo de cierto tiempo.

En la literatura técnica, la palabra *onda* tiene una doble acepción. En su sentido más general, la onda es función simultánea del espacio y del tiempo, de modo que un disturbio ocurrido en un punto p en un instante t está relacionado de manera definida con lo que ocurre en puntos distantes en otros instantes. (Una onda no tiene por qué ser necesariamente repetitiva —por ejemplo una onda de marea.) En una onda sin distorsión, el disturbio en el punto distante es una reproducción exacta (excepto por los cambios de magnitud y el retardo temporal) del disturbio en el punto original.

En cierto sentido, la palabra *onda* se utiliza también para expresar un disturbio en función del tiempo en un punto en particular, tal, por

ejemplo, como una *onda de tensión* o una *onda de corriente*. El lector puede por lo general deducir del contexto de qué clase de onda habla el autor.

Este capítulo se ocupará de las ondas que son al mismo tiempo función del tiempo y el espacio. El perro "salchicha" ofrece un ejemplo de este tipo de onda:

There was a dachshund once so long
He hadn't any notion
How long it took to notify
His tail of an emotion.

And so it was that though his eyes
Were filled with woe and sadness
His little tail went wagging on
Because of previous gladness. *

Matemáticamente puede reconocerse una onda por la relación

$$y = f_1(x)f_2(x - vt) \quad (6-37)$$

donde x es una variable espacial cualquiera, no necesariamente una coordenada rectangular. Esta función indica que, salvo un cambio de magnitud con x , independiente del tiempo, lo que ocurre en un punto x_0 en el instante t_0 reproducirse para todos los valores $x_0 + \Delta x$ en el instante $t_0 + \Delta x/v$, cualquiera que sea el valor de Δx , grande o pequeño. La velocidad con que se propaga la perturbación es v . Un ejemplo de tal tipo de onda es

$$y = Ae^{-\alpha x} \cos \omega \left(\frac{x}{v} - t \right) \quad (6-38)$$

Una onda de forma más compleja podría estar representada por la sumatoria

$$y = \sum_{k=1}^n B_k e^{-\alpha_k x} \cos \omega_k \left(\frac{x}{v_k} - t \right) \quad (6-38a)$$

Además, si n se extiende hasta el infinito, y los valores sucesivos de ω_k se toman suficientemente próximos, esta ecuación, según el teorema de Fourier, podría describir una onda de forma cualquiera. Esta onda conservaría su forma si α_k y v_k son las mismas para todos los valores de k .

Dado que las mediciones son más fáciles en el caso de las señales sinusoidales, es útil analizar primero el comportamiento de las redes frente a una frecuencia única y luego como función de la frecuencia.

Puede demostrarse ahora que una señal aplicada a la entrada de una cascada de redes concentrada terminada en Z_o propágase a lo largo

* Había una vez un perro salchicha tan largo / que no tenía noción alguna / de cuanto tardaba en notificar / a su cola de cualquier emoción. / Y así ocurría que aunque sus ojos / estuvieran llenos de pena y tristeza / su colita seguía moviéndose / a causa de una alegría anterior.

de la cascada a modo de onda. Supongamos que la tensión de entrada es $e_0 = \hat{E}_0 \cos \omega t$, la que puede escribirse, naturalmente, del modo $e_0 = \operatorname{Re} \{ \hat{E}_0 e^{j\omega t} \}$. Luego, aplicando los métodos ya descritos en este capítulo, la tensión que aparece en los terminales de salida de la sección de orden x será

$$e_x = \operatorname{Re} \{ \hat{E}_0 e^{j\omega t} e^{-\gamma x} \} = \operatorname{Re} \{ \hat{E}_0 e^{-\alpha x} e^{j(\omega t - \beta x)} \} = \hat{E}_0 e^{-\alpha x} \cos (\omega t - \beta x) \quad (6-39)$$

donde x , siendo el número de secciones, puede tomar sólo los valores enteros 1, 2, 3, ... (En el Cap. VIII se verá que la misma ecuación es aplicable a las líneas de transmisión, en las cuales x puede tener valores fraccionales cualesquiera en unidades de longitud hasta el largo total de la línea.) La Ec. (6-39) puede escribirse también como

$$e_x = \hat{E}_0 e^{-\alpha x} \cos \omega \left(t - \frac{\beta x}{\omega} \right) \quad (6-39a)$$

Dado que esta ecuación tiene exactamente la misma forma que la Ec. (6-38) (recordar que $\cos -\phi = \cos \phi$), queda demostrado que una señal sinusoidal de entrada se propaga a modo de onda en una cascada correctamente terminada.

6-8. Velocidad de fase, retardo de fase. Por comparación de las Ecs. (6-39a) y (6-38) es evidente que la velocidad con que se propaga una señal de frecuencia única por la estructura es

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} \text{ sección/seg} \quad (6-40)$$

Esta es la llamada *velocidad de fase* de la red para la frecuencia particular $\omega/2\pi$.

Dado que para cualquier frecuencia finita es v_p finita para todo valor de β distinto de cero, puede esperarse que la señal, después de recorrer x secciones, está retardada respecto de la entrada cierto intervalo de tiempo, digamos, τ_p . En la Ec. (6-39a) puede advertirse que el término $\beta x/\omega$ tiene las dimensiones del tiempo y representa el *retardo de tiempo* introducido por el hecho de haber recorrido la onda x secciones de la cascada; se lo puede llamar *retardo de fase**, introducido por x secciones. Así,

$$\tau_p = \frac{x}{v_p} = \frac{\beta x}{\omega} \quad (6-40a)$$

y la Ec. (6-39a) puede escribirse en la forma

$$e_x = \hat{E}_0 e^{-\alpha x} \cos \omega (t - \tau_p) \quad (6-40b)$$

* En rigor debería llamarse *retardo de tiempo de fase*. No se lo debe confundir con el *desplazamiento de fase* βx (N. del T.).

6-9. Moción ondulatoria en una cascada de secciones libres de disipación. Como ejemplo, consideremos la red ilustrada en la Fig. 6-5, una sección T de reactancias puras,

$$\begin{aligned} Z_1 &= j\omega L \\ Z_2 &= \frac{1}{j\omega C} \\ Z_o &= \sqrt{\frac{L}{C}} - \frac{\omega^2 L^2}{4} \end{aligned}$$

Si $L/C > \omega^2 L^2/4$, Z_o es una resistencia pura. Cuando la sección T está terminada en esta resistencia, la relación de corrientes es, por la Ec. (6-1),

$$\frac{I_{k-1}}{I_k} = \frac{\sqrt{L/C - \omega^2 L^2/4} + j(\omega L/2 - 1/\omega C)}{1/j\omega C} \quad (6-41)$$

El valor absoluto de $(I_{k-1}/I_k)^2$ se obtiene sumando los cuadrados de las componentes real e imaginaria de la Ec. (6-41),

$$\left| \frac{I_{k-1}}{I_k} \right|^2 = \frac{\frac{L}{C} - \frac{\omega^2 L^2}{4} + \frac{\omega^2 L^2}{4} - \frac{L}{C} + \frac{1}{\omega^2 C^2}}{1/\omega^2 C^2} = 1 \quad (6-42)$$

Se aprecia que la magnitud de la relación de corrientes es la unidad. Esto era de esperar si la impedancia característica es una resistencia pura, puesto que una variación de la magnitud de la corriente significaría una pérdida de potencia y los elementos reactivos no pueden disipar energía.

Hay, no obstante, un desplazamiento de fase, y la corriente y la tensión de salida están atrasadas en un ángulo β respecto de la corriente y la tensión de entrada. Luego, si una estructura iterativa está formada por un gran número de secciones T libres de pérdidas y está terminada en Z_o , el diagrama fasorial para las corrientes adopta la forma ilustrada por la Fig. 6-6. Se observará que el lugar geométrico de los fasores que representan las corrientes es una circunferencia y que el valor de la corriente en un empalme cualquiera k es

$$I_k = I_0 / -k\beta \quad (6-43)$$

donde I_0 es la corriente a la entrada de la estructura iterativa completa. La fase de I_0 se toma arbitrariamente igual a cero.

Con el fin de mostrar gráficamente el carácter de la moción ondulatoria, hay que representar la tensión y/o la corriente en función de x y de t . Es, por supuesto conveniente considerar un gran número de secciones con el objeto de disponer de un número de puntos suficiente a los fines de patentizar claramente la moción ondulatoria. Para

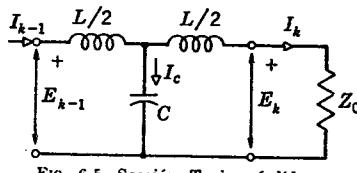


FIG. 6-5. Sección T sin pérdidas.

la Fig. 6-6. Se observará que el lugar geométrico de los fasores que representan las corrientes es una circunferencia y que el valor de la corriente en un empalme cualquiera k es

ilustrar una función simultánea del tiempo y el espacio, conviene hacer una serie de representaciones de $|E|$ en función de x para intervalos uniformes de tiempo. Así se ha hecho en la Fig. 6-7 a intervalos de $1/8$ de período.

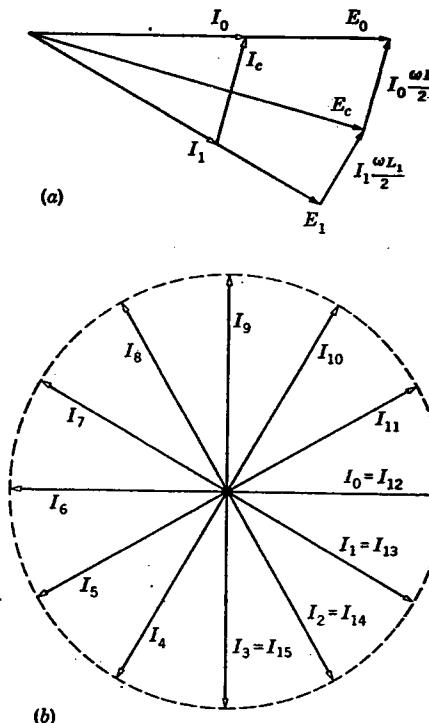


FIG. 6-6. Diagrama fasorial para una cascada de secciones T libres de pérdidas, terminada en Z_o . (a) Una sección. (b) Lugar geométrico del fasor corriente a lo largo de la cascada.

La distancia comprendida entre dos máximos positivos adyacentes se llamaría *longitud de onda* y sería igual al número de secciones que produce un retardo de fase de 2π radián. Si n_λ es el número de secciones correspondiente a una longitud de onda,

$$\begin{aligned} n_\lambda \beta &= 2\pi \\ n_\lambda &= \frac{2\pi}{\beta} \end{aligned} \quad (6-44)$$

La onda avanzaría con una velocidad de fase de 1 longitud de onda por ciclo, y, por lo tanto,

$$v_p = n_\lambda f = \frac{\omega}{\beta}$$

lo que coincide con lo expresado por la Ec. (6-40).

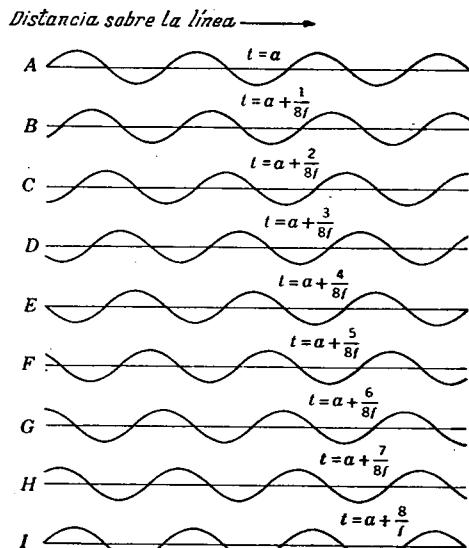


FIG. 6-7. Distribuciones instantáneas de corriente y tensión a lo largo de una cascada libre de resistencias terminada en la impedancia característica.

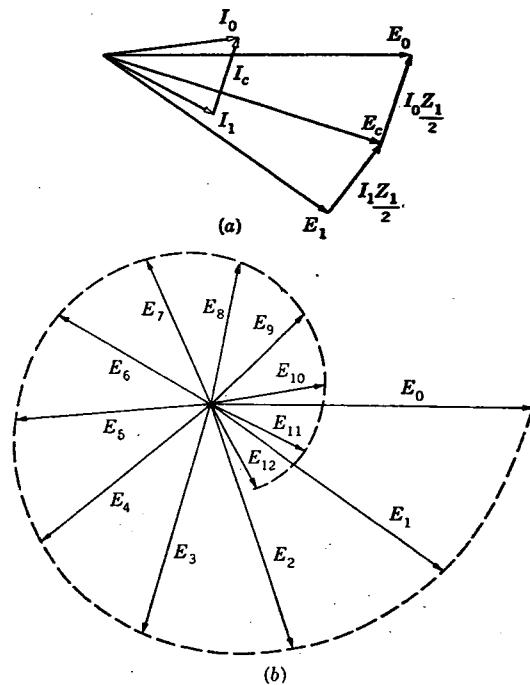


FIG. 6-8. Diagramas fasoriales para una cascada de secciones T con disipación y terminada en Z_0 . (a) Una sección. (b) Lugar geométrico de las tensiones a lo largo de la cascada.

6-10. Moción ondulatoria en una cascada con secciones disipativas. Si las secciones incluyen resistencias en sus ramas, habría una pérdida de potencia y la tensión y la corriente de salida de cada sección tendrán que ser necesariamente menores que las de entrada. Este hecho queda ilustrado por el diagrama fasorial de la Fig. 6-8a. Habrá también una diferencia de fase, de modo que las distribuciones de tensión y corriente para diferentes instantes presentarán el aspecto de las ilustradas en la Fig. 6-9. El diagrama fasorial de las tensiones será similar al de la Fig. 6-8b.

Si se conectan un amperímetro o un voltímetro de valor eficaz en diversos puntos de la línea, se obtendría la misma lectura en todos los puntos de la cascada sin disipación. Habiendo disipación, la indicación de cada amperímetro sería $I_x = I_0 e^{-ax}$. Los dos casos están ilustrados en la Fig. 6-10.

6-11. Moción ondulatoria con señal de más de una frecuencia; distorsión. Los resultados obtenidos hasta ahora se refieren al caso de las señales de una sola frecuencia. Consideremos lo que ocurre cuando la onda de señal es más complicada, es decir, una señal que contiene varias frecuencias componentes, la que según se ha dicho, puede expresarse en la forma

$$e_x = \sum_{k=1}^n (\hat{E}_k)_k e^{-akx} \cos \omega_k(t - \tau_{pk}) \quad (6-45)$$

Si esta señal ha de propagarse sin distorsión, su forma debe permanecer inalterada conforme la onda avanza; esto significa que deben conser-

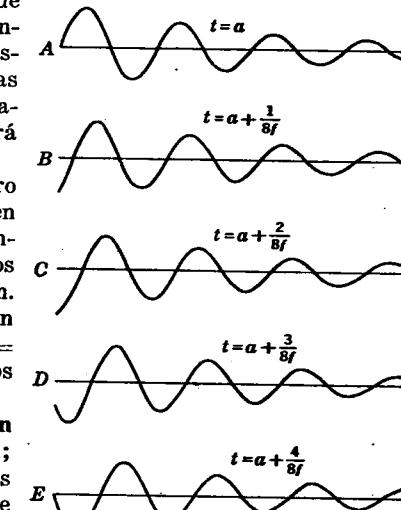


FIG. 6-9. Distribuciones instantáneas de tensión y corriente a lo largo de una cascada de secciones con disipación, terminada en su impedancia característica.

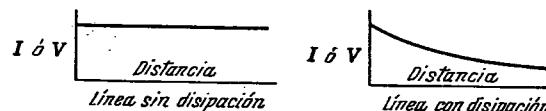


FIG. 6-10. Envuelta de las lecturas obtenidas con un amperímetro o un voltímetro a lo largo de una cascada para los casos ilustrados en las Figs. 6-7 y 6-9.

varse las amplitudes *relativas* de todas las componentes y que éstas deben experimentar el mismo retardo de tiempo. Se deduce, por lo tanto, que esta complicada señal sólo se propagará sin distorsión si la cascada es tal que a_k y τ_{pk} tienen los mismos valores para todas las frecuencias componentes.

Si α_k no es constante dentro de esta banda de frecuencias, dícese que la cascada introduce *distorsión de frecuencia*, lo que significa que las distintas componentes de la señal experimentan diferentes atenuaciones.

Si τ_{pk} no es constante dentro de esta banda de frecuencias, dícese que la cascada introduce *distorsión de retardo*, lo que significa que las distintas componentes de frecuencia experimentan diferentes retardos al recorrer la cascada.

Por definición de τ_p , Ec. (6-40), $\tau_p = \beta x / \omega$. Luego, si β es directamente proporcional a la frecuencia dentro de la banda de frecuencias abarcada por la señal, τ_p resultará constante y no hay distorsión de retardo. Por la misma razón, $v_p = \omega / \beta$ es también constante en la banda de frecuencias considerada.

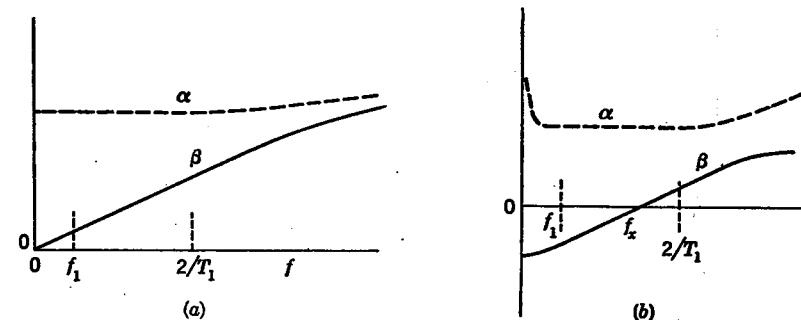


FIG. 6-11. Trasmisión de un pulso repetitivo a lo largo de una red. (a) Características de trasmisión de una estructura pasabajos disipativa típica. (b) Características de trasmisión de una estructura cuasi-pasabajos. Nota: Las características se representan referidas a una escala lineal de frecuencias.

Para ilustrar estas ideas, supongamos que un pulso repetitivo de duración T_1 y frecuencia fundamental de repetición $f_1 = 1/T_1$, tal como el de la Fig. 2-6, es aplicado a una estructura en cascada. El espectro de frecuencias de esta onda fue calculado en el Ap. 2-8 y representado en la Fig. 2-6.

De esta representación se deduciría que α y τ_p tendrían que ser constantes dentro de una banda infinita de frecuencias para que los pulsos pudieran transmitirse libres de toda distorsión. No obstante, desde el punto de vista práctico, el espectro de la Fig. 2-6 indica que las componentes de frecuencia superior a $2/T_1$ tienen amplitudes relativamente muy pequeñas. Luego, si α es independiente de la frecuencia y β directamente proporcional a la frecuencia desde la frecuencia cero hasta la frecuencia $2/T_1$, como en la Fig. 6-11a, la onda se transmitiría con distorsión de frecuencia y distorsión de retardo despreciables, puesto que entonces α , τ_p , y v_p serían constantes dentro de la banda de frecuencias de interés. Las curvas de respuesta ilustradas en la Fig. 6-11a son típicas de las llamadas "estructuras pasabajos (PB) disipativas".

6-12. Velocidad y retardo de grupo. Otro tipo básico de estructura, la "cuasi-PB" tiene características de α y β similares a las indi-

cadas en la Fig. 6-11b. (El estudiante debe comparar estas curvas con las del amplificador RC , Fig. 2-17.) Si se aplica el pulso repetitivo de la Fig. 2-6 a esta estructura cuasi-PB (única o en cascada), ¿se mantendrá la forma de onda en la salida? Consideremos, primero, la distorsión de frecuencia. Se observará en la Fig. 6-11b que α es constante para todas las componentes alternas importantes de la señal. La componente continua no será dejada pasar por la red, pero puede ser restaurada posteriormente por un proceso llamado de "enclavamiento"; luego, no hay distorsión de frecuencia.

En cuanto a la distorsión de retardo, en cambio, observarás que, aunque β varía linealmente con la frecuencia f , *ella no es directamente proporcional a la frecuencia*; por lo tanto, τ_p y v_p no son constantes dentro de la banda requerida. En efecto, las características representadas en la Fig. 6-11b indican que las frecuencias comprendidas entre f_1 y f_x tienen velocidades de fase negativas, que las comprendidas entre f_x y $2/T_1$ tienen velocidades de fase positivas, y que la frecuencia f_x posee una velocidad de fase infinita.

No obstante estos hechos, puede demostrarse que las características de la Fig. 6-11b permite la transmisión sin distorsión del pulso repetitivo. Para ello es necesario introducir los conceptos de *velocidad de grupo* y de *retardo de grupo*. Estos conceptos se aprehenden mejor considerando un caso sencillo, el de la propagación de dos frecuencias en una cascada de secciones en el que la velocidad de fase varía con la frecuencia.

Si se representa para un instante dado la suma de dos ondas de frecuencias ligeramente diferentes como función del espacio, la envuelta de la suma exhibirá un efecto de batimiento, como lo ilustra la Fig. 6-12. El máximo de la envuelta ocurre en las posiciones en que las dos ondas están en fase. Ahora, si a medida que transcurre el tiempo las dos ondas avanzan con la misma velocidad de fase, la envuelta de la suma se moverá en el espacio con exactamente la misma velocidad. Por el contrario, si las dos ondas se mueven con diferentes velocidades de fase, se hallará que la envuelta progresará en el espacio con una velocidad que es en general diferente de la velocidad de fase de cualquiera de las dos ondas componentes. En la Fig. 6-12 se han representado las envueltas correspondientes a dos instantes de la suma de dos ondas de diferentes velocidades de fase y diferentes frecuencias (sin atenuación).

Consideremos el caso de ondas cuyas frecuencias son $\omega/2\pi$ y $(\omega + \Delta\omega)/2\pi$ y que los correspondientes desplazamientos de fase por sección son β y $\beta + \Delta\beta$. Las dos ondas quedan representadas por las ecuaciones

$$y_1 = A_1 f_1(x) \cos(\omega t - \beta x) \quad (6-46a)$$

$$y_2 = A_2 f_2(x) \cos[(\omega + \Delta\omega)t - (\beta + \Delta\beta)x] \quad (6-46b)$$

Las dos ondas están en fase para la combinación de t_1 y x_1 definida por la relación

$$\begin{aligned} \omega t_1 - \beta x_1 &= (\omega + \Delta\omega)t_1 - (\beta + \Delta\beta)x_1 \\ \Delta\omega t_1 &= \Delta\beta x_1 \end{aligned} \quad (6-47a)$$

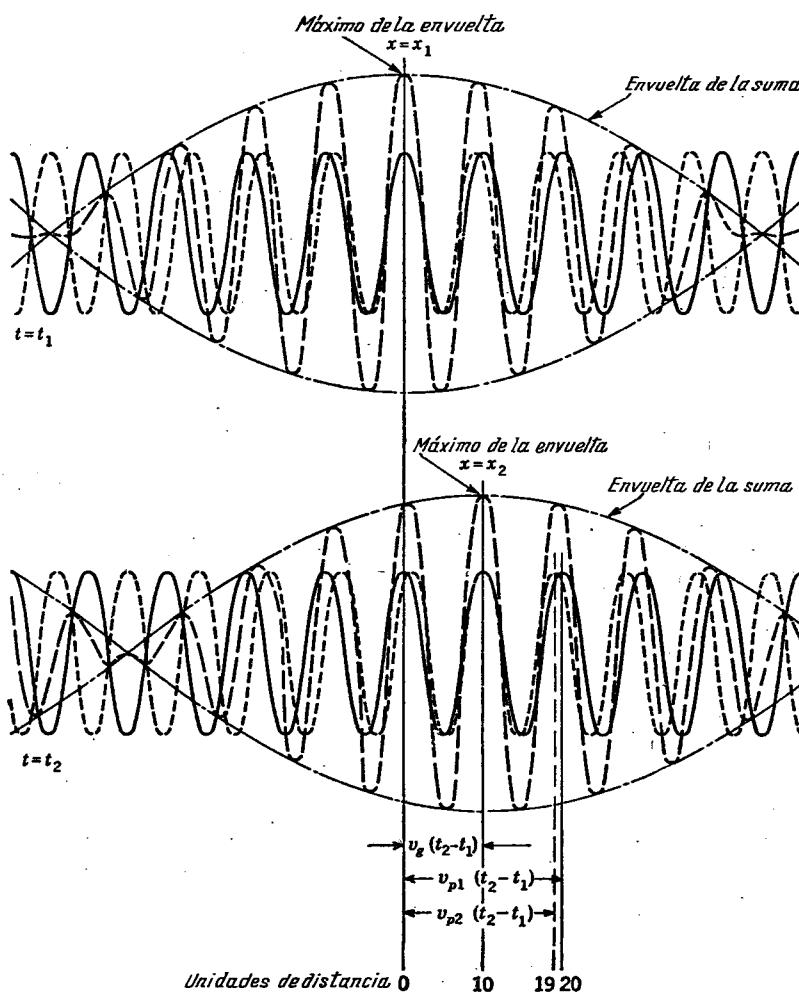


FIG. 6-12. Dos ondas de diferentes frecuencias y velocidades de fase y su suma como función del espacio en dos instantes, t_1 y t_2 . La línea de trazo continuo representa la onda 1, la de trazo cortado la onda 2, y la de guiones, la suma de ambas.

Un instante después, t_2 , la posición de coincidencia de fase se habrá desplazado a una posición x_2 correspondiente a la relación

$$\omega t_2 - \beta x_2 = (\omega + \Delta\omega)t_2 - (\beta + \Delta\beta)x_2$$

$$\Delta\omega t_2 = \Delta\beta x_2 \quad (6-47b)$$

Dado que el máximo de la envuelta está determinado por la posición en que las dos ondas están en fase, la envuelta recorre la distancia

$x_2 - x_1$ en el tiempo $t_2 - t_1$. Por lo tanto, la velocidad de la envuelta, llamada velocidad de grupo y designada con v_g , es

$$v_g = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \quad (6-47c)$$

De las Ecs. (6-47a) y (6-47b),

$$\Delta\omega(t_2 - t_1) = \Delta\beta(x_2 - x_1)$$

$$v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta\beta} \quad (6-48)$$

La Fig. 6-12 ha sido dibujada para el caso en que la relación de las dos frecuencias es $f_2/f_1 = 19/18$ y la relación de las dos velocidades de fase, $v_{p1}/v_{p2} = 19/20$.

Por lo tanto, dado que $v_p = \omega/\beta$, $\omega_2\beta_1/\omega_1\beta_2 = 19/20$. Además

$$\frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_1} = \frac{19 - 18}{18} = \frac{1}{18}$$

$$\text{y} \quad \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{\omega_1 v_{p2}}{\omega_2 v_{p1}} = \frac{18 \cdot 19}{19 \cdot 20} = \frac{9}{10}$$

$$\frac{\beta_2 - \beta_1}{\beta_1} = \frac{10 - 9}{9} = \frac{1}{9}$$

$$\text{Luego} \quad \frac{v_g}{v_{p1}} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\beta_2 - \beta_1} \frac{\beta_1}{\omega_1} = \frac{1}{18} \times 9 = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto, la velocidad de grupo es, en este caso, la mitad de la velocidad de onda de la frecuencia más baja. El diagrama muestra que, mientras que la frecuencia más baja ha avanzado dos longitudes de onda, la envuelta sólo ha recorrido la mitad de esta distancia.

Más específicamente, la velocidad de grupo se define por lo común como el límite de la Ec. (6-48) cuando $\Delta\omega$ tiende a cero, con lo que adquiere significación para una frecuencia dada en particular, digamos, ω_1 . Para este caso

$$v_g = \left(\frac{d\omega}{d\beta} \right)_{\omega_1} \quad (6-48a)$$

mientras que el retardo de grupo, o de envuelta, τ_g , queda definido por

$$\tau_g = \frac{x}{v_g} = \frac{d\beta}{d\omega} x \quad (6-49)$$

La velocidad de grupo y el retardo de grupo, como también así la velocidad de fase y el retardo de fase, son funciones de la frecuencia, y estas funciones son en general diferentes, excepto para el caso particular en que v_g es independiente de la frecuencia, y así $v_g = v_p$ y $\tau_g = \tau_p$.

Estos resultados pueden ahora aplicarse al ejemplo de la Fig. 6-11b. Puesto que, como lo muestra la característica de β , es $d\beta/d\omega$ constante dentro de la banda de las frecuencias importantes, abarcada por el pulso repetitivo (siendo el pulso la envuelta de todas las componentes), el

tren de pulsos será trasmítido a lo largo de la cascada sin alteración de la forma de onda aun cuando τ_p y v_g no sean constantes.

Esta aparente discrepancia con el criterio de ausencia de distorsión de retardo antes expuesto, puede resolverse muy fácilmente. Si τ_g es constante en la banda de frecuencias de interés, βx , por integración de la Ec. (6-49), es

$$\beta x = \tau_g \omega + \beta_0$$

donde β_0 es una constante de integración. Hay una infinidad de curvas

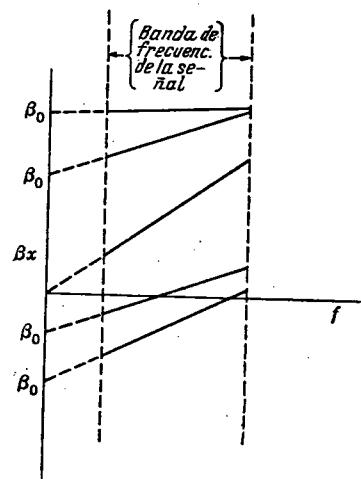


FIG. 6-13. Curvas de βx en función de f para retardo de grupo constante.

βx posibles que satisfacen esta relación, algunas de las cuales se muestran en la Fig. 6-13. Para cualquiera de estas curvas, la Ec. (6-45) redúcese a

$$\begin{aligned} e_x &= \sum_{k=1}^n (\hat{E}_0)_k e^{-\alpha_k x} \cos(\omega t - \beta x) \\ &= \sum_{k=1}^n (\hat{E}_0)_k e^{-\alpha_k x} \cos[\omega(t - \tau_g) + \beta_0] \end{aligned}$$

y la señal será trasmitida sin alteración de la forma de onda (siempre que α sea constante), aunque no sean constantes τ_p y v_g . Puede concluirse entonces que en lo que respecta a la ausencia de la distorsión de retardo, tiene que ser constante $d\beta/d\omega$ más bien que β/ω . Para las estructuras PB verdaderas, $\beta_0 = 0$ y la condición

$d\beta/d\omega = \text{constante}$ corresponde a β proporcional a ω .

Análisis similares son aplicables a las estructuras pasabandas (BP) y pasaaltos (PA); en realidad, las estructuras quasi-PB son redes pasabandas.

Puede demostrarse que la velocidad de grupo y el retardo de grupo de toda red física son siempre positivos y finitos. Esto está de acuerdo con la idea intuitiva de que toda respuesta en la salida de una red física tiene que producirse después de aplicada la fuerza impulsora. Si en una red se hace una hipótesis cualquiera que viole esta regla, como se ha hecho en el Cap. II con respecto a los llamados filtros ideales, es evidente que la red no podrá realizarse físicamente.

Afirmase a menudo, por consecuencias, que la energía propágase por las redes con la velocidad de grupo, aunque esto es sólo aproximadamente cierto cuando las componentes importantes que contribuyen a la energía se encuentran en el rango de frecuencias en que la velocidad de grupo es sustancialmente independiente de la frecuencia y se les puede atribuir, por lo tanto, un valor definido de energía del pulso.

6-13. Unidades de trasmisión. Hasta ahora, en el presente capítulo, la unidad utilizada para la constante de atenuación, la que es una medida de la variación de amplitud de la corriente y la tensión en una estructura iterativa terminada en su impedancia característica, ha sido el neper. Se ha dicho también que hay una unidad de alternativa, asimismo adimensional: el decibel. Explicaremos el origen y las interrelaciones de estas dos unidades.

La atenuación de una red cualquiera podría expresarse en términos del número de secciones T patrones de características elegidas arbitrariamente que provee la misma atenuación total. Puede ser conveniente al especificar la sección patrón dar configuraciones físicas definidas de Z_1 y Z_2 o especificar la base y el exponente que expresan la relación $|I_{k-1}/I_k|$. Se han usado ambos métodos.

El primer patrón de atenuación utilizado en telefonía fue la "milla de cable normal". Físicamente, la sección correspondiente estaba representada por una resistencia de 88 ohm como Z_1 y una capacitancia de 0,054 μF como Z_2 . Correspondía originalmente a una milla del cable de uso común con alambre de calibre 19, pero el cable moderno de este calibre tiene un diferente valor de capacitancia.

La atenuación del cable patrón varía, naturalmente, con la frecuencia. El cable patrón servía a sus propósitos cuando se usaban ensayos de trasmisión de la palabra para las mediciones y la mayoría de los circuitos producían atenuaciones similares a la del patrón, pero en la actualidad se lo ha descartado a favor de unidades que representan la misma atenuación para todas las frecuencias.

Durante los años en que el cable patrón era la unidad de transmisión, expresábese la atenuación de una combinación de equipos y redes en esta unidad. Al buscarse una nueva unidad, se estimó conveniente que tuviera aproximadamente el mismo valor que la vieja. De tener que usarse un patrón de frecuencia única, la atenuación en la transmisión de la voz está prácticamente representada por la atenuación que sufre una frecuencia comprendida entre 800 y 1.000 c/s. Se usó así mucho la unidad llamada "800 ciclos-milla", esto es, las relaciones de corriente o tensión se expresaban en términos de la cantidad de millas de cable patrón que producía la misma atenuación a 800 c/s. La atenuación de una milla de cable patrón a 886 c/s es tal que

$$\frac{P_1}{P_2} = \left| \frac{E_1 I_1}{E_2 I_2} \right| = 10^{0,1} \quad (6-50)$$

Esta relación da un valor que puede ser expresado convenientemente en términos de los logaritmos vulgares y se adoptó como patrón para todas las frecuencias. Se la llamó primeramente "unidad de transmisión". Más tarde, se le cambió el nombre por el de "decibel", que se abrevia dB o db. El número de estas unidades de atenuación producidas por una red cualquiera queda expresado por la relación

$$\frac{P_1}{P_2} = 10^{0,1N} \quad (6-51)$$

$$N_{db} = 10 \log \frac{P_1}{P_2} \quad (6-52)$$

Esta unidad coincide aproximadamente con la de "800 ciclos-milla", siendo esta última cerca del 5 por ciento mayor.

La unidad "bel" se utiliza muy raramente, pero equivale a 10 dB y el número de "bel" es el logaritmo vulgar de la relación de potencias. El nombre se eligió en homenaje al inventor del teléfono, Alejandro Graham Bell.

El uso más común del decibel como unidad se halla en la expresión del aumento o la disminución de la potencia que resulta de la inserción de un nuevo elemento en un circuito. Supongamos por ejemplo que la corriente que se tiene en la impedancia terminal de una línea es inicialmente de 1 mA. Supongamos que en algún lugar de la línea se inserta un aparato tal que la corriente terminal se reduce a 0,3 mA. Dado que la impedancia terminal no ha variado

$$\frac{P_1}{P_2} = \left(\left| \frac{I_1}{I_2} \right| \right)^2 = \left(\frac{1,0}{0,3} \right)^2 = 11,11$$

La pérdida en decibel causada por la introducción de la nueva unidad será

$$\begin{aligned} N_{db} &= 10 \log 11,11 \\ &= 10 \times 1,046 \\ &= 10,46 \text{ loss} \end{aligned}$$

Por otra parte, supongamos que se ha insertado un amplificador que hace que la corriente en la carga terminal aumente de 1 a 5 mA. En tal caso, la llamada "pérdida" podría computarse como en el caso anterior, con la Ec. (6-52),

$$\begin{aligned} N_{db} &= 10 \log \frac{P_1}{P_2} = 10 \log \left(\frac{1}{5} \right)^2 \\ &= 10(-1,400) \\ &= -14,00 \end{aligned}$$

Una "pérdida" de -14 dB representa un aumento de la potencia, por cuanto el resultado es negativo y se la interpreta, entonces, como una "ganancia".

Dado que el logaritmo de un número cualquiera es igual al logaritmo de su recíproca cambiado de signo, al usar la Ec. (6-52) es posible usar la potencia mayor siempre en el numerador, como P_1 , interpretando el resultado como una ganancia si esta mayor potencia ocurre después del cambio. En el ejemplo que se acaba de dar

$$\log \frac{1}{25} = -\log_{10} 25 = -1,400$$

Es también sencillo hallar la relación de potencias cuando se da el valor en decibel. Por ejemplo, si la pérdida debida a un cambio cual-

quiero es de 18,06 dB, se tiene

$$\log_{10} \frac{P_1}{P_2} = 1,806$$

$$\frac{P_1}{P_2} = \text{antilog } 1,806 = 64$$

$$\frac{I_1}{I_2} = \sqrt{64} = 8$$

Si bien el decibel es esencialmente una unidad de relación de potencias, es evidente que si se mantiene constante la *impedancia del extremo receptor* mientras ocurre la variación de potencia, la Ec. (6-52) puede escribirse en la forma

$$N_{db} = 10 \log \left(\left| \frac{I_1}{I_2} \right| \right)^2 = 20 \log \left| \frac{I_1}{I_2} \right| = 20 \log \left| \frac{E_1}{E_2} \right| \quad (6-53a)$$

En cambio, si la variación de potencia se debe en todo o en parte a una variación de la impedancia receptora, no puede utilizarse la Ec. (6-53a).

Es evidente que hay una relación directa entre una pérdida expresada en decibel y la misma pérdida expresada en neper. Dado que $\ln x = 2,30 \log x$,

$$\begin{aligned} \text{neper} &= 2,30 \log \left| \frac{I_1}{I_2} \right| \\ &= \frac{2,3}{20} N_{db} = 0,115 N_{db} \end{aligned}$$

Por lo tanto, 1 dB equivale a 0,115 neper, o un neper representa 8,686 dB.

La Ec. (6-52) puede usarse, independiente de su origen, para expresar la relación que existe entre dos potencias cualesquieras, pertenezcan o no al mismo sistema. Debe observarse que el decibel es primariamente una unidad de *relación de potencias*, no de potencia. No obstante, el decibel puede usarse como unidad de potencia absoluta cuando se lo refiere a un nivel de potencia arbitrario; por ejemplo, en telefonía se elige como nivel de referencia (0 dB) la potencia de 1 mW y con respecto a este nivel se expresan todas las potencias. Así, por ejemplo, una potencia de + 30 dB es mil veces mayor que la de referencia, es decir, es una potencia de 1 W, mientras que -30 dB es una potencia 1.000 veces menor que la de referencia, esto es, 1 microwatt.

En radio, en cambio, se ha adoptado como nivel cero el de 6 mW.* En las mediciones acústicas el nivel cero se hace coincidir con la potencia acústica de 10^{-16}W/cm^2 , la que corresponde aproximadamente al nivel de audibilidad a 1.000 c/s.

* Para evitar confusiones, las potencias expresadas en dB con referencia a 1 mW suelen indicarse dBm. (N. del T.)

6-14. Ley de Weber-Fechner. Otra razón para el uso de unidades de transmisión logarítmicas es que los sentidos humanos perciben estas unidades aproximadamente como intervalos iguales. Una importante ley de psicología es la ley de Weber-Fechner, la que establece que "la variación mínima del estímulo necesaria para producir una variación perceptible en la respuesta es proporcional al estímulo ya existente". Esto significa que los sentidos perciben las variaciones proporcionales más bien que las absolutas en la intensidad o el carácter del estímulo. Según se ha dicho en el Cap. II, uno de los intervalos más fácilmente reconocibles en la música es la octava. Cada octava de la escala musical corresponde a una relación de frecuencias de 1:2; es decir, este intervalo representa una variación proporcional más bien que absoluta. De modo similar, las variaciones de sonoridad se interpretan en términos del nivel ya existente. Un grillo en el campo puede representar un aumento de muchas veces del ruido ya existente y, por lo tanto una variación grande expresada en decibel, mientras que en una calle urbana resultaría inaudible y representaría sólo un aumento despreciable de la potencia acústica total. La diferencia absoluta entre el brillo de las partes claras y el de las partes oscuras de las imágenes proyectadas sobre la pantalla de un cinematógrafo es la misma sea que la sala esté iluminada o a oscuras, pero el ojo, sensible a las intensidades relativas, percibe mucho mejor el contraste en la penumbra que a la luz del día. Por razones similares, el tiempo pasa más rápidamente para los adultos que para los niños: Un año, para un chico de diez es una décima parte de toda su vida y de cumpleaños en cumpleaños el intervalo parece muy grande; en cambio, para un hombre de cuarenta, un año más no representa gran cosa.

Una variación de potencia acústica de 1 dB es aproximadamente el mínimo reconocible para el oído humano y el decibel constituye por lo tanto una unidad muy útil en la acústica, y, por ende, como unidad de relación de potencia en telefonía o radio. Las potencias acústicas absolutas se expresan a menudo en decibel, usando a veces como nivel de referencia el umbral de audibilidad, es decir, el de un sonido que apenas alcanza a oírse en ausencia de todo otro sonido o ruido. Este nivel de referencia no es independiente de la frecuencia (ver Fig. 1-13). Un nivel acústico de 20 dB corresponde a una presión 10 veces mayor que la del umbral de audibilidad. Este nivel representa una potencia mucho mayor a 200 c/s que a 1.000 c/s, a causa de que el umbral es más elevado en el primer caso. En la actualidad se prefiere adoptar el nivel cero de 10^{-16}W/cm^2 para todas las frecuencias.

6-15. Pérdidas en una red de transmisión. En los apartados anteriores hemos visto que si una estructura iterativa está terminada en su impedancia iterativa o característica, la pérdida por *atenuación* producida por las primeras k secciones es

$$\begin{aligned} \text{Pérdida por atenuación} &= 20 \log \left| \frac{I_0}{I_k} \right| = 20 \log \left| \frac{E_0}{E_k} \right| \\ &= 8,686 k \alpha \quad \text{db} \end{aligned} \quad (6-54)$$

donde α está todavía en neper por sección. Es de interés observar que esta pérdida puede también expresarse en términos de la potencia de entrada a la primera sección y la potencia de salida de la sección de orden k . Por la Ec. (6-4),

$$\begin{aligned} \frac{E_0}{E_k} &= \frac{I_0}{I_k} \\ \left| \frac{I_0}{I_k} \right| &= \left| \frac{E_0 I_0}{E_k I_k} \right|^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (6-55)$$

Por la definición de potencia

$$\begin{aligned} P_0 &= |E_0 I_0| \cos \theta_0 \\ P_k &= |E_k I_k| \cos \theta_k \end{aligned} \quad (6-56)$$

Ahora, dado que la terminación $Z_R = Z_o$ hace que la impedancia de entrada de cada sección sea Z_o , resulta $\theta_0 = \theta_k$, y entonces

$$\frac{P_0}{P_k} = \left| \frac{E_0 I_0}{E_k I_k} \right| = \left| \frac{I_0}{I_k} \right|^2 \quad (6-57)$$

Combinando las Ecs. (6-54) y (6-57), obtiénes como otra expresión de la pérdida de atenuación

$$Z_R = Z_o, \text{pérdida de atenuación} = 10 \log \frac{P_0}{P_k} \quad \text{dB} \quad (6-58)$$

Las ecuaciones anteriores presuponen una situación ideal, esto es, que la estructura iterativa está adecuadamente terminada. Esta situación ideal es una excepción más bien que una regla; en el caso general en que $Z_R \neq Z_o$, no pueden ya determinarse la corriente y la tensión en la sección de orden k con la Ec. (6-6) porque hay reflexiones, según se verá en el Cap. IX. Cuando existen reflexiones, $10 \log (P_0/P_R)$ no da la "pérdida de atenuación", por lo que ha sido necesario definir otras dos clases de pérdida para expresar el comportamiento del sistema: la *pérdida de transmisión* y la *pérdida de inserción*.

La pérdida de transmisión definise del siguiente modo: "En comunicación, la pérdida de transmisión (abreviadamente, «pérdida») es un término general utilizado para denotar la disminución de la potencia en transmisión de un punto a otro. La pérdida de transmisión exprésase de ordinario en decibel" (ASA C42 65.08.060).

Entonces, aplicando esta definición a la estructura iterativa no terminada en Z_o ,

$$\text{Si } Z_R \neq Z_o, \text{pérdida de transmisión} = 10 \log \frac{P_1}{P_2} \quad \text{dB} \quad (6-59)$$

El estudiante objetará probablemente que las Ecs. (6-58) y (6-59) son idénticas. Esto es cierto, pero debe observarse que, con una terminación inadecuada, Z_o no es ya la impedancia de entrada de cada sección de la cascada; así

si

$$Z_R \neq Z_{ik}, \frac{E_0}{E_k} \neq \frac{I_0}{I_k}$$

y Pérdida de trasmisión $\neq 20 \log \left| \frac{I_0}{I_k} \right| \neq 20 \log \left| \frac{E_0}{E_k} \right|$
 $\neq 8,686 k \alpha \text{ dB}$

Frecuentemente es necesario determinar cómo varía la potencia entregada a una carga fija cuando se inserta una red dada en una cascada que conecta un generador a la carga considerada. La correspondiente pérdida de potencia se llama "pérdida de inserción" de la red, y se la define del modo siguiente: "La pérdida de inserción que resulta como consecuencia de la inserción de un trasductor en un sistema de trasmisión es la relación que existe entre la potencia entregada antes de la inserción a la parte del sistema que sigue al trasductor insertado y la potencia entregada a esa misma parte después de la inserción" (ASA C42 65.08.087).

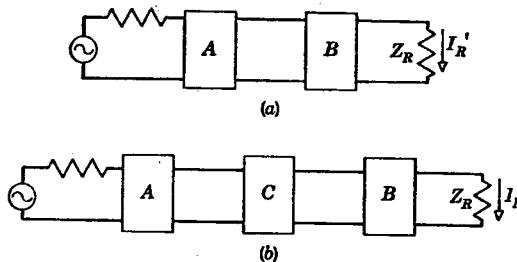


FIG. 6-14. Circuitos para calcular la pérdida de inserción de la red C.

Por ejemplo, en la Fig. 6-14a, sea I'_R la corriente de carga cuando la carga está alimentada a través de la cascada AB. La potencia entonces entregada a la carga es

$$P'_R = |I'_R|^2 R_R \quad (6-60)$$

Después de la inserción de la red C entre las redes A y B, como en la Fig. 6-14b, obtiénes un nuevo valor I_R de la corriente de carga, la que produce una potencia

$$P_R = |I_R|^2 R_R \quad (6-61)$$

Luego, por definición

$$\begin{aligned} \text{Pérdida de inserción} &= 10 \log \frac{P'_R}{P_R} \\ &= 20 \log \left| \frac{I'_R}{I_R} \right| \text{ dB} \quad (6-62) \\ &= \ln \left| \frac{I'_R}{I_R} \right| \text{ neper} \quad (6-62a) \end{aligned}$$

El estudiante debe observar cuidadosamente la diferencia entre las Ecs. (6-59) y (6-62) a pesar de la similitud formal. Comprobará también,

como ejercicio, que en una red dada en que $Z_R = Z_o$, las tres pérdidas —de atenuación, trasmisión e inserción— resultan ser la misma.

Debe observarse asimismo que la pérdida de inserción de una red de dos pares de terminales depende del lugar de inserción, de modo que no es un valor característico de la red. La pérdida de trasmisión depende asimismo de la terminación. La pérdida de atenuación, en cambio, es un valor específico para toda red específica de dos pares de terminales o grupo de redes idénticas en cascada. En el Cap. IX se pondrán en evidencia otras relaciones entre las pérdidas de inserción y de atenuación.

6-16. Cascada de secciones disímiles con impedancias características idénticas. Hasta ahora, en el presente capítulo, las ecuaciones tales como la (6-54) para la pérdida total de k secciones en una estructura en cascada presumen que todas las secciones son idénticas. No obstante, preséntase a menudo el caso, particularmente en los filtros de onda, en que varias secciones en cascada tienen el mismo valor de Z_o , pero distintos valores de la constante de propagación compleja γ , digamos, $\gamma_1, \gamma_2, \dots$. El estudiante puede demostrar fácilmente que cuando un sistema semejante de secciones disímiles está terminado en Z_o ,

$$\begin{aligned} \frac{I_0}{I_n} &= \frac{I_0}{I_1} \frac{I_1}{I_2} \cdots \frac{I_{n-1}}{I_n} \\ &= e^{\gamma_1} e^{\gamma_2} \cdots e^{\gamma_n} \end{aligned} \quad (6-63)$$

y Pérdida de atenuación $= \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n \quad (6-64)$

Desplazamiento total de fase $= \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n \quad (6-65)$

PROBLEMAS

6-1. Una línea está compuesta de secciones T de resistencia pura. Las resistencias en serie de las secciones T son de 50 ohm cada una, mientras que las resistencias en paralelo son de 5.000 ohm cada una. Computar la impedancia característica y la constante de atenuación.

6-2. Una línea compuesta de 100 secciones similares a la del Prob. 6-1 está terminada en su resistencia característica. Un generador cuya f.e.m. es de 1 volt y cuya resistencia interna es de 200 ohm, está conectado al extremo trasmisor. ¿Cuáles serán las corrientes en los extremos trasmisor y receptor de la línea?

6-3. Trazar una curva de corriente en función de la distancia a lo largo del Prob. 6-2, tomando puntos a intervalos de 20 secciones. Trazar también la curva del logaritmo de la corriente en función de la distancia. Computar y representar curvas similares también para la tensión.

6-4. Una sección T simétrica está formada por los siguientes componentes: $R_1 = 20$ ohm, $L_1 = 3$ mH, $C_1 = 0,1 \mu\text{F}$. Evaluar α , β , y Z_o para $\omega = 5.000$ radián/seg.

6-5. Repetir el Prob. 6-4, pero evaluando Z_o a partir de Z_{sc} y Z_{oc} y γ por medio de la Ec. (6-22).

6-6. Una cascada de seis secciones π idénticas está terminada en su impedancia característica, $\gamma = 0,1 + j\pi/6$. $E_o = 5$ volt. Trazar el diagrama polar de las tensiones a lo largo de la cascada.

6-7. Diseñar una sección T simétrica que tenga $Z_o = 600 \text{ ohm}$ y $\gamma = 0 + j\pi/4$.

6-8. Repetir el Prob. 6-7 para una sección π simétrica.

6-9. Una sección T tiene una resistencia total en serie de 200 ohm y una rama en paralelo formada por un capacitor de $0,1 \mu\text{F}$. Está terminada en su impedancia característica.

a. Representar gráficamente α , v_p y v_g a intervalos de una octava desde 200 a 3.200 c/s.

b. Asentar sus conclusiones en cuanto a la distorsión introducida por esta red.

6-10. ¿Cuál sería la corriente en la carga si el generador y la carga del Prob. 6-2 se conectan directamente? ¿Cuál es la pérdida en decibel introducida por la línea del Prob. 6-2 cuando se la conecta entre la carga y el generador?

6-11. Una sección T tiene una resistencia en serie total de 200 ohm y una rama en paralelo de 100 ohm. Calcular las pérdidas de atenuación, trasmisión e inserción para las siguientes condiciones:

a. $E_g = 10 \text{ volt}$, $R_g = R_R = 173,2 \text{ ohm}$

b. $E_g = 10 \text{ volt}$, $R_g = 500 \text{ ohm}$, $R_R = 173,2 \text{ ohm}$

c. $E_g = 10 \text{ volt}$, $R_g = R_R = 500 \text{ ohm}$.

Comparar las pérdidas en los tres casos.

CAPÍTULO VII

FILTROS DE ONDA

En los sistemas de comunicación resulta a menudo conveniente discriminar entre distintas bandas de frecuencia, aceptando unos grupos y rechazando otros. Las combinaciones que satisfacen este propósito se denominan en general "filtros de onda". Estas combinaciones difieren de los circuitos sintonizados ordinarios por el hecho de que proveen una trasmisión sustancialmente constante dentro de las bandas aceptadas, cuyos límites puede elegir a voluntad el diseñador.

Desde el punto de vista de lo ideal, los filtros no deberían producir atenuación alguna dentro de la banda deseada y causar en cambio una atenuación infinita en todas las otras frecuencias. Estas bandas se llaman bandas de "trasmisión" o "pasante" y "de atenuación" o "detenida", respectivamente. Los filtros reales no satisfacen esta exigencia ideal e introducen sólo una atenuación finita en las frecuencias indeeadas. Pero esta atenuación puede hacerse tan grande como se desee usando un número adecuado de mallas de correcto diseño. Los filtros comerciales se diseñan de manera de satisfacer los requisitos técnicos con el coste mínimo y, por lo tanto, con el número mínimo de mallas que pueda satisfacer la atenuación requerida en cada aplicación en particular.

El estudiante debe saber que se siguen dos diferentes criterios de diseño en la síntesis de los circuitos de filtro. A falta de una denominación de uso general, estos dos criterios pueden distinguirse como "clásico" y "moderno". Según el criterio clásico, sustentado esencialmente en los trabajos de O. J. Zobel y G. A. Campbell, se analiza una clase dada de redes con el objeto de tabular sus características de atenuación y de fase en función de la frecuencia. Luego, dada un característica de atenuación deseada, el proyectista puede elegir la red en particular cuya característica de atenuación se aproxime lo más posible a la deseada. Según el criterio clásico, no se hace ningún intento para obtener simultáneamente características de atenuación y de fase (o de retardo) independientemente establecidas. Sólo se atiende a la atenuación α , y el proyectista debe conformarse con la característica β con ella asociada. En los sistemas utilizados en la trasmisión de la voz este procedimiento es en general satisfactorio, dado que la distorsión de fase o retardo no es en general reconocida por el oído humano.

El interés más reciente en la trasmisión de imágenes en los sistemas de facsimil y de televisión ha demostrado que la distorsión de retardo puede ser tan importante como la distorsión de frecuencia. En estos sistemas es imperativo tomar en cuenta la característica de fase o retardo.

En contraste con el criterio antiguo de síntesis de los circuitos de filtro, el proyectista, según el punto de vista moderno, parte de la respuesta deseada tanto de α como de β y diseña la red necesaria, cuya configuración es desconocida al principio del proceso. En la práctica es de ordinario imposible satisfacer exactamente ambas características y el proyectista debe conformarse con aproximarse a ellas. Este último método, aunque más poderoso que el clásico, requiere herramientas matemáticas que escapan al alcance de este volumen. En este capítulo, por lo tanto, seguiremos el criterio clásico, por lo que nos ocuparemos esencialmente del análisis de dos estructuras de filtro básicas, la red en escalera y la red en celosía. Por razones de conveniencia, investigaremos primero ciertas propiedades de las redes simétricas exentas de pérdidas.

7-1. Impedancia característica de una red de reactancias puras. Como se ha dicho más arriba, un filtro ideal debería presentar una atenuación nula en la banda pasante, condición que sólo puede satisfacerse si los elementos del filtro no tienen disipación y que no puede así realizarse en la práctica. Sin embargo, si los componentes son sólo inductores y capacitores de alto factor de calidad, sus resistencias efectivas en serie serán pequeñas y serán asimismo pequeñas las pérdidas en la banda pasante. Por esta razón, los filtros de onda se diseñan suponiendo que sus componentes están libres de pérdidas, lo que equivale a decir que el diseño se basa en elementos puramente reactivos. Adoptaremos este criterio en la discusión que sigue.

Se ha visto en el Cap. III que la impedancia característica de una red simétrica de cuatro terminales es

$$Z_o = \sqrt{Z_{oc} Z_{sc}} \quad (7-1)$$

Si los elementos de una red son reactancias puras, hay cuatro posibles combinaciones de los signos de Z_{oc} y Z_{sc} :

Condición 1. $Z_{oc} = +jX_a$, $Z_{sc} = -jX_b$.

Condición 2. $Z_{oc} = -jX_a$, $Z_{sc} = +jX_b$.

Condición 3. $Z_{oc} = +jX_a$, $Z_{sc} = +jX_b$.

Condición 4. $Z_{oc} = -jX_a$, $Z_{sc} = -jX_b$.

donde X_a y X_b son números reales positivos.

De satisfacerse la condición 1 ó la 2,

$$Z_o = \sqrt{-j^2 X_a X_b} = \pm \sqrt{X_a X_b} \quad (7-2)$$

y la impedancia característica es una resistencia pura. Sólo la raíz positiva corresponde a una terminación pasiva físicamente realizable. Si, por el contrario, se satisface la condición 3 ó la 4,

$$Z_o = \sqrt{+j^2 X_a X_b} = \pm j \sqrt{X_a X_b} \quad (7-3)$$

y la impedancia característica es una reactancia pura. En otros términos, si las impedancias son reactancias de signos opuestos, la impedancia característica es una resistencia pura, mientras que si aquéllas tienen el mismo signo, la impedancia característica es una reactancia pura.

Al variar la frecuencia, puede variar el valor y aun el carácter de Z_{oc} y Z_{sc} . Dentro de una gama de frecuencias Z_o puede ser una resis-

tencia pura, mientras que dentro de otra gama, ella puede ser una reactancia pura.

7-2. Absorción de potencia por parte de una red de reactancias puras terminada. Si la impedancia característica de una cascada de secciones es una resistencia pura y cada sección está formada por reactancias puras, la cascada absorbe potencia de un generador si al mismo tiempo está terminada en su impedancia característica Z_o . Dado que los elementos del filtro no pueden absorber potencia alguna, toda la potencia de entrada debe ser transferida a la carga o terminación. Si no se pierde potencia y la impedancia característica es una resistencia pura, $|E_1 I_1|$ debe ser igual a $|E_2 I_2|$. Además, en una cascada terminada en Z_o , $E_1/E_2 = I_1/I_2$. Como resultado de estas igualdades, $|E_1| = |E_2|$ e $|I_1| = |I_2|$, con lo que la atenuación es cero.

Si la impedancia característica de una cascada de secciones es una reactancia pura y la cascada está terminada en Z_o , ella no absorbe potencia alguna del generador y la tensión y la corriente guardan una diferencia de fase de 90° en todos los puntos de la cascada.

Sería físicamente posible que tal línea tuviera atenuación, porque cualquier disminución de tensión o corriente no involucra disipación alguna de potencia cuando E e I tienen una diferencia de fase de 90°

7-3. Constante de propagación de una red de reactancias puras. Se ha visto con la Ec. (6-22) que la constante de propagación de una red simétrica está dada por la ecuación.

$$\tgh \gamma = \sqrt{\frac{Z_{sc}}{Z_{oc}}} \quad (7-4)$$

Si se satisface la condición 1 ó la 2,

$$\tgh \gamma = \sqrt{-\frac{X_b}{X_a}} = j \sqrt{\frac{X_b}{X_a}} \quad (7-5)$$

mientras que si se satisface la condición 3 ó la 4,

$$\tgh \gamma = \sqrt{+\frac{X_b}{X_a}} = \sqrt{\frac{X_b}{X_a}} \quad (7-6)$$

Esto demuestra que, si la impedancia característica es una resistencia pura, la tangente hiperbólica de la constante de propagación es un imaginario puro, mientras que si Z_o es una reactancia pura, $\tgh \gamma$ es un número real. Pero

$$\tgh \gamma = \tgh (\alpha + j\beta) = \frac{\sinh \gamma}{\cosh \gamma} = \frac{\sinh \alpha \cos \beta + j \cosh \alpha \sin \beta}{\cosh \alpha \cos \beta + j \sinh \alpha \sin \beta}$$

Racionalicemos el denominador multiplicando el numerador y el denominador por la conjugada de éste y simplifiquemos. Obtiénese

$$\tgn \gamma = \frac{\sinh \alpha \cosh \alpha + j \sin \beta \cos \beta}{\sinh^2 \alpha + \cos^2 \beta} \quad (7-7)$$

Si $\operatorname{tgh} \gamma$ es imaginaria pura, la Ec. (7-7) demuestra que

$$\operatorname{senh} \alpha \cosh \alpha = 0 \quad (7-8)$$

Puesto que esto es sólo posible con $\alpha = 0$, la atenuación será nula si Z_0 es una resistencia pura, según se había ya previsto en el apartado anterior.

Si $\operatorname{tgh} \gamma$ es un número real, la Ec. (7-7) muestra que

$$\operatorname{sen} \beta \cos \beta = 0 \quad (7-9)$$

Por lo tanto si $\operatorname{tgh} \gamma$ es distinto de cero, $\operatorname{senh} \alpha \cosh \alpha$ debe ser mayor que cero y tiene que haber atenuación. Tal es el caso cuando Z_0 es una reactancia pura. Estos principios pueden resumirse en el siguiente teorema:

En una red simétrica de reactancias puras, si la impedancia característica es una resistencia pura, la constante de atenuación es cero, mientras que si la impedancia característica es una reactancia pura, la constante de atenuación es distinta de cero.

Si una cascada de redes puramente reactivas está terminada en una impedancia que no es la característica, la impedancia de entrada diferirá de cero sólo en la medida en que la onda reflejada puede interferir con la onda inicial en los terminales de entrada, según se ve en el Cap. IX. Si la atenuación es grande, la impedancia de carga tiene poco efecto sobre la impedancia de entrada y esta última será prácticamente igual a Z_0 . Por lo tanto, si una serie de secciones de componentes puramente reactivos tiene una impedancia característica que es una reactancia pura, tendrá una impedancia de entrada casi puramente reactiva aunque esté terminada en una resistencia pura, dado que hay atenuación. Por consecuencia, en este caso, se absorberá muy poca potencia del generador y se entregará, correspondientemente, muy poca potencia a la carga, aun cuando la red no pueda disipar potencia. Es éste el principio básico de los filtros de onda, es decir, que en la banda de atenuación sólo pueda absorberse muy poca potencia del generador conectado a los terminales de entrada del filtro. Dado que se supone que el filtro está constituido por elementos puramente reactivos, toda la potencia absorbida en el extremo de entrada, cualquiera que sea la frecuencia, es entregada a la carga.

7-4. Determinación de las bandas de trasmisión y de atenuación de las redes de filtro. Si se representan las reactancias que constituyen las impedancias en cortocircuito y en circuito abierto de una sección de filtro, es fácil determinar el tipo de filtro de que se trata y la posición de las bandas de trasmisión y atenuación. En efecto, la atenuación es cero en todos los rangos de frecuencia en que estas reactancias tienen distinto signo. Así lo exemplifica la Fig. 7-1. Las frecuencias críticas, que corresponden a los ceros o los polos de Z_{oc} o de Z_{sc} están marcadas f_1, f_2, \dots, f_5 . Es evidente que la atenuación es nula entre las frecuencias f_1 y f_4 y para las frecuencias superiores a f_5 , porque dentro de estos intervalos son opuestos los signos de Z_{sc} y Z_{oc} . Las frecuencias que marcan los límites entre las bandas de atenuación y de trasmisión se llaman frecuencias de corte. En la figura, f_1, f_4 y f_5

son frecuencias de corte. En la Fig. 7-1 es evidente que se produce una frecuencia de corte donde quiera que una de las curvas presente una frecuencia crítica que no coincida con una frecuencia crítica de la otra curva. Donde coinciden dos frecuencias críticas, no hay punto de corte. Estos puntos críticos resultan útiles para el control de la magnitud de la impedancia característica o de la constante de atenuación en las diversas bandas.

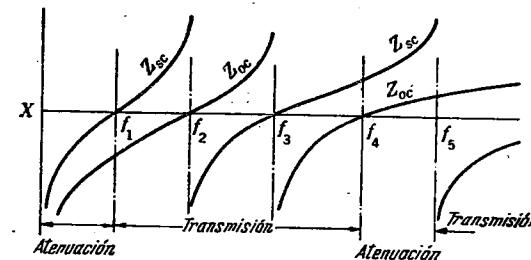


FIG. 7-1. Determinación de las bandas de trasmisión y de atenuación en un filtro de onda a partir de las curvas de reactancias en circuito abierto y en cortocircuito.

Por lo común no es muy conveniente trabajar con las impedancias de cortocircuito y de circuito abierto. Cualesquier dos factores en que pueda ser descompuesta la impedancia característica pueden usarse del mismo modo que las impedancias de cortocircuito y de circuito abierto.

7-5. Las redes escaleras como filtros. La estructura en escalera es una de las más comúnmente usadas para la síntesis de los filtros de onda según el criterio clásico. Bajo esta denominación se agrupan tanto las secciones T como las secciones π relacionadas ya que ambas configuraciones resultan similares en el caso de una cascada con muchas secciones. Las impedancias características de estas secciones relacionadas han sido derivadas en el Cap. VI y se repiten aquí por conveniencia:

$$Z_{ot} = \sqrt{Z_1 Z_2 + \frac{Z_1^2}{4}} \quad (6-15)$$

$$Z_{on} = \frac{Z_1 Z_2}{\sqrt{Z_1 Z_2 + Z_1^2/4}} = \frac{Z_1 Z_2}{Z_{ot}} \quad (6-16)$$

La impedancia característica de la sección T se llama a veces *impedancia iterativa semiserie*, mientras que correspondientemente, la de la sección π se llama *impedancia iterativa semiparalela*. Estos términos se aplican porque en una línea larga de secciones T el punto de entrada se encontraría en el centro de la impedancia en serie Z_1 , mientras que en una línea de secciones π , la entrada estaría en un punto donde la admittance en paralelo inicial sería la mitad de la admittance de las otras ramas en paralelo.

En la Ec. (6-15) el radicando puede dividirse en dos factores, del modo siguiente:

$$Z_{ot} = \sqrt{Z_1 \left(Z_2 + \frac{Z_1}{4} \right)} \quad (7-10)$$

La impedancia característica sería una resistencia pura si la reactancia de Z_1 tuviera signo opuesto a la de $Z_2 + Z_1/4$, mientras que sería reactiva si estas dos reactancias fueran del mismo signo. Entonces, dibujando las curvas de reactancia de estas dos cantidades, se las podrá usar para determinar la posición de las bandas de trasmisión y de atenuación del mismo modo que en el caso de las reactancias en cortocircuito y en circuito abierto. Las frecuencias de corte ocurrirían en las frecuencias críticas no coincidentes de las dos reactancias consideradas. Es decir, hay frecuencias de corte cuando

$$Z_1 = 0 \quad Z_2 \neq 0 \text{ o } \infty \quad (7-11)$$

$$Z_2 + \frac{Z_1}{4} = 0 \quad Z_1 \neq 0 \text{ o } \infty \quad (7-12)$$

$$Z_2 = \infty \quad Z_1 \neq 0 \text{ o } \infty \quad (7-13)$$

El caso de $Z_1 = \infty$ haría también $Z_2 + Z_1/4 = \infty$ de modo que se tendría dos frecuencias críticas coincidentes, y, por lo tanto, no se daría lugar a una frecuencia de corte.

Las Ecs. (7-11) a (7-13) pueden combinarse en las relaciones

$$\frac{Z_1}{4Z_2} = 0 \quad \text{o} \quad \frac{Z_1}{4Z_2} = -1 \quad (7-13a)$$

Otra manera de expresar lo mismo es que la relación $Z_1/4Z_2$ debe estar comprendida entre 0 y -1 en las bandas de trasmisión. Por lo tanto, para que Z_o sea real,

$$-1 < \frac{Z_1}{4Z_2} < 0 \quad (7-14)$$

Puesto que Z_1Z_2 es un número real cuando Z_1 y Z_2 son reactancias puras, es evidente en la Ec. (6-16) que $Z_{o\pi}$ será resistiva cuando Z_{oT} sea resistiva, y reactiva cuando Z_{oT} sea reactiva. Por consecuencia, las bandas de trasmisión y de atenuación son independientes del hecho de que Z_1 y Z_2 se dispongan como una sección T o como una sección π .

7-6. Atenuación de las redes en escalera. Para hacer resaltar el hecho de que hay atenuación cuando $Z_1/4Z_2$ no está comprendida entre los límites especificados por la inecuación (7-14), calculemos la relación de las corrientes de entrada y de salida para una sección terminada en Z_o . La Ec. (6-4) da la relación buscada para la sección T:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{Z_1/2 + Z_2 + Z_o}{Z_2} = 1 + \frac{Z_1}{2Z_2} + \frac{Z_o}{Z_2} \quad (7-15)$$

Los posibles valores de $Z_1/4Z_2$ pueden agruparse en los tres casos A, B y C considerados a continuación.

Caso A. Se satisface la Ec. (7-14). $-1 < Z_1/4Z_2 < 0$.

En este caso Z_o es real y el numerador de la Ec. (7-15) es un número complejo. Para que Z_o sea una resistencia pura, Z_1 debe ser una reactancia inductiva y $Z_1/4 + Z_2$ tiene que ser una reactancia

capacitiva, o viceversa. Entonces Z_2 debe ser una reactancia del mismo tipo que $Z_1/4 + Z_2$.

Sea

$$Z_1 = +jX_a \quad \text{y} \quad Z_2 = -jX_b$$

o

$$Z_1 = -jX_a \quad \text{y} \quad Z_2 = +jX_b$$

entonces por la Ec. (7-15)

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\sqrt{X_a X_b - X_a^2/4} \pm j(X_a/2 - X_b)}{\pm jX_b} \quad (7-16)$$

El valor absoluto del numerador de la Ec. (7-16) es la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de la parte real y de la parte imaginaria. Luego,

$$\left| \frac{I_1}{I_2} \right| = \frac{\sqrt{X_a X_b - X_a^2/4 + X_a^2/4 - X_a X_b + X_b^2}}{X_b} \quad (7-17)$$

$$\left| \frac{I_1}{I_2} \right| = 1 \quad (7-18)$$

Esto demuestra nuestra anterior conclusión de que no hay atenuación si Z_o es una resistencia pura. A causa de los diferentes argumentos en el numerador y el denominador de la Ec. (7-16), hay un desplazamiento de fase de la corriente, y por lo tanto de la tensión, entre los dos extremos de la sección. La magnitud de este desplazamiento depende de los valores numéricos de Z_1 y Z_2 .

Caso B. $Z_1/4Z_2 > 0$, es decir, $Z_1/4Z_2$ es un número positivo cualquiera.

En este caso Z_1 y Z_2 son reactancias del mismo tipo y Z_o es también una reactancia pura. Por el hecho de que Z_1 y Z_2 tienen físicamente cierta pequeña resistencia, el único valor físico realizable de Z_o es una reactancia del mismo tipo que Z_1 y Z_2 . Luego, o

$$Z_1 = +jX_a \quad \text{y} \quad Z_2 = +jX_b$$

$$Z_1 = -jX_a \quad \text{y} \quad Z_2 = -jX_b$$

y la Ec. (7-15) deviene

$$\frac{I_1}{I_2} = 1 + \frac{X_a}{2X_b} + \sqrt{\frac{X_a}{X_b} + \frac{X_a^2}{4X_b^2}} \quad (7-19)$$

Esta relación es siempre mayor que 1 y es un número puro, porque las j desaparecen, y debe haber entonces atenuación y no desplazamiento de fase.

Caso C. $Z_1/4Z_2 < -1$.

En este caso Z_1 y Z_2 son reactancias de opuestos tipos, pero $|Z_1| > |4Z_2|$. Luego, o

$$Z_1 = +jX_a \quad Z_2 = -jX_b \quad \text{y} \quad \frac{Z_1}{4} + Z_2 = +jX_c$$

$$Z_1 = -jX_a \quad Z_2 = +jX_b \quad \text{y} \quad \frac{Z_1}{4} + Z_2 = -jX_c$$

donde X_a , X_b y X_c pueden tener cualquier valor entre cero e infinito.

En el primer caso, $Z_o = +j\sqrt{X_a X_c}$, y en el segundo caso,

$$Z_o = -j\sqrt{X_a X_c}$$

La Ec. (7-15) deviene, entonces,

$$\frac{I_1}{I_2} = 1 - \frac{X_a}{2X_b} - \frac{\sqrt{X_a X_c}}{X_b} \quad (7-20)$$

Si $|Z_1| > |4Z_2|$ es $X_a/2X_b > 2$, y el segundo miembro de la Ec. (7-20) es un número real negativo cuyo valor absoluto es mayor que 1. Por lo tanto $|I_1/I_2|$ es mayor que 1 y hay atenuación. El significado del signo negativo de esta relación es que la sección produce un desplazamiento de fase de exactamente 180° .

Las Ecs. (7-19) y (7-20) confirman también nuestra anterior conclusión de qué debe haber atenuación si la impedancia característica es una reactancia pura.

En una cascada larga, la única diferencia entre una serie de secciones π relacionadas y una serie de secciones T relacionadas se hallan en las semisecciones terminales, según se ha explicado en el Cap. VI. Dado que las semisecciones no pueden afectar mayormente la atenuación total de una cascada larga, y dado que la atenuación por sección es la atenuación total dividida por el número de secciones, es evidente que la atenuación de una sección π es la misma que la de una sección T con iguales valores de Z_1 y Z_2 y que los argumentos anteriores son válidos para ambos tipos de sección. Por otra parte, en el Cap. VI se ha visto ya que γ es el mismo para las secciones T y π relacionadas.

7-7. Clasificación de los filtros mediante funciones hiperbólicas. Es posible verificar las características de los tres casos considerando una expresión de γ en términos de funciones hiperbólicas. Por la Ec. (6-19), $\cosh \gamma = 1 + Z_1/2Z_2$. Puede darse una forma más útil a esta expresión aplicando la Ec. (A-11), lo que da

$$\operatorname{senh} \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{Z_1}{4Z_2}} \quad (7-21)$$

Si Z_1 y Z_2 son ambas imaginarias puras, su relación, y , por lo tanto, $Z_1/4Z_2$, es un número real. Dado que Z_1 y Z_2 pueden tener cualquier valor entre $-j\infty$ y $+j\infty$, $Z_1/4Z_2$ puede tener cualquier valor real entre estos mismos límites. Entonces $\operatorname{senh}(\gamma/2) = \sqrt{Z_1/4Z_2}$ tiene también límites infinitos, pero puede ser real o imaginario, según que $Z_1/4Z_2$ sea positivo o negativo. Hay que ver ahora cómo estas posibilidades afectan las componentes de γ , es decir, α y β , porque en general se espera que γ sea compleja. Se demostrará que α y β adoptan distintos valores según el valor de $Z_1/4Z_2$.

Por la Ec. (A-15),

$$\begin{aligned} \operatorname{senh} \frac{\gamma}{2} &= \operatorname{senh} \left(\frac{\alpha}{2} + j \frac{\beta}{2} \right) = \operatorname{senh} \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} + j \cosh \frac{\alpha}{2} \operatorname{sen} \frac{\beta}{2} \\ &= \sqrt{\frac{Z_1}{4Z_2}} \end{aligned} \quad (7-21a)$$

Consideremos primero el caso en que $Z_1/4Z_2$ es negativa, haciendo su raíz imaginaria e igual, digamos, a $\pm jx$. Luego, por la Ec. (7-21a), igualando las partes reales,

$$\operatorname{senh} \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} = 0 \quad (7-22a)$$

y las partes imaginarias,

$$\cosh \frac{\alpha}{2} \operatorname{sen} \frac{\beta}{2} = \pm x \quad (7-22b)$$

Estas dos ecuaciones deben ser satisfechas simultáneamente por α y β . La Ec. (7-22a) se satisface indiferentemente con $\alpha = 0$ ó con $\beta = \pm \pi$. Las dos posibles soluciones se considerarán separadamente.

Si $\alpha = 0$, la Ec. (7-22a) queda satisfecha y $\cos(\alpha/2) = 1$. Entonces, por la Ec. (7-22b),

$$\operatorname{sen} \frac{\beta}{2} = \pm x \quad (7-23)$$

Pero el seno puede tener un valor máximo de sólo 1; luego, esta solución es válida únicamente para $Z_1/4Z_2$ negativa y magnitud máxima igual a la unidad. Esto puede identificarse como caso A y resumirse del siguiente modo:

Caso A.

$$\beta = 2 \operatorname{arc} \operatorname{senh} x = 2 \operatorname{arc} \operatorname{senh} \sqrt{\frac{Z_1}{4Z_2}}$$

La segunda posible solución de las Ecs. (7-22) es para $\beta = \pm \pi$. Entonces $\operatorname{sen}(\beta/2) = \pm 1$, y la Ec. (7-22b) da

$$\begin{aligned} \pm \cosh \frac{\alpha}{2} &= \pm x \\ 0 & \cosh \frac{\alpha}{2} = x \end{aligned} \quad (7-24)$$

Dado que $\cosh(\alpha/2) \geq 1$, esta solución es válida para $Z_1/4Z_2$ negativa y con una magnitud mayor o igual que la unidad y puede ser identificada como caso C.

Caso C. $-\infty \leq Z_1/4Z_2 \leq -1$, $\beta = \pm \pi$,

$$\alpha = 2 \operatorname{arc} \cosh x = 2 \operatorname{arc} \cosh \sqrt{\frac{Z_1}{4Z_2}} \quad (7-24a)$$

(Obsérvese que no hay diferencia física entre $\beta = +\pi$ y $\beta = -\pi$)

Por otra parte, es concebible que $Z_1/4Z_2$ sea positiva, de modo que $\sqrt{Z_1/4Z_2}$ es real e igual, digamos, a $\pm x$. Introduciendo este valor en la Ec. (7-21a) e igualando las partes reales,

$$\operatorname{senh} \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} = \pm x \quad (7-25)$$

y las partes imaginarias

$$\cosh \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} = 0 \quad (7-26)$$

Una vez más, α y β deben satisfacer simultáneamente ambas ecuaciones. Dado que $\cosh(\alpha/2) \geq 1$ para cualquier valor real α , la Ec. (7-26) puede ser satisfecha solamente por $\beta/2 = 0, \pm \pi$, o $\beta = 0$. (Obsérvese que no hay diferencia física entre $\beta = 0$ y $\beta = 2\pi$.) Luego, $\cos(\beta/2) = \pm 1$ y la Ec. (7-25) reducese a

$$\operatorname{senh} \frac{\alpha}{2} = x \quad (7-27)$$

Por consideraciones físicas, α sólo puede ser positiva.

Esta solución puede identificarse como caso *B*.

Caso *B*. $0 \leq Z_1/4Z_2 \leq \infty, \beta = 0$,

$$\alpha = 2 \operatorname{arc senh} x = 2 \operatorname{arc senh} \sqrt{\frac{Z_1}{4Z_2}}$$

Se verá que los tres límites de los casos *A*, *B*, y *C* son mutuamente exclusivos, y que, por lo tanto, una vez conocido el valor de $Z_1/4Z_2$, es posible determinar inmediatamente a qué caso corresponde el filtro. Z_1 y Z_2 se hacen con reactancias o combinaciones de reactancias de distintos tipos, de modo que, al variar la frecuencia, el filtro pasa de una clase a otra. El caso *A* corresponde a la banda de trasmisión, mientras que los casos *B* y *C* indican bandas de atenuación.

La siguiente tabla resume los distintos casos:

Caso	$\frac{Z_1}{4Z_2}$	α	β	Carácter de Z_0	Banda
<i>A</i>	$-1 \text{ a } 0$	0	$2 \operatorname{arc sen} \sqrt{\frac{Z_1}{4Z_2}}$	Resistencia pura	Pasante
<i>B</i>	$0 \text{ a } +\infty$	$2 \operatorname{arc senh} \sqrt{\frac{Z_1}{4Z_2}}$	0	Reactancia pura	Detenida
<i>C</i>	$-\infty \text{ a } -1$	$2 \operatorname{arc cosh} \sqrt{\frac{Z_1}{4Z_2}}$	$\pm \pi$	Reactancia pura	Detenida

Los resultados anteriores se aplicarán ahora a un tipo general de filtros en escalera, los llamados filtros de *k* constante.

7-8. Filtros en escalera de *k* constante.¹ Dícese que una red en escalera es del tipo de *k* constante cuando las impedancias Z_1 y Z_2 son inversas, es decir, si

$$Z_1 Z_2 = R^2 = k \quad (7-28)$$

¹ El análisis que aquí se hace en términos de una variable de frecuencia normalizada sigue el método de E. A. Guillemin, "Communication Networks", vol. II, John Wiley & Sons, Inc. New York, 1935.

La Ec. (7-28) establece que Z_1 y Z_2 son inversas si su producto es una constante, independiente de la frecuencia. La construcción de impedancias inversas se considera con mayor detalle en el Cap. XIV. Para los fines de este capítulo es suficiente tomar nota de dos combinaciones particulares de estructuras inversas.

Si $Z_1 = j\omega L_1$ y $Z_2 = 1/j\omega C_2$, se tiene

$$Z_1 Z_2 = \frac{L_1}{C_2} = R^2 \quad (7-29)$$

independientemente de la frecuencia. Luego, una reactancia inductiva y una reactancia capacitiva son impedancias inversas. Por otra parte, si $Z_1 = j(\omega L_1 - 1/\omega C_1)$, un circuito resonante en serie sin pérdidas, y

$$Z_2 = \frac{1}{j(\omega C_2 - 1/\omega L_2)}$$

un circuito antirresonante sin pérdidas, se tiene

$$Z_1 Z_2 = \frac{\omega L_1 - 1/\omega C_1}{\omega C_2 - 1/\omega L_2} = \frac{L_2 \omega^2 L_1 C_1 - 1}{C_1 \omega^2 L_2 C_2 - 1} \quad (7-30)$$

La Ec. (7-30) puede hacerse independiente de la frecuencia si $L_1 C_1 = L_2 C_2$. Por lo tanto, un circuito resonante en serie y un circuito antirresonante son inversos siempre que la frecuencia de resonancia de uno coincida con la frecuencia de resonancia del otro y si $L_2/C_1 = L_1/C_2 = R^2$.

La relación definitoria del filtro de *k* constante, esto es, la Ec. (7-28), puede combinarse con los resultados del último apartado para obtener curvas universales que expresan α y β para este tipo de filtro. En virtud de la Ec. (7-28),

$$\begin{aligned} \frac{Z_1}{4Z_2} &= \frac{Z_1^2}{4R^2} \\ \sqrt{\frac{Z_1}{4Z_2}} &= \pm \frac{Z_1}{2R} = \pm j \frac{X_1}{2R} = \pm jx \end{aligned} \quad (7-31)$$

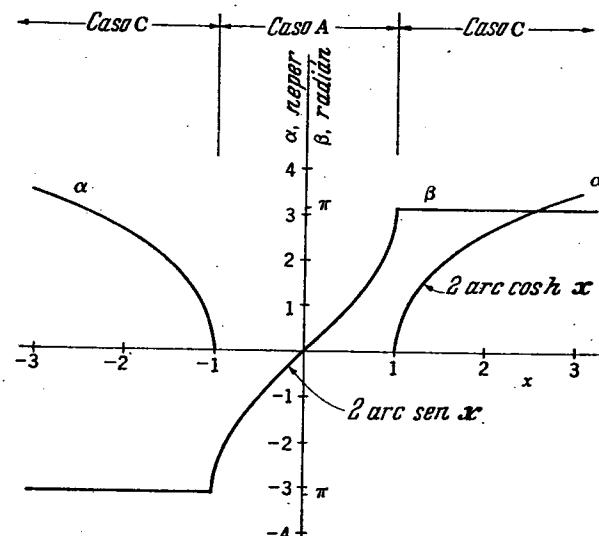
donde x puede ser identificado con el parámetro de igual designación de los casos *A* y *C* del último apartado. Pueden usarse entonces los valores de la tabla anterior para dibujar las curvas universales de la Fig. 7-2.

La cantidad R de las Ecs. (7-28) y (7-31) tiene un significado especial que se advierte al considerar la impedancia característica de la sección escalera:

$$Z_{ot} = \sqrt{Z_1 Z_2 + \frac{Z_1^2}{4}} = \sqrt{Z_1 Z_2} \sqrt{1 + \frac{Z_1^2}{4Z_2}}$$

Introduciendo la definición de *k* constante de la Ec. (7-28),

$$Z_{ot} = R \sqrt{1 + \frac{Z_1^2}{4R^2}} \quad (7-32)$$

FIG. 7-2. Curvas universales de α y β para los filtros de k constante.

Luego, R resulta ser el valor de Z_{OT} para la frecuencia para la cual es $Z_1 = 0$ y se conoce como *impedancia nominal* de la red.

Las curvas universales de la Fig. 7-2 y el concepto de impedancia nominal son útiles para el proyecto de los cuatro tipos de filtros escaleras de k constante.

7-9. Filtros escalares pasabajos de k constante. Por definición, un filtro LP es uno que deja pasar sin atenuación todas las frecuencias inferiores a la frecuencia de corte f_c y atenúa todas las frecuencias superiores a f_c . La curva de α en función de la frecuencia de un filtro LP ideal, perfecto, sería entonces como la de la Fig. 7-3a. Esta curva ideal no puede realizarse en la práctica y sólo se la obtiene aproximadamente con una sección LP de k constante.

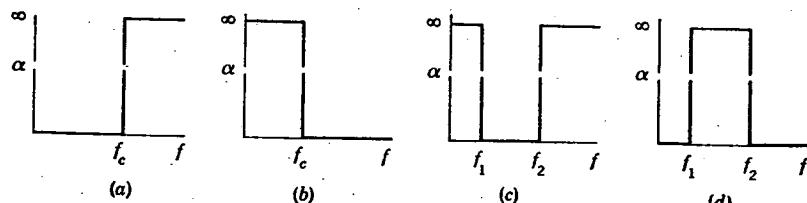


FIG. 7-3. Características de atenuación de los cuatro tipos básicos de filtro ideal. (a) Pasa bajos. (b) Pasaaltos. (c) Pasabanda. (d) Eliminabanda.

Para proyectar una sección de este tipo, se observará en la Fig. 7-2 que se obtiene una sección LP si se permite que x varíe entre 0 e ∞ , con una frecuencia de corte en $x = 1$. x es una frecuencia normalizada; por lo tanto, el problema consiste en elegir X_1 de tal modo

que x varíe de 0 a ∞ mientras la frecuencia varía entre los mismos límites.

El estudiante advertirá que si se elige X_1 como ωL_1 , x varía de 0 a ∞ cuando f cubre el mismo rango; satisfácese así la condición buscada. Luego, dadas f_c y la impedancia nominal R , se puede diseñar la sección LP de k constante siempre que para f_c , sea $x = +1$. Luego, sustituyendo en la Ec. (7-31),

$$\frac{2\pi f L_1}{2R} = 1$$

de donde

$$L_1 = \frac{R}{\pi f_c} \quad (7-33)$$

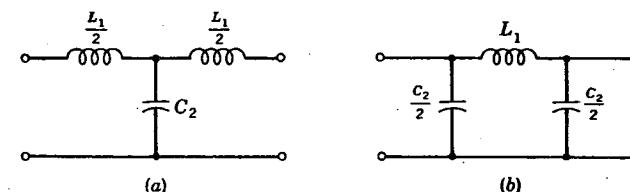
Es fácil obtener Z_2 , ya que en la estructura de k constante, Z_1 y Z_2 son inversas; luego, por la Ec. (7-29),

$$Z_1 Z_2 = \frac{L_1}{C_2} = R^2$$

de donde

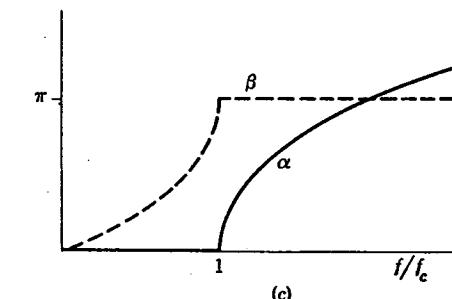
$$C_2 = \frac{1}{\pi R f_c} \quad (7-34)$$

Las Ecs. (7-33) y (7-34) completan el diseño de la sección, ilustrada ésta en la Fig. 7-4.



(a)

(b)

FIG. 7-4. Filtros escalares pasabajos, de k constante.

Pueden obtenerse las curvas de α y β en función de la frecuencia normalizada expresando x en términos de f/f_c . Por la Ec. (7-31),

$$x = \frac{\omega L_1}{2R} = \frac{2\pi f}{2R} \frac{R}{\pi f_c} = \frac{f}{f_c} \quad (7-35a)$$

De la Fig. 7-2,

$$\alpha = 0 \quad \beta = 2 \arcsin \frac{f}{f_c} \quad \text{para } f < f_c \quad (7-35b)$$

$$\alpha = 2 \operatorname{arcosh} \frac{f}{f_c} \quad \beta = \pi \quad \text{para } f > f_c \quad (7-35c)$$

$$\text{y} \quad f_c = \frac{1}{\pi \sqrt{L_1 C_2}} \quad (7-35d)$$

Estos resultados están ilustrados en la Fig. 7-4c.

Se sugiere que el estudiante verifique la posición de las bandas de transmisión y atenuación dibujando las curvas de reactancia.

7-10. Filtro escalera pasaaltos de k constante. Por definición, un filtro pasaaltos (HP) es uno que atenúa todas las frecuencias inferiores a una frecuencia de corte f_c y deja pasar sin atenuación todas las frecuencias superiores a f_c . La característica de atenuación ideal del filtro HP es la de la Fig. 7-3b. Los filtros de k constante sólo se aproximan a esta curva ideal y se diseñan de manera análoga a la de los filtros LP.

En la Fig. 7-2 adviértese que el rango de x correspondiente a la acción HP es el que va de $-\infty$ a 0. El problema consiste, entonces, en elegir los componentes de X_1 de tal modo que cuando f varíe de 0 a $+\infty$, x lo haga de $-\infty$ a 0. X_1 debe proveer, por lo tanto, una proporcionalidad inversa entre x y la frecuencia f . Satisfácese esta condición si X_1 es la reactancia de un capacitor. Según la Fig. 7-2, el corte ocurre para $x = -1$. Luego, sustituyendo en la Ec. (7-31) para la condición de corte,

$$-\frac{1}{2R(2\pi f_c)C_1} = -1$$

de donde

$$C_1 = \frac{1}{4\pi R f_c} \quad (7-36)$$

La correspondiente ecuación de diseño para Z_2 resulta de las Ecs. (7-28) y (7-29). Luego, para que Z_1 y Z_2 sean inversas,

$$Z_2 = j\omega L_2 = \frac{R^2}{Z_1} \quad L_2 = R^2 C_1$$

$$0 \quad L_2 = \frac{R}{4\pi f_c} \quad (7-37)$$

Puede demostrarse una vez más que x es una frecuencia normalizada, puesto que, sustituyendo X_1 en la Ec. (7-31),

$$x = -\frac{1}{2R\omega C_1}$$

y, eliminando C_1 por la Ec. (7-36),

$$x = -\frac{1}{2R(2\pi f)} 4\pi R f_c = -\frac{f_c}{f} \quad (7-38)$$

y por los casos A y C

$$\alpha = 2 \operatorname{arcosh} \frac{f_c}{f} \quad \beta = -\pi \quad \text{para } f < f_c$$

$$\alpha = 0 \quad \beta = -2 \arcsin \frac{f_c}{f} \quad \text{para } f > f_c \quad (7-39)$$

$$\text{y} \quad f_c = \frac{1}{4\pi \sqrt{L_2 C_1}}$$

En la Fig. 7-5 se muestra la estructura HP de k constante y sus curvas de respuesta.

7-11. Filtro escalera pasabanda de k constante. Un filtro pasabanda (BP) es uno que atenúa todas las frecuencias inferiores a una frecuencia de corte inferior f_1 y todas las frecuencias superiores a una frecuencia de corte superior f_2 . Las frecuencias comprendidas entre f_1 y f_2 constituyen la banda pasante, que se transmite sin atenuación. La Fig. 7-3c muestra la característica ideal de atenuación del filtro BP.

Para diseñar un filtro BP escalera de k constante, elíjese Z_1 como un circuito resonante en serie, sin pérdidas, es decir, $X_1 = \omega L_1 - 1/\omega C_1$. Así, mientras la frecuencia varía de 0 a $+\infty$, x lo hace de $-\infty$ a $+\infty$, según lo indica la Ec. (7-31). El filtro BP incluye así todo el rango de variación de x en la Fig. 7-2, la frecuencia inferior de corte f_1 corresponde a $x = -1$, y la frecuencia superior de corte corresponde a $x = +1$. Estas observaciones se aprovechan para el diseño del filtro BP.

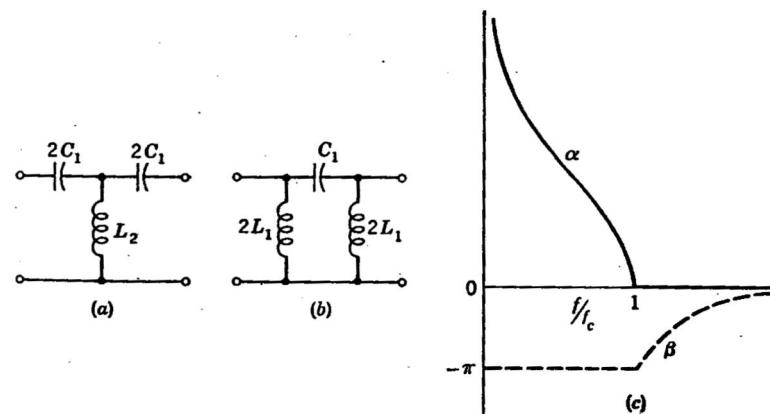


FIG. 7-5. Filtros escaleras pasaaltos de k constante.

Sustituyendo la condición de corte superior en la Ec. (7-31) para ω_2 ,

$$x = \frac{\omega_2 L_1 - 1/\omega_2 C_1}{2R} = 1 \quad (7-40)$$

De modo similar para ω_1 ,

$$x = \frac{\omega_1 L_1 - 1/\omega_1 C_1}{2R} = -1 \quad (7-41)$$

De las dos últimas ecuaciones simultáneas puede despejarse L_1 , lo que da

$$L_1 = \frac{R}{\pi(f_2 - f_1)} \quad (7-42)$$

y también C_1 ,

$$C_1 = \frac{f_2 - f_1}{4\pi R f_1 f_2} \quad (7-43)$$

Ya se sabe que el elemento en paralelo inverso Z_2 será un circuito antirresonante con L_2 y C_2 en paralelo. Por otra parte, para que Z_1 y Z_2 sean estructuras inversas

$$\frac{L_2}{C_1} = \frac{L_1}{C_2} = R^2 \quad (7-44)$$

$$y \quad L_1 C_1 = L_2 C_2 \quad (7-45)$$

Despejando L_2 y C_2 ,

$$L_2 = \frac{R(f_2 - f_1)}{4\pi f_1 f_2} \quad (7-46)$$

$$C_2 = \frac{1}{\pi R(f_2 - f_1)} \quad (7-47)$$

La Ec. (7-45) establece que la frecuencia de resonancia de Z_1 debe ser igual a la frecuencia de antirresonancia de Z_2 para que las dos impedancias sean inversas, es decir,

$$\omega_r^2 = \frac{1}{L_1 C_1} = \frac{1}{L_2 C_2} \quad (7-48)$$

Introduciendo los valores de los cuatro elementos de circuito se obtiene

$$f_r^2 = f_1 f_2 \quad (7-49)$$

lo que indica que la respuesta del filtro BP es posiblemente de simetría geométrica respecto de la frecuencia de resonancia f_r . Esto se verifica reduciendo x en términos de una frecuencia normalizada. Por la Ec. (7-31),

$$x = \frac{X_1}{2R} = \frac{\omega L_1 - 1/\omega C_1}{2R} = \frac{\omega^2 L_1 C_1 - 1}{2R \omega C_1} \quad (7-50)$$

Introduciendo la Ec. (7-49) y eliminando L_1 y C_1 ,

$$x = \frac{f_r}{f_2 - f_1} \left(\frac{f}{f_r} - \frac{f_r}{f} \right) \quad (7-51)$$

Según los casos A y C, la respuesta del filtro BP está dada por

$$\alpha = 0 \quad \beta = 2 \operatorname{arc sen} \frac{f_r}{f_2 - f_1} \left(\frac{f}{f_r} - \frac{f_r}{f} \right) \quad \text{para } f_1 \leq f \leq f_2$$

$$\alpha = 2 \operatorname{arc cosh} \left| \frac{f_r}{f_2 - f_1} \left(\frac{f}{f_r} - \frac{f_r}{f} \right) \right| \quad \beta = -\pi \text{ para } f < f_1 \quad (7-52)$$

$$\alpha = 2 \operatorname{arc cosh} \frac{f_r}{f_2 - f_1} \left(\frac{f}{f_r} - \frac{f_r}{f} \right) \quad \beta = +\pi \text{ para } f > f_2$$

El estudiante puede verificar que las expresiones de las frecuencias de corte en términos de los elementos de circuito son

$$f_2 = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{L_1 C_2}} + \sqrt{\frac{1}{L_1 C_2} + \frac{1}{L_1 C_1}} \right) \quad (7-53a)$$

$$f_1 = \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{1}{\sqrt{L_1 C_2}} + \sqrt{\frac{1}{L_1 C_2} + \frac{1}{L_1 C_1}} \right) \quad (7-53b)$$

La Fig. 7-6 muestra el filtro BP de k constante y sus curvas de respuesta.

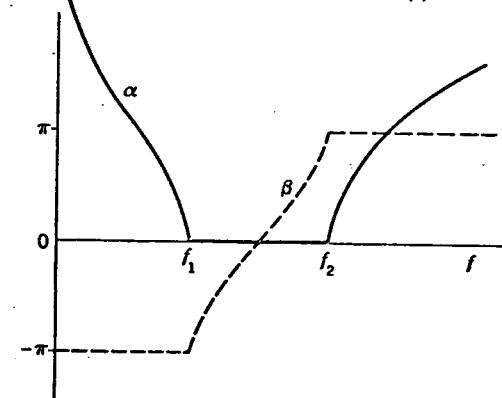
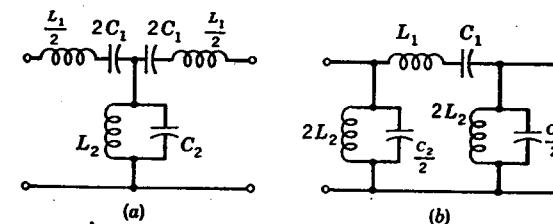


FIG. 7-6. Filtros pasabandas escalares de k constante.

7-12. Analogía entre pasabajos y pasabanda. El diseño de las tres secciones básicas de filtro se ha basado en las curvas universales de la Fig. 7-2. Por ejemplo, para la red LP, se eligió Z_1 de modo que la gama de las frecuencias reales correspondiese a $0 \leq x \leq +\infty$,

mientras que para la red BP la impedancia Z_1 se eligió de modo que la gama de las frecuencias reales correspondiese a $-\infty \leq x \leq +\infty$. Esto sugiere una estrecha analogía entre los casos LP y BP. En efecto, dadas las ecuaciones de diseño de la red LP, es posible derivar de ellas las del caso BP mediante una adecuada sustitución de variables. Se observan las siguientes cantidades correspondientes en los dos filtros:

L_1 de la sección LP es reemplazado en la sección BP por L_1 y C_1 en serie, siendo $\omega_r^2 = \omega_1\omega_2 = 1/L_1C_1$.

C_2 de la sección LP es reemplazado en la sección BP por L_2 y C_2 en paralelo, siendo $\omega_r^2 = \omega_1\omega_2 = 1/L_2C_2$.

El ancho de banda, que es igual a f_c en el caso LP, se hace igual al ancho de banda $f_2 - f_1$ en el caso BP, con $f_r = \sqrt{f_1f_2}$.

La Fig. 7-7 muestra un ejemplo de esta analogía. La Fig. 7-7a muestra un filtro LP diseñado para $R = 600$ ohmios y $f_c = 3.000$ c/s. La Fig. 7-7b corresponde al filtro BP análogo con $R = 600$ ohmios, $f_1 = 1.000$ c/s y $f_2 = 4.000$ c/s, observando que L_1 y C_2 son idénticos para los dos diseños.

7-13. Filtro escalera eliminabanda de k constante. Un filtro de eliminación de banda es uno que deja pasar sin atenuación todas las frecuencias menores que una frecuencia de corte inferior f_1 y todas las frecuencias superiores a una frecuencia de corte superior f_2 . Las frecuencias comprendidas entre f_1 y f_2 constituyen la banda eliminada y son atenuadas. El caso ideal está ilustrado por la Fig. 7-3d.

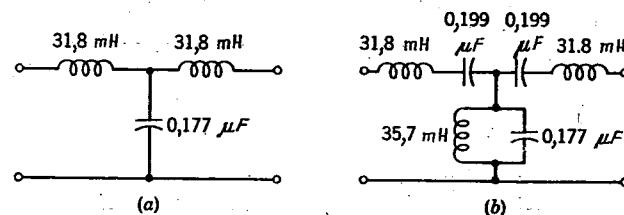


FIG. 7-7. Analogía LP-BP.

El filtro de eliminación de banda se diseña de manera muy similar a la descrita para el filtro BP. La derivación de las ecuaciones de diseño se deja como ejercicio para el estudiante. El estudiante puede también establecer una analogía entre las secciones HP y eliminabanda.

7-14. Variación de la impedancia característica con la frecuencia. En la frecuencia de corte definida por la Ec. (7-12),

$$\begin{aligned} Z_1 + 4Z_2 &= 0 \\ Z_{oT} &= 0 \\ Z_{oII} &= \infty \end{aligned}$$

Al pasar de la banda de transmisión a la banda de atenuación en esta frecuencia, la impedancia característica de la sección T debe caer a cero, mientras que la de la sección π debe subir a infinito. Estos son los únicos valores a través de los cuales Z_o puede pasar de manera continua de real a imaginaria.

Puede derivarse la variación de la impedancia característica dentro de la banda pasante de un filtro de k constante. De la Ec. (7-31),

$$\frac{Z_1}{4Z_2} = -x^2$$

y, sustituyendo en la Ec. (7-32),

$$Z_{oT} = R \sqrt{1 - x^2} \quad (7-54)$$

Para la impedancia semiparalela,

$$Z_{oII} = \frac{Z_1 Z_2}{Z_{oT}}$$

Pero $Z_1 Z_2 = R^2$; luego

$$Z_{oII} = \frac{R}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (7-55)$$

Las Ecs. (7-54) y (7-55) se han representado gráficamente en la Fig. 7-8 para $0 \leq |x| \leq 1$, es decir, para la banda pasante. En la banda eliminada, para la cual $|x| > 1$, tanto Z_{oT} como Z_{oII} se tornan imaginarias. Es evidente que una sección de esta clase no puede quedar correctamente cargada dentro de toda la banda cuando el receptor es una simple resistencia. Si se ajusta la carga para las frecuencias bajas, habrá fuertes reflexiones en las frecuencias altas y viceversa si la carga se ajusta para las frecuencias altas. En estas condiciones, la pérdida de trasmisión no es igual a la pérdida de atenuación. Es por lo tanto deseable buscar una sección de filtro que ofrezca una menor variación de Z_o dentro de la banda pasante, lo que se hará más adelante en este capítulo.

7-15. Variación de la atenuación con la frecuencia. Se ha dicho ya que la atenuación en la banda atenuada es finita, de modo que el filtro no representa una barrera perfecta para la trasmisión de las señales comprendidas dentro de esta banda. La característica de atenuación de una sección LP sencilla está ilustrada en la Fig. 7-9a.

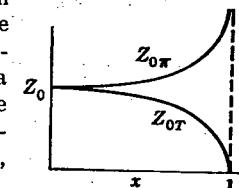


FIG. 7-8. Variación de la impedancia característica con la frecuencia en un filtro LP de k constante.

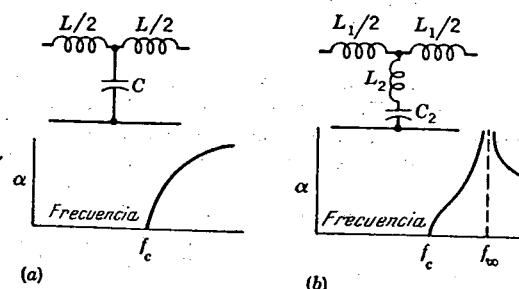


FIG. 7-9. Variación de la atenuación con la frecuencia en dos tipos de filtro LP.

Es por lo general deseable tener una gran atenuación cerca de la frecuencia de corte, como también así en otros puntos. En la Fig. 7-9b ilustrase otro tipo de filtro LP. Este filtro ofrece una atenuación muy grande para la frecuencia de resonancia de Z_2 . Eligiendo adecuadamente L_2 y C_2 , esta frecuencia de atenuación (f_∞) teóricamente infinita puede situarse en cualquier punto de la banda eliminada.

7-16. Secciones T m-derivadas. Sería muy conveniente poder asociar varias secciones de modo que cada una de ellas contribuyera con una frecuencia de atenuación infinita, f_∞ , en un punto específico de la banda atenuada, de modo de mantener así un elevado valor de a en toda esta banda.

Para poder conectar en cascada varias secciones de filtro sin que se produzcan reflexiones en los empalmes, sería necesario que sus impedancias características se conservaran iguales para todas las frecuencias. Si coinciden las impedancias características de todas las secciones para todas las frecuencias, las secciones tendrían la misma banda de trasmisión, puesto que en esta banda, y sólo en esta banda, Z_0 es una resistencia pura. En la Fig. 7-10 se ilustran dos secciones T relacionadas de una manera determinada.

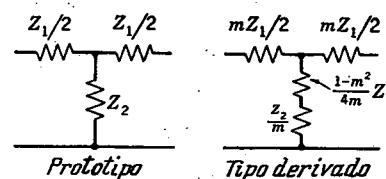


FIG. 7-10. Secciones T que tienen la misma impedancia característica.

La impedancia característica de la sección denominada "prototipo" es $Z_{oT} = \sqrt{Z_1 Z_2 + Z_1^2/4}$. Llámemos Z'_1 y Z'_2 las impedancias de rama de la sección "derivada", y Z'_{oT} su impedancia característica.

Imaginemos que Z_1 y Z'_1 están relacionadas por la ecuación

$$Z'_1 = mZ_1 \quad (7-56)$$

El problema es entonces el de hallar una configuración de Z'_2 tal que

$$Z_{oT} = Z'_{oT} \quad (7-57)$$

Si son válidas las Ecs. (7-56) y (7-57),

$$\begin{aligned} Z_1 Z_2 + \frac{Z_1^2}{4} &= Z'_1 Z'_2 + \frac{(Z'_1)^2}{4} = mZ_1 Z'_2 + \frac{m^2 Z_1^2}{4} \\ Z'_2 &= \frac{Z_2}{m} + \frac{(1 - m^2)Z_1}{4m} \end{aligned} \quad (7-58)$$

Por lo tanto, si se da a Z_2 la configuración especificada por la Ec. (7-58) e ilustrada en la Fig. 7-10b, serán idénticas las impedancias características nominales y las frecuencias de corte de las dos estructuras de la Fig. 7-10. Estas secciones pueden entonces conectarse en cascada sin reflexiones.

Es interesante observar qué habría ocurrido si, en lugar de hacer la hipótesis de la Ec. (7-56), se hubiera hecho la siguiente, con el mismo objeto de hallar dos secciones de filtro de igual impedancia característica:

$$Z'_2 = mZ_2 \quad (7-56a)$$

El problema sería entonces el de hallar una configuración adecuada para Z'_1 de tal modo que $Z_{oT} = Z'_{oT}$. Si se consideran válidas las Ecs. (7-57) y (7-56a),

$$Z_1 Z_2 + \frac{Z_1^2}{4} = Z'_1 Z'_2 + \frac{(Z'_1)^2}{4} = mZ'_1 Z'_2 + \frac{(Z'_1)^2}{4}$$

Despejando Z'_1

$$Z'_1 = -2mZ_2 \pm \sqrt{m^2 Z_2^2 + 4Z_1 Z_2 + Z_1^2} \quad (7-58a)$$

La Ec. (7-58a) no especifica para Z'_1 una configuración independiente de la frecuencia. Por lo tanto, el experimento matemático intentado con la Ec. (7-56a) ha conducido al fracaso, mientras que el basado en la Ec. (7-56) había conducido al buen éxito. Este es un caso común en los desarrollos de ingeniería: se intentan muchos experimentos, tanto físicos como matemáticos; algunos fracasan, otros no. En la literatura sólo se informa sobre los experimentos que han conducido al buen éxito y el estudiante tiene a menudo una impresión errónea sobre los métodos que condujeron al resultado feliz. Por lo común, los fracasos son muchos más numerosos que los triunfos, pero el triunfo bien merece el esfuerzo invertido en los experimentos que fracasaron.

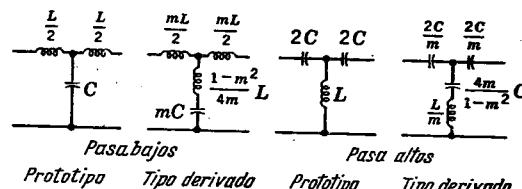


FIG. 7-11. Secciones de filtro T LP y HP, m-derivadas.

Por medio de la Ec. (7-58) y dando diferentes valores a m puede obtenerse un número ilimitado de secciones que difieren en algunos aspectos pero que se caracterizan todas por tener el mismo valor de la impedancia característica semiserie y que pueden conectarse en cascada para formar un filtro compuesto.

La Fig. 7-11 ilustra la aplicación de este principio para el diseño de filtros LP y HP. Es corriente tomar el tipo más sencillo (de k constante) como prototipo y derivar de él las demás secciones.

Para que la porción de la impedancia en derivación representada por $(1 - m^2)Z_1/4m$ mantenga con Z_1 la misma relación para todas las frecuencias, es necesario que esta reactancia sea del mismo tipo que Z_1 . Esto limita la estructura física a valores de m tales que $1 - m^2$ sea positivo, es decir,¹ $m < 1$.

Investigaremos ahora la variación de α y β en las secciones T del tipo m-derivado.

¹ La restricción $m < 1$ no es válida si se utiliza inductancia mutua entre las dos mitades de la rama en serie Z_1 (ver Prob. 7-11).

7-17. α y β para las secciones m -derivadas. El análisis de las secciones de k constante se simplificó gracias al empleo del parámetro x definido por la Ec. (7-31), esto es, $\pm jx = \sqrt{Z_1/4Z_2}$. Obtiéñese una simplificación similar para las secciones m -derivadas definiendo un parámetro análogo x_m ,

$$\pm jx_m = \sqrt{\frac{Z'_1}{4Z'_2}} \quad (7-59)$$

o, elevando al cuadrado,

$$x_m^2 = -\frac{Z'_1}{4Z'_2} \quad (7-59a)$$

Puede demostrarse que x_m está relacionado con x introduciendo los valores de Z'_1 y Z'_2 dados por las Ecs. (7-56) y (7-58):

$$\begin{aligned} x_m^2 &= \frac{-mZ_1}{4[Z_2/m + (1-m^2)Z_1/4m]} = -m^2 \frac{Z_1}{4Z_2} \frac{1}{[1 + (1-m^2)Z_1/4Z_2]} \\ &= \frac{m^2 x^2}{1 - (1-m^2)x^2} \end{aligned} \quad (7-60)$$

Obsérvese que cuando $x = \pm 1$ ó 0 , $x = x_m$, independientemente del valor de m .

Luego, como analogía directa de la Ec. (7-21a), puede escribirse, para las secciones m -derivadas,

$$\begin{aligned} \operatorname{senh} \frac{\gamma}{2} &= \operatorname{senh} \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} + j \cosh \frac{\alpha}{2} \operatorname{sen} \frac{\beta}{2} \\ &= \sqrt{\frac{Z'_1}{4Z'_2}} = \pm jx_m \end{aligned} \quad (7-61)$$

Esta ecuación puede manejarse del mismo modo que la Ec. (7-21). Resultan los siguientes casos:

Caso A. Banda pasante. $-1 \leq x \leq +1$.

$$\alpha = 0$$

$$\beta = 2 \operatorname{arc sen} x_m = 2 \operatorname{arc tg} \frac{mx}{\sqrt{1-x^2}} \quad (7-62)$$

Caso B. Banda atenuada. $1 < |x| < 1/\sqrt{1-m^2}$.

$$\begin{aligned} \alpha &= 2 \operatorname{arc cosh} \frac{mx}{\sqrt{1-(1-m^2)x^2}} \\ \beta &= \pm \pi \end{aligned} \quad (7-63)$$

Caso C. Banda atenuada. $|x| > 1/\sqrt{1-m^2}$.

$$\begin{aligned} \alpha &= 2 \operatorname{arc senh} \left| \frac{mx}{\sqrt{1-(1-m^2)x^2}} \right| \\ \beta &= 0 \end{aligned} \quad (7-64)$$

Estos resultados están representados en la Fig. 7-12. Debe observarse que en las regiones correspondientes al caso A, elígete el signo de β de modo que la curva de β tenga pendiente positiva.

La comparación de la Fig. 7-12 con la Fig. 7-2 muestra que las secciones m -derivadas tienen las mismas bandas de trasmisión y de atenuación que sus prototipos. Esto era de esperar, ya que el diseño de una sección m -derivada se basa en que los dos tipos de sección tengan la misma impedancia característica para todas las frecuencias. Se ha demostrado previamente que las bandas quedan únicamente determinadas por el carácter de Z_o , es decir, según que ésta sea real o imaginaria.

7-18. Frecuencias de atenuación infinita. La Fig. 7-12 muestra también que las secciones m -derivadas proveen atenuación infinita en ciertas frecuencias, las que corresponden a $|x| = 1/\sqrt{1-m^2}$. Esta

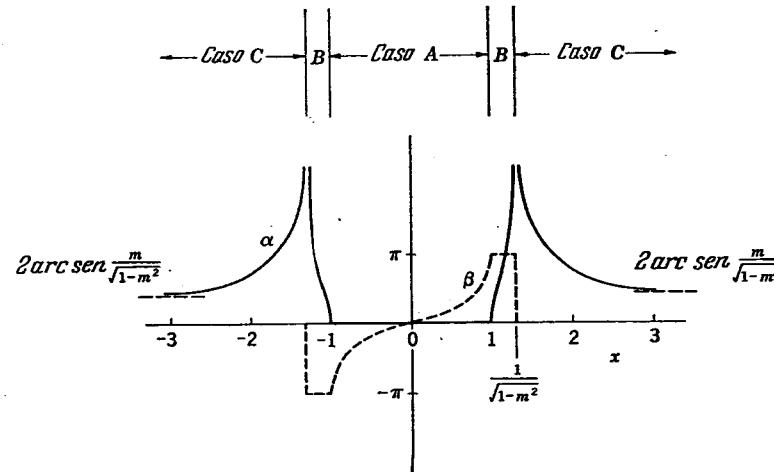


FIG. 7-12. Curvas universales de α y β para las secciones m -derivadas.

relación puede aprovecharse para elegir m de manera que f_∞ coincida con el punto que se desee de la banda atenuada. Por ejemplo, por la Ec. (7-35) para el filtro pasabajos, $x = f/f_c$. Luego para $f = f_\infty$.

$$\begin{aligned} |x| &= \frac{f_\infty}{f_c} = \frac{1}{\sqrt{1-m^2}} \\ m &= \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f_\infty}\right)^2} \end{aligned} \quad (7-65)$$

El estudiante debe observar en la Fig. 7-11 que la atenuación infinita ocurre como consecuencia de la resonancia de la rama en paralelo de la sección m -derivada, la que representa un cortocircuito a través de la red.

Pueden obtenerse expresiones correspondientes para los otros tres tipos básicos de filtro.

El estudiante observará también que, a medida que m se hace más pequeño, f_∞ se acerca cada vez más a f_c , con lo que resulta cada vez más abrupta la característica de atenuación. Puede demostrarse a partir de la Ec. (7-64) que la disminución de m representa también la disminución de a para valores grandes de x . Por esta razón las secciones m -derivadas rara vez se utilizan solas, sino en cascada con una o más secciones prototípicas. Esta combinación de secciones de diferentes tipos dan lugar a los filtros compuestos, que se considerarán más adelante.

7-19. Secciones T de terminación. Todas las secciones T discutidas hasta ahora, tanto la prototípica como la m -derivada, tienen una impedancia característica Z_{oT} dada por la Ec. (7-54) y representada en la Fig. 7-8. Se observará que en la banda pasante, Z_{oT} es una resistencia pura cuyo valor varía con la frecuencia. Es por lo tanto difícil terminar adecuadamente estas secciones. Esta dificultad puede reducirse recurriendo al empleo de semisecciones (o secciones L) como transformadoras de impedancia.

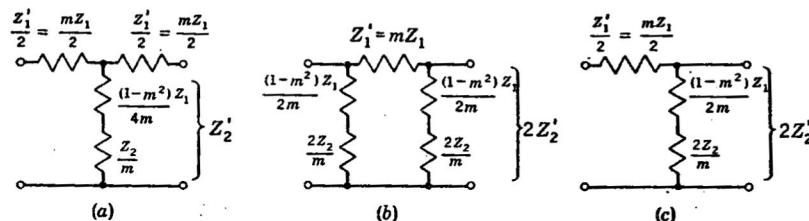


FIG. 7-13. Derivación de una semisección L m -derivada para terminación. (a) Sección T m -derivada. (b) Sección π relacionada. (c) Sección básica L, o semisección.

La Fig. 7-13a muestra una sección T m -derivada. En b se han reordenado los mismos elementos de impedancia de manera de obtener una sección π relacionada, cuya impedancia característica se llamará $Z'_{o\pi}$. Investigaremos ahora el comportamiento de $Z'_{o\pi}$. Por la Ec. (6-17),

$$Z'_{oll} = \frac{Z'_1 Z'_2}{Z_{oT}}$$

Luego, introduciendo los valores de Z'_1 , Z'_2 y Z_{oT} dados por las Ecs. (7-56), (7-58) y (7-54),

$$\begin{aligned} Z'_{oll} &= \frac{m Z_1 [Z_2/m + (1-m^2)Z_1/4m]}{R \sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{Z_1 Z_2 [1 + (1-m^2)Z_1/4Z_2]}{R \sqrt{1-x^2}} \end{aligned} \quad (7-66)$$

Pero $Z_1 Z_2 = R^2$ y $Z_1/4Z_2 = -x^2$; por lo tanto,

$$Z'_{oll} = \frac{R[1 - (1-m^2)x^2]}{\sqrt{1-x^2}} \quad (7-66a)$$

Introduciendo la Ec. (7-55), $Z'_{o\pi}$ puede escribirse como

$$Z'_{oll} = Z_{o\pi}[1 - (1-m^2)x^2] \quad (7-66b)$$

El estudiante debe tener presente que $Z'_{o\pi}$ se refiere a la sección prototípica π , mientras que $Z'_{o\pi}$ se refiere a la sección π m -derivada. Es conveniente observar cómo varía $Z'_{o\pi}$ con x de acuerdo con el parámetro m . Para ello se ha representado en la Fig. 7-14 la familia de curvas correspondiente. Por razones de conveniencia, las curvas se han representado en forma normalizada, con la variable dependiente $Z'_{o\pi}/R$ invertida. El uso de esta variable invertida limita la mayor parte de las curvas a valores finitos, y facilita la comparación.

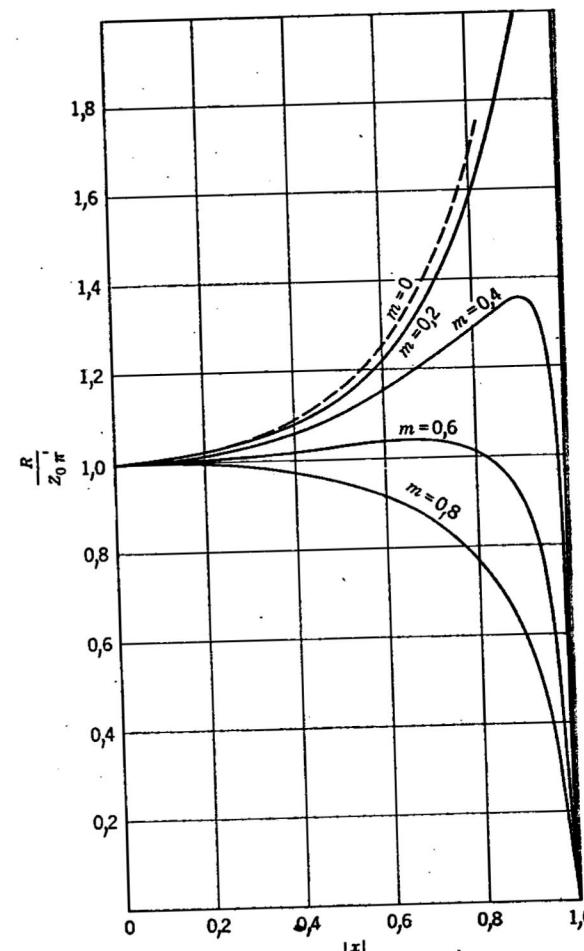


FIG. 7-14. Variación de $Z_{o\pi}$ de la sección π relacionada a la sección T m -derivada.

La inspección de las curvas muestra que para $m = 0,6$, Z'_{oT} queda dentro del 4 por ciento del valor de la impedancia nominal R para casi el 90 por ciento de la banda pasante. Aprovechase este hecho como solución satisfactoria para el problema de la terminación. Cualquiera de las secciones T, prototipo o m -derivada, puede unirse a la sección de terminación L con $m = 0,6$. Como carga de terminación se utiliza la resistencia R . Así, gracias a la propiedad transformadora de impedancias de la semisección, que fueron descritas en el apartado 6-3, la sección T tiene casi la terminación correcta Z_{oT} para aproximadamente el 90 por ciento de la banda pasante. La Fig. 7-15 muestra la impedancia efectivamente presentada a la sección T por la semisección terminada en R . Advírtese que la parte real de la impedancia se aproxima mucho a Z_{oT} y que la parte imaginaria es pequeña.

En la banda de atenuación, el valor de la impedancia de terminación de las secciones T no es importante siempre que la atenuación sea grande. Esto se explicará mejor en el Cap. IX.

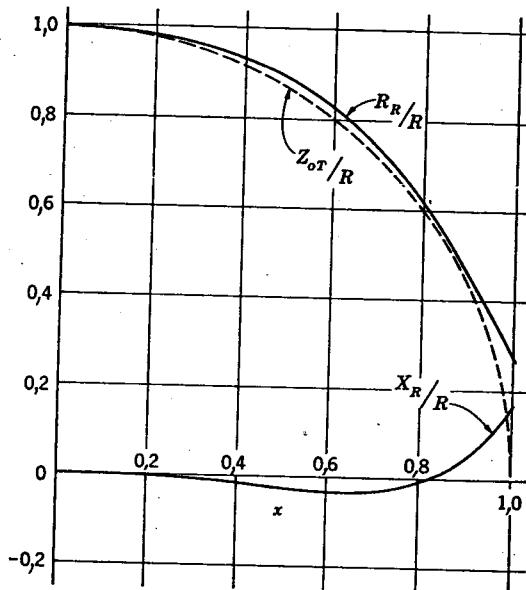


Fig. 7-15. Impedancia normalizada de entrada de una semisección de terminación terminada en R . $m = 0,6$.

7-20. Filtros compuestos. Los filtros de una sola sección rara vez proveen la atenuación necesaria para la mayoría de los fines prácticos. Si se unen en cascada varias secciones de idénticas impedancias características, la atenuación total a una frecuencia cualquiera será la suma de las atenuaciones de las secciones individuales, de modo que resulta así posible construir un filtro capaz de satisfacer los requisitos impuestos. Si todas las secciones fueran similares a la de la Fig. 7-9a,

la atenuación total no podría ser nunca muy grande para las frecuencias apenas apartadas de la frecuencia de corte. En cambio, si todas las secciones fueran como la de la Fig. 7-9b, la atenuación se elevaría rápidamente por encima de la frecuencia de corte hasta alcanzar f_∞ , pero decaería luego para las frecuencias más altas. Exígese casi siempre que la atenuación sea grande para todas las frecuencias de la banda atenuada. Este requisito puede satisfacerse de manera conveniente usando varias secciones de iguales frecuencias de corte y la misma impedancia característica, pero con diferentes frecuencias de atenuación infinita. El empleo de secciones m -derivadas, cada una de ellas con un valor específico de m , permite llegar a este resultado sin que haya reflexiones en los empalmes.

Por otra parte, el empleo de semisecciones de terminación con $m = 0,6$ transforma Z_{oT} en una resistencia esencialmente fija R , igual a la impedancia característica nominal. Un filtro compuesto comprende por lo tanto, casi siempre, los siguientes componentes: (1) Una o más secciones prototípicas; (2) una o más secciones m -derivadas, en las que se elige m de manera de obtener las frecuencias de atenuación infinita deseadas; (3) dos semisecciones de terminación con $m = 0,6$. El diseño de un filtro compuesto típico será considerado más adelante.

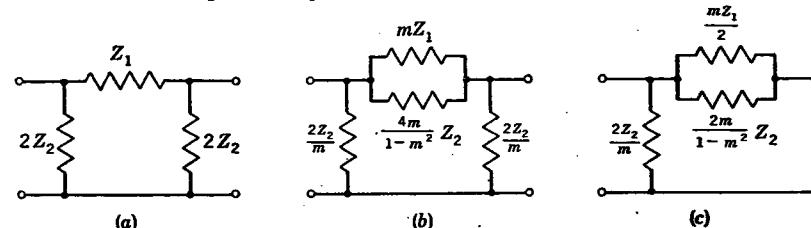


Fig. 7-16. (a, b) Secciones π con idénticas impedancias características. (c) Semisección de b.

7-21. Secciones π m -derivadas. Hasta ahora, las secciones m -derivadas han sido secciones T diseñadas sobre la base de la igualdad de la impedancia característica semiserie Z_{oT} . Es también posible diseñar secciones m -derivadas de manera que Z_{oT} sea la misma que para el prototipo. Estas secciones se llaman a menudo filtros m -derivados semi-paralelos y se las ilustra en la Fig. 7-16. La prueba de la identidad de las impedancias características se hace siguiendo los mismos lineamientos que en el caso de la sección T y se deja a cargo del estudiante. Es más conveniente usar las admitancias. En este caso, la hipótesis $Y'_2 = mY_2$ conduce a una estructura físicamente realizable, pero no la de $Y'_1 = mY_1$. El estudiante puede también demostrar que las características α y β de las secciones π m -derivadas están dadas por la Ec. (7-11), observando al efecto que el parámetro x_m es el análogo directo de la Ec. (7-59a), esto es,

$$\begin{aligned} x_m^2 &= -\frac{Z'_1}{4Z'_2} = -\frac{Y'_2}{4Y'_1} \\ &= -\frac{mY_2}{4[Y_1/m + (1-m^2)Y_2/4m]} = \frac{m^2x^2}{1-(1-m^2)x^2} \quad (7-67) \end{aligned}$$

7-22. Filtros compuestos de secciones π m -derivadas. Las secciones π m -derivadas de la Fig. 7-16 pueden utilizarse también para construir un filtro compuesto. En este caso puede obtenerse una adaptación de impedancias casi uniforme dentro de la mayor parte de la banda pasante recurriendo a una semisección T de valores derivados a partir de la Fig. 7-16 y cuyo m se hace también igual a 0,6.

7-23. Resumen de procedimientos de diseño. Los datos fundamentales necesarios para el diseño de un filtro son la banda pasante (o las frecuencias de corte para los filtros LP y HP) y la impedancia característica nominal con que ha de trabajar. A partir de estos datos se calculan los componentes del filtro con las Ecs. (7-33) y (7-34),

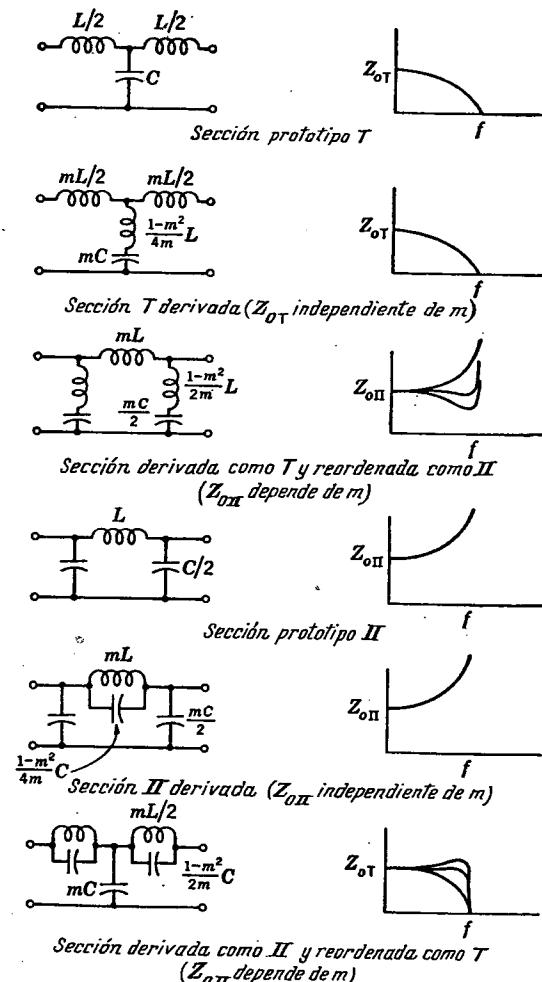


FIG. 7-17. Resumen de las impedancias características de las secciones de filtro LP prototípica y m -derivada, en función de la frecuencia.

(7-36) y (7-37), o (7-43), (7-46) y (7-47), según el tipo de filtro deseado. Se construye entonces una o más secciones según las relaciones de la Fig. 7-10 ó 7-16. El número de secciones necesario quedará determinado por los requisitos de atenuación fuera de la banda pasante, y los valores de m se elegirán de manera de distribuir adecuadamente las frecuencias de atenuación infinita. Si el corte tiene que ser neto, se necesitará una sección de bajo valor de m . Los extremos del filtro deben contener semisecciones con $m = 0,6$. La rama en paralelo de una semisección de terminación debe tener el doble de impedancia en comparación con la rama en paralelo de la sección T , dado que la rama en paralelo de una sección π es $2Z_2$. Esto significa que deben duplicarse las inductancias y partirse por dos las capacitancias de la rama en paralelo de la sección T .

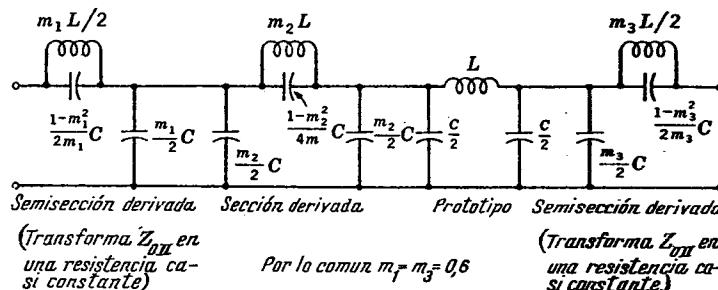


FIG. 7-18. Filtro LP compuesto derivado por las relaciones de la Fig. 7-16.

Debe observarse que, en el tipo de diseño desarrollado en detalle, se ha elegido como prototipo la sección T correspondiente a la clase de filtro del caso, derivándose luego las secciones T m -derivadas, y, finalmente, las semisecciones de terminación según las ecuaciones de la Fig. 7-10. Es también posible partir de un prototipo π , derivar otras secciones π según la Fig. 7-16, y usar dos semisecciones de ramas Z_1 y Z_2 diseñadas según las ecuaciones de la Fig. 7-16. La Fig. 7-17 ofrece un resumen de los diferentes tipos de sección con sus impedancias características.

Los filtros diseñados según las relaciones de la Fig. 7-16 tienen el aspecto general ilustrado en la Fig. 7-18, donde las capacitancias de las secciones adyacentes se combinan en un solo capacitor. Podría elegirse entre el diseño de la Fig. 7-18 basado en la sección π , y el de la Fig. 7-19, basado en la sección T , sobre la base de la conveniencia o economía de los elementos necesarios para realizar físicamente el proyecto, o del efecto de la impedancia de entrada del filtro sobre el comportamiento del sistema de transmisión en conjunto. Por ejemplo, los terminales de entrada de un filtro pasabajos del tipo de la Fig. 7-19 no podrían disponerse en paralelo con los de un filtro HP destinado a dejar pasar las frecuencias superiores a 1.000 c/s porque la primera rama en paralelo resuena a 1.250 c/s y pondría así en cortocircuito la entrada del filtro pasaaltos en esta frecuencia, que debería pasar sin atenuación. El filtro de la Fig. 7-18 podría usarse más eficazmente, pues su impedancia de entrada a esa frecuencia sería muy alta dado

que la primera rama serie sería antirresonante. No obstante, en muchos casos, se necesitan fórmulas de cálculo más complicadas para diseñar filtros que deben trabajar en paralelo con el fin de obtener adecuadas relaciones de impedancia.

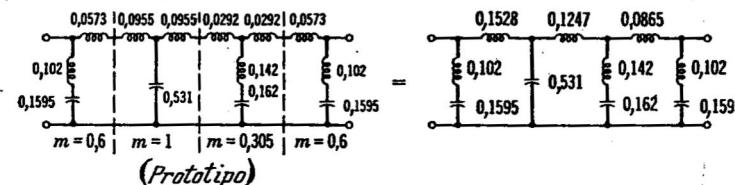


Fig. 7-19. Filtro LP compuesto, de 600 ohm, frecuencia de corte = 1 Kc/s.

Como ejemplo de cálculo de un filtro LP compuesto, diseñaremos uno para una frecuencia de corte de 1.000 c/s y para trabajar con una carga de 600 ohm. Con el objeto de lograr un corte neto, se elegirá un valor de f_∞ en 1.050 c/s. Las semisecciones de terminación con $m = 0,6$ darán también, según la Ec. (7-65), un valor de f_∞ en 1.250 c/s. Se usarán secciones T. Los valores de los componentes del prototipo serán, según las Ecs. (7-33) y (7-34),

$$L = \frac{600}{\pi \cdot 1.000} = 0,1910 \text{ Henry}$$

$$C = \frac{1}{\pi \cdot 1.000 \times 600} = 0,531 \times 10^{-6} \text{ Farad}$$

Para la sección con $f_\infty = 1.050$ c/s se tiene, según la Ec. (7-65),

$$m = \sqrt{1 - \left(\frac{1.000}{1.050}\right)^2} = 0,305$$

$$\frac{1 - m^2}{4m} = \frac{0,907}{1,22} = 0,743$$

$$\frac{mL}{2} = \frac{0,305 \times 0,1910}{2} = 0,0292 \text{ Henry}$$

$$\frac{1 - m^2}{4m} L = 0,743 \times 0,1910 = 0,142 \text{ Henry}$$

$$mC = 0,305 \times 0,531 = 0,162 \mu\text{F}$$

Para la semisección de terminación con $m = 0,6$ resultan,

$$\frac{mL}{2} = 0,0573 \text{ Henry}$$

$$\frac{1 - m^2}{4m} L = 0,2665 \times 0,191 = 0,051 \text{ Henry}$$

$$mC = 0,6 \times 0,531 = 0,319 \mu\text{F}$$

El filtro completo es el de la Fig. 7-19.

Dado que no hay necesidad de preservar la identidad de los inductores en serie, los inductores adyacentes de las ramas en serie se combinan en una unidad para dar así lugar a la estructura final de la Fig. 7-19b. Este procedimiento reduce el número de elementos y, en general, mejora el factor de calidad de los elementos inductivos de las ramas en serie.

7-24. Atenuación de las secciones de filtro. Puede obtenerse una estimación razonable de la respuesta del filtro aplicando directamente la teoría de las estructuras iterativas. Sujeta a dos hipótesis, a saber, que los elementos del filtro no tienen pérdidas y que la sección está correctamente terminada para todas las frecuencias, se observa que la pérdida total de trasmisión es la suma de la atenuación de cada una y todas las secciones y que el desplazamiento de fase total es la suma de los desplazamientos de fase individuales.

En la práctica, ninguna de estas dos hipótesis se ve satisfecha, por las discrepancias que hay entre los valores calculados y los medidos. Consideraremos ahora estas discrepancias.

Si hay disipación, el empleo de la Ec. (7-21) exige en general el uso de tablas o ábacos de funciones hiperbólicas inversas o fórmulas tales como las que se encontrarán en el Apéndice. Sin embargo, los puntos para los cuales la disipación produce los mayores errores serán en general las frecuencias de corte y las de *atenuación infinita*. Para estas frecuencias pueden hacerse algunas simplificaciones. La disipación de los capacitores es casi siempre despreciable en comparación con la de los inductores. Para f_∞ , la disipación importante es la del inductor de la rama en paralelo.

Sea $Q_2 = \text{factor de calidad de este inductor}$

$$= \frac{\omega(1 - m^2)}{4m} \frac{L_1}{R}$$

Luego, para el filtro LP m -derivado del tipo ilustrado en la Fig. 7-11, y en la frecuencia f_∞ ,

$$Z'_1 = jm\omega_\infty L_1$$

$$Z'_2 = \frac{1 - m^2}{4m} \frac{\omega_\infty L_1}{Q_2}$$

de donde

$$\frac{Z'_1}{4Z'_2} = j \frac{m^2 Q_2}{1 - m^2} = \frac{m^2 Q_2}{1 - m^2} / 90^\circ \quad (7-68)$$

$$\text{o } \sqrt{\frac{Z'_1}{4Z'_2}} = \sqrt{\frac{m^2 Q_2}{2(1 - m^2)}} (1 + j) \quad (7-68a)$$

Luego, por la Ec. (7-21a)

$$\operatorname{senh} \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} = \cosh \frac{\alpha}{2} \operatorname{sen} \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{m^2 Q_2}{2(1 - m^2)}} \quad (7-69)$$

Pero α es grande; luego

$$\operatorname{senh} \frac{\alpha}{2} \approx \cosh \frac{\alpha}{2} \approx \frac{e^{\alpha/2}}{2} \quad (7-70)$$

y $\beta \approx 90^\circ$. Por las Ecs. (7-69) y (7-70),

$$\frac{e^{\alpha/2}}{2\sqrt{2}} \approx \sqrt{\frac{m^2 Q_2}{2(1 - m^2)}} \quad (7-71)$$

$$\alpha \approx \ln \frac{4m^2 Q_2}{1 - m^2} \quad (7-71)$$

La Ec. (7-71) puede expresarse en términos de la relación f_∞/f_c , usando la Ec. (7-65),

$$\alpha \approx \ln 4Q_2 \left[\left(\frac{f_\infty}{f_c} \right)^2 - 1 \right] \quad (7-71a)$$

Para la frecuencia de corte es importante la disipación de los dos inductores. En este caso

$$Z'_1 = \left(\frac{1}{Q_1} + j \right) m\omega_c L_1 \quad (7-72)$$

$$Z'_2 = \left(\frac{1}{Q_2} + j \right) \frac{1-m^2}{4m} \omega_c L_1 - \frac{j}{\omega_c m C_2}$$

Pero, por las Ecs. (7-33) y (7-34),

$$\frac{1}{C_2} = (\pi f_c)^2 L_1 = \frac{\omega_c^2 L_1}{4}$$

Y, por lo tanto

$$Z'_2 = \frac{1-m^2}{4mQ_2} + j \left(\frac{1-m^2}{4m} - \frac{1}{4m} \right) = \left(\frac{1-m^2}{Q_2} - jm^2 \right) \frac{\omega_c L_1}{4m} \quad (7-73)$$

En este caso es conveniente hallar γ en términos del coseno hiperbólico; así, según la Ec. (6-22),

$$\cosh \gamma = 1 + \frac{Z'_1}{2Z'_2}$$

De modo que se necesita la relación

$$\begin{aligned} \frac{Z'_1}{2Z'_2} &= \frac{2m^2(1/Q_1 + j)}{(1-m^2)/Q_2 - jm^2} \\ &= 2m^2 \frac{\left(\frac{1-m^2}{Q_1 Q_2} - m^2 \right) + j \left(\frac{1-m^2}{Q_2} + \frac{m^2}{Q_1} \right)}{\left(\frac{1-m^2}{Q_2} \right)^2 + m^4} \end{aligned}$$

Pero si Q_1 y Q_2 son ambos grandes, los términos que contienen $1/Q_2^2$ ó $1/Q_1 Q_2$ son despreciables. Luego, suponiendo $Q_1 \approx Q_2 = Q$,

$$\frac{Z'_1}{2Z'_2} \approx 2 \left(-1 + \frac{j}{m^2 Q} \right) \quad (7-74)$$

Sustituyendo en la Ec. (6-19),

$$\begin{aligned} \cosh \gamma &= \cosh \alpha \cos \beta + j \operatorname{senh} \alpha \operatorname{sen} \beta = 1 + \frac{Z_1}{2Z_2} \\ &= -1 + j \frac{2}{m^2 Q} \end{aligned} \quad (7-75)$$

$$\cosh \alpha \cos \beta = -1 \quad (7-76)$$

$$\operatorname{senh} \alpha \operatorname{sen} \beta = \frac{2}{m^2 Q} \quad (7-77)$$

Si a es pequeña, β debe ser aproximadamente igual a π y pueden hacerse las siguientes aproximaciones; Sea

$$\beta = \pi - \Theta, \text{ donde } \Theta \text{ es pequeña}$$

$\cos \beta = -\cos \Theta = \frac{\Theta^2}{2} - 1$, usando dos términos de la serie coseno

$$\operatorname{sen} \beta = \operatorname{sen} \Theta = \Theta$$

$$\cosh \alpha = 1 + \frac{\alpha^2}{2}$$

$$\operatorname{senh} \alpha = \alpha$$

Luego, las Ecs. (7-76) y (7-77) devienen

$$\left(1 + \frac{\alpha^2}{2} \right) \left(\frac{\Theta^2}{2} - 1 \right) = -1 \quad (7-76a)$$

$$\alpha \Theta = \frac{2}{m^2 Q} \quad (7-77a)$$

Por la Ec. (7-76a),

$$\frac{\Theta^2}{2} - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^2 \Theta^2}{4} = 0$$

Si a y Θ son pequeños, puede despreciarse $\alpha^2 \Theta^2 / 4$, lo que da $\Theta = a$. Introduciendo este valor en la Ec. (7-77a),

$$\alpha = \frac{1}{m} \sqrt{\frac{2}{Q}} \quad (7-78)$$

Las Ecs. (7-71a) y (7-78) muestran que al reducirse m y aproxi-
marse f_∞ a f_c , aumenta la atenuación en la frecuencia de corte mien-
tras que se reduce la atenuación en la frecuencia de atenuación teórica-
mente infinita. Esto impone un límite práctico en el uso de secciones
 m -derivadas para obtener un corte neto en la frecuencia de corte,
porque un valor demasiado pequeño de m conduce a un aumento de la
atenuación dentro de la banda pasante, cerca de la frecuencia de corte.
El aumento de la atenuación es tanto más alto cuanto mayor es el
valor de Q . El efecto general de la disipación sobre la atenuación de
una sección de filtro está ilustrado en la Fig. 7-20.

La discusión precedente refiérese a la atenuación de un filtro. El estudiante debe recordar que la pérdida de inserción corresponde a

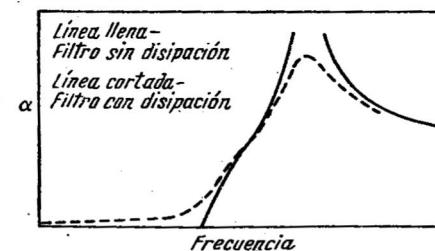


FIG. 7-20. Efecto de la disipación sobre la atenuación de una sección de filtro m -derivada.

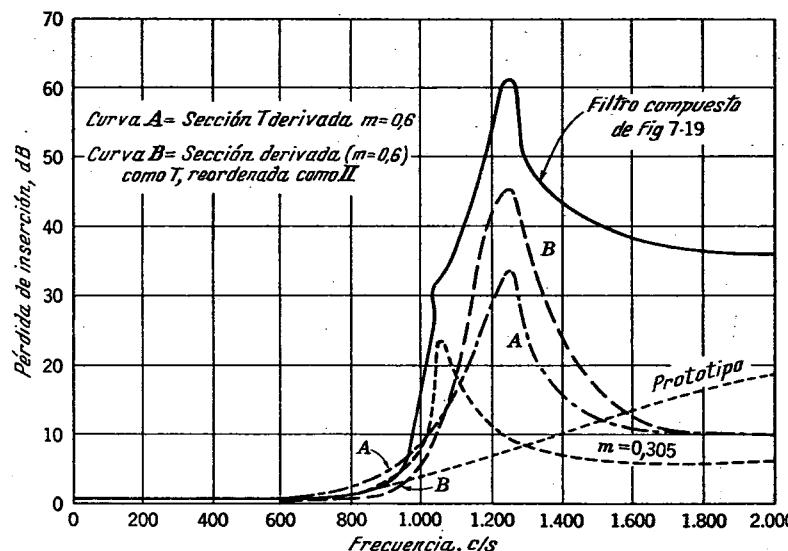


FIG. 7-21. Curvas experimentales para secciones de filtro LP y filtro compuesto.

la atenuación solamente si las secciones están terminadas en sus impedancias características. Se ha demostrado, empero, que una semisección de terminación no trasforma la impedancia nominal fija R exactamente en Z_1' ; por lo tanto, la respuesta verdadera de un filtro no coincide con la suma de las atenuaciones de las secciones componentes.

Para salvar esta dificultad, la respuesta de un filtro se calcula o mide como *pérdida de inserción* [Ec. (6-62)]. La pérdida de inserción es en general mayor que la pérdida de atenuación como resultado de la falsa adaptación de impedancias cerca de la frecuencia de corte. La Fig. 7-21 muestra las curvas experimentales del filtro de la Fig. 7-19, junto con las pérdidas de inserción de las secciones individuales. Los inductores utilizados fueron arrollados sobre núcleos toroidales de permalloy y pulverizado y tenían derivaciones en décadas. Dado que no se usaba toda la bobina, las características no son tan aproximadas a las ideales como podría lograrse con bobinas hechas especialmente para el filtro del caso. Es punto de interés la comparación de las curvas de la sección de $m = 0,6$ en su forma original en T con las de la forma relacionada en π . A causa de las mejores características de impedancia de esta última forma, el corte es más agudo. También es de interés observar la característica del prototípico, que lo hace inadecuado para usar por sí solo cuando se necesita un corte más o menos definido.

7-25. Derivaciones repetidas. Se ha visto anteriormente que el empleo de una semisección m -derivada simplifica mucho el problema de proveer una terminación adecuada al filtro compuesto. Agregando un elemento en paralelo adicional a la estructura prototípica, es posible el control de la característica de la impedancia Z'_{ox} en términos del

parámetro m . La Fig. 7-14 muestra que $m = 0,6$ da lugar a una impedancia Z'_{ox} razonablemente constante. Así, si el extremo semiparalelo de una semisección está terminada en una resistencia fija de valor R , la impedancia nominal, la impedancia semiserie de la misma sección ofrece una impedancia muy aproximadamente igual a Z_{oT} al resto del filtro, dentro de la mayor parte de la banda pasante.

La adición de todavía más elementos a la sección básica permite un mayor control sobre la característica de impedancia, de modo que la nueva sección conduce a una mejor adaptación con respecto a la resistencia fija R . La nueva sección puede obtenerse derivando en m una sección m -derivada, con lo que obtiénes la llamada sección doble m -derivada.

Si bien está fuera del alcance de este libro la investigación del problema de las *derivaciones repetidas*, se esbozará ligeramente el método seguido. Para mayores detalles, el lector consultará los trabajos de Zobel y Shea.

Se intentaría en primer término derivar la nueva sección, cuyos elementos se llamarán Z''_1 y Z''_2 poniendo $Z''_1 = mZ'_1$ y siguiendo el mismo procedimiento que para la derivación m . Este proceso conduciría sin embargo a un resultado inocuo en el que el factor m de las Ecs. (7-56) y (7-58) quedaría simplemente reemplazado por m_1m_2 . Dado que el producto m_1m_2 es constante, equivale a un único parámetro y se está en el caso anterior.

Una manera más fecunda de atacar el problema consiste en hallar una sección doble m -derivada semiparalelo que tenga la misma Z'_{ox} que una sección m -derivada semiserie. La tarea se simplifica usando las admitancias. Para Z'_{ox} o Y'_{ox} sea la misma para las dos secciones,

$$Y'_1 Y'_2 + \frac{(Y'_1)^2}{4} = Y''_1 Y''_2 + \frac{(Y''_2)^2}{4}$$

Hagamos $Y''_2 = m_2 Y'_2$, o $Z''_2 = Z'_2/m_2$. Sustituyendo y resolviendo,

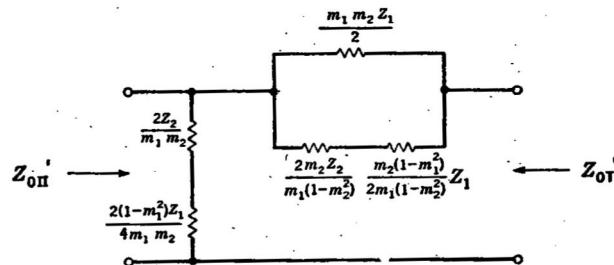
$$\begin{aligned} Y''_1 &= \frac{Y'_1}{m_2} + \frac{(1 - m_2^2) Y'_2}{4m_2} \\ 0 &= \frac{1}{m_2 Z'_1} + \frac{1}{4m_2 Z'_2/(1 - m_2^2)} \end{aligned}$$

Se observará que, según la última ecuación, la nueva rama en serie Z''_1 tiene dos elementos en paralelo. Introduciendo los valores de Z'_1 y Z'_2 de las Ecs. (7-56) y (7-57) se obtiene la semisección ilustrada en la Fig. 7-22. El estudiante debe recordar que en la última semisección la rama en serie tiene el valor $Z''_1/2$ y la rama en paralelo, $2Z''_2$.

El estudiante puede demostrar ahora (aunque no sin considerable manipulación algebraica) que la Z''_{oT} de la sección doble m -derivada tiene por expresión

$$Z''_{\text{oT}} = \frac{R \sqrt{1 - x^2} [1 - (1 - m_1^2)x^2]}{1 - (1 - m_1^2 m_2^2)x^2} \quad (7-79)$$

Dado que la Ec. (7-79) involucra dos parámetros, m_1 y m_2 , no es cosa fácil hallar los valores óptimos por análisis gráfico, en razón del gran número de curvas que sería necesario. Un método de alterna-

FIG. 7-22. Semisección doble m -derivada.

tiva consistiría en localizar los valores máximos y mínimos de Z''_{oT} por derivación respecto de x^2 . m_1 y m_2 podrían elegirse luego de modo que las desviaciones de estos máximos y mínimos fueran iguales respecto de R . También son posibles otros métodos, los que conducen a valores ligeramente diferentes para m_1 y m_2 . Zobel recomienda $m_1 = 0,723$ y $m_2 = 0,4134$. La desviación de Z''_{oT} respecto de R para estos valores está representada en la Fig. 7-23. En esta misma figura se incluye, con fines de comparación, la representación de Z'_{oT} para una sección simple m -derivada con $m = 0,6$. Es evidente la mejora obtenida con la doble derivación, la que mantiene Z''_{oT} dentro de aproximadamente el ± 2 por ciento de R en el 95 por ciento de la banda pasante.

7-26. Las redes de celosía como filtros. Hasta ahora sólo nos hemos ocupado de los filtros tipo escalera. La teoría "clásica" de los filtros comprende también las redes de celosía. La estructura básica de celosía aparece en la Fig. 6-4, y, por las Ecs. (6-34) y (6-36),

$$Z_o = \sqrt{Z_1 Z_2} \quad (6-34)$$

$$e^\gamma = \frac{1 + \sqrt{Z_1/Z_2}}{1 - \sqrt{Z_1/Z_2}} \quad (6-36)$$

$$\operatorname{tgh} \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}} \quad (7-80)$$

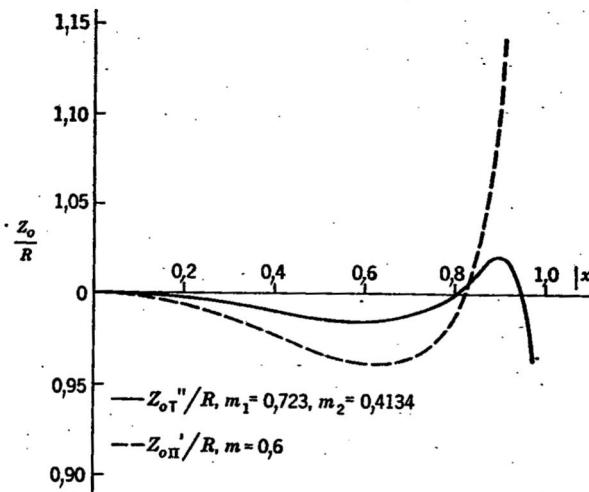
Las bandas de transmisión y de atenuación pueden determinarse del mismo modo que en el caso de las estructuras en escalera.

Por la Ec. (6-34) es evidente que si Z_1 y Z_2 son reactancias de signos opuestos, Z_o resulta resistiva, mientras que si aquellas reactancias son del mismo signo, Z_o viene a ser reactiva. Por lo tanto, si se trazan las curvas de reactancia de Z_1 y Z_2 , como se ha hecho en la Fig. 7-1 para las de Z_{oc} y Z_{sc} , puede aplicarse el mismo criterio que en este último caso para fijar los límites de las bandas pasante y detenida. Los valores de α y β para una frecuencia cualquiera calcúlanse con la Ec. (6-36) o la Ec. (7-80).

Dado que Z_o es función del producto $Z_1 Z_2$, solamente, y γ es función de la relación Z_1/Z_2 , la impedancia Z_o y γ pueden ser elegidas independientemente en el filtro de celosía, contrariamente a lo que ocurre en los filtros de escalera, en los que Z_o depende de $Z_1(Z_2 + Z_1/4)$ y γ

depende de Z_1/Z_2 . Por esta razón, la celosía constituye una base de diseño más flexible que la red escalera.

Para el estudio de los filtros de celosía aplíquese ventajosamente el teorema de las reactancias de Foster. En la hipótesis de que sólo se utilizan elementos libres de pérdidas, las reactancias Z_1 y Z_2 pueden

FIG. 7-23. Curvas características de impedancia normalizada para las secciones m -derivada y doble m -derivada.

expresarse según las Ecs. (4-110a) o (4-110b), por complicadas que sean sus estructuras. Por ejemplo, consiste Z_1 en cuatro elementos no redundantes y Z_2 de cinco. Además, sean sus curvas de reactancia las de la Fig. 7-24. Luego, según el teorema de Foster, las dos impedancias pueden expresarse en las formas

$$Z_1 = j\omega H_1 \frac{(\omega^2 - \omega_3^2)}{(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_4^2)} \quad (7-81)$$

$$Z_2 = \frac{H_2}{j\omega} \frac{(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_3^2)}{(\omega^2 - \omega_2^2)(\omega - \omega_4^2)} \quad (7-82)$$

Las curvas muestran que Z_1 es positiva para $\omega < \omega_1$; luego, por la Ec. (7-81), H_1 es negativa. Del mismo modo puede mostrarse que H_2 es positiva.

Sustituyendo en la Ec. (6-34) se tiene

$$Z_o = j \frac{\sqrt{|H_1 H_2|}}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_2^2)(\omega^2 - \omega_4^2)}} \frac{(\omega^2 - \omega_3^2)}{(\omega^2 - \omega_1^2)} \quad (7-83)$$

Para $\omega < \omega_2$

$$Z_o = \frac{\sqrt{H_1 H_2}}{\sqrt{(\omega_2^2 - \omega^2)(\omega_4^2 - \omega^2)}} \frac{(\omega_3^2 - \omega^2)}{(\omega_1^2 - \omega^2)} \quad (7-84)$$

Dado que esta impedancia resulta ser real, $\omega < \omega_2$ define una banda de trasmisión, lo que confirma la información aportada por la Fig. 7-24.

Del mismo modo, si $\omega > \omega_2$, la Ec. (7-83) muestra que Z_o es imaginaria, lo que define una banda de atenuación. Así, la estructura es un filtro pasabajos. Pueden confirmarse estos resultados introduciendo las Ecs. (7-81) y (7-82) en la Ec. (7-79) y despejando α y β .

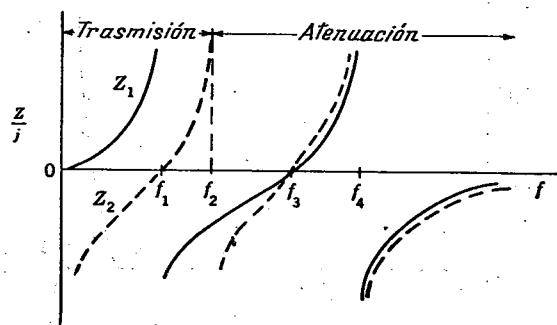


Fig. 7-24. Curvas de reactancia para un filtro de celosía.

El estudiante debe observar en particular que, según la Ec. (7-84), la variación de Z_o respecto de un valor constante está determinada por los polos y los ceros de Z_1 y Z_2 que se encuentran en la banda de atenuación. La adecuada elección de sus valores no es un problema sencillo. Cauer, Bode, y otros, han sugerido diversos métodos para resolverlo.

También puede mostrarse, a partir de las Ecs. (7-80) a (7-82) que, en la banda de atenuación

$$\operatorname{tgh} \frac{\gamma}{2} = -\omega \sqrt{\frac{H_1}{H_2}} \frac{\sqrt{(\omega^2 - \omega_2^2)}}{(\omega^2 - \omega_1^2)} \quad (7-85)$$

lo que indica que la característica de α está determinada por los ceros y los polos de Z_1 y Z_2 que caen en la banda de trasmisión. Esta observación confirma nuestra proposición anterior de que en el filtro de celosía pueden fijarse independientemente Z_o y γ .

7-27. Red en celosía pasatodo. Es de interés observar lo que ocurre en la red de celosía si Z_1 y Z_2 se hacen inversas, como es de rigor en las redes de filtro en escalera de k constante. Para esta situación se tiene, según la Ec. (6-34), $Z_o = \sqrt{Z_1 Z_2} = R$, o, más explícitamente, que los ceros de Z_1 [Ec. (7-81)] coinciden con los polos de Z_2 [Ec. (7-82)] y viceversa, de modo que $Z_o = \sqrt{H_1 H_2}$. Dado que Z_o es una constante real y positiva para todas las frecuencias desde cero hasta infinito, la banda pasante se extiende entre los mismos límites y dícese que la estructura resultante es una estructura "pasatodo". Como tal, la red es inútil como filtro, pero halla importantes aplicaciones como ecualizador de fase (Cap. XIV).

7-28. Conversión de celosía a escalera. En la práctica, los filtros de celosía se usan rara vez, principalmente porque requieren más

elementos que la estructura escalera equivalente. No obstante, los conceptos utilizados en el diseño de esos filtros son de importancia fundamental. Un procedimiento típico de diseño que el estudiante puede encontrar involucra la síntesis de una estructura de celosía a partir de ciertas especificaciones. Esta sección se trasformaría luego en una sección T o π equivalente, las que en general no tienen por qué resultar del tipo de k constante o m -derivado. El estudiante deberá consultar la literatura técnica en lo que se refiere a la discusión de los métodos aplicados para obtener las necesarias transformaciones. (Ver Prob. 7-15 y 7-16.)

7-29. Los cristales piezoelectrinos como elementos de filtro. Lógranse ciertas ventajas al utilizar cristales piezoelectrinos como elementos de circuito en la construcción de filtros. Esto se patentiza al discutir el circuito equivalente del cristal en el Cap. XVI, circuito que se reproduce en la Fig. 7-25. El Q en la frecuencia de resonancia en serie varía de 2.000 a 30.000, muy por encima de los que pueden lograrse con un inductor. Montando el cristal en un recinto evacuado de aire, reducse el amortiguamiento de las oscilaciones mecánicas y se obtienen los altos valores de Q citados.

Despreciando R , obsérvese que el cristal contiene tres elementos reactivos. Según el teorema de Foster, esto significa que el cristal posee un polo y un cero internos, los que están dados por

$$\omega_o^2 = \frac{1}{LC_1} \quad (7-86)$$

$$\text{y} \quad \omega_x^2 = \frac{1}{LC_1 C_2 / (C_1 + C_2)} \quad (7-87)$$

C_2 , que se debe al soporte del cristal, excede de $100C_1$, de modo que las dos singularidades están muy próximas la una de la otra. Luego, si el cristal se usa como filtro, obtiénes un corte muy neto. Por otra parte, dado que el cristal puede servir indiferentemente como elemento resonante o antirresonante, se lo puede utilizar ventajosamente en los filtros pasabanda o eliminabanda con bandas pasantes o eliminadas muy estrechas. Si se necesitan bandas más anchas, puede modificarse la característica del cristal mediante un inductor en serie, pero no sin modificación de la otra rama (ver Prob. 7-18).

7-30. Filtro de cruce. La acción de filtro de las redes reactivas consideradas hasta ahora se basa en el comportamiento de la impedancia característica frente a la variación de la frecuencia. A ciertas frecuencias, Z_o deviene reactiva; no puede absorberse energía del generador y resulta así una banda atenuada. Otro tipo básico de filtro, la red de cruce, se apoya en bases algo diferentes. Hay dos cargas, como

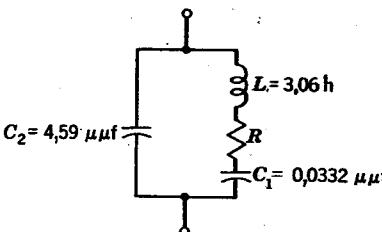


Fig. 7-25. Circuito equivalente de un cristal piezoelectrónico. Los valores corresponden a una frecuencia de resonancia en serie de 500 Kc/s. El cristal tiene 2,5 cm. de lado y 0,545 cm. de espesor.

se indica en la Fig. 7-26, y la potencia de entrada es compartida por ellas en una relación que depende de la frecuencia.

Por simples consideraciones físicas, adviértese que toda la energía es trasferida a R_1 en corriente continua. A medida que se eleva la frecuencia, menos y menos potencia pasa a R_1 y más y más a R_2 , hasta que, para la frecuencia infinita, toda la energía va a R_2 . Así, vista

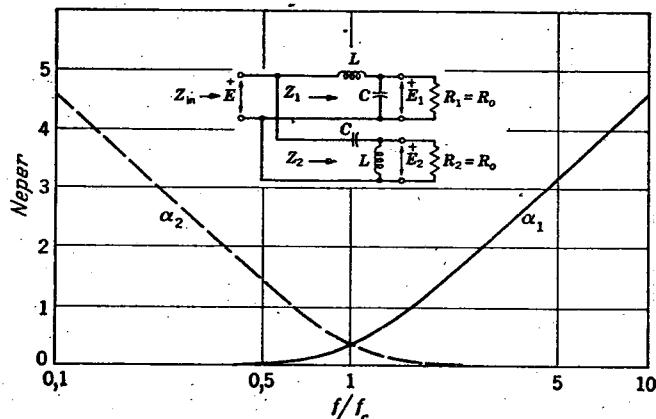


FIG. 7-26. Red de cruce y sus curvas de atenuación en función de la frecuencia.

desde los terminales de entrada hasta R_1 , la estructura compórtase como un filtro pasabajos, actuando R_2 como un resistor de disipación. En cambio, la misma estructura aparece como un filtro pasaaltos cuando se la mira desde los terminales de entrada hasta R_2 , sirviendo R_1 como resistor de disipación. eligiendo convenientemente L y C , la impedancia de entrada se conserva resistiva e igual a R_o para todas las frecuencias. Así se demostrará.

De la figura se obtienen

$$Z_1 = j\omega L + \frac{R_o}{1 + j\omega CR_o} = \frac{R_o(1 - \omega^2 LC) + j\omega L}{1 + j\omega CR_o} \quad (7-88)$$

$$Z_2 = \frac{1}{j\omega C} + \frac{j\omega LR_o}{R_o + j\omega L} = \frac{R_o(1 - \omega^2 LC) + j\omega L}{-\omega^2 LC + j\omega CR_o} \quad (7-89)$$

$$Y_{in} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} = \frac{1}{R_o(1 - \omega^2 LC)} + j2\omega CR_o \quad (7-90)$$

Luego, si se quiere hacer Z_{in} igual a R_o e independiente de la frecuencia, debe cumplirse la condición $2CR_o = L/R_o$, o

$$\frac{L}{C} = 2R_o^2 \quad (7-91)$$

Para diseñar la red se necesita otra ecuación, preferiblemente una que relacione L y C con la frecuencia de cruce, f_c , para la cual la potencia se reparte por igual entre R_1 y R_2 . Por las Ecs. (7-88) y (7-89)

$$G_1 = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{Z_1} \right\} = \frac{R_o}{R_o^2(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega L)^2} \quad (7-92)$$

$$G_2 = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{Z_2} \right\} = \frac{(\omega^2 LC)^2 R_o}{R_o^2(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega L)^2} \quad (7-93)$$

Ahora bien, para f_c , deben ser iguales G_1 y G_2 si han de ser iguales las potencias entregadas a R_1 y R_2 ; luego

$$\omega_c = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (7-94)$$

Las Ecs. (7-91) y (7-94) sirven para diseñar la red a partir de los valores de f_c y R_o .

Las constantes de atenuación de LP y HP, α_1 y α_2 , respectivamente se determinan fácilmente. Por definición,

$$e^{\alpha_1} = \left| \frac{E}{E_1} \right| = \left| \frac{R_o(1 - \omega^2 LC) + j\omega L}{R_o} \right|$$

Introduciendo las Ecs. (7-91) y (7-94) y tomando los logaritmos naturales,

$$\alpha_1 = \ln \left| 1 - \left(\frac{f}{f_c} \right)^2 + j\sqrt{2} \frac{f}{f_c} \right| \quad (7-95)$$

De modo similar

$$\alpha_2 = \ln \left| 1 - \left(\frac{f_c}{f} \right)^2 - j\sqrt{2} \frac{f_c}{f} \right| \quad (7-96)$$

Puede verse que las Ecs. (7-95) y (7-96) son idénticas excepto por la inversión de la variable de frecuencia normalizada; por lo tanto α_1 y α_2 tienen simetría geométrica respecto de f_c , según se advierte en la representación logarítmica de la Fig. 7-26.

Si bien las redes de cruce pueden utilizarse como filtros pasabajos o pasaaltos, su principal aplicación encuéntrase en los sistemas para la reproducción del sonido, en los que se aprovechan las dos características.

Las dificultades que se encuentran en la construcción de un altavoz capaz de reproducir eficientemente el sonido en toda la gama de audio desde 30 c/s hasta 15 Kc/s son tan grandes que es práctica común la de emplear dos distintos altavoces más bien que uno solo¹. Uno de ellos, de 30 cm o más de diámetro, se diseña para la eficiente reproducción del sonido por debajo de cierta frecuencia máxima, por ejemplo, 400 ó 1.000 c/s. El segundo, mucho menor, se diseña para las frecuencias superiores a este mismo límite. Cuando los dos altavoces están alimentados por el mismo amplificador, el problema es el de dirigir las distintas frecuencias componentes al altavoz más apto para reproducirlas. La red de cruce (o "divisor de frecuencias") sirve admirable-

¹ Es posible, por supuesto, en un sistema más elaborado, utilizar tres o más altavoces, cada uno de ellos funcionando en una determinada gama de frecuencias. En tal caso, pueden usarse dos o más redes de cruce en combinación para obtener la división de frecuencias necesarias.

mente para este fin. La resistencia R_1 de la Fig. 7-26 es reemplazada por la bobina móvil del altavoz de baja frecuencia y R_2 , por la del altavoz de alta frecuencia.

En la práctica, la impedancia de un altavoz varía fuertemente con la frecuencia; por consecuencia, la impedancia de entrada se aparta correspondientemente de R_o . Las características de atenuación del sistema pueden hacerse más o menos abruptas que las indicadas en la figura, recurriendo a algunas variantes del circuito¹.

PROBLEMAS

7-1. Computar las constantes de un filtro pasabajos para trabajar con una carga de 600 ohm y una frecuencia de corte de 1.200 c/s. Además de las semisecciones de terminación y una sección prototípica, el filtro debe incluir una sección con $f_\infty = 1.250$ c/s.

7-2. Computar las constantes de un filtro pasaaltos compuesto para trabajar con una carga de 600 ohm y con una frecuencia de corte de 1.200 c/s. Una de las secciones intermedias debe tener la frecuencia de atenuación infinita en 1.100 c/s.

7-3. Computar las constantes de un filtro pasabanda compuesto para trabajar con una carga de 600 ohm y con frecuencias de corte de 800 y 2.000 c/s. Además de las semisecciones de terminación y la sección prototípica, el filtro debe incluir una sección con $f_\infty = 2.100$ c/s.

¿Cuál sería la otra frecuencia de atenuación infinita?

7-4. Disponer varias configuraciones de reactancias como ramas en serie y en paralelo de una sección de filtro T. Dibujar las curvas de reactancia y determinar las bandas de transmisión y de atenuación.

7-5. Computar y representar gráficamente la característica de impedancia en función de la frecuencia de una sección pasabajos T, prototípica, cuya frecuencia de corte es de 1.000 c/s y cuyo producto $\sqrt{Z_1 Z_2}$ es igual a 600 ohm. Extender la curva desde 0 a 2.000 c/s.

Computar las constantes de la sección m -derivada con $m = 0,6$ para la sección anterior y representar su característica de impedancia dentro de la misma gama. Repetir para $m = 0,8$ y para $m = 0,4$.

Recalcular las constantes de las tres secciones T recién diseñadas a modo de secciones π en las que las impedancias de las dos ramas en serie de cada sección π sean iguales, cada una, a dos veces el valor de la rama en paralelo de la sección T. Calcular y representar las características de impedancia dentro de la misma gama de frecuencias.

7-6. Computar y representar la curva de atenuación de las dos secciones de filtro especificadas en el Prob. 7-5 en la gama de 0 a 2.000 c/s.

7-7. Suponiendo bobinas de $Q = 100$, computar la atenuación de la sección T del Prob. 7-5 para 500 y 1.000 c/s y para la frecuencia f_∞ . Esbozar los valores aproximados de a entre 0 y 2.000 c/s.

7-8. Un filtro pasabajos de una sola sección de k constante, en T, se inserta entre un generador de impedancia R_g y una carga resistiva R , igual a la impedancia nominal del filtro.

¹ Ver, por ejemplo, F. E. Terman, "Radio Engineer's Handbook", McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1943. Ver también Prob. 7-21.

a. Derivar una ecuación para la pérdida de inserción en decibel del filtro en términos de $x (= f/f_c)$ y R_g/R .

b. Representar las curvas de pérdida de inserción en función de x para $R_g/R = 0, 0,5, 1$ y 2 . Cubrir el rango $0 \leq x \leq 2$, a pasos de 0,2.

c. A partir de los resultados, recomendar el valor de R_g que proporciona la mejor característica pasabajos.

7-9. Una configuración común para el filtro eliminabanda consiste en una inductancia y una capacitancia en paralelo para Z_1 y una inductancia y una capacitancia en serie para Z_2 . Derivar las ecuaciones de diseño para este filtro y diseñar un filtro de 600 ohm para eliminar la banda de 800 a 1.200 c/s.

7-10. (a) Establecer la analogía entre el filtro pasaaltos y el filtro de eliminación de banda. (b) Diseñar el filtro del Prob. 7-9 por medio de esta analogía.

7-11. (a) Demostrar que la presencia de L_m en la Fig. 7-27 tiene el mismo efecto que una inductancia negativa en serie con C_b . (Esto puede hacerse reemplazando la combinación $L_a L_m L_a$ por una sección inductiva en T equivalente.) Esta condición permite el diseño de una sección LP con $m > 1$. (b) Derivar las ecuaciones de diseño para L_a , L_m y C_b en términos de los componentes del prototipo para esta sección m derivada.

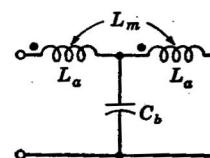


FIG. 7-27. Circuito para el Prob. 7-11.

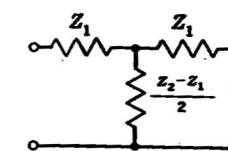


FIG. 7-28. Sección T para el Prob. 7-15.

7-12. Verificar la Ec. (7-79).

7-13. Demostrar que las bandas de transmisión y de atenuación de un filtro de celosía no se alteran al intercambiar Z_1 y Z_2 .

7-14. (a) Empezando por las curvas de reactancia, derivar las configuraciones circuitales para dos posibles filtros de celosía de *número mínimo de elementos* para cada uno de los tipos de LP, HP, BP y eliminabanda. Tabular los resultados, dando ecuaciones para las frecuencias de corte en cada caso. (b) ¿Qué ventajas resultan, si es así, de reemplazar las secciones por estructuras de celosía no mínimas?

7-15. Demostrar que son equivalentes las secciones T de la Fig. 7-28 y la sección de celosía de la Fig. 6-4.

7-16. (a) Z_1 y Z_2 son ambas ramas resonantes en serie de un filtro de celosía. ¿Qué tipo de característica de atenuación tiene este filtro? (b) Por medio del Prob. 7-15, trasformar la celosía en una estructura T equivalente. (c) ¿Qué restricciones hay que imponer a las componentes L_1 , L_2 , C_1 y C_2 de la celosía original si se quiere que la sección T sea físicamente realizable? (d) ¿Es la equivalencia independiente de la frecuencia?

7-17. Dos cristales como en la Fig. 7-25 se utilizan como elementos Z_1 de un filtro de celosía. Como elementos Z_2 se utilizan inductancia L_2 .

a. Determinar el tipo de filtro por medio de curvas de reactancia.

b. Evaluar las frecuencias de corte.

- c. Explicar brevemente por qué las frecuencias de corte son independientes de L_2 .
- d. ¿Qué simple expediente permite reducir el ancho de la banda atenuada?
- 7-18. Se modifica la impedancia Z_1 del Prob. 7-17 agregando la inductancia L_1 en serie con el cristal. El tipo de filtro debe quedar inalterado.
- ¿Qué elementos Z_2 se necesitan?
 - ¿Qué frecuencia crítica queda la misma que en el Prob. 7-17?
 - La otra frecuencia crítica, aumenta o disminuye al agregar L_1 ?
 - ¿Cuál es la ecuación para la frecuencia crítica de Z_2 ?
- 7-19. Calcular los valores de L y C en la Fig. 7-26 para una frecuencia de cruce de 450 c/s para usar con una combinación de altavoces de baja y alta frecuencia. Ambas bobinas móviles tienen una impedancia nominal de 8 ohm, resistiva.
- 7-20. Considere la red de la Fig. 7-26 suponiendo que se eliminan los dos elementos en paralelo con los resistores R_1 y R_2 .
- ¿Qué valores de L y C son necesarios para que Z_{in} sea igual a R_o en todas las frecuencias?
 - Derivar una ecuación para la frecuencia de corte.
 - Calcular y representar a_1 y a_2 . Comparar con la Fig. 7-26.
- 7-21. Comparar a_1 de la Fig. 7-26 en la gama de alta frecuencia bien por encima del corte con el a de los filtros LP de k constante y m derivados. ¿Qué importancia tiene la diferencia?
- 7-22. Esbozar el diagrama de circuito de una red de cruce para utilizar con un sistema de tres altavoces diferentes, cada uno de ellos para una diferente porción de la gama de audio. Derivar las correspondientes ecuaciones de diseño en términos de las dos frecuencias de cruce f_{c1} y f_{c2} . Suponer que los tres altavoces tienen la misma impedancia nominal resistiva.

LUIS J. BRANDO
INGENIERO
TECNOLOGICO
ELECTRONICO

CAPÍTULO VIII

LA LÍNEA INFINITA

Cuando dos equipos se interconectan en el laboratorio por medio de un corto par de conductores, como en la Fig. 8-1, el estudiante cuya experiencia está limitada a las frecuencias de audio esperará que las corrientes I_i e I_o sean iguales para todas las frecuencias. Además, suponiendo despreciable la resistencia de los conductores, también esperará que sean iguales las tensiones E_i y E_o . La experiencia en radiofrecuencia demuestra, en cambio, que cuando la longitud de los conductores es comparable con la longitud de onda, ninguna de esas dos igualdades se cumplen. E_o difiere de E_i e I_o de I_i tanto en magnitud como en fase.

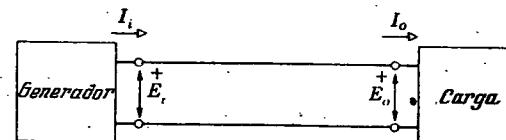


FIG. 8-1. Un generador y una carga interconectados mediante un par de conductores.

Dase una situación similar en las líneas telefónicas con señal. En las líneas cuya longitud es comparable con la longitud de onda en la frecuencia de trabajo, la corriente y la tensión experimentan variaciones de amplitud y fase a lo largo de la línea. En estas "líneas largas" no es suficiente considerar los alambres como conductores que sólo tienen resistencia y tal vez inductancia, sin conexión eléctrica entre uno y otro en toda su extensión. Para formarse una imagen mental correcta del comportamiento del sistema, es necesario un circuito equivalente que contenga los tres tipos de elementos de circuito, esto es, resistencia, inductancia y capacitancia. Este circuito equivalente se discute en los apartados siguientes. Una vez establecido el circuito, es posible predecir el comportamiento de la línea cuando se le aplica una señal eléctrica.

8-1. Parámetros distribuidos. Puede desarrollarse el circuito equivalente de una línea de transmisión considerando su tipo básico, constituido éste por dos alambres rectos paralelos, de sección uniforme, separados por el aire, esto es, lo que se llama una línea de "alambres paralelos". Por cuanto los alambres están formados por un material conductor, por lo común cobre o aluminio, tendrán ellos cierta resis-

tencia. Dado que los alambres son de sección constante, esta resistencia está *uniformemente distribuida* en toda la extensión de la línea.

En radiofrecuencia, es posible que la línea radie energía a modo de ondas electromagnéticas. Esta pérdida de energía puede tomarse en cuenta considerando que la resistencia de la línea ha aumentado en una resistencia ficticia, la "resistencia de radiación", igual a la potencia radiada dividida por el cuadrado de la magnitud de la corriente de la línea. La posibilidad de radiación de la línea se reduce a un mínimo manteniendo muy pequeña la distancia entre los alambres, digamos, mucho menor que un décimo de la longitud de onda. En este texto supondremos que la línea no radia, es decir, despreciamos la resistencia de radiación de la línea.

Por otra parte, cuando circula corriente por los alambres, se establece entre ellos un campo magnético. Este campo concatena la corriente de los alambres; luego hay inductancia presente y ésta, una vez más, está *uniformemente distribuida* por toda la extensión de la línea. La inductancia resultante tiende a impedir la circulación de la corriente, de modo que se la puede considerar acertadamente como en serie con los alambres y la resistencia distribuida.

El hecho de que las corrientes de entrada y de salida de la línea sean diferentes, conduce a pensar que hay entre los alambres cierta *admitancia*, a pesar de no haber conexión aparente entre ellos. Esta admitancia en derivación comprende dos componentes. En primer término, hay capacitancia, a causa de que la línea está formada por dos conductores separados por un dieléctrico. En segundo lugar, si el dieléctrico no es perfecto como aislador, hay una corriente de conducción entre los alambres. Este camino de conducción, o de fuga, se

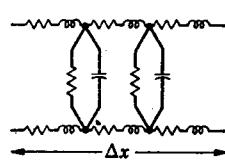


FIG. 8-2. Circuito equivalente aproximado de una porción de longitud Δx de una línea de transmisión.

de longitud Δx tiende a cero y los parámetros están uniformemente distribuidos en lugar de estar concentrados como en el diagrama aproximado.

En el estudio de las líneas de transmisión es conveniente especificar los valores numéricos de estos parámetros distribuidos por unidad de longitud de la línea, eligiéndose a este efecto la unidad que resulte más conveniente para el problema particular de que se trate. Dado que los elementos de inductancia y resistencia en serie se hallan presentes en los dos lados de la línea, la resistencia de la línea, por ejemplo, se define como la resistencia de *ambos* alambres por unidad de longitud de la línea y se indica con el símbolo R . Luego, por definición,

R = resistencia de ida y vuelta (resistencia de lazo) por unidad de longitud de la línea.

= suma de las resistencias de los dos alambres por unidad de longitud.

De modo similar, defíñese L como

L = inductancia de lazo por unidad de longitud de la línea *.

La conductancia y la capacitancia de la línea existen entre los dos alambres, de modo que no es necesaria la especificación "de lazo". Luego, por definición

G = conductancia en paralelo entre alambres, por unidad de longitud de línea

C = capacitancia en paralelo entre los alambres por unidad de longitud de línea.

En lo que sigue utilizaremos también Z , la impedancia de lazo por unidad de longitud de línea, e Y , la admitancia en paralelo por unidad de longitud de línea. Estas cantidades defínense como

$$Z = R + j\omega L \quad (8-1)$$

$$Y = G + j\omega C \quad (8-2)$$

El estudiante debe observar muy cuidadosamente que las dimensiones de las unidades de los cuatro parámetros de línea involucran la recíproca de la longitud. Por ejemplo, Z no se mide en ohm, sino en ohm por kilómetro, o por metro, etc. También debe observar que los símbolos Z e Y tienen significados especiales en el estudio de las líneas de transmisión y que Z no tiene por qué ser igual a $1/Y$.

8-2. Tipos de línea de transmisión. En el último apartado se ha tomado como ejemplo una línea de alambres paralelos a fin de introducir el circuito equivalente de la línea de transmisión. Pero se utilizan otras muchas configuraciones como línea de transmisión. Describiremos algunas de las formas más comunes.

Una de ellas es el cable coaxil. Este tipo consiste en un conductor cilíndrico hueco que rodea a un conductor central coaxil de sección circular. Cuando la línea es rígida, el conductor central está soportado por un número conveniente de discos aislantes espaciados a distancias muy pequeñas en comparación con la longitud de onda de trabajo. El conductor externo adopta entonces la forma de un caño de cobre conectado a la tierra. Una ventaja importante ofrecida por esta construcción es la de limitar totalmente, al interior del conductor externo, los campos eléctricos y magnéticos producidos por la señal.

Cuando la línea debe ser flexible, se la construye por ejemplo del siguiente modo: El conductor central está formado por uno o más conductores retorcidos, con el conjunto embebido en un cilindro de poliestireno de sección circular, obtenido por extrusión. Este material sirve como espaciador y dieléctrico de la línea. El plástico está a su vez

* Los autores agregan: = suma de las inductancias de los dos alambres por unidad de longitud de línea. Creemos que esta aclaración induce a confusión, por cuanto la inductancia de dos conductores de ida y vuelta *no es* igual a la suma de las inductancias individuales para las mismas longitudes de conductor en el espacio libre, contrariamente a lo que ocurre con la resistencia (si se desprecia la componente de radiación). (N. del T.)

cubierto por una malla conductora flexible y el cable completo está a menudo protegido por una capa de polivinilo. Esta construcción permite obtener un cable de flexibilidad razonable.

Dado que el conductor externo del cable coaxil flexible no es una hoja conductora perfecta, la confinación de los campos puede no ser perfecta y la línea puede radiar en cierta medida, especialmente en las VHF. Esta radiación puede reducirse al mínimo agregando una segunda malla de blindaje alrededor de la primera, unida a tierra. Obténese así el "cable coaxil blindado".

El cable telefónico común consiste en cierto número de pares de alambres, aislados con papel y retorcidos juntos. Los distintos pares están también retorcidos en conjunto a fin de reducir al mínimo la diafonía debida al acoplamiento magnético y eléctrico entre los distintos pares. El grupo completo de pares está protegido por una cubierta externa de plomo o de aluminio corrugado cubierto con plástico. En la Fig. 8-3 se ilustran algunos tipos de líneas de trasmisión, incluso el cable telefónico.

8-3. Cálculo de los parámetros de línea. Si bien los conceptos de los parámetros de línea por unidad de longitud, R , L , G y C , han sido introducidos con referencia a la línea de alambres paralelos, ellos no son de modo alguno privativos de este tipo de línea. En todos los tipos de línea presentan en cierta medida los cuatro parámetros, aunque en ciertos casos pueden ser despreciables uno o dos de ellos. Tal es el caso, por ejemplo, del cable telefónico. Dado que los dos alambres de un par están retorcidos juntos y que la corriente los recorre en sentidos opuestos, el flujo concatenado es tan pequeño que es posible despreciar la inductancia L por unidad de longitud en muchos cálculos. Por otra parte, el papel constituye un excelente aislador, de modo que también es muy pequeña la conductancia en derivación G . El efecto de despreciar L y G en el par telefónico se ilustrará en este mismo capítulo, más adelante.

Los fabricantes de cables y líneas de trasmisión publican tablas que dan los parámetros distribuidos de sus productos. En la tabla 8-1 se resumen algunos valores típicos. En el caso de las configuraciones simples, tales como los correspondientes a la línea de alambres paralelos o al cable coaxil, R , L y C pueden calcularse a partir de la geometría de la línea y de las propiedades de los materiales que la forman. Las ecuaciones necesarias pueden derivarse a partir de la teoría de los campos. No se las obtendrá aquí, pero se las resumen en la tabla 8-2.¹

8-4. La línea infinita, Z_0 . Dado que conocemos ya el circuito equivalente de una porción Δx de línea de trasmisión y podemos evaluar sus componentes R , L , G y C , es posible ahora predecir el comportamiento de la línea frente a una señal. Aprovechando la idea del circuito equivalente, consideremos la línea como constituida por un gran número de elementos de longitud Δx . Cada uno de estos elementos tiene entonces una inductancia de lazo en serie $L \Delta x$, una resistencia de

¹ Ver, por ejemplo, E. C. Jordan, "Electromagnetic Waves and Radiating Systems", Prentice-Hall, Inc., New York, 1950.

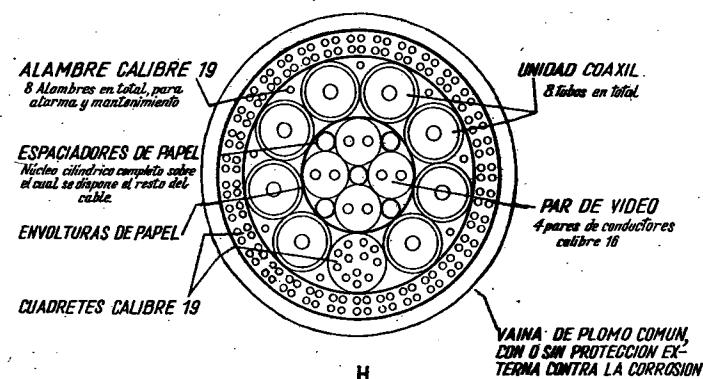
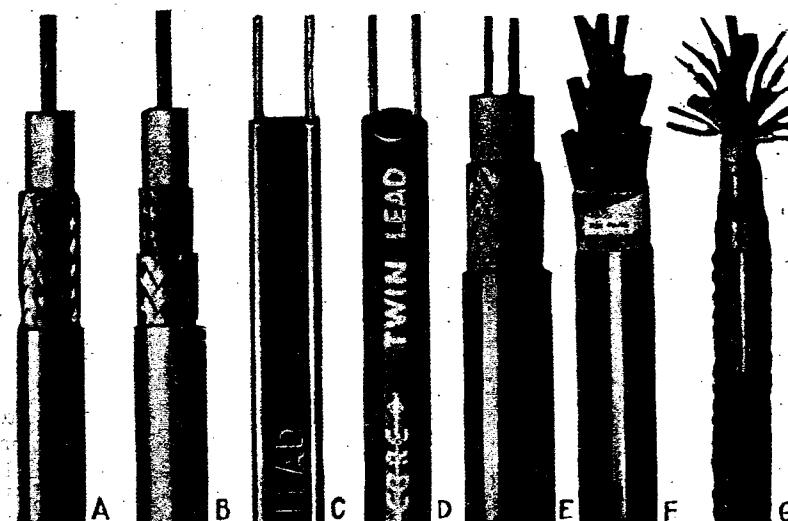


FIG. 8-3. Tipos comunes de línea de trasmisión. (A) Cable coaxil flexible. (B) Cable coaxil blindado. (C) "Twin lead". (D) "Twin lead" con alma de aire. (E) Par blindado. (F) Cable telefónico. (G) Construcción de un cable con elementos coaxiles y pares. (H) Sección transversal del cable Chicago-Terr Haute. [(A-E) American Phenolic Corporation. (F-H) Illinois Bell Telephone Co.]

lazo en serie $R \Delta x$, una conductancia en derivación $G \Delta x$, y una capacitancia en derivación $C \Delta x$. Las correspondientes impedancias en serie y admitancia en paralelo son entonces, según las Ecs. (8-1) y (8-2),

$$Z \Delta x = (R + j\omega L) \Delta x \quad (8-3)$$

$$Y \Delta x = (G + j\omega C) \Delta x \quad (8-4)$$

Por razones de conveniencia, estos elementos pueden disponerse como una configuración *T*, de modo que la línea completa puede ser considerada como el caso límite, cuando $\Delta x \rightarrow 0$, de un número infinito de secciones *T* en cascada, teniendo cada *T* los elementos definidos por las Ecs. (8-3) y (8-4). Sobre esta base puede aprovecharse los resultados obtenidos en el Cap. VI para calcular la variación de las corrientes y las tensiones estacionarias a lo largo de una línea uniforme, siempre que esté terminada en Z_o . Derivaremos primero expresiones para γ y Z_o en términos de las constantes de la línea. Luego derivaremos ecuaciones para la tensión y la corriente como función de la distancia a lo largo de la línea.

TABLA 8-1 *

Tipo	Calibre milésimas de pulgada	Distancia pulgadas	Constantes/milla			
			R, ohm	L, mH	C, μF	G, μs
Líneas de alambres paralelos						
Física	104	12	10,15	3,66	0,00837	0,29
Fantasma	104	12	5,08	2,23	0,01409	0,58
Física	104	18	10,15	3,93	0,00797	0,29
Física	165	12	4,11	3,37	0,00915	0,29
Fantasma	165	12	2,06	2,08	0,01514	0,58
Física	165	18	4,11	3,64	0,00863	0,29
Pares en cable, aislación de papel						
Lateral	19†	—	85,8	1	0,062	1,5
Lateral	16†	—	42,1	1	0,062	1,5
Fantasma	19†	—	42,9	0,7	0,1	2,4
Fantasma	16†	—	21,0	0,7	0,1	2,4

Para cable coaxil, $d_2 = 0,375$ pulg., $d_1 = 0,1004$ pulg.

* Según Amer. Tel. and Tel. Co.

† A. W. G.

8-5. Impedancia característica. En correspondencia con Z_1 de la estructura iterativa simétrica de constantes concentradas, se tiene $Z\Delta x$ en el caso de la línea, y, en correspondencia con Z_2 , la admittance $1/Y\Delta x$. Luego, por la Ec. (6-15),

$$Z_o = \sqrt{Z_1 Z_2 + \frac{Z_1^2}{4}} = \sqrt{Z_1 Z_2 \left(1 + \frac{Z_1}{4Z_2}\right)}$$

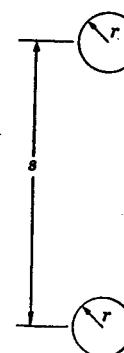
Sustituyendo Z_1 y Z_2 , tiénesse, para la línea uniforme,

$$\begin{aligned} Z_o &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{Z}{Y} \left[1 + \frac{ZY(\Delta x)^2}{4}\right]} \\ &= \sqrt{\frac{Z}{Y}} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \end{aligned} \quad (8-5)$$

TABLA 8-2

PARAMETROS DISTRIBUIDOS PARA LAS LINEAS DE ALAMBRES
PARALELOS Y LOS CABLES COAXILES

Línea de alambres paralelos



$$L = \underbrace{\frac{\mu_c}{4\pi}}_{\text{Debido al concatenamiento dentro de los conductores}} + \underbrace{\frac{\mu_d}{\pi} \ln \frac{s}{r}}_{\text{Debido al concatenamiento fuera de los conductores}} \text{ Henry/m}$$

$$C = \frac{\pi\epsilon_0}{\text{arc cosh } \frac{s}{2r}} \text{ Farad/m}$$

$$\approx \frac{\pi\epsilon_0}{\ln \frac{s}{r}} \text{ Farad/m para } s > 5r$$

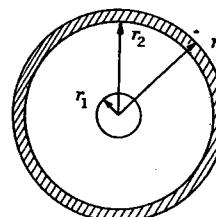
$$R_{cc} = \frac{2}{\pi r^2 \sigma} \text{ ohm/m.}$$

$$R_{ac} = \frac{R_{dc}}{2} \sqrt{\frac{f\mu_c}{\mu_d}} \text{ ohm/m}$$

Línea coaxial:

$$L = \underbrace{\frac{\mu_d}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}}_{\text{Debido al concatenamiento entre conductores}} + \underbrace{\frac{\mu_c}{8\pi} \left[\frac{4r_3^4}{(r_3^2 - r_2^2)^2} \ln \frac{r_3}{r_2} - \frac{2r_3^2}{r_3^2 - r_2^2} \right]}_{\text{Debido al concatenamiento dentro de los conductores}} \text{ Henry/m}$$

Debido al concatenamiento entre conductores



$$C = \frac{2\pi\epsilon_d}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \text{ Farad/m}$$

$$R_{dc} = \frac{1}{\pi\sigma} \left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_3^2 - r_2^2} \right) \text{ ohm/m}$$

$$R_{ac} = \sqrt{\frac{f\mu_c}{4\pi\sigma}} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \text{ ohm/m}$$

donde ϵ_d = permitividad dieléctrica

$$= \kappa\epsilon_0$$

$$\epsilon_0 = 10^{-9}/36\pi \text{ mks}$$

μ_c = permeabilidad del conductor

$$= (\mu_r)_c \mu_0$$

μ_d = permeabilidad del dieléctrico

$$= (\mu_r)_d \mu_0$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ mks}$$

σ = conductividad de los conductores

8-6. Constante de propagación compleja. La constante de propagación compleja $\gamma\Delta x$ para la sección equivalente de longitud Δx se obtiene del mismo modo. Aplicando la Ec. (6-6) al elemento de línea, se tiene

$$e^{\gamma \Delta x} = \frac{Z_1/2 + Z_2 + Z_o}{Z_2} = 1 + \frac{Z_1}{2Z_2} + \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2} \left(1 + \frac{Z_1}{4Z_2}\right)}$$

Sustituyendo Z_1 y Z_2 ,

$$e^{\gamma \Delta x} = 1 + \frac{ZY(\Delta x)^2}{2} + \sqrt{ZY} \Delta x \sqrt{1 + \frac{ZY(\Delta x)^2}{4}} \quad (8-6)$$

El problema consiste ahora en evaluar γ en términos de Z e Y . Esto puede hacerse expandiendo los dos miembros de la Ec. (8-6) en serie. Por ejemplo, el primer miembro da la serie de potencias

$$e^\theta = 1 + \theta + \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^3}{3} + \dots \quad (8-7)$$

El segundo miembro puede desarrollarse expandiendo el radical del tercer término por la serie binomial

$$(1 + a)^{1/2} = 1 + \frac{a}{2} - \frac{a^2}{8} + \frac{a^3}{16} - \dots \quad (8-8)$$

Aplicando estas expansiones a la Ec. (8-6) y despreciando los términos de orden superior se obtiene

$$1 + \gamma_{\Delta x} + \frac{\gamma_{\Delta x}^2}{2} + \dots + = 1 + \sqrt{ZY} \Delta x + \frac{ZY(\Delta x)^2}{2} \quad (8-9)$$

Por lo tanto

$$\gamma_{\Delta x} = \sqrt{ZY} \Delta x$$

La $\gamma_{\Delta x}$ así derivada es para la sección de longitud Δx . Para n secciones de esta clase, la constante de propagación sería n veces mayor. En una unidad de longitud hay $1/\Delta x$ secciones, de modo que para la unidad de longitud es $\gamma = \gamma_{\Delta x}/\Delta x$. Es decir

$$\gamma = \sqrt{ZY} = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} = \alpha + j\beta \quad (8-10)$$

8-7. Corriente y tensión. Por razones de conveniencia, denotemos con E_s e I_s , respectivamente, la tensión y la corriente aplicadas a la entrada, o extremo trasmisor, de la línea. Luego, por analogía directa con la Ec. (6-13), la corriente I_x a la distancia x desde el extremo trasmisor estará relacionada con I_s por

$$\frac{I_s}{I_x} = e^{\gamma x} \quad (8-11)$$

y

$$\frac{E_s}{E_x} = e^{\gamma x} \quad (8-12)$$

Si se conoce γ , pueden derivarse la constante de atenuación y la constante de longitud de onda extrayendo la raíz cuadrada compleja de ZY en la forma polar y reduciendo el resultado a la forma cartesiana. Según la Ec. (8-10), la constante de atenuación es la parte real, y la constante de longitud de onda, la parte imaginaria. Puede aplicarse la Ec. (6-44), pero el valor de n_λ quedará dado en la unidad de longitud utilizada para computar γ y se expresa en general como.

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \quad (8-13)$$

De modo similar, escribe la Ec. (6-40) en la forma

$$v_p = \lambda f = \frac{\omega}{\beta} \quad (8-14)$$

La unidad de α es el *neper por unidad de longitud*. A veces se emplea el término "radián hiperbólico por unidad de longitud". Si Z e Y están dados, respectivamente, en ohm y en siemens por kilómetro, α estará dada en neper por kilómetro. De modo similar obtéñese β en radianes por unidad de longitud, y, en su caso, en radianes por kilómetro.

En los apartados anteriores se han obtenido las ecuaciones de línea considerando la línea uniforme como un caso límite de la cascada de secciones T idénticas y simétricas. Un procedimiento de alternativa, explicado a continuación, parte de las ecuaciones diferenciales escritas para la tensión y la corriente de línea.

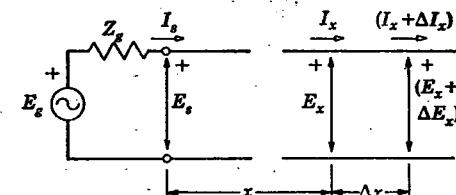


FIG. 8-4. Notación para establecer las ecuaciones diferenciales de corriente y tensión en la línea de transmisión.

Consideremos el elemento de línea de longitud Δx y situado a una distancia x del extremo trasmisor, Fig. 8-4. La tensión y la corriente de entrada, o de extremo trasmisor, sean respectivamente E_s e I_s . El valor medio de la corriente que circula por el elemento será $I_x + \Delta I_x/2$; luego, aplicando la regla de tensiones de Kirchhoff al elemento, se tiene

$$E_x - (E_x + \Delta E_x) = Z \Delta x \left(I_x + \frac{\Delta I_x}{2} \right) \quad (8-15)$$

Dividiendo por Δx y tomando el límite para $\Delta x \rightarrow 0$, la derivada de la tensión respecto de la distancia resulta ser

$$\frac{dE_x}{dx} = -Z I_x \quad (8-16)$$

El valor medio de la tensión a lo largo del elemento es $E_x + \Delta E_x/2$. Luego, aplicando la regla de las corrientes de Kirchhoff al elemento,

$$I_x - (I_x + \Delta I_x) = Y \Delta x \left(E_x + \frac{\Delta E_x}{2} \right)$$

y dividiendo por Δx y tomando el límite para $\Delta x \rightarrow 0$,

$$\frac{dI_x}{dx} = -Y E_x \quad (8-17)$$

Las Ecs. (8-16) y (8-17) muestran, como era de esperar, que la corriente y la tensión en un punto cualquiera de la línea están interrelacionadas. Es conveniente, sin embargo, eliminar I_x de la Ec. (8-16) y E_x de la Ec. (8-17) para que cada ecuación comprenda una sola variable independiente. Esto se consigue diferenciando la Ec. (8-16),

$$\frac{d^2E_x}{dx^2} = -Z \frac{dI_x}{dx}$$

Usando la Ec. (8-17),

$$\frac{d^2E_x}{dx^2} = ZYE_x \quad (8-18)$$

De manera similar

$$\frac{d^2I_x}{dx^2} = ZYI_x \quad (8-19)$$

Las dos últimas ecuaciones son ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes y sus soluciones son

$$E_x = A_1 e^{\sqrt{ZY}x} + A_2 e^{-\sqrt{ZY}x} \quad (8-20)$$

$$I_x = B_1 e^{\sqrt{ZY}x} + B_2 e^{-\sqrt{ZY}x} \quad (8-21)$$

donde las A son constantes que tienen como dimensión la de una tensión y las B , constantes que tienen como dimensión la de una corriente. Puede esperarse entonces que las A y las B están interrelacionadas. Esto puede verificarse introduciendo las Ecs. (8-20) y (8-21) en la Ec. (8-16),

$$\sqrt{ZY} A_1 e^{\sqrt{ZY}x} - \sqrt{ZY} A_2 e^{-\sqrt{ZY}x} = -Z(B_1 e^{\sqrt{ZY}x} + B_2 e^{-\sqrt{ZY}x})$$

Igualando los coeficientes de las potencias iguales de e ,

$$\sqrt{ZY} A_1 = -ZB_1, \quad B_1 = -\sqrt{\frac{Y}{Z}} A_1 \quad (8-22)$$

$$\sqrt{ZY} A_2 = ZB_2, \quad B_2 = \sqrt{\frac{Y}{Z}} A_2 \quad (8-23)$$

Por lo tanto, la Ec. (8-21) puede escribirse en la forma

$$I_x = -\sqrt{\frac{Y}{Z}} A_1 e^{\sqrt{ZY}x} + \sqrt{\frac{Y}{Z}} A_2 e^{-\sqrt{ZY}x} \quad (8-21a)$$

Las Ecs. (8-20) y (8-21a) son muy generales por cuanto no se ha estipulado nada en cuanto a la terminación de la línea. Puede así considerarse cualquier terminación imponiendo las condiciones límites adecuadas al calcular A_1 y A_2 . En este capítulo estamos considerando una *línea infinita*; luego, para $x = \infty$, $E_x = 0$ y, según la Ec. (8-20), $A_1 = 0$. Además, para $x = 0$, $E_x = E_s$, y, por la Ec. (8-20), $A_2 = E_s$, por lo que

$$E_x = E_s e^{-\sqrt{ZY}x} \quad (8-24)$$

y, por la Ec. (8-21a)

$$I_x = \sqrt{\frac{Y}{Z}} E_s e^{-\sqrt{ZY}x}$$

Pero, para $x = 0$, $I_x = I_s$; luego

$$I_s = \sqrt{\frac{Y}{Z}} E_s \quad (8-25a)$$

y

$$I_x = I_s e^{-\sqrt{ZY}x} \quad (8-25)$$

Se observa que la impedancia de entrada de la línea infinita, esto es, Z_o , es E_s/I_s ; luego, por la Ec. (8-25a),

$$Z_o = \sqrt{\frac{Z}{Y}}$$

Por otra parte, si se pone γ en lugar de \sqrt{ZY} , estos resultados coinciden con los anteriormente obtenidos.

Como ejercicio, el estudiante puede hallar la solución para el caso de una línea de longitud finita terminada en la impedancia Z_o . El resultado, por supuesto, debe ser el mismo que en el caso de la línea infinita (ver Prob. 8-5).

Los resultados anteriores se aplicarán para resolver un ejemplo ilustrativo.

Calcularemos las constantes de atenuación y de longitud de onda para una línea de alambres paralelos al aire. Una de las líneas de uso corriente consiste en alambres de cobre de 2,5 mm de diámetro separados por una distancia de 30 cm. Las constantes distribuidas de esta línea son

$$R = 10,4 \text{ ohm/milla.}$$

$$L = 3,67 \text{ mH/milla.}$$

$$C = 0,00835 \mu\text{F/milla.}$$

$$G = 0,8 \mu\text{siemens/milla.}$$

El cálculo se hará para una frecuencia de 796 c/s, esto es, $\omega = 5.000$. Este valor de frecuencia representa aproximadamente el promedio de la voz humana y se usa por esta razón en los cálculos de atenuación. El valor de G dado es sólo una aproximación, por cuanto el valor real, especialmente en el caso de una línea al aire, depende fuertemente de las condiciones atmosféricas.

$$Z = R + j\omega L = 10,4 + j5.000 \times 3,67 \times 10^{-3}$$

$$= 10,4 + j18,35 = 21,08/60,45^\circ$$

$$Y = G + j\omega C = (0,8 + j5.000 \times 0,00835) \times 10^{-6}$$

$$= (0,8 + j41,75) \times 10^{-6} = 41,76/88,916^\circ \times 10^{-6}$$

$$Z_o = \sqrt{\frac{Z}{Y}} = \sqrt{\frac{21,08 \times 10^6}{41,76}} = \sqrt{\frac{21,08 \times 10^6}{41,76}} \cdot \frac{60,45^\circ - 88,916^\circ}{2}$$

$$Z_o = 711/-14,233^\circ = 689 - j175$$

$$\gamma = \sqrt{ZY} = \sqrt{21,08 \times 10^6 \times 41,76} \times 10^{-6} / 88,916^\circ$$

$$= \sqrt{21,08 \times 41,76 \times 10^{-6}} / \frac{60,45^\circ + 88,916^\circ}{2}$$

$$= 0,0297/74,683^\circ = 0,00785 + j0,0287$$

La constante de atenuación es la parte real de γ , mientras que la constante de onda es la componente imaginaria:

$$\alpha = 0,00785 \text{ neper/milla.}$$

$$\beta = 0,0287 \text{ radián/milla.}$$

La longitud de onda es, por lo tanto,

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = 219 \text{ milla}$$

La velocidad de fase es

$$v_p = f\lambda = \frac{\omega}{\beta} = \frac{5.000}{0,0287} = 174.300 \text{ milla/seg}$$

Como ejemplo para el uso de estas constantes, consideremos una línea de alambres paralelos, aérea, de 300 millas de longitud. Supongamos que en su extremo trasmisor se halla conectado un generador de 600 ohm de impedancia interna (resistiva pura) y cuya tensión generada es de 2 volt. La línea está terminada en su impedancia característica en el extremo receptor.

¿Cuáles serán la tensión, la corriente y la potencia en el extremo receptor? Puesto que la línea está terminada en su impedancia característica, la impedancia de entrada en el extremo trasmisor es también igual a la impedancia característica. La corriente de entrada será, entonces

$$I_1 = \frac{2}{600 + 689 - j175} = \frac{2}{1.289 - j175} = \frac{2}{1.300/-7,734^\circ} = 0,001539/7,734^\circ$$

Por la Ec. (8-11)

$$I_2 = I_1 e^{-\gamma l} = I_1 e^{-\alpha l} e^{-j\beta l}$$

$$\text{Ahora } e^{-\alpha l} = e^{-300 \times 0,00785} = e^{-2,355} = \frac{1}{e^{2,355}} = \frac{1}{10,55} = 0,0948$$

$$\text{Pero } e^{-j\beta l} = e^{-j(300 \times 0,0287)} = e^{-j8,61}$$

produce simplemente una rotación del valor numérico en un ángulo de $-8,61$ radián, sin alterar la magnitud; pues

$$\begin{aligned} \text{Por lo tanto } & e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta \\ & e^{-\gamma l} = 0,0948/-8,61 \text{ radián} \\ & = 0,0948/-493^\circ \end{aligned}$$

La corriente en el extremo receptor será entonces

$$\begin{aligned} I_2 &= 0,001539/7,734^\circ \times 0,0948/-493^\circ \\ &= 0,0001458/-485,267^\circ \end{aligned}$$

Esta corriente está atrasada en más de un ciclo con respecto a la corriente de entrada. La tensión a través de la impedancia terminal será

$$\begin{aligned} E_2 &= I_2 Z_o = 0,0001458/-485,267^\circ \times 711/-14,233^\circ \\ &= 0,1036/-499,5^\circ \end{aligned}$$

La potencia entregada a la carga viene a ser

$$\begin{aligned} P &= |E_2| |I_2| \cos \Theta = 0,1036 \times 0,0001458 \times \cos 14,233^\circ \\ &= 14,6 \times 10^{-6} \text{ watt} \end{aligned}$$

la que también puede calcular del modo siguiente:

$$\begin{aligned} P &= |I_2|^2 R_E = (0,0001458)^2 \times 689 \\ &= 14,6 \times 10^{-6} \text{ watt} \end{aligned}$$

8-8. Sección T nominal. En la práctica se presenta muchas veces la necesidad de ensayar en el laboratorio diversos tipos de aparatos de trasmisión en condiciones que han de simular aproximadamente las de campaña. En estos ensayos se perseguiría, por ejemplo, investigar la respuesta de un aparato que normalmente se conecta entre dos secciones de cable telefónico, de muchos kilómetros de longitud cada una. En estos casos es naturalmente inconveniente la longitud necesaria de cable físico y es deseable disponer en cambio de una red de constantes concentradas que pueda simular el efecto del cable real. Las redes de constantes concentradas que simulan las líneas de transmisión reales se llaman en general "líneas artificiales".

Para el ingeniero que se ocupa de los problemas de la trasmisión de la energía eléctrica en las líneas largas, el diseño de una línea artificial es bastante simple, por cuanto sólo entra en juego una única frecuencia y basta con que la equivalencia se satisfaga para ésta. Puede entonces diseñarse una sencilla sección T que sea equivalente a la longitud l de la línea de trasmisión del caso a la frecuencia normal de trabajo. Por ejemplo, conociendo los parámetros de la línea R , L , C , y G , pueden calcularse Z_o y γ para 50 c/s. Luego, por las Ecs. (6-28) y (6-31), obtiénense las componentes de la sección T:

$$Z_2 = \frac{Z_o}{\operatorname{senh} \gamma l} \quad (6-28)$$

$$Z_1 = Z_o \operatorname{tgh} \frac{\gamma l}{2} \quad (6-31)$$

Para el ingeniero de comunicaciones, que se ocupa de la trasmisión de señales que cubren una amplia banda de frecuencias, la equivalencia a una sola frecuencia entre la línea artificial y la verdadera no es, en cambio, suficiente. El problema está en que tanto Z_o como γ son dependientes de la frecuencia en las dos últimas ecuaciones; por lo tanto, parecería que no podría obtenerse una equivalencia exacta sobre una determinada banda de frecuencias con elementos de impedancia concentrados simples en las funciones de Z_1 y Z_2 . No obstante, la aplicación de una técnica de diseño adecuada permite lograr una equivalencia razonablemente *aproximada* dentro de la banda de interés.

Según la teoría de las funciones hiperbólicas reales se sabe que si θ es pequeño, por ejemplo, 0,1 radián o menos,

$$\operatorname{senh} \theta \approx \operatorname{tgh} \theta \approx \theta$$

Si θ es complejo, la aproximación sigue siendo válida. Esto puede ilustrarse considerando las partes real e imaginaria de θ independientemente. Sea entonces $\theta = \gamma l = \alpha l + j\beta l$. Luego

$$\begin{aligned} \text{Si } \alpha l \text{ es pequeña, } \cosh \alpha l &\approx 1 & \operatorname{senh} \alpha l &\approx \alpha l \\ \text{Si } \beta l \text{ es pequeña, } \cos \beta l &\approx 1 & \operatorname{sen} \beta l &\approx \beta l \end{aligned} \quad (8-26)$$

Luego, si αl y βl son ambas pequeñas,

$$\begin{aligned} \operatorname{senh} \gamma l &= \operatorname{senh} (\alpha l + j\beta l) \\ &= \operatorname{senh} \alpha l \cos \beta l + j \cosh \alpha l \operatorname{sen} \beta l \\ &\approx \alpha l + j\beta l = \gamma l \end{aligned} \quad (8-27)$$

De modo similar

$$\begin{aligned} \cosh \gamma l &= \cosh (\alpha l + j\beta l) \\ &= \cosh \alpha l \cos \beta l + j \operatorname{senh} \alpha l \operatorname{sen} \beta l \\ &\approx 1 + j(\alpha l)(\beta l) \approx 1 \end{aligned}$$

de modo que

$$\operatorname{tgh} \frac{\gamma l}{2} = \frac{\operatorname{senh} (\gamma l/2)}{\cosh (\gamma l/2)} \approx \frac{\gamma l}{2} \quad (8-28)$$

Por lo tanto, si αl y βl son ambas pequeñas, las componentes de la sección T equivalente son

$$Z_2 \approx \frac{Z_o}{\gamma l} = \sqrt{\frac{Z}{Y}} \frac{1}{\sqrt{ZY} l} = \frac{1}{Yl} \quad (8-29)$$

$$\frac{Z_1}{2} \approx Z_o \frac{\gamma l}{2} = \sqrt{\frac{Z}{Y}} \sqrt{ZY} \frac{l}{2} = \frac{Zl}{2} \quad (8-30)$$

Luego, si la longitud de la línea se hace lo suficientemente *pequeña* como para que las aproximaciones de las Ecs. (8-27) y (8-28) se conserven dentro de la banda de frecuencias deseada, obtiéñese la sección T equivalente usando como rama en serie Z_1 la impedancia en serie de lazo y como rama en paralelo Z_2 , la admitancia en paralelo de la sección de línea. La sección T diseñada de este modo según las Ecs. (8-29) y (8-30) se llama sección "T-nominal". Una línea de longitud cualquiera puede entonces ser reemplazada por un número conveniente de secciones T-nominales.

Como ejemplo para el diseño de una línea artificial, consideremos la sección T-nominal correspondiente a la línea de alambres paralelos del último ejemplo ilustrativo. Se quiere que la equivalencia sea válida entre 30 y 5.500 c/s.

Se verá en el próximo apartado que tanto α como β aumentan con la frecuencia en las líneas de transmisión; por lo tanto, el diseño se hará para la mayor frecuencia de interés, esto es, 5.5 Kc/s, para la cual α y β tienen los valores máximos. Esto permitirá la estimación de l de modo de satisfacer la aproximación de que αl y βl sean pequeñas. Pero

$$\gamma = \sqrt{ZY} = (R + j\omega L)(G + j\omega C)$$

$$\begin{aligned} \text{Para } f &= 5.5 \text{ kc, } \omega = 2\pi(5.5 \times 10^3) = 3,455 \times 10^4 \text{ radian/s, y} \\ \gamma &= \sqrt{[10.4 + j(3,455 \times 10^4)(3,67 \times 10^{-3})][8 \times 10^{-7} + j(3,455 \times 10^4)(8,35 \times 10^{-9})]} \\ &= \sqrt{(10.4 + j126.9)(0.08 + j28.82)} \times 10^{-5} \\ &= \sqrt{(127/83,05^2)(2,882 \times 10^{-4}/90^\circ)} \\ &= 0,1915/86,53^\circ \end{aligned}$$

$$\alpha + j\beta = 0,01149 + j0,191 \text{ por milla}$$

Luego, si βl tiene que ser pequeña, digamos, menor que 0,1, la longitud de la sección de línea requerida es

$$l < \frac{0.1}{0.191} = 0,524 \text{ por milla}$$

Por razón de conveniencia, adoptaremos l igual a 0,5 milla. No hay inconveniente en ello, por cuanto αl y βl resultarán menores que 0,1. Entonces, las componentes de la sección T-nominal serán

$$\frac{Z_1}{2} = \frac{Zl}{2} = \frac{(R + j\omega L) \times 0,5}{2} = \frac{R}{4} + j \frac{\omega L}{4}$$

$$Z_2 = \frac{1}{Yl} = \frac{1}{(G + j\omega C) \times 0,5} = \frac{1}{G/2 + j\omega C/2}$$

La sección T-nominal está ilustrada en la Fig. 8-5. Luego

$$\frac{R_1}{2} = \frac{R}{4} = \frac{10.4}{4} = 2,6 \text{ ohm}$$

$$\frac{L_1}{2} = \frac{L}{4} = \frac{3,67}{4} = 0,9175 \text{ mH}$$

$$\frac{C_2}{2} = \frac{C}{2} = \frac{0,00835}{2} = 0,004175 \mu\text{F}$$

$$\frac{G_2}{2} = \frac{G}{2} = \frac{0,8}{2} = 0,4 \mu\text{siemens}$$

$$R_2 = \frac{1}{G_2} = 2,5 \text{ megohm}$$

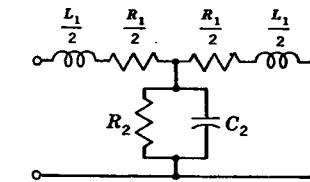


FIG. 8-5. La sección T-nominal correspondiente a una breve sección de línea de transmisión.

Cada una de estas secciones T es equivalente, con muy buena aproximación, a $\frac{1}{2}$ milla de línea, hasta la frecuencia de 5,5 Kc/s. Con diez de estas secciones se simularía una sección de línea de 5 millas de longitud. La restricción adoptada, $\alpha l, \beta l < 0,1$, es más conservativa que la comúnmente necesaria. Considérase una línea artificial de uso común en el Prob. 8-7.

8-9. Distorsión de línea. De acuerdo con lo visto en el Cap. VI, el estudiante sabe que para la trasmisión de una onda complicada *sin distorsión*, la forma de onda en el extremo receptor debe ser la misma que en el extremo trasmisor. Esta condición requiere para satisfacerse que α y v_g sean en la línea independientes de la frecuencia. Como se ha demostrado en el Cap. VI, el requisito impuesto a v_g exige a su vez que β varíe linealmente con la frecuencia.

Es de interés, entonces, establecer si la línea de trasmisión satisface los requisitos para la trasmisión sin distorsión. Para ello puéndense despejar formalmente α y β de la Ec. (8-10). Elevando al cuadrado

los dos miembros de la Ec. (8-10), se obtiene

$$\begin{aligned} (\alpha + j\beta)^2 &= (R + j\omega L)(G + j\omega C) \\ (\alpha^2 - \beta^2) + j2\alpha\beta &= (RG - \omega^2 LC) + j\omega(LG + RC) \end{aligned} \quad (8-31)$$

Igualando las partes reales,

$$\alpha^2 - \beta^2 = RG - \omega^2 LC \quad (8-32)$$

Igualando las partes imaginarias,

$$2\alpha\beta = \omega(LG + RC) \quad (8-33)$$

Elevando al cuadrado la Ec. (8-33) e introduciendo el valor de α^2 así obtenido en la Ec. (8-32), obtéñese la siguiente ecuación biquadrática en β ,

$$\beta^4 + (RG - \omega^2 LC)\beta^2 - \frac{\omega^2}{4}(LG + RC)^2 = 0$$

de donde

$$\beta = \sqrt{\frac{\omega^2 LC - RG + \sqrt{(RG - \omega^2 LC)^2 + \omega^2(LG + RC)^2}}{2}} \quad (8-34)$$

Llevando la Ec. (8-34) a la (8-32) y despejando α ,

$$\alpha = \sqrt{\frac{RG - \omega^2 LC + \sqrt{(RG - \omega^2 LC)^2 + \omega^2(LG + RC)^2}}{2}} \quad (8-35)$$

La inspección de estas dos últimas ecuaciones demuestra que, en general, α varía con la frecuencia e introduce, por lo tanto, distorsión de frecuencia. β no varía linealmente con la frecuencia e introduce, así, distorsión de retardo. En el apartado siguiente se estudian las relaciones que deben satisfacer los parámetros de la línea para la transmisión sin distorsión.

8-10. Línea sin distorsión. Es deseable conocer las condiciones que deben llenar los parámetros de la línea para trasmisión sin distorsión, pues este conocimiento será útil para el diseño de nuevas líneas o la modificación de las existentes teniendo a la vista la mínima distorsión. Las condiciones necesarias pueden determinarse considerando o la distorsión de frecuencia o la distorsión de retardo. Digamos, por ejemplo, que se quiere hacer α independiente de la frecuencia para eliminar la distorsión de frecuencia. La cuidadosa inspección de la Ec. (8-35) demuestra que la condición impuesta será satisfecha si $R = G = 0$, caso en que $\alpha = 0$, o, descartando esta posibilidad, si el término en ω^2 que resulta de la extracción de la raíz cuadrada interior es igual al término $\omega^2 LC$ del radicando exterior, puesto que entonces sólo quedarían términos independientes de la frecuencia. Esto puede plantearse matemáticamente escribiendo

$$\sqrt{(RG - \omega^2 LC)^2 + \omega^2(LG + RC)^2} = K + \omega^2 LC \quad (8-36)$$

donde K es una constante por evaluar. Elevando al cuadrado

$$\begin{aligned} (RG)^2 - 2RGLC\omega^2 + (LC)^2\omega^4 + \omega^2[(LG)^2 + 2RGLC + (RC)^2] \\ = K^2 + 2KLC\omega^2 + (LC)^2\omega^4 \\ \text{o} \quad (RG)^2 + \omega^2[(LG)^2 + (RC)^2] = K^2 + 2KLC\omega^2 \end{aligned}$$

Para que esta identidad sea válida, deben ser iguales los coeficientes de las potencias iguales de ω en los dos miembros; luego

$$\begin{aligned} \omega^0: \quad K &= RG \\ \omega^2: \quad (LG)^2 + (RC)^2 &= 2KLC \end{aligned} \quad (8-37)$$

Combinando estas dos ecuaciones

$$\begin{aligned} (LG)^2 - 2RGLC + (RC)^2 &= 0 \\ \text{de donde} \quad LG - RC &= 0 \quad \text{o} \quad \frac{L}{C} = \frac{R}{G} \end{aligned} \quad (8-38)$$

La introducción de la Ec. (8-38) en la Ec. (8-35) muestra que α reducirse a

$$\alpha = \sqrt{RG} = \sqrt{\frac{C}{L}} R \quad (8-39)$$

Por otra parte, según la Ec. (8-34), β deviene

$$\beta = \omega \sqrt{LC} = \omega L \sqrt{\frac{G}{R}} \quad (8-40)$$

$$\text{y} \quad Z_o = \sqrt{\frac{Z}{Y}} = \sqrt{\frac{R}{G}} = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (8-41)$$

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (8-42)$$

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (8-43)$$

Adviétese que cuando se satisface la condición especificada por la Ec. (8-38), la atenuación, las velocidades de fase y de grupo, y la impedancia característica, son todas independientes de la frecuencia, y la última, además, una resistencia pura. Cuando esta línea está terminada en su impedancia característica y alimentada por un generador cuya impedancia interna es una resistencia pura, no hay en la línea distorsión de frecuencia ni de retardo.

Esta derivación presupone que las llamadas "constantes de línea" R , L , C y G , son realmente constantes. En la realidad, debido principalmente al efecto pelicular, ellas varían con la frecuencia, y de esta manera, aun las líneas que satisfacen la ecuación (8-38) para alguna frecuencia en particular, ofrecerán cierta distorsión.

8-11. Línea de baja distorsión. En la práctica no es posible satisfacer la Ec. (8-38) en las líneas físicas. En un cable bien mantenido, G es extremadamente pequeño y se necesitaría entonces un elevado valor de L . No es conveniente aumentar G , puesto que entonces, por

la Ec. (8-39), aumentaría mucho la atenuación.* Afortunadamente, no es necesario elevar la inductancia al valor exigido por la Ec. (8-38) para reducir la distorsión a un mínimo razonable.

Consideremos el caso en que ωL es mucho mayor que R y ωC mucho mayor que G . Ahora, $Z = R + j\omega L$, $Y = G + j\omega C$, y Z e Y tendrían ángulos próximos a $\pi/2$ en este caso. El valor absoluto de Z es aproximadamente igual a ωL , y el de Y , aproximadamente igual a ωC . Para un ángulo θ pequeño, se cumplen aproximadamente las siguientes relaciones: $\theta = \operatorname{sen} \theta = \operatorname{tg} \theta$, mientras que si θ es casi igual a $\pi/2$, $\cos \theta = \operatorname{cotg} \theta = \pi/2 - \theta$, o $\theta = \pi/2 - \operatorname{cotg} \theta$. Por lo tanto, en coordenadas polares, dado que los ángulos de Z y de Y serán casi iguales a $\pi/2$ para las condiciones especificadas,

$$Z = \omega L \sqrt{\frac{\pi}{2}} - \frac{R}{\omega L} \quad (8-44)$$

$$Y = \omega C \sqrt{\frac{\pi}{2}} - \frac{G}{\omega C} \quad (8-45)$$

$$\gamma = \sqrt{ZY} = \omega \sqrt{LC} \sqrt{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} \left(\frac{R}{\omega L} + \frac{G}{\omega C} \right) \quad (8-46)$$

El ángulo de \sqrt{ZY} es la mitad de la suma de los ángulos de Z e Y . Dado que este ángulo es casi $\pi/2$, el seno puede tomarse como igual a la unidad y el coseno como igual a $\pi/2 - \theta$, o

$$\cos \theta = \frac{1}{2} \left(\frac{R}{\omega L} + \frac{G}{\omega C} \right)$$

La Ec. (8-46) puede entonces reducirse a la forma rectangular

$$\alpha + j\beta = |\gamma| \cos \theta + j|\gamma| \operatorname{sen} \theta$$

Por la Ec. (8-46), $|\gamma| = \omega \sqrt{LC}$. Por lo tanto

$$\alpha + j\beta = \frac{1}{2} \left(\frac{R}{\omega L} + \frac{G}{\omega C} \right) \omega \sqrt{LC} + j\omega \sqrt{LC}$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(R \sqrt{\frac{C}{L}} + G \sqrt{\frac{L}{C}} \right) \quad (8-47)$$

$$\beta = \omega \sqrt{LC} \quad (8-48)$$

$$v_p = v_g = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (8-49)$$

Por las Ecs. (8-44) y (8-45)

$$Z_o = \sqrt{\frac{Z}{Y}} = \sqrt{\frac{L}{C}} \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{G}{\omega C} - \frac{R}{\omega L} \right)} \quad \text{radián} \quad (8-50)$$

* Hay que ser cuidadoso al interpretar el significado de esta afirmación, pues la segunda parte de la Ec. (8-39) parecería expresar que la atenuación es independiente de G . Lo que en realidad expresa la Ec. (8-39) es que la atenuación de la línea llevada a la condición de distorsión nula es menor cuando se satisface esta condición por el aumento de L (G pequeña, L grande), que cuando se la satisface aumentando G (G grande, L pequeña). (N. del T.)

Se verá entonces que, también para este caso, y dentro de las aproximaciones adoptadas, la atenuación y la velocidad son independientes de la frecuencia si R , L , C y G , no dependen de la frecuencia. La magnitud de la impedancia característica es también independiente de la frecuencia y su ángulo, muy pequeño; es decir, Z_o es aproximadamente una resistencia pura.

Combinando las Ecs. (8-50) y (8-47), esta última puede volverse a escribir en la forma

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{R}{|Z_o|} + G|Z_o| \right) \quad (8-51)$$

Si, como ocurre a menudo, es despreciable G , la Ec. (8-51) deviene

$$\alpha = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{R}{2|Z_o|} \quad (8-51a)$$

8-12. Cables. Los cables telefónicos encuentran amplia aplicación en el campo de las comunicaciones y es de interés investigar sus propiedades como un caso particular. La inspección de los datos de la tabla 8-1 demuestra que en los cables comunes la inductancia y la conductancia son muy pequeñas, de modo que, dentro de la gama de frecuencias utilizadas en la telefonía, $\omega L \ll R$ y $G \ll \omega C$. Luego, por lo menos dentro de las aproximaciones del cálculo con regla, puede considerarse que

$$Z \approx R \quad Y \approx j\omega C \quad (8-52)$$

$$\begin{aligned} \text{Luego } \gamma &= \sqrt{ZY} = \sqrt{j\omega CR} = \sqrt{\omega CR/90^\circ} \\ &= \sqrt{\omega CR} / 45^\circ = \sqrt{\omega CR} (\cos 45^\circ + j \operatorname{sen} 45^\circ) \end{aligned}$$

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{\frac{\omega CR}{2}} + j \sqrt{\frac{\omega CR}{2}} \quad (8-53)$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{\omega CR}{2}} \quad (8-54)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{\omega CR}{2}} \quad (8-55)$$

$$v_p = \frac{v_g}{2} = \frac{\omega}{\beta} = \sqrt{\frac{2\omega}{CR}} \quad (8-56)$$

$$Z_o = \sqrt{\frac{Z}{Y}} = \sqrt{\frac{R}{j\omega C}} = \sqrt{\frac{R}{\omega C}} / -45^\circ \quad (8-57)$$

Combinando las Ecs. (8-53) y (8-54), es posible escribir también,

$$\alpha = 0,707 \frac{R}{|Z_o|} \quad (8-57)$$

Adviéntese que las frecuencias altas se propagan más rápidamente y son más atenuadas que las bajas.

8-13. Carga. Es evidente, a la luz de las ecuaciones precedentes, que el cable introduce distorsión de frecuencia y de retardo, lo que puede comprobarse tomando nota de las magnitudes de los parámetros típicos

para el cable. Por ejemplo, según la tabla 8-1, para el cable de calibre 16 A.W.G.,

$$\frac{L}{C} = \frac{10^{-8}}{0,062 \times 10^{-6}} = 16,12 \times 10^3 \quad \frac{R}{G} = \frac{42,1}{1,5 \times 10^{-6}} = 28,1 \times 10^6$$

Por lo tanto

$$\frac{L}{C} \ll \frac{R}{G}$$

Si se quiere, entonces, hacer que el cable se aproxime al ideal libre de distorsión, puede procederse de cuatro maneras:

1. Reducir R . Para obtener resultados apreciables, habría que usar conductores de diámetro mucho mayor, lo que produce a su vez el aumento del grosor del cable y del coste. Al reducir R se reduce también $|Z_0|$.

2. Disminuir C . Esto requiere el aumento de la distancia entre los conductores, con el consiguiente aumento, también, del grosor del cable y de su coste. Al disminuir C aumenta $|Z_0|$ y se reduce α .

3. Aumentar G . Esto podría hacerse rebajando la calidad de la aislación de los conductores, una solución muy inconveniente porque evidentemente aumenta las pérdidas. Al aumentar G disminuye $|Z_0|$.

4. Aumentar L . Esto tiene como efectos primarios los de elevar $|Z_0|$ y de reducir α , y ofrece la mejor aproximación al ideal en la mejora de las cualidades del cable.

El aumento de la inductancia de una línea con vistas a la reducción de la atenuación y la distorsión se conoce con el nombre de "carga" y fue sugerido por primera vez por Oliver Heaviside. Pupin desarrolló la teoría de las constantes concentradas que permitió llevar a la práctica la idea.

Puede demostrarse fácilmente desde el punto de vista físico por qué al elevar la impedancia característica de una línea mejora su rendimiento y disminuye, en correspondencia, la atenuación. Si la conductancia es despreciable, la pérdida en una sección cualquiera de línea es proporcional al cuadrado de la corriente. En los sistemas de distribución de la energía eléctrica, las líneas representan por lo general una fracción pequeña de la longitud de onda y la impedancia de entrada de la línea está entonces principalmente determinada por la impedancia de terminación a ella conectada. Para transmitir a alta tensión y baja corriente en las frecuencias comerciales sólo se necesita intercalar transformadores adecuados entre la línea y los equipos de terminación, en los dos extremos de aquélla.

En las líneas de comunicación las frecuencias son más altas y la atenuación y la longitud (en longitudes de onda) son muchos mayores. En estas condiciones, la *impedancia de entrada* está en gran parte determinada por las *constantes de la línea* más bien que por su terminación, especialmente cuando la atenuación total es alta. La relación de la tensión de entrada a la corriente de entrada es, por lo tanto, casi igual a la impedancia característica, y, dada una potencia, la corriente y la tensión quedan ambas determinadas. *Para transmitir una potencia dada con menor corriente, es necesario elevar la impedancia característica de la línea*, y esto puede hacerse aumentando la inductancia o disminuyendo la capacitancia.

Si las fugas son apreciables, las pérdidas en la resistencia de fuga es proporcional al cuadrado de la tensión, la que a su vez aumenta con la impedancia característica. Esto explica por qué aparece el término $G|Z_0|$ en la Ec. (8-51). Este término nunca es tan grande como el primero, $R|Z_0|$, en las líneas prácticas. Si se varía sólo Z_0 , sin alterar R ni G , la atenuación es mínima cuando las dos componentes de la Ec. (8-51) son iguales.

Como ejemplo para mostrar el efecto de cargar una línea, consideremos el caso en que se intercalan en una línea bobinas de carga cuya inductancia es de 246 mH y cuya resistencia es de 7,3 ohm, cada una, con el espaciado normal de 7,88 millas. Esto significa aumentar la inductancia L en 246/7,88 mH/milla, si se desprecia el efecto de la concentración de la inductancia agregada, como puede hacerse en las frecuencias bajas. Se supone que las otras constantes de la línea son las mismas que las del problema anterior. (Ap. 8-7.)

La impedancia por milla será entonces

$$Z = 10,4 + j18,35 + \frac{7,3 + j5.000 \times 0,246}{7,88} \\ = 11,32 + j174,35 = 174,35 / 86,30^\circ \\ Y = 41,76 \times 10^{-6} / 88,92^\circ$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{Z}{Y}} = 2.038 / -1,32^\circ$$

$$\gamma = \sqrt{ZY} = 0,0850 / 87,60^\circ = 0,0036 + j0,0850$$

$$\alpha = 0,0036 \text{ neper/milla}$$

$$\beta = 0,0850 \text{ radian/milla}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{0,0850} = 74 \text{ milla}$$

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = 58.800 \text{ milla/s}$$

Compárense estos valores con los resultados obtenidos mediante las aproximaciones de las Ecs. (8-47) a (8-50).

$$L = \left(3,67 + \frac{246}{7,88} \right) \text{ mH} = 0,03487 \text{ H/m}$$

Por la Ec. (8-50),

$$Z_0 = \sqrt{\frac{0,03487}{0,00835 \times 10^{-6}}} / \frac{1}{2} \left(\frac{0,8}{41,75} - \frac{11,32}{174,35} \right) \\ = 2.041 / -\frac{0,0458}{2} \text{ radian} = 2.041 / -1,32^\circ$$

Por las Ecs. (8-47) u (8-51),

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{11,32}{2.041} + 0,8 \times 2.041 \times 10^{-6} \right) \\ = \frac{1}{2} (0,00555 + 0,00163) \\ = 0,00359 \text{ neper/milla}$$

Es aparente que la atenuación debida a la resistencia en serie es todavía 555/163 veces la debida a la conductancia.

Por la Ec. (8-48),

$$\beta = \omega \sqrt{LC} = 5.000 \sqrt{0.03487 \times 0.00835} \times 10^{-6}$$

$$\beta = 0.0853 \text{ radián/milla}$$

Por la Ec. (8-49)

$$v_p = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 58.600 \text{ milla/s}$$

Es evidente que las aproximaciones son muy satisfactorias en el caso de las líneas cargadas.

La reducción de la constante de atenuación de 0,00785 a 0,0036 por adición de las bobinas de carga, significa que una línea cargada cuya longitud es $785/360 = 2,18$ veces mayor que la de la misma línea sin cargar, proporciona la misma atenuación que ésta. La mejora es mucho más pronunciada en los cables, en los cuales es despreciable la inductancia natural. En los cables comerciales, la carga produce una reducción de la atenuación de 3:1 hasta de 5:1.

Es posible aumentar uniformemente la inductancia a lo largo de una línea arrollando sobre los conductores una cinta de material magnético, por ejemplo permalloy. Este tratamiento es costoso y el aumento de inductancia que permite es relativamente pequeño. Este tipo de carga se utiliza, en la actualidad, sólo en los cables submarinos, en los que es difícil el agregado de cargas concentradas. En las líneas y cables terrestres se agrega la inductancia en forma concentrada, a intervalos regulares. En estas condiciones, el comportamiento difiere del que se obtiene con la carga continua, puesto que una serie de inductancias y capacitancias concentradas conforma un filtro pasabajos cuya atenuación aumenta rápidamente cuando la frecuencia excede cierto valor. Este efecto de la carga se discutirá con mayor detalle más adelante, en este mismo capítulo. A causa de esta acción de filtro pasabajos, los cables utilizados en los sistemas de portadora no pueden cargarse.

Desafortunadamente, no es posible aumentar la inductancia sin aumentar al mismo tiempo la resistencia, debido al alambre utilizado en la construcción de las bobinas. Es aparente, por lo tanto, que el aumento indefinido de la inductancia no continúa produciendo continuamente una mejora en la transmisión desde el punto de vista de la economía. Además, la resistencia efectiva de las bobinas de carga varía algo con la frecuencia, a causa de las pérdidas por histéresis y corrientes de Foucault, y el sistema, aparte del efecto de filtro mencionado, nunca llega a estar completamente libre de distorsión.

No obstante, las mejoras en cuanto a la reducción de la atenuación, la distorsión de frecuencia y la distorsión de retardo que se obtienen con la carga son muy pronunciadas en los cables, según se advierte comparando los resultados anteriores. En el cable sin cargar, a , v_p y Z_o varían en proporción con el cuadrado de la frecuencia, mientras que cuando ωL es grande en comparación con la resistencia, estas mismas cantidades son independientes de la frecuencia.

8-14. Fórmula de Campbell para las líneas cargadas.¹ En el caso de las líneas cargadas, el circuito es una combinación de constantes concentradas y distribuidas. Para hallar el efecto de semejante combinación, puede reducirse la porción de línea entre dos puntos de carga a una sección T , después de lo cual se insertará la impedancia de una mitad de la bobina de carga en cada rama en serie. Se calculan luego la impedancia característica y la constante de atenuación de esta nueva sección T . Para muchos fines, la sección de línea comprendida entre dos puntos de carga es tan corta que pueden aplicarse las Ecs. (8-29) y (8-30). En bien de la generalidad, no obstante, usaremos las ecuaciones generales para la sección T equivalente de una línea, esto es las ecuaciones (6-28) y (6-31):

$$Z_2 = \frac{Z_o}{\operatorname{senh} \gamma l}$$

$$\frac{Z_1}{2} = Z_o \frac{\cosh \gamma l - 1}{\operatorname{senh} \gamma l}$$

donde Z_o = impedancia característica de la línea.

γ = constante de propagación de la línea.

Luego, la última ecuación da la rama en serie de una sección de cable entre dos bobinas de carga adyacentes.

Llamemos Z_L la impedancia de la bobina de carga. La rama en serie equivalente, incluyendo la bobina de carga, será

$$\frac{Z'_1}{2} = \frac{Z_L}{2} + Z_o \frac{\cosh \gamma l - 1}{\operatorname{senh} \gamma l} \quad (8-58)$$

La rama en derivación de la sección es la rama equivalente de la línea solamente, dado que la bobina de carga no introduce admittance adicional alguna. El valor de esta rama está dado por la Ec. (6-28). Puede usarse ahora la Ec. (6-19) para determinar la constante de propagación del cable con la carga incluida. Sea γ' el valor de esta constante de propagación. Luego, por la Ec. (6-19), dado que la sección se toma como unidad de longitud, es decir, $l = 1$:

$$\cosh \gamma' = 1 + \frac{Z'_1}{2Z_o}$$

$$\cosh \gamma' = 1 + \frac{\frac{Z_L}{2} + Z_o \frac{\cosh \gamma l - 1}{\operatorname{senh} \gamma l}}{Z_o / (\operatorname{senh} \gamma l)}$$

$$\cosh \gamma' = 1 + \frac{Z_L}{2Z_o} \operatorname{senh} \gamma l + \cosh \gamma l - 1$$

$$\cosh \gamma' = \cosh \gamma l + \frac{Z_L}{2Z_o} \operatorname{senh} \gamma l \quad (8-59)$$

Esta ecuación fue desarrollada primeramente por G. A. Campbell y se la conoce con su nombre.

¹ Este apartado se incluye con el objeto, principalmente, de ilustrar el método de análisis que puede seguirse cuando el circuito contiene a la vez parámetros concentrados y parámetros distribuidos.

8-15. El cable cargado como filtro. Cuando se carga un cable insertando inductores a intervalos, la combinación de la capacitancia del cable con la inductancia concentrada adopta la configuración de un filtro LP "con pérdidas". La carga reduce la atenuación para las frecuencias menores que la de corte, según la Ec. (7-35), pero la aumenta rápidamente para las frecuencias mayores. Los valores utilizados en la Ec. (7-35) para el cálculo de un circuito cargado son L , la inductancia de la bobina de carga, y C , la capacitancia del cable entre *dos bobinas de carga adyacentes*. La frecuencia de corte puede elevarse disminuyendo la inductancia por bobina, o juntando más las bobinas, o ambas cosas. Al disminuir la inductancia de las bobinas aumenta, desde luego, la atenuación dentro de la banda de transmisión. Disminuyendo la distancia entre bobinas, aumenta el coste, pues éste depende más del número de bobinas que de la inductancia de cada una de éstas.

En el diseño de las bobinas de carga es importante evitar la saturación y la dispersión. Por esta razón, las bobinas se arrollan sobre núcleos toroidales. Estos núcleos se fabrican de permalloy pulverizado y aglomerado mediante un material aislante, de modo que la gran cantidad de pequeños entrehierros resultantes reduce la posibilidad de saturación. De haber saturación, se produciría distorsión alineal y se introducirían nuevas frecuencias a causa de la alinealidad de las constantes del circuito.

La Fig. 8-6 establece una comparación entre el cable cargado y el cable sin cargar desde el punto de vista de la atenuación.

La utilidad de la carga no es tanta en las líneas aéreas de alambres paralelos, las que tienen una inductancia propia mucho mayor que la de los cables y, así, menor distorsión. Por esta razón se ha abandonado la práctica de cargar las líneas abiertas.

La tabla 8-3 muestra los valores de atenuación, impedancia característica, velocidad de fase, y frecuencia de corte de varios tipos de carga, en la hipótesis de que la inductancia de las bobinas de carga está *uniformemente distribuida*. Los valores de a , Z_0 , v_p y f_c calculados con la fórmula de Campbell son diferentes de los indicados en la tabla, pero esta última demuestra cualitativamente el efecto de la inductancia de carga y de la distancia entre las bobinas de carga. La tabla da valores para circuitos con fantasma y para circuitos sin fantasma (ver Cap. V).

El tipo de carga está especificado en la tabla 8-3 en términos de la nomenclatura del Bell System. La primera letra da la distancia entre bobinas adyacentes, a saber, H indica 6.000 pies (o 1.830 m), y B , 3.000 pies (o 915 m). Los dígitos expresan la inductancia de las bobinas en milihenry. La última letra designa el tipo de circuito: S , físico con fantasma; P , fantasma; N , físico sin fantasma. Así, H-21-S indica que se usan bobinas de 21 mH a distancias de 6.000 pies en un circuito lateral (con fantasma). Anteriormente se usaban los términos "carga pesada" y "carga mediana", pero el espaciado de carga mediana, de 2,6

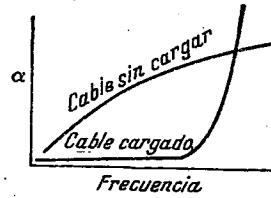


FIG. 8-6. Atenuación en los cables.

TABLA 8-3. CARACTERÍSTICAS DE LOS CABLES CARGADOS A 1.000 C/S, SUPONIENDO LA CARGA UNIFORMEMENTE REPARTIDA *

Calibre	Tipo	Tipo de carga	Constantes de la bobina de carga	Constantes de la línea por milla				a , neper/milla	Z_0 , Ohm	v_p , millas/s	Frecuencia de corte, Kc/s			
				Distancia entre bobinas, milla	R , ohm	L , mH	C , μF							
19 A.W.G.	Lateral	Ninguno	...	35,8	1	0,062	1,5	0,1249	470,1	-42,80	46,930	6,700		
19 A.W.G.	Lateral	H-31-S	2,7	31	88,2	28	0,062	1,5	0,0643	710,0	-13,20	20,555		
19 A.W.G.	Lateral	H-88-S	7,3	88	92,2	78	0,062	1,5	0,0418	1,131	-5,22	14,319	3,987	
19 A.W.G.	Lateral	B-88-S	0,568	7,3	88	98,7	156	0,062	1,5	0,0322	1,590	-2,76	17,882	5,655
16 A.W.G.	Lateral	Ninguno	...	42,1	1	0,062	1,5	0,0842	330,7	-40,65	64,506			
16 A.W.G.	Lateral	H-31-S	2,7	31	44,5	28	0,062	1,5	0,0334	682,5	-6,99	23,818	6,700	
16 A.W.G.	Lateral	H-88-S	7,3	88	48,5	78	0,062	1,5	0,0224	1,124	-2,71	14,365	3,987	
16 A.W.G.	Lateral	B-88-S	0,568	7,3	88	64,9	156	0,062	1,5	0,0185	1,557,4	-1,49	10,165	5,655
19 A.W.G.	Fantasma	Ninguno	...	42,9	0,7	0,100	2,4	0,1106	262,1	-41,97	51,525			
19 A.W.G.	Fantasma	H-18-P	1,4	18	44,1	17	0,100	2,4	0,0529	428,8	-11,11	23,781	6,959	
19 A.W.G.	Fantasma	H-63-P	1,135	6,1	63	48,3	56	0,100	2,4	0,0331	751,8	-3,80	13,334	3,738
19 A.W.G.	Fantasma	B-50-P	0,568	3,7	50	49,4	89	0,100	2,4	0,0273	945,2	-2,41	10,590	5,936
16 A.W.G.	Fantasma	Ninguno	...	21	21	0,7	0,100	2,4	0,046	184,8	-33,98	70,604		
16 A.W.G.	Fantasma	H-18-P	1,135	1,4	18	22,2	17	0,100	2,4	0,0273	416,7	-5,76	24,129	6,959
16 A.W.G.	Fantasma	H-63-P	1,135	6,1	63	26,4	56	0,100	2,4	0,0185	749,4	-2,04	13,354	3,738
16 A.W.G.	Fantasma	B-50-P	0,568	3,7	50	27,5	89	0,100	2,4	0,0157	943,9	-1,30	10,597	5,936
19 A.W.G.	Físico	B-22	0,568	1,25	22	38,1	40	0,062	1,5	0,0546	826,8	-9,55	19,790	11,276
16 A.W.G.	Físico	B-22	0,568	1,25	22	44,3	40	0,062	1,5	0,0281	800,4	-4,89	20,010	11,276

* De Amer. Tel and Tel Co.

Km, ha sido abandonado en la actualidad a causa de la baja frecuencia de corte que produce.

Se llama circuito lateral al par de conductores utilizado como un lado de un circuito fantasma. Circuito físico es, en cambio, un par no asociado con un circuito fantasma.

8-16. Línea cargada en paralelo. Un caso de considerable interés teórico a causa de su analogía con las guías de onda es el de la línea con inductancia distribuida en paralelo. En particular este caso es de interés por el efecto de la inductancia sobre la velocidad de grupo y de fase. No es posible realizar prácticamente semejante línea pero se la puede aproximar por medio de una carga inductiva concentrada en paralelo, con las bobinas suficientemente próximas. Sea L_1 la inductancia en serie por unidad de longitud y L_2 la inductancia en paralelo por unidad de longitud. El circuito equivalente para una porción Δx de línea es el de la Fig. 8-7.

FIG. 8-7. Sección T equivalente de una porción Δx de línea con carga inductiva en paralelo.

Consideremos el caso en que $R \ll \omega L_1$ y $G = 0$:

$$\begin{aligned} Z &= R + j\omega L_1 = \omega L_1 \left/ \frac{\pi}{2} - \frac{R}{\omega L_1} \right. \\ Y &= j \left(\omega C - \frac{1}{\omega L_2} \right) = \omega C \left(1 - \frac{1}{\omega^2 L_2 C} \right) \left/ \frac{\pi}{2} \right. \\ \gamma &= \sqrt{ZY} = \omega \sqrt{L_1 C \left(1 - \frac{1}{\omega^2 L_2 C} \right)} \left/ \frac{\pi}{2} - \frac{R}{2\omega L_1} \right. \\ Z_o &= \sqrt{\frac{L_1}{C} \frac{\omega^2 L_2 C}{\omega^2 L_2 C - 1}} \left/ - \frac{R}{2\omega L_1} \right. \end{aligned} \quad (8-60)$$

Ahora, si $\omega < \sqrt{1/L_2 C}$, el valor bajo los radicales en las expresiones de γ y Z_o será negativo, es decir, la raíz devendrá imaginaria y γ tendrá entonces un ángulo pequeño y será en gran parte atenuación, mientras que Z_o tendrá un ángulo próximo a $\pi/2$ y poseerá una gran componente reactiva.

Para $\omega > \sqrt{1/L_2 C}$, los valores de los radicales serán reales, γ será en gran parte imaginaria (a pequeña y β grande), y Z_o será casi una resistencia pura. La línea se comporta entonces como un filtro pasaaltos. A diferencia con el caso de la carga en serie, esta acción de filtro no se debe al hecho de que la carga esté concentrada, sino que se presentaría también con la carga uniformemente distribuida.

Arriba de la frecuencia de corte ($\omega > \sqrt{1/L_2 C}$), y mediante derivaciones similares a las de las Ecs. (8-47) a (8-49),

$$\alpha = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L_1} \left(1 - \frac{1}{\omega^2 L_2 C} \right)} \quad (8-61)$$

Por lo tanto, la carga en paralelo, como la carga en serie, disminuye la atenuación en la banda pasante, pero restringe al mismo tiempo el ancho de ésta. Además,

$$\begin{aligned} \beta &= \omega \sqrt{L_1 C \left(1 - \frac{1}{\omega^2 L_2 C} \right)} \\ v_g &= \frac{d\omega}{d\beta} = \sqrt{\frac{1}{L_1 C} \left(1 - \frac{1}{\omega^2 L_2 C} \right)} \\ v_p &= \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{L_1 C (1 - 1/\omega^2 L_2 C)}} \end{aligned} \quad (8-62)$$

La Fig. 8-8 muestra las representaciones de β , v_g y v_p para el caso en que R es despreciable. Obsérvese que $v_p > v_g$ para todas las frecuencias y

$$v_p v_g = \frac{1}{L_1 C} = \text{velocidad de fase o de grupo de la línea sin cargar}$$

Por lo tanto, cuando la frecuencia excede el valor de corte y va aumentando, disminuye la velocidad de fase mientras aumenta la velocidad de grupo, siendo el producto de ambas igual al cuadrado de la velocidad de fase o de grupo en la misma línea sin carga en paralelo. Se verá más adelante que la velocidad de fase de una línea sin cargar se aproxima por lo general a la velocidad de la luz, de modo que la velocidad de fase de la línea cargada en paralelo puede ser mucho mayor que la velocidad de la luz, mientras que la velocidad de grupo, que sería la velocidad de trasmisión de un pulso, es siempre menor que la velocidad de la luz. Según se ha dicho, las guías de onda poseen propiedades similares en cuanto a sus velocidades de grupo y de fase y actúan asimismo como filtros pasaaltos.

8-17. Líneas de bajas pérdidas. A medida que se eleva la frecuencia de las señales aplicadas a una línea, la parte imaginaria de la impedancia de lazo en serie

$$Z = R + j\omega L$$

aumenta más rápidamente que la parte real, la que, a causa del efecto pelicular, aumenta sólo en proporción con la raíz cuadrada de la frecuencia (ver Tabla 8-2). Luego, por encima de cierta alta frecuencia, $\omega L \gg R$. En las líneas típicas, G es tan pequeña que siempre se la puede despreciar en comparación con ωC . Con estas limitaciones, podemos escribir

$$\begin{aligned} Z &= R + j\omega L \quad R \ll \omega L \\ Y &= j\omega C \end{aligned}$$

$$\text{Entonces } Z_o = \sqrt{\frac{Z}{Y}} = \sqrt{\frac{R}{C} + j\omega C} = \sqrt{\frac{R}{C}} \sqrt{1 + j\frac{\omega}{\omega L}}$$

El segundo radical puede expandirse en serie binomial; así

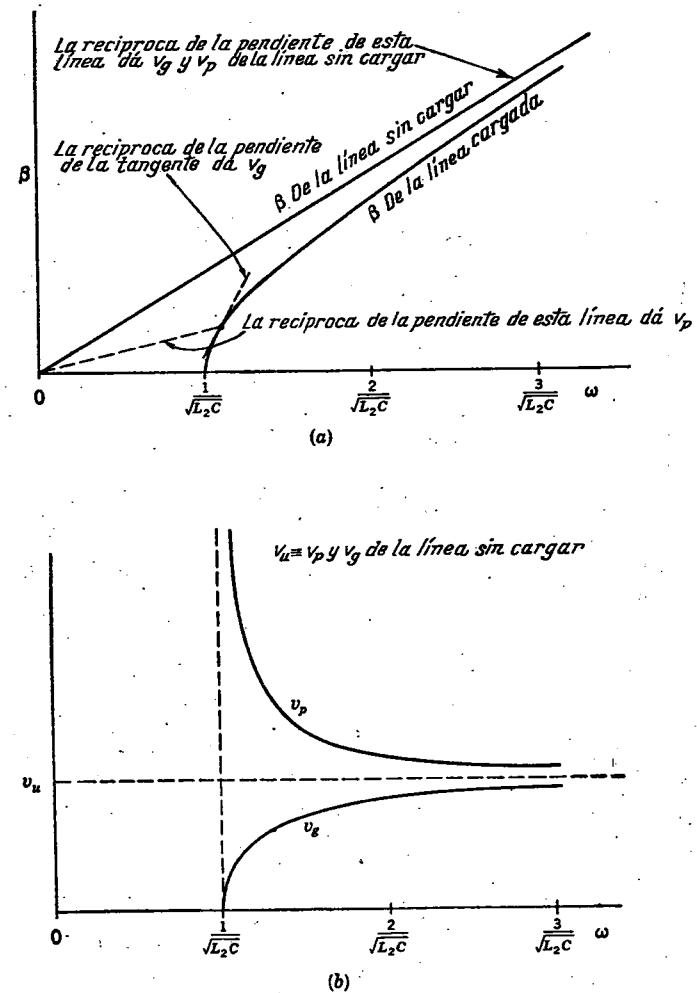


FIG. 8-8. Efecto de la carga en paralelo sobre una línea de bajas pérdidas. (a) β en función de ω . (b) Velocidades de fase y de grupo relativas en función de ω .

$$\sqrt{1 - j \frac{R}{\omega L}} = 1 - j \frac{1}{2} \frac{R}{\omega L} + \frac{1}{8} \left(\frac{R}{\omega L} \right)^2 + j \frac{3}{48} \left(\frac{R}{\omega L} \right)^3 + \dots$$

Por hipótesis $R/\omega L \ll 1$; luego, la serie converge muy rápidamente, y sólo deben retenerse los dos primeros términos¹; luego

¹ El estudiante debe observar que, si, digamos, $R = 0.01\omega L$, el empleo de los dos primeros términos de la serie da resultados más exactos que los que pueden obtenerse mediante el uso directo de la regla de cálculo.

$$Z_o = \sqrt{\frac{L}{C}} \left(1 - j \frac{R}{2\omega L} \right) \quad (8-63)$$

$$= \sqrt{\frac{L}{C}} \sqrt{1 + \left(\frac{R}{2\omega L} \right)^2} / - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{R}{2\omega L} \quad (8-63a)$$

Por otra parte, puesto que $R/\omega L \ll 1$, Z_o es ligeramente capacitiva y su magnitud resulta igual a $\sqrt{L/C}$ para todos los fines prácticos.

La constante de propagación compleja se maneja de manera similar,

$$\gamma = \sqrt{ZY} = \sqrt{(R + j\omega L)j\omega C} = \sqrt{(j\omega)^2 LC + j\omega CR} \\ = j\omega \sqrt{LC} \sqrt{1 - j \frac{R}{\omega L}}$$

En este caso, puesto que se trata a la vez de α y β , se retienen los cuatro primeros términos de la expansión en serie del radical. Así,

$$\begin{aligned} \gamma &= \alpha + j\beta \\ &= j\omega \sqrt{LC} \left[1 - j \frac{1}{2} \frac{R}{\omega L} + \frac{1}{8} \left(\frac{R}{\omega L} \right)^2 + j \frac{1}{16} \left(\frac{R}{\omega L} \right)^3 + \dots \right] \\ &= \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} \left[1 - \frac{1}{8} \left(\frac{R}{\omega L} \right)^2 \right] + j\omega \sqrt{LC} \left[1 + \frac{1}{8} \left(\frac{R}{\omega L} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (8-64)$$

$$\text{Por lo tanto} \quad \alpha = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} \left[1 - \frac{1}{8} \left(\frac{R}{\omega L} \right)^2 \right] \quad (8-64a)$$

$$\beta = \omega \sqrt{LC} \left[1 + \frac{1}{8} \left(\frac{R}{\omega L} \right)^2 \right] \quad (8-64b)$$

En general, el segundo término de estas dos ecuaciones resulta tan pequeño que se lo puede despreciar. El estudiante observará la similitud de estas ecuaciones con las de la línea de baja distorsión.

8-18. Línea sin pérdidas. Para las frecuencias mayores que las consideradas en el último apartado, puede despreciarse totalmente R en comparación con ωL , con lo que se tienen las aproximaciones

$$\begin{aligned} Z &\approx j\omega L \\ Y &\approx j\omega C \end{aligned}$$

$$Z_o = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad \alpha = 0 \quad \beta = \omega \sqrt{LC} \quad (8-65)$$

$$v_p = v_g = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (8-66)$$

Es éste el caso de la llamada "línea sin pérdidas", que utilizaremos mucho en los capítulos subsiguientes.

8-19. División de la energía entre los campos eléctrico y magnético de la línea sin pérdidas. Es interesante observar que, cuando $\omega L \gg R$, la energía de la onda dividese exactamente por mitades entre el campo magnético y el campo eléctrico. La máxima energía almacenada por unidad de longitud en la inductancia de la línea al pasar la onda es

$$W_L = \frac{LI^2}{2} \quad (8-67)$$

mientras que la máxima energía almacenada en iguales condiciones en la capacitancia es

$$W_C = \frac{CE^2}{2} \quad (8-68)$$

Pero se ha visto, Ec. (8-65), que para este caso

$$Z_0 = \frac{E}{I} = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

que puede reescribirse

$$\begin{aligned} CE^2 &= LI^2 \\ W_L &= W_C \end{aligned} \quad (8-69)$$

8-20. Velocidad máxima. En el caso en que R y G son despreciables, es interesante observar cuáles son las máximas velocidades de fase y de grupo que pueden obtenerse en una línea de transmisión. En este caso se sabe, por la Ec. (8-66), que

$$v_g = v_p = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (8-66)$$

En una línea de dos alambres en la que la separación es grande en comparación con el radio del alambre, la inductancia en milihenry por milla de línea es

$$L = 1,481 \log \frac{s}{r} + L' \quad (8-70)$$

donde s es la separación entre alambres y r el radio de éstos. L' es la inductancia debida al concatenamiento de flujo y corriente dentro de los conductores. Es igual a 0,1 milihenry/milla a baja frecuencia, pero, a medida que se eleva la frecuencia, la corriente se concentra cada vez más cerca de la superficie del alambre y este factor se aproxima a cero para las altas frecuencias.

La capacitancia entre dos alambres para $s \ll r$, en picofarad por milla de línea es

$$C = \frac{0,01941}{\log(s/r)} \quad (8-71)$$

En la Ec. (8-66) L y C están dadas respectivamente en henry y farad por milla. Por lo tanto

$$LC = (1,481 \times 10^{-3})(0,01941 \times 10^{-6}) + \frac{0,01941 \times 10^{-6}L'}{\log(s/r)} \quad (8-72)$$

El segundo término de esta ecuación se torna despreciable en comparación con el primero sea que aumente la separación entre los alam-

bres, sea que aumente la frecuencia. El primer término es una constante y es el mínimo valor que LC puede tener. Introduciendo este valor en la Ec. (8-66),

$$\begin{aligned} v_{g,\max} &= v_{p,\max} = \frac{1}{\sqrt{1,481 \times 0,01941 \times 10^{-6}}} \\ &= 186.300 \text{ milla/seg} \end{aligned}$$

Esta es la máxima velocidad que las ondas pueden tener en una línea de transmisión de esta clase y es igual a la velocidad de la luz. En las líneas reales, el efecto de la resistencia y la conductancia y del término L' en la Ec. (8-70) es el de reducir la velocidad por debajo de la luz, pero esta reducción es de sólo algunos por cientos en las líneas abiertas.

Al aumentar la inductancia de una línea mediante la carga se reduce siempre la velocidad de propagación, dado que con ello aumentase el valor de β . En los cables cargados, la velocidad deviene comparativamente muy pequeña y es por lo general del orden de 10.000 a 20.000 milla/seg.

En la comunicación telegráfica, la *velocidad de señalización* es proporcional al número máximo de puntos que puéndose trasmisir sin que la distorsión sea tan grande como para que el punto sea confundido (por el receptor) con el que lo precede o el que lo sigue. Es interesante observar que la carga de un cable (dado que reduce la distorsión) aumenta la velocidad de señalización al mismo tiempo que reduce la velocidad de grupo. Los pulsos telegráficos son idealmente de forma cuadrada, de modo que abarcan un espectro de frecuencias muy amplio. Si la velocidad de grupo no es constante sino que aumenta con la frecuencia, las frecuencias altas llegan a la estación receptora antes que las frecuencias bajas, de modo que las frecuencias más bajas y el pulso mismo se estiran hacia el espacio de tiempo asignado ya al pulso subsiguiente. Si esta distorsión es considerable, el equipo receptor no podrá responder adecuadamente a los pulsos individuales y la única solución en una línea dada es la de trasmisir más despacio. En cambio, en el cable de baja distorsión, aunque, debido a la baja velocidad de grupo, se pueda introducir un pulso en la entrada antes de que el anterior haya emergido de la salida, no se experimentará dificultad en la recepción, pues el equipo receptor irá interpretando los pulsos a medida que llegan.

8-21. Terminación correcta de la línea de transmisión. A fin de asegurar la máxima trasferencia de energía entre dos redes interconectadas, se verá en el Cap. XI que, si no pueden ajustarse los ángulos de fase, la relación óptima es $|Z_1| = |Z_2|$. Es evidente, por lo tanto, que si un generador tiene una impedancia Z_g , sería deseable conectarlo a una carga del mismo valor absoluto. En el caso de las líneas largas, esto podría conseguirse eligiendo la impedancia característica igual a Z_g o intercalando un transformador entre el generador y la línea con el objeto de adaptar las impedancias. En el extremo receptor, la combinación del generador y la línea podrían considerarse, en virtud del

teorema de Thévenin, como un nuevo generador cuya tensión generada es igual a la tensión de circuito abierto y cuya impedancia interna es igual a la que ve mirando a los terminales de salida de la línea, la que, en este caso, sería igual a la impedancia característica. Por lo tanto, la carga que recibiría la máxima potencia de la línea sería una de magnitud igual a la impedancia característica de la línea. Se ve entonces que la terminación de los dos extremos de la línea en su impedancia característica conduce a la más eficiente trasferencia de potencia, si los ángulos no pueden modificarse, como es en general del caso. Se verá en el Cap. IX, por qué tal terminación es conveniente desde el punto de vista de la distorsión, por lo que casi todas las líneas largas se terminan de esa manera.

8-22. Redes de equilibrio. Al estudiar los repetidores telefónicos en el Cap. V se ha visto que su buen funcionamiento depende de la presencia de una *red de equilibrio* cuya impedancia de entrada es igual,

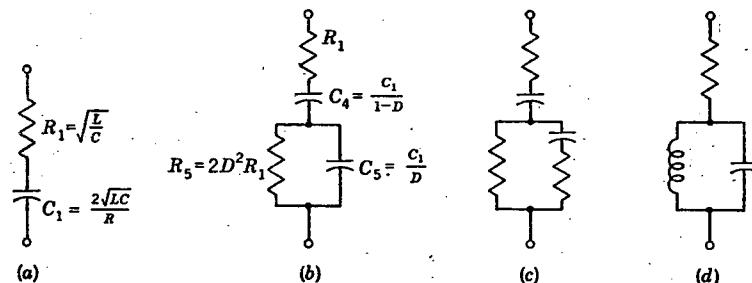


FIG. 8-9. Redes de equilibrio. (a, b) Línea de alambres abiertos. Véanse los valores de R_1 y C_1 en el texto. (c) Cable sin cargar. (d) Cable cargado.

o muy aproximadamente igual, a la impedancia característica para todas las frecuencias de interés. Al diseñar una red de esta clase, presentase el problema de satisfacer esta condición con el número mínimo de elementos de circuito concentrados. La Fig. 8-9 muestra las configuraciones típicas de estas redes para tres tipos comunes de línea. Dadas estas configuraciones, el paso siguiente es el de evaluar sus componentes.

Por vía de ejemplo, evaluemos los elementos de la Fig. 8-9a para una línea abierta. Para esta línea puede despreciarse G con respecto a ωC , excepto para las frecuencias más bajas. Así,

$$Z_o = \sqrt{\frac{Z}{Y}} \approx \sqrt{\frac{R + j\omega L}{j\omega C}} = \sqrt{\frac{L}{C}} \left(1 + \frac{R}{j\omega L}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (8-73)$$

Luego, en el rango de frecuencias en que $\omega L \ll R$, el factor entre paréntesis puede ser reemplazado por los dos primeros términos de la serie binomial, lo que da

$$Z_o \approx \sqrt{\frac{L}{C}} \left(1 + \frac{R}{j2\omega L}\right) = \sqrt{\frac{L}{C}} + \frac{R}{j2\omega \sqrt{LC}} \quad (8-74)$$

expresión que tiene la misma forma que la impedancia de la Fig. 8-9a,

$$Z_1 = R_1 + \frac{1}{j\omega C_1} \quad (8-75)$$

Por lo tanto, igualando las partes reales y las imaginarias,

$$R_1 = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad C_1 = \frac{2\sqrt{LC}}{R} \quad (8-76)$$

donde, naturalmente, R , L y C son los parámetros de la línea.

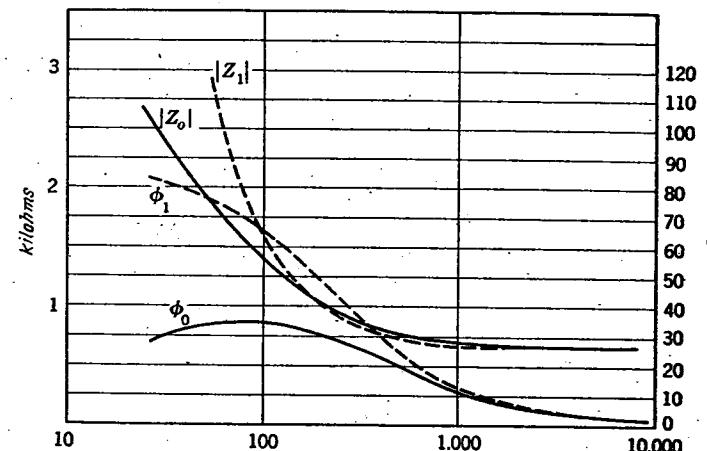


FIG. 8-10. Comparación de la impedancia característica de una línea y de una red de equilibrio del tipo de la Fig. 8-9a.

Según lo anterior, sería de esperar que Z_o y Z_1 fuesen casi iguales a las frecuencias altas, pero no a las frecuencias bajas debido a que para éstas dejan de cumplirse las hipótesis adoptadas. Así es, en efecto, como lo demuestra la Fig. 8-10, en la que se representan Z_o y Z_1 para una línea típica. Puede obtenerse una mejor aproximación a Z_o , dentro de una banda más amplia, agregando más elementos a la red de equilibrio, por ejemplo, usando el circuito de la Fig. 8-9b (ver Prob. 8-18). Pueden evaluarse del mismo modo los componentes de una red de equilibrio para el cable cargado o sin cargar, pero la tarea es más difícil.¹

PROBLEMAS

8-1. Despreciando todas las pérdidas y el concatenamiento de flujo dentro de los conductores, derivar ecuaciones para Z_o , γ , y v_p para un cable coaxial con dieléctrico de aire.

¹ Ver R. S. Hoyt, Impedance of Smooth Lines, and Design of Simulating Networks, *Bell System Tech. J.*, vol. 2, N° 2, p. 1, abril de 1923; e Impedance of Loaded Lines, and Design of Simulating and Compensating Networks, *Bell System Tech. J.*, vol. 3, N° 7, p. 414, julio de 1924.

8-2. Repetir el Prob. 8-1 para una línea de alambres paralelos.

8-3. Computar, para una frecuencia de 796 c/s, la impedancia característica, la constante de atenuación, la constante de longitud de onda, la velocidad de propagación, y la longitud de onda en los cables y líneas abiertas de la tabla 8-1, suponiendo que las constantes están uniformemente repartidas.

8-4. Un cable calibre 19 A. W. G. está terminado en Z_0 y alimentado por un generador de impedancia interna Z_0 y f.e.m. de 10 volt. Representar el lugar geométrico de los fasores de corriente y tensión para 10 kilómetros, comenzando en los terminales de entrada. $f = 796$ c/s.

8-5. Una línea de longitud finita l está terminada en Z_0 . Empezando con las Ecs. (8-20) y (8-21a), evaluar A_1 y A_2 , y demostrar que las ecuaciones para E_r e I_r son las mismas que para la línea infinita.

8-6. (a) Diseñar una sección T-nominal correspondiente a 1.000 m de cable calibre 19. (b) Suponiendo que la inductancia y la conductancia son despreciables, esbozar el diagrama de una sección T-nominal *equilibrada* respecto a tierra. Esta sección se utiliza a menudo en los laboratorios como cable artificial. (c) Cotejar Z_0 y γ de la sección T-nominal con las del cable real a 5.000 c/s.

8-7. Una linea artificial de uso común está hecha de secciones T que tienen las siguientes componentes:

$$R_1 = 80 \text{ ohm} \quad L_1 = 29.2 \text{ mH} \quad C_2 = 0.064 \mu\text{F} \quad G_2 = 0$$

Cada sección corresponde a 7,88 millas de línea de trasmisión patrón.

a. Calcular los parámetros por kilómetro de línea.

b. Cotejar Z_0 y γ de la línea artificial con los de la línea verdadera.

8-8. Computar, usando las relaciones exactas las mismas constantes para los cables del Prob. 8-3 suponiendo que se intercalan bobinas de carga de 0,175 H y 10,6 ohm a intervalos de 2,66 Km. Suponer que la inductancia puede considerarse como distribuida a la frecuencia dada. Computar las características usando las relaciones aproximadas para $\omega L \gg R$ y $\omega C \gg G$, y comparar con los resultados exactos.

8-9. Para el cable calibre 19, computar y representar gráficamente en función de la frecuencia la constante de atenuación, la velocidad de fase, y la impedancia característica, entre 500 y 3.000 c/s, a intervalos de 500 c/s.

8-10. Repetir el Prob. 8-9 con las bobinas de carga del Prob. 8-8 agregadas.

8-11. Repetir el Prob. 8-10, pero considerando las bobinas como concentradas.

8-12. Un cable calibre 19 de 100 Km de longitud está terminado en su impedancia característica y tiene conectado en su extremo trasmisor un generador cuya resistencia interna es de 600 ohm y cuya f.e.m. es de 1 volt. ¿Cuál será la corriente en cada extremo y cuál la potencia recibida por la carga? $f = 796$ c/s.

8-13. ¿Cuál sería la potencia recibida por la carga si el cable tuviera insertadas las bobinas de carga del Prob. 8-8? Se supone que la impedancia de carga se modifica según la nueva impedancia característica.

8-14. ¿Cuál sería la ganancia en decibel causada por los cambios introducidos según el Prob. 8-13?

8-15. Dibujar el diagrama fasorial de las corrientes y tensiones en los dos extremos de la línea en los casos de los Probs. 8-12 y 8-13.

8-16. ¿Cuáles serían la corriente y la tensión en una resistencia de 600 ohm que está disipando una potencia de 1 mW? Computar los valores de tensión y corriente para potencias disipadas en el mismo resistor 5, 10, 15 y 20 dB por encima y por debajo de 1 mW.

8-17. Una línea que tiene un largo de onda de longitud tiene una impedancia característica de 600 ohm, resistiva pura. La atenuación es despreciable. Se conecta en cada extremo de la línea un generador de 600 ohm de resistencia interna y 1 volt de f.e.m., ambos en fase. Por medio del principio de superposición, dibujar el diagrama fasorial de las tensiones y corrientes debidas a cada generador y de la suma resultante a intervalos de 1/8 de largo de onda a lo largo de la línea.

8-18. Evaluar los componentes de la red de equilibrio de la Fig. 8-9b para la línea cuya Z_0 está dada en la Fig. 8-10. Usar $D = 0.5$. Representar curvas de Z_0 y de la impedancia de la red de equilibrio en la gama de 30 c/s a 8 Kc/s. Comparar sus resultados con los de la Fig. 8-10.

8-19. Derivar las ecuaciones para las componentes de una sección π -nominal equivalente a una porción de línea de longitud l .

8-20. Repetir el Prob. 8-17 suponiendo ahora que los dos generadores están 180° fuera de fase.

8-21. Repetir los Probs. 8-17 y 8-20 para el caso en que $e^{at} = 2$ y la tensión generada en un extremo de la línea es igual a la mitad de la que se genera en el otro.

Nota: Los Probs. 8-17, 8-20 y 8-21, sirven para introducir importantes principios de la teoría de la reflexión, puesto que patentizan los efectos de la propagación simultánea de dos ondas por la misma línea. Deben ser resueltos, por lo tanto, antes de pasar al capítulo siguiente.

HHS. J. BRANDO
INGENIERO
TECNOLÓGICO
ELECTRÓNICO

CAPÍTULO IX

REFLEXIÓN

9-1. Solución aproximada para la línea general. Mediante los métodos de análisis estudiados en el capítulo precedente, es posible determinar la tensión y la corriente en un punto cualquiera a lo largo de una línea terminada en su impedancia característica. Si la línea es lo suficientemente larga, su impedancia de entrada será casi igual a su impedancia característica aunque la línea no esté terminada en Z_o . Por ejemplo, si el valor de al es igual a 2,3 o más, la impedancia de entrada

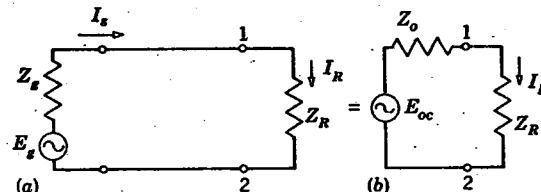


FIG. 9-1. Aproximación a las condiciones del extremo receptor de una línea por aplicación del teorema de Thévenin.

de una línea cualquiera estará dentro del 2 % respecto de su impedancia característica cualquiera que sea su terminación, aun en circuito abierto o en cortocircuito. Si la terminación no difiere mucho de la impedancia característica, la línea puede ser bastante corta sin que su impedancia de entrada se aparte mucho de Z_o .

Para las líneas largas de mucha atenuación puede hallarse una solución aproximada para el caso en que no está terminada en Z_o . Consideremos el caso de la Fig. 9-1. En el extremo receptor, puédense analizar la corriente en términos del teorema de Thévenin. Si es válida la aproximación discutida en el párrafo anterior, la impedancia, mirando hacia los terminales 1 y 2, será igual a Z_o . Dado que tenemos una solución del problema para el caso particular en que la impedancia de terminación Z_R es igual a Z_o , es fácil determinar la tensión de circuito abierto en estos terminales. En el capítulo anterior se ha visto que, si $Z_R = Z_o$,

$$I_s = \frac{E_o}{Z_o + Z_o} \quad (9-1)$$

$$|I_R| = |I_s| e^{-al} = \frac{E_o e^{-al}}{|Z_o + Z_o|} \quad (9-2)$$

Ahora, según la Fig. 9-1, si $Z_R = Z_o$,

$$|I_R| = \left| \frac{E_{oc}}{2Z_o} \right| \quad (9-3)$$

Igualando los segundos miembros de las Ecs. (9-2) y 9-3) y despejando E_{oc} ,

$$|E_{oc}| = \left| \frac{2Z_o E_o e^{-al}}{Z_o + Z_o} \right| \quad (9-4)$$

Este valor de E_{oc} es exactamente igual al doble de la tensión terminal de la línea cuando ésta está terminada en Z_o .

Dado que la tensión de circuito abierto es independiente de la terminación, puede utilizarse la Ec. (9-4) directamente en el circuito de la Fig. 9-1b para determinar la corriente recibida para una terminación cualquiera:

$$|I_R| = \left| \frac{E_{oc}}{Z_R + Z_o} \right| = \frac{2|Z_o| E_o e^{-al}}{|Z_o + Z_o| |Z_R + Z_o|} \quad (9-5)$$

La Ec. (9-5) es una solución exacta si es $Z_g = Z_o$ o si es $Z_R = Z_o$, pues entonces no hay involucrada aproximación alguna. Cuando más aproximadamente se cumplan estas igualdades, o cuanto mayor es el valor de al , tanto mayor será la aproximación de la Ec. (9-5). En las mismas condiciones, la Ec. (9-1) constituye una buena aproximación para I_s .

9-2. Ecuaciones exactas para la línea general terminada en una impedancia distinta de Z_o . Si una línea está terminada no en su impedancia característica sino en una impedancia de diferente valor Z_R , es posible considerar esta impedancia como formada por dos partes, una de las cuales es la impedancia característica Z_o y la otra, la diferencia entre Z_R y Z_o , la que se llamará Z'_R . Así

$$Z_R = Z_o + Z'_R \quad (9-6)$$

Dado que Z_R puede ser mayor o menor que Z_o y puede guardar con ella cualquier relación de fase, Z'_R es un fasor impedancia, que puede hallarse en *cualquier de los cuatro cuadrantes* y ser, por lo tanto, no realizable físicamente. Esta circunstancia no afecta la validez del razonamiento.

De modo similar, la impedancia del generador puede dividirse en dos partes, una igual a Z_o y la otra, que se llamará Z'_g , tal que

$$Z_g = Z_o + Z'_g \quad (9-7)$$

Una línea alimentada por un generador de impedancia interna Z_g y cargada con una impedancia Z_R podrá representarse así como en la Fig. 9-2.¹

Por el teorema de compensación A, es posible reemplazar cualquier impedancia en una red por un generador de impedancia interna nula

¹ Se llama la atención sobre la manera de medir las distancias en la Fig. 9-2. x indica la distancia medida desde el extremo trasmisor y y la distancia medida desde el extremo receptor. En un punto cualquiera de la línea, $y = l - x$. La tensión y la corriente en este punto se representan por, respectivamente, E_x o E_y , e I_x o I_y . Se utilizan las dos notaciones a fin de ampliar las ecuaciones de corriente y tensión. Por ejemplo, en ciertos casos es conveniente expresar las soluciones en términos de las magnitudes propias del extremo receptor. En tal caso conviene usar y más bien que $l - x$.

y f.e.m. igual a la caída de tensión que se produce en la impedancia. Las impedancias Z'_R y Z'_g pueden reemplazarse, así, por generadores de impedancia interna nula y f.e.m. respectivamente iguales a $-I_R Z'_R$ y $-I_g Z'_g$. El signo negativo indica que los generadores obran en sentido opuesto al elegido como positivo para las corrientes. La aplicación de este

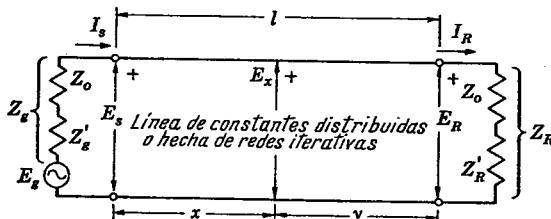
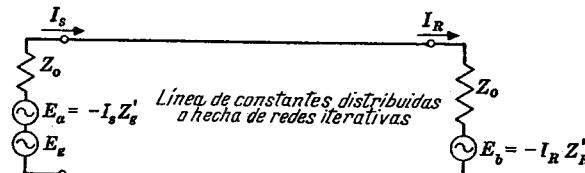
FIG. 9-2. Análisis de una línea no terminada en Z_o .

FIG. 9-3. Circuito equivalente a la red de la Fig. 9-2.

teorema reduce el problema al de una línea terminada en su impedancia característica en los dos extremos, al que puede aplicarse convenientemente el teorema de superposición dado que la línea terminada en Z_o representa un problema bastante simple. La situación está ilustrada en la Fig. 9-3.

9-3. Moción ondulatoria en la línea no terminada en Z_o . Se ha visto que todo generador aplicado a una línea de transmisión da origen a una onda que avanza en un sentido, si la línea es infinita o está terminada en su impedancia característica. Es evidente en la Fig. 9-3 que la acción de Z'_R , esto es, de una terminación distinta de Z_o , es la de establecer una onda reflejada que parte del extremo receptor y viaja hacia el extremo trasmisor. En el caso general, la tensión y la corriente a lo largo de una línea de transmisión serán las resultantes de dos ondas. Si llamamos E la tensión fasorial resultante a una distancia cualquiera x del extremo trasmisor, y se llama E'_x , la tensión de la onda que se propaga en sentido positivo —es decir, de izquierda a derecha en la Fig. 9-3— mientras que se indica con E''_x la tensión de la onda que se propaga en sentido negativo, se cumplirá necesariamente la relación

$$E_x = E'_x + E''_x \quad (9-8)$$

E'_x se debe a dos generadores, E_g y E_a , mientras que E''_x es causada por el generador E_b . Se ha visto que la onda que avanza en sentido positivo puede ser representada por medio de la relación

$$E'_x = A_2 e^{-\gamma x} = A_2 e^{-\alpha x - j\beta x} \quad (9-9)$$

de modo que la onda que avanza en sentido negativo quedará expresada por la ecuación

$$E''_x = A_1 e^{\gamma x} = A_1 e^{\alpha x + j\beta x} \quad (9-10)$$

con lo que la Ec. (9-8) deviene

$$E_x = A_2 e^{-\gamma x} + A_1 e^{\gamma x} \quad (9-11a)$$

De modo similar puede mostrarse que la corriente I_x , en un punto cualquiera de la línea, está dada por la ecuación

$$I_x = B_2 e^{-\gamma x} + B_1 e^{\gamma x} \quad (9-11b)$$

El estudiante observará que las Ecs. (9-11a) y (9-11b) son idénticas a las Ecs. (8-20) y (8-21) que se derivaron en el capítulo anterior a partir de las ecuaciones diferenciales para la tensión y la corriente a lo largo de la línea. La solución que aquí se presenta se ofrece en la creencia de que permite formarse una imagen mental valiosa en cuanto a la naturaleza y la causa de la reflexión.

9-4. Corriente en la onda inicial y la onda reflejada. Obtendremos ahora la solución general de las Figs. 9-2 y 9-3 en términos de las constantes de la línea, el generador y la carga. Sean

I'_s la componente de la corriente en el extremo trasmisor debida a E_g y E_a (onda inicial o incidente).

I'_R la componente de la corriente en el extremo receptor debida a E_g y E_a (onda inicial o incidente).

I''_R la componente de la corriente en el extremo receptor debida a E_b (onda reflejada).

I''_s la componente de la corriente en el extremo trasmisor debida a E_b (onda reflejada).

I'_s e I'_R se deben a la onda inicial que avanza de izquierda a derecha en la Fig. 9-3, e I''_R e I''_s son debidas a la onda reflejada que se propaga de derecha a izquierda. Luego

$$I_s = I'_s + I''_s \quad (9-12a)$$

$$I_R = I'_R + I''_R \quad (9-12b)$$

$$I'_s = \frac{E_g + E_a}{2Z_o} = \frac{E_g - I_s Z'_g}{2Z_o} = \frac{E_g - (Z_o - Z_o) I_s}{2Z_o}$$

$$I'_R = I_s e^{-\gamma l} = \frac{E_g - (Z_o - Z_o) I_s}{2Z_o} e^{-\gamma l}$$

$$I''_R = \frac{E_b}{2Z_o} = - \frac{I_R Z'_R}{2Z_o} = - \frac{I_R (Z_R - Z_o)}{2Z_o} \quad (9-13)$$

$$I''_s = I''_R e^{-\gamma l} = - \frac{I_R (Z_R - Z_o) e^{-\gamma l}}{2Z_o}$$

Será de interés determinar la relación de las corrientes respectivamente debidas a la onda inicial y la onda reflejada en el punto de reflexión. Por las Ecs. (9-12b) y (9-13),

$$\frac{I'_R}{I_R} = \frac{-Z'_R}{2Z_o} = \frac{Z_o - Z_R}{2Z_o} = \frac{I''_R}{I'_R + I''_R}$$

Pero, por la teoría de las proporciones, si $a/b = c/d$, es

$$\frac{a}{b-a} = \frac{c}{d-c}$$

Por lo tanto

$$\frac{I''_R}{I'_R} = \frac{Z_o - Z_R}{2Z_o - (Z_o - Z_R)} = \frac{Z_o - Z_R}{Z_o + Z_R} \quad (9-14)$$

Se advierte que esta relación se anula para $Z_o = Z_R$ con lo que se elimina la reflexión.

Del mismo modo que se analiza la corriente por el principio de superposición, es posible dividir la tensión en un punto cualquiera de la línea en dos componentes: (1) La tensión en la onda inicial establecida por los generadores E_g y E_a y que se propaga de izquierda a derecha en la Fig. 9-3; (2) la tensión de la onda reflejada debida al generador E_b y que viaja de derecha a izquierda en la Fig. 9-3. Sean

E'_s la componente de la tensión en el extremo trasmisor debida a E_g y E_a (onda inicial o incidente).

E'_R la componente de la tensión en el extremo receptor debida a E_g y E_a (onda inicial o incidente).

E''_R la componente de la tensión en el extremo receptor debida a E_b (onda reflejada).

E''_s la componente de la tensión en el extremo trasmisor debida a E_b (onda reflejada).

Luego

$$E_s = E'_s + E''_s \quad (9-12c)$$

$$E_R = E'_R + E''_R \quad (9-12d)$$

Asumamos que la tensión es positiva cuando el alambre de arriba en la Fig. 9-2 es positivo con respecto al de abajo y que la corriente lo es cuando circula por el alambre de arriba de izquierda a derecha. Así, cuando la tensión de la onda inicial es positiva, ella tiende a producir una corriente positiva (de izquierda a derecha en el alambre de arriba), mientras que cuando la tensión reflejada es positiva, ella tiende a producir en el alambre de arriba una corriente que va de derecha a izquierda, es decir, una corriente negativa. Este hecho se aclara también por cuanto la onda inicial representa un flujo de energía de izquierda a derecha, mientras que la onda reflejada se debe a un flujo de energía de derecha a izquierda. Por lo tanto

$$\frac{E'_s}{I'_s} = \frac{E'_R}{I'_R} = -\frac{E''_R}{I''_R} = -\frac{E''_s}{I''_s} = Z_o \quad (9-15)$$

Esta ecuación puede usarse junto con la Ec. (9-14) para determinar la relación de las tensiones respectivamente debidas a la onda inicial y la onda reflejada en el extremo receptor:

$$\frac{E''_R}{E'_R} = -\frac{I''_R}{I'_R} = \frac{Z_R - Z_o}{Z_R + Z_o} = \rho = |\rho| / \varphi \quad (9-16)$$

La relación $(Z_R - Z_o)/(Z_R + Z_o)$ se llama *coeficiente de reflexión* y se la denota con el símbolo ρ . *

Las Ecs. (9-14) a (9-16) y las relaciones

$$\begin{aligned} I'_R &= I'_s e^{-\gamma l} & I''_R &= I''_s e^{-\gamma l} \\ E'_R &= E'_s e^{-\gamma l} & E''_R &= E''_s e^{-\gamma l} \end{aligned}$$

son suficientes para resolver la mayor parte de los problemas relativos a las líneas largas. Son tan sencillas que se las puede recordar de memoria y los problemas pueden entonces resolverse con regla de cálculo siguiendo una serie de pasos naturales que cualquiera puede recordar. Supongamos que se dan en la Fig. 9-3 los siguientes datos: E_g , Z_s , Z_R y las constantes y longitud de la línea. Los pasos son los siguientes:

Paso 1. Determinar Z_o , a , y β de la línea.

Paso 2. Elegir una tensión arbitraria para E'_s , por ejemplo, 1 volt. Distingamos los valores obtenidos a partir de esta hipótesis con el subíndice adicional 1.

Paso 3. Hallar E'_{R1} con la relación $E'_{R1} = E'_s e^{-\gamma l}$.

Paso 4. Hallar E''_{R1} mediante la Ec. (9-16).

Paso 5. Hallar E''_{s1} con la relación $E''_{s1} = E''_{R1} e^{-\gamma l}$.

Paso 6. Hallar I'_{s1} , I'_{R1} , I''_{s1} e I''_{R1} con la Ec. (9-15).

Paso 7. Hallar E_{s1} , E_{R1} , I_{s1} e I_{R1} sumando las componentes de la manera indicada por las Ecs. (9-12).

Paso 8. Determinar la impedancia de entrada de la línea Z_{in} como relación de E_{s1} a I_{s1} . Conocida la impedancia de entrada, puede obtenerse la verdadera tensión en el extremo trasmisor mediante la relación.

$$E_s = \frac{E_o Z_{in}}{Z_o + Z_{in}}$$

Paso 9. Multiplicar los valores de E_{s1} , E_{R1} , I_{s1} e I_{R1} obtenidos en el paso 7 (en la hipótesis — paso 2 — de que E'_s es igual a 1 volt) por la relación E_s/E_{s1} para obtener los valores verdaderos de tensión y corriente.

Si se resuelven varios problemas por este método paso a paso, el estudiante comprenderá mejor los efectos de la reflexión, la atenuación y el desplazamiento de fase, que cuando se limita a reemplazar valores en una fórmula.

Como ejemplo de este método de solución, consideremos el caso de una línea de 100 millas cuyas características son las mismas que las del ejemplo ilustrativo del capítulo anterior, a saber:

$$Z_o = 689 - j175 = 711/14,23^\circ$$

$$\alpha = 0,00785 \text{ neper/milla}$$

$$\beta = 0,0287 \text{ radian/milla}$$

* ASA Y10.9-1953. Antes de la adopción de esta norma se utilizaban frecuentemente los símbolos Γ y K , reservándose ρ para la relación de onda estacionaria. Debe tenerse presente este cambio al consultar la literatura sobre el tema.

Supongamos que la impedancia terminal tiene en este caso el valor

$$Z_R = 500/45^\circ = 353,5 + j353,5$$

Nos proponemos hallar la tensión, la corriente y la potencia en la impedancia terminal, suponiendo que el generador tiene una f.e.m. de 2 volt y una impedancia interna resistiva pura de 600 ohm.

$$\alpha l = 0,785 \text{ neper}$$

$$e^{\alpha l} = 2,192$$

$$\beta l = 2,87 \text{ radián} = 164,33^\circ$$

Adoptamos

$$E'_{S1} = 1/0 \text{ volt}$$

Entonces

$$E'_{R1} = \frac{1}{2,192}/-164,33^\circ = 0,456/-164,33^\circ = -0,440 - j0,123$$

$$E''_{R1} = E'_{R1} \frac{Z_R - Z_o}{Z_R + Z_o}$$

$$\begin{aligned} E''_{R1} &= 0,456/-164,33^\circ \times \frac{353,5 + j353,5 - 689 + j175}{353,5 + j353,5 + 689 - j175} \\ &= 0,456/-164,33^\circ \times \frac{626/122,43^\circ}{1,059/9,7^\circ} \\ &= 0,456/-164,33^\circ \times 0,591/112,73^\circ \\ &= 0,270/-51,6^\circ = 0,168 - j0,211 \end{aligned}$$

$$E''_{S1} = \frac{0,270/-51,6^\circ}{2,192/-164,33^\circ} = 0,123/-215,93^\circ = -0,100 + j0,072$$

$$I'_{S1} = \frac{1}{711/-14,23^\circ} = 1,407 \times 10^{-3}/14,23^\circ = (1,364 + j0,347) \times 10^{-3}$$

$$\begin{aligned} I''_{S1} &= \frac{0,123/-215,93^\circ \times 1/180^\circ}{711/-14,23^\circ} = 0,173 \times 10^{-3}/-21,7^\circ \\ &= (0,161 - j0,064) \times 10^{-3} \end{aligned}$$

$$E_{S1} = 1 - 0,100 + j0,072 = 0,900 + j0,072 = 0,900/4,58^\circ$$

$$\begin{aligned} I_{S1} &= (1,364 + j0,347 + 0,161 - j0,064) \times 10^{-3} \\ &= (1,525 + j0,283) \times 10^{-3} = 1,55 \times 10^{-3}/10,5^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{R1} &= (-0,440 - j0,123 + 0,168 - j0,211) = (-0,272 - j0,334) \\ &= 0,431/230,87^\circ \end{aligned}$$

$$Z_{in} = \frac{0,900/4,58^\circ}{1,55 \times 10^{-3}/10,5^\circ} = 580/-5,92^\circ = 576 - j60$$

Puede determinarse ahora el verdadero valor de E_S :

Dado que la hipótesis original ($E'_{S1} = 1$ volt) dio un valor $E_{S1} = 0,900$, hay que corregir todos los valores computados multiplicándolos por el factor $0,986/0,900$ (si sólo se requieren los valores absolutos).

$$|E_R| = \frac{0,431 \times 0,986}{0,900} = 0,472 \text{ volt}$$

$$|I_R| = \frac{|E_R|}{|Z_R|} = \frac{0,472}{500} = 0,944 \times 10^{-3} \text{ amp}$$

$$\begin{aligned} P_R &= |E_R| |I_R| \cos \theta_R = 0,472 \times 0,944 \times 0,707 \times 10^{-3} \\ &= 0,315 \times 10^{-3} \text{ watt} \end{aligned}$$

Es de interés comparar el valor de la corriente que se acaba de obtener con el que se obtiene aplicando la aproximación involucrada por la Ec. (9-5)

$$|Z_g + Z_o| = |1,289 - j175| = 1,300$$

$$|Z_R + Z_o| = |1,042 + j178| = 1,059$$

$$|I_R| = \frac{2 \times 711 \times 2}{1,300 \times 1,059 \times 2,192} = 0,945 \times 10^{-3} \text{ amp}$$

Esta comprobación es más feliz que lo que puede esperarse ordinariamente, pero demuestra que la ecuación aproximada puede dar una idea muy buena de las magnitudes involucradas.

Es posible obtener ecuaciones únicas para expresar las corrientes en los dos extremos de la línea, introduciendo los valores obtenidos con la Ec. (9-13) en las Ecs. (9-12a) y (9-12b):

$$I_S = I'_S + I''_S = \frac{E_g - (Z_g - Z_o)I_S - I_R(Z_R - Z_o)e^{-rl}}{2Z_o} \quad (9-17a)$$

$$I_R = I'_R + I''_R = \frac{[E_g - (Z_g - Z_o)I_S]e^{-rl} - I_R(Z_R - Z_o)}{2Z_o} \quad (9-17b)$$

Despejando I_R e I_S y tratando las Ecs. (9-17a) y (9-17b) como ecuaciones simultáneas, obtiénense

$$I_R = \frac{2E_g Z_o}{(Z_o + Z_R)(Z_g + Z_o)e^{rl} + (Z_o - Z_R)(Z_g - Z_o)e^{-rl}} \quad (9-18a)$$

$$I_S = \frac{E_g [(Z_o + Z_R)e^{rl} + (Z_o - Z_R)e^{-rl}]}{(Z_o + Z_R)(Z_g + Z_o)e^{rl} + (Z_o - Z_R)(Z_g - Z_o)e^{-rl}} \quad (9-18b)$$

9-5. Solución con las ecuaciones diferenciales. Es interesante ver cómo pueden comprobarse los resultados anteriores aplicando las ecuaciones diferenciales escritas para la línea de trasmisión en el Cap. VIII. Las Ecs. (8-20) y (8-21a) son perfectamente generales, pues se han derivado sin ninguna hipótesis acerca de las terminaciones de la línea. Se las repite aquí por conveniencia, con Z e Y expresadas en términos de γ y Z_o :

$$E_x = A_1 e^{\gamma x} + A_2 e^{-\gamma x} \quad (8-20)$$

$$I_x = -\frac{A_1}{Z_o} e^{\gamma x} + \frac{A_2}{Z_o} e^{-\gamma x} \quad (8-21a)$$

Dado que el término $A_1 e^{\gamma x}$ representa una onda de tensión que se propaga en sentido negativo, puede identificarse A_1 con E''_S , la magnitud de la onda reflejada, mientras que A_2 es la magnitud de la onda

incidente E'' 's, ambas en el extremo trasmisor. Sus valores en términos de los datos pueden calcularse a partir de las condiciones iniciales dadas en la Fig. 9-2.

Para $x = 0$, $E_x = E_s = E_g - I_s Z_g$, $I_x = I_s$. Sustituyendo en las Ecs. (8-20) y (8-21),

$$A_1 + A_2 = E_g - I_s Z_g \quad -\frac{A_1}{Z_o} + \frac{A_2}{Z_o} = I_s$$

Eliminando I_s y agrupando términos

$$(Z_o - Z_g)A_1 + (Z_o + Z_g)A_2 = E_g Z_o \quad (9-19)$$

En el extremo receptor de la línea, $x = l$, y

$$E_x = E_R = I_R Z_R \quad \text{and} \quad I_x = I_R$$

Sustituyendo en las Ecs. (8-20) y (8-21),

$$A_1 e^{\gamma l} + A_2 e^{-\gamma l} = Z_R \left(-\frac{A_1 e^{\gamma l}}{Z_o} + \frac{A_2 e^{-\gamma l}}{Z_o} \right)$$

Agrupando términos,

$$(Z_o + Z_R)e^{\gamma l}A_1 + (Z_o - Z_R)e^{-\gamma l}A_2 = 0 \quad (9-20)$$

Las Ecs. (9-19) y (9-20) pueden resolverse simultáneamente en A_1 y A_2 , lo que da

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{E_g Z_o (Z_o - Z_R) e^{-\gamma l}}{d} \\ A_2 &= \frac{-E_g Z_o (Z_o + Z_R) e^{\gamma l}}{d} \end{aligned} \quad (9-21)$$

$$\text{donde } d = (Z_o - Z_g)(Z_o - Z_R)e^{-\gamma l} - (Z_o + Z_g)(Z_o + Z_R)e^{\gamma l}$$

La sustitución de las Ecs. (9-21) en las (8-20) y (8-21) da

$$E_x = E_s Z_o \frac{(Z_o + Z_R)e^{\gamma(l-x)} - (Z_o - Z_R)e^{-\gamma(l-x)}}{(Z_o + Z_g)(Z_o + Z_R)e^{\gamma l} - (Z_o - Z_g)(Z_o - Z_R)e^{-\gamma l}} \quad (9-22)$$

$$I_x = E_s \frac{(Z_o + Z_R)e^{\gamma(l-x)} + (Z_o - Z_R)e^{-\gamma(l-x)}}{(Z_o + Z_g)(Z_o + Z_R)e^{\gamma l} - (Z_o - Z_g)(Z_o - Z_R)e^{-\gamma l}} \quad (9-23)$$

La cantidad $l - x$ que aparece en los exponentes de las dos últimas ecuaciones es simplemente la distancia desde el extremo receptor de la línea hasta el punto x y se la puede llamar y , como se indica en la Fig. 9-2.

Se sugiere que el estudiante factoree las Ecs. (9-22) y (9-23) en las formas

$$E_x = E'_R e^{\gamma y} + E''_R e^{-\gamma y} \quad (9-22a)$$

$$I_x = I'_R e^{\gamma y} + I''_R e^{-\gamma y} \quad (9-23a)$$

y verifique la Ec. (9-15). Hay dos aspectos de importancia aquí. En primer término, la onda incidente "ve" una impedancia Z_o en cada punto

a lo largo de la línea, y la onda reflejada "ve", en cambio, una impedancia $-Z_o$. El signo negativo, en el último caso, nace de los sentidos elegidos como positivos para las corrientes y tensiones, según la Fig. 9-2. Se observará que la flecha de I_x está dirigida hacia la derecha en el diagrama, mientras que la onda reflejada se mueve hacia la izquierda.

El segundo punto de interés es que las ondas incidente y reflejada son mutuamente independientes durante su propagación a lo largo de la línea. Esto es de esperar, dado que la línea de trasmisión es un sistema lineal; la corriente y la tensión totales en un punto cualquiera son las sumas de las respectivas componentes incidentes y reflejadas, de acuerdo con el principio de superposición.

9-6. Formas de alternativa. Las Ecs. (9-22) y (9-23) dan la corriente y la tensión en un punto cualquiera a lo largo de la línea en términos de una tensión conocida de generador E_g y de la impedancia de generador Z_g . A menudo ocurre que son otras las cantidades conocidas, más bien que E_g y que entonces conviene modificar correspondientemente las ecuaciones. Por ejemplo, la cantidad conocida en cambio de E_g puede ser la tensión en el extremo trasmisor de la línea, E_s . Así, si se supone que $Z_g = 0$, entonces $E_g = E_s$ y las ecuaciones devienen

$$E_x = E_s \frac{(Z_o + Z_R)e^{\gamma y} - (Z_o - Z_R)e^{-\gamma y}}{(Z_o + Z_R)e^{\gamma l} - (Z_o - Z_R)e^{-\gamma l}} \quad (9-24)$$

$$I_x = \frac{E_s}{Z_o} \frac{(Z_o + Z_R)e^{\gamma y} + (Z_o - Z_R)e^{-\gamma y}}{(Z_o + Z_R)e^{\gamma l} - (Z_o - Z_R)e^{-\gamma l}} \quad (9-25)$$

Por otra parte, pueden hacerse las mediciones en el extremo receptor del sistema, caso en que conviene expresar las ecuaciones en términos de las cantidades propias del extremo receptor. Las transformaciones necesarias se obtienen haciendo $y = 0$ con el fin de obtener una expresión para E_R y eliminando luego E_s de las Ecs. (9-24) y (9-25). El estudiante puede demostrar que las ecuaciones resultantes son

$$E_x = \frac{I_R}{2} [(Z_o + Z_R)e^{\gamma y} - (Z_o - Z_R)e^{-\gamma y}] \quad (9-26)$$

$$I_x = \frac{I_R}{2Z_o} [(Z_o + Z_R)e^{\gamma y} + (Z_o - Z_R)e^{-\gamma y}] \quad (9-27)$$

Si bien las ecuaciones de línea anteriores son muy adecuadas para los fines del cómputo numérico, el estudio de algunos fenómenos propios de las líneas simplificase expresando las ecuaciones en términos de las funciones hiperbólicas de γy . (Véase el Apéndice.) Las nuevas formas pueden obtener reuniendo los términos en Z_o y Z_R en las Ecs. (9-26) y (9-27) y combinando los exponentiales para llegar a

$$E_x = E_R \cosh \gamma y + I_R Z_o \operatorname{senh} \gamma y \quad (9-28)$$

$$I_x = I_R \cosh \gamma y + \frac{E_R}{Z_o} \operatorname{senh} \gamma y \quad (9-29)$$

9-7. Impedancias de entrada y de trasferencia de la línea de trasmisión terminada. En los capítulos anteriores se ha puntualizado

que dos de las propiedades más importantes de las redes de cuatro terminales (de las cuales la línea de transmisión es un caso) son sus impedancias de malla de entrada y de trasferencia. Estas pueden obtenerse a partir de las ecuaciones anteriores para la línea general terminada en Z_R . El extremo trasmisor de la línea está definido por $y = l$; luego, de las Ecs. (9-26), (9-27) y (9-16),

$$Z_{in} = \frac{E_S}{I_S} = Z_o \frac{1 + \rho e^{-2\gamma l}}{1 - \rho e^{-2\gamma l}} \quad (9-30)$$

$$Z_t = \frac{E_S}{I_R} = \frac{1}{2} [(Z_o + Z_R)e^{\gamma l} - (Z_o - Z_R)e^{-\gamma l}] \quad (9-31)$$

o, en forma hiperbólica,

$$Z_{in} = Z_o \frac{Z_o \operatorname{senh} \gamma l + Z_R \cosh \gamma l}{Z_o \cosh \gamma l + Z_R \operatorname{senh} \gamma l} \quad (9-30a)$$

$$Z_t = Z_o \operatorname{senh} \gamma l + Z_R \cosh \gamma l \quad (9-31a)$$

Como ejemplo para la aplicación de las diversas ecuaciones obtenidas, volveremos a resolver el problema del Ap. 9-4, primero con las ecuaciones en la forma exponencial y luego con las ecuaciones en la forma hiperbólica. Dado que se especifican magnitudes del generador y hay que calcular E_R , puede usarse la Ee. (9-22) haciendo $x = l$.

$$E_R = \frac{2E_S Z_o Z_R}{(Z_o + Z_R)(Z_o + Z_R)e^{\gamma l} - (Z_o - Z_R)(Z_o - Z_R)e^{-\gamma l}}$$

A partir de los datos

$$Z_o + Z_g = 689 - j175 + 600 = 1.289 - j175 = 1.300/-7.74^\circ$$

$$Z_o + Z_R = 689 - j175 + 353,5 + j353,5 = 1.042,5 + j178,5 = 1.060/9,7^\circ$$

$$e^{\gamma l} = e^{\alpha l} / \beta l = e^{0,785} / \frac{\pi}{180} (2,87) = 2,192/164,2^\circ$$

$$(Z_o + Z_g)(Z_o + Z_R)e^{\gamma l} = (1,3 \times 10^3)/-7,74^\circ (1,06 \times 10^3)/9,7^\circ 2,192/164,2^\circ \\ = 3,02 \times 10^6/166,2^\circ = (-2,935 + j0,72)10^6$$

$$Z_o - Z_g = 689 - j175 - 600 = 89 - j175 = 196,8/-63,1^\circ$$

$$Z_o - Z_R = 689 - j175 - 353,5 - j353,5 = 335,5 - j528,5 = 626/-57,6^\circ \\ e^{-\gamma l} = 0,456/-164,2^\circ$$

$$(Z_o - Z_g)(Z_o - Z_R)e^{-\gamma l} = (1,968 \times 10^2)/-63,1^\circ (6,26 \times 10^2)/-57,6^\circ 0,456/-164,2^\circ \\ = 5,64 \times 10^4/-284,9^\circ = (1,455 + j5,45)10^4$$

$$(Z_o + Z_g)(Z_o + Z_R)e^{\gamma l} - (Z_o - Z_g)(Z_o - Z_R)e^{-\gamma l} = (-2,935 + j0,72 - 0,01455 - j0,0545) \times 10^6 = (-2,95 + j0,665) \times 10^6 \\ = 3,02 \times 10^6/167,2^\circ$$

Sustituyendo

$$E_R = \frac{2(2)(7,11 \times 10^2)/-14,25^\circ (5 \times 10^2)/45^\circ}{3,02 \times 10^6/167,2^\circ} = 0,471/-135,5^\circ \text{ volts}$$

$$\text{Luego } P_R = |E_R|^2 G_R = \frac{|E_R|^2 \cos \theta_R}{|Z_R|} = \frac{(0,471)^2 (0,707)}{0,5 \times 10^3} = 0,314 \text{ mw}$$

Lo que coincide con los resultados anteriores.

Para usar las formas hiperbólicas derivaremos una ecuación para I_R .

Poniendo $x = l$ en la Ec. (9-23) y agrupando términos,

$$I_R = \frac{E_S}{(Z_o + Z_R) \cosh \gamma l + (Z_o - Z_R) \operatorname{senh} \gamma l}$$

De las tablas de funciones circulares e hiperbólicas de números reales se obtienen los siguientes valores:

$$\begin{aligned} \operatorname{senh} \alpha l &= \operatorname{senh} 0,785 = 0,868 \\ \cosh \alpha l &= \cosh 0,785 = 1,324 \\ \operatorname{sen} \beta l &= \operatorname{sen} 164,33^\circ = 0,270 \\ \cos \beta l &= \cos 164,33^\circ = -0,963 \end{aligned}$$

Por las ecuaciones del Apéndice,

$$\begin{aligned} \operatorname{senh} \gamma l &= \operatorname{senh} (\alpha l + j\beta l) \\ &= [0,868 \times (-0,963)] + j(1,324 \times 0,270) \\ &= -0,835 + j0,358 = 0,910/156,86^\circ \\ \cosh \gamma l &= [1,324 \times (-0,963)] + j(0,868 \times 0,270) \\ &= -1,274 + j0,234 = 1,297/169,6^\circ \end{aligned}$$

Los valores polares pueden obtenerse de la manera indicada en el Apéndice. Una solución de alternativa para $\operatorname{senh} \gamma l$ y $\cosh \gamma l$ sería

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \beta l &= \operatorname{tg} 164,33^\circ = -\operatorname{tg} 15,67 = -0,0280 \\ \operatorname{tgh} \alpha l &= \operatorname{tgh} 0,785 = 0,656 \\ \operatorname{senh} \gamma l &= \sqrt{(0,868)^2 + (0,270)^2} / \operatorname{arc tg} \frac{-0,280}{0,656} \\ &= 0,910 / \operatorname{arc tg} -0,427 \end{aligned}$$

De una tabla de tangentes,

$$\operatorname{arc tg} 0,427 = 23,13^\circ$$

Dado que $\beta l = 164,33^\circ$ está en el segundo cuadrante, $\operatorname{senh} \gamma l$ está en el segundo cuadrante. Por lo tanto,

$$\operatorname{senh} \gamma l = 0,910/156,87^\circ$$

De modo similar

$$\cosh \gamma l = \sqrt{(0,868)^2 + (0,963)^2} / \operatorname{arc tg} (-0,280 \times 0,656) \\ = 1,297/169,6^\circ$$

Prosiguiendo con el problema,

$$Z_R + Z_g = 353,5 + j353,5 + 600 = 953,5 + j353,5 \\ = 1,046/20,3^\circ$$

$$Z_o + \frac{Z_R Z_g}{Z_o} = 689 - j175 + \frac{600/0^\circ \times 500/45^\circ}{711/-14,23^\circ} \\ = 902 + j190 = 923/11,88^\circ$$

Sustituyendo,

$$\begin{aligned} I_R &= \frac{2}{1.046/20,3^\circ \times 1,297/169,6^\circ + 923/11,88^\circ \times 0,910/156,87^\circ} \\ &= \frac{2}{1.318/189,9^\circ + 838/168,75^\circ} \\ &= \frac{2}{-1.300 - j229 - 822 + j164} \\ &= \frac{2}{-2.122 - j65} \\ |I_R| &= \frac{2}{2.123} = 0,944 \times 10^{-3} \\ |E_R| &= |I_R| |Z_R| = 0,944 \times 10^{-3} \times 500 = 0,472 \text{ volt} \end{aligned}$$

Estos valores concuerdan con los obtenidos en la primera solución.

9-8. Pérdida de inserción de la línea de trasmisión. Se había demostrado en el Cap. VI que la pérdida de inserción de una red simétrica de cuatro terminales difiere de la pérdida de atenuación, a menos que la red esté terminada en su impedancia característica. Este hecho puede comprobarse en el caso de la línea de trasmisión y es posible también una interpretación de la causa de la diferencia.

Supongamos que el generador de la Fig. 9-1a esté conectado directamente a la carga Z_R . Luego, la corriente que circularía por la carga en estas condiciones sería

$$I'_R = \frac{E_g}{Z_o + Z_R} \quad (9-32)$$

Con la línea insertada entre el generador y la carga, la corriente que circula por ésta resulta de poner $x = l$ en la Ec. (9-23):

$$I_R = \frac{2E_g Z_o}{(Z_o + Z_g)(Z_o + Z_R)e^{jl} - (Z_o - Z_g)(Z_o - Z_R)e^{-jl}} \quad (9-33)$$

En general, si al es grande, digamos, por lo menos de 2,3 neper, el segundo término del denominador resulta despreciable en comparación con el primero. (Así ocurría en el ejemplo ilustrativo del último apartado y en el primer apartado de este capítulo.) Con esta aproximación, la pérdida de inserción es la dada por la Ec. (6-62a):

$$\begin{aligned} \text{Pérdida de inserción} &= \ln \left| \frac{I'_R}{I_R} \right| = \ln \left(\frac{|Z_o + Z_g| |Z_o + Z_R| e^{al}}{2|Z_o| |Z_o + Z_R|} \right) \\ &= al + \ln \frac{|Z_o + Z_g| |Z_o + Z_R|}{2|Z_o| |Z_o + Z_R|} \text{ neper} \quad (9-34) \end{aligned}$$

Si Z_g o Z_R es igual a Z_c , el segundo término de la Ec. (9-34) deviene cero y las pérdidas de inserción y de atenuación resultan iguales. Se ve, entonces, que en general la pérdida de inserción de la línea difiere de la pérdida de atenuación al a causa de la falsa adaptación de impedancias en uno cualquiera de los extremos.

Estos hechos pueden relacionarse con la Ec. (9-34) descomponiendo adecuadamente el segundo término, como se hace en el apartado siguiente.

9-9. Factor de reflexión. Cuando una línea está terminada en Z_c , toda onda que se propaga a lo largo de ella es completamente absorbida en el extremo receptor. Si la terminación es otra, no toda la energía de la onda incidente es absorbida sino que una parte de ella se devuelve como onda reflejada. Dícese, por lo tanto, que una terminación no igual a Z_c es causa de reflexión. Esta idea de reflexión en un empalme puede extenderse a dos impedancias cualesquiera, una de generador y otra de carga. Consideremos la Fig. 9-4. Los dos circuitos tienen la misma f. e. m. El circuito a corresponde al caso en que las dos impedancias son iguales, mientras que b representa la situación $Z_a \neq Z_b$. La corriente y la potencia aparente entre-gadas a la carga en la Fig. 9-4a son

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{E}{2Z_a} \\ (VA)_1 &= I_1^2 Z_a = \frac{E^2}{4Z_a} \end{aligned} \quad (9-35)$$

mientras que en la Fig. 9-4b se tiene

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{E}{Z_a + Z_b} \\ (VA)_2 &= I_2^2 Z_b = \frac{E^2 Z_b}{(Z_a + Z_b)^2} \end{aligned} \quad (9-36)$$

La constante de transferencia de una red adecuadamente determinada se define como el logaritmo natural de la relación de los voltamperes de entrada a los voltamperes de salida. Esta "constante de transferencia" se discutirá con mayor detalle en el Cap. XI. Con esta definición, el efecto de la falsa adaptación de la Fig. 9-4b puede también expresarse en términos de la constante de trasferencia θ de una red que, insertada entre el generador y la carga de la Fig. 9-4a, produciría la misma caída de la potencia aparente que la falsa adaptación de la Fig. 9-4b. Se tendría así

$$e^{-2\theta} = \frac{(VA)_2}{(VA)_1} = \frac{4Z_a Z_b}{(Z_a + Z_b)^2} \quad (9-37)$$

El término factor de reflexión se aplica a la relación $e^{-\theta}$ y se denota aquí con el símbolo k .*

$$k = e^{-\theta} = \frac{2\sqrt{Z_a Z_b}}{Z_a + Z_b} \quad (9-38)$$

* En la norma ASA Y10.9-1953 se usa el símbolo ρ tanto para el factor de reflexión como para el coeficiente de reflexión. Para evitar confusión, designamos en este texto el factor de reflexión k y reservamos ρ para el coeficiente de reflexión, definido por la Ec. (9-16).

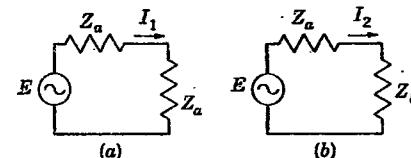


FIG. 9-4. Redes para la determinación de la pérdida por reflexión.

La pérdida de inserción dada por la Ec. (9-34) puede expresarse en términos de factores de reflexión. Esta ecuación puede reordenarse del modo siguiente:

$$\begin{aligned} \text{Pérdida de inserción} &= \alpha l + \ln \left| \frac{Z_g + Z_o}{2 \sqrt{Z_g Z_o}} \right| \left| \frac{Z_R + Z_o}{2 \sqrt{Z_R Z_o}} \right| \left| \frac{2 \sqrt{Z_g Z_R}}{Z_g + Z_R} \right| \\ &= \alpha l + \ln \left| \frac{Z_g + Z_o}{2 \sqrt{Z_g Z_o}} \right| + \ln \left| \frac{Z_R + Z_o}{2 \sqrt{Z_R Z_o}} \right| - \ln \left| \frac{Z_g + Z_R}{2 \sqrt{Z_g Z_R}} \right| \quad (9-39) \end{aligned}$$

Sean k_s el factor de reflexión en el extremo trasmisor, k_r el factor de reflexión en el extremo receptor, y k_{sr} el factor de reflexión que se tendría conectando el generador directamente a la carga. Luego

Pérdida de inserción =

$$= \alpha l + \ln \left| \frac{1}{k_s} \right| + \ln \left| \frac{1}{k_r} \right| - \ln \left| \frac{1}{k_{sr}} \right| = \alpha l + \ln \left| \frac{1}{k_s} \right| \text{ neper} \quad (9-40)$$

El término $\ln |1/k|$ se llama *pérdida de reflexión*. En algunos casos, $\ln |1/k|$ es un número negativo, y entonces se tiene, en realidad, una *ganancia de reflexión*. Por la Ec. (9-39) es evidente que, dentro de las aproximaciones usadas en la derivación de la Ec. (9-34), la pérdida de inserción de una línea en neper es igual a la pérdida de atenuación de la línea más la pérdida de reflexión en el extremo trasmisor, más la pérdida de reflexión en el extremo receptor, menos la pérdida de reflexión que se tendría conectando el generador directamente al receptor *.

La verdadera pérdida de potencia para los dos casos de la Fig. 9-4 no está dada por el factor de reflexión o la pérdida de reflexión. Si se busca la relación de *potencias*,

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{(VA)_1 \cos \theta_a}{(VA)_2 \cos \theta_b} = \frac{\cos \theta_a}{k^2 \cos \theta_b} \quad (9-41)$$

donde θ_a = ángulo de Z_a

θ_b = ángulo de Z_b

Por lo tanto, la pérdida en neper introducida al cambiar la impedancia de carga de Z_a a Z_b sería

$$N_{\text{neper}} = \ln \left| \frac{1}{k} \right| + \frac{1}{2} \ln \frac{\cos \theta_b}{\cos \theta_a} \quad (9-42)$$

No obstante, dado que los ángulos no necesitan aparecer en la fórmula completa [Ec. (9-40)] no se incluye el segundo término de la Ec. (9-42) en la definición de la *pérdida de reflexión*.

Si no pueden reputarse válidas las aproximaciones usadas en la derivación de la Ec. (9-34), debe introducirse en la Ec. (9-40) un término adicional, llamado *factor de interacción*. Sin embargo, en este caso es por lo común más conveniente obtener la pérdida de inserción por cálculo directo de la potencia entregada a la carga sin y con la red, de modo

* El hecho de que la pérdida de reflexión es nula cuando $Z_R = Z_o$ o cuando $Z_g = Z_o$ se traduce respecto de la Ec. (9-40) en el hecho de que si uno de los factores de reflexión k_s y k_r es igual a la unidad, el otro se hace igual a k_{sr} , con lo que la Ec. (9-40) conserva sólo el término correspondiente a la pérdida de atenuación. (N. del T.)

que no lo discutiremos aquí. El lector puede consultar los trabajos de Johnson y Shea sobre este factor de interacción.

9-10. Analogía entre las ondas eléctricas en la línea y las ondas de agua en un canal. Las Ecs. (9-22a) y (9-23a) han sido interpretadas en términos de ondas eléctricas *progresivas*, correspondiendo el primer término a la onda progresiva incidente que viaja del generador a la carga y el segundo, a la onda reflejada iniciada por reflexión en Z_R y que viaja hacia el extremo trasmisor. *. Las ondas progresivas tienen su contraparte en hidráulica, en el caso de un canal muy estrecho y largo. Si se produce un disturbio en un extremo del canal, comienzan a propagarse una onda a lo largo del canal y las "olas" en la superficie patentizan valores instantáneos similares a los valores instantáneos de tensión o de corriente de la Fig. 6-7. Si se dispusieran flotadores en el canal, guiado por varillas verticales de tal modo que pudieran subir con el agua y quedar, gracias a la fricción, en la posición más elevada alcanzada, de modo de registrar así los valores *máximos*, se obtendría una línea recta, similar a la de los valores leídos con un voltímetro en una línea infinita sin pérdidas, Fig. 6-10a.

Supongamos que, en lugar de un canal indefinidamente largo, se levanta un delgado dique vertical sobre el cual chocan las olas. Se producirá entonces un amontonamiento de agua contra el dique, lo que originará una onda que se mueve en sentido contrario al de la onda inicial.

Del mismo modo, si la línea eléctrica no es indefinidamente larga o terminada en su impedancia característica, y está en cambio en circuito abierto, entonces, cuando las ondas llegan al extremo, se reflejan también. La onda eléctrica en movimiento tiene la mitad de su energía almacenada en el campo eléctrico y la mitad en el campo magnético. Cuando la onda llega al extremo abierto, el campo magnético desaparece, porque la corriente se anula. Pero un campo magnético variable produce un campo eléctrico. La energía almacenada en el campo magnético se transforma en energía del campo eléctrico y se agregará a la del campo de esta clase ya existente, de modo que aumenta la tensión en el extremo de la línea. Esta tensión aumentada origina una onda progresiva de sentido opuesto al de la inicial, y dado que no hay nada que pueda absorber energía en el extremo abierto, la onda reflejada tiene la misma magnitud que la onda original. Cuando el campo eléctrico comienza a desplazarse hacia atrás, provoca la aparición de un campo magnético y la energía vuelve a dividirse entre eléctrica y magnética. Dado que el campo eléctrico se ha duplicado, simplemente, en el instante de reflexión, la tensión de la onda de retorno comienza con la misma

* En rigor, cuando las dos terminaciones de la línea están mal adaptadas, la interpretación física del fenómeno indica que por la línea se propaga una infinidad de ondas, puesto que la primera onda reflejada producida por la falsa adaptación del receptor, se refleja también en el extremo trasmisor; la onda así originada, que viaja en el mismo sentido que la inicial, vuelve a reflejarse en el extremo receptor, y así sucesivamente. No obstante, este conjunto infinito de ondas puede expresarse a modo de una única onda incidente y una única onda reflejada, pues todas las ondas que viajan en un sentido admiten como resultante una onda única. Respecto de la analogía que el autor considera en este capítulo, nos permitimos sugerir la lectura de nuestro artículo "Hablemos sobre las líneas", Revista Telegráfica Electrónica, Nrs. 537 a 544 y 546. (N. del T.)

fase que la onda original, pero la onda magnética, y, por lo tanto, la corriente de la onda reflejada, tiene fase opuesta a la de la onda incidente en el punto de reflexión en circuito abierto. La tensión y la corriente totales en un punto cualquiera de la línea y en un instante cualquiera serán iguales a las sumas de las tensiones y corrientes de las ondas incidente y reflejada. Que la corriente se ha invertido en cuanto a la fase es evidente por el hecho de que la suma de las dos corrientes tiene que ser cero en el punto de reflexión (en circuito abierto) y, dado que las dos tensiones son iguales y no tienen resultante nula, ellas tienen que estar en fase.

Esto se demuestra también reordenando la Ec. (9-14) e introduciendo en ella la condición $Z_R = \infty$:

$$\frac{I''_R}{I'_R} = \frac{Z_o - Z_R}{Z_o + Z_R} = \frac{Z_o/Z_R - 1}{Z_o/Z_R + 1}$$

Si $Z_R = \infty$,

$$\frac{I''_R}{I'_R} = -1$$

De modo similar, de la Ec. (9-16),

$$\rho = \frac{E''_R}{E'_R} = 1/0$$

Consideraremos ahora la formación de ondas estacionarias en la línea de trasmisión en los casos en Z_R es cero o infinita (línea en cortocircuito o en circuito abierto).

9-11. Línea en circuito abierto con atenuación. La tensión estacionaria a lo largo de una línea de trasmisión está dada por la Ec. (9-22a), $E_x = E'_R e^{\gamma y} + E''_R e^{-\gamma y}$. El valor instantáneo de la componente incidente está dado por

$$E'_x(y, t) = \operatorname{Re} \{ \hat{E}'_R e^{\gamma y} e^{j\omega t} \} = \hat{E}'_R e^{\alpha y} \cos(\omega t + \beta y) \quad (9-43)$$

lo que indica que la onda se propaga en el sentido de las y negativas; la onda componente reflejada es

$$E''_x(y, t) = \operatorname{Re} \{ \hat{E}''_R e^{-\gamma y} e^{j\omega t} \} = \hat{E}''_R e^{-\alpha y} \cos(\omega t - \beta y + \varphi) \quad (9-44)$$

lo que indica que la onda se propaga en el sentido de las y positivas. Si la línea termina en un circuito abierto, $\rho = 1/0^\circ$, con lo que E'_R y E''_R resultan iguales y en fase. Las dos componentes han sido representadas en la Fig. 9-5 para instantes sucesivos de tiempo en el transcurso de un semiciclo. El segundo semiciclo sería el mismo, excepto por la inversión del signo de todas las ondas, componentes y resultantes. En la Fig. 9-5F se ven superpuestas todas las ondas resultantes. Los valores que serían indicados por un voltímetro conectado a la línea en circuito abierto corresponderían a la envolvente de la curva de la Fig. 9-5F, puesto que el instrumento indicaría un valor proporcional a la máxima amplitud que ocurre en cada punto. Dado que los máximos

y los mínimos quedan fijos en posición a lo largo de la línea, las lecturas del voltímetro indican la presencia de una onda estacionaria de tensión.

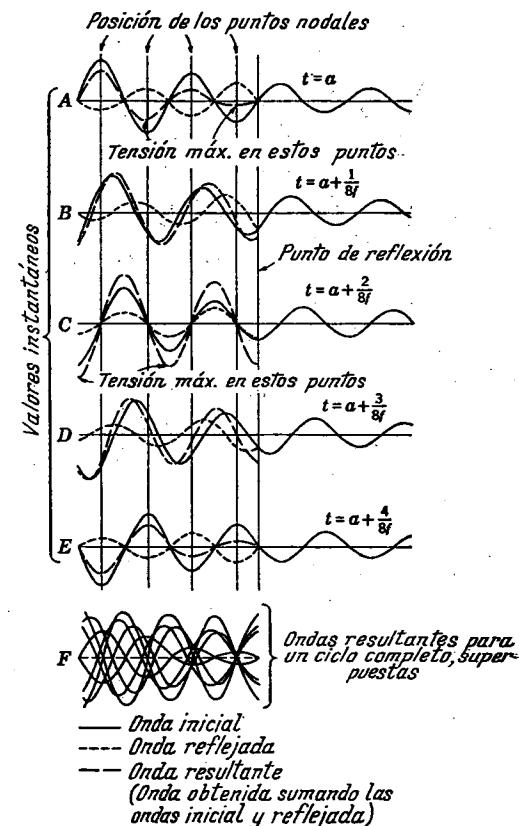


FIG. 9-5. Distribución instantánea de la tensión en una línea en círculo abierto o de la corriente en una línea en cortocircuito, con atenuación.

La ecuación de la onda estacionaria puede derivarse fácilmente a partir de las ecuaciones de línea en la forma hiperbólica. Por ejemplo, dado que $Z_R = \infty$ en la terminación en circuito abierto, I_R tiene que ser cero y la Ec. (9-28) reduzca a

$$E_x = E_R \cosh \gamma y = E_R \cosh (\alpha y + j\beta y) \quad (9-45)$$

Dado que el voltímetro indica un valor proporcional a la magnitud de la tensión, por la Ec. (A-16a),

$$|E_x| = |E_R| \sqrt{\operatorname{senh}^2 \alpha y + \cos^2 \beta y} \quad (9-45a)$$

A medida que y aumenta, el primer término bajo el radical aumenta continuamente, mientras que el segundo término varía entre + 1 y 0. Al principio predominará el término \cos^2 , pero a medida que aumenta la longitud, el término senh^2 se hace más y más importante, efecto

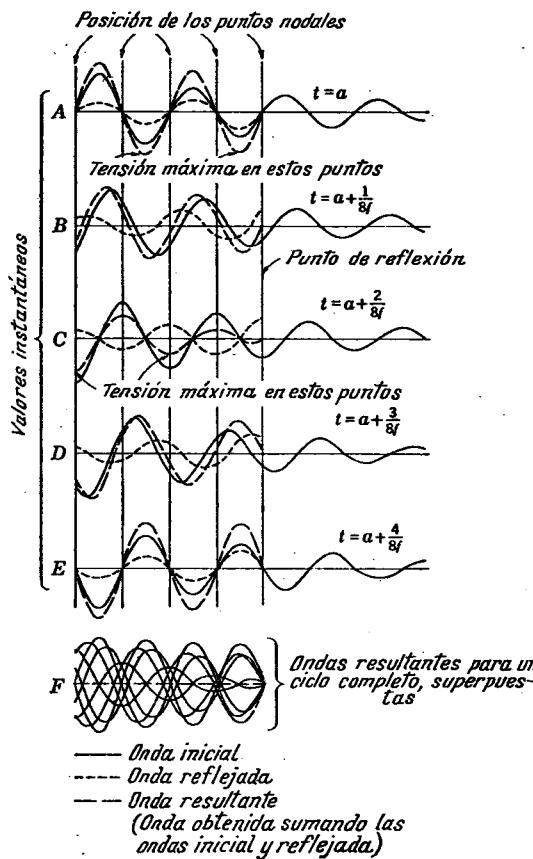


FIG. 9-6. Distribución instantánea de corriente en una línea en circuito abierto o de tensión en una línea en cortocircuito, con atenuación.

que se siente tanto más pronto cuanto mayor es α . Las fluctuaciones entre los máximos y los mínimos tienden a disminuir a medida que crece y , como lo indica la curva B en la Fig. 9-7.

Si la onda es invertida por la reflexión, como es del caso para la corriente en la línea en circuito abierto, las ondas incidente y reflejada, durante medio ciclo, aparecen como se ve en la Fig. 9-6A a E. La Fig. 9-6F muestra la superposición de las ondas resultantes en el transcurso de un ciclo completo, y la corriente eficaz representada por esas ondas vuelve a corresponder a la envolvente de estas curvas, lo que indica la presencia de una onda estacionaria de corriente. El estudiante puede obtener

la expresión correspondiente a esta curva envolvente a partir de las Ecs. (9-29) y (A-15a).

Se observará en las Fig. 9-5 y 9-6 que el instante en que la onda es máxima en los nodos, está desplazado en un cuarto de período (tiempo) respecto del instante en que es máxima en los antinodos.

En la Fig. 9-7 se muestra una representación de las *envueltas* de las Figs. 9-5F y 9-6F para ilustrar la manera cómo varía la corriente y la tensión efectivas o máximas a lo largo de una línea con reflexión completa. También se ha representado en esta figura la curva expo-

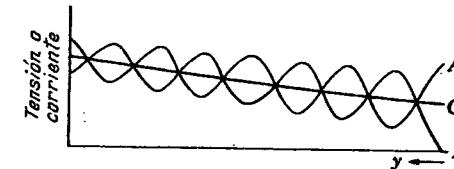


FIG. 9-7. Distribución de la tensión y la corriente efectiva a lo largo de una línea con atenuación.

nencial correspondiente a la distribución de las mismas cantidades en una línea terminada en su impedancia característica. Obsérvese que las fluctuaciones de corriente son similares a las de tensión, excepto porque los máximos de corriente están desplazados un cuarto de longitud de onda con respecto a los máximos de tensión.

Designando con Z_{oc} la impedancia de entrada de una línea en circuito abierto, se tiene, según las Ecs. (9-30a), (A-3), (A-15a) y (A-16a),

$$Z_{oc} = Z_0 \operatorname{ctgh} \gamma l \quad (9-46)$$

$$= Z_0 \sqrt{\frac{\operatorname{senh}^2 \alpha l + \cos^2 \beta l}{\operatorname{senh}^2 \alpha l + \operatorname{sen}^2 \beta l}} / \operatorname{arc tg} (\operatorname{tgh} \alpha l \operatorname{tg} \beta l) - \operatorname{arc tg} \frac{\operatorname{tg} \beta l}{\operatorname{tgh} \alpha l} \quad (9-46a)$$

Se ve que la magnitud de esta impedancia pasa por valores mínimos aproximadamente cuando $\cos^2 \beta l = 0$ y $\operatorname{sen}^2 \beta l = 1$ y por valores máximos, aproximadamente cuando $\cos^2 \beta l = 1$ y $\operatorname{sen}^2 \beta l = 0$. Estos valores mínimos corresponden a los cuartos impares de longitud de onda, es decir, cuando,

$$\beta l = (2n + 1) \frac{\pi}{2}$$

mientras que los valores máximos corresponden a los cuartos pares de longitud de onda, esto es, cuando $\beta l = 2n\pi/2$. Para las longitudes en

LUIS J. BRANDO
INGENIERO
TECNOLÓGICO
ELECTRÓNICO

que $\operatorname{sen}^2 \beta l = 0$ o $\cos^2 \beta l = 0$, es decir, para todos los cuartos de onda correspondientes a los máximos o los mínimos de $|Z_{oc}|$,

$$\operatorname{arctg} (\operatorname{tgh} \alpha l \operatorname{tg} \beta l) = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \beta l}{\operatorname{tgh} \alpha l} = 0 \text{ o } \infty$$

y el ángulo de la cotangente hiperbólica (y la tangente hiperbólica), tal como está dado en la Ec. (9-46a), es cero. El ángulo de Z_{oc} es entonces el mismo que el de la impedancia característica.

9-12. Línea en cortocircuito con atenuación. Las Ecs. (9-43) y (9-44) son también aplicables a la línea en cortocircuito siempre que, naturalmente, se establezcan las debidas relaciones entre E''_R y E'_R . Dado que $Z_R = 0$,

$$\rho = \frac{Z_R - Z_o}{Z_R + Z_o} = -1 \quad E''_R = -E'_R \quad I''_R = I'_R$$

Por lo tanto, la Fig. 9-6 es aplicable a la tensión, y la Fig. 9-5 a la corriente, en una línea en cortocircuito. El estudiante podrá derivar expresiones para $|E_x|$ e $|I_x|$ para el caso de la terminación en cortocircuito y relacionar los resultados con la Fig. 9-7.

Por la Ec. (9-30a), y Z_{sc} la impedancia de entrada de la línea en cortocircuito es,

$$Z_{sc} = Z_o \operatorname{tgh} \gamma l = \frac{Z_o}{\operatorname{ctgh} \gamma l} \quad (9-47)$$

Comparando esta ecuación con la (9-46), obsérvese que la cotangente hiperbólica ha pasado al denominador; por lo tanto las longitudes o las frecuencias que corresponden a los máximos de $|Z_{oc}|$, corresponden a los mínimos de $|Z_{sc}|$, y viceversa.

9-13. Diagrama fasorial de la línea terminada en una reactancia. Si la línea termina en una reactancia pura en lugar de en un cortocircuito, no hay tampoco absorción de energía en el extremo reflector y debe haber, por lo tanto, reflexión completa. En estas circunstancias, habrá desplazamiento de fase en la tensión y en la corriente en el extremo receptor, siendo el desplazamiento relativo total de 180° , pero dividiéndose el desplazamiento de una manera que depende de la magnitud y el carácter, inductivo o capacitivo, de la reactancia.

En la Fig. 9-8 se muestra el diagrama fasorial progresivo para el caso en que la línea tiene atenuación y está terminada en una reactancia pura. Se supone que la línea tiene menos de un cuarto de onda de longitud y, para mayor sencillez, se tomó como resistiva pura su impedancia característica, es decir, $\omega L/R = \omega C/G$. Si como es por lo común del caso, la impedancia característica tiene una componente capacitiva, el fasor de corriente precederá al fasor de tensión en todos los puntos.

En la Fig. 9-8a se representan la tensión y la corriente de la onda inicial en el punto que está a menos de un cuarto de onda del extremo de la línea. En la Fig. 9-8b aparecen los fasores en el momento de llegar al extremo. En la Fig. 9-8c se muestran los desplazamientos de fase de la tensión y la corriente debidos a la reflexión en la reactancia,

siendo esta reflexión de tal carácter que la corriente y la tensión debidas a la suma de las ondas inicial y reflejada tienen la relación de magnitud y fase determinada por la reactancia terminal. La solución cuantitativa para el desplazamiento de fase está dada por la Ec. (9-16). En la Fig. 9-8d se suman estas corrientes y tensiones, y en ella se advierte que los desplazamientos supuestos corresponden al caso de una

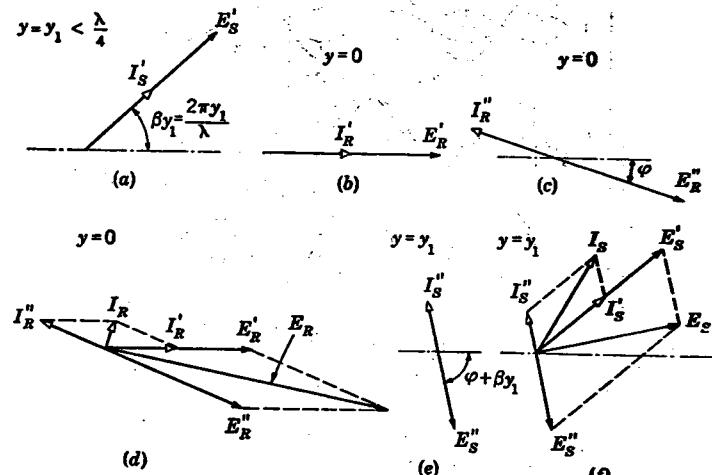


FIG. 9-8. Diagrama fasorial progresivo de una línea terminada en una capacitancia pura.

carga capacitiva. Al llegar al punto y_1 , la corriente y la tensión de la Fig. 9-8c se retardan en el ángulo βy_1 , además de atenuarse, según lo indica la Fig. 9-8e. En la Fig. 9-8f se muestran las resultantes de corriente y tensión en el punto y_1 , debidas a la suma de los fasores de las Figs. 9-8a y 9-8e.

9-14. Tensión y corriente instantáneas en la línea terminada. En el modelo hidráulico antes mencionado, una parte de la energía hubiera sido reflejada y otra parte hubiera continuado propagándose si en lugar de un dique se hubiera tenido un tablero sumergido en el canal. La onda de retorno no sería entonces tan amplia como la onda original.

Si se unen extremo a extremo dos líneas de transmisión de diferentes impedancias características, o si una línea está terminada en una impedancia diferente de la característica, hay también, reflexión, pero la onda reflejada es más débil que la onda incidente. Se producen también ondas estacionarias, pero dado que las dos ondas nunca pueden cancelarse por completo, la corriente y la tensión nunca se anulan, ni siquiera en el extremo receptor. Las Figs. 9-9 A a E muestran las representaciones para diversos instantes de los valores instantáneos de tensión para el caso de reflexión parcial, cuando la magnitud de la onda reflejada es la mitad de la magnitud de la onda original. La Fig. 9-9F representa los valores efectivos de la tensión a lo largo de

la línea y se la obtiene examinando las curvas A a E y determinando la tensión máxima que ocurre en cada punto de la línea. Si la impedancia de la terminación es de mayor valor absoluto que la impedancia

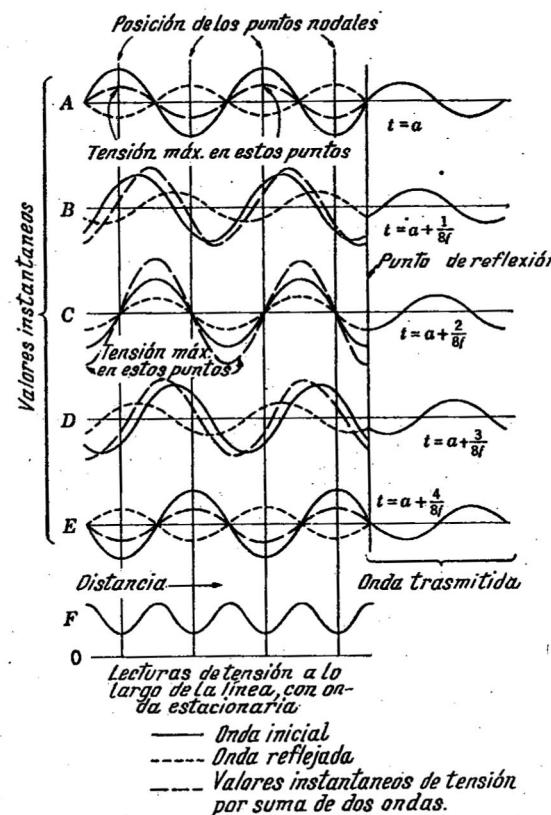


FIG. 9-9. Distribución instantánea de la tensión en una línea terminada en otra línea de mayor impedancia característica. (Se ha supuesto despreciable la atenuación.)

característica, pero de igual ángulo, los puntos de mínimo de la corriente y la tensión coinciden en posición con los nodos de la línea en circuito abierto, mientras que si la impedancia terminal es menor que la impedancia característica, los puntos de mínimo coinciden con los nodos de la línea en cortocircuito. En ambos casos, los mínimos de tensión coinciden con los máximos de corriente y viceversa.

9-15. Diagrama fasorial para la línea de transmisión general. En la Fig. 9-10 se ve el diagrama fasorial correspondiente al caso más general de una línea con atenuación, cuya impedancia característica tiene una componente capacitiva, y que está cargada con una impedancia que posee a la vez componentes resistiva y reactiva y no igual a

la impedancia característica. Los diagramas corresponden paso a paso a las mismas situaciones que los de la Fig. 9-8. Este diagrama se ha trazado a base de los datos obtenidos en el problema ilustrativo antes resuelto en este capítulo.

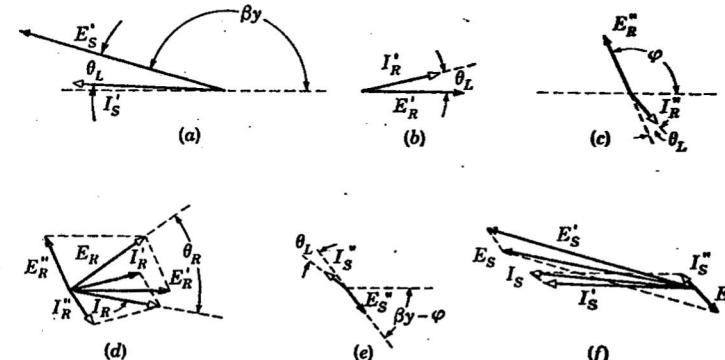


FIG. 9-10. Diagrama fasorial progresivo para una línea con atenuación y terminada en una impedancia compuesta.

El ángulo θ_L es el ángulo de la impedancia característica, en este caso de $-14,25^\circ$. Con el objeto de facilitar la comparación con los otros diagramas, el ángulo de E'_R se ha hecho igual a cero, de modo que los ángulos de la Fig. 9-10 están desplazados en βy ($164,33^\circ$) respecto de los valores obtenidos en el problema. El ángulo φ de la Fig. 9-10c es el ángulo de rotación de la tensión en la reflexión, tal como se lo obtiene con la Ec. (9-16), y es igual a $112,34^\circ$. El ángulo θ_R es el ángulo de la impedancia de carga (45°).

9-16. Característica de impedancia de entrada en función de la frecuencia en la línea de transmisión. En la línea con reflexiones parciales, a medida que aumenta la distancia contada desde el extremo receptor, la impedancia de la línea va pasando por valores máximos y mínimos a intervalos de un cuarto de longitud de onda, según que la onda reflejada va pasando de la coincidencia a la oposición de fase con la onda inicial. Cuando más próxima sea la impedancia de carga (en magnitud y fase) a la impedancia característica, tanto menores son las variaciones de impedancia de la línea con la longitud. Como en el caso de la reflexión total, la atenuación tiene también por efecto el de reducir la amplitud de las variaciones de impedancia a medida que aumenta la longitud de la línea.

Si se mantiene constante la longitud física de la línea y se varía en cambio la frecuencia, la longitud eléctrica, es decir, la longitud física medida en largos de onda, varía en correspondencia con la frecuencia, como también así la relación de fase entre la onda incidente y la onda reflejada. La impedancia característica de una línea varía con la frecuencia de la manera explicada en el Cap. VIII, pero esta variación es lenta. En cambio, cuando hay reflexión, la impedancia de entra-

da varía más o menos de la manera indicada en la Fig. 9-11, la que corresponde al caso de una línea terminada en cortocircuito.

9-17. Localización del punto de reflexión desconocido en una línea de trasmisión. Cuanto mayor es el grado de reflexión y menor la atenuación entre el punto de reflexión y el punto en que se mide la

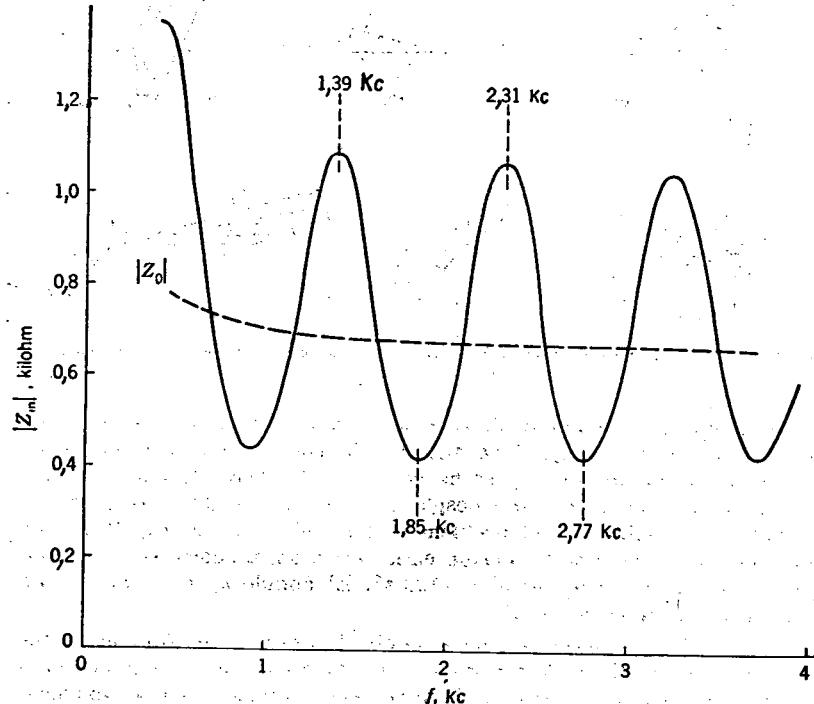


FIG. 9-11. Variación de la magnitud de la impedancia de entrada con la frecuencia en el caso de una línea terminada en cortocircuito.

impedancia, tanto mayor es la amplitud de la variación de impedancia. La diferencia de frecuencia entre dos valores correspondientes a máximos sucesivos es la que hace que la distancia al punto de reflexión varíe en media longitud de onda. Esta variación de la impedancia puede aprovecharse para determinar la distancia a que se encuentra una irregularidad, tal como una falla en una línea telefónica, si hace una medición y se traza una curva como la de la Fig. 9-11. Sea, entonces,

f_1 = frecuencia para cualquier punto de máxima impedancia en la curva de la Fig. 9-11.

f_2 = frecuencia para un punto de máxima impedancia adyacente al anterior.

Pueden usarse puntos de mínimo en lugar de puntos de máximo.

La diferencia entre estas dos frecuencias corresponde a una variación de la longitud eléctrica equivalente a media longitud de onda. Si la distancia en largos de onda es $a \lambda_1$ para f_1 , se tiene, si v es la velocidad de fase y d la distancia física al punto de reflexión,

$$d = a\lambda_1 = \frac{av_1}{f_1} \quad (9-48)$$

y también

$$d = \left(a + \frac{1}{2}\right)\lambda_2 = \left(a + \frac{1}{2}\right)\frac{v_2}{f_2} \quad (9-49)$$

Por la Ec. (9-48)

$$a = \frac{f_1 d}{v_1} \quad (9-50)$$

Introduciendo la Ec. (9-50) en la Ec. (9-49),

$$\begin{aligned} d &= \left(\frac{f_1 d}{v_1} + \frac{1}{2}\right)\frac{v_2}{f_2} \\ v_1 f_1 d &= v_2 f_1 d + \frac{v_1 v_2}{2} \\ d &= \frac{v_1 v_2}{2(v_1 f_2 - v_2 f_1)} \end{aligned} \quad (9-51)$$

Si la velocidad de fase es esencialmente constante dentro del rango de f_1 a f_2 , la Ec. (9-51) deviene

$$d = \frac{v}{2(f_2 - f_1)} \quad (9-51a)$$

La Ec. (9-51) permite determinar la distancia a que se encuentra el punto de reflexión.

9-18. Reflexión como causa de distorsión. La reflexión puede causar tanto distorsión de frecuencia como de retardo. Se ha visto que la impedancia de entrada de la línea varía con la frecuencia cuando hay una irregularidad en la línea. Esto causa una variación con la frecuencia de la potencia absorbida por la línea del generador que la alimenta y, por consiguiente, de la potencia entregada por la línea a la carga, con distorsión de frecuencia como resultado. Esta variación es mayor en las líneas largas de baja atenuación. Cuanto más larga es la línea, más rápidamente varía la impedancia con la frecuencia, mientras que, cuanto menor es la atenuación, tanto mayor es la variación de la impedancia. Si bien las líneas largas tienen en general una elevada atenuación por ellas mismas, es de práctica común introducir repetidores, o amplificadores, que reducen la atenuación en los dos sentidos y dan, por lo tanto, lugar a una onda reflejada de magnitud comparable con la de la onda inicial.

La reflexión da también lugar a distorsión de retardo a modo de ecos. Tanto la velocidad de fase como la de grupo pueden ser tan sólo

del orden de los 15.000 Km/s en un cable cargado, de modo que en una línea de 1.500 Km la señal invierte 1/10 de segundo en llegar del extremo trasmisor al receptor. Si la señal se refleja en este último punto, retorna al punto de partida 1/5 de segundo después de haberlo dejado por primera vez. Este intervalo es suficiente para causar una distorsión considerable a modo de eco. El eco se hace visible cuando se transmiten por la línea señales de telefotografía o televisión. La fotografía de la Fig. 9-12 ilustra un caso de esta clase. En la terminación

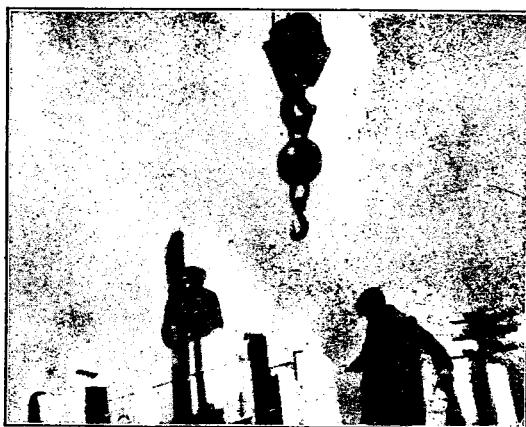


FIG. 9-12. Fotografía trasmisida por alambre en una línea inadecuadamente terminada, en la que se muestra el efecto de la reflexión o eco.

de la línea es difícil conseguir una adaptación perfecta en todas las frecuencias, de modo que siempre hay alguna reflexión. Se observará también que este tipo de distorsión es más pronunciado cuando la línea es eléctricamente larga y sin embargo de baja atenuación, de modo que la onda reflejada resulta comparable con la onda inicial. Esta condición puede darse, por ejemplo, en la bajada de antena de un receptor de televisión. La segunda imagen, observada a menudo como en la Fig. 9-12, se llama vulgarmente "fantasma". No obstante, los "fantasmas" se deben en televisión, más comúnmente, a las reflexiones de las ondas electromagnéticas en su camino desde la antena trasmisora a la antena receptora.

En las líneas largas es ahora costumbre la de instalar supresores de eco. Con el objeto de usar amplificadores en una línea telefónica, de modo de obtener ganancia en los dos sentidos, es necesario introducir un circuito puente que separe las ondas que viajan en un sentido de las que viajan en sentido opuesto. El circuito se explicó en el Cap. V. En este punto hay dos caminos unilaterales y es entonces posible insertar un relé gobernado por la voz que cortocircuite uno de los caminos mientras se usa el otro. Con esto eliminan se eficazmente los ecos.

9-19. Determinación de las constantes de línea por medición de impedancias. Dado que una onda reflejada se ve alterada por el camino que ha recorrido, es de esperar que su condición en el momento del retorno pueda dar una útil información acerca de la ruta que ha seguido. Tal es el caso cuando la atenuación total αl no es demasiado grande, y pueden así determinarse las constantes de la línea midiendo las impedancias de cortocircuito y de circuito abierto.

Dado que

$$Z_{oc} = Z_o \operatorname{ctgh} \gamma l = \frac{Z_o}{\operatorname{tgh} \gamma l}$$

y

$$Z_{sc} = Z_o \operatorname{tgh} \gamma l$$

por lo tanto

$$\sqrt{Z_{oc} Z_{sc}} = Z_o \quad (9-52)$$

que corresponde a la Ec. (3-107) para la sección T.

De modo similar

$$\operatorname{tgh} \gamma l = \sqrt{\frac{Z_{sc}}{Z_{oc}}} \quad (9-53)$$

Si se conoce $\operatorname{tgh} \gamma l$, puede determinarse γl y, por lo tanto, también $\alpha l + j\beta l$.

Dado que $\gamma = \sqrt{ZY}$ y $Z_o = \sqrt{Z/Y}$, pueden determinarse Z e Y si se conocen γ y Z_o :

$$Z_o \gamma = Z = R + j\omega L$$

$$\frac{\gamma}{Z_o} = Y = G + j\omega C$$

Puede obtenerse el valor de γ a partir de la Ec. (9-53) mediante las Ecs. (A-21), o pasando a la forma exponencial, como se ha visto en el ejemplo ilustrativo del Ap. 6-4.

Al computar β hay que tener en cuenta que esta magnitud no es unívoca, es decir, si se da $\operatorname{tg} \beta$, hay un valor correspondiente de β en cada cuadrante alternado. Por ejemplo, si $\operatorname{tg} 2\beta = -1$, β puede ser $3\pi/8, 7\pi/8, 11\pi/8, \dots$. Es por lo tanto necesario conocer el valor aproximado de la velocidad de fase para determinar a qué cuadrante corresponde. Si no se conoce la velocidad, se la puede determinar haciendo una medición a frecuencia variable similar a la de la Fig. 9-11 y aplicando la Ec. (9-51) con un valor conocido de d .

La Ec. (A-21) se utiliza en combinación con la Ec. (9-53) para hallar el valor de γ a partir de los valores de circuito abierto y cortocircuito, y, a partir de γ y Z_o para determinar los valores de las constantes distribuidas de la línea. Al usar la Ec. (A-21) a este respecto, resulta útil recordar, según la Ec. (9-53), que

$$C^2 + D^2 = \frac{|Z_{sc}|}{|Z_{oc}|}$$

Como ejemplo numérico para este método de determinación de las características de una línea a partir de la medición de impedancias, supongámos que los valores leídos en una línea de 50 millas de longitud, a la frecuencia de 796 c/s, son

Entonces

$$\begin{aligned} Z_{oc} &= 328 / -29,2^\circ \\ Z_{sc} &= 1.548 / 6,8^\circ \\ Z_o &= \sqrt{Z_{oc}Z_{sc}} = 712 / -11,2^\circ \end{aligned}$$

Entonces
y

$$\begin{aligned} \tgh \gamma l &= \sqrt{\frac{Z_{sc}}{Z_{oc}}} = 2,17 / 18^\circ \\ \tgh \gamma l &= 2,07 + j0,674 \\ C &= 2,07 \\ D &= 0,674 \\ C^2 + D^2 &= 4,71 \end{aligned}$$

Sustituyendo en la Ec. (A-21),

$$\begin{aligned} \tgh 2\alpha l &= \frac{4,14}{5,71} = 0,724 \\ 2\alpha l &= 0,916 \\ \alpha l &= 0,458 \\ \alpha &= \frac{0,458}{50} = 0,00916 \text{ neper/milla} \\ \tgh 2\beta l &= \frac{1,348}{-3,71} = -0,364 \end{aligned}$$

Se trata de una línea abierta en la que la velocidad es del orden de las 176.000 millas/s (300.000 Km/s), de modo que la longitud de onda es del orden de las 220 millas. Por lo tanto, si la longitud de la línea es de 50 millas, βl debe hallarse en el primer cuadrante. Luego

$$\begin{aligned} 2\beta l &= 160^\circ \\ \beta l &= 80^\circ = 1,40 \text{ radián} \\ \beta &= \frac{1,40}{50} = 0,028 \text{ radián/milla} \\ \gamma &= \alpha + j\beta = 0,00916 + j0,028 = 0,0295 / 71,8^\circ \\ Z &= Z_o \gamma = 712 / -11,2^\circ \times 0,0295 / 71,8^\circ \\ &= 21 / 60,6^\circ \\ &= 10,25 + j18,3 \\ R &= 10,25 \text{ ohms/milla} \\ L &= \frac{18,3}{\omega} = 0,00366 \text{ Henry/milla} \\ Y &= \frac{\gamma}{Z_o} = \frac{0,0295 / 71,8^\circ}{712 / -11,2^\circ} = 41,4 \times 10^{-6} / 83^\circ \\ &= (5 + j41,1) \times 10^{-6} \\ G &= 5 \times 10^{-6} \text{ mho/milla} \\ C &= \frac{41,1 \times 10^{-6}}{\omega} = 0,00822 \mu\text{f/milla} \end{aligned}$$

Mientras las Ecs. (9-52) y (9-53) son válidas para cualquier largo de línea, es conveniente hacer las mediciones en una porción lo suficientemente corta como para que haya una diferencia apreciable entre las impedancias de cortocircuito y de circuito abierto, pues de otro

modo no habrá precisión en el cómputo de γl . Si la onda reflejada es tan atenuada que resulta despreciable en comparación con la onda inicial, es difícil interpretar los resultados.

PROBLEMAS

9-1. Un cable Nº 19 A.W.G. (ver tabla 8-1) tiene 20 Km. de longitud. ¿Cuál será la pérdida de trasmisión de este cable a 796 c/s cuando se lo inserta entre una carga resistiva de 600 ohm y un generador de igual resistencia interna?

9-2. (a) Calcular la pérdida de inserción para el generador, cable y carga del Prob. 9-1. Computar según el método aproximado y por el uso de las ondas inicial y reflejada. (b) Comparar los valores de las pérdidas de trasmisión, inserción y atenuación. Explicar las diferencias.

9-3. El cable del Prob. 9-1 está cargado con el tipo de carga H-88-S (ver tabla 8-3). Computar αl y βl para 1, 2 y 3 Kc/s usando la fórmula de Campbell.

9-4. El cable cargado del Prob. 9-3 se conecta entre el generador y la carga del Prob. 9-1. Computar la pérdida de inserción por el método aproximado y con las formas exponencial o hiperbólica de las ecuaciones de línea.

9-5. En la Fig. 9-4 la condición de pérdida de reflexión nula no siempre coincide con la condición de máxima potencia en la carga. Demostrar este hecho suponiendo que Z_b es la conjugada de Z_a y representando la pérdida de reflexión en decibel como función de $\theta_a = \arctg (X_a/R_a)$.

9-6. Una línea de alambres abiertos de 200 Km de longitud tiene las siguientes constantes a 1 Kc/s:

$$\begin{aligned} \alpha &= 0,0043 \text{ neper/Km} & Z_o &= 731 / -11,2^\circ \\ \beta &= 0,023 \text{ radián/Km} & Z_R &= 731 / 0^\circ \end{aligned}$$

a. Calcular y representar gráficamente $|Z_{in}/Z_o|$ a intervalos de 20 Km.
b. ¿A qué longitud aproximada $|Z_{in}|$ tiende a $|Z_o|$? Explicar brevemente.

9-7. Repetir el Prob. 9-6 para $Z_R = 0$.

9-8. Dibujar diagramas fasoriales de las corrientes y tensiones en el extremo receptor de una línea con pérdidas terminadas en (a) un cortocircuito; (b) un circuito abierto.

9-9. Usando los datos de la Fig. 9-11, determinar la distancia aproximada entre la falla y el extremo trasmisor. Se sabe que el valor de β es de aproximadamente 0,03 radián/Km a 2 Kc/s.

9-10. En el rango de frecuencias normal de trabajo de los cables telefónicos no cargados, $\alpha = \beta$.

a. ¿A qué valores de βl es $|Z_{in}/Z_o|$ máximo si el cable está en cortocircuito en el extremo receptor?

b. Evaluar $|Z_{in}/Z_o|$ en los dos primeros máximos y los dos primeros mínimos.

c. A partir de los resultados de b, ¿cuál sería la forma de la curva de $|Z_{in}|$ en función de βl ?

d. Explicar porqué no podría usarse la técnica del Prob. 9-9 para localizar la falla de un cable no cargado.

9-11. Se desea esbozar la variación de $|Z_{in}|$ en función de la frecuencia entre 0,5 y 5 Kc/s para 100 millas de línea de alambres paralelos de 104 milésimas de pulgada y 18 pulgadas de separación (tabla 8-1), terminada en un circuito abierto.

- Representar la curva de $|Z_o|$, con incrementos de 500 c/s.
- Representar la curva envolvente de $|Z_{oc}|_{max}$.
- Representar la curva envolvente de $|Z_{oc}|_{min}$.
- Computar las frecuencias para las cuales $|Z_{in}|$ tiene los valores de $|Z_{oc}|_{max}$, $|Z_o|$, y $|Z_{oc}|_{min}$, y representar la curva requerida.

9-12. Explicar cualitativamente por qué no habrá "fantasmas" si la bajada de antena de un receptor de televisión está bien adaptada en uno *cualquiera* de sus extremos, es decir, en la antena o en la entrada del receptor.

9-13. La impedancia de circuito abierto a 796 c/s de un cable cargado de 5 millas de longitud es

$$Z_{oc} = 1.930/68,8^\circ \text{ ohms}$$

La impedancia de cortocircuito de la misma porción de cable es

$$Z_{sc} = 1.308/-76,2^\circ \text{ ohms}$$

Computar los valores de Z_o , α , β , v_p , λ , R , L , C y G por medio de funciones hiperbólicas y por aplicación directa de las formas exponenciales de las ecuaciones de línea.

Nota: La velocidad de fase aproximada es de 10.000 milla/seg. Se necesita este dato para determinar el cuadrante de 2β a partir de $\operatorname{tg} 2\beta$.

LUIS J. BRAMO
INGENIERO
TECNOLOGICO
ELECTRONICO

CAPÍTULO X

LÍNEAS DE BAJAS PÉRDIDAS

La amplia difusión de la televisión, el radar y otros servicios de VHF y UHF ha aumentado en gran medida el interés por el comportamiento de las líneas de transmisión en estas frecuencias. Por encima del espectro de audiofrecuencia, las altas pérdidas del cable telefónico lo hacen inadecuado como medio de transmisión y se recurre por lo general a las líneas abiertas de alambres paralelos, los cables coaxiales o a algunas variantes de estos tipos, como se ilustra en la Fig. 8-3.

Cuando la frecuencia de las señales aplicadas a estas líneas es de 50 Mc/s o más, la longitud física de la línea es por lo común lo suficientemente corta como para que αl sea muy pequeña, pero, en cambio, βl , la longitud eléctrica (es decir, el número de largos de onda), puede ser muy grande. Este capítulo considera las aproximaciones que pueden introducirse cuando se satisfacen estas condiciones. Cuando αl es despreciable, la línea puede considerarse como exenta de pérdidas. Cuando αl es muy pequeña, pero no despreciable, la línea considerase como de bajas pérdidas. Trataremos los dos casos en su orden. Es también interesante observar que en las bajas frecuencias utilizadas para la transmisión de energía eléctrica industrial (50 ó 60 c/s) la necesidad de que el rendimiento sea elevado impone también el uso de líneas de bajas pérdidas. Sin embargo estas líneas son eléctricamente cortas y pocas veces exceden de 1/10 de onda.

10-1. La línea sin pérdidas. La línea sin pérdidas se caracteriza por $R = 0$ y $G = 0$; así por las Ecs. (8-65),

$$\begin{aligned} Z &= j\omega L & Y &= j\omega C \\ Z_o &= R_o = \sqrt{\frac{L}{C}} & \gamma &= 0 + j\omega \sqrt{LC} \end{aligned} \quad (10-1)$$

Dado que $\alpha = 0$ para la línea sin pérdidas, $\gamma = j\beta$ y las ecuaciones de tensión, corriente e impedancia pueden expresarse en términos de las funciones hiperbólicas de $j\beta y$. Estas, a su vez, pueden reducirse a funciones circulares, como se muestra en el Apéndice. Así, según las Ecs. (9-28), (9-29), (9-30a) y (9-30b),

$$E_x = E_R \cos \beta y + jI_R R_o \sin \beta y \quad (10-2)$$

$$I_x = I_R \cos \beta y + j \frac{E_R}{R_o} \sin \beta y \quad (10-3)$$

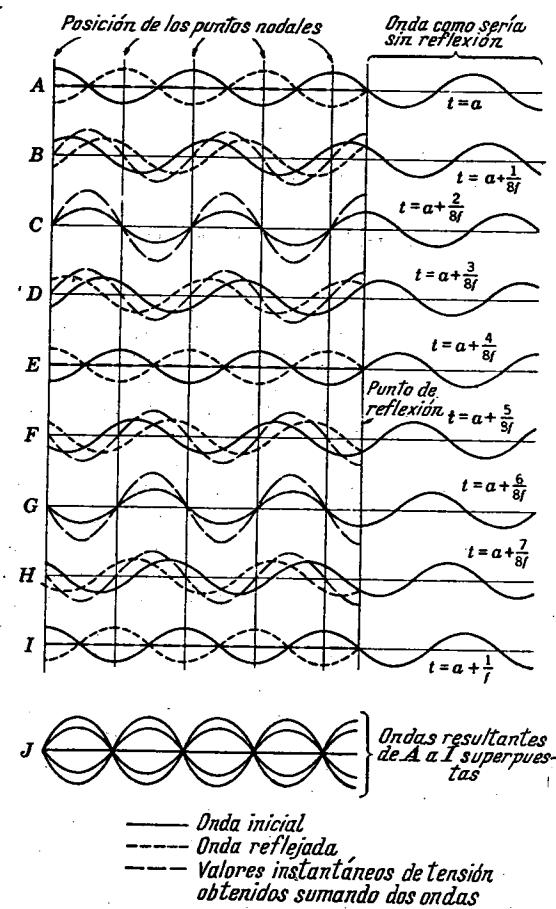


FIG. 10-1. Distribuciones instantáneas de tensión en una línea en circuito abierto o de corriente en una línea en cortocircuito, con atenuación nula.

$$Z_{in} = R_o \frac{Z_R \cos \beta l + jR_o \operatorname{sen} \beta l}{R_o \cos \beta l + jZ_R \operatorname{sen} \beta l} \quad (10-4)$$

$$= R_o \frac{Z_R + jR_o \operatorname{tg} \beta l}{R_o + jZ_R \operatorname{tg} \beta l} \quad (10-4a)$$

$$= R_o \frac{1 + pe^{-j\beta l}}{1 - pe^{-j\beta l}} \quad (10-4b)$$

donde y = distancia medida desde el extremo receptor.

l = longitud de la línea.

10-2. Línea sin pérdidas en circuito abierto. Cuando la terminación de la línea es un circuito abierto ($Z_R = \infty$), I_R debe ser cero y las

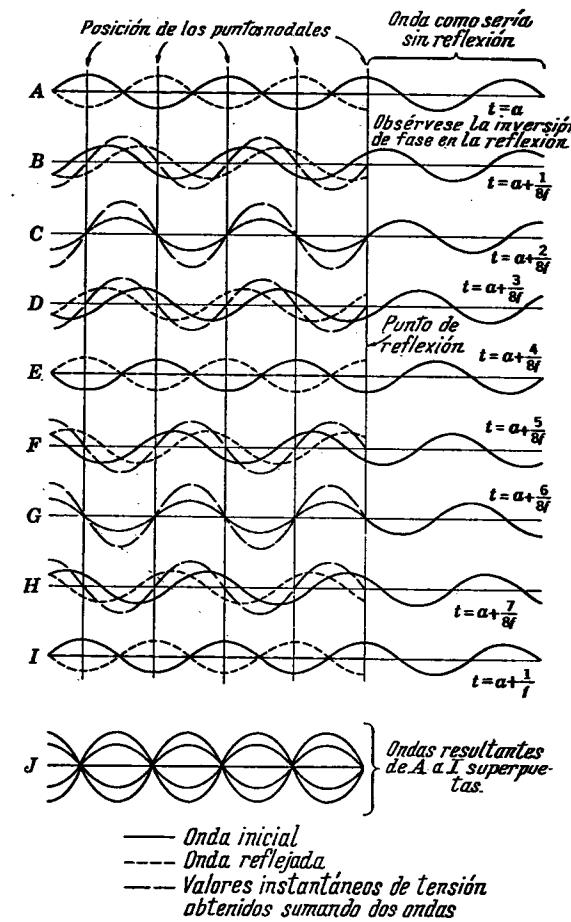


FIG. 10-2. Distribuciones instantáneas de corriente en una línea en circuito abierto o de tensión en una línea en cortocircuito, con atenuación nula.

ecuaciones de corriente y tensión de la línea devienen

$$E_x = E_R \cos \beta y = E_R \frac{e^{j\beta y} + e^{-j\beta y}}{2} \quad (10-5)$$

$$I_x = j \frac{E_R}{R_o} \operatorname{sen} \beta y = \frac{E_R}{R_o} \frac{e^{j\beta y} - e^{-j\beta y}}{2} \quad (10-6)$$

Estas ecuaciones demuestran una vez más que la tensión y la corriente en un punto cualquiera son resultantes de la suma de las ondas incidente y reflejada. Además, las magnitudes de estas componentes permanecen constantes en toda la extensión de la línea y son asimismo iguales. Las

ondas progresivas de tensión y sus resultantes se han representado para varios instantes sucesivos en la Fig. 10-1. La superposición de las ondas resultantes se ve en J , donde es evidente la presencia de una onda estacionaria.

El estudiante observará una estrecha similitud entre las Figs. 9-5 y 10-1. Ellas difieren solamente en que las ondas progresivas mantienen constantes sus amplitudes y en el hecho de que la amplitud resultante es nula en los nodos, en el caso de la línea sin pérdidas. Se muestran curvas similares, para la corriente, en la Fig. 10-2.

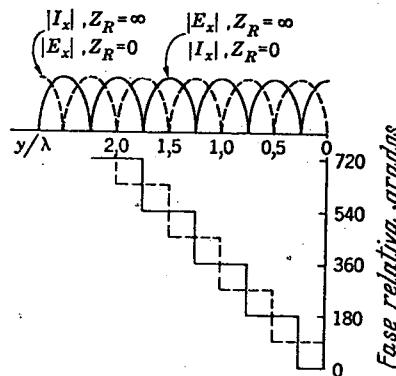


FIG. 10-3. Ondas estacionarias de corriente y de tensión para la línea sin pérdidas en circuito abierto y en cortocircuito. La parte inferior de la figura muestra la fase relativa entre tensión y corriente.

magnitudes, las curvas superiores de la Fig. 10-1J son proporcionales a las lecturas de voltímetro y amperímetro a lo largo de la línea (voltímetro para la línea en circuito abierto, amperímetro para la línea en cortocircuito).

Según la Ec. (10-4), la impedancia de entrada de la línea sin pérdidas en circuito abierto resulta ser

$$Z_{oc} = \lim_{Z_R \rightarrow \infty} R_o \frac{1 + j(R_o/Z_R) \operatorname{tg} \beta l}{R_o/Z_R + j \operatorname{tg} \beta l} = -jR_o \operatorname{ctg} \beta l \quad (10-7)$$

Z_{oc} está representada en la Fig. 10-4. Se observará que esta cantidad es siempre una reactancia pura y que la línea es resonante para longitudes equivalentes a un número impar de cuartos de onda y antirresonante para un número par de cuartos de onda. Como se ha visto en el capítulo anterior, si se mantiene constante la longitud física de la línea y se varía la frecuencia, la longitud eléctrica de la línea varía del mismo modo que si se variara la longitud física y se mantuviera constante la frecuencia. Así, las curvas de impedancia de la Fig. 10-4 podrían tener frecuencias en lugar de distancias como abscisas. Es por lo tanto posible obtener una reactancia de cualquier valor que se desee modificando sea la longitud, sea la frecuencia.

10-3. Línea sin pérdidas en cortocircuito. Cuando la línea está terminada en un cortocircuito, E_R debe ser cero y las Ecs. (10-2) y

(10-3) reducen a

$$E_x = jI_R R_o \operatorname{sen} \beta y \quad (10-8)$$

$$I_x = I_R \cos \beta y \quad (10-9)$$

La comparación de estas ecuaciones con las Ecs. (10-5) y (10-6) demuestra que la corriente de la línea en cortocircuito se comporta como la tensión en la línea en circuito abierto, y viceversa; por lo tanto las Figs. 10-1 a 10-3 son también aplicables a la línea en cortocircuito intercambiando tensión y corriente.

Poniendo $Z_R = 0$ en la Ec. (10-4a), la impedancia de entrada de la línea en cortocircuito viene a ser

$$Z_{sc} = jR_o \operatorname{tg} \beta l \quad (10-10)$$

y está representada en la Fig. 10-4.

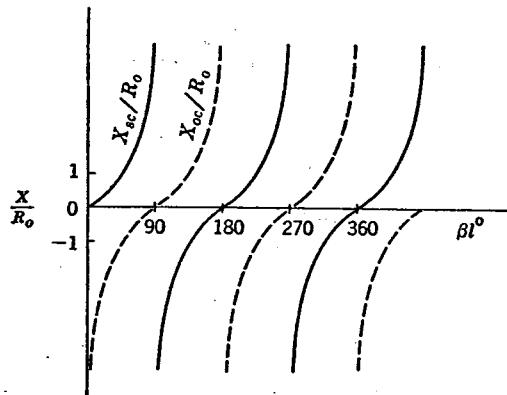


FIG. 10-4. Impedancia de entrada de una línea sin pérdidas en circuito abierto y en cortocircuito.

10-4. Relación de onda estacionaria. Una cantidad importante en el estudio de las líneas de bajas pérdidas es la *relación de onda estacionaria* de tensión o de corriente a lo largo de la línea, la que se define del siguiente modo: "La relación de onda estacionaria es la relación de la amplitud de una onda estacionaria en un antinodo a la amplitud en un nodo" (ASA C42 65.08.459). Se la representará con el símbolo S^* . En otros términos, la relación de onda estacionaria está definida por la ecuación

$$S = \left| \frac{E_{x,\max}}{E_{x,\min}} \right| \quad (10-11)$$

donde $|E_{x,\max}|$ = magnitud de la tensión en un máximo o antinodo y $|E_{x,\min}|$ = magnitud de la tensión en un mínimo o nodo. Dado que la

* En una gran parte de la literatura anterior se designa la relación de onda estacionaria con ρ . En este texto se utiliza S , reservando ρ para el coeficiente de reflexión (Ap. 9-4) de acuerdo con la norma ASA Y10.9-1963.

existencia misma de la onda estacionaria depende de la reflexión, es de esperar que S esté relacionada con el coeficiente de reflexión ρ , el que es una medida de la falsa adaptación de impedancias que da origen a la reflexión.

Por lo que se sabe, E_x es la suma de E'_x y E''_x . $|E_x|$ pasa por máximos y mínimos sucesivos a causa de que en ciertos puntos, que designaremos y_{max} , las dos componentes se suman en fase dando un máximo $|E_{x,max}|$, mientras que en otros puntos, digamos y_{min} , se suman en oposición de fase y dan un mínimo $|E_{x,min}|$. Se demostrará ahora esto de una manera más rigurosa.

Poniendo $a = 0$ en la Ec. (9-22a), porque se está considerando una línea sin pérdidas,

$$E_x = E'_R e^{j\beta y} + E''_R e^{-j\beta y}$$

Introduciendo los coeficientes de reflexión en forma polar,

$$E_x = E'_R e^{j\beta y} + E'_R |\rho| e^{j\varphi} e^{-j\beta y} \\ = E'_R e^{j\beta y} [1 + |\rho| e^{j(\varphi - 2\beta y)}] \quad (10-12)$$

$$|E_x| = |E'_R| [1 + |\rho| e^{j(\varphi - 2\beta y)}] \quad (10-12a)$$

La tensión tiene la máxima amplitud cuando las dos componentes están en fase, es decir, para valores de $y = y_{max}$, en que

$$\varphi - 2\beta y_{max} = \pm 2n\pi \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$y_{max} = \frac{\varphi \pm 2n\pi}{2\beta} \quad (10-13)$$

Por lo tanto, los máximos adyacentes están separados por $\pi/\beta = \lambda/2$, o medias longitudes de onda, y tienen como magnitud

$$|E_{max}| = |E'_R| (1 + |\rho|) \quad (10-14)$$

De modo similar, la tensión tiene un valor mínimo cuando las dos componentes de la Ec. (10-12a) están 180° fuera de fase, es decir, para valores de $y = y_{min}$ en que

$$\varphi - 2\beta y_{min} = \pm (2n + 1)\pi \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$y_{min} = \frac{\varphi \pm (2n + 1)\pi}{2\beta} \quad (10-15)$$

Luego, los mínimos de tensión están separados por intervalos de $\lambda/2$ a lo largo de la línea, están a medio camino entre máximos de tensión, y tienen el valor

$$|E_{min}| = |E'_R| (1 - |\rho|) \quad (10-16)$$

Sustituyendo las Ecs. (10-14) y (10-16) en la (10-11),

$$S = \frac{1 + |\rho|}{1 - |\rho|} \quad (10-17)$$

Debe observarse que S es una cantidad real, más bien que compleja, y que su valor mínimo posible es la unidad.

Los resultados anteriores pueden aplicarse al caso de la línea sin pérdidas en circuito abierto representado en la Fig. 10-3. Para este caso, $Z_R = \infty$, y $\rho = 1/0^\circ$, por la Ec. (9-16). Luego, por la Ec. (10-17), $S = \infty$. Por otra parte, el primer máximo de tensión ocurre en

$$y_{max} = \frac{\varphi}{2\beta} = 0$$

y el primer mínimo de tensión en

$$y_{min} = \frac{\pi}{2\beta} = \frac{\pi}{2} \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{\lambda}{4}$$

Como ejercicio, el estudiante puede relacionar S a I'_R e I''_R , y verificar la distribución de corriente para el caso de la línea sin pérdidas en circuito abierto y en cortocircuito.

La distribución de la onda estacionaria a lo largo de la línea de transmisión puede determinarse experimentalmente tomando lecturas de tensión con un voltímetro electrónico de alta impedancia. Se verá en los apartados subsiguientes que esta medición provee la información suficiente, esto es, S e y_{max} e y_{min} , para determinar el valor de Z_R/R_o .

10-5. Línea sin pérdidas terminada en resistencia. La anterior discusión de la línea sin pérdidas se ha limitado a los casos de terminación en circuito abierto y en cortocircuito. Para generalizar estos resultados, consideremos el caso en que la línea está terminada en una resistencia pura de modo que $Z_R = R_R + j0$, y sea $R_R/R_o = r_r$. Luego, r_r es el valor de R_R normalizado con respecto a la impedancia característica R_o .

Antes de considerar el caso en detalle, es instructivo hacer algunas predicciones. Primero, si $r_r \neq 1$, esto es, si $R_R \neq R_o$, hay reflexiones en la terminación y se establecen ondas estacionarias de tensión y de corriente a lo largo de la línea. En segundo lugar, pueden determinarse la relación de onda estacionaria y la posición de los máximos y los mínimos. Por la Ec. (9-16),

$$\rho = \frac{R_R/R_o - 1}{R_R/R_o + 1} \quad Z_R = R_R + j0$$

Introduciendo r_r ,

$$\rho = \frac{r_r - 1}{r_r + 1} \quad (10-18)$$

Pueden considerarse dos posibilidades, según que r_r sea mayor o menor que la unidad.

Si $r_r > 1$, o $R_R > R_o$, la Ec. (10-18) puede escribirse

$$\rho = \frac{r_r - 1}{r_r + 1} / 0^\circ \quad (10-19)$$

por lo tanto

$$\varphi = 0$$

y por la Ec. (10-13) es evidente que el primer máximo de tensión estará situado en el extremo receptor o, en general, $y_{max} = n\lambda/2$. Este caso puede comprobarse intuitivamente, puesto que en el límite cuando

$R_R \rightarrow \infty$, este caso debe reducirse al de la línea en circuito abierto. Por otra parte, poniendo en la Ec. (10-17) el valor de $|\rho|$ dado por la Ec. (10-19),

$$r_r > 1 \quad S = r_r \quad (10-20)$$

Se concluye, por lo tanto, que la relación de onda estacionaria es igual a la resistencia de carga normalizada r_r , y que ocurre un máximo de tensión en la carga cuando la línea sin pérdidas está terminada en una resistencia mayor que R_o .

Por otra parte, si $R_R < R_o$, $r_r < 1$ y la Ec. (10-18) puede escribirse

$$\rho = -\frac{1-r_r}{1+r_r} = \frac{r_r-1}{r_r+1} / 180^\circ \quad \varphi = 180^\circ \quad (10-21)$$

En esta condición, la Ec. (10-15) muestra que hay un mínimo de tensión en la carga. Además, la Ec. (10-17) muestra que la relación de onda estacionaria es

$$r_r < 1 \quad S = \frac{1}{r_r} \quad (10-22)$$

Por consecuencias, cuando la distribución de onda estacionaria indica un máximo o un mínimo de tensión en la carga, la terminación es una resistencia pura. Si la tensión en la carga es un máximo, $R_R = SR_o$, mientras que si es un mínimo, $R_R = R_o/S$.

Completadas estas predicciones, es de interés considerar ahora la distribución de onda estacionaria a lo largo de la línea. Poniendo

$$I_R R_o = E_R \frac{R_o}{R_R} = \frac{E_R}{r_r}$$

en la Ec. (10-2),

$$E_x = E_R \left(\cos \beta y + j \frac{1}{r_r} \sin \beta y \right) \quad (10-23)$$

o, tomando las magnitudes,

$$|E_x| = |E_R| \sqrt{\cos^2 \beta y + \frac{1}{r_r^2} \sin^2 \beta y} \quad (10-23a)$$

La Ec. (10-23a) puede reducirse a una forma que involucra sólo constantes y $\sin^2 \beta y$ para verificar las predicciones anteriores. Es más útil, sin embargo, representar E_x/E_R en el plano complejo de modo que la parte imaginaria de E_x/E_R quede representada en función de la parte real con βy como variable, a fin de obtener el lugar geométrico de la relación de tensiones. (El estudiante observará que no se trata de una nueva técnica; corresponde a la representación del lugar geométrico de la impedancia en el plano complejo. Ver Cap. IV.)

Definamos entonces U y V con las relaciones

$$\frac{E_x}{E_R} = U + jV = \cos \beta y + j \frac{1}{r_r} \sin \beta y \quad (10-23b)$$

$$\text{Entonces } U = \cos \beta y \quad r_r V = \sin \beta y$$

Elevando al cuadrado y sumando

$$U^2 + r_r^2 V^2 = 1$$

Reordenando

$$\left(\frac{U}{1}\right)^2 + \left(\frac{V}{1/r_r}\right)^2 = 1 \quad (10-24)$$

La Ec. (10-24) es la ecuación de una elipse, centrada en el origen y de semiejes 1 y $1/r_r$, como se ve en las Figs. 10-5a y b. Debe observarse

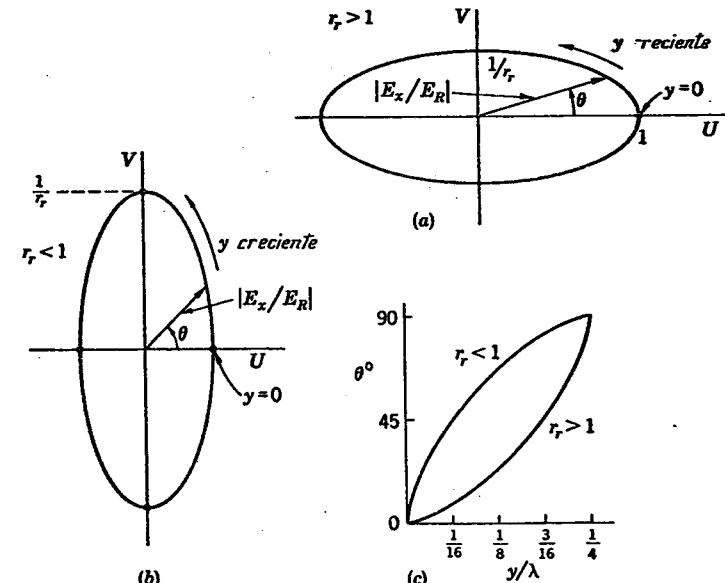


FIG. 10-5. Lugar geométrico de E_x/E_R para una línea sin pérdidas terminada en una resistencia pura $R_R = r_r R_o$. (a) $r_r > 1$ (b) $r_r < 1$. (c) Ángulo de E_x/E_R .

que θ , el ángulo de E_x/E_R , cuya tangente es V/U , no es una función lineal de y , sino que varía más bien de la manera esbozada en la Fig. 10-5c. La verdadera distribución de onda estacionaria puede obtenerse representando la longitud de $|E_x/E_R|$ en función de y . Se dan curvas típicas para $r_r = 1/2$ y 2 en la Fig. 10-6. Se observará que S tiene el mismo valor en los dos casos. La Fig. 10-6 muestra que la máxima velocidad de variación de la tensión en la distribución de onda estacionaria ocurre cerca de los mínimos de tensión más bien que cerca de los máximos. Por esta razón, los mínimos, siendo más agudos, son más fáciles de localizar con un voltímetro que los máximos.

Este hecho puede también comprobarse mediante la cuidadosa consideración de los diagramas fasoriales de tensión a lo largo de la línea.

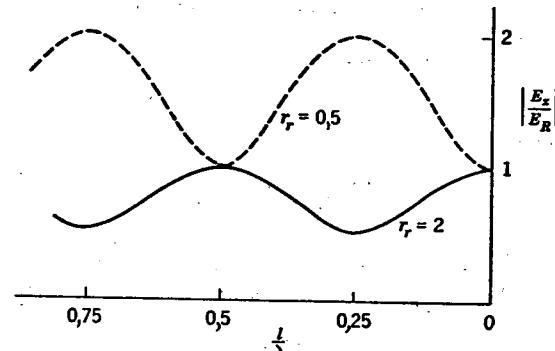


Fig. 10-6. Distribución de onda estacionaria de tensión en una línea sin pérdidas terminada en $r_r = R_R/R_o = 2$ y 0.5. Se supone la misma tensión E_R en los dos casos.

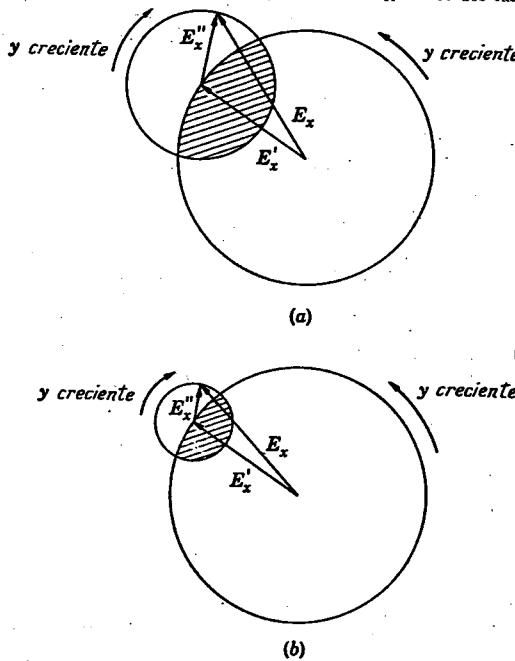


Fig. 10-7. Diagramas fasoriales de tensión para la línea sin pérdidas terminada en una resistencia pura. r_r es más pequeña en b que en a.

Habiendo onda estacionaria, es decir, si $r_r \neq 1$, $|E''_R| < |E'_R|$, y, por la Ec. (9-22),

$$E_z = E'_R e^{j\beta y} + E''_R e^{-j\beta y}$$

Luego, en algún punto arbitrario distante y del extremo receptor, las tensiones complejas se sumarán como en la Fig. 10-7a. A medida que varía y , los fasores componentes rotan en el sentido indicado.

La zona no rayada del círculo pequeño define la condición $|E_z| > |E'_R|$ y corresponde así a la región de máxima tensión. En cambio, la región sombreada corresponde a la región de mínima tensión. Dado que este último sector corresponde a un menor cambio de y , el mínimo de tensión será más angosto o "agudo" que el máximo.

Los fasores se han dibujado en la Fig. 10-7b para un valor de r_r más próximo a la unidad que en la Fig. 10-7a. Puede verse que aunque el mínimo sigue siendo más agudo que el máximo, lo es en menor grado que en el primer caso. En el límite, a medida que $r_r \rightarrow 1$, el círculo pequeño se transforma en un punto y no hay ya máximos ni mínimos. Como podía esperarse, la línea resulta "plana" cuando la terminación es R_o .

10-6. Impedancia de entrada con terminación resistiva. La impedancia de entrada de una línea sin pérdidas terminada en una resistencia pura de valor normalizado $r_r = R_o/R_o$ puede calcularse a partir de las Ecs. (10-4a) y (10-4b). Por ejemplo, si ponemos $Z_R = r_r R_o$, la Ec. (10-4a) deviene

$$Z_{in} = R_o \frac{r_r + j \operatorname{tg} \beta l}{1 + j r_r \operatorname{tg} \beta l} \quad (10-25)$$

Luego, en general, Z_{in} es compleja, salvo para ciertas longitudes de línea.

Si $\operatorname{tg} \beta l = 0$, lo que corresponde a longitudes eléctricas de la línea iguales a $n\lambda/2$, Z_{in} se torna real y toma el valor $r_r R_o = R_o$. Por otra parte, si $\operatorname{tg} \beta l \rightarrow \infty$, lo que corresponde a longitudes eléctricas de $(2n+1)\lambda/4$, Z_{in} vuelve a ser real, pero toma el valor $R_o/r_r = R_o^2/R_o$. Con esta información, el estudiante puede comprobar que en una línea sin pérdidas terminada en una resistencia pura R_o , (1) los máximos de impedancia ocurren en los máximos de tensión y son puramente resitivos y de valor $S R_o$; (2) los mínimos de impedancia ocurren en los mínimos de tensión y son resitivos puros, de valor R_o/S .

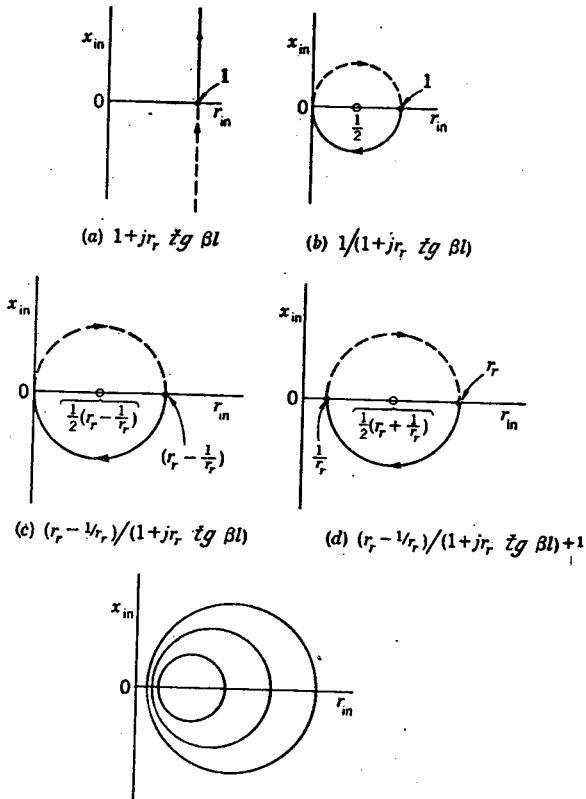
10-7. El ábaco bicircular de impedancias. Más bien que calcular el valor de Z_{in} en otros puntos de la línea, conviene demostrar que el lugar geométrico de la impedancia cuando l varía desde cero hasta infinito es una circunferencia que puede ser utilizada para el cálculo de Z_{in} . Es deseable, sin embargo, dividir Z_{in} por R_o para obtener un ábaco normalizado, aplicable a cualquier línea de manera independiente del valor particular de su impedancia característica. Usaremos letras minúsculas para denotar los valores normalizados. Luego

$$z_{in} = r_{in} + j x_{in} = \frac{Z_{in}}{R_o} \quad z_r = r_r + j x_r = \frac{Z_R}{R_o}$$

El diagrama circular de Z_{in} se derivará geométricamente por el procedimiento de inversión descrito en el Cap. IV. Por esta razón es conveniente reordenar la Ec. (10-25) de manera tal que el coeficiente de $1/(1 + j r_r \operatorname{tg} \beta l)$ sea constante. Obtiéñese este resultado sumando y restando $1/r_r$.

$$\begin{aligned} z_{in} &= \left(\frac{r_r + j \operatorname{tg} \beta l}{1 + j r_r \operatorname{tg} \beta l} - \frac{1}{r_r} \right) + \frac{1}{r_r} \\ &= \frac{r_r - 1/r_r}{1 + j r_r \operatorname{tg} \beta l} + \frac{1}{r_r} \end{aligned} \quad (10-26)$$

Esta ecuación dice, en efecto, que hay que multiplicar la reciproca de $1 + j r_r \operatorname{tg} \beta l$ por $r_r - 1/r_r$ y sumar al producto $1/r_r$. Estos pasos se realizan en la Fig. 10-8. Para una terminación dada, r_r es constante y



(e) Familia de curvas de S constante

FIG. 10-8. Desarrollo de las curvas de relación de onda estacionaria constante para el ábaco bicircular. Véase el texto.

βl , variable; así, la Fig. 10-8a muestra el complejo $1 + j r_r \operatorname{tg} \beta l$. El estudiante debe recordar que la tangente es periódica; por lo tanto, a medida que aumenta l , la cantidad representada se mueve siempre hacia arriba a lo largo de la línea vertical, alcanzando ∞ para $\beta l = \pi/2$ y volviendo de $-\infty$ para moverse hacia arriba nuevamente y alcanzar otra vez $+\infty$ para $\beta l = 3\pi/2$, etc. La mitad inferior de la línea se

ha representado en línea cortada para que el estudiante pueda seguir los cambios de signo en los pasos siguientes.

En b, fórmase la reciproca por el proceso de inversión geométrica. Los pasos c y d no requieren explicación, pero debe observarse que el centro del círculo en d está en el punto

$$\frac{1}{2} \left(r_r - \frac{1}{r_r} \right) + \frac{1}{r_r} = \frac{1}{2} \left(r_r + \frac{1}{r_r} \right)$$

y que el círculo corta el eje real en el punto de valor máximo de

$$\left(r_r - \frac{1}{r_r} \right) + \frac{1}{r_r} = r_r$$

y en el punto de valor mínimo $1/r_r$, de modo que el radio del círculo es

$$r = \frac{1}{2} \left(r_r - \frac{1}{r_r} \right)$$

El círculo de la Fig. 10-8d corresponde a un valor fijo de r_r y, por lo tanto, a un valor fijo de S , la relación de onda estacionaria. Diferentes valores de la resistencia terminal corresponden a diferentes valores de S y dan así la familia de circunferencias de S constante esbozada en e. Por las Ecs. (10-20) y (10-22),

$$S = r, \text{ si } r_r \geq 1 \quad \text{y} \quad S = \frac{1}{r_r} \text{ si } r_r < 1$$

Por lo tanto, la abscisa que está a la derecha de 1 provee una escala directa para la relación de onda estacionaria.

Ahora, para que estas curvas resulten útiles para el cómputo de la impedancia de entrada, se las debe calibrar en términos de la longitud de la línea l o βl , de modo que pueda identificarse la impedancia de entrada correspondiente a una longitud determinada. Se demostrará ahora que los lugares geométricos de los valores constantes de βl con r_r como variable, son también circunferencias, pero centradas éstas en el eje imaginario más bien que en el eje real. Para ello, es conveniente reordenar la Ec. (10-25) de modo que el coeficiente de $1/(1 + j r_r \operatorname{tg} \beta l)$ sea nuevamente un término constante para cada valor dado de βl . Para ello hay que sumar y restar $j/\operatorname{tg} \beta l$:

$$\begin{aligned} z_{in} &= \left(\frac{r_r + j \operatorname{tg} \beta l}{1 + j r_r \operatorname{tg} \beta l} + \frac{j}{\operatorname{tg} \beta l} \right) - \frac{j}{\operatorname{tg} \beta l} \\ &= \frac{\operatorname{tg} \beta l + 1/\operatorname{tg} \beta l}{r_r \operatorname{tg} \beta l - j} - \frac{j}{\operatorname{tg} \beta l} \end{aligned}$$

Los pasos ahora necesarios están indicados en la Fig. 10-9. La Fig. 10-9a muestra la representación de $r_r \operatorname{tg} \beta l - j$, con r_r como variable. Obtiéñese la reciproca por inversión geométrica en b, multiplíquese el resultado por $\operatorname{tg} \beta l + 1/\operatorname{tg} \beta l$ en c, y se suma $-j/\operatorname{tg} \beta l$ en d.

Como se ve en *d*, el centro de la semicircunferencia se encuentra sobre el eje imaginario en

$$\frac{1}{2} \left(\operatorname{tg} \beta l + \frac{1}{\operatorname{tg} \beta l} \right) - \frac{1}{\operatorname{tg} \beta l} = \frac{1}{2} \left(\operatorname{tg} \beta l - \frac{1}{\operatorname{tg} \beta l} \right) = -\frac{1}{\operatorname{tg} 2\beta l}$$

y el radio de la circunferencia es

$$\frac{1}{2} \left(\operatorname{tg} \beta l + \frac{1}{\operatorname{tg} \beta l} \right) = \frac{1}{\operatorname{sen} 2\beta l}$$

Los dos últimos pasos indicados pueden demostrarse por identidades trigonométricas. La circunferencia de la Fig. 10-9d corresponde a un valor fijo de βl . Diferentes valores de βl dan lugar a diferentes lugares

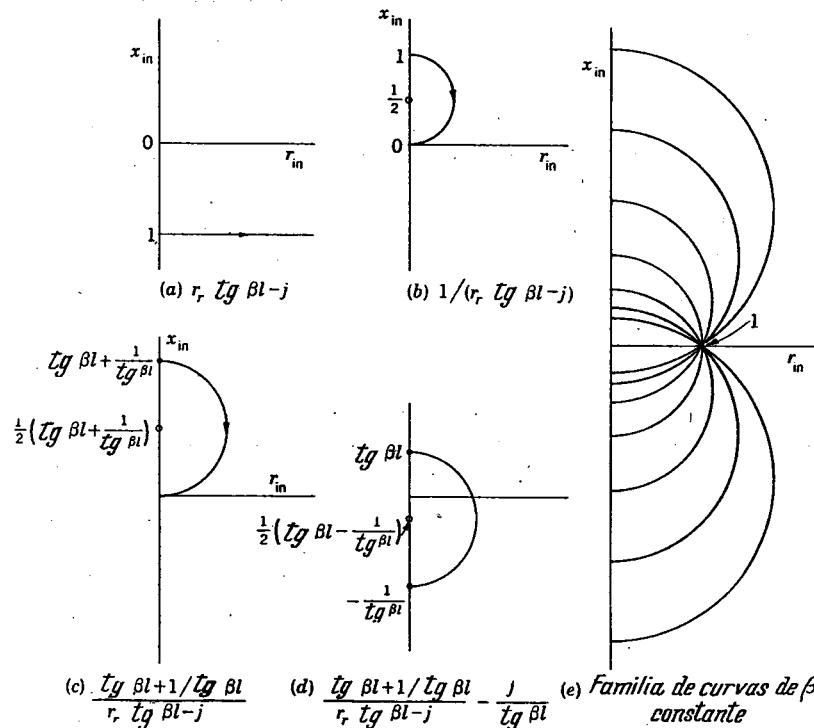


FIG. 10-9. Desarrollo de las curvas de βl constante para el abaco bicircular. Véase el texto.

geométricos. Así, la Fig. 10-9e muestra la familia de curvas que se obtiene al variar βl desde 0 a 180° . Dado que z_{in} es periódica de período de 180° en βl , no se necesitan otras curvas.

Las dos familias de curvas de las Figs. 10-8e y 10-9e correspondientes respectivamente a S constante y a βl constante, pueden superponerse en un juego de coordenadas rectangulares de z para obtener

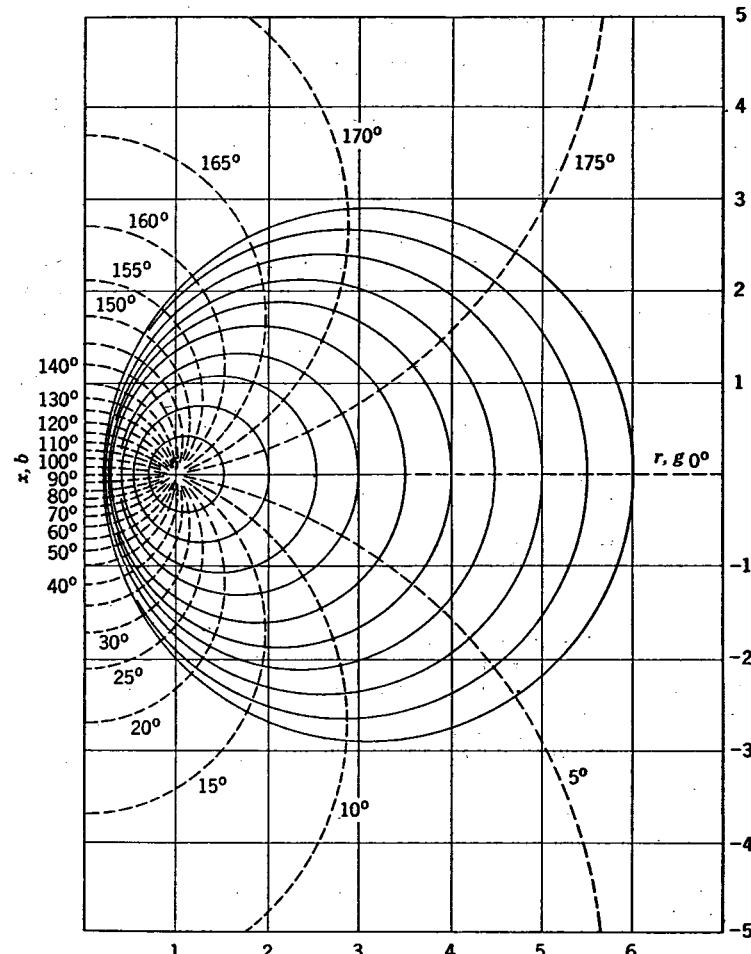


FIG. 10-10. Abaco bicircular. El abaco puede usarse indistintamente para impedancia y para admitancia en los problemas sobre líneas sin pérdidas. Las curvas de S constante, llenas, se identifican por su intersección con el eje horizontal.

el llamado "ábaco bicircular" de la Fig. 10-10¹. Este ábaco puede usarse para calcular la impedancia de entrada de una línea sin pérdidas terminada en una resistencia pura, siempre que, por supuesto, los valores normalizados queden dentro del abaco. Se lo ilustrará con un ejemplo.

Una línea sin pérdidas de longitud 0,695 m está terminada en $Z_R = 250 + j0$ ohm, con $R_o = 100$ ohm, y $\lambda = 10$ m. Hallar S , ρ , y Z_{in} .

¹ Los dos juegos de curvas ortogonales resultan idénticos a una mitad del campo eléctrico alrededor de un par de conductores cargados, largos y paralelos. En este caso, las líneas equipotenciales corresponden a las curvas de S constantes y las líneas de intensidad de campo, a las curvas de βl constante.

Pasando a unidades normalizadas

$$z_r = \frac{Z_R}{R_o} = \frac{250 + j0}{100} = 2,5 + j0$$

Entremos en el ábaco por z_r . Este punto está sobre el eje real en correspondencia con $r_r = 2,5$. Puesto que $r_r > 1$, $S = r_r$.

ρ , el coeficiente de reflexión, no puede obtenerse directamente del ábaco, pero se lo puede calcular:

$$\rho = \frac{z_r - 1}{z_r + 1} = \frac{2,5 + j0 - 1}{2,5 + j0 + 1} = \frac{1,5/0^\circ}{3,5/0^\circ} = 0,429/0^\circ$$

Pasando a grados

$$\beta l = \frac{360}{\lambda} l = \frac{360 \times 0,695}{10} = 25^\circ$$

Se entra en el ábaco por z_r y se gira en sentido levógiro 25° sobre la circunferencia $S = 2,5$ para leer así $z_{in} = 1,3 - j1,05$. Convirtiendo en ohm

$$Z_{in} = R_o z_{in} = 130 - j105 \text{ ohms}$$

El siguiente ejemplo muestra cómo puede usarse el ábaco en combinación con las mediciones de onda estacionaria realizadas sobre la línea.

Se hacen mediciones sobre una línea de conductores paralelos construida con tubos de cobre de 6 mm de radio y 73,3 mm de distancia entre centros. Hay un mínimo de tensión en la carga y se mide una relación de onda estacionaria de 3. La distancia entre mínimos de tensión adyacentes es de 65 cm y la línea tiene 2,70 de longitud. Determinar λ , Z_R y Z_{in} .

Dado que los mínimos adyacentes están a una distancia de media longitud de onda,

$$\lambda = 65 \times 2 = 130 \text{ cm.}$$

Localizamos la circunferencia $S = 3$. Un mínimo de tensión corresponde a un mínimo de impedancia; por lo tanto, leemos z_r en la intersección izquierda de la circunferencia, es decir $z_r = 0,333 + j0$. Se necesita conocer R_o para convertir este valor en ohm. Según el Prob. 8-2,

$$R_o = 276 \log \frac{s}{r} = 276 \log \frac{73,3}{6} = 276 \log 12,22 \\ = 276 \times 1,088 = 300 \text{ ohms}$$

Luego

$$Z_R = R_o z_r = 300(0,333 + j0) = 100 + j0 \text{ ohms}$$

Para hallar Z_{in} entramos en el ábaco por z_r y giramos βl grados sobre la circunferencia $S = 3$:

$$\beta l = \frac{360l}{\lambda} = \frac{360 \times 2,70}{1,30} = 748^\circ$$

Dado que el ábaco es periódico de periodo 180° , restamos $4 \times 180^\circ = 720^\circ$, con lo que se obtienen 28° . Entrando entonces en el ábaco por z_r , giramos 28° en sentido levógiro hasta la circunferencia $90^\circ + 28^\circ = 118^\circ$ sobre

la circunferencia $S = 3$ y leemos $z_{in} = 0,43 + j0,3$. Convirtiendo en ohm,

$$Z_{in} = R_o z_{in} = 300(0,43 + j0,3) = 129 + j90 \text{ ohms}$$

Se demostrará que el ábaco bicircular puede usarse también cuando Z_R es compleja, más bien que resistiva pura.

10-8. Línea sin pérdidas terminada en una impedancia compleja. Cuando la línea sin pérdidas está terminada en una impedancia compleja Z_R , distinta de R_o , hay también reflexión, pero el coeficiente de reflexión es complejo. Pueden usarse los resultados obtenidos en el apartado anterior para determinar la distribución de onda estacionaria a lo largo de la línea, según se verán en el ejemplo ilustrativo desarrollado más adelante. Debe observarse, sin embargo, que dado que $\varphi (= \arg \rho)$ no es cero ni 180° en este caso, ni el máximo de tensión ni el máximo de corriente ocurren en la carga.

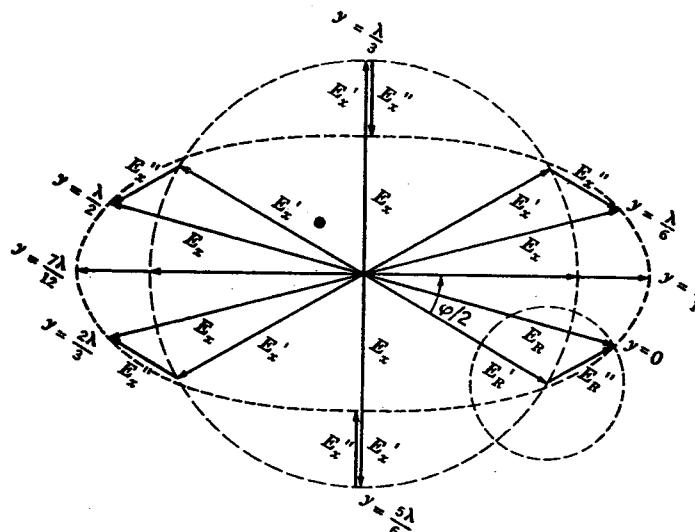


FIG. 10-11. Diagrama fasorial progresivo para la tensión a lo largo de una línea de transmisión sin pérdidas terminada en una impedancia compleja Z_R . El lugar geométrico es una elipse cuyo eje mayor forma un ángulo $\varphi = \arg \rho$ con el eje de referencia.

Es de interés obtener el lugar geométrico de E en el plano complejo con y como variable. Si bien es posible obtener una expresión analítica de este lugar geométrico mediante los métodos utilizados en los apartados anteriores, es más fácil obtener la curva buscada dibujando los diagramas fasoriales de tensión para diversos puntos de la línea, empezando por la terminación. El método se ilustra en la Fig. 10-11, donde E'_R se elige como referencia y ρ se supone que tiene un valor igual a $0,5/60^\circ$. El estudiante debe apreciar que la componente incidente $E'_z = E'_R e^{j\varphi y}$ gira en sentido dextrógiro al aumentar y (movimiento hacia el extremo trasmisor), mientras que la componente reflejada $E''_z = E''_R e^{-j\varphi y}$ gira en sentido levógiro al aumentar y . La

figura demuestra que el lugar geométrico es una elipse, como en el caso de la terminación resistiva, pero ahora con una inclinación del eje máximo de φ° ($= \arg \rho$) con respecto al eje de referencia. Podría obtenerse la distribución de onda estacionaria tomando la longitud de $|E_z|$ sobre la elipse y representándola en función de y en escala lineal.

Una línea sin pérdidas está excitada por una señal tal que $\lambda = 1$ m. $E_R = 10/0^\circ$ volt. $Z_R = 100 - j50 = 111,9/-26,58^\circ$ ohm. $R_o = 300/0^\circ$ ohm. Calcular los datos necesarios para esbozar las distribuciones de ondas estacionarias de tensión y corriente.

Por la Ec. (9-16),

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{Z_R - R_o}{Z_R + R_o} = \frac{100 - j50 - 300}{100 - j50 + 300} = \frac{-200 - j50}{400 - j50} \\ &= \frac{206/194,02^\circ}{404/-7,12^\circ} = 0,511/201,14^\circ = -0,476 - j0,184 \end{aligned}$$

Poniendo $y = 0$ para hallar E'_R en la Ec. (10-12),

$$\begin{aligned} E'_R &= \frac{E_R}{1 + \rho} = \frac{E_R}{1 - 0,476 - j0,184} = \frac{E_R}{0,524 - j0,184} \\ &= \frac{10/0^\circ}{0,555/-19,38^\circ} = 18,01/19,38^\circ \text{ volt} \end{aligned}$$

Según la Ec. (10-13) el primer máximo de tensión ocurre en

$$y_{\max} = \frac{\varphi}{2\beta} = \frac{201,14 \times 1}{2 \times 360} = \frac{201,14}{720} = 0,279 \text{ metros}$$

Los máximos sucesivos de tensión estarán separados por intervalos de media longitud de onda a partir de este valor.

Según la Ec. (10-15), el primer mínimo de tensión ocurre en

$$y_{\min} = y_{\max} - \frac{\lambda}{4} = 0,279 - 0,25 = 0,029 \text{ meter}$$

Por las Ecs. (10-14) y (10-16),

$$\begin{aligned} |E_{\max}| &= |E'_R|(1 + |\rho|) = 18,01 \times 1,511 = 27,2 \text{ volt} \\ |E_{\min}| &= |E'_R|(1 - |\rho|) = 18,01 \times 0,489 = 8,8 \text{ volt} \end{aligned}$$

Por la Ec. (10-17),

$$S = \frac{1 + |\rho|}{1 - |\rho|} = \frac{1,511}{0,489} = 3,09$$

Las corrientes pueden tratarse de manera similar:

$$I'_R = \frac{E'_R}{R_o} = \frac{18,01/19,38^\circ}{3 \times 10^2/0^\circ} = 60/19,38^\circ \text{ mA}$$

$$|I_z| = I'_R e^{j\beta y} (1 - |\rho| e^{j(\varphi - 2\beta y)})$$

$$|I_{\max}| = |I'_R|(1 + |\rho|) = 60 \times 1,511 = 90,7 \text{ mA}$$

$$|I_{\min}| = \frac{|I_{\max}|}{S} = \frac{90,7}{3,09} = 29,35 \text{ mA}$$

El estudiante puede demostrar que los mínimos de corriente ocurren en los máximos de tensión y que los máximos de corriente coinciden con los puntos de mínima tensión y que E_x e I_x están en fase en éstos puntos.

10-9. Impedancia de entrada con terminación compleja. Se ha visto en el Ap. 10-7 que puede usarse el diagrama bicircular para determinar la impedancia de entrada de una línea sin pérdidas terminada en una resistencia pura. Se plantea ahora la cuestión de la posibilidad de utilizar el mismo ábaco cuando Z_R es compleja. La cuestión halla su respuesta considerando un problema específico.

Una línea de longitud l está terminada en una impedancia cuyo valor normalizado es $z_r = 1,3 - j1,05$, como se ve en la Fig. 10-12a y se pretende hallar la impedancia de entrada normalizada z_{in} . El primer ejemplo ilustrativo del Ap. 10-7 muestra, al efecto, que si una línea de longitud l_1 correspondiente a una longitud eléctrica $\beta l_1 = 25^\circ$ está

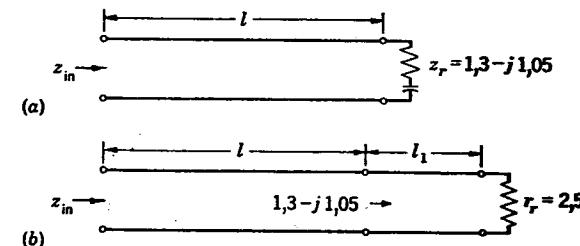


FIG. 10-12. La carga z_r de a se reemplaza con una línea de longitud l_1 , terminada en una resistencia y cuya impedancia normalizada de entrada es igual a la z_r de a.

terminada en una resistencia pura $r_r = 2,5$, su impedancia de entrada es $1,3 - j1,05$. Es entonces lógico admitir que, para los fines del análisis, la impedancia terminal de la Fig. 10-12a puede ser reemplazada por una sección equivalente de línea terminada en este caso en la resistencia normalizada $r_r = 2,5$. El problema se reduce ya a términos familiares: una línea de longitud $l + l_1$ terminada en una resistencia pura, para la cual podemos utilizar el diagrama bicircular con vistas al cálculo de z_{in} .

En realidad, una vez establecido este concepto, no es necesario el paso de reemplazar z_r con la línea equivalente y la carga resistiva. Sólo es preciso entrar en el ábaco por z_r y girar en sentido levógiro el ángulo βl sobre el círculo de S constante para obtener así z_{in} .

También puede demostrarse que cuando z_r es compleja, el ábaco sirve asimismo para determinar φ , el ángulo del coeficiente de reflexión ρ . Por la Ec. (10-13), el primer máximo de tensión ocurre en

$$y_{\max} = \frac{\varphi}{2\beta} \quad 0 \quad \varphi = 2\beta y_{\max} \quad (10-27)$$

La Fig. 10-10 muestra, sin embargo, que las circunferencias de βl constante del ábaco bicircular tienen calibraciones fijas que pueden no coincidir con los valores verdaderos de βl en un problema dado. Esto se ve más claramente en la Fig. 10-13. En z_r , es en realidad $\beta y = 0$, pero

en el ábaco se indica otro valor, digamos $(\beta y')_r$. Por otra parte, en el primer máximo de tensión, que corresponde a un máximo de impedancia, el verdadero $\beta y = \beta y_{max}$, mientras que el valor indicado es $\beta y' = 0$. Luego, igualando las diferencias entre los valores verdaderos y los indicados

$$\beta y_{max} - 0 = 0 - (\beta y')_r$$

Sustituyendo en la Ec. (10-27)

$$\varphi = -2(\beta y')_r \quad (10-27a)$$

Este aspecto, junto con el uso general del ábaco, será ilustrado por el ejemplo siguiente.

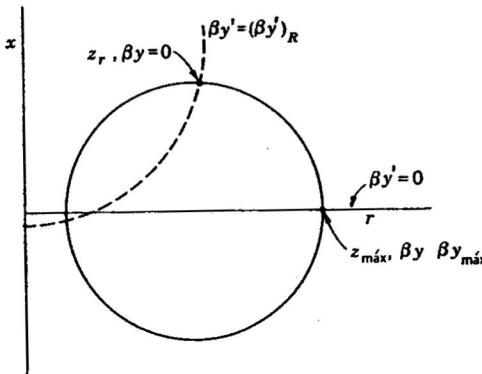


FIG. 10-13. Método para determinar φ en el ábaco. Las cantidades con tilde se refieren a los valores de βl indicados en el ábaco.

Determinar S , ρ y Z_{in} en la siguiente situación:

$$\begin{aligned} \lambda &= 10 \text{ pies} & R_o &= 100 \text{ ohms} \\ l &= 0,555 \text{ pies} & Z_R &= 140 - j120 \text{ ohms} \end{aligned}$$

Normalizando Z_R

$$z_r = \frac{Z_R}{R_o} = 1,4 - j1,2$$

Convirtiendo l en grados

$$\beta l = \frac{360l}{\lambda} = \frac{360 \times 0,555}{10} = 20^\circ$$

Entramos en el ábaco (Fig. 10-10) por z_r . La Fig. 10-14 ilustra los puntos y lugares geométricos de interés. El punto correspondiente a z_r se halla sobre los círculos $S = 2,8$ y $\beta l' = 22,5^\circ$. Luego $S = 2,8$. Y

$$(\beta l')_r = 22,5^\circ \quad \varphi = -2(\beta l')_r = -45^\circ$$

$|\rho|$ no puede obtenerse directamente del ábaco; entonces, calculando

$$|\rho| = \frac{S - 1}{S + 1} = \frac{2,8 - 1}{2,8 + 1} = \frac{1,8}{3,8} = 0,474$$

Para hallar z_{in} , entramos en el ábaco por z_r y giramos en sentido levógiro 20° , es decir, hasta el valor indicado $22,5 + 20 = 42,5^\circ$, y leemos

$$z_{in} = 0,68 - j0,82$$

Luego

$$Z_{in} = R_o z_{in} = 68 - j82 \text{ ohms}$$

El estudiante puede demostrar que, al usar el ábaco bicircular, el movimiento hacia el generador, es decir, el sentido de l creciente,

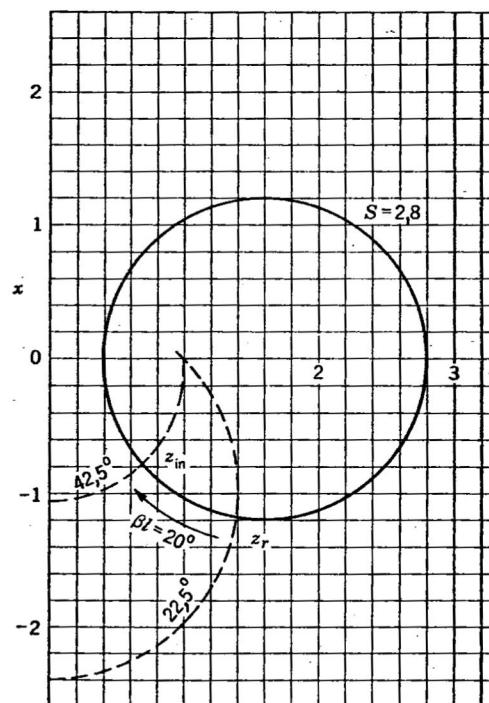


FIG. 10-14. Una porción del ábaco bicircular utilizada en el ejemplo ilustrativo.

corresponde a una rotación levógiro sobre una circunferencia $S = \text{constante}$. De igual modo, el desplazamiento hacia la carga corresponde a una rotación dextrógiro. El siguiente problema ilustra este principio.

En una línea sin pérdidas se mide una relación de onda estacionaria de 1,5 con el primer mínimo de tensión a 60° eléctricos de la terminación. Hallar el valor normalizado de la impedancia terminal.

El primer mínimo de tensión corresponde a un mínimo de impedancia que debe hallarse sobre el eje real del ábaco entre 0 y 1. Entramos por lo tanto en el ábaco por la intersección izquierda del eje real con la circunferencia $S = 1,5$. El valor $\beta l'$ indicado es de 90° . Girando hacia la carga (sentido dextrógiro) 60° , al valor indicado $\beta l' = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$, se lee $z_r = 1,14 - j0,42$.

10-10. Admitancia de entrada de una línea sin pérdidas. Es frecuentemente conveniente resolver los problemas en términos de admittance más bien que de impedancia. Derivaremos ahora las relaciones necesarias en el caso de la línea sin pérdidas. Utilizaremos nuevamente letras minúsculas para indicar los valores normalizados, de modo que

$$y = \frac{Y}{G_o} = YR_o = \frac{R_o}{Z} = \frac{1}{z}$$

Poniendo entonces $z_{in} = 1/y_{in}$ y $z_r = 1/y_r$, en la forma normalizada de la Ec. (10-4a), esto es,

$$z_{in} = \frac{z_r + j \tan \beta l}{1 + j z_r \tan \beta l} = r_{in} + j x_{in} \quad (10-28)$$

y despejando y_{in} , se tiene

$$y_{in} = \frac{y_r + j \tan \beta l}{1 + j y_r \tan \beta} = g_{in} + j b_{in} \quad (10-28a)$$

Dado que estas dos ecuaciones son idénticas en cuanto a la forma y el signo, es evidente que el ábaco bicircular puede usarse para el cálculo de la admitancia exactamente del mismo modo que para el cálculo de impedancia, excepto porque las coordenadas rectangulares se interpretan en términos de g y b más bien que de r y x .

10-11. Abaco de impedancias de Smith. Si bien el ábaco bicircular es muy útil para el cálculo de las impedancias y admitancias de línea, presenta una serie de inconvenientes que hacen difícil su uso práctico. Entre estos inconvenientes se hallan los de que las circunferencias S y βl no son concéntricas, lo que hace difícil la interpolación, y el de que sólo un rango limitado de valores de impedancia cabida en un ábaco de tamaño razonable. P. H. Smith, de los Bell Telephone Laboratories, publicó, en 1939, otra forma de ábaco¹ la que está libre de estos inconvenientes y que, por esta razón, ha desplazado completamente el ábaco bicircular. El ábaco de Smith está diseñado sobre la base de circunferencias concéntricas de $|\rho|$ ó S , y la transformación necesaria se obtiene pasando de las coordenadas rectangulares de impedancia del ábaco bicircular a coordenadas circulares ortogonales. La derivación del ábaco simplificase partiendo de la impedancia de entrada normalizada de la línea sin pérdidas en términos del coeficiente de reflexión, como en la Ec. (10-4b). Así, reemplazando ρ por su forma polar $|\rho|/\varphi$, y reordenando la ecuación,

$$|\rho|/\varphi - 2\beta l = \frac{z_{in} - 1}{z_{in} + 1} \quad (10-29)$$

El estudiante puede observar que el primer miembro de esta ecuación representa una familia de circunferencias de radio $|\rho|$, centradas en el origen, conforme a lo deseado. El siguiente paso, entonces, es el de hallar la forma de las coordenadas z . Esto puede hacerse mediante una inver-

¹ P. H. Smith, Transmission Line Calculator, *Electronics*, enero de 1939.

sión geométrica; para ello es necesario reordenar la Ec. (10-29) de modo que el coeficiente de $1/(z_{in} + 1)$ sea una constante. Esto se consigue sumando y restando la unidad al segundo miembro:

$$\begin{aligned} |\rho|/\varphi - 2\beta l &= \left(\frac{z_{in} - 1}{z_{in} + 1} - 1 \right) + 1 \\ &= \frac{-2}{z_{in} + 1} + 1 \end{aligned} \quad (10-30)$$

Las instrucciones paso a paso implícitas en la Ec. (10-30) se cumplen en la Fig. 10-15. La Fig. 10-15a muestra el semiplano z correspondiente

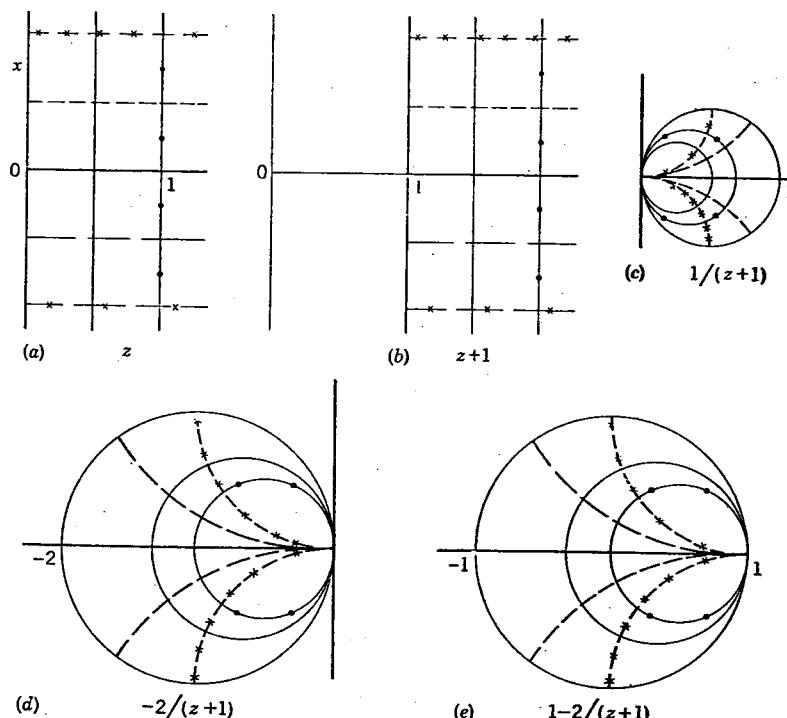


FIG. 10-15. Desarrollo de las coordenadas de impedancia del ábaco de Smith. Véase el texto.

a las impedancias complejas con componente resistiva positiva. Las líneas verticales corresponden a valores constantes de r y las horizontales, a valores constantes de x . Se han individualizado las líneas para su más fácil identificación en los pasos siguientes. En b, todo el diagrama se desplaza una unidad a la derecha, para obtener $z + 1$. En c se obtiene $1/(z + 1)$ por inversión geométrica. El estudiante debe advertir dos consecuencias importantes de este paso. Primero, las curvas para reactancia negativa (susceptancia positiva) aparecen como semi-

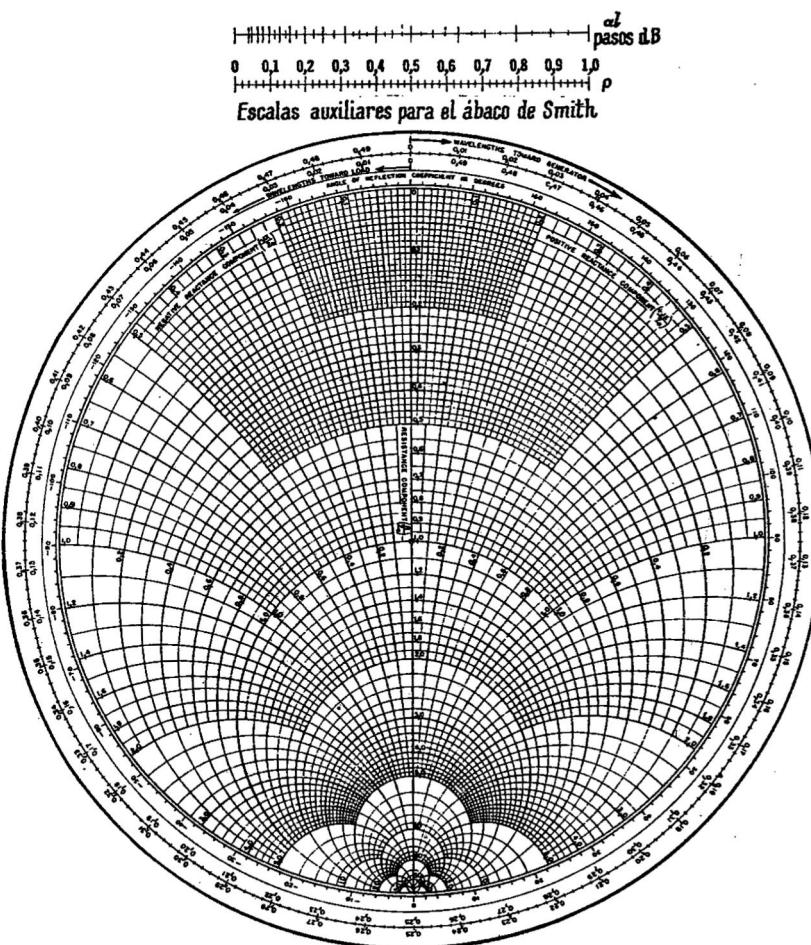


FIG. 10-16. El ábaco de Smith. (The Emeloid Co., Inc.) El uso de las escalas auxiliares está explicado en el Ap. 10-14.

circunferencias superiores y las de reactancia positiva, como semicircunferencias inferiores. Segundo, todos los valores de z , desde cero a infinito, para r positiva, quedan comprendidos dentro del círculo de diámetro unitario.

En la Fig. 10-15d, el diagrama de c se ha multiplicado por -2 , con otro cambio de posición de las curvas de reactancia. En e el círculo unitario se centra en el origen sumando $+1$. Por cuanto los lugares geométricos de $|\rho|$ o S son circunferencias centradas en el origen, no

se los representa en el ábaco, cuya forma usual es la que se muestra en la Fig. 10-16¹.

Dado que en un punto de impedancia máxima es $z_{in} = r_{in} + j0 = S$, para $r > 1$, las circunferencias de $S = \text{constante}$ se localizan convenientemente mediante las intersecciones de la porción derecha del eje real y de las circunferencias de $r = \text{constante}$. El valor de $|\rho|$ para un valor dado cualquiera de la relación de onda estacionaria puede determinarse reordenando la Ec. (10-17) en la forma

$$|\rho| = \frac{S - 1}{S + 1} \quad (10-31)$$

Sobre el ábaco de Smith de la Fig. 10-16 aparece una escala auxiliar que da la relación entre los valores numéricos de $|\rho|$ y S .

Se observará que el ábaco está calibrado sobre su periferia en términos de longitud de onda más bien que de grado eléctrico. El ábaco contiene además una calibración directa del ángulo del coeficiente de reflexión φ .

El ábaco de Smith se utiliza del mismo modo que el ábaco bicircular, y puede usarse además para cálculos de admitancias, excepto por el desplazamiento de fase de 180° en φ , indicado por la ecuación

$$|\rho|/\varphi - (2\beta l + \pi) = \frac{y_{in} - 1}{y_{in} + 1} \quad (10-29a)$$

El uso del ábaco de Smith se ilustra mediante el siguiente ejemplo:

En una línea sin pérdidas hay un mínimo de tensión a 18 cm de la terminación. Los mínimos adyacentes están separados a intervalos de 20 cm. $S = 2,5$, $l = 52$ cm. Hallar z_r y z_{in} . Se tiene

$$\lambda = 2 \times 20 = 40 \text{ cm.}$$

Dibujamos el círculo $S = 2,5$, como se ve en la Fig. 10-17. Un mínimo de tensión corresponde a un mínimo de impedancia; por lo tanto situamos este punto en la intersección de la circunferencia $S = 2,5$ y de $r = 0,4 = 1/S$. La carga está a 18 cm de este punto. Pasando a longitud eléctrica,

$$y_{min} = 18 \frac{\lambda}{40} = 0,45\lambda$$

Girando $0,45\lambda$ hacia la carga, leemos $z_r = 0,43 + j0,27$.

Los terminales de entrada están a $52 - 18 = 34$ cm hacia el generador a contar desde el punto de mínima impedancia, lo que corresponde a una longitud eléctrica de $34 (\lambda/40) = 0,85\lambda$. Dado que una vuelta en torno del ábaco corresponde a una longitud eléctrica de $0,5\lambda$, empezando por el punto de mínima impedancia giramos $(0,85 - 0,5)\lambda = 0,35\lambda$ y leemos,

$$z_{in} = 0,89 - j0,89.$$

10-12. Líneas de compensación ("stubs") resonantes. Se utilizan a menudo cortas secciones de líneas de transmisión en circuito abierto

¹ Pueden obtenerse copias del ábaco de Smith de The Emeloid Co., Inc., Hillside, N. J. La misma compañía fabrica también un calculador de ábaco de Smith. Los ábacos de Smith de este texto se reproducen con autorización de The Emeloid Co.

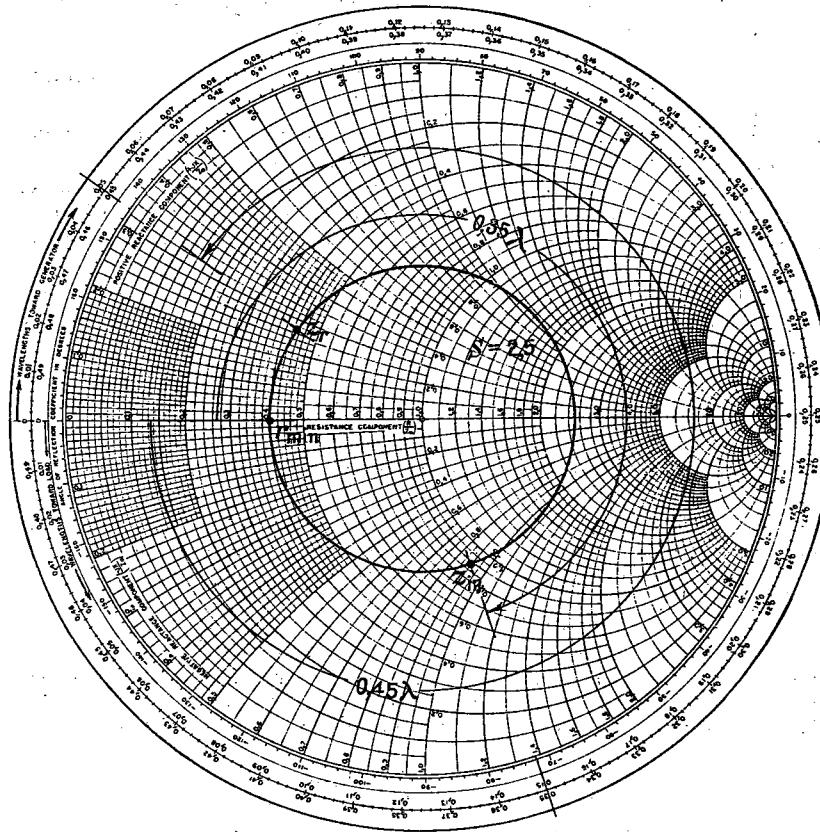


FIG. 10-17. Abaco de Smith, con la solución de un ejemplo ilustrativo.

múltiple en función de la frecuencia y se las puede utilizar como filtros agudamente sintonizados. Por ejemplo, la Fig. 10-18a muestra una línea de trasmisión soportada por líneas resonantes de un cuarto de onda. El trasmisor entrega la señal de frecuencia fundamental f_1 pero acompañada de una segunda armónica indeseada de frecuencia f_2 . En la hipótesis de que las líneas resonantes están libres de pérdidas, la velocidad de fase es independiente de la frecuencia, de modo que $\lambda_2 = \lambda_1/2$. Consideremos el comportamiento del sistema a las frecuencias fundamental y de segunda armónica. Para f_1 , la longitud de las líneas resonantes, s ,

equivale a $\lambda_1/4$ y éstas presentan una impedancia de entrada casi infinita y sirven así como soportes aislantes (o aisladores de un cuarto de onda) para la línea de trasmisión. Obsérvese que la aislación es tanto mejor cuanto mayor es la conductividad de los soportes. Para f_2 , en cambio, la longitud de los soportes es de $\lambda_2/2$ y presentan así una impedancia muy baja, la que representa un cortocircuito para la línea de

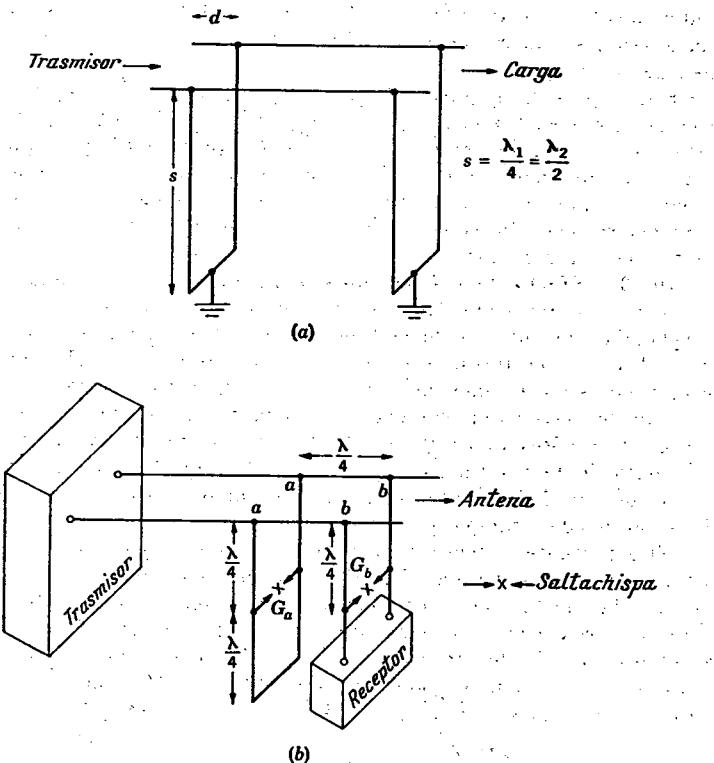


FIG. 10-18. Usos típicos de las líneas resonantes. (a) Aisladores de un cuarto de onda.
(b) Sistema simple de TR para radar.

trasmisión. Se entrega potencia a la carga en la frecuencia f_1 , pero la potencia de segunda armónica se ve, en cambio, totalmente reflejada hacia el generador.

Las líneas resonantes se utilizan también como componentes de los sistemas de conmutación trasmisión-recepción (TR) de los radares. En los aparatos de radar típicos se utiliza una única antena para el trasmisor y el receptor a la vez, según se indica en la Fig. 10-18b. El trasmisor envía pulsos de gran amplitud y de duración del orden del microsegundo a intervalos del orden del milisegundo. La función del sistema TR es la de proteger y aislar el receptor durante la trasmisión del pulso y

de aislar el trasmisor respecto del sistema entre pulsos, de modo que la señal de eco, de muy pequeña amplitud, pueda llegar al receptor. Veamos cómo funciona el sistema de la Fig. 10-18b.

La tensión desarrollada durante los pulsos es suficiente para formar un arco en los saltachispas, lo que equivale al establecimiento de un cortocircuito. Luego, la impedancia de entrada de la primera línea resonante, en aa , es infinita. El saltachispas G_b protege el receptor y produce también una impedancia virtualmente infinita en bb . En estas condiciones, prácticamente toda la energía del trasmisor es entregada a la antena, siempre que esta última esté correctamente adaptada a la línea de transmisión.

Entre pulsos, los niveles de energía son demasiado bajos y no producen arco en los saltachispas, de modo que G_a y G_b quedan en circuito abierto. La impedancia de entrada en aa deviene nula (porque está a una distancia de media longitud de onda de un cortocircuito). La impedancia que se observa en bb , mirando al trasmisor, es infinita (por la misma razón). En estas condiciones, la energía recibida para virtualmente toda al receptor.

10-13. Efecto de las pérdidas pequeñas. En los apartados anteriores hemos discutido las distribuciones de onda estacionaria y las impedancias de entrada de la línea de alta frecuencia suponiendo despreciables sus pérdidas. Sin embargo, cuando interesa el rendimiento de la transmisión de energía por la línea, esta hipótesis deja de lado la cantidad de mayor importancia; por lo tanto, no puede reputarse como válida esta hipótesis en tales casos. Por otra parte, al computar el factor de mérito Q de las líneas resonantes o la impedancia de entrada de líneas que son físicamente largas, por ejemplo de 15 m o más, las pérdidas no pueden tampoco despreciarse.

El estudiante podría suponer entonces que es preciso recurrir a los métodos generales del Cap. IX. Esta es una posibilidad, pero dado que las pérdidas de la línea continúan siendo pequeñas, pueden introducirse algunas aproximaciones para simplificar el cálculo. Las ecuaciones generales para la determinación de γ y Z_o en el caso de las líneas de bajas pérdidas han sido consideradas en el Cap. VIII y las repetimos aquí para mayor conveniencia.

$$\begin{aligned} Z_o &= \sqrt{\frac{L}{C}} \left(1 - j \frac{R}{2\omega L} \right) \\ \alpha &= \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} \left[1 - \frac{1}{8} \left(\frac{R}{\omega L} \right)^2 \right] \approx \frac{R}{2R_o} \quad R \ll \omega L \\ \beta &= \omega \sqrt{LC} \left[1 + \frac{1}{8} \left(\frac{R}{\omega L} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

10-14. Abaco de Smith para $\alpha l \neq 0$. Se ha visto en el Cap. IX que a medida que αl aumenta en una línea con pérdidas, Z_{in} tiende a Z_o , o, hablando de impedancias normalizadas, z_{in} tiende a 1. Parecería, entonces, que el lugar geométrico de z_{in} para una línea no terminada en Z_o y con un valor de α distinto de cero, se representaría como una espiral en el abaco de Smith. Este lugar geométrico comenzaría en z_r y se

desarrollaría en espiral hacia el centro del abaco. En cambio, el lugar geométrico de z_{in} para una línea sin pérdidas es una circunferencia. Entonces, esta circunferencia de ρ constante para la línea sin pérdidas es reemplazada por una espiral ρ' para la línea con pérdidas. Se derivará ahora la forma de esta espiral y se explicará su utilización con referencia al abaco de Smith.

Por analogía con la Ec. (10-29), ρ' queda definido por

$$|\rho'|/\varphi - 2\beta l = \frac{z'_{in} - 1}{z'_{in} + 1} \quad (10-32)$$

donde z'_{in} es la impedancia de entrada normalizada de la línea con pérdidas, que, según la Ec. (9-30a), es

$$z'_{in} = \frac{\operatorname{senh} \gamma l + z_r \cosh \gamma l}{\cosh \gamma l + z_r \operatorname{senh} \gamma l}$$

Expandiendo $\operatorname{senh} \gamma l$ y $\cosh \gamma l$ y dividiendo numerador y denominador por $\cosh \alpha l \cos \beta l$,

$$z'_{in} = \frac{(\operatorname{tgh} \alpha l + j \operatorname{tg} \beta l) + z_r(1 + \operatorname{tgh} \alpha l \operatorname{tg} \beta l)}{(1 + j \operatorname{tgh} \alpha l \operatorname{tg} \beta l) + z_r(\operatorname{tgh} \alpha l + j \operatorname{tg} \beta l)}$$

Agrupando los términos en $\operatorname{tg} \beta l$,

$$z'_{in} = \frac{(z_r + \operatorname{tgh} \alpha l) + j(1 + z_r \operatorname{tgh} \alpha l) \tan \beta l}{(1 + z_r \operatorname{tanh} \alpha l) + j(z_r + \operatorname{tanh} \alpha l) \tan \beta l} \quad (10-33)$$

Introduciendo la Ec. (10-33) en la (10-32) y simplificando,

$$|\rho'|/\varphi - 2\beta l = \left(\frac{z_r - 1}{z_r + 1} \right) \left(\frac{1 - j \operatorname{tg} \beta l}{1 + j \operatorname{tg} \beta l} \right) \left(\frac{1 - \operatorname{tgh} \alpha l}{1 + \operatorname{tgh} \alpha l} \right) \quad (10-34)$$

Se observará que el primer factor de la Ec. (10-34) es el coeficiente de reflexión ρ y que el segundo factor es $1/-2\beta l$; por lo tanto, la ecuación puede escribirse en la forma

$$|\rho'|/\varphi - 2\beta l = |\rho|/\varphi - 2\beta l \frac{1 - \operatorname{tgh} \alpha l}{1 + \operatorname{tgh} \alpha l} \quad (10-34a)$$

La cantidad $|\rho|/\varphi - 2\beta l$ es precisamente el lugar geométrico de la línea sin pérdidas; por lo tanto $(1 - \operatorname{tgh} \alpha l)/(1 + \operatorname{tgh} \alpha l)$ puede denominarse *factor espiral* \mathcal{F} , causado por la presencia de pérdidas en la línea.

Si bien la Ec. (10-34a) es muy adecuada para la determinación de la impedancia de entrada de una línea con pérdidas con ayuda del abaco de Smith, no es del todo conveniente porque no hay una escala directa de $|\rho|$ en el abaco. Dado que la calibración del eje real coincide con los valores de la relación de onda estacionaria S mayores que 1, es más conveniente relacionar el factor espiral con la relación de onda estacionaria. Luego, por analogía con la Ec. (10-17),

$$S' = \frac{1 + |\rho'|}{1 - |\rho'|} = \frac{1 + |\rho| \mathcal{F}}{1 - |\rho| \mathcal{F}} \quad (10-35)$$

Para ilustrar el lugar geométrico espiral y el empleo de la Ec. (10-35), consideremos el caso especial de una línea de una longitud de onda de largo que tiene una pérdida de atenuación de 1 dB y está terminada en la impedancia normalizada $z = 1 + jl$. En el ábaco de Smith de la Fig. 10-16, el lugar geométrico de z_{in} sería la circunferencia correspondiente a $S = 2,6$ o $|p| = 0,444$ si la línea no tuviera pérdidas. El lugar geométrico espiral que incluye el efecto de las pérdidas puede determinarse calculando puntos típicos, del modo indicado más abajo. \mathfrak{F} se calcula con la Ec. (10-34a) y S' con la (10-35).

$\frac{l}{\lambda}$	αl , neper	$\operatorname{tgh} \alpha l$	$1 - \operatorname{tgh} \alpha l$	$ p \mathfrak{F}$	$1 - p \mathfrak{F}$	S'
0,125	0,0144	0,0144	0,9856	0,431	0,569	2,52
0,25	0,0288	0,0288	0,9712	0,420	0,580	2,45
0,375	0,0432	0,0432	0,9568	0,406	0,594	2,37
0,50	0,0576	0,0576	0,9424	0,395	0,605	2,31
0,625	0,0720	0,0720	0,9280	0,384	0,616	2,22
0,75	0,0864	0,0864	0,9136	0,372	0,628	2,19
0,875	0,1008	0,1008	0,8992	0,358	0,642	2,11
1,00	0,1152	0,1150	0,8850	0,352	0,648	2,09

Estos puntos aparecen unidos por una espiral en la Fig. 10-19. Debe observarse que la impedancia de entrada normalizada es $1,09 + j0,8$ en comparación con $1 + jl$ que se obtendría en el caso de la línea sin pérdidas.

El problema anterior demuestra que el uso de la Ec. (10-35) entraña muchos cálculos. Para reducir al mínimo los cálculos necesarios, es conveniente construir un ábaco auxiliar del tipo de alineación para S , αl y $|p|$, para usar con el ábaco de Smith. Dado que S es una función de la magnitud del coeficiente de reflexión, es conveniente poner $|p| = 1$ al construir esta escala. Luego, reemplazando el valor de \mathfrak{F} en la Ec. (10-35),

$$S' = \frac{1}{\operatorname{tgh} \alpha l} \quad (10-35a)$$

El ábaco auxiliar correspondiente a esta ecuación y la Ec. (10-17) es el que aparece en la parte superior de la Fig. 10-16. El uso de ambos ábachos para la determinación de la impedancia de entrada de una línea con pérdidas está ilustrado en el ejemplo que sigue. Dado que sólo hay que calcular Z_{in} , no hay necesidad de determinar el lugar geométrico espiral completo.

Una antena está conectada a un receptor de televisión por medio de una línea "twin-lead" de 300 ohm, de 15,25 m de longitud. La impedancia de entrada del receptor es de 75 ohm, resistiva. Los datos suministrados por el fabricante de la línea son: $Z_0 = 300$ ohm resistiva. Velocidad relativa = 82 por ciento. Atenuación 6,56 dB/100 m a 100 Mc/s. Hallar la impedancia presentada a la antena en 100 Mc/s.

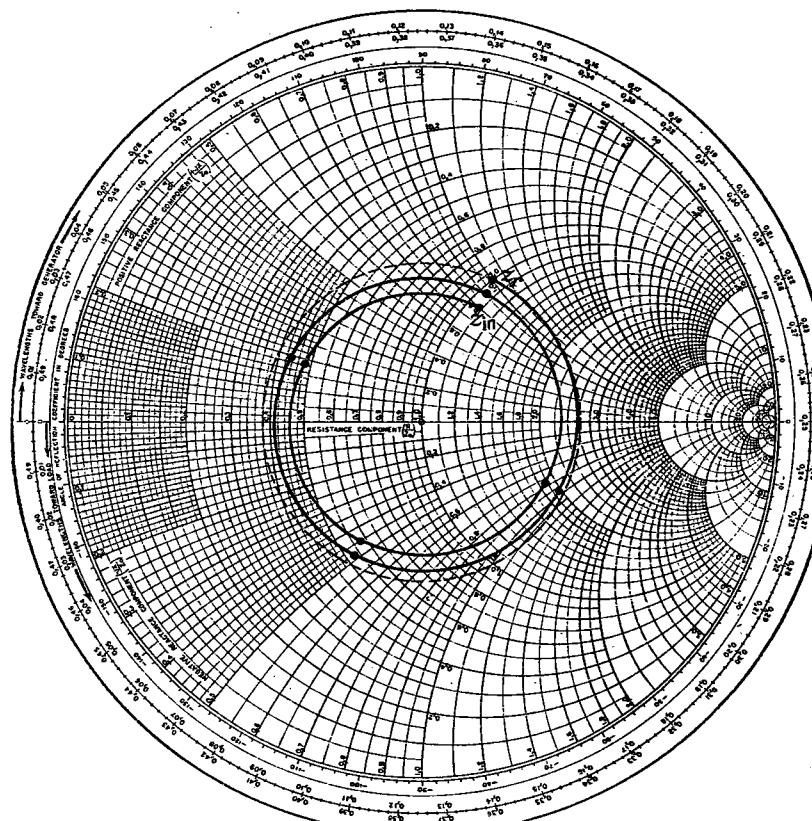


FIG. 10-19. Ilustración del efecto de una pequeña pérdida en las líneas de trasmisión sobre la impedancia de entrada. El lugar geométrico es una espiral en lugar de una circunferencia.

La velocidad relativa de 82 por ciento significa que $v_p = 0,82 c$, siendo c la velocidad de la luz; luego

$$\lambda = \frac{v_p}{f} = \frac{0,82(3 \times 10^8)}{10^8} = 2,46 \text{ m}$$

$$\text{y } l = \frac{15,25}{2,46} = 6,19 \lambda$$

$$\alpha l = 6,56 \times \frac{15,25}{100} = 1 \text{ dB}$$

La impedancia terminal normalizada es

$$z_r = \frac{Z_R}{R_0} = \frac{75}{300} = 0,25$$

Entramos por el ábaco (Fig. 10-20) por z_r , y giramos $6,19\lambda$ sobre la circunferencia $S = \text{constante}$, para leer el valor z_{in} sin pérdidas; luego $z_{in} = 1,82 + j1,7$. Este valor de z_{in} corresponde a $S = 4$. Pasamos ahora

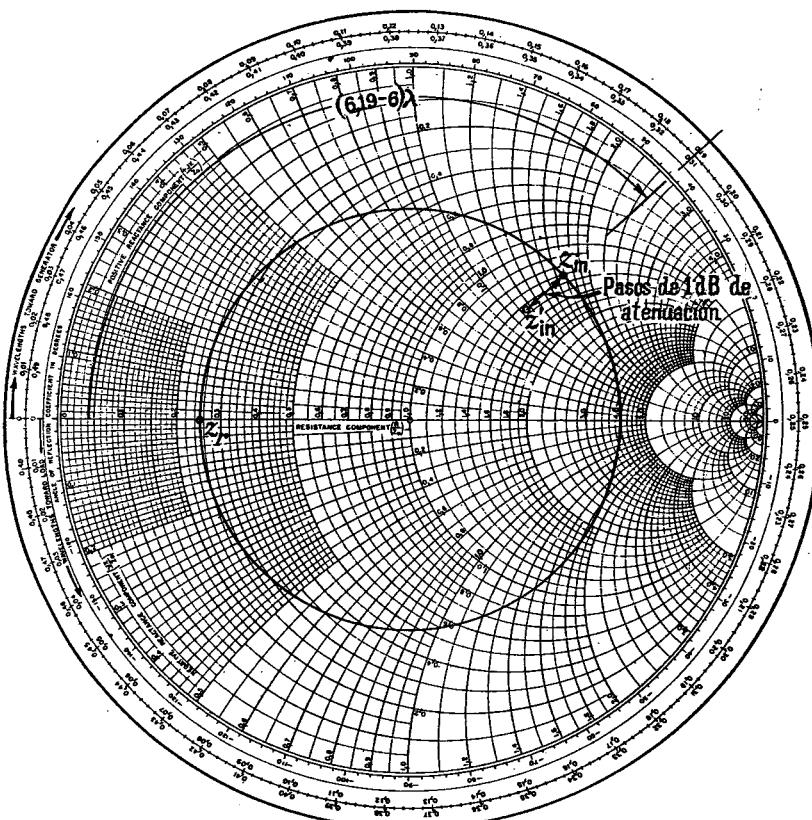
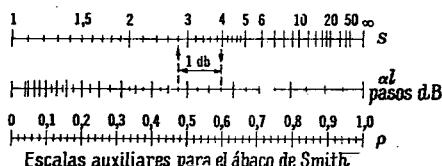


FIG. 10-20. Solución con ábaco de Smith del ejemplo con línea con pérdidas. Nota: Las divisiones principales de la escala de ρl corresponden a pasos de 1 dB.

en el ábaco auxiliar del valor de S a la escala de ρl . Nos desplazamos 1 dB hacia la izquierda en la escala de ρl y volvemos a la escala de S (ahora S'), para leer $S' = 2,8$. En el ábaco principal nos desplazamos luego radialmente hacia adentro hasta $S' = 2,8$, para leer la verdadera impedancia de entrada, $z'_{in} = 1,49 + j1,22$ ohm.

Pasando a ohm,

$$Z'_{in} = R_o z_{in} = 300(1,49 + j1,22) = 447 + j366 \text{ ohms}$$

10-15. Rendimiento de trasmisión. Un método muy conveniente para calcular el rendimiento de trasmisión de un circuito de bajas pérdidas consiste en computar la distribución de corriente suponiendo que *no hay* pérdidas para computar después las pérdidas $|I|^2R$ a partir de esta distribución. Las circunstancias en que este procedimiento es útil incluyen el caso de las antenas, redes reactivas con elementos de alto Q y líneas de bajas pérdidas.

Consideremos el caso de una línea de bajas pérdidas en la que es despreciable el valor de G y que está terminada en una resistencia pura R_R , y pongamos $r_r = R_R/R_o$. Entonces, la relación de corrientes de la onda incidente y de la onda reflejada es un número real

$$\frac{I''_R}{I'_R} = -\rho = \frac{1 - r_r}{1 + r_r}$$

En un punto cualquiera de la línea, la corriente total I , será $I = I'_y + I''_y$, y el desplazamiento de fase entre I'_y e I''_y , y será $2\beta y$ si ρ es positivo ($r_r < 1$) y $2\beta y + \pi$ si ρ es negativo ($r_r > 1$). Las magnitudes de I'_y e I''_y , no dependerán apreciablemente de y en las líneas de bajas pérdidas. Por lo tanto, $|I''_y| = \rho |I'_y|$.

La fase entre la corriente incidente y la reflejada depende de y . I , será una onda estacionaria.

Puede obtenerse ahora muy fácilmente la magnitud de I , considerando la componente de I''_y , que está en fase con I'_y , la que será $-\rho |I'_y| \cos 2\beta y$, y la componente de I''_y , que está en cuadratura con I'_y , la que será $\rho |I'_y| \sin 2\beta y$. Luego

$$\begin{aligned} |I_y|^2 &= |I'_y|^2[(1 - \rho \cos 2\beta y)^2 + (\rho \sin 2\beta y)^2] \\ &= |I'_y|^2(1 + \rho^2 - 2\rho \cos 2\beta y) \end{aligned} \quad (10-36)$$

Sea ahora R = resistencia por unidad de longitud de la línea. La potencia disipada a lo largo de la línea será

$$\begin{aligned} P_{p\acute{e}rd.} &= \int_0^l |I_y|^2 R \, dy \\ &= |I'_y|^2 \left(1 + \rho^2 - \rho \frac{\sin 2\beta l}{\beta l} \right) Rl \end{aligned} \quad (10-37)$$

Rl es igual a la resistencia en serie total de la línea, y la potencia entregada a la carga será

$$P_{sal.} = |I_R|^2 R_R = |I'_y|^2 (1 - \rho)^2 R_R \quad (10-38)$$

$$\frac{P_{p\acute{e}rd.}}{P_{sal.}} = \frac{[1 + \rho^2 - (\rho \sin 2\beta l)/\beta l] Rl}{(1 - \rho)^2 r_r R_o} \quad (10-38a)$$

Expresando ρ en términos de r_r , esta ecuación deviene

$$\frac{P_{p\acute{e}rd.}}{P_{sal.}} = \frac{Rl}{2R_o} \left[r_r + \frac{1}{r_r} + \left(\frac{1}{r_r} - r_r \right) \frac{\sin 2\beta l}{2\beta l} \right] \quad (10-38b)$$

Con el fin de hacer mínimas las pérdidas de potencia, debe elegirse r_r de tal modo que

$$\frac{\partial \frac{P_{\text{perd.}}}{P_{\text{sat.}}}}{\partial r_r} = \frac{Rl}{2R_o} \left[1 - \frac{1}{r_r^2} - \left(\frac{1}{r_r^2} + 1 \right) \frac{\sin 2\beta l}{2\beta l} \right] = 0$$

de donde

$$r_r = \sqrt{1 + (\sin 2\beta l)/2\beta l} \quad (10-39)$$

A medida que βl se hace más y más grande, $(\sin 2\beta l)/2\beta l$ pasa por máximos y mínimos, pero tiende a cero, de modo que para las líneas largas r_r debe ser igual a la unidad para rendimiento máximo. En cam-

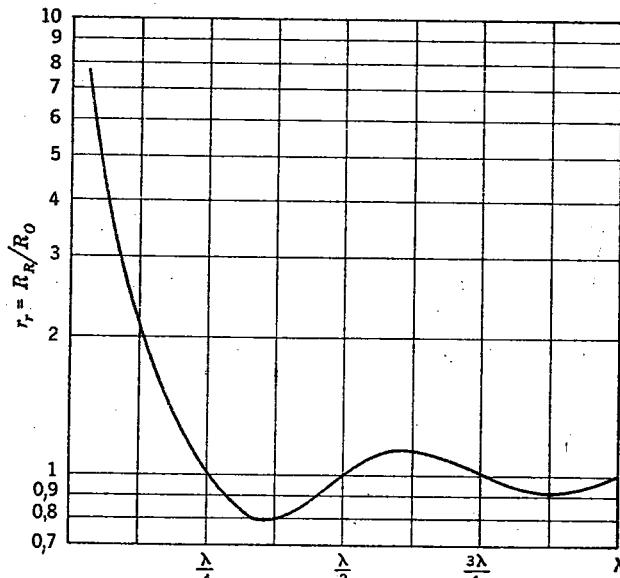


FIG. 10-21. Gráfica de los valores de $r_r = R_R/R_o$ que dan el máximo valor del rendimiento en función de la longitud de la línea.

bio, en las líneas cortas, digamos, mucho menos que $\lambda/4$, se obtiene el rendimiento máximo con valores grandes de r_r . Este último es el caso de las líneas comunes para la transmisión de energía industrial, en las que obtiénes el máximo rendimiento utilizando tensiones altas y corrientes bajas. Para este fin, se utilizan transformadores elevadores en la entrada de la línea y transformadores reductores en la salida, de modo que la impedancia presentada a la línea es mucho mayor que la característica. En cambio, en las líneas eléctricamente largas, el efecto de onda estacionaria significa que, con una alta impedancia y por lo tanto una baja corriente en el receptor, habrá una alta corriente en otros puntos de la línea y que la reducción de las pérdidas en los puntos en que la corriente es baja es más que contrarrestada por el elevado

I^2R en los puntos en que la corriente es grande, con un aumento neto de la pérdida.

En la Fig. 10-21 se da una gráfica de la Ec. (10-39). Si se introduce en la Ec. (10-38b) el valor óptimo de r_r , determinado con la Ec. (10-39), es posible ver el efecto que las ondas estacionarias causan sobre

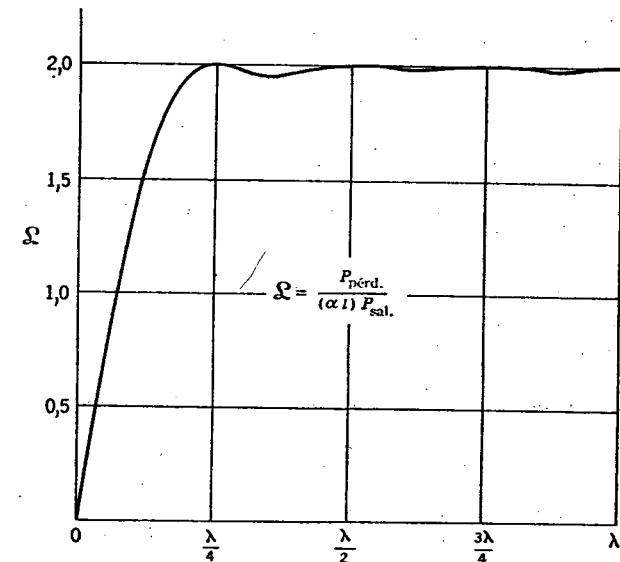


FIG. 10-22. Gráfica de la función de pérdidas \mathfrak{L} en función de la longitud de la línea. Para cada longitud, $r_r = R_R/R_o$ tiene el valor óptimo especificado por la Ec. (10-39) y la Fig. 10-21.

las pérdidas. Por la Ec. (8-64a), $Rl/2R_o = al$; luego, la Ec. (10-38b) puede escribirse

$$\frac{P_{\text{perd.}}}{P_{\text{sat.}}} = (al)\mathfrak{L} \quad (10-38c)$$

donde \mathfrak{L} es una función de pérdida de onda estacionaria definida por

$$\mathfrak{L} = r_r + \frac{1}{r_r} + \left(\frac{1}{r_r} - r_r \right) \frac{\sin 2\beta l}{2\beta l} \quad (10-40)$$

En la Fig. 10-22 se representa \mathfrak{L} en función de la longitud de la línea en términos de λ , siempre con el valor óptimo de r_r , especificado por la Ec. (10-39). Esta figura muestra que para una resistencia total dada de la línea y una impedancia característica dada, es decir, para un valor dado de al , las líneas cortas que pueden hacerse funcionar con una terminación de alta impedancia tienen mayor rendimiento. Para valores de la longitud mayores que $\lambda/4$, \mathfrak{L} tiene un valor de aproximadamente 2, cualquiera que sea la longitud, la línea debe terminarse en R_o .

$$\frac{P_{\text{perd.}}}{P_{\text{sal.}}} = \frac{Rl}{R_o} = 2\alpha l$$

y la pérdida relativa es fundamentalmente sólo función de la resistencia en serie total y de la impedancia característica.

Si la línea es mayor que aproximadamente λ , el término en βl de la Ec. (10-40) resulta despreciable y

$$\mathfrak{L} \approx \frac{r_r^2 + 1}{r_r} \quad (10-40a)$$

Para pequeñas desviaciones de r_r respecto de la unidad el factor $(r_r^2 + 1)/r_r$ no crece rápidamente, y varía sólo de 2 a 2,5 cuando r_r pasa de 1 a 2 ó de 1 a 0,5. Por lo tanto, la pérdida no aumenta gran cosa si la relación R_R/R_o (y la relación de onda estacionaria) se mantiene dentro de los límites $1/2$ a 2. En cambio, para desviaciones grandes, $(r_r^2 + 1)/r_r$ es casi igual a r_r , y las pérdidas resultan casi directamente proporcionales a r_r . En la tabla 8-2 se han dado ecuaciones para el cálculo de R_o en el caso de las líneas de alambres paralelos y los cables coaxiales.

10-16. Q de las líneas resonantes de cuarto de onda. El circuito antirresonante se utiliza a menudo como carga sintonizada en los amplificadores a válvula y en los circuitos osciladores. A medida que aumenta la frecuencia de trabajo, los valores de inductancia y capacitancia que forman el circuito resonante resultan tan pequeños que es difícil realizarlos como elementos de circuito concentrados y se recurre entonces a las líneas de transmisión. Dado que una línea resonante de un cuarto de onda compártase como un circuito antirresonante, se la utiliza a menudo como carga de placa en las frecuencias muy altas.

Cuando se utiliza una línea resonante con este objeto, su Q y su ancho de banda de potencia mitad resultan importantes y la hipótesis de pérdida nula conduce al ridículo resultado de un Q infinito y un ancho de banda cero. Es posible una aproximación a los valores correctos con las hipótesis adoptadas en el apartado anterior. La corriente y la tensión a lo largo de una línea de cuarto de onda en cortocircuito son $I_y = I_R \cos \beta y$, $E_y = I_R R_o \operatorname{sen} \beta y$. En el extremo de entrada, $E_{in} = I_R R_o$. La potencia media disipada será

$$P_{\text{perd.}} = \int_0^{\lambda/4} |I_R|^2 \cos^2 \beta l R dl = \frac{|I_R|^2 R l}{2} \quad (10-41)$$

La impedancia de entrada estará determinada por la tensión de entrada y la potencia disipada, es decir,

$$Z_{in} = R_{in} = \frac{|E_{in}|^2}{P_{\text{perd.}}} = \frac{2|I_R|^2 R_o^2}{|I_R|^2 R l} = \frac{2R_o^2}{R l} \quad (10-42)$$

La máxima energía almacenada por ciclo será

$$\int_0^{\lambda/4} |I_R|^2 L \cos^2 \beta l dl = |I_R|^2 \frac{L l}{2} \quad (10-43)$$

El Q será

$$Q = \omega \frac{\text{máxima energía almacenada por ciclo}}{\text{potencia media disipada}}$$

Sustituyendo según las Ecs. (10-41) y (10-43),

$$Q = \frac{\omega L}{R} \quad (10-44)$$

Luego el Q de la sección de cuarto de onda es idéntico al Q de cada longitud infinitesimal. En alta frecuencia, R es proporcional a la raíz cuadrada de la frecuencia. Luego, según la Ec. (10-44), el Q de la sección de cuarto de onda en cortocircuito es directamente proporcional a la raíz cuadrada de la frecuencia.

10-17. Dimensiones de la línea coaxil de pérdidas mínimas. Los resultados anteriores pueden aprovecharse para determinar las dimensiones de la línea coaxil de Q máximo (o pérdidas mínimas). Para una terminación cualquiera, la Ec. (10-38b) indica que la relación de la potencia disipada a la potencia entregada a la carga es proporcional a Rl/R_o . Luego, en el caso de un cable coaxil, si se mantiene constante el diámetro del conductor interno, al aumentar el diámetro del conductor externo aumenta R_o y disminuye R , de modo que las pérdidas disminuyen indefinidamente. Desafortunadamente, también aumenta del mismo modo el coste de la línea coaxil. En cambio, si se mantiene constante el diámetro del conductor externo (que es el factor que determina de manera principal el coste de la línea) mientras se aumenta el diámetro del conductor interno, disminuyen a la vez R y R_o . Podría esperarse entonces que ha de existir una relación óptima de los diámetros (o los radios) de los dos conductores. Para mayor conveniencia, pongamos como relación de los dos radios $x = r_2/r_1$.

Según los datos de la tabla 8-2, puede verse que en las altas frecuencias, en las que puede despreciarse el concatenamiento de flujo dentro de los conductores, $\beta (= \omega \sqrt{LC})$ es independiente de x en cualquier frecuencia. Luego, para una frecuencia dada y la línea terminada en R_o (o cualquier valor fijo de r_r) el factor \mathfrak{L} de la Ec. (10-40) es constante y $P_{\text{perd.}}/P_{\text{sal.}}$ es mínima cuando lo es $a = R/2R_o$ con respecto a x . Sustituyendo según la tabla 8-2,

$$\alpha = \frac{K(x+1)}{\ln x} \quad K = \text{constante} \quad (10-45)$$

Diferenciando e igualando la derivada a cero para hallar el mínimo

$$\frac{d\alpha}{dx} = K \frac{\ln x - (x+1)/x}{\ln^2 x} = 0$$

$$\ln x = 1 + \frac{1}{x}$$

Una ecuación trascendente de este tipo puede resolverse gráficamente representando $\ln x$ y $1 + 1/x$ en función de x . La solución de la ecuación está dada por la intersección de las dos curvas y resulta ser $x = 3,6$. Luego, la línea coaxil de conductor externo fijo debe tener una relación de radios externo a interno de 3,6 para que sus pérdidas sean mínimas y su rendimiento de transmisión máximo. Este valor corresponde a una impedancia característica $R_o = 138 \log 3,6 = 76,9$ ohm.

No sólo es 3,6 la relación óptima para máximo rendimiento, sino también la que da el mayor Q en las líneas resonantes en cortocircuito.

10-18. Dimensiones del cable coaxil para mínima posibilidad de arco. La potencia total que puede trasmisitirse mediante una línea de cable coaxil dada depende de la tensión de arco, es decir, de la tensión de perforación de la aislación entre los conductores.

La aplicación de la teoría de los campos a la geometría del cable coaxil demuestra que la máxima intensidad de campo eléctrico en el dieléctrico ocurre en la superficie del conductor interno (radio r_1) y tiene como valor

$$\epsilon = \frac{E}{r_1 \ln(r_2/r_1)} \quad (10-46)$$

donde E es la diferencia de potencial entre los dos conductores.

Luego, para un conductor externo de radio constante y una tensión E dada, puede hacerse mínima ϵ y, por lo tanto, el peligro de arco, eligiendo convenientemente la relación de radios de los conductores, $x = r_2/r_1$. Así,

$$\epsilon = \frac{E}{r_2} \frac{x}{\ln x} \quad (10-46a)$$

$$\frac{d\epsilon}{dx} = \frac{E \ln x - 1}{r_2 (\ln x)^2} = 0 \quad (10-47)$$

$$x = e = 2,718$$

Esta relación corresponde a una impedancia característica de 60 ohm.

10-19. Un problema de ingeniería. Los dos últimos apartados indican que no es posible diseñar una línea coaxil capaz de proveer simultáneamente el máximo rendimiento de transmisión y la máxima seguridad contra los arcos. ¿Cómo, entonces, debe elegirse la línea? Este problema se trata mejor observando cómo varían el rendimiento y la intensidad de campo máximo al variar la relación r_2/r_1 (o R_o). A este fin se han dibujado las curvas normalizadas de la Fig. 10-23, a partir de las Ecs. (10-45) y (10-46a). Se observará que ambas curvas, de a/a_{\min} y ϵ/ϵ_{\min} , son relativamente planas para los valores de R_o comprendidos entre 65 y 75 ohm. Un valor compromisorio razonable sería el de $R_o = 70$ ohm, aproximadamente ($r_2/r_1 = 3,2$ aprox.).

La Fig. 10-23 incluye también una curva para la máxima potencia trasmisida (normalizada) en la condición en que el gradiente de tensión está justamente por debajo del valor de ruptura (ver Prob. 10-14). La consideración de esta circunstancia aconseja utilizar un valor de

R_o menor que 70 ohm. En la práctica, los valores utilizados se hallan entre 50 y 75 ohm.

10-20. Comparación entre las líneas de energía y las de comunicación. Las ecuaciones desarrolladas en este capítulo son aplicables por igual a las líneas de energía y de comunicación, pero es de interés observar las diferencias en los métodos de explotación en ambos casos (ver la tabla de la página 408).

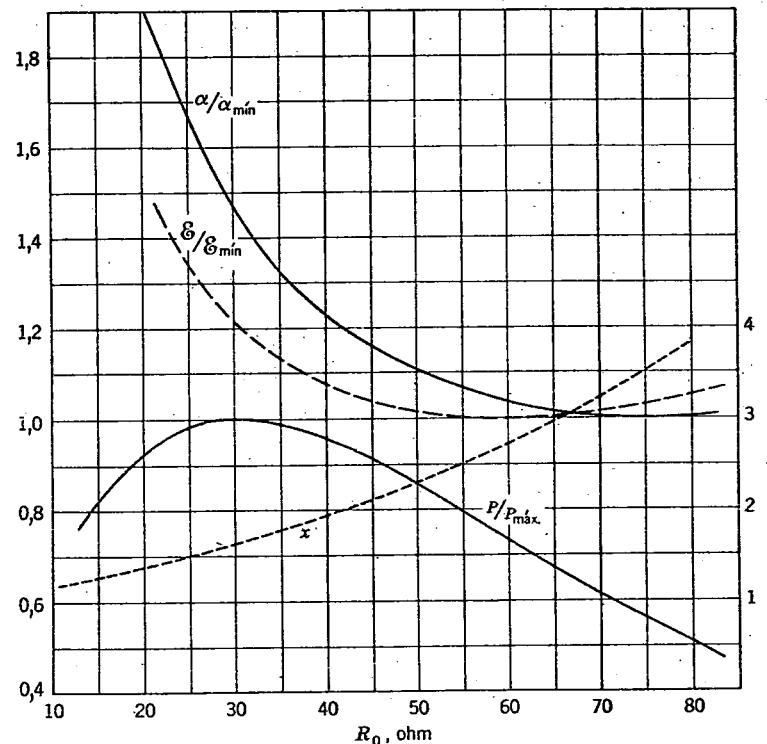


FIG. 10-23. Curvas normalizadas que muestran la variación de las pérdidas, el gradiente de tensión en el dieléctrico, y la máxima potencia trasmisida en función de R_o , en los cables coaxiles.

En el caso de la trasmisión de energía, se puede tener una tensión constante en los terminales de salida del generador o de la combinación de generador y transformador por medio de un regulador de tensión. Con esto se tiene el caso de una fuente de impedancia interna nula. En el extremo receptor se puede mantener constante la tensión a través de una carga variable recurriendo a un regulador de inducción (equivalente a un transformador de relación variable) o usando un capacitor sincrónico. En los grandes centros de consumo se prefiere el último. La disposición está ilustrada en la Fig. 10-24.

Trasmisión de energía

Una sola frecuencia.
La línea es siempre eléctricamente corta ($l < 0,1\lambda$).
La línea puede ser representada con una sección nominal T o π .
Debe ser despreciable la variación de tensión en la carga.
Impedancia de carga variable.
Impedancia de terminación por lo común mucho mayor que Z_o .
El generador es por lo común equivalente a una fuente de impedancia baja o nula y de tensión generada constante.

La situación en el extremo receptor puede representarse por medio del teorema de Thévenin. La tensión de circuito abierto estará dada por

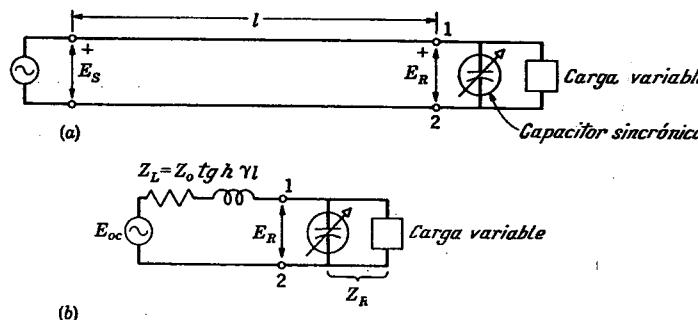


FIG. 10-24. Circuitos para estudiar la regulación de tensión en una línea de transmisión de energía. (a) Circuito básico. (b) Se reemplaza el circuito a la izquierda de los terminales 1 y 2 según el teorema de Thévenin.

$E_{oc} = E_s / \cosh \gamma l$. En la práctica $|\cosh \gamma l| = \sqrt{\operatorname{senh}^2 \alpha l + \cos^2 \beta l}$ será siempre menor que la unidad, de modo que la tensión de circuito abierto será mayor que la tensión presente en el extremo trasmisor debido a la onda estacionaria.

La impedancia interna equivalente mirando a los terminales del extremo receptor de la línea será la impedancia de cortocircuito de la línea, $Z_o \operatorname{tgh} \gamma l$. Dado que las líneas de potencia son eléctricamente cortas, $Z_o \operatorname{tgh} \gamma l$ es siempre inductiva.

Por lo tanto, el único problema es el de ajustar la susceptancia del capacitor cuando varía la carga de manera de mantener constante la magnitud de E_R . Afortunadamente esto es relativamente simple, porque toda caída en $|E_R|$ significa que la susceptancia del capacitor sincrónico debe aumentarse, y esto sólo requiere un aumento de la excitación de la máquina sincrónica. Esta operación es similar a la necesaria

Comunicaciones

Banda ancha de frecuencias.
La línea puede ser corta o larga.
La solución exige casi siempre las ecuaciones de línea larga.
La tensión en la carga debe variar con la señal.
Impedancia de carga constante.
Impedancia de terminación casi siempre no muy diferente de Z_o .
El generador tiene por lo común una impedancia interna considerable y la tensión generada varía con la señal.

en el generador sincrónico en el extremo trasmisor, de modo que se puede usar el mismo tipo de regulador.

En los sistemas de energía se necesitan muchas veces líneas ramificadas, como las de la Fig. 10-25. Obsérvese, sin embargo, que si se usan capacitores sincrónicos en cada uno de los puntos de ramificación,

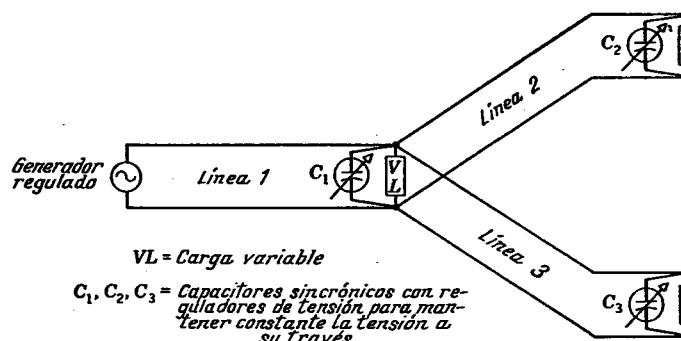


FIG. 10-25. Uso de los capacitores sincrónicos para la regulación de los ramales en un sistema de transmisión de energía.

ción, se mantiene constante la tensión en el extremo de trasmisión de cada línea individual y, por lo tanto, cada ramal trabaja como alimentado por un generador de tensión constante. Luego, cada línea es equivalente a la de la Fig. 10-24.

PROBLEMAS

10-1. Un oscilador de VHF en push-pull requiere una carga sintonizada a 50 Mc/s. La capacitancia de placa a placa es de 20 pF.

a. ¿Qué inductancia concentrada se necesita en paralelo con la capacitancia de 20 pF?

b. ¿Cuántos metros de línea sin pérdidas de 100 ohm en cortocircuito podría reemplazar a esta inductancia concentrada?

c. Por consideraciones físicas, ¿qué carga tendría mayor Q (si la línea tiene pérdidas)?

10-2. (a) Demostrar que la reactancia de entrada de una sección de línea sin pérdidas de media onda a la frecuencia f_o puede expresarse como

$$X_{sc} = R_o \operatorname{tg} \frac{\pi \Delta f}{f_o} \quad \Delta f = f - f_o$$

(b) Demostrar que la reactancia de una inductancia L_o y una capacitancia C_o en serie, resonantes en f_o , puede expresarse para valores pequeños de Δf como

$$X = \omega_o L_o \frac{2 \Delta f}{f_o}$$

(c) Calcular y representar gráficamente X_{sc}/R_o y $X/\omega_o L_o$ para $\pm \Delta f/f_o = 0,005; 0,001; 0,05$ y $0,01$.

(d) A partir de estos resultados, ¿qué valor debe tener R_o para que X_{sc} y X sean esencialmente iguales dentro de un margen de variación de la frecuencia de ± 10 por ciento con respecto a la frecuencia de resonancia?

10-3. Es de práctica común en las frecuencias de la banda de VHF usar una línea resonante de un octavo de onda en f_o para reemplazar una inductancia concentrada L_o .

a. Calcular y representar $X/\omega_o L_o$ y X_{sc}/R_o para los mismos valores de $\Delta f/f_o$ especificados en el Prob. 10-2. ¿Qué valor de R_o es necesario para obtener una equivalencia aproximada en esta banda?

b. ¿Qué longitud de línea se necesitaría para que X y X_{sc} tuvieran iguales valores y pendientes en f_o ? ¿Es ésta una solución práctica?

c. Si la longitud de la línea se redujera a $\lambda_o/16$, ¿qué valor de R_o se necesitaría? ¿Qué mejora se tendría con respecto a a?

10-4. Una línea sin pérdidas está terminada en una reactancia pura $\pm jaR_o$, donde a puede tener un valor cualquiera.

a. ¿Hay reflexión completa? ¿Por qué?

b. ¿Cuál es la relación de onda estacionaria?

c. ¿Puede ocurrir un máximo de tensión o de corriente en el extremo receptor? Explicar.

d. Por medio de la Ec. (10-2) predecir y esbozar la forma de la distribución de onda estacionaria tomando como caso $a = 1$.

e. Esbozar el lugar geométrico de $|E_x/E_R|$ en el plano complejo.

10-5. Para una línea terminada en una resistencia pura aR_o , derivar expresiones para y_{max} , y_{min} , $|Z_{in}|_{max}$, $|Z_{in}|_{min}$, y S , eliminando el término $\cos^2 \beta y$ en la Ec. (10-23a).

10-6. Verificar el lugar geométrico elíptico de la Fig. 10-5 dibujando los diagramas fasoriales de tensión en varios puntos de una línea de un largo de onda, empezando por $y = 0$. Suponer que

$$Z_R = aR_o + j0, a > 1.$$

10-7. Para la condición especificada en la Fig. 10-11, dibujar diagramas fasoriales progresivos y el lugar geométrico de I_o . Verificar que Z_{in} es real para las longitudes correspondientes a y_{max} e y_{min} .

10-8. En la Fig. 10-18a ¿puede la distancia d ser $(2n + 1)\lambda/4$?

10-9. Una sección de línea sin pérdidas está en cortocircuito por un extremo y abierto por el otro. Su longitud es $\lambda/4$. Hay una derivación en el punto medio.

a. ¿Cuál es la impedancia de entrada en la derivación?

b. Si los puntos de derivación se usan para soportar una línea de transmisión, ¿qué clase de acción de filtro ocurre a las frecuencias f_1 , $2f_1$, $3f_1$ y $4f_1$?

10-10. La impedancia de entrada de una línea sin pérdidas de 140 grados eléctricos de longitud es de $118 + j138$ ohm.

a. Hallar Z_R si $R_o = 100$ ohm.

b. ¿Cuáles serían los valores de Z_{in} para las longitudes correspondientes a y_{max} e y_{min} ?

10-11. (a) Hallar la relación entre Z_{in} y Z_R para una línea de un cuarto de onda por medio de la Ec. (10-4a). (b) A partir de este resultado, sugerir un método para usar el ábaco de Smith en la conversión de impedancia a admittance y viceversa.

10-12. Una línea de trasmisión de RF está hecha con alambre de cobre de 6 mm de diámetro. Debe tener una $R_o = 600$ ohm y cuatro largos de onda de longitud para $f = 4 \times 10^9$ c/s. Determinar la distancia entre centros y el rendimiento de la línea correctamente terminada. Determinar también el rendimiento cuando la línea está terminada en una carga de 73 ohm.

10-13. Derivar el valor de R_o para una línea de alambres paralelos cuyas dimensiones son las que dan el máximo Q . Utilice los datos de la tabla 8-2, suponiendo que es despreciable el concatenamiento de flujo dentro de los conductores. No es válido suponer que $s > 5r$.

10-14. La máxima capacidad para manejar potencia de una línea ocurre cuando la máxima intensidad de campo eléctrico es igual al valor de ruptura. Derivar una expresión para la potencia transferida en una línea coaxial en términos de $x = r_s/r_i$. ¿Para qué valor de x es máxima la potencia? Correlacionar sus resultados con la Fig. 10-23.

10-15. Derivar una expresión para el Q de una sección de línea de bajas pérdidas de un cuarto de onda evaluando la derivada $(dB_{in}/d\omega)_w$. Observar que, si al es pequeña, $\sinh al \approx al$ y $\cosh al \approx 1$.

10-16. (a) En la Fig. 10-24b hallar $|E_{oc}/Z_L E_R|^2$ en términos de las admitancias Y_L e Y_R . (b) Si $Y_R = G_R + jB_R$ es la única variable, demostrar que el lugar geométrico de Y_R en el plano complejo es una circunferencia. Explicar brevemente cómo es que el capacitor sincrónico mantiene $|E_R|$ constante cuando varía la carga. (c) Dibujar uno de estos lugares geométricos circulares, asegurándose de situar el centro en el cuadrante correcto. (d) Obtener ecuaciones para P y Q en términos de E_R y la conductancia y la susceptancia de la carga, siendo P y Q las componentes real e imaginaria, respectivamente, de los voltamperes de carga. Relacionar P y Q con los ejes de b y c . Nota: Este problema es una introducción al Prob. 10-17.

10-17. Una línea de trasmisión trifásica tiene 350 Km de longitud y funciona a 50 c/s. La tensión de línea en el extremo receptor es de 275 KV. Las constantes de línea por fase son

$$\begin{aligned} R &= 0,07 \text{ ohm/Km} & L &= 1,25 \text{ mH/Km} \\ C &= 0,009 \mu\text{F/Km} & G &= 0 \end{aligned}$$

La carga máxima para las tres fases en conjunto es de 120.000 KW con un factor de potencia de 0,9. Hallar el régimen nominal en KVA del capacitor sincrónico en el extremo de carga y la tensión en el extremo de trasmisión para mínimo tamaño del capacitor sincrónico. El tamaño mínimo corresponde al caso en que los KVA adelantados requeridos por el capacitor sincrónico a plena carga son iguales a los KVA atrasados requeridos en vacío. Esto resulta de la construcción gráfica correspondiente al Prob. 10-16 y de la experimentación con el radio de la relación de tensión constante $|E_{oc}/Z_L E_R|$.

LUIS J. BRANDO
INGENIERO
TECNOLOGICO
ELECTRONICO

CAPÍTULO XI

TRASFORMACION DE IMPEDANCIAS

En un sistema de conjunto para la transmisión de señales es a menudo deseable, siendo posible, el ajuste de los elementos de la red de manera que la potencia entregada a la carga sea la máxima posible. Como regla general, los generadores, o fuentes de señal, son dispositivos de impedancia constante, de manera que el problema de obtener de ellos la máxima potencia es sencillamente el de elegir la carga adecuada o el de transformar una impedancia dada en la impedancia de carga óptima para la fuente de señal. La elección de la impedancia de carga óptima (para máxima potencia) de un generador de impedancia fija está gobernada por los siguientes teoremas.

11-1. Teorema de la máxima trasferencia de potencia. Una red absorberá la máxima potencia de otra unida a la primera por dos terminales, cuando puede variarse la impedancia de la red receptora, si las impedancias de las dos redes vistas desde los terminales son recíprocamente conjugadas.

Para demostrarlo, probaremos primero que se absorbe la máxima potencia de un generador cuando la impedancia externa es la conjugada de la impedancia interna. En la Fig.

11-1, Z_R es la impedancia de carga que se varía hasta conseguir la potencia máxima. Z_g es la impedancia interna, fija. Consideremos en primer término el caso en que Z_g y Z_R son resistencias puras. Entonces

$$I = \frac{E_g}{R_g + R_R}$$

$$P = |I|^2 R_R = \frac{|E_g|^2 R_R}{(R_g + R_R)^2} \quad (11-1)$$

Diferenciando la Ec. (11-1) e igualando a cero la derivada con el fin de hallar la condición de máxima potencia,

$$\frac{\partial P}{\partial R_R} = |E_g|^2 \frac{(R_g + R_R)^2 - 2R_R(R_g + R_R)}{(R_g + R_R)^4} = 0$$

$$R_g^2 + 2R_g R_R + R_R^2 - 2R_g R_R - 2R_R^2 = 0$$

Por lo tanto $R_R = R_g$ para máxima potencia (11-2)

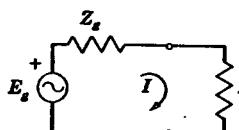


FIG. 11-1. Generador con impedancia interna e impedancia de carga.

Si Z_g y Z_R tienen reactancia, la Ec. (11-1) se escribirá

$$P = \frac{|E_g|^2 R_R}{(R_g + R_R)^2 + (X_g + X_R)^2} \quad (11-3)$$

Por simple inspección adviértese que, en lo que hace a X_R , la potencia dada por la Ec. (11-3) será máxima cuando

$$X_R = -X_g \quad (11-4)$$

es decir, si Z_g es inductiva, Z_R debe ser capacitiva, y viceversa. Si se satisface la Ec. (11-4), la Ec. (11-3) reducirse a la Ec. (11-1) y, por lo tanto, la condición de máxima potencia vuelve a ser la Ec. (11-2). Combinando los criterios expresados por las Ecs. (11-2) y (11-4), éstas indican que Z_R debe tener la misma magnitud que Z_g , pero ambas con ángulos iguales y opuestos; en otros términos, la impedancia de la carga debe ser la conjugada de la impedancia del generador *.

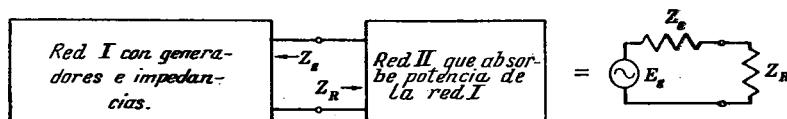


FIG. 11-2. Redes equivalentes para trasferencia de potencia.

De acuerdo con el teorema de Thévenin, toda red puede ser reemplazada por un generador que tiene una impedancia igual a la que se observa entre los terminales de la red conectados al receptor. En la Fig. 11-2 se ilustra un sistema de esta clase y la sustitución de la red I con un generador cuya impedancia interna es Z_g , mientras que la red II actúa sólo como un dispositivo capaz de absorber potencia. Por lo tanto, para los fines en consideración, teniendo sólo dos terminales, se lo puede reemplazar mediante una única impedancia Z_R . El sistema es entonces el mismo que el de la Fig. 11-1, y las Ecs. (11-2) y (11-4) le son aplicables sin más.

Corolario. La máxima potencia que puede absorberse de cualquier red activa es igual a $|E_g|^2 / 4R_g$, siendo E_g la tensión de circuito abierto en los terminales de salida y R_g la componente resistiva que se observa entre sus terminales de salida.

Por el teorema de Thévenin, toda red activa puede ser reducida al equivalente de un generador simple. Según el teorema de máxima trasferencia de potencia, la terminación debe ser la conjugada de la impedancia interna. Luego,

$$I = \frac{E_g}{R_g + R_R} = \frac{E_g}{2R_g} \quad (11-5)$$

$$P_{\max} = |I|^2 R_R = \frac{|E_g|^2}{4R_g}$$

* Hemos variado un poco la redacción de lo que antecede con respecto al original, a fin de hacer resaltar que el teorema que se presenta supone, como se dice en el texto, que la impedancia de carga es la única que puede variarse. (N. del T.)

Por medio del teorema de Norton, el estudiante puede demostrar que también puede expresarse la máxima potencia obtenible de una red activa en la forma

$$P_{\max} = \frac{|I_g|^2}{4G_g} \quad (11-5a)$$

donde I_g = corriente de cortocircuito en los terminales de salida.

G_g = componente conductiva de la admittance observada entre los terminales de salida.

Dado que P_{\max} representa la máxima potencia disponible de un circuito activo o generador para una carga adaptada, la cantidad expresada por las Ecs. (11-5) y (11-5a) se llama a menudo *potencia disponible* del generador.

11-2. Teorema. Si puede variarse la amplitud, pero no el ángulo de fase de la impedancia de carga, se absorberá la potencia máxima del generador cuando la magnitud de la impedancia de carga sea igual a la magnitud de la impedancia interna de la red activa.

Es a menudo posible en un sistema como el de la Fig. 11-1 variar la magnitud de Z_R pero no su ángulo de fase. La magnitud puede variarse, por ejemplo, por medio de un transformador. Para determinar el valor óptimo de $|Z_R|$, la Ec. (11-3) debe ser reducida a coordenadas polares. Sea θ el ángulo de Z_R :

$$P = |I|^2 R_R = \frac{|E_g|^2 |Z_R| \cos \theta}{(R_g + |Z_R| \cos \theta)^2 + (X_g + |Z_R| \sin \theta)^2} \quad (11-6)$$

La condición de máxima trasferencia se determina como antes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial |Z_R|} &= \\ &\frac{|E_g|^2 \cos \theta \left\{ (R_g + |Z_R| \cos \theta)^2 + (X_g + |Z_R| \sin \theta)^2 \right.}{\left. - |Z_R| [2(R_g + |Z_R| \cos \theta) \cos \theta + 2(X_g + |Z_R| \sin \theta) \sin \theta] \right\}} = 0 \\ &\frac{[(R_g + |Z_R| \cos \theta)^2 + (X_g + |Z_R| \sin \theta)^2]^2}{[(R_g + |Z_R| \cos \theta)^2 + (X_g + |Z_R| \sin \theta)^2]^2} \\ &(R_g + R_R)^2 + (X_g + X_R)^2 = 2[R_R R_g + R_R^2 + X_g X_R + X_R^2] \\ &R_g^2 + R_R^2 + X_g^2 + X_R^2 = 2(R_R^2 + X_R^2) \\ &R_g^2 + X_g^2 = R_R^2 + X_R^2 \end{aligned}$$

La condición es entonces,

$$|Z_R| = |Z_g| \quad (11-7)$$

Por lo tanto, si sólo puede variarse la magnitud de Z_R , su valor debe hacerse igual a la magnitud de Z_g si se quiere absorber la máxima potencia. Esta conclusión es también aplicable en el caso de las redes de la Fig. 11-2.

En las instalaciones de potencia nunca se recurre a la adaptación de impedancias para obtener la máxima potencia de un generador, por cuanto el rendimiento en tales condiciones es de sólo el 50 por ciento. Por otra parte, la regulación de tensión es también del 50 por ciento lo que es excesivo para estas aplicaciones. Los generadores de potencia se

especifican de ordinario sobre la base de la máxima corriente de carga que da lugar al máximo calentamiento admisible y esta corriente es ordinariamente mucho menor que la que circularía en la condición de máxima trasferencia de potencia.

En comunicaciones, en cambio, donde el coste de la potencia es, en general, bajo en proporción con los gastos totales y las corrientes son pequeñas, de modo que el aumento de la temperatura no es factor de gran importancia, se aprovecha ampliamente la condición de máxima trasferencia de potencia. La regulación no es, tampoco, importante en estos circuitos, ya que por ejemplo un receptor telefónico puede funcionar bien con amplias variaciones de la tensión de señal.

11-3. Principio de la transformación de impedancias. Los teoremas anteriores expresan los valores óptimos de la impedancia de terminación de un generador. Dado que las cargas típicas no son necesariamente las óptimas para los generadores que las alimentan, necesitase algún método para la transformación de las impedancias ofrecidas a los generadores. Hay también otras ocasiones en las que la magnitud de una impedancia de carga no tiene el valor óptimo y requiere asimismo una transformación.

El principio de transformación de impedancias está ilustrado en la Fig. 11-3. Vemos en esta figura una red utilizada para conectar una impedancia de carga Z_R a dos terminales de entrada 1, 2. Si esta red de conexión está compuesta sólo por reactancias puras, toda potencia entregada a los terminales 1, 2 debe ser necesariamente trasferida a la carga Z_R . Empero, las componentes resistiva y reactiva de la impedancia de entrada, o de excitación, en 1, 2 serán, en general, diferentes de las de la impedancia Z_R conectada a los terminales de salida 3, 4. Por lo tanto, la red de reactancias puede ser considerada como una red "trasformadora de impedancias" que transforma la impedancia Z_R en cierta impedancia Z_{in} . Mediante una red adecuadamente diseñada es, en principio, posible transformar Z_R en cualquier impedancia deseada.

Cuando lo que se busca es ante todo entregar la máxima potencia a la impedancia Z_R , la red se diseña de modo que Z_{in} esté "adaptada" a la impedancia del generador de acuerdo con los teoremas anteriores. En este caso puede considerar la red como una red *adaptadora de impedancias*.

Si la red contiene componentes resistivos, la potencia entregada a la impedancia de carga será menor que la potencia que la red recibe del generador, y esta pérdida de potencia es en general indeseable. Por consecuencia, casi todas las redes trasformadoras se construyen con reactores que tienen asociada la resistencia mínima compatible con el coste y se proyectan sobre la base de que sus componentes son puramente reactivos.

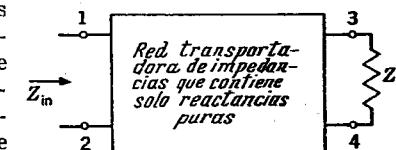


FIG. 11-3. Ilustración del principio de transformación de impedancias.

11-4. Un teorema de trasformación de impedancias. El diseño de las redes trasformadoras sin pérdidas vese facilitado por el teorema siguiente, propuesto por primera vez en las ediciones previas de este libro:

Si un grupo de redes de cuatro terminales que contienen sólo reactancias pures están dispuestas en cascada para conectar un generador a una carga, entonces, si en alguno de los empalmes hay adaptación conjugada de impedancias, la hay también en todos los demás empalmes del sistema. El término "adaptación conjugada" significa que si en una juntura la impedancia observada mirando en un sentido es $R + jX$, la impedancia que se observa mirando en sentido opuesto es $R - jX$.

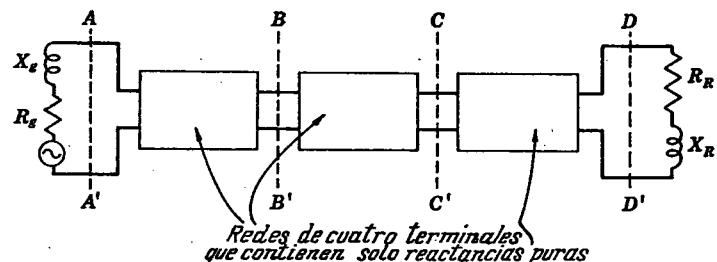


FIG. 11-4. Diagrama para el teorema de adaptación conjugada de impedancias.

El teorema está ilustrado por la Fig. 11-4. Si los valores de los elementos son tales que hay adaptación conjugada en cualquiera de los empalmes AA' , BB' , CC' o DD' , debe haber adaptación conjugada en todos los demás. Esta es una consecuencia inmediata del teorema de máxima transferencia de potencia. Si hay adaptación conjugada en AA' , se está obteniendo la máxima potencia posible (potencia disponible) del generador cuya impedancia interna es $R_g + jX_g$. Dado que las redes de cuatro terminales sólo contienen reactancias pures, no puede haber en ellas disipación y toda la potencia absorbida en los terminales de entrada tiene que ser trasferida a la salida. Si en alguno de los empalmes no hubiera adaptación conjugada, sería posible aumentar la transferencia de potencia en ese empalme ajustando la impedancia de carga en él. Esto exigiría el aumento de la potencia entregada por el generador, lo que se constituye una imposibilidad. Debe haber, por lo tanto, adaptación conjugada en todos los empalmes.

El teorema demuestra que en una cascada de redes de adaptación no disipativas es necesario adaptar sólo uno de los empalmes. En la práctica, dado que siempre hay alguna disipación, es por lo general necesario hacer el ajuste en más de un punto. Es un ejemplo el caso de un radiotransmisor que alimenta una antena. Si la línea fuera no disipativa, sólo sería necesario ajustar a las condiciones de adaptación en un punto, pero, como se ha visto en el último capítulo, una línea de más de un cuarto de onda de longitud disipa la mínima energía cuando está terminada en su impedancia característica. Por esta razón es lo habitual comenzar por ajustar el acoplamiento entre la línea y

la antena de manera de satisfacer esta condición, mientras que la red que acopla el trasmisor a la línea ajústase de manera de presentar la carga adecuada a las válvulas. Mediante el reajuste de una de las redes puede, sin embargo, compensarse un pequeño error de adaptación en la otra, sin aumentar significativamente las pérdidas.

11-5. Red adaptadora en L. El siguiente problema ofrece un ejemplo de proyecto de un transformador de impedancias no disipativo: Se quiere proyectar una estructura sin pérdidas para transformar una resistencia R_{I1} en una resistencia R_{I2} a una frecuencia dada, con la condición de emplear el mínimo número de elementos.

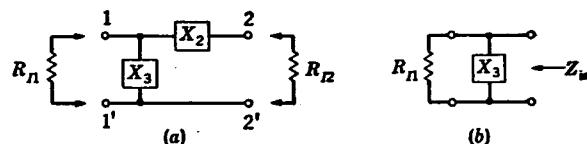


FIG. 11-5. Una sección transformadora de impedancias en L, reactiva. Los elementos están numerados siguiendo el criterio adoptado en el desarrollo general que se expone más adelante.

Dado que se imponen dos condiciones de diseño, esto es, R_{I1} y R_{I2} , la red debe contener por lo menos dos elementos ajustables. Si estos elementos estuvieran conectados en serie o en paralelo, serían equivalentes a una reactancia simple a cada frecuencia dada, y se necesitaría entonces un tercer elemento. Para evitar esta redundancia, los elementos pueden disponerse a modo de una sección en L, como se ve en la Fig. 11-5a. El comportamiento del circuito puede estudiarse considerando primero el efecto de poner X_3 en paralelo con R_{I1} , Fig. 11-5b. La impedancia de entrada es, entonces,

$$Z_{in} = j \frac{R_{I1}X_3}{R_{I1} + jX_3} = \frac{R_{I1}X_3^2 + jR_{I1}^2X_3}{R_{I1}^2 + X_3^2}$$

Por lo tanto, la componente resistiva ha sido trasformada de R_{I1} a un valor menor $R_{I1}X_3^2/(R_{I1}^2 + X_3^2)$. Esta resistencia puede hacerse igual a R_{I2} eligiendo convenientemente * el valor de X_3 . Luego puede cancelarse la componente reactiva de Z_{in} por medio del elemento en serie X_2 . Luego, las ecuaciones de proyecto de X_3 y X_2 son

$$X_3 = \pm R_{I1} \sqrt{\frac{R_{I2}}{R_{I1} - R_{I2}}} \quad X_2 = \mp \sqrt{R_{I2}(R_{I1} - R_{I2})} \quad (11-8)$$

Deben notarse los siguientes puntos: Primero, X_3 puede ser indiferentemente positiva o negativa (inductiva o capacitiva), pero X_2 y X_3 deben ser de signos opuestos. Segundo, por las Ecs. (11-8), $R_{I1} > R_{I2}$ es una condición necesaria para que X_2 y X_3 sean físicamente realizables y distintas de cero; luego, la reactancia en derivación debe estar

* Siempre que, naturalmente, sea R_{I2} menor que R_{I1} . (N. del T.)

en paralelo con la mayor de las dos resistencias. Tercero, la adaptación se satisface a una única frecuencia.

Dado que la red de la Fig. 11-5a ha sido diseñada para proveer una adaptación conjugada en los terminales 2, 2', ella proveerá también, en virtud del teorema de transformación de impedancias del último apartado, una adaptación conjugada en los terminales 1, 1'. Por lo tanto, si la red diseñada según las Ecs. (11-8) se invierte y la resistencia R_{12} se conectara a los terminales 2, 2', la impedancia observada entre los terminales 1, 1' sería igual a R_{11} . Luego, la sección L puede usarse para elevar o rebajar el valor de una resistencia*. El estudiante observará que, en este caso, si X_3 se elige como capacitiva y X_2 como inductiva, la red resultante es idéntica al circuito antirresonante de la Fig. 4-15. El estudiante comparará las Ecs. (4-87) y (4-88) con la (11-8).

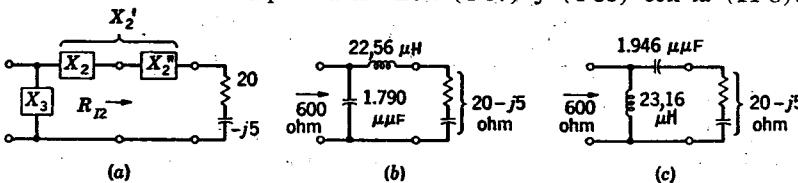


FIG. 11-6. a) Diseño de una red trasformadora de impedancias en L. b) resultado de elegir X_2' positiva y c) de elegirla negativa en las Ecs. (11-8).

Si bien las Ecs. (11-8) han sido derivadas suponiendo que las dos impedancias que se quieren adaptar son resistivas, ello no constituye necesariamente una limitación de la red en L. Si una (o ambas) de las impedancias tiene una componente reactiva, ésta puede ser compensada mediante una reactancia o una susceptancia de signo opuesto. El elemento adicional puede entonces incorporarse como parte de la red adaptadora. Uno de los procedimientos que pueden usarse es el ilustrado por el ejemplo siguiente:

Una antena corta tiene una impedancia de entrada de $20 - j5$ ohm a la frecuencia

$$\omega = 5 \times 10^6 \text{ radián/s}$$

Diseñar una sección L para adaptar esta antena a una línea de transmisión de 600 ohmios.

Agregamos una reactancia "compensadora" $X''_2 = +5$ ohm en serie con la antena para que la sección L esté terminada en una resistencia pura $R_{12} = 20$ ohm, como se ve en la Fig. 11-6a. La impedancia de entrada debe ser $R_{11} = 600$ ohm. Entonces, por las Ecs. (11-8),

$$X_2 = \pm \sqrt{20(600 - 20)} = \pm \sqrt{20 \times 580} = \pm 107,8 \text{ ohm}$$

$$X_3 = \mp \sqrt{600 \frac{20}{600 - 20}} = \mp 600 \sqrt{\frac{20}{580}} = \mp 111,5 \text{ ohm}$$

* La palabra "invierte" que se usa en el original puede inducir a confusión, porque no ha sido previamente definida. En realidad, para llegar a la conclusión del texto no es necesaria la "inversión" de la red. En efecto, de acuerdo con el teorema de transformación de impedancias, conectada la resistencia R_{12} a los terminales 2, 2' de la Fig. 11-5a, entre los terminales 1, 1' se observa una resistencia igual a R_{11} si la red ha sido diseñada según las Ecs. (11-8). (N. del T.)

Dada la indeterminación del signo, hay dos soluciones posibles. Elijamos primero X_2 inductiva (positiva). Combinando X_2 y la reactancia compensadora en un solo elemento, digamos X'_2 ,

$$X'_2 = X_2 + X''_2 = 107,8 + 5 = 112,8 \text{ ohms}$$

$$L'_2 = \frac{X'_2}{\omega} = \frac{112,8}{5 \times 10^6} = 22,56 \mu\text{Henry}$$

$$\text{y } C_3 = -\frac{1}{\omega X_3} = \frac{1}{5 \times 10^6 (1,115 \times 10^2)} = 1.790 \mu\mu\text{F}$$

La red resultante es la de la Fig. 11-6b.

Si se elige X_2 como capacitativa (negativa), el valor combinado de X_2 y la reactancia compensadora es

$$X'_2 = X_2 + X''_2 = -107,8 + 5 = -102,8 \text{ ohms}$$

$$C'_2 = -\frac{1}{\omega X'_2} = \frac{1}{5 \times 10^6 (1,028 \times 10^2)} = 1.946 \mu\mu\text{F}$$

$$\text{y } L_3 = \frac{X'_2}{\omega} = \frac{115,8}{5 \times 10^6} = 23,16 \mu\text{H}$$

con la red resultante de la Fig. 11-6c.

11-6. Diseño gráfico de la red L. En interés de la exposición que se encontrará en el capítulo siguiente, conviene derivar las ecuaciones de diseño del apartado anterior a partir de los lugares geométricos de impedancia y admitancia de la red L. Como aplicación específica de este método general, supongamos que R_{12} deba ser transformada en una resistencia mayor R_{11} por medio de la sección L de la Fig. 11-7a. Deben determinarse los valores necesarios para X_2 y X_3 .

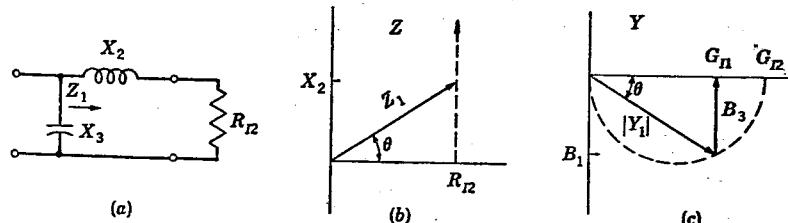


FIG. 11-7. Lugares geométricos de impedancia y admitancia de la sección reactiva transformadora de impedancias, en L.

El lugar geométrico de $R_{12} + jX_2$ al aumentar X_2 está representado por la linea cortada en b. El correspondiente lugar geométrico de $1/(R_{12} + jX_2)$ es el semicírculo de línea cortada de c. El problema es el de hallar un valor de X_2 tal que $1/(R_{12} + jX_2) = Y_1$ quede directamente debajo de $G_{11} = 1/R_{11}$ en el plano Y. Luego, si se conecta en derivación una susceptancia B_3 de valor $+|B_1|$ en derivación a través de $R_{12} + jX_2 = Z_1$, la admittance de entrada tendrá el valor deseado G_{11} .

Según la Fig. 11-7b,

$$\begin{aligned} X_2 &= |Z_1| \operatorname{sen} \theta = |Z_1| \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \\ &= |Z_1| \sqrt{1 - \frac{(R_{I2})^2}{|Z_1|^2}} = \sqrt{|Z_1|^2 - (R_{I2})^2} \end{aligned} \quad (11-9)$$

Según la Fig. 11-7c,

$$\begin{aligned} B_1 &= -|Y_1| \operatorname{sen} \theta = -|Y_1| \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \\ &= -|Y_1| \sqrt{1 - \frac{(G_{I1})^2}{|Y_1|^2}} = -\sqrt{|Y_1|^2 - (G_{I1})^2} \end{aligned} \quad (11-10)$$

Dado que θ tiene la misma magnitud en las dos figuras,

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{R_{I2}}{|Z_1|} = \frac{G_{I1}}{|Y_1|} \\ R_{I1}R_{I2} &= |Z_1|^2 = 1/|Y_1|^2 \end{aligned} \quad (11-11)$$

Observando que B_3 debe tener el valor $+|B_1|$, se tiene, por las Ecs. (11-9) a (11-11),

$$X_2 = +\sqrt{R_{I2}(R_{I1} - R_{I2})} \quad B_3 = +\sqrt{\frac{R_{I1} - R_{I2}}{(R_{I1})^2 R_{I2}}} \quad (11-11a)$$

Estos resultados son, naturalmente, idénticos a los de las Ecs. (11-8).

11-7. Respuesta de frecuencia de una sección L. Dado que las reactancias de los inductores y los capacitores varían con la frecuencia,

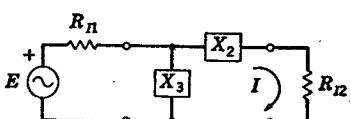


FIG. 11-8. Circuito para investigar la respuesta de frecuencia de la sección adaptadora L.

es evidente que las Ecs. (11-8) sólo pueden ser satisfechas, y, por lo tanto, entregada la máxima potencia a la carga, a una y sólo una frecuencia, si X_2 y X_3 están respectivamente formadas por un elemento reactivo simple. La transmisión de información, empero, requiere una banda finita de frecuencias; es, por lo tanto, importante considerar la respuesta de la red adaptadora para las frecuencias de una banda centrada en la frecuencia de diseño. Con este fin, investigaremos el circuito de la Fig. 11-8. Se supone que la carga es una resistencia pura R_{I2} independiente de la frecuencia y que la impedancia del generador es también una resistencia pura R_n .

La solución de las ecuaciones de malla del circuito muestran que la corriente de carga está dada por

$$I = \frac{jX_3E}{(R_{I1} + jX_3)[R_{I2} + j(X_2 + X_3)] + X_3^2} \quad (11-12)$$

Dado que se pide la variación de $|I|$ con la frecuencia, debe conocerse la forma exacta (capacitiva o inductiva) de X_2 y X_3 . Dado que las Ecs. (11-8) especifican dos formas posibles de la red, consideraremos las dos.

Cuando X_2 es inductiva y X_3 capacitativa, las Ecs. (11-8) pueden escribirse en función de la frecuencia en la forma

$$X_2 = \frac{\omega}{\omega_d} \sqrt{R_{I2}(R_{I1} - R_{I2})} \quad (11-13)$$

$$X_3 = -\left(\frac{\omega_d}{\omega}\right) R_{I1} \sqrt{\frac{R_{I2}}{R_{I1} - R_{I2}}} \quad (11-14)$$

donde ω_d es 2π veces la frecuencia de diseño. Llevando estas expresiones a la Ec. (11-12) obtiénes, después de considerable manipulación algebraica, los siguientes resultados para la magnitud de la co-

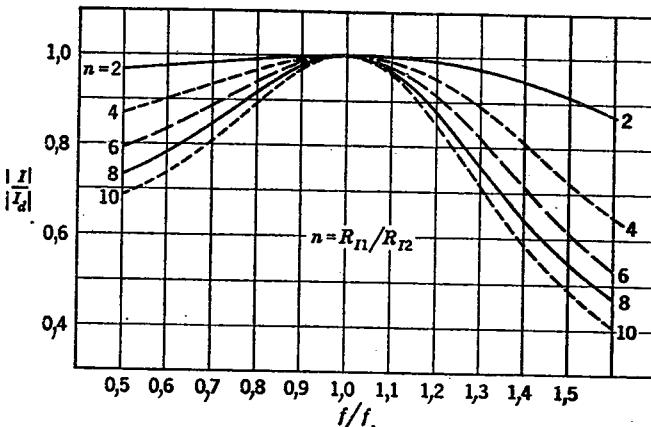


FIG. 11-9. Curvas de respuesta normalizadas para la sección adaptadora en L con X_2 inductiva (ver Fig. 11-8). La relación f/f_d se invierte cuando X_2 es capacitativa.

rriente de carga normalizada:

$$\left. \begin{array}{l} X_2 \text{ inductiva} \\ X_3 \text{ capacitativa} \end{array} \right\} \frac{|I|}{|I_d|} = \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{(n-1)^2[(f/f_d)^4 - 2(f/f_d)^2] + (n+1)^2}} \quad (11-15)$$

donde $n = R_{I1}/R_{I2}$ = relación de trasformación de impedancias
 I_d = corriente de carga a la frecuencia de diseño

$$y \quad |I_d| = \frac{E}{2\sqrt{R_{I1}R_{I2}}} = \frac{\sqrt{n}E}{2R_{I1}} \quad (11-15a)$$

La Ec. (11-15) está representada en la Fig. 11-9 para diferentes valores de la relación de trasformación de impedancias n . Puede observarse que, a medida que crece n , las curvas se van haciendo más selectivas; por lo tanto, si es importante que el ancho de banda sea grande, es necesario que la relación de trasformación sea baja. Esto conduce a la idea de poner varias secciones L en cascada para obtener la relación deseada dentro de una banda ancha, lo que se considera en el Cap. XIII.

La Ec. (11-15a) señala que, para un generador fijo, $|I_d|$ aumenta al disminuir el valor de R_{I2} . Este resultado puede verificarse mediante consideraciones físicas. Con una sección L correctamente proyectada, un generador dado trabaja en una carga resistiva igual a R_{I1} y entrega la potencia constante $E^2/4R_{I1}$. Dado que la sección L no es disipativa, se entrega también una potencia constante a R_{I2} , cualquiera que sea su valor. Luego, al disminuir R_{I2} , la magnitud de la corriente debe aumentar en el factor $1/\sqrt{R_{I2}}$.

En el caso en que X_2 es capacitiva y X_3 inductiva, un procedimiento similar lleva al siguiente resultado para la respuesta normalizada:

$$\begin{cases} X_2 \text{ capacitiva} \\ X_3 \text{ inductiva} \end{cases} \frac{|I|}{|I_d|} = \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{(n-1)^2[(f_d/f)^4 - 2(f_d/f)^2] + (n+1)^2}} \quad (11-16)$$

donde también $|I_d| = E/2\sqrt{R_{I1}R_{I2}}$. Debe observarse que las Ecs. (11-15) y (11-16) son idénticas, excepto por la inversión de la variable de frecuencia normalizada.

11-8. Requisitos generales para las redes de adaptación de impedancias. Si bien la sección L es una estructura de mínimo número de elementos, ella no es la única red reactiva que puede diseñarse de manera de proveer adaptación de impedancias a una frecuencia dada. Las secciones T o π y los transformadores sintonizados son otras redes de uso corriente. Dado que toda red de cuatro terminales puede ser reemplazada por una sección T equivalente a la frecuencia de diseño, es conveniente considerar los requisitos generales de las redes adaptadoras de impedancias en términos de la sección T equivalente.

Si una red T asimétrica cualquiera está terminada en una impedancia, la impedancia de entrada medida en los terminales de entrada será, en general, diferente de la impedancia de terminación. Esta propiedad hace que la sección T sea adecuada como dispositivo transformador de impedancias. Como se ha explicado en el Cap. III, dada una sección T asimétrica (ver Fig. 3-24), puede hallarse un par de *impedancias imágenes* Z_{I1} y Z_{I2} tales que, si el extremo 1 está terminado en Z_{I1} , la impedancia de entrada en el extremo 2 es Z_{I2} , mientras que si el extremo 2 está terminado en Z_{I2} , la impedancia de entrada en el extremo 1 es Z_{I1} . También se vio que las impedancias imágenes están relacionadas con las componentes de la sección T por

$$Z_{I1} = \sqrt{\frac{Z_1 + Z_3}{Z_2 + Z_3}} (Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + Z_1Z_3) \quad (3-100)$$

$$Z_{I2} = \sqrt{\frac{Z_2 + Z_3}{Z_1 + Z_3}} (Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + Z_1Z_3) \quad (3-101)$$

En el Cap. VII, Filtros de onda, se vio que una red simétrica de reactancias puras puede tener una impedancia característica puramente resistiva. De modo similar, una red asimétrica puede tener impedancias imágenes que son resistencias puras. Si una red de esta clase se conecta entre un generador de impedancia interna Z_{I1} y una carga cuya

impedancia es Z_{I2} , como en la Fig. 11-10, las impedancias estarán adaptadas en los dos empalmes, se absorberá la máxima potencia del generador, y, dado que se ha supuesto que la red es puramente reactiva, no se disipará potencia en la transferencia y así esta máxima potencia será entregada a la carga.

Independientemente de la impedancia del generador, toda carga de salida puede ser modificada por la red de manera que la impedancia de entrada en los terminales 1, 1' sea la que se deseé, puesto que si la red está terminada en Z_{I2} , la impedancia de entrada ha de ser necesariamente Z_{I1} .

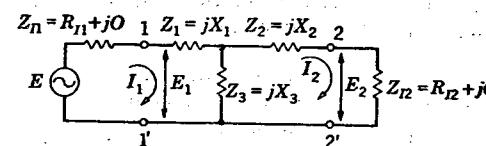


FIG. 11-10. Forma general de la red adaptadora de impedancias en T.

Si las impedancias de terminación no son resistencias puras, se las puede trasformar en resistencias puras, a una frecuencia dada, por medio de reactancias adicionales conectadas en serie con ellas. Así se ha visto al considerar la sección en L.

11-9. Requisitos generales para una red adaptadora en T de reactancias puras. Consideremos una sección T de reactancias puras similar a la de la Fig. 11-10, para adaptar dos resistencias puras, R_{I1} y R_{I2} . Luego,

$$\begin{aligned} Z_1 &= jX_1 \\ Z_2 &= jX_2 \\ Z_3 &= jX_3 \\ Z_{I1} &= R_{I1} \\ Z_{I2} &= R_{I2} \end{aligned} \quad (11-17)$$

X_1 , X_2 y X_3 pueden tener valores positivos o negativos. Luego, por la Ec. (3-100),

$$\begin{aligned} R_{I1}^2 &= \frac{j(X_1 + X_3)}{j(X_2 + X_3)} j^2(X_1X_2 + X_2X_3 + X_1X_3) \\ R_{I2}^2 &= -\frac{X_1 + X_3}{X_2 + X_3} (X_1X_2 + X_2X_3 + X_1X_3) \end{aligned} \quad (11-18a)$$

De modo similar, a partir de la Ec. (3-101),

$$R_{I2}^2 = -\frac{X_2 + X_3}{X_1 + X_3} (X_1X_2 + X_2X_3 + X_1X_3) \quad (11-18b)$$

Para que R_{I1} y R_{I2} sean resistencias puras, los segundos miembros de las Ecs. (11-18a) y (11-18b) deben ser positivos, y, por lo tanto, una de las reactancias debe tener signo opuesto al de las otras dos.

Multiplicando las Ecs. (11-18a) y (11-18b) y sacando la raíz cuadrada,

$$R_{I1}R_{I2} = -(X_1X_2 + X_2X_3 + X_1X_3) \quad (11-19)$$

Dividiendo la Ec. (11-18a) por la (11-18b) y sacando la raíz cuadrada,

$$\frac{R_{I1}}{R_{I2}} = \frac{X_1 + X_3}{X_2 + X_3} \quad (11-20)$$

Es a menudo deseable, especialmente en el caso de los transformadores, considerar $X_1 + X_3$ como un término y $X_2 + X_3$ como otro. La reactancia X_3 se llama "reactancia mutua", porque es común a los circuitos de entrada y de salida. Pongamos

$$\begin{aligned} X_1 + X_3 &= X_p = \text{reactancia primaria} \\ X_2 + X_3 &= X_s = \text{reactancia secundaria} \\ X_3 &= X_m = \text{reactancia mutua.} \end{aligned}$$

Entonces, la Ec. (11-19) deviene

$$R_{I1}R_{I2} = X_m^2 - X_pX_s \quad (11-19a)$$

mientras que la Ec. (11-20) puede escribirse

$$\frac{R_{I1}}{R_{I2}} = \frac{X_p}{X_s} \quad (11-20a)$$

Al diseñar una red, si sólo se especifican R_{I1} y R_{I2} , una de las tres ramas puede ser elegida arbitrariamente para determinar después las otras dos por medio de las Ecs. (11-19) y (11-20). Se obtendrá, entonces, una ecuación para cada rama en términos de las otras.

Introduciendo en la Ec. (11-19a) el valor de X_s de la Ec. (11-20a),

$$\begin{aligned} R_{I1}R_{I2} &= X_m^2 - \frac{R_{I2}}{R_{I1}} X_p^2 \\ X_p &= \pm \sqrt{\frac{R_{I1}}{R_{I2}} (X_m^2 - R_{I1}R_{I2})} \end{aligned} \quad (11-21)$$

Introduciendo el valor de X_p de la Ec. (11-20a) en la (11-19a),

$$X_s = \pm \sqrt{\frac{R_{I2}}{R_{I1}} (X_m^2 - R_{I1}R_{I2})} \quad (11-22)$$

De la Ec. (11-19a),

$$X_m^2 = X_pX_s + R_{I1}R_{I2} \quad (11-23)$$

$$X_m = \pm \sqrt{\frac{R_{I2}}{R_{I1}} X_p^2 + R_{I1}R_{I2}} \quad (11-23a)$$

$$X_m = \pm \sqrt{\frac{R_{I1}}{R_{I2}} X_s^2 + R_{I1}R_{I2}} \quad (11-23b)$$

Si R_{I1}/R_{I2} difiere de la unidad, X_p o X_s será menor que X_m . Pero

$$\begin{aligned} X_1 &= X_p - X_3 = X_p - X_m \\ X_2 &= X_s - X_3 = X_s - X_m \end{aligned}$$

Por lo tanto, una de las ramas X_1 o X_2 de la sección T debe ser necesariamente de signo opuesto al de la reactancia de X_m .

11-10. Diseño de la red con un elemento arbitrario. En el último apartado hemos obtenido ecuaciones de diseño para los elementos de una sección T asimétrica para adaptar dos resistencias imágenes. Dado que sólo se especifican dos condiciones de diseño, es decir, R_{I1} y R_{I2} , y la red tiene tres elementos, uno de éstos es redundante y puede elegirselo arbitrariamente, sujeto a una sola condición. Las Ecs. (11-21) y (11-22) muestran que X_m^2 debe ser igual o mayor que $R_{I1}R_{I2}$ para que X_p y X_s resulten reales y sean por lo tanto físicamente realizable. Con esta restricción, la posibilidad de fijar arbitrariamente uno de los parámetros permite a menudo al proyectista aprovechar elementos disponibles para la realización de la red adaptadora.

El estudiante debe observar que $X_m^2 = R_{I1}R_{I2}$ representa un caso crítico, puesto que si X_m^2 es menor que este valor, no es posible la adaptación conjugada. Por otra parte, para este caso crítico, $X_p = X_s = 0$, y $X_1 = X_2$ en la red T equivalente. Este resultado indica que la sección T simétrica puede ser utilizada para la adaptación de dos resistencias diferentes; las ecuaciones de diseño reducense entonces a

$$X_1 = X_2 = -X_3 = \pm \sqrt{R_{I1}R_{I2}} \quad (11-24)$$

esto es, las tres reactancias tienen la misma magnitud, la que es a su vez igual a la media geométrica de las dos resistencias adaptadas.

Ejemplo: Diseñar una sección T reactiva para adaptar una carga de $250 + j200$ ohm a un generador de 1.000 ohm a la frecuencia angular $\omega = 2 \times 10^6$ radian/s. Usar la condición de adaptación crítica.

Solución: Para simplificar el procedimiento de diseño, disponemos una reactancia de -200 ohm en serie con la impedancia de carga, de modo que la carga efectiva se reduzca a $R_{I2}' = 250$ ohm. Se tiene

$$R_{I1} = 1.000 \text{ ohm}$$

Entonces, por la Ec. (11-24),

$$|X_1| = |X_2| = |X_3| = \pm \sqrt{R_{I1}R_{I2}'} = \sqrt{250 \times 10^3} = 500 \text{ ohm}$$

Se dispone de un capacitor variable a la mano, el que se usará como elemento en derivación, X_3 . Luego

$$X_3 = -\frac{1}{\omega C_3} = -500 \quad C_3 = \frac{1}{(2 \times 10^6)(5 \times 10^2)} = 1.000 \mu\mu\text{F}$$

$$X_1 = X_2 = 500 \text{ ohm}$$

$$L_1 = L_2 = \frac{500}{2 \times 10^6} = 250 \mu\text{H}$$

La red resultante se ve en la Fig. 11-11a. Hay una simplificación posible combinando X_2 con la reactancia compensadora de -200 ohm:

$$X'_2 = X_2 - 200 = 500 - 200 = 300 \text{ ohm}$$

$$L'_2 = \frac{300}{2 \times 10^6} = 150 \mu\text{H}$$

La red simplificada se ve en la Fig. 11-11b.

Las Ecs. (11-21) y (11-22) pueden también usarse para diseñar una red adaptadora del tipo de transformador sintonizado. Un ejemplo ilustrativo es el siguiente:

Ejemplo: Diseñar una red adaptadora utilizando un par de bobinas de 1 mH para reemplazar la red T del ejemplo precedente. El coeficiente de acoplamiento entre las bobinas puede variarse entre 0,1 y 0,6 girando una respecto de la otra. Obsérvese que los capacitores C_p y C_s permiten variar X_p y X_s , aunque L_p y L_s sean fijas.

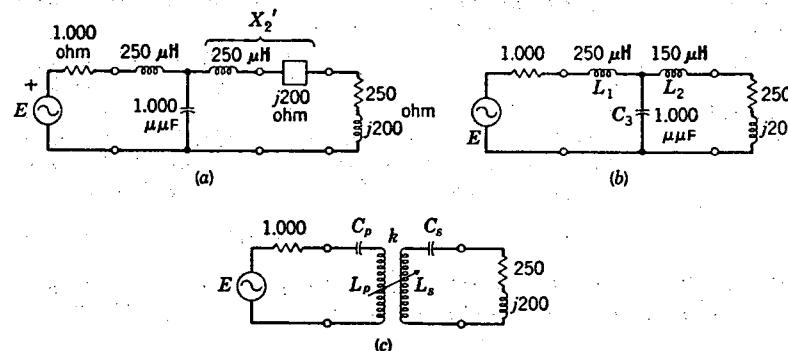


FIG. 11-11. Circuitos para los ejemplos ilustrativos. X'_2 ha sido combinada en un solo elemento en b. En c se muestra el transformador sintonizado equivalente.

Solución: Para acoplamiento crítico $X_m = \sqrt{R_{I1}R_{I2}}$.

Por definición, el coeficiente de acoplamiento es

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_p L_s}} = \frac{\omega M}{\omega \sqrt{L_p L_s}} = \frac{X_m}{\omega \sqrt{L_p L_s}}$$

Dado que las bobinas tienen la misma inductancia de 1 mH,

$$k = \frac{X_m}{\omega L_p} = \frac{\sqrt{R_{I1}R_{I2}}}{\omega L_p} = \frac{\sqrt{250 \times 10^3}}{(2 \times 10^6) \times 10^{-3}} = \frac{500}{2 \times 10^3} = 0,25$$

Este valor está dentro del rango dado de ajuste y es, por lo tanto, satisfactorio.

Por las Ecs. (11-21) y (11-22), $X_p = X_s = 0$. Esto es,

$$X_p = \omega L_p - \frac{1}{\omega C_p} = 0$$

$$C_p = \frac{1}{\omega^2 L_p} = \frac{1}{(4 \times 10^{12}) \times 10^{-3}} = 250 \mu\text{F}$$

X_s es la reactancia total del circuito secundario; luego

$$X_s = \omega L_s - \frac{1}{\omega C_s} + 200 = 0$$

$$C_s = \frac{1}{\omega(\omega L_s + 200)} = \frac{1}{2 \times 10^6[(2 \times 10^6) \times 10^{-3} + 200]} = \frac{1}{2 \times 2,2 \times 10^9} = 227 \mu\text{F}$$

11-11. Respuesta de frecuencia de las secciones T. Puede determinarse la respuesta de la sección adaptadora en T de la Fig. 11-10 despejando I_2 como función de la frecuencia. Si se eligen X_1 y X_2 inductivas y X_3 es, por lo tanto, capacitativa, obtiénes como resultado

$$I_2 = j \frac{E}{R_{I2}} \left\{ \frac{\frac{\omega_d/\omega}{\left[\sqrt{\frac{n}{\alpha}}(2\alpha+1) + \sqrt{\alpha-1}(n+1) \right]}}{-\left[\sqrt{\frac{n}{\alpha}}(2\alpha-1) + \sqrt{\alpha-1}(n+1) \right] \left(\frac{\omega}{\omega_d} \right)^2} + j \left\{ 2 \sqrt{\frac{n}{\alpha}} \sqrt{\alpha-1} + (n+1) \right\} \frac{\omega}{\omega_d} - (n+1) \frac{\omega_d}{\omega} \right\} \quad (11-25)$$

donde $n = R_{I1}/R_{I2}$ = relación de trasformación de impedancias

$$\alpha = X_m^2/R_{I1}/R_{I2}$$

La Ec. (11-25) está representada en la Fig. 11-12 para varios valores de la relación de trasformación con acoplamiento crítico. Se observará que las curvas se hacen más selectivas a medida que aumenta la relación de trasformación. El efecto de aumentar el acoplamiento por encima del

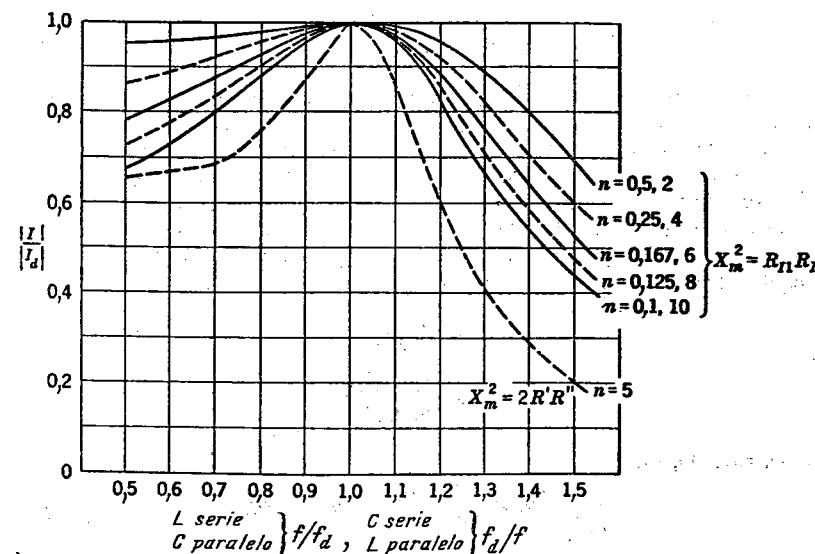


FIG. 11-12. Curvas de respuesta de frecuencia normalizada de la sección adaptadora T.

valor crítico está ilustrado por la curva cortada inferior de la Fig. 11-12, la que ha sido trazada para un acoplamiento igual a $\sqrt{2}$ veces el acoplamiento crítico ($a = 2$) y $n = 5$. Esta curva demuestra que aumenta la selectividad del circuito al aumentar el acoplamiento. El estudiante puede demostrar que para este último caso ocurre un segundo máximo de la magnitud de la corriente para la frecuencia cero. (El estudiante debe comparar estas curvas con las del circuito del transformador sintonizado, Fig. 11-24, en las que los dos máximos de corriente ocurren dentro de la gama general de frecuencias.)

11-12. Relaciones generales en las redes asimétricas. La redundancia de los elementos en una sección T diseñada sobre la base de sólo las impedancias imágenes, como en el apartado anterior, puede eliminarse especificando además las pérdidas en la red y el desplazamiento de fase. Esto puede hacerse por medio de la "constante de transferencia imagen" Θ de la red. Si se especifican Θ , Z_{I1} y Z_{I2} de la red T asimétrica, los componentes de la red quedan únicamente determinados.

En una sección simétrica γ ha sido definida como la relación que, cuando la sección está terminada en Z_o ,

$$e^\gamma = \frac{E_1}{E_2} = \frac{I_1}{I_2} = \sqrt{\frac{E_1 I_1}{E_2 I_2}}$$

En una sección asimétrica terminada en su impedancia imagen, la relación E_1/E_2 es en general diferente de I_1/I_2 , y, en el caso de redes reactivas puras, la magnitud de una de las relaciones es la recíproca de la otra. La definición adoptada para Θ , por lo tanto, corresponde a la última relación para γ , a saber: cuando la red está terminada en su impedancia imagen,

$$e^\Theta = \sqrt{\frac{E_1 I_1}{E_2 I_2}} \quad (11-26)$$

11-13. Sección T equivalente de una red compleja. Es deseable obtener una expresión de Θ en términos de las otras constantes de la red y, al revés, hallar una relación para los valores de Z_1 , Z_2 y Z_3 en términos de Z_{I1} , Z_{I2} y Θ , de modo que la red pueda ser diseñada para ser utilizada entre dos impedancias cualesquiera y dar en tal caso la pérdida deseada y/o el ángulo de fase previsto. Θ será en general un número complejo. Cuando la red termina en las impedancias imágenes, la relación de tensiones es

$$\begin{aligned} \frac{E_1}{E_2} &= \frac{I_1 Z_{I1}}{I_2 Z_{I2}} \\ e^\Theta &= \frac{I_1}{I_2} \sqrt{\frac{Z_{I1}}{Z_{I2}}} \end{aligned} \quad (11-26a)$$

En la Fig. 11-10,

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{Z_2 + Z_3 + Z_{I2}}{Z_3} = \frac{Z_{o2} + Z_{I2}}{Z_3} \quad (11-27)$$

donde Z_{o1} y Z_{o2} son, respectivamente, las impedancias de circuito abierto medidas en los extremos 1 y 2. Por las Ecs. (3-100) y (3-101),

$$\frac{Z_{I1}}{Z_{I2}} = \frac{Z_1 + Z_3}{Z_2 + Z_3} = \frac{Z_{o1}}{Z_{o2}} \quad (11-28)$$

Introduciendo las Ecs. (11-27) y (11-28) en la (11-26a),

$$\begin{aligned} e^\Theta &= \frac{Z_{o2}}{Z_3} \sqrt{\frac{Z_{I1}}{Z_{I2}}} + \frac{Z_{I2}}{Z_3} \sqrt{\frac{Z_{I1}}{Z_{I2}}} \\ &= \frac{Z_{o2}}{Z_3} \sqrt{\frac{Z_{o1}}{Z_{o2}}} + \frac{Z_{I2}}{Z_3} \sqrt{\frac{Z_{I1}}{Z_{I2}}} \\ e^\Theta &= \frac{\sqrt{Z_{o1} Z_{o2}} + \sqrt{Z_{I1} Z_{I2}}}{Z_3} \\ \cosh \Theta &= \frac{e^\Theta + e^{-\Theta}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{Z_{o1} Z_{o2}} + \sqrt{Z_{I1} Z_{I2}}}{2Z_3} + \frac{Z_3}{2(\sqrt{Z_{o1} Z_{o2}} + \sqrt{Z_{I1} Z_{I2}})} \\ &= \frac{Z_{o1} Z_{o2} + 2 \sqrt{Z_{o1} Z_{o2} Z_{I1} Z_{I2}} + Z_{I1} Z_{I2} + Z_3^2}{2Z_3(\sqrt{Z_{o1} Z_{o2}} + \sqrt{Z_{I1} Z_{I2}})} \end{aligned}$$

Por las Ecs. (3-100) y (3-101),

$$\begin{aligned} Z_{I1} Z_{I2} &= Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_1 Z_3 \\ Z_{I1} Z_{I2} + Z_3^2 &= (Z_1 + Z_3)(Z_2 + Z_3) = Z_{o1} Z_{o2} \\ \cosh \Theta &= \frac{Z_{o1} Z_{o2} + \sqrt{Z_{o1} Z_{o2} Z_{I1} Z_{I2}}}{Z_3(\sqrt{Z_{o1} Z_{o2}} + \sqrt{Z_{I1} Z_{I2}})} \\ &= \frac{\sqrt{Z_{o1} Z_{o2}}(\sqrt{Z_{o1} Z_{o2}} + \sqrt{Z_{I1} Z_{I2}})}{Z_3(\sqrt{Z_{o1} Z_{o2}} + \sqrt{Z_{I1} Z_{I2}})} \\ &= \frac{\sqrt{Z_{o1} Z_{o2}}}{Z_3} = \sqrt{\left(1 + \frac{Z_1}{Z_3}\right)\left(1 + \frac{Z_2}{Z_3}\right)} \end{aligned} \quad (11-29)$$

De modo similar

$$\operatorname{senh} \Theta = \frac{e^\Theta - e^{-\Theta}}{2} = \frac{\sqrt{Z_{I1} Z_{I2}}}{Z_3} \quad (11-30)$$

$$Z_3 = \frac{\sqrt{Z_{I1} Z_{I2}}}{\operatorname{senh} \Theta} \quad (11-30a)$$

Por las Ecs. (11-29) y (11-30)

$$\operatorname{tgh} \Theta = \sqrt{\frac{Z_{I1} Z_{I2}}{Z_{o1} Z_{o2}}} \quad (11-31)$$

Multiplicando los dos miembros por Z_{o1} y utilizando la Ec. (11-28),

$$Z_{o1} \operatorname{tgh} \Theta = \sqrt{\frac{Z_{o1}}{Z_{o2}}} \sqrt{Z_{I1} Z_{I2}} = \sqrt{\frac{Z_{I1}}{Z_{I2}}} \sqrt{Z_{I1} Z_{I2}} = Z_{I1} \quad (11-32)$$

$$Z_1 + Z_3 = \frac{Z_{I1}}{\operatorname{tgh} \Theta}$$

$$Z_1 = \frac{Z_{I1}}{\operatorname{tgh} \Theta} - \frac{\sqrt{Z_{I1}Z_{I2}}}{\operatorname{senh} \Theta} \quad (11-32a)$$

De modo similar,

$$Z_{o2} \operatorname{tgh} \Theta = Z_{I2} \quad (11-33)$$

$$Z_2 = \frac{Z_{I2}}{\operatorname{tgh} \Theta} - \frac{\sqrt{Z_{I1}Z_{I2}}}{\operatorname{senh} \Theta} \quad (11-33a)$$

Las Ecs. (11-30a), (11-32a) y (11-33a) permiten calcular las ramas en serie y en derivación de la sección T cuando ésta debe ser diseñada para una constante Θ e impedancias imágenes dadas.

La Ec. (11-32) puede también escribirse

$$\operatorname{tgh} \Theta = \frac{Z_{I1}}{Z_{o1}} = \frac{\sqrt{Z_{o1}Z_{s1}}}{Z_{o1}} = \sqrt{\frac{Z_{s1}}{Z_{o1}}} \quad (11-32b)$$

y, de modo similar, la Ec. (11-33) se escribe

$$\operatorname{tgh} \Theta = \frac{Z_{I2}}{Z_{o2}} = \frac{\sqrt{Z_{o2}Z_{s2}}}{Z_{o2}} = \sqrt{\frac{Z_{s2}}{Z_{o2}}} \quad (11-33b)$$

Por la simetría de las Ecs. (11-32b) y (11-33b) es evidente que la constante Θ es la misma si se invierte el sentido de trasmisión.

En el caso general Z_{I1} , Z_{I2} , Z_1 , Z_2 y Z_3 , son todas complejas, como lo es también la constante de trasferencia imagen; así

$$\Theta = A + jB \quad (11-34)$$

donde A es una función de pérdida análoga a α y B es un desplazamiento de fase, análogo a β . En el Cap. XIII consideraremos el caso en que son reales las cinco impedancias y Θ .

11-14. Diseño de la red para un desplazamiento de fase especificado. De particular interés en el presente capítulo es el caso en que la red T es una estructura no disipativa y las impedancias imágenes son reales. Así, introduciendo las Ecs. (11-17) en la (11-32b),

$$\operatorname{tgh} \Theta = \frac{R_{I1}}{j(X_1 + X_3)}$$

Dado que el segundo miembro de esta ecuación es imaginario, $\operatorname{tgh} \Theta$ es también imaginario, o $\Theta = 0 + jB$. Por otra parte, por sustitución de la Ec. (11-17), las Ecs. (11-30a), (11-32a) y (11-33a) devienen

$$X_3 = - \frac{\sqrt{R_{I1}R_{I2}}}{\operatorname{sen} B} \quad (11-35)$$

$$X_1 = - \frac{R_{I1}}{\operatorname{tg} B} + \frac{\sqrt{R_{I1}R_{I2}}}{\operatorname{sen} B} \quad (11-36)$$

$$X_2 = - \frac{R_{I2}}{\operatorname{tg} B} + \frac{\sqrt{R_{I1}R_{I2}}}{\operatorname{sen} B} \quad (11-37)$$

Mediante estas ecuaciones puede diseñarse la sección T no disipativa para un par cualquiera de resistencias imágenes y un desplazamiento de fase especificado.

Ejemplo: Diseñar una sección T no disipativa para transformar una resistencia de carga de 200 ohm en 800 + $j0$ a $\omega = 5 \times 10^6$ radián/s. La corriente de carga debe adelantarse a la corriente de entrada en 12° .

Solución: Se tienen

$$R_{I1} = 800 \text{ ohm} \quad R_{I2} = 200 \text{ ohm}$$

Dado que la corriente de salida tiene que adelantarse a la corriente de entrada en 12° , es $B = -12^\circ$. Luego, por la Ec. (11-35).

$$X_3 = - \frac{\sqrt{800 \times 200}}{\operatorname{sen} (-12^\circ)} = +1.924 \text{ ohm}$$

$$L_3 = \frac{X_3}{\omega} = \frac{1.924 \times 10^3}{5 \times 10^6} = 0.384 \times 10^{-3} = 384 \mu\text{H}$$

Por la Ec. (11-36),

$$X_1 = - \frac{800}{\operatorname{tg} (-12^\circ)} - 1.924 = +3.760 - 1.924 = 1.836 \text{ ohm}$$

$$L_1 = \frac{1.836 \times 10^3}{5 \times 10^6} = 0.367 \times 10^{-3} = 367 \mu\text{H}$$

Por la Ec. (11-37),

$$X_2 = \frac{-200}{\operatorname{tg} (-12^\circ)} - 1.924 = +941 - 1.924 = -983 \text{ ohm}$$

$$C_2 = \frac{1}{X_2 \omega} = \frac{1}{(0.983 \times 10^3)(0.5 \times 10^7)} = 2.04 \times 10^{-10} = 204 \mu\mu\text{F}$$

La red completa es la que se da a ver en la Fig. 11-13.

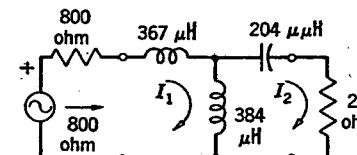


FIG. 11-13. Una red T que transforma 200 ohm en 800 ohm con un desplazamiento de fase de 12° , con la corriente de salida adelantada respecto a la de entrada.

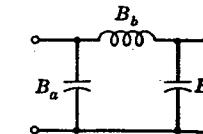


FIG. 11-14. Red transformadora de impedancias, reactiva, del tipo π .

11-15. Redes adaptadoras en π . Las ecuaciones de los apartados anteriores pueden adaptarse fácilmente para el diseño de las secciones adaptadoras reactivas del tipo π , aplicando el principio de dualidad (ver Cap. III). Por razones de conveniencia, pongamos en la Fig. (11-14),

$B_p = B_a + B_b$ y $B_s = B_c + B_b$. Entonces, las ecuaciones anteriores son aplicables a la red π poniendo B_p en lugar de X_p , B_s en lugar de X_s , B_c en lugar de X_2 , B_b en lugar de X_3 , B_a en lugar de X_1 , G_{I1} en lugar de R_{I1} , y G_{I2} en lugar de R_{I2} . La condición para que haya adaptación de impedancia es $B_b^2 \geq G_{I1}G_{I2}$.

11-16. Resumen sobre las redes T y π . Se ha visto anteriormente que en las redes adaptadoras T o π por lo menos dos de los elementos reactivos deben ser de signos opuestos. Por esta razón sólo hay cuatro formas básicas posibles de tales redes. Se resumirán ahora las ecuaciones de diseño de estas cuatro formas básicas en términos de tres parámetros de diseño, a , b , y c , como ayuda para la exposición del apartado siguiente. Suponemos que $n = R_{I1}/R_{I2} > 1$. Esta hipótesis no entraña ninguna limitación, ya que las redes son bidireccionales y basta entonces con tomar como R_{I1} la mayor de las dos impedancias imágenes.

Consideremos primero las secciones T . Por las Ecs. (11-35) a (11-37),

$$X_3 = -\frac{\sqrt{R_{I1}R_{I2}}}{\operatorname{sen} B} = R_{I1} \frac{-1}{\sqrt{n} \operatorname{sen} B} = R_{I1}b \quad (11-38)$$

$$b = \frac{-1}{\sqrt{n} \operatorname{sen} B} \quad (11-38a)$$

$$X_1 = -R_{I1} \frac{\cos B}{\operatorname{sen} B} + \frac{\sqrt{R_{I1}R_{I2}}}{\operatorname{sen} B} = R_{I1} \frac{1 - \sqrt{n} \cos B}{\sqrt{n} \operatorname{sen} B} = R_{I1}c \quad (11-39)$$

$$c = \frac{1 - \sqrt{n} \cos B}{\sqrt{n} \operatorname{sen} B} \quad (11-39a)$$

$$X_2 = -R_{I2} \frac{\cos B}{\operatorname{sen} B} + \frac{\sqrt{R_{I1}R_{I2}}}{\operatorname{sen} B} = R_{I1} \frac{\sqrt{n} - \cos B}{n \operatorname{sen} B} = R_{I1}a \quad (11-40)$$

$$a = \frac{\sqrt{n} - \cos B}{n \operatorname{sen} B} \quad (11-40a)$$

Si las redes introducen un *atraso* de fase, B es positivo, como lo es también $\operatorname{sen} B$; por lo tanto b es negativo, y, dado que $\sqrt{n} > 1$, a es positivo. Por otra parte, c puede ser positivo, negativo o cero, según la magnitud de B . Si $0 < B < \operatorname{arc cos}(1/\sqrt{n})$, $c < 0$; si $\operatorname{arc cos}(1/\sqrt{n}) < B \leq 180^\circ$, $c > 0$; y si $B = \operatorname{arc cos}(1/\sqrt{n})$, $c = 0$ y la sección T degenera en una configuración L . Estas condiciones definen las redes tipo 1 y 2 de la Fig. 11-15.

En cambio, si la red introduce un *adelanto* de fase, B y $\operatorname{sen} B$ son negativos; por lo tanto, b es positivo y a es negativo. Si $0 < |B| < \operatorname{arc cos}(1/\sqrt{n})$, $c > 0$; si $\operatorname{arc cos}(1/\sqrt{n}) < |B| < 180^\circ$, $c < 0$. Resulta una sección L si $|B| = \operatorname{arc cos}(1/\sqrt{n})$. Estas condiciones definen las redes tipo 3 y 4 de la Fig. 11-15.

Las correspondientes secciones π pueden ser tratadas de manera análoga, de modo que los elementos de red pueden ser expresados en términos de los mismos tres parámetros a , b y c . Así, poniendo $n = R_{I1}/R_{I2} = G_{I2}/G_{I1}$ y manipulando las ecuaciones duales de las Ecs. (11-35) a (11-37),

$$B_b = -\frac{\sqrt{G_{I1}G_{I2}}}{\operatorname{sen} B} = -G_{I2} \sqrt{\frac{G_{I1}}{G_{I2}}} \frac{1}{\operatorname{sen} B} = G_{I2} \frac{-1}{\sqrt{n} \operatorname{sen} B} = G_{I2}b \quad (11-38b)$$

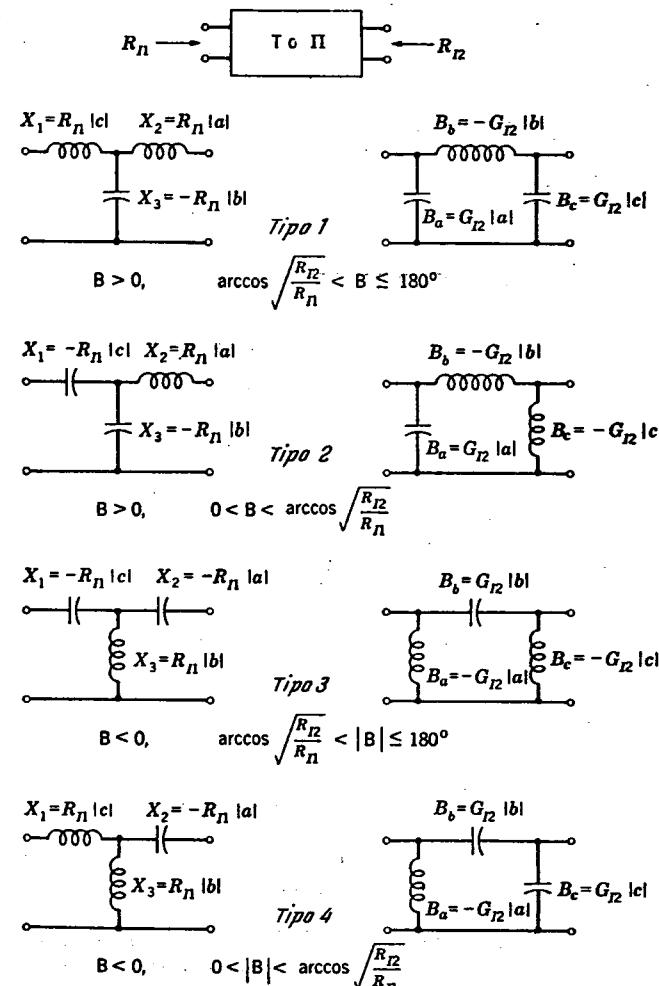


FIG. 11-15. Resumen de las redes trasformadoras de impedancia T y π . En todos los casos es $R_{I1}/R_{I2} = G_{I2}/G_{I1} > 1$. B es el desplazamiento de fase.

$$B_a = -G_{I1} \frac{\cos B}{\operatorname{sen} B} + \frac{\sqrt{G_{I1}G_{I2}}}{\operatorname{sen} B} = G_{I2} \frac{\sqrt{n} - \cos B}{n \operatorname{sen} B} = G_{I2}a \quad (11-39b)$$

$$B_c = -G_{I2} \frac{\cos B}{\sin B} + \frac{\sqrt{G_{I1}G_{I2}}}{\sin B} = G_{I2} \frac{1 - \sqrt{n} \cos B}{\sqrt{n} \sin B} = G_{I2}c \quad (11-39c)$$

Dado que los elementos de la red π están expresados en función de los mismos parámetros que los de la red T, son aplicables las mismas reglas de signo que para la red T, con lo que obtiénense las cuatro redes π de la Fig. 11-15.

Se utilizarán ahora estos resultados para investigar los efectos de las pérdidas en las redes transformadoras de impedancias.

11-17. Disipación en las redes T y π^1 . En los apartados anteriores hemos estudiado el diseño de las redes T y π sobre la base de elementos no disipativos. En la práctica, empero, la resistencia de los inductores no es despreciable y el rendimiento de las redes adaptadoras es menor que un 100 por ciento. El cómputo de las pérdidas en las redes reactivas de alto rendimiento puede ser tratado mediante la siguiente aproximación (véase el Ap. 10-15): Se diseña el circuito y se calculan las corrientes suponiendo que son nulas las pérdidas. Se utiliza luego el Q de los inductores para calcular las pérdidas y el rendimiento, tomándose en cuenta, así, las pérdidas en los inductores.

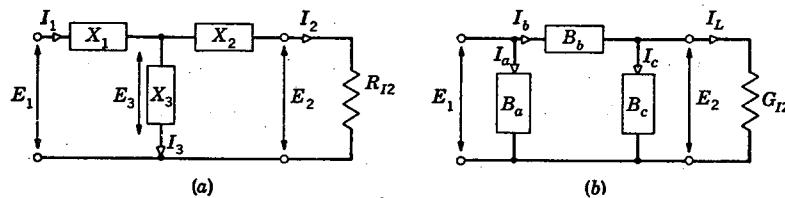


FIG. 11-16. Definición de las corrientes de rama de las redes (a) T y (b) π , para el estudio de los efectos de la disipación.

No obstante, resulta ventajoso un tratamiento más general de las pérdidas en las redes T y π , porque, con sujeción a tres aproximaciones simplificativas, el análisis demuestra que las pérdidas de la red son independientes del número de inductores utilizados y depende solamente del Q de los inductores, la relación de transformación de impedancias y el ángulo de desplazamiento de fase. Estos resultados pueden, a su vez, ser utilizados como guía para el diseño de redes adaptadoras T o π de pérdidas mínimas.

En el análisis que sigue se admitirá que todos los inductores de la red tienen el mismo Q; que las pérdidas en los capacitores son despreciables; y que las corrientes de rama no son afectadas por la presencia de las pequeñas componentes resistivas, esto es, se computarán las corrientes suponiendo que la disipación es nula. Esta última hipótesis está justificada cuando el rendimiento de la red es del 90 por ciento o más. Las corrientes y tensiones que aparecen en los párrafos siguientes están identificadas en la Fig. 11-16.

¹ W. L. Everitt, Coupling Networks, *Communications* (N. Y.), vol. 18, p. 12, setiembre de 1938, p. 12, octubre de 1938. Ver también F. E. Terman, "Radio Engineers' Handbook", p. 210, McGraw-Hill Book Company, Inc., Nueva York, 1943.

Consideremos, primero, las redes T y π de la forma 1. Para la configuración T,

$$P_{\text{pérd}} = (P_{\text{pérd}})_1 + (P_{\text{pérd}})_2 = |I_1|^2 R_1 + |I_2|^2 R_2$$

donde R_1 y R_2 son las resistencias de los inductores L_1 y L_2 , respectivamente; luego, utilizando los resultados del último apartado

$$R_1 = \frac{|X_1|}{Q} = \frac{R_{I1}|c|}{Q} \quad R_2 = \frac{|X_2|}{Q} = \frac{R_{I2}|a|}{Q}$$

$$\text{Luego } P_{\text{pérd}} = \frac{|E_1|^2}{R_{I1}^2} \frac{R_{I1}|c|}{Q} + \frac{|E_2|^2}{R_{I2}^2} \frac{R_{I2}|a|}{Q}$$

Pero dado que las corrientes se computan como si no hubiera disipación,

$$\frac{|E_1|^2}{R_{I1}} = \frac{|E_2|^2}{R_{I2}} = P_{\text{ent}}$$

por lo tanto

$$P_{\text{pérd}} = \frac{P_{\text{ent}}}{Q} (|c| + n|a|) \quad (11-41)$$

Sea δ un factor de pérdidas definido por

$$\delta = Q \frac{P_{\text{pérd}}}{P_{\text{ent}}} \quad (11-42)$$

y llamemos el factor de pérdida para la red T de la forma 1, δ_1 . Luego, por la Ec. (11-41),

$$\delta_1 = |c| + n|a| \quad (11-43)$$

Se demostrará ahora que la red π de la forma 1 tiene el mismo factor de pérdidas. Para esta red

$$P_{\text{pérd}} = (P_{\text{pérd}})_b = |I_b|^2 R_b$$

donde

$$R_b = \frac{1}{Q|B_b|} = \frac{1}{QG_{I2}|b|}$$

$$\text{y } I_b = I_L + I_c = E_2(G_{I2} + jB_c) \\ = E_2G_{I2}(1 + j|c|)$$

Sustituyendo

$$P_{\text{pérd}} = \frac{|E_2|^2 G_{I2}^2 (1 + |c|^2)}{QG_{I2}|b|} = \frac{P_{\text{ent}}}{Q} \left(\frac{1 + |c|^2}{|b|} \right)$$

Por la Ec. (11-42)

$$\delta = \frac{1 + |c|^2}{|b|} \quad (11-44)$$

Esta cantidad es idéntica a δ_1 , como puede demostrarse poniendo los valores de $|c|$ y $|b|$ dados por las Ecs. (11-38a) y (11-40a). Dado que para las redes de la forma 1, c es positivo, entonces $|c| = c$; así,

$$\begin{aligned}\delta &= \left(1 + \frac{1 - 2\sqrt{n} \cos B + n \cos^2 B}{n \sin^2 B}\right) \sqrt{n} \sin B \\ &= \frac{n + 1 - 2\sqrt{n} \cos B}{\sqrt{n} \sin B}\end{aligned}$$

Reagrupando el numerador

$$\delta = \frac{n - \sqrt{n} \cos B}{\sqrt{n} \sin B} + \frac{1 - \sqrt{n} \cos B}{\sqrt{n} \sin B} = na + c$$

Pero en las redes de la forma 1, a y c son ambos positivos; por lo tanto, δ puede escribirse

$$\delta = n|a| + |c| = \delta_1 \quad (11-45)$$

Se ha demostrado, así, que las redes T y π de la forma 1 tienen el mismo factor de pérdidas δ_1 , dado por las Ecs. (11-43) y (11-45). El estudiante puede demostrar de manera similar que δ_1 es también el factor de pérdidas de las redes T y π de la forma 3, comprobando así que las cuatro redes para las cuales $\arccos \sqrt{R_{11}/R_{12}} < |B| < 180^\circ$, con B positivo o negativo, tienen el mismo factor de pérdidas δ_1 .

Mediante procedimientos similares puede demostrarse que las cuatro redes de las formas 2 y 4 tienen el mismo factor de pérdidas δ_2 . Por ejemplo, para la estructura T de la forma 4,

$$P_{\text{pérd}} = (P_{\text{pérd}})_1 + (P_{\text{pérd}})_3 \quad (11-46)$$

Pero $I_1 = \frac{E_1}{R_{11}}$ $R_1 = \frac{|X_1|}{Q} = \frac{R_{11}|c|}{Q}$

Entonces $(P_{\text{pérd}})_1 = |I_1|^2 R_1 = \frac{|E_1|^2 R_{11}|c|}{R_{11}^2 Q} = \frac{P_{\text{ent}}|c|}{Q} \quad (11-47)$

Además, $I_3 = \frac{E_3}{jX_3} = \frac{E_1 - jX_1 I_1}{jX_3} = \frac{E_1 - j(E_1 X_1 / R_{11})}{jX_3}$
 $= \frac{E_1}{jR_{11}} \frac{1 - j|c|}{|b|}$

y $R_3 = \frac{|X_3|}{Q} = \frac{R_{11}|b|}{Q}$

Entonces $(P_{\text{pérd}})_3 = |I_3|^2 R_3 = \frac{|E_1|^2}{R_{11}^2} \left(\frac{1 + |c|^2}{|b|^2}\right) \frac{R_{11}|b|}{Q}$
 $= \frac{P_{\text{ent}}}{Q} \left(\frac{1 + |c|^2}{|b|^2}\right) \quad (11-48)$

El factor entre paréntesis puede ser aún simplificado, pero hay que tener cuidado de preservar la magnitud de c . En la red de la forma 4, $\sqrt{n} \cos B > 1$ y $\sqrt{n} - \cos B < 0$, y $\sin B < 0$; así

$$|c| = \frac{\sqrt{n} \cos B - 1}{\sqrt{n} |\sin B|} \quad |b| = \frac{1}{\sqrt{n} |\sin B|}$$

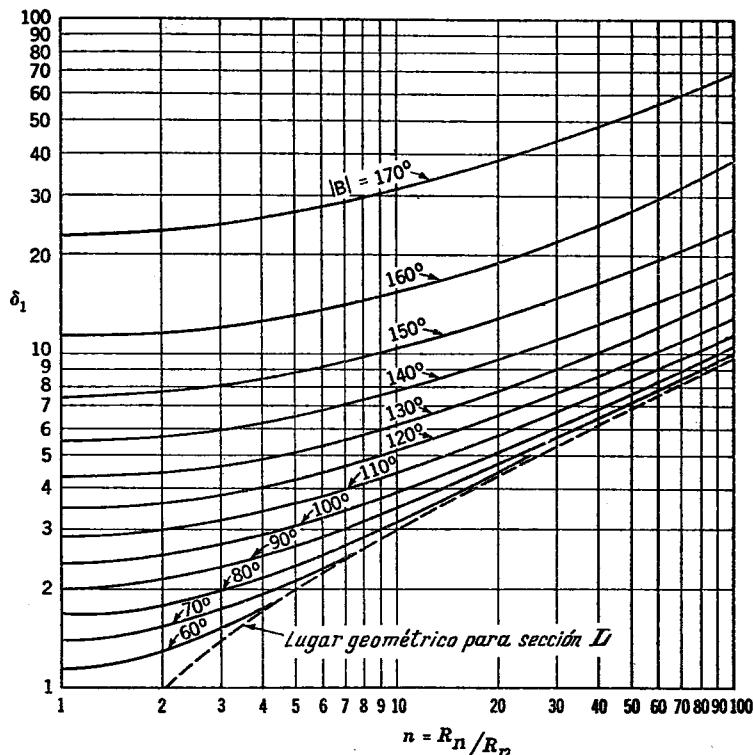


FIG. 11-17. Funciones de pérdida para las redes adaptadoras T, π y L. (a) δ_1 para las redes de las formas 1 y 3. (b) δ_2 para las redes de la forma 2 y 4.

$$\begin{aligned}\text{Entonces } \frac{1 + |c|^2}{|b|^2} &= \left(1 + \frac{n \cos^2 B - 2\sqrt{n} \cos B + 1}{n |\sin B|^2}\right) \sqrt{n} |\sin B| \\ &= \frac{n - 2\sqrt{n} \cos B + 1}{\sqrt{n} |\sin B|} \\ &= n \frac{\sqrt{n} - \cos B}{n |\sin B|} - \frac{\sqrt{n} \cos B - 1}{\sqrt{n} |\sin B|} \\ &= n|a| - |c|\end{aligned}$$

y la Ec. (11-48) deviene

$$(P_{\text{pérd}})_3 = \frac{P_{\text{ent}}}{Q} (n|a| - |c|) \quad (11-49)$$

Introduciendo las Ecs. (11-47) y (11-49) en la Ec. (11-46),

$$P_{\text{pérd}} = \frac{P_{\text{ent}} n|a|}{Q} \quad (11-50)$$

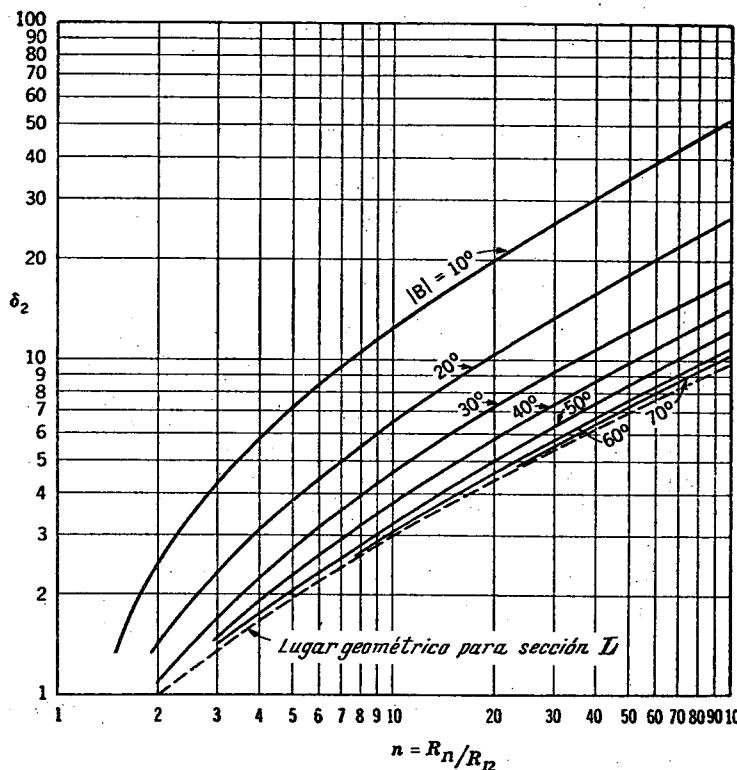


FIG. 11-17. (Continuación).

Los coeficientes de P_{ent}/Q resultan ser los factores de pérdida definidos por la Ec. (11-42). Sea llamado δ_2 el factor de pérdida para las redes de la forma 4; entonces

$$\delta_2 = n|a| \quad (11-51)$$

La red π tipo 4 tiene también, como puede demostrarse, la función de pérdida δ_2 . En este caso

$$\begin{aligned} P_{perd} &= (P_{perd})_a = |I_a|^2 R_a \\ \text{Pero } I_a &= E_1 j B_a = j E_1 G_{I2} a \quad R_a = \frac{1}{Q|B_a|} = \frac{1}{QG_{I2}|a|} \\ P_{perd} &= \frac{|E_1|^2 G_{I2}^2 |a|^2}{QG_{I2}|a|} = \frac{|E_1|^2 G_{I1}}{Q} \frac{G_{I2}}{G_{I1}} |a| \\ &= \frac{P_{ent}}{Q} n|a| \\ \delta_2 &= n|a| \end{aligned}$$

El estudiante puede demostrar que las redes de la forma 2 están también caracterizadas por la función δ_2 de la Ec. (11-51).

Los resultados del análisis precedente pueden resumirse del siguiente modo: El rendimiento de una red transformadora está implícitamente determinado por la relación de transformación de impedancia n y por la magnitud del ángulo de desplazamiento de fase, y no por la elección de una red T o π ni por el signo del ángulo. En todos los casos, δ_1 es aplicable a todas las redes cuyo ángulo de desplazamiento de fase es grande ($|B| > \arccos 1/\sqrt{n}$) y δ_2 a las redes de menor desplazamiento de fase ($|B| < \arccos 1/\sqrt{n}$).

Las funciones de pérdida δ_1 y δ_2 están representadas en la Fig. 11-17. El examen de estas curvas demuestra que las pérdidas aumentan con el aumento de la relación de transformación de impedancias y que la pérdida mínima es la de la sección L.

11-18. Reducción de las pérdidas con redes en cascada. Se dice a menudo que el mínimo número de inductores en una red adaptadora

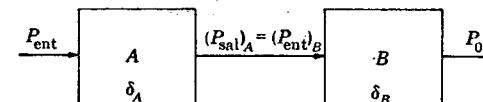


FIG. 11-18. Circuito para calcular el rendimiento de dos redes adaptadoras en cascada.

reactiva conduce al máximo rendimiento de la sección. Pueden usarse los resultados del último apartado para demostrar que esto no es necesariamente cierto si la red tiene que proveer un gran desplazamiento de fase al mismo tiempo que una gran relación de transformación. Las pérdidas pueden a veces reducirse usando dos redes en cascada.

Como ejemplo consideremos una red que debe tener una relación de transformación $n = 36$ y una magnitud de desplazamiento de fase $|B| = 160^\circ$. Supongamos que el Q de los inductores es de 100. Luego, según la Fig. 11-17a, $\delta_1 = 23$, y, por la Ec. (11-42), el rendimiento es

$$\begin{aligned} \eta &= 1 - \frac{P_{perd}}{P_{ent}} = 1 - \frac{\delta_1}{Q} \\ &= 1 - 0,23 = 77\% \end{aligned}$$

Puede diseñarse una red equivalente formada por dos secciones en cascada, cada una de ellas con $n = 6$ y $|B| = 80^\circ$. Así, según la Fig. 11-17a, $\delta_1 = 2,5$ para cada sección; con referencia a la Fig. 11-18,

$$\begin{aligned} (P_{sal})_A &= P_{ent} - (P_{perd})_A = P_{ent} \left(1 - \frac{\delta_A}{Q}\right) \\ P_{sal} &= (P_{ent})_B - (P_{perd})_B = (P_{ent})_B \left(1 - \frac{\delta_B}{Q}\right) \end{aligned}$$

Pero $(P_{\text{sal}})_A = (P_{\text{ent}})_B$; luego

$$\begin{aligned}\eta &= \frac{P_{\text{pérd}}}{P_{\text{ent}}} = \left(1 - \frac{\delta_A}{Q}\right) \left(1 - \frac{\delta_B}{Q}\right) \\ &= 1 - \frac{\delta_A + \delta_B}{Q} + \frac{\delta_A \delta_B}{Q^2}\end{aligned}\quad (11-52)$$

Introduciendo los valores numéricos del ejemplo,

$$\eta = 1 - 0,05 + 0,000625 = 95\%$$

Por consecuencia, las dos secciones en cascada producen una pérdida más de cuatro veces menor que la sección única, siempre que, por supuesto, $Q = 100$ para todos los inductores.

11-19. Rechazo de frecuencias en las redes adaptadoras. Dado que todas las secciones de la Fig. 11-15 están diseñadas para una única frecuencia, se encontrará que tales redes no proveen adaptación de impedancias para las frecuencias alejadas de las de diseño. Esta acción de filtro puede ser útil en muchas aplicaciones de radiofrecuencia. Se

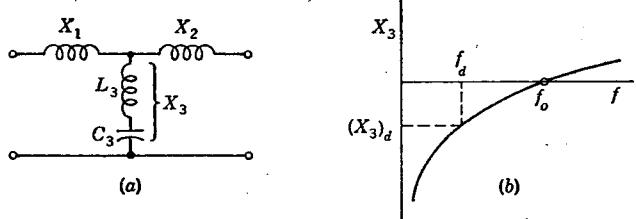


FIG. 11-19. Modificación de una red adaptadora T para suprimir una frecuencia en particular. (a) X_3 se hace resonante en serie a la frecuencia que se quiere suprimir. (b) Curva de reactancia para X_3 . f_d es la frecuencia de diseño, f_o es la frecuencia que se quiere rechazar.

la puede hacer mucho más efectiva aprovechando las propiedades de la resonancia en el diseño de una o más ramas. Por ejemplo, si una de las ramas en derivación se reemplaza por un circuito resonante en serie a una frecuencia particular, por ejemplo f_o , esta rama actúa como un cortocircuito para esta frecuencia y no aparece energía de esta frecuencia en el circuito de carga. Puede obtenerse una acción similar haciendo antirresonante una de las ramas en serie, digamos, a la frecuencia f_r .

Más específicamente, supongamos que queremos modificar una sección T para que rechace la frecuencia f_o , la que es mayor que la frecuencia de diseño f_d . Esto puede conseguirse reemplazando X_3 con una combinación de L_3 y C_3 como la indicada en la Fig. 11-19a. La curva de reactancia de X_3 aparece como función de la frecuencia en b. Los elementos de la rama pueden entonces calcularse por aplicación del teorema de reactancias de Foster, o, dado que hay sólo dos incógnitas, mediante un par de ecuaciones simultáneas. A la frecuencia de diseño

f_d , X_3 debe tener el valor $(X_3)_d$ determinado por las Ecs. (11-20) a (11-22) o las Ecs. (11-35) a (11-37), esto es

$$\omega_d L_3 - \frac{1}{\omega_d C_3} = (X_3)_d$$

y la rama debe estar en resonancia a f_o , o

$$\omega_o L_3 - \frac{1}{\omega_o C_3} = 0$$

Estas ecuaciones permiten calcular L_3 y C_3 .

Como ejemplo, modifiquemos la red T de la Fig. 11-11b de modo que rechace la segunda armónica en la rama X_3 . Por el ejemplo de la pág. 425,

$$\omega_d = 2 \times 10^6 \text{ radian/s}$$

$$(X_3)_d = -500 \text{ ohm}, \omega_o = 4 \times 10^6 \text{ radian/s}$$

Para ω_d

$$2 \times 10^6 L_3 - \frac{1}{2 \times 10^6 C_3} = -500 \quad (11-53)$$

Para ω_o

$$4 \times 10^6 L_3 - \frac{1}{4 \times 10^6 C_3} = 0 \quad (11-54)$$

Resolviendo por determinantes,

$$L_3 = \frac{500/(4 \times 10^6)}{-\frac{3}{4} + \frac{1}{2}} = \frac{125 \times 10^{-6}}{1,5} = 83,3 \mu\text{H}$$

Por la Ec. (11-54),

$$C_3 = \frac{1}{(16 \times 10^{12})L_3} = \frac{1}{(16 \times 10^{12})(0,833 \times 10^{-4})} = 750 \mu\mu\text{F}$$

Puede rechazarse más de una frecuencia en una única rama utilizando circuitos más complicados que la simple combinación en serie o en paralelo de inductancia y capacitancia. El diseño de tales ramas se simplifica mediante el uso del teorema de reactancias de Foster y las técnicas de sintetización del Cap. IV.

11-20. Adaptación a varias frecuencias. La idea propuesta en el apartado anterior de utilizar redes de Foster más bien que elementos reactivos simples en una o más ramas de una red adaptadora, sugiere la posibilidad de proveer adaptación de impedancias a más de una frecuencia. Esta posibilidad existe, en efecto, y puede representar una gran ventaja en el caso de los radiotransmisores de onda corta, las que a menudo funcionan a frecuencias muy distintas de día y de noche con el fin de aprovechar mejor las características de propagación de las diversas bandas de frecuencias. Los métodos de diseño de las redes necesarias son similares a los de la última sección y se ilustran mejor mediante un ejemplo numérico.

Ejemplo. Un único trasmisor debe funcionar en dos diferentes frecuencias de onda corta: en 11,91 Mc (banda de 25 m) durante el día, y en 6,1 Mc/s (banda de 49 m) durante la noche. Se desea diseñar una red π para adaptar 800 ohm a una línea coaxial de 50 ohm en las dos frecuencias, sin necesidad de resintonizar ni comutar elementos. Si es posible hay que usar un inductor de 1,336 μH como elemento en serie.

Solución. Para los fines de ilustración sólo se calculará la rama B_c . Según las especificaciones

$$\omega_1 = 2\pi(6,1 \times 10^6) = 3,84 \times 10^7 \text{ radian/s}$$

$$\omega_2 = 2\pi(11,91 \times 10^6) = 7,56 \times 10^7 \text{ radian/s}$$

$$G_{I1} = \frac{1}{Z_0} = 0,125 \times 10^{-2} \text{ siemens}$$

$$G_{I2} = \frac{1}{Z_0} = 2 \times 10^{-2} \text{ siemens}$$

$$G_{I1}G_{I2} = 0,25 \times 10^{-4} \text{ siemens}^2$$

Verifiquemos si el inductor es lo suficientemente pequeño como para que $B_b^2 \geq G_{I1}G_{I2}$

A ω_1 :

$$B_b = -\frac{1}{\omega_1 L_b} = -\frac{1}{(3,84 \times 10^7)(1,336 \times 10^{-6})} = -1,95 \times 10^{-2} \text{ siemens}$$

$$B_b^2 = (-1,95 \times 10^{-2})^2 = 3,8 \times 10^{-4} > G_{I1}G_{I2}$$

A ω_2 :

$$B_b = -\frac{1}{(7,56 \times 10^7)(1,336 \times 10^{-6})} = -0,99 \times 10^{-2} \text{ siemens}$$

$$B_b^2 = (-0,99 \times 10^{-2})^2 = 0,979 \times 10^{-4} > G_{I1}G_{I2}$$

Por lo tanto, el inductor especificado es satisfactorio como elemento de la rama en serie B_b .

Calculemos ahora los valores de B_c para las frecuencias de trabajo. Por la dual de la Ec. (11-22),

$$B_c = \pm \sqrt{\frac{G_{I2}}{G_{I1}}} (B_b^2 - G_{I1}G_{I2})$$

Para ω_1

$$(B_c)_1 = \pm \sqrt{\frac{2 \times 10^{-2}}{0,125 \times 10^{-2}} (3,8 - 0,25) 10^{-4}} = \pm \sqrt{\frac{2}{0,125} \times 3,55 \times 10^{-4}} \\ = 7,54 \times 10^{-2}$$

Pero $B_c = B_c - B_b$

raíz + :

$$(B_c)_1 = (7,54 + 1,95) \times 10^{-2} \\ = 9,49 \times 10^{-2} \text{ siemens}$$

raíz - :

$$(B_c)_1 = (-7,54 + 1,95) \times 10^{-2} \\ = -5,59 \times 10^{-2} \text{ siemens}$$

Para ω_2

$$(B_c)_2 = \pm \sqrt{\frac{2}{0,125} (0,979 - 0,25) \times 10^{-4}} = \pm \sqrt{\frac{2}{0,125} \times 0,729 \times 10^{-4}} \\ = \pm 3,42 \times 10^{-2}$$

raíz + :

$$(B_c)_2 = (3,42 + 0,99) \times 10^{-2} \\ = 4,41 \times 10^{-2} \text{ siemens}$$

raíz - :

$$(B_c)_2 = (-3,42 + 0,99) \times 10^{-2} \\ = -2,43 \times 10^{-2} \text{ siemens}$$

El resto del problema consiste en sintetizar la rama B_c de la sección π . Las curvas de susceptancia correspondientes a las raíces positiva y negativa

de B_s están representadas en *a* y *b*, respectivamente, de la Fig. 11-20. Puede verse que se necesitan tres elementos para sintetizar la curva de *a*, mientras que se necesitan sólo dos elementos para la curva de *b*. Utilizaremos por lo tanto esta última solución, la que corresponde a una combinación de L_c y C_c en paralelo. (La curva cortada de *b* sugiere otra posibilidad con dos elementos, la de L_c y C_c en serie.) La rama de elementos en paralelo

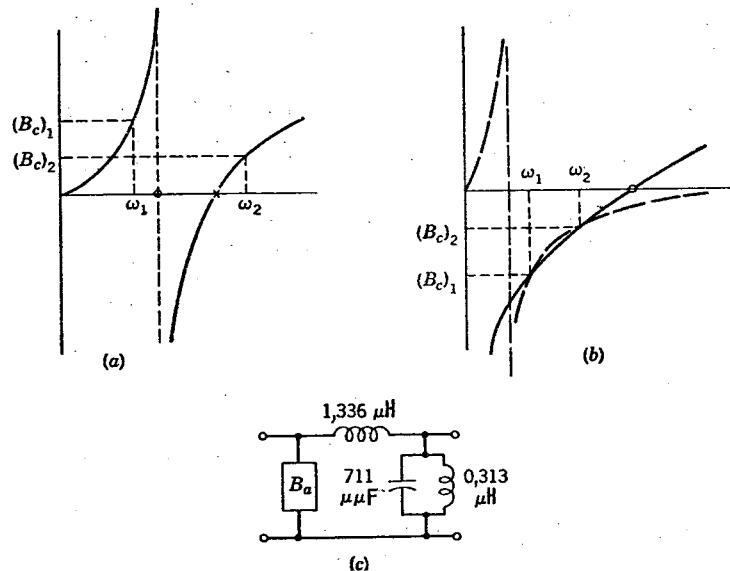


FIG. 11-20. Diseño de una sección π para proveer adaptación de impedancias a dos frecuencias. (a) Curva de susceptancia para raíces positivas de B_s . (b) Curva de susceptancia para raíces negativas de B_s . (c) Se utiliza aquí un circuito resonante en paralelo para obtener la rama B_c .

puede diseñarse planteando dos ecuaciones simultáneas para evaluar las incógnitas:

$$\omega_1 C_c - \frac{1}{\omega_1 L_c} = (B_c)_1$$

$$\omega_2 C_c - \frac{1}{\omega_2 L_c} = (B_c)_2$$

$$C = \left| \begin{array}{cc} (B_c)_1 & -\frac{1}{\omega_1} \\ (B_c)_2 & -\frac{1}{\omega_2} \\ \hline \omega_1 & -\frac{1}{\omega_1} \\ \omega_2 & -\frac{1}{\omega_2} \end{array} \right| = \frac{-(B_c)_1/\omega_2 + (B_c)_2/\omega_1}{-\omega_1/\omega_2 + \omega_2/\omega_1}$$

$$= \frac{-\omega_1(B_c)_1 + \omega_2(B_c)_2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} = \frac{[-3,84(-5,59) + 7,56(-2,43)] \times 10^5}{(5,71 - 1,47) \times 10^{14}}$$

$$= \frac{(21,41 - 18,4) \times 10^6}{4,24 \times 10^{14}} = \frac{3,01 \times 10^{-9}}{4,24} = 711 \mu\mu F$$

$$L_c = \frac{1}{\omega_1 [C_c - (B_c)]} = \frac{1}{3,84 \times 10^7 [3,84 \times 10^7 (0,711 \times 10^{-9}) + 5,59 \times 10^{-2}]} \\ = \frac{1}{3,84 \times 10^7 (2,73 + 5,59) \times 10^{-2}} = \frac{1}{3,84 \times 8,32 \times 10^5} = 0,313 \mu H$$

La red resultante está ilustrada en la Fig. 11-20c. La rama B_n puede diseñarse de una manera similar.

11-21. Trasformadores de radiofrecuencia sintonizados. En un apartado anterior se puntuó la posibilidad de diseñar un transformador de radiofrecuencia sintonizado, como el de la Fig. 11-21, utili-

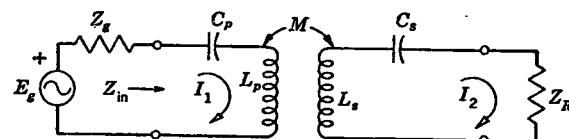


FIG. 11-21. Red trasformadora de impedancias del tipo transformador sintonizado.

zando las Ecs. (11-20) a (11-22). X_p , en estas ecuaciones, representa la reactancia total del primario, incluyendo la que pueda formar parte de Z_g , mientras que X_s representa la reactancia total del secundario, incluyendo cualquiera presente en Z_R . X_p puede ajustarse por medio de C_p y X_s , por medio de C_s . Es por lo general necesario agregar estas reactancias capacitivas (C_p y C_s), pero ocasionalmente las ecuaciones de diseño imponen el agregado de inductancia en uno u otro de los lados del circuito. La Fig. 11-11c muestra un ejemplo de diseño de una red de este tipo sobre la base de pérdidas nulas y sin desplazamiento de fase especificado. Cuando la red del tipo transformador debe ser diseñada para un desplazamiento de fase dado al mismo tiempo que para una dada relación de transformación de impedancias, puede diseñarse primero una sección T por medio de las Ecs. (11-35) a (11-37) y convertir después esta sección en un transformador mediante las identidades que preceden las Ecs. (11-19a).

Debe observarse que el transformador ofrece más libertad de diseño que la sección T, por cuanto aquél involucra cinco parámetros (L_p , L_s , M , C_p y C_s) más bien que sólo tres. El conjunto de bobinas formado por L_p y L_s , con M a menudo variable, puede elegirse entre los disponibles con la única condición de que ωM tenga el valor suficiente. C_p y C_s pueden ajustarse luego para obtener los valores convenientes de X_p y X_s . Los grados adicionales de libertad que ofrece el transformador sintonizado admiten mayores variaciones en las curvas de respuesta de frecuencia. Esto se considera en un apartado posterior.

11-22. Impedancia de entrada del transformador sintonizado. Aunque el apartado anterior delineó el método de diseño para las redes no disipativas del tipo de transformador sintonizado, puede tenerse una visión adicional del comportamiento de estos circuitos investigando su

impedancia de entrada de una manera general. Puesto que el transformador sintonizado, el generador y la carga de la Fig. 11-21 configuran un circuito de dos mallas, la impedancia de entrada del transformador es

$$Z_{in} = Z_{11} - \frac{Z_{12}^2}{Z_{22}} \quad (11-55)$$

donde Z_{11} = impedancia primaria de malla sin incluir Z_g .
= jX_p .

Z_{22} = impedancia secundaria de malla.

= $R_s + jX_s$.

Z_{12} = impedancia mutua.

= $\pm jX_m = \pm j\omega M$.

El signo de Z_{12} depende de las polaridades de los arrollamientos del transformador y de los sentidos que se toman como positivos para las corrientes. Sustituyendo y racionalizando,

$$Z_{in} = jX_p - \frac{(\pm jX_m)^2}{R_s + jX_s} \\ = \frac{X_m^2 R_s}{R_s^2 + X_s^2} + j \left(X_p - \frac{X_m^2 X_s}{R_s^2 + X_s^2} \right) \quad (11-56)$$

Debe observarse que el signo de X_m no tiene efecto sobre la impedancia de entrada, ya que sólo aparece elevado al cuadrado en la Ec. (11-56). Nótese, además, que la reactancia del secundario aparece acoplada o trasferida con el signo cambiado en el primario.

11-23. Acoplamiento insuficiente. Las Ecs. (11-21) y (11-22) especifican los valores de X_p y X_s para la adaptación de impedancias cuando X_m^2 es igual o mayor que el valor crítico $X_m^2 = R_{11}R_{12}$. La Ec. (11-56) permite la determinación de X_p y X_s para el caso de *acoplamiento insuficiente*, es decir, para $X_m^2 < R_{11}R_{12}$. Con el fin de hacer coherente la notación, pongamos $Z_g = R_{11}$ en la Fig. 11-21, y sea $Z_R = R_s = R_{12}$. Entonces, en este caso es deseable hacer la impedancia de entrada *real* y lo mayor posible, ya que no puede hacerse lo suficientemente grande como para igualar a R_{11} . Así, para llevar al máximo el término real de la Ec. (11-56), pongamos

$$X_s = 0 \quad (11-57a)$$

Entonces $Z_{in} = \frac{X_m^2}{R_{12}} + jX_p \quad X_s = 0$

Esta cantidad puede hacerse real poniendo

$$X_p = 0 \quad (11-57b)$$

y $Z_{in} = \frac{X_m^2}{R_{12}} \quad (11-58)$

El estudiante debe observar que, si X_m^2 pudiera ser aumentado a

$$X_m^2 = R_{11}R_{12}$$

sería $Z_{in} = R_p$, lo que confirma los resultados anteriores en cuanto al acoplamiento crítico. Puede verificar también las Ecs. (11-21) y (11-22) para el caso de acoplamiento suficiente ($X_m^2 > R_p R_s$) mediante la adecuada manipulación de la Ec. (11-56).

11-24. Control de la adaptación de impedancias mediante los parámetros circuitales. Las Ecs. (11-21) y (11-22) y también las Ecs. (11-57a) y (11-57b) son pares de ecuaciones que dan para los casos de acoplamiento suficiente y de acoplamiento insuficiente, los ajustes óptimos de las reactivas primaria y secundaria cuando pueden hacerse los dos ajustes. Si X_p no es ajustable, las Ecs. (11-22) y (11-57a) no dan el mejor valor de X_s , si ésta representa el único valor que puede elegirse a voluntad. De manera similar, si X_s debe permanecer fija, las Ecs. (11-21) y (11-57b) no dan el valor óptimo de X_p .

En general, en una red adaptadora, pueden adaptarse la magnitud y la fase de las impedancias de generador y de carga si pueden hacerse dos ajustes, por ejemplo, X_p y X_s , o X_p y X_m , o X_s y X_m . En cambio, si sólo una de las tres variables es ajustable, sólo una de las componentes de las impedancias de generador y de carga puede adaptarse.

11-25. Resonancia parcial. Es aparente que, cuando es posible ajustar sólo X_p , siendo todas las demás reactancias fijas, el mejor valor de X_p (la que no tiene efecto sobre la parte real de Z_{in}) es el que hace cero la reactancia total del circuito equivalente en serie, como se lo ve desde el generador. Con esto se conseguirá el mayor valor posible de $|I_1|$ en esta condición y, por lo tanto, la mayor cantidad de potencia entregada a la carga. Por consiguiente, cuando sólo X_p es ajustable, de la Ec. (11-56) resulta que debe satisfacerse la condición

$$X_p = \frac{\omega^2 M^2}{R_s^2 + X_s^2} X_s \quad (11-59)$$

La Ec. (11-59) ha sido llamada por Pierce "resonancia parcial P" *.

Si, por otra parte, es X_s la única variable, el mejor ajuste no es evidente en la Ec. (11-56), puesto que X_s afecta a la vez a la parte real y a la parte imaginaria de la impedancia Z_{in} . La situación puede considerarse, empero, mediante el teorema de Thévenin. Sobre esta base, un circuito sintonizado que alimenta una resistencia secundaria R_s puede ser considerado como un generador de impedancia interna igual a la impedancia que se observa mirando la red desde los terminales de la carga. Si, entonces, fuera posible ajustar sólo X_s , el valor óptimo sería el que reduce a cero el valor total de la reactancia equivalente, y se obtendría una condición similar a la (11-59) intercambiando los subíndices s y p . Esta nueva condición ha sido llamada por Pierce "resonancia parcial S", y se la obtiene cuando

$$X_s = \frac{\omega^2 M^2 X_p}{R_p^2 + X_p^2} \quad (11-60)$$

* G. W. Pierce, "Electric Oscillations and Electric Waves", McGraw-Hill Book Company, Inc., Nueva York, 1920.

Si las condiciones de resonancia parcial P y de resonancia parcial S se satisfacen simultáneamente, la condición se llama "resonancia óptima". Los requisitos para satisfacer esta condición resultan de tratar las Ecs. (11-59) y (11-60) como ecuaciones simultáneas, con lo que se vuelve a las Ecs. (11-21) y (11-22).

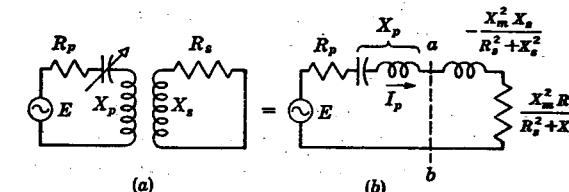


FIG. 11-22. Circuitos equivalentes que ilustran la condición de resonancia parcial P .

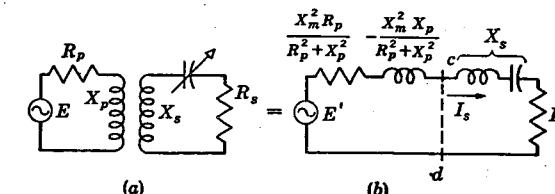


FIG. 11-23. Circuitos equivalentes que ilustran la condición de resonancia parcial S .

La condición en que sólo X_p es ajustable está ilustrada en la Fig. 11-22, estando la carga equivalente, vista desde el primario, a la derecha de la línea ab . El problema consiste en entregar la mayor potencia posible a la carga equivalente y, por lo tanto, a la carga real. Es evidente que ningún ajuste de X_p permitiría igualar las componentes reales o resistivas, y que lo único que puede hacerse es anular la reactancia total por resonancia parcial.

Por otra parte, el circuito puede ser el ilustrado en la Fig. 11-23a. El circuito equivalente es el de la Fig. 11-23b, en lo que respecta a la corriente secundaria.

En la Fig. 11-23b, la parte del circuito que está a la izquierda de la línea cd es el generador equivalente obtenido por el teorema de Thévenin. También aquí no es posible adaptar las componentes resitivas por variación de X_s y lo único que puede hacerse es anular la reactancia total y producir la máxima corriente en R_s al satisfacerse la Ec. (11-60).

Si X_m es el único ajuste, puede obtenerse una adaptación de magnitud, pero no de fase.

En la Fig. 11-22, la magnitud de la impedancia de carga equivalente, a la derecha de la línea ab , es

$$|Z_{ab}| = \frac{X_m^2}{\sqrt{R_s^2 + X_s^2}} \quad (11-61)$$

mientras que la magnitud de la impedancia a la izquierda de ab es

$$|Z_p| = \sqrt{R_p^2 + X_p^2} \quad (11-62)$$

Estas magnitudes pueden igualarse eligiendo convenientemente X_m . Para esta condición

$$\frac{X_m^2}{\sqrt{R_s^2 + X_s^2}} = \sqrt{R_p^2 + X_p^2}$$

$$X_m^2 = |Z_p| |Z_s| \quad (11-63)$$

Los principios que se acaban de discutir pueden ser aplicados a circuitos más complicados, reduciéndolos a circuitos equivalentes en serie.

11-26. Corrientes primaria y secundaria para resonancia óptima. Cuando la red adaptadora de reactancias puras se ajusta de acuerdo con las Ecs. (11-21) y (11-22) (acoplamiento suficiente), la impedancia de entrada de la red es R_{I1} si la impedancia de carga es R_{I2} . Si la resistencia del generador es también R_{I1} , la corriente de entrada viene a ser

$$I_1 = \frac{E_g}{2R_{I1}} \quad (11-64)$$

La potencia entregada a la red es

$$P = |I_1|^2 R_{I1} = \frac{|E_g|^2}{4R_{I1}}$$

Esta potencia es entregada a la carga sin pérdidas, puesto que se suponen reactancias puras. Luego,

$$P = |I_2|^2 R_{I2} = \frac{|E_g|^2}{4R_{I2}}$$

Por lo tanto

$$I_2 = \frac{E_g}{2\sqrt{R_{I1}R_{I2}}} \quad (11-65)$$

Si el acoplamiento es suficiente, las Ecs. (11-64) y (11-65) muestran que las corrientes serán independientes del valor de X_m siempre que se satisfagan las condiciones de resonancia óptima.

Si el transformador tiene resistencias y la resistencia del primario se incluye en R_{I1} mientras que la resistencia del secundario se incluye en R_{I2} , las Ecs. (11-64) y (11-65) siguen siendo válidas.

En el caso del acoplamiento insuficiente, ha sido demostrado que el mejor ajuste consiste en hacer $X_p = 0$ y $X_s = 0$. En este caso

$$I_1 = \frac{E_g}{Z_{11} - Z_{12}^2/Z_{22}} = \frac{E_g R_{I2}}{R_{I1} R_{I2} + \omega^2 M^2} \quad (11-66)$$

$$I_2 = -\frac{Z_{12} E_g}{Z_{11} Z_{22} - Z_{12}^2} = \frac{E_g \omega M}{R_{I1} R_{I2} + \omega^2 M^2} \quad (11-67)$$

Las corrientes para el caso de acoplamiento insuficiente serán menores que cuando el acoplamiento es suficiente y se cumple la condición de resonancia óptima.

11-27. Resonancia múltiple en los transformadores sintonizados. La Fig. 11-21 muestra que el transformador sintonizado involucra dos circuitos resonantes en serie, y es evidente entonces que hay dos puntos de resonancia en la combinación. Las Ecs. (11-21) y (11-22)

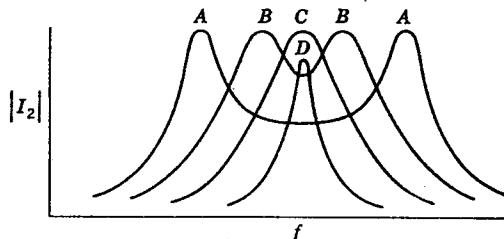


FIG. 11-24. Curvas de resonancia para el circuito del transformador sintonizado de la Fig. 11-21.

pueden ser satisfechas si X_p y X_s se hacen sea capacitativas, sea inductivas, pero ambas deben ser del mismo tipo para poder satisfacer la Ec. (11-20a) a la frecuencia del diseño.

Si se toma una curva de respuesta de $|I_2|$ en función de la frecuencia para el circuito de la Fig. 11-21, obtendráse una curva de la forma general A, Fig. 11-24.

Si se reduce la inductancia mutua del circuito, los picos de la curva A (Fig. 11-24) se aproximarán el uno al otro, como lo indica la curva B. Esta característica de doble resonancia de los circuitos acoplados *sintonizados* se aprovecha a menudo en los transformadores de radiofrecuencia para obtener lo que se llama un filtro pasabanda.

Si se ajustan X_p y X_s de modo de satisfacer las condiciones expresadas por las Ecs. (11-21) y (11-22), la frecuencia de diseño coincidirá con el pico inferior de la Fig. 11-24 cuando se usan los valores negativos, y con el pico superior si se usan los valores positivos o inductivos.

Para el acoplamiento crítico, las Ecs. (11-21) y (11-22) exigen que X_p y X_s se ajusten ambas a cero. Hay un sólo ajuste para resultados óptimos y los picos de las curvas de la Fig. 11-24 se confunden entonces en uno solo, como en la curva C.

11-28. Curvas de respuesta. El cálculo de las curvas de respuesta *generales* del tipo ilustrado en la Fig. 11-24 para el circuito de transformador sintonizado es extremadamente difícil a causa del gran número de variables involucradas. Se ha puntualizado ya que las Ecs. (11-21) y (11-22) especifican X_p y X_s a sólo la frecuencia de diseño f_d . Dado que estas dos reactancias consisten en una inductancia y una capacitancia en serie, los valores de diseño pueden ser satisfechos por un número infinito de combinaciones de L_p , C_p y L_s , C_s . Para complicar aún más las cosas, un juego general de curvas incluiría aún otro parámetro que relacionaría X_m con el valor crítico, aparte de que a menudo las resistencias del circuito resultan depender de la frecuencia dentro de márgenes amplios. Por estas razones sólo se considerará un caso especial, aquél en que el primario y el secundario resuenen a la misma frecuencia f_r , es decir,

$$\omega_r^2 = \frac{1}{L_p C_p} = \frac{1}{L_s C_s} \quad (11-68)$$

El problema específico será el de determinar las frecuencias para las cuales I_2 resulta máximo o mínimo.

La corriente secundaria en un circuito de dos mallas es

$$I_2 = -\frac{Z_{12}E_g}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}^2}$$

Por la Fig. 11-21,

$$\begin{aligned} Z_{11} &= R_{I1} + j\left(\omega L_p - \frac{1}{\omega C_p}\right) = R_{I1} + j\omega L_p \left(\frac{\omega}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega}\right) \\ Z_{22} &= R_{I2} + j\left(\omega L_s - \frac{1}{\omega C_s}\right) = R_{I2} + j\omega L_s \left(\frac{\omega}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega}\right) \\ Z_{12} &= \pm j\omega M \end{aligned}$$

Sustituyendo y agrupando términos,

$$I_2 = \frac{\mp j\omega ME_g}{R_{I1}R_{I2} + (\omega M)^2 - \omega_r^2 L_p L_s \left(\frac{\omega}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega}\right)^2 + j\omega_r (R_{I1}L_s + R_{I2}L_p) \left(\frac{\omega}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega}\right)} \quad (11-69)$$

Este resultado puede ser simplificado observando que $R_{I1}R_{I2}$ es el cuadrado de la reactancia mutua con *acoplamiento crítico*. Por las Ecs. (11-21) y (11-22), $X_p = X_s = 0$ a la frecuencia de diseño. Para este caso especial en que $X_p = X_s = 0$ a ω_r ,

$$R_{I1}R_{I2} = (\omega_r M_c)^2$$

donde M_c es el valor crítico de la inductancia mutua. Factoreando $\omega_r^2 L_p L_s$ del denominador, la Ec. (11-69) reducse a

$$I_2 = \frac{\mp j\omega ME_g}{\omega_r^2 L_p L_s \left[\frac{M_c^2}{L_p L_s} + \left(\frac{\omega}{\omega_r}\right)^2 \frac{M^2}{L_p L_s} - \left(\frac{\omega}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega}\right)^2 + j \left(\frac{R_{I1}}{\omega_r L_p} + \frac{R_{I2}}{\omega_r L_s} \right) \left(\frac{\omega}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega}\right) \right]} \quad (11-70)$$

En interés de una mayor simplificación, se observará que a la frecuencia de diseño

$$(X_p)_d = \omega_d L_p - \frac{1}{\omega_d C_p} = L_p \left(\omega_d - \frac{\omega_r^2}{\omega_d}\right)$$

$$(X_s)_d = \omega_d L_s - \frac{1}{\omega_d C_s} = L_s \left(\omega_d - \frac{\omega_r^2}{\omega_d}\right)$$

Luego, dividiendo e introduciendo la Ec. (11-20a),

$$\frac{(X_p)_d}{(X_s)_d} = \frac{L_p}{L_s} = \frac{R_{I1}}{R_{I2}}$$

$$\text{Por lo tanto } Q = \frac{\omega_r L_p}{R_{I1}} = \frac{\omega_r L_s}{R_{I2}} = \sqrt{\frac{\omega_r^2 L_p L_s}{R_{I1} R_{I2}}} = \frac{1}{k_c} \quad (11-71)$$

Introduciendo la definición de coeficiente de acoplamiento y la Ec. (11-71), la Ec. (11-70) deviene

$$I_2 = \frac{\mp j\omega ME_g}{\omega_r^2 L_p L_s \left\{ \left[k_c^2 + k^2 \left(\frac{\omega}{\omega_r}\right)^2 - \left(\frac{\omega}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega}\right)^2 \right] + j2k_c \left(\frac{\omega}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega}\right) \right\}} \quad (11-72)$$

Cuando Q es suficientemente grande, la variable de frecuencia $\omega/\omega_r - \omega_r/\omega$ puede ser reemplazada por la aproximación de simetría aritmética descrita en el Cap. IV. Sea entonces $(\omega - \omega_r)/\omega_r = x$. Se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega} &= \frac{x(2+x)}{1+x} \approx 2x \quad \text{para } x \ll 1 \\ \omega &= \omega_r(1+x) \approx \omega_r \quad \text{para } x \ll 1 \end{aligned} \quad (11-73)$$

La Ec. (11-72) adopta entonces la forma

$$I_2 = \frac{\pm jk E_g}{\omega_r \sqrt{L_p L_s (k^2 + k_c^2 - 4x^2)} + j4k_c x} \quad (11-74a)$$

$$\text{y } |I_2| = \frac{k E_g}{\omega_r \sqrt{L_p L_s} \sqrt{(k^2 + k_c^2 - 4x^2)^2 + 16k_c^2 x^2}} \quad (11-74b)$$

Según se ha dicho, el problema consiste en hallar los valores de la diferencia de frecuencia normalizada, x , para la cual $|I_2|$ es máxima o mínima. Esto puede hacerse diferenciando el denominador elevado al cuadrado de la Ec. (11-74b) con respecto a x e igualando la derivada a cero. Este procedimiento demuestra que $|I_2|$ pasa por un máximo o por un mínimo a los siguientes valores:

$$\begin{aligned} x_b &= 0 & \text{o} & f_b = f_r \\ x_a &= -\frac{1}{2} \sqrt{k^2 - k_c^2} & f_a &= f_r(1 - \frac{1}{2} \sqrt{k^2 - k_c^2}) \quad (11-75a) \\ x_c &= +\frac{1}{2} \sqrt{k^2 - k_c^2} & f_c &= f_r(1 + \frac{1}{2} \sqrt{k^2 - k_c^2}) \quad (11-75b) \end{aligned}$$

Es evidente, entonces, que el tipo de respuesta depende de las magnitudes relativas de k y k_c , es decir, del grado de acoplamiento.

Caso I. Acoplamiento suficiente, $k^2 > k_c^2$. Los valores de frecuencia dados por las Ecs. (11-75) son todos físicamente realizables cuando $k^2 > k_c^2$. Es fácil demostrar por consideraciones físicas que $|I_2|$ es máxima para f_a y f_c y mínima para f_b ($= f_r$). Dado que el acoplamiento es por inductancia mutua $|I_2|$ es cero a la frecuencia cero. Es tam-

bién cero para la frecuencia infinita, a causa de L_p y L_s . Por definición, la magnitud de la corriente es siempre positiva; por lo tanto, a medida que aumenta la frecuencia, la respuesta debe pasar primero por un máximo, luego por un mínimo y luego nuevamente por un máximo. Dado que $f_a < f_b < f_c$, los máximos ocurren en f_a y f_c y el mínimo en $f_b = f_r$. El ancho de banda entre picos será

$$(BW)_p = f_c - f_a = f_r \sqrt{k^2 - k_c^2} \quad k^2 > k_c^2 \quad (11-76)$$

La respuesta en las crestas resulta de introducir la Ec. (11-75b) en la Ec. (11-74b):

$$|I_2|_p = \frac{|E_g|}{\omega_r \sqrt{L_p L_s} 2k_c} = \frac{|E_g|}{2 \sqrt{R_{I1} R_{I2}}} \quad (11-77)$$

La respuesta en el mínimo ocurre en f_r y es

$$|I_2|_r = \frac{k |E_g|}{\omega_r \sqrt{L_p L_s (k^2 + k_c^2)}} \quad (11-78)$$

El estudiante puede demostrar que el ancho de banda entre los dos puntos de los flancos de la curva de respuesta en los que $|I_2| = |I_2|_r$ está dado por

$$(BW)_m = \sqrt{2} (BW)_p \quad (11-79)$$

Estos resultados están resumidos en la Fig. 11-25a.

Debe observarse que las ecuaciones de diseño (11-21) y (11-22) especifican valores para X_p y X_s para cualquiera de las dos crestas correspondientes a f_a y f_c . Si se quieren aprovechar las propiedades de banda ancha del acoplamiento, elíjese como frecuencia de diseño f_r , pero la potencia máxima será entregada a la carga a las frecuencias f_a y f_c .

Caso II. Acoplamiento crítico, $k^2 = k_c^2$. Los valores de frecuencia dados por las Ecs. (11-75) se confunden en un único valor $f_a = f_b = f_c = f_r$ en el caso crítico; por lo tanto, la curva de respuesta exhibe un único máximo, como se ve en la Fig. 11-25b. Segundo la Ec. (11-74b), la respuesta en la cresta es

$$|I_2|_r = \frac{|E_g|}{\omega_r \sqrt{L_p L_s} 2k_c} = \frac{|E_g|}{2 \sqrt{R_{I1} R_{I2}}} \quad k^2 = k_c^2 \quad (11-80)$$

y la respuesta normalizada es

$$\frac{|I_2|}{|I_2|_r} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4(x/k_c)^2}} \quad k^2 = k_c^2 \quad (11-81)$$

El estudiante puede demostrar, partiendo de la Ec. (11-81) que el ancho de banda de potencia mitad para el caso crítico es

$$BW = \sqrt{2} k_r f_r \quad (11-82)$$

Puede observarse que la variable de frecuencia aparece elevada a la cuarta potencia en la Ec. (11-81), mientras que aparece elevada sólo

al cuadrado en la curva de resonancia universal del circuito resonante único (Fig. 4-10). Por lo tanto, para pequeños valores de x , la Ec. (11-81) es más plana que la curva universal de resonancia.

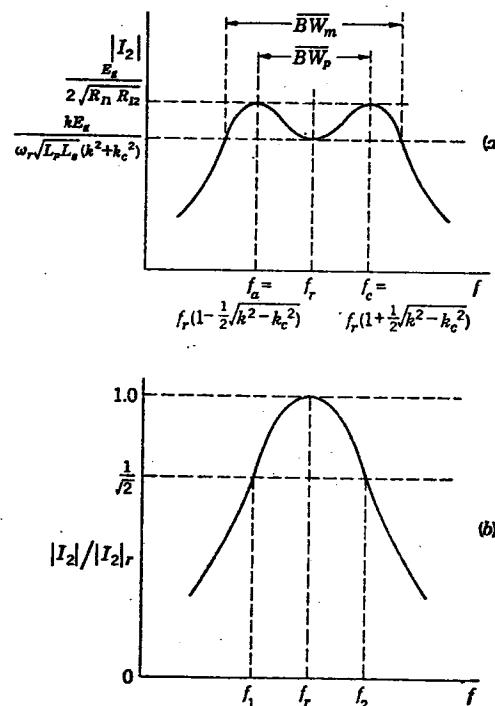


FIG. 11-25. Respuesta del circuito de un transformador sintonizado cuando el primario y el secundario están sintonizados a la frecuencia f_r y se adoptan las condiciones de simetría aritmética.
(a) Acoplamiento suficiente. (b) Acoplamiento crítico.

Caso III. Acoplamiento insuficiente, $k^2 < k_c^2$. Cuando $k^2 < k_c^2$, los dos valores de frecuencia especificados por las Ecs. (11-75) resultan ser complejos, de modo que no se los puede realizar físicamente. Luego, en el caso de subacoplamiento, la curva exhibe un único máximo para f_r . El estudiante puede demostrar que, en este caso la respuesta normalizada es

$$\frac{|I_2|}{|I_2|_r} = \frac{k^2 + k_c^2}{\sqrt{(k^2 + k_c^2)^2 + 16k_c^2 x^2}} \quad k^2 < k_c^2 \quad (11-83)$$

y que el ancho de banda de potencia mitad es

$$BW = f_r \sqrt{\sqrt{2(k^4 + k_c^4)} - (k_c^2 - k^2)} \quad k^2 < k_c^2 \quad (11-84)$$

11-29. Rendimiento de transformador sintonizado. En la hipótesis de bajas pérdidas, el rendimiento del transformador sintonizado se

estudia siguiendo el mismo procedimiento que en el Ap. 11-17, esto es, calculando las corrientes como si no hubieran pérdidas. Sobre esta base, la potencia perdida en los dos inductores de la Fig. 11-21 será

$$P_{\text{pérd}} = \frac{|I_1|^2 X_{Lp}}{Q_p} + \frac{|I_2|^2 X_{Ls}}{Q_s} \quad (11-85)$$

En la condición de adaptación de impedancias y para pérdidas pequeñas, $|I_1|^2 R_{I1} = |I_2|^2 R_{I2}$; por lo tanto

$$P_{\text{pérd}} = |I_1|^2 \left(\frac{X_{Lp}}{Q_p} + \frac{R_{I1} X_{Ls}}{R_{I2} Q_s} \right) \quad (11-85a)$$

La investigación de esta ecuación para el caso general es difícil, a causa del gran número de combinaciones de parámetros circuitales que pueden dar la adaptación requerida. Es sin embargo un caso especial de interés el del acoplamiento crítico, en el que

$$X_m^2 = k_c^2 X_{Lp} X_{Ls} = R_{I1} R_{I2} \quad (11-86)$$

Entonces, eliminando X_{Lp} , la Ec. (11-85a) deviene

$$P_{\text{pérd}} = P_{\text{ent}} \left(\frac{R_{I2}}{k_c^2 Q_p X_{Ls}} + \frac{X_{Ls}}{R_{I2} Q_s} \right) \quad (11-85b)$$

Pero, según la Ec. (11-86), el producto $k_c^2 X_{Lp} X_{Ls}$ es fijo para una adaptación dada. Se plantea entonces la cuestión de determinar la relación X_{Lp}/X_{Ls} que da la pérdida mínima, es decir, la de la elección de las inductancias para pérdida mínima. Suponiendo que los Q son constantes y que la potencia de entrada es fija,

$$\frac{\partial P_{\text{pérd}}}{\partial X_{Ls}} = P_{\text{ent}} \left(\frac{-R_{I2}}{k_c^2 Q_p X_{Ls}^2} + \frac{1}{R_{I2} Q_s} \right) = 0$$

de donde

$$k_c X_{Ls} = \sqrt{\frac{Q_s}{Q_p}} R_{I2} \quad (11-87)$$

Introduciendo en la Ec. (11-86)

$$\frac{X_{Lp}}{X_{Ls}} = \frac{R_{I1} Q_p}{R_{I2} Q_s} = n \frac{Q_p}{Q_s} \quad (11-88)$$

La Ec. (11-88) proporciona, pues, la relación de inductancias para mínima pérdida en el caso de acoplamiento crítico.

Para comparación con las redes T y π antes consideradas, es interesante definir la función de pérdidas δ_{\min} . Así, introduciendo la Ec. (11-87) en la Ec. (11-85b),

$$(P_{\text{pérd}})_{\min} = \frac{2P_{\text{ent}}}{k_c \sqrt{Q_p Q_s}} \quad (11-89)$$

$$\delta_{\min} = \frac{(P_{\text{pérd}})_{\min}}{P_{\text{ent}}} \sqrt{Q_p Q_s} = \frac{2}{k_c} \quad (11-90)$$

Es de interés observar que, para la condición de pérdida mínima, la función de pérdidas es independiente de la relación de transformación de impedancias.

El valor de k_c jamás es mayor que 0,5 y frecuentemente es bastante menor. Por lo tanto, δ_{\min} tiene una magnitud del orden de 4 ó más. Cuando este valor se compara con los de la sección L dados en la Fig. 11-17, se ve que, a menos que la relación de impedancias sea muy grande, la sección L es inherentemente de mejor rendimiento que el transformador sintonizado.

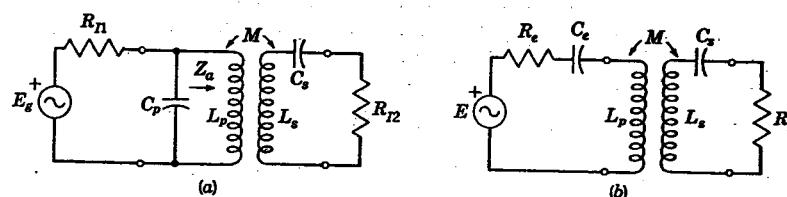


FIG. 11-26. Circuito transformador de impedancias del tipo de transformador sintonizado con C_p en derivación sobre L_p . La aplicación del teorema de Thévenin da el circuito equivalente de b. Compárese con la Fig. 11-21.

11-30. Trasformador de radiofrecuencia sintonizado con C_p en derivación. El circuito de transformador sintonizado de radiofrecuencia de la Fig. 11-21, que utiliza un capacitor en serie con L_p , provee una relación de transformación de impedancias que está limitada por el valor disponible de la reactancia mutua X_m . Puesto que $X_m^2 \geq R_{I1} R_{I2}$ es condición necesaria para la adaptación de impedancias,

$$n = \frac{R_{I1}}{R_{I2}} \leq \left(\frac{X_m}{R_{I2}} \right)^2 \quad (11-91)$$

Un circuito de alternativa para el transformador sintonizado es el que resulta de disponer C_p en derivación sobre L_p , como se ve en la Fig. 11-26a. Se demostrará ahora que este circuito de alternativa puede proveer inherentemente una mayor relación de transformación, la que está limitada por X_p más bien que por X_m .

Una manera de analizar el circuito consiste en reemplazar la parte que está a la izquierda del inductor primario por un circuito equivalente de Thévenin, como en la Fig. 11-26b. La tensión del generador equivalente es

$$E = \frac{jX_{C_p}}{R_{I1} + jX_{C_p}} E_g$$

y la impedancia del generador equivalente

$$\begin{aligned} Z_e &= R_e + jX_e \\ &= \frac{jX_{C_p} R_{I1}}{R_{I1} + jX_{C_p}} = \frac{R_{I1} X_{C_p}^2}{R_{I1}^2 + X_{C_p}^2} + \frac{jR_{I1}^2 X_{C_p}}{R_{I1}^2 + X_{C_p}^2} \end{aligned} \quad (11-92)$$

Puede verse, entonces, que el circuito con C_p en derivación de la Fig. 11-26a ha sido reducido a la forma de capacitor en serie de la Fig. 11-21,

excepto porque la R_{I1} de la forma en serie ha sido reemplazada por R_e . Según la Ec. (11-92), R_e puede escribirse

$$R_e = \frac{R_{I1}}{1 + (R_{I1}/X_{Cp})^2} \quad (11-93)$$

Dado que $(R_{I1}/X_{Cp})^2$ es siempre positiva, se deduce inmediatamente que $R_{I1} > R_e$; por lo tanto, para los mismos parámetros circuitales, el circuito con C_p en derivación es capaz de proporcionar una mayor relación de transformación que la forma con capacitor en serie.

Como ejemplo específico para ilustrar este efecto, supongamos que el circuito secundario de la Fig. 11-26a o su equivalente b está ajustado a resonancia, de modo que $X_s = 0$. Luego, por la Ec. (11-20a), X_p , la reactancia en serie total del circuito primario, debe ser cero, es decir,

$$X_{Ce} = -X_{Lp} \quad (11-94)$$

Igualando al último término de la Ec. (11-92) se tiene

$$\frac{R_{I1}X_{Cp}}{R_{I1}^2 + X_{Cp}^2} = -\frac{X_{Lp}}{R_{I1}} \quad (11-95)$$

Luego, por las Ecs. (11-92) y (11-95),

$$R_{I1} = \frac{-X_{Lp}X_{Cp}}{R_e}$$

Pero, para la condición en que $X_p = X_s = 0$, $R_eR_{I2} = X_m^2$, de donde resulta

$$n = \frac{R_{I1}}{R_{I2}} = \frac{-X_{Lp}X_{Cp}}{X_m^2} \quad (11-96)$$

En los circuitos típicos es a menudo cierto que R_{I1} es mucho mayor que X_{Cp} , de modo que $R_{I1}^2 \gg X_{Cp}$. En este caso, de la Ec. (11-92)

$$X_{Ce} \approx X_{Cp} \quad (11-97)$$

y por la Ec. (11-94)

$$X_{Cp} \approx -X_{Lp} \quad (11-98)$$

Por lo tanto, si $X_s = 0$ y $X_{Cp} \approx X_{Lp}$,

$$n = \frac{R_{I1}}{R_{I2}} \approx \frac{X_{Lp}^2}{X_m^2} \quad (11-99)$$

Estas ecuaciones sirven para diseñar la red de la Fig. 11-26. Es interesante observar que los resultados aquí obtenidos corroboran los del Cap. IV, en los que se observó que la resonancia en paralelo es de preferir a la resonancia en serie cuando la impedancia de la fuente es alta. Los resultados anteriores se aplicarán ahora a un ejemplo ilustrativo.

Ejemplo: Diseñar la red de la Fig. 11-26a para adaptar 10 ohm a 5.000 ohm a la frecuencia de

$$\omega = 2 \times 10^6 \text{ radian/s}$$

Los inductores disponibles son $L_p = 100 \mu\text{H}$, $L_s = 50 \mu\text{H}$, con un coeficiente máximo de acoplamiento de 0,7.

Solución: Se tiene

$$X_{Lp} = \omega L_p = (2 \times 10^6) \times 10^{-4} = 200 \text{ ohm}$$

$$\frac{R_{I1}}{X_{Lp}} = \frac{5,000}{200} = 25$$

Por la Ec. (11-99)

$$X_m^2 = \frac{R_{I2}}{R_{I1}} X_{Lp}^2 = \frac{10}{5 \times 10^3} 4 \times 10^4 = 80$$

Verifiquemos si k está dentro del límite especificado

$$k = \sqrt{\frac{X_m^2}{X_{Lp}X_{Ls}}} = \sqrt{\frac{80}{2 \times 10^4}} = 0,0633$$

El resultado es satisfactorio. Por la Ec. (11-98)

$$C_p = \frac{1}{\omega X_{Lp}} = \frac{1}{(2 \times 10^6)(2 \times 10^2)} = 2,500 \mu\mu\text{F}$$

$$C_s = \frac{1}{\omega X_{Ls}} = \frac{1}{(2 \times 10^6)(1 \times 10^2)} = 5,000 \mu\mu\text{F}$$

El estudiante debe observar que si los mismos inductores se utilizaran con un C_p en serie, el máximo valor de R_{I1} sería

$$R_{I1} = \frac{X_m^2}{R_{I2}} = \frac{k^2 X_{Lp} X_{Ls}}{R_{I2}} = \frac{0,49 \times 200 \times 10^2}{10} = 980 \text{ ohm}$$

PROBLEMAS

11-1. La red de la Fig. 11-5b sirve para proveer simultáneamente adaptaciones de impedancias conjugadas en los terminales 1, 1' y 2, 2'. Escribir ecuaciones a partir de este hecho y usarlas para verificar las Ecs. (11-8)

11-2. (a) Diseñar dos secciones L para adaptar una carga resistiva de 306 ohm a un generador cuya impedancia interna es de $81 + j22$ ohm. La frecuencia es de 1 Mc/s. (b) ¿En qué aspectos diferirán los comportamientos de estas dos secciones? (c) Calcular el rendimiento de las dos secciones L . Suponer que el Q de los inductores es de 100.

11-3. Calcular y representar gráficamente una curva de la magnitud normalizada de la corriente de carga en función de la frecuencia para la red del Prob. 11-2a que utiliza un inductor en serie. Cubrir una gama de frecuencias de 10 Kc/s a cada lado de 1 Mc/s.

11-4. (a) Partiendo de la Ec. (11-15), derivar una expresión para las frecuencias de potencia mitad superior e inferior de una sección L en la que X_s es inductiva. (b) Representar las frecuencias de potencia mitad en función de n para valores de n comprendidos entre $n = 2$ a $n = 10$.

11-5. Diseñar una sección L por medio de las Ecs. (11-8) para adaptar dos resistencias iguales. Comentar los resultados.

11-6. (a) Diseñar una sección T para adaptar $100 + j20$ ohm a un generador de 600 ohm en 732 Kc/s. Usar una capacitancia de $800 \mu\text{F}$ para la rama en derivación y elegir X_p capacitiva. (b) ¿Cuál es el desplazamiento de fase entre las corrientes de entrada y de salida?

11-7. (a) Empezando con la Ec. (11-25), derivar una expresión para $|I_2|/|I_1|_d$ en función de ω/ω_d para una sección T cuyas ramas en serie son inductivas. Usar $X_m^2 = R_{I_1}R_{I_2}$ y poner

$$a = \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

(b) La Fig. 11-12 muestra que la respuesta de la sección T tiene simetría aritmética dentro de una gama limitada de frecuencias en torno de f_d . Simplificar la ecuación correspondiente para poner de manifiesto este hecho (ver Cap. IV). (c) ¿Cómo está relacionada la ecuación resultante con la curva universal de resonancia? (d) Dibujar una curva de ancho de banda de potencia mitad en función de n . Suponer que hay simetría aritmética.

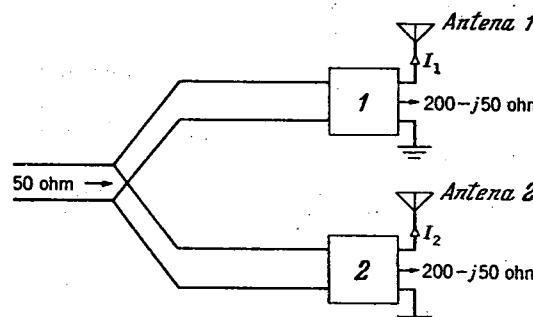


FIG. 11-27. Diagrama para el Prob. 11-8.

11-8. En la Fig. 11-27, la corriente en la antena 2 debe preceder la de la antena 1 en un ángulo de 90° y ser de doble magnitud. Es decir, $I_2 = j2I_1$. Las entradas combinadas de las redes 1 y 2 deben quedar adaptadas a una línea de 50 ohm. Todas las líneas deben ser "planas".

a. ¿Cuáles deben ser las resistencias de entrada R_1 y R_2 de las redes no disipativas 1 y 2?

b. Diseñar una red no disipativa de mínimo número de elementos para satisfacer las especificaciones.

c. Despreciando los desplazamientos de fase a lo largo de las líneas de transmisión, diseñar una sección T para satisfacer los requisitos de la red 2.

11-9. Diseñar una red π reactiva para adaptar una carga de 500 ohm derivada por una capacitancia de $100 \mu\text{F}$ a una línea de 100 ohm a la frecuencia $\omega = 10^\circ$ radián/s. La corriente en el resistor de 500 ohm debe preceder la corriente de entrada en un ángulo de 60° .

11-10. Derivar la dual de la Ec. (11-25) para una sección π con capacidades en derivación.

11-11. (a) Verificar que la Ec. (11-45) define la función de pérdida para las redes T y π de la clase 3. (b) Verificar que la Ec. (11-51) define la función de pérdida para las redes T y π de la clase 2.

11-12. Investigar la posibilidad de conectar en cascada las secciones adaptadoras en L para mejorar el rendimiento. Si sólo se ponen en cascada dos secciones L, ¿deben ellas ser diseñadas para igual valor de n ?

11-13. Diseñar una red que pueda ser usada para acoplar dos transmisores a la misma antena. Un trasmisor funciona a la frecuencia de 1.210 Kc/s y está diseñado para alimentar una línea de 600 ohm equilibrada respecto de tierra. El otro trasmisor funciona a 1.430 Kc/s y está diseñado para alimentar una línea de 70 ohm con un lado a masa. La impedancia de la antena en 1.210 Kc/s es de $242 - j70$ ohm, y, en 1.430 Kc/s, de $92 - j48$ ohm. Computar el rendimiento del sistema de acoplamiento para cada frecuencia si el Q de las bobinas es de 200.

11-14. Un radioaficionado planea trabajar en 7,15 Mc/s en la banda de 40 m. Diseñar una sección π para adaptar una línea de 600 ohm a una fuente de 2.000 ohm con un desplazamiento de fase de $B = +70^\circ$. La segunda armónica se encuentra en la banda de 20 m y debe ser suprimida. Modificar la rama en serie de la red π para satisfacer este requisito.

11-15. Diseñar una red π para adaptar 600 ohm a 2.000 ohm a las frecuencias simultáneas de 7,1 y 14,3 Mc/s. El acoplamiento debe ser crítico para la frecuencia más alta. La red resultante debe ser una estructura de mínimo número de elementos.

11-16. En la Fig. 11-21, $L_p = 12 \mu\text{H}$, $L_s = 2 \mu\text{H}$, $M = 1,5 \mu\text{H}$, $R_{I_1} = 4$ ohm. Las resistencias de los inductores primario y secundario son $R_1 = 0,5$ ohm, $R_2 = 0,4$ ohm.

a. ¿Cuál es el valor resistivo puro máximo de Z_{in} para $\omega = 5 \times 10^6$ radián/s?

b. ¿Cuál es el rendimiento de la red adaptadora de impedancias con el circuito ajustado para la condición de a?

11-17. En la Fig. 11-21, $L_p = L_s = 100 \mu\text{H}$, $R_{I_2} = 10$ ohm, y C_p está en cortocircuito. ¿Qué valores del coeficiente de acoplamiento y de C_s son necesarios para $Z_{in} = 100 + j0$ ohm a $\omega = 5 \times 10^6$ radián/s?

11-18. (a) Rediseñar la red del Prob. 11-17 teniendo en cuenta inductores de $Q = 100$. (b) ¿Cuál es el rendimiento de la red?

11-19. Una antena cuya impedancia es de $72 - j5$ ohm debe adaptarse a un generador de 500 ohm a $\omega = 2 \times 10^6$ radián/s por medio de un transformador sintonizado. La corriente de antena debe preceder la corriente de entrada en 90° . $L_p = L_s = 500 \mu\text{H}$. Calcular los valores necesarios de C_p , C_s y k .

11-20. Calcular el rendimiento del transformador sintonizado diseñado en el último ejemplo ilustrativo del capítulo.

CAPÍTULO XII

ADAPTACIÓN DE IMPEDANCIAS CON SECCIONES DE LÍNEA

Se ha dicho en el Cap. X que el uso de inductores y capacitores concentrados no es práctico para las radiofrecuencias muy altas (digamos, por arriba de los 50 Mc/s), a causa de los pequeños valores de L y C requeridos y que la práctica común en estas frecuencias es la de utilizar secciones de línea de transmisión, o "stubs", como reactores. En este capítulo hemos de considerar el uso de las secciones de línea en las redes adaptadoras de impedancias. El análisis se hará en la hipótesis de que las secciones de línea son no disipativas, es decir, que αl es tan pequeño que se lo puede despreciar. En muchos casos se encontrará que una red adaptadora de secciones de línea puede ser identificada con su contraparte de elementos concentrados, del tipo de las estudiadas en el capítulo anterior.

12-1. Adaptación con una sola sección de línea. En los apartados sobre la red L se ha visto que, si sólo interesa la transformación de una resistencia R_{12} en otra R_{11} , sin preocupación por el desplazamiento de fase, la red trasformadora de impedancias requiere sólo dos elementos ajustables. En la red L, estos elementos eran un inductor y un capacitor. Consideraremos una situación análoga en la que los reactores son reemplazados por secciones de línea de transmisión. Se encontrará que una sección de línea sirve como reactor en serie de la red L y que el reactor en derivación puede ser reemplazado con una sección de línea en cortocircuito. A causa de esta última sección de línea, el problema se trata más fácilmente en términos de admittance que en términos de impedancia.

Como punto de partida, digamos que una conductancia G_R (resistencia R_R) debe ser transformada en una conductancia G_{in} (resistencia R_{in}). Conectemos G_R a una línea sin pérdidas de impedancia característica $R_o = 1/G_o$ y de longitud ajustable l , como en la Fig. 12-1a. La admitancia de entrada normalizada $y_{in} = Y_{in}/G_o$ puede ser calculada por medio de la Ec. (10-28a). Las componentes real e imaginaria de y_{in} están representadas en la Fig. 12-1b para $g_r = 0,5$. La inspección de la curva g_{in} demuestra que, mediante la adecuada elección de l , g_r puede ser transformada en un valor cualquiera comprendido entre 0,5 y 2. Por vía de ilustración, sea el valor requerido $g_{in} = 0,674$. Entonces, según la curva, o la Ec. (10-28a), $l = 0,1\lambda^*$, o $\beta l = 36^\circ$ y $b_{in} = 0,475$. Por lo tanto, si una susceptancia de valor normalizado -0,475 se conecta en derivación sobre los terminales de

entrada, como en la Fig. 12-1c, la susceptancia total será cero y se satisfará así la transformación requerida. Desde un punto de vista teórico, la susceptancia adicional requerida a través de los terminales de entrada puede ser provista indiferentemente por una sección abierta

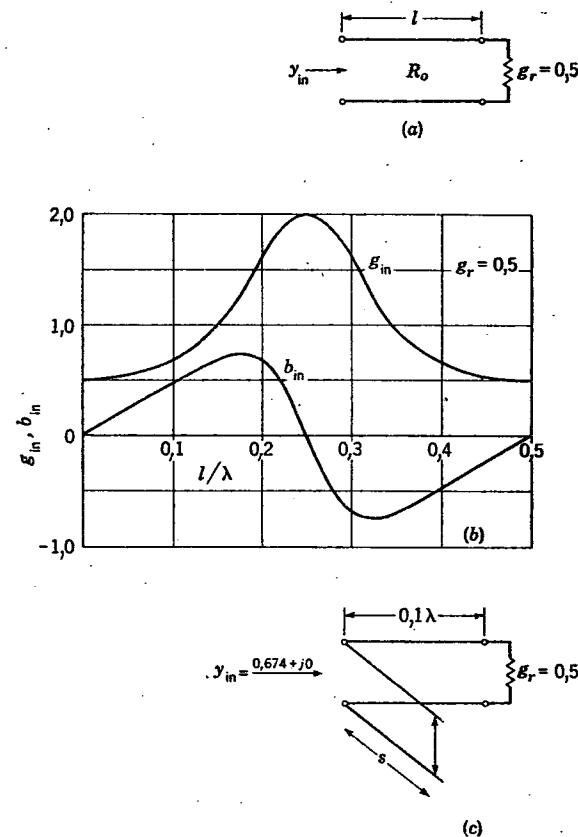


FIG. 12-1. El equivalente de línea de transmisión de la sección trasformadora de impedancias en L. (a) y_{in} puede cambiarse variando l . (b) Admitancia normalizada de entrada para y_{in} como función de l . (c) Sección de línea agregada en derivación para transformar en real la admittance de entrada.

o una sección en cortocircuito. Por consideraciones prácticas se evita por lo general el empleo de la primera y se utiliza casi invariablemente la sección en cortocircuito porque radia menos energía y porque su longitud efectiva puede ser variada por medio de una barra corrediza en cortocircuito. La longitud s de esta sección en cortocircuito puede hallarse por medio de la Ec. (10-10):

$$Z_{sc} = jR_o \operatorname{tg} \beta s$$

$$b_{sc} = -\operatorname{ctg} \beta s$$

* El estudiante observará que $g_{in} = 0,674$ también para $l = 0,4\lambda$. Se utiliza por lo general el valor más corto porque el coste y las pérdidas resultan menores.

Entonces, suponiendo que la sección de línea tiene la misma R_o que el segmento original de línea a la cual está conectada g_r .

$$\beta s = \frac{360s}{\lambda} = \text{arc ctg } 0,475 = 64,6^\circ$$

$$s = \frac{64,6}{360} \lambda = 0,1798\lambda$$

Si bien hemos considerado el caso en que la terminación es una resistencia pura, el método de adaptación mediante una sola sección de línea no está de modo alguno restringido a este caso; la idea básica puede ser extendida de modo de obtener la solución algebraica para l y s cuando la terminación es compleja.

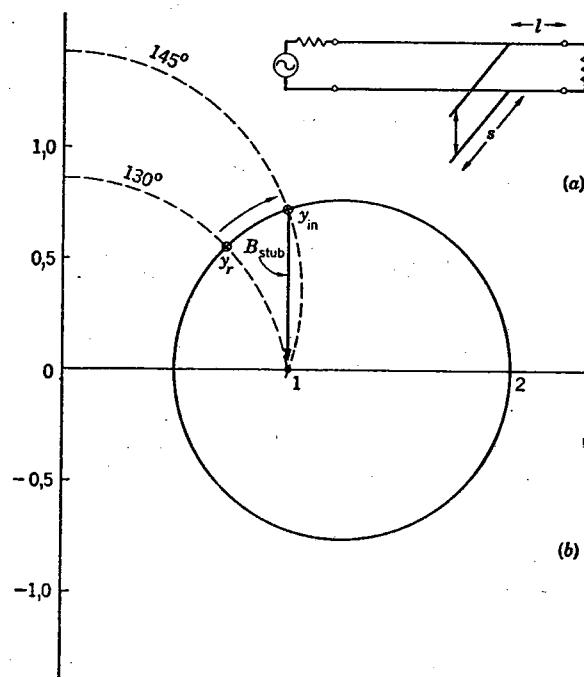


FIG. 12-2. Solución de un problema de adaptación mediante una sola sección de línea usando el ábaco bicircular.

Mediante una adecuada manipulación de la Ec. (10-4b), el estudiante puede demostrar que para una terminación cualquiera descrita por ρ ,

$$y_{in} = \frac{(1 - |\rho|^2) - j2|\rho| \sin(\varphi - 2\beta l)}{1 + 2|\rho| \cos(\varphi - 2\beta l) + |\rho|^2}$$

Esta ecuación contiene la información suficiente para el cálculo de l y b_{in} según el valor requerido de g_{in} ; $|\rho|$ y φ pueden determinarse

mediante mediciones de onda estacionaria y las Ecs. (10-17), (10-13) y (10-15).

Ofrecen métodos de solución más sencillos los ábachos bicircular y de Smith. Consideremos la situación ilustrada en la Fig. 12-2a. La sección de línea (admitancia característica G_o) a la izquierda de la sección de adaptación debe terminar en G_o para que no haya en ella onda reflejada. El problema es el de hallar l y s . La Fig. 12-2b muestra un ábaco bicircular en el cual se ha situado el valor complejo de Y_R normalizado. A medida que l aumenta a partir de cero, la admitancia de entrada (con exclusión de la sección adaptadora) varía sobre el lugar geométrico de S constante; por lo tanto, hay que recorrer esta circunferencia en sentido levógiro (hacia el generador) hasta llegar al punto en que satisface la condición $y_{in} = 1$, la que corresponde a la condición de que la carga de la porción izquierda de la línea pueda ser G_o . Según el diagrama, requiérese una longitud eléctrica $\beta l = 145^\circ - 130^\circ = 15^\circ$. Entonces, $l = 15^\circ/\beta = 15\lambda/360 = 0,0417\lambda$.

La componente susceptiva de y_{in} resulta ser, según lectura, de +0,7. Para que la susceptancia total sea cero, se necesita una sección de línea en cortocircuito de susceptancia igual a -0,7. Según la Fig. 10-10, la longitud de la sección debe ser $\beta s = 55^\circ$, $s = 55\lambda/360 = 0,1528\lambda$. El estudiante debe comparar la Fig. 12-12b con la Fig. 11-7 para ver la estrecha similitud que hay entre las redes de una sola sección adaptadora (un solo "stub") y la red L .

Los mismos resultados pueden obtenerse, naturalmente, con el ábaco de Smith, pero la analogía con la Fig. 11-7 es menos evidente. Por otra parte, no es necesario conocer el valor verdadero de y_r , siempre que en cambio se conozca la relación de onda estacionaria y la posición de un máximo (o un mínimo) de tensión.

Ejemplo. Una línea de alambres paralelos está terminada en una impedancia desconocida. Las mediciones de onda estacionaria proporcionan los siguientes datos: $S = 3$; el primer mínimo de tensión a 54 cm de la terminación, y el primer máximo de tensión a 204 cm de la terminación. Diseñar una sección adaptadora de un solo "stub" de modo que la línea sea "plana" (es decir, $S = 1$) a la izquierda del "stub".

Solución. Se usará la notación de la Fig. 12-2a, denotando con l' la distancia entre el "stub" y el primer mínimo de tensión.

Sobre el ábaco de Smith (Fig. 12-3) dibujamos una circunferencia para $S = 3$. Dado que con el mínimo de tensión coincide un máximo de admittance, situamos E_{min} sobre el ábaco en punto 3 del eje real. El procedimiento básico es el de girar sobre la circunferencia $S = 3$ hasta que la parte real de $y_{in} = 1$. Consideremos primero la rotación *hacia la carga* (sentido dextrógiro), hasta el punto a del ábaco (escala interior)

$$l' = (0,333 - 0,25)\lambda = 0,083\lambda$$

Dado que el máximo de tensión está a una distancia de un cuarto de onda del mínimo de tensión adyacente,

$$\frac{\lambda}{4} = 204 - 54 = 150 \text{ cm}$$

$$\lambda = 600 \text{ cm}$$

$$l' = 0,083 \times 600 = 49,8 \text{ cm}$$

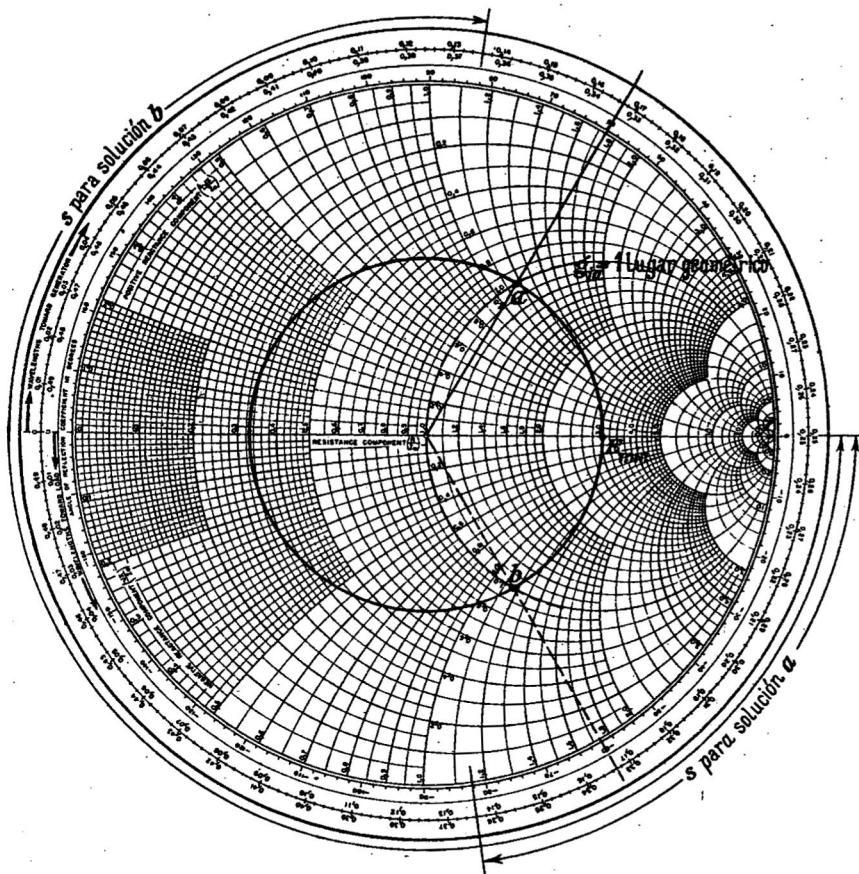


FIG. 12-3. Solución del problema de adaptación con un solo "stub" mediante el ábaco de Smith.

Obsérvese que esta solución es posible porque la carga está a 54 cm del primer mínimo de tensión.

En el punto *a* la susceptancia normalizada es $+j1,16$; por lo tanto, la sección adaptadora una susceptancia de $-j1,16$. Usando una sección en cortocircuito, su longitud, leída en el ábaco, debe ser

$$\begin{aligned}s &= (0,364 - 0,25)\lambda = 0,114\lambda \\&= 0,114 \times 600 = 68,4 \text{ cm}\end{aligned}$$

Por lo tanto, una solución consiste en colocar una sección adaptadora en cortocircuito de 68,4 cm de largo a 49,8 cm hacia la carga del primer mínimo de tensión, es decir, a

$$l = 54 - 49,8 = 4,2 \text{ cm}$$

de la carga.

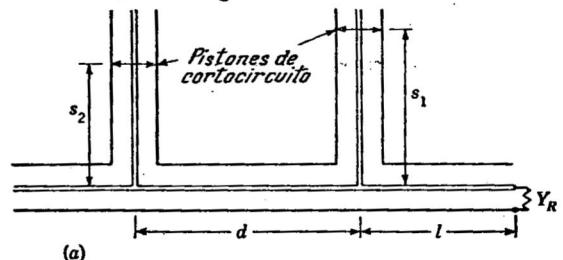
Hay otra solución posible colocando el "stub" del lado del generador con respecto al mínimo de tensión. Según el ábaco (punto *b* en Fig. 12-3).

$$\begin{aligned}l' &= (0,333 - 0,25)\lambda = 0,083\lambda = 49,8 \text{ cm} \\b_{in} &= -1,16\end{aligned}$$

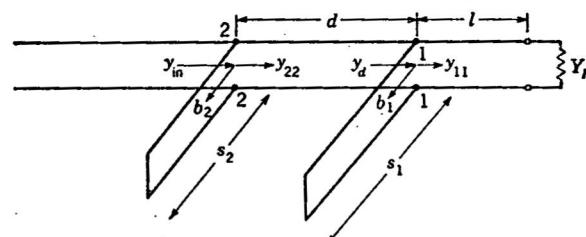
Se necesita por lo tanto una susceptancia de $+1,16$. *s*, la longitud del "stub" en cortocircuito, puede obtenerse del ábaco:

$$\begin{aligned}s &= (0,136 + 0,25)\lambda = 0,386 \times 600 = 231,6 \text{ cm} \\y &l = 54 + l' = 54 + 49,8 = 103,8 \text{ cm}\end{aligned}$$

De las dos soluciones, debe preferirse la primera por las dos razones siguientes: (1) Con ella una porción mayor de la línea resulta plana; (2) utiliza un "stub" de menor longitud.



(a)



(b)

FIG. 12-4. El sistema de adaptación de impedancias con doble "stub". (a) Línea coaxil.
(b) Línea paralela.

En la práctica se utilizan los métodos que se acaban de discutir para determinar aproximadamente la longitud y la posición de la sección de línea adaptadora. Los ajustes finales se hacen variando la longitud del "stub" y desplazando su posición sobre la línea. Como regla general el ajuste es satisfactorio cuando la relación de onda estacionaria es de 1,1 o menos en la porción de la línea del lado del generador, aunque los valores en realidad aceptables dependen de la aplicación en particular de que se trate.

12-2. Adaptación con doble "stub". Aunque el sistema de un solo "stub" es enteramente satisfactorio para las líneas de alambres abiertos, no es conveniente en el caso de las líneas coaxiales a causa de la dificultad mecánica que se encuentra para variar la posición durante los ajustes finales. Para salvar esta dificultad se recurre al empleo de dos "stubs" de longitud variable y posición fija. Dado que hay

en este caso sólo dos variables, puede obtenerse la adaptación de impedancias pero sin control alguno del desplazamiento de fase. La estructura básica está ilustrada en la Fig. 12-4 y se explicará a continuación el método de solución con el ábaco de Smith, el que en este caso es mucho más práctico que el ábaco bicircular.

El método básico de ajuste de la sección de doble "stubs" consiste en variar la longitud del "stub" 1 de modo que $y_{22} = 1 + jb_{22}$ para ajustar luego la longitud del "stub" 2 de modo de cancelar b_{22} . Satisfechas estas condiciones, la línea a la izquierda del "stub" 2 estará terminada en G_o y será por lo tanto "plana". A causa de la dificultad del ajuste experimental de las longitudes de los dos "stubs", es deseable calcular primero sus longitudes aproximadas.

Consideremos el criterio básico de estos ajustes. En la Fig. 12-4b, $y_{in} = y_{22} + jb_2$ tiene que tener el valor $1 + j0$ para que la línea sea plana. Dado que el "stub" 2 sólo puede aportar susceptancia ($g_2 = 0$ suponiendo nulas las pérdidas), y_{22} debe estar en algún punto del lugar geométrico $g_2 = 1$ del ábaco de Smith. y_d debe estar hacia la carga, a una distancia de d longitudes de onda de y_{22} , siendo d un valor arbitrariamente elegido, pero fijo. Se verá en seguida que y_d debe hallarse, por lo tanto, sobre un lugar geométrico determinado del ábaco de Smith, determinado solamente por el valor de d . Este lugar geométrico será denotado L . Entonces, puesto que $y_d = y_{11} + jb_1$, b_1 debe ajustarse de manera de transformar y_{11} llevándolo a este lugar geométrico particular.

Se verá ahora que el lugar geométrico $g = 1$ es transformado por una sección de línea de longitud d en un lugar geométrico circular, de igual radio y cuyo centro está girado d longitudes de onda hacia la carga (en sentido levógiro) sobre el ábaco de Smith. A modo de ejemplo, sea $d = 0,2\lambda$. Entonces, en la Fig. 12-5, el punto arbitrario a elegido sobre un lugar geométrico $g = 1$ (cuyo centro es c) es girado alrededor del origen, sobre un círculo de S constante, en una cantidad 0,2 hacia la carga, hasta el punto a' . Otro punto arbitrario b del lugar geométrico $g = 1$ pasa, del mismo modo, al punto b' . El mismo procedimiento puede aplicarse a cualquier otro punto, tal como el d y el e . Luego, si se dibuja el lugar geométrico L de modo que pase por todos los puntos denotados con letra tildada, obtiénes una circunferencia cuyo centro c' está a $0,2\lambda$ en sentido levógiro de c . Puede hacerse una transformación similar para cualquier otro valor de d ; en todos los casos, $g = 1$ tiene como lugar geométrico un círculo del mismo radio cuyo centro está a d longitudes de onda, en sentido levógiro, de c^* .

* Para el estudiante familiarizado con la teoría de las variables complejas, pueden ser de interés las siguientes observaciones: Para la sección de línea de longitud d , escribamos la Ec. (10-28a) en términos de la notación de la Fig. 12-4b:

$$y_{22} = \frac{y_d + j \operatorname{tg} \beta d}{1 + j y_d \operatorname{tg} \beta d}$$

Despejando y_d :

$$y_d = \frac{y_{22} + j \operatorname{tg} (-\beta d)}{1 + j y_{22} \operatorname{tg} (-\beta d)}$$

Esta ecuación es una transformación lineal que cambia una circunferencia dada de y_{22} en otra circunferencia, a $y_d - \beta d$ grados (hacia la carga) de la primera y de igual radio que ésta.

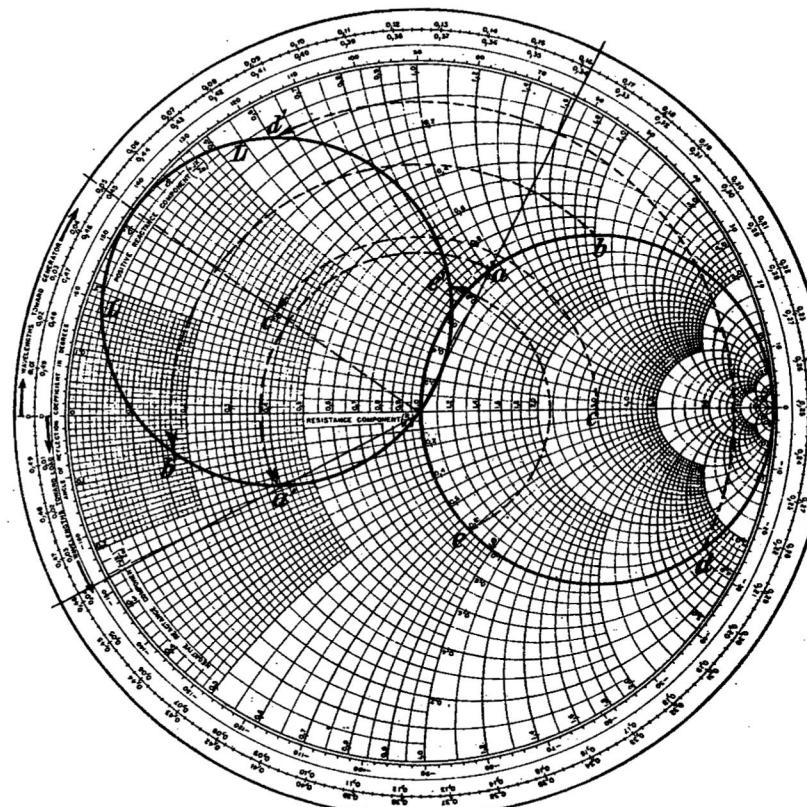


FIG. 12-5. Demostración de que el lugar geométrico $g = 1$ es transformado por una sección de línea de longitud d en otra circunferencia que está a d longitudes de onda del lugar geométrico $g = 1$. Cada uno de los puntos del primero es rotado d longitudes de onda sobre una circunferencia de S constante hasta su punto correspondiente, distinguido con una tilde.

Con el hecho establecido de que la adaptación buscada en los puntos 2-2 requiere que y_d esté sobre el lugar geométrico especificado en el último párrafo, el método de cálculo de las longitudes de las secciones adaptadoras se ilustra mejor por medio de un ejemplo.

Ejercicio. Calcular las longitudes de "stub" requeridas en un sistema adaptador de dos "stubs" en el que la admittance normalizada de la carga es $y_r = 1,23 - j0,51$. En la notación de la Fig. 12-4, $l = 0,1\lambda$, $d = 0,4\lambda$.

Solución. En la Fig. 12-6 dibujamos el lugar geométrico circular girado $0,4\lambda$ respecto de la circunferencia $g = 1$ hacia la carga. Situamos y_r . Giramos en sentido levógiro $l = 0,1\lambda$ para hallar y_{in} . Leemos $y_{in} = 0,7 - j0,3$. Pero, para que haya adaptación, y_d debe hallarse sobre la circunferencia $g = 0,7$. Por lo tanto, el "stub" 1 debe agregar una susceptancia correspondiente a $b_1 = + (0,3 - 0,14) = +0,16$. Dado que el "stub" 1 está en corto-

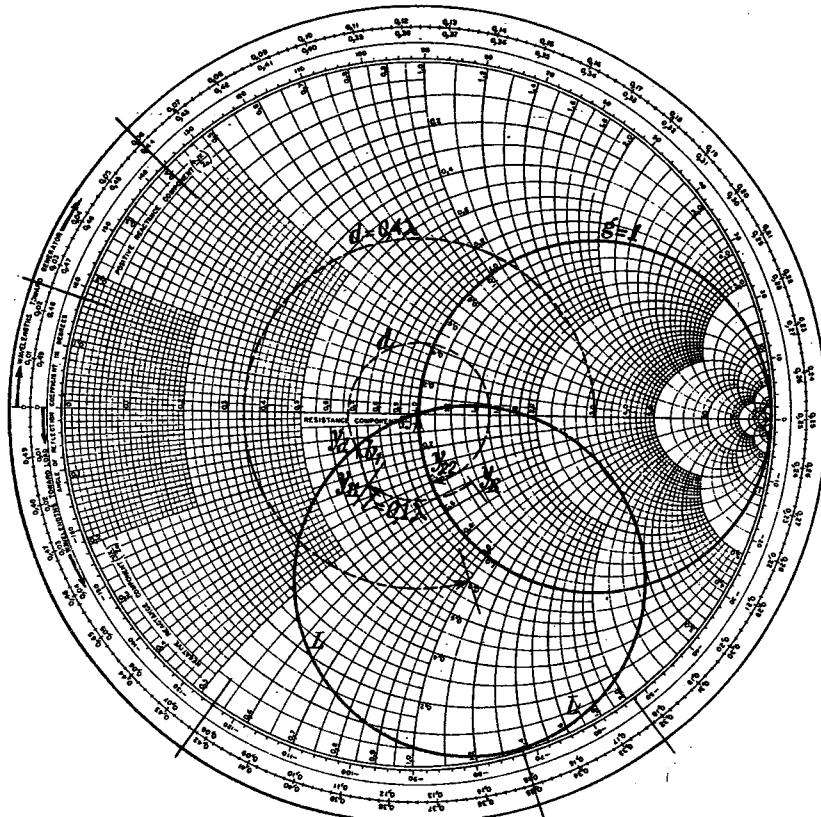


FIG. 12-6. Solución de un problema de adaptación con doble "stub".

circuito, entramos en el ábaco independientemente por $y_r = \infty$ y giramos en sentido levógiro alrededor de la periferia del ábaco hasta $b_1 = +0.16$, y leemos

$$s_1 = (0,50 - 0,25 + 0,025)\lambda = 0,275\lambda$$

El trozo de línea de longitud d transforma y_d en $y_{d2} = 1 - j0,4$; por lo tanto, el "stub" 2 debe agregar una susceptancia de $+0,4$. Para hallar s_2 , entramos en el ábaco por $y_r = \infty$ (el "stub" está en cortocircuito) y giramos hasta $b = +0,4$, y leemos

$$s_2 = (0,50 - 0,25 + 0,06)\lambda = 0,31\lambda$$

De esta manera, y_{d2} es transformada en $y_{in} = 1 + j0$ y se cumple la condición de adaptación.

El estudiante debe saber que para valores dados de d y l no siempre puede obtenerse la adaptación para determinados valores de y_r . En tales casos hay que cambiar l o d . En general, d no debe ser un

número entero de cuartos de onda. La prueba de esta afirmación se deja como ejercicio para el estudiante.

12-3. El transformador de un cuarto de onda. Los resultados del capítulo precedente demuestran que puede usarse una sección simétrica no disipativa T o π para adaptar resistencias imágenes diferentes siempre que el desplazamiento de fase de la red sea de $\pm 90^\circ$. Presentase una situación similar cuando la red de constantes concentradas es reemplazada por una línea sin pérdidas de longitud $\lambda/4$. Esto puede demostrarse por medio de la Ec. (10-4a):

$$Z_{in} = R_o \frac{Z_R + jR_o \tan \beta l}{R_o + jZ_R \tan \beta l}$$

Dividiendo numerador y denominador por $\tan \beta l$, y poniendo $\beta l = 90^\circ$, obtiénes

$$Z_{in} = \frac{R_o^2}{Z_R} \quad l = \frac{\lambda}{4} \quad (12-1)$$

Entonces, si Z_R es una resistencia pura R_R , Z_{in} es también una resistencia pura, R_{in} ; la sección se llama *transformador de cuarto de onda*. La Ec. (12-1) sirve para el diseño de un sistema transformador de impedancias.

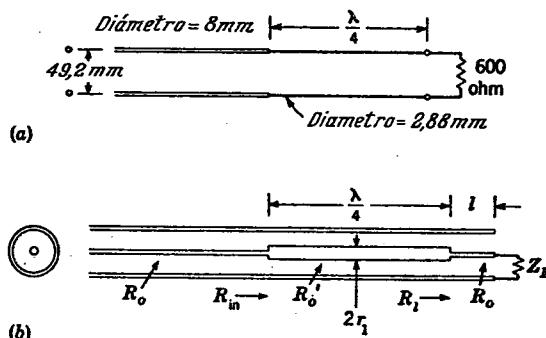


FIG. 12-7. Trasformadores de cuarto de onda. (a) Línea paralela. (b) Línea coaxial.

Ejercicio. Un resistor de 600 ohm debe ser adaptado a una línea de alambres paralelos hecha con alambres de cobre de 8 mm de diámetro con una distancia entre centros de 49,2 mm. Diseñar un transformador de cuarto de onda para realizar la transformación necesaria.

Solución. Segundo el Prob. 8-2 la impedancia característica de la línea de transmisión principal es

$$\begin{aligned} R_o &= 120 \operatorname{arccosh} \frac{s}{2r} = 120 \operatorname{arccosh} \frac{2}{0,3249} \\ &= 120 \operatorname{arccosh} 6,15 = 120 \times 2,503 = 300 \text{ ohm} \end{aligned}$$

La sección de un cuarto de onda debe por lo tanto tener una impedancia característica R'_o dada por

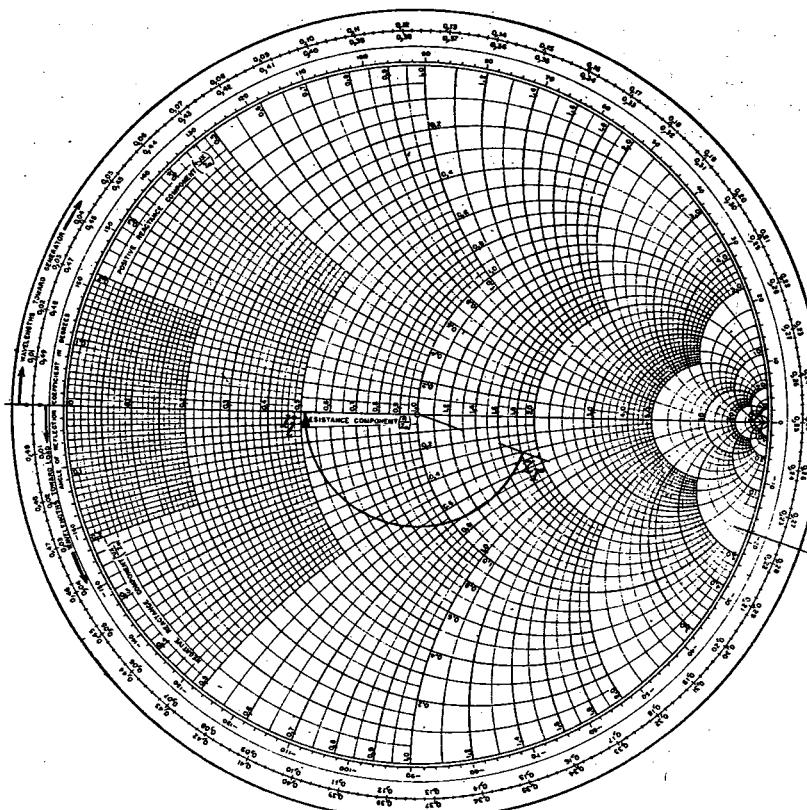


FIG. 12-8. Solución del problema del transformador de cuarto de onda. Se utiliza el ábaco de Smith para hallar la posición del transformador de cuarto de onda con respecto a Z_R .

$$R'_o = \sqrt{300 \times 600} = 424 \text{ ohm}$$

En la práctica, conviene que la distancia entre alambres de la sección adaptadora sea igual a la de la línea principal. Luego

$$R'_o = 120 \operatorname{arccosh} \frac{49,2}{2r'}$$

$$2r' = \frac{49,2}{\cosh(R'_o/120)} = \frac{49,2}{\cosh(424/120)} = \frac{49,2}{\cosh 3,53} = \frac{49,2}{17,08} = 2,88 \text{ mm.}$$

La configuración final de la sección adaptadora se ve en la Fig. 12-7a.

El uso del transformador de cuarto de onda no está restringido a las aplicaciones en que Z_R es una resistencia pura. Por ejemplo, en la Fig. 12-7b, la sección de cuarto de onda puede ser desplazada una distancia l respecto de la carga de modo que Z_R sea transformada en una resistencia pura R_1 . El diseño reduciría entonces al del último ejercicio. Consideremos el ejemplo siguiente.

Ejemplo. Una línea coaxil de 70 ohm cuyo conductor externo tiene un radio interior de 25 mm debe ser adaptado a una carga de $126 - j28$ ohm. Hallar la posición y el diámetro del conductor interior del transformador de cuarto de onda necesario.

Solución. Usaremos la notación de la Fig. 12-7b. Normalizando Z_R respecto de R_o de la línea principal,

$$z_r = \frac{126 - j28}{70} = 1,8 - j0,4$$

Situamos z_r sobre el ábaco de Smith (Fig. 12-8) y giramos hacia el generador hasta que la impedancia de entrada se torne real. Leemos $r_l = 0,51$. La distancia girada es

$$l = (0,500 - 0,276)\lambda = 0,224\lambda$$

Multiplicamos r_l por R_o de la línea principal para pasar a ohm:

$$R_l = r_l R_o = 0,51 \times 70 = 35,7 \text{ ohm}$$

El transformador de cuarto de onda debe por lo tanto adaptar 37,5 ohm a 70 ohm; por lo tanto, según la Ec. (12-1), debe tener una impedancia característica

$$R'_o = \sqrt{70 \times 35,7} = 50 \text{ ohm}$$

Por el Prob. 8-1,

$$R'_o = 138 \log \frac{2r_2}{2r_1}$$

donde $2r_2$ = diámetro interior del conductor externo

$2r_1$ = diámetro exterior del conductor interno

Entonces

$$\log \frac{2r_2}{2r_1} = \frac{R'_o}{138} = \frac{50}{138} = 0,362$$

$$2r_2 = \frac{2r_1}{0,362} = \frac{50}{0,362} = 138 \text{ mm}$$

El estudiante debe saber que las limitaciones prácticas de las dimensiones de las líneas restringen los valores de R_o máximos que pueden obtenerse a unos 800 ohm en el caso de la línea de alambres paralelos y a unos 150 ohm en el caso de la línea coaxil. En virtud de la Ec. (12-1) estos valores imponen una limitación a los valores de R_{in} y R_R que pueden ser adaptados con una sección de línea de cuarto de onda.

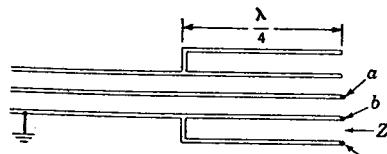


FIG. 12-9. Sección transversal de una simple forma de "balún" o "bazooka", utilizada para convertir una salida de cable coaxil a masa en una salida equilibrada respecto de tierra. La carga equilibrada se conecta entre a y b .

adaptar una línea coaxil (o salida con un lado a masa) a una línea equilibrada (o carga equilibrada). La Fig. 12-9 ilustra una

forma posible del balún, la que consiste en un manguito de un cuarto de onda montado concéntricamente alrededor de un cable coaxial y puesto en cortocircuito. La superficie exterior de la línea coaxial está a masa. Dado que el manguito tiene una longitud de $\lambda/4$ y está en cortocircuito, Z_{in} , la impedancia de entrada entre los puntos *b* y *c* del conductor del medio y el conductor externo es teóricamente infinita; por lo tanto, *b* está aislado de masa y los puntos *a* y *b* están equilibrados respecto de masa y pueden ser conectados a una línea o carga equilibrada. La relación de transformación de impedancias del balún ilustrado por la Fig. 12-9 es igual a la unidad. Otras formas de balún proveen una relación de transformación distinta de la unidad¹.

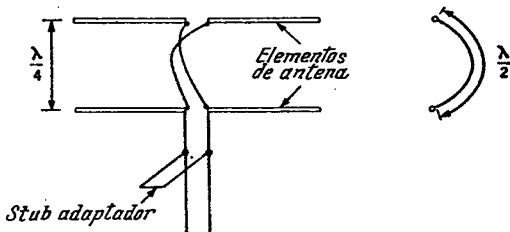


FIG. 12-10. Uso de las líneas de media onda traspuestas para alimentar dos elementos de antena en fase.

12-5. El transformador de media onda. Una sección de línea de $\lambda/2$ de longitud posee útiles propiedades trasformadoras de impedancia. En este caso, la longitud eléctrica es $\beta l = 180^\circ$, y, por la Ec. (10-4a), la impedancia de entrada es

$$Z_{in} = Z_R \quad l = \frac{\lambda}{2} \quad (12-2)$$

Luego, el transformador de media onda compártase como un transformador de 1:1 en los que se refiere a las impedancias. Consideremos su efecto sobre la corriente y la tensión. Por las Ecs. (10-2) y (10-3),

$$E_x = E_R \cos \beta y + j I_R R_o \operatorname{sen} \beta y$$

$$I_x = I_R \cos \beta y + j \frac{E_R}{R_o} \operatorname{sen} \beta y$$

Poniendo $\beta y = \beta l = 180^\circ$, $E_x = E_s$, $I_x = I_s$,

$$E_s = -E_R \quad I_s = -I_R \quad l = \frac{\lambda}{2} \quad (12-3)$$

Luego, el transformador de media onda se comporta también como de relación 1 : 1 en la que respecta a las magnitudes de la corriente y la tensión, pero con un desplazamiento de fase de 180° . Si no se desea este desplazamiento de fase, se lo puede eliminar mediante el simple

¹ Ver, por ejemplo, Staff, MIT Radar School, "Principles of Radar", Cap. VII, McGraw-Hill Book Company, Inc., Nueva York, 1946.

expediente de *trasponer* los dos lados de la línea. (Esto corresponde a invertir las conexiones de salida de un transformador de constantes concentradas.) Por esta razón la sección de media onda sirve admirablemente para el propósito de interconectar dos puntos de un sistema sin modificación de la corriente, la tensión o la impedancia.

La Fig. 12-10 ilustra un ejemplo de esta aplicación. Los dos elementos de antena alimentados por el centro están a una distancia de un cuarto de onda en el plano vertical. Se los quiere alimentar *en fase* por medio de una línea de transmisión en común. Como se ve en el diagrama, los dos elementos se interconectan por medio de una sección de media onda, la que se curva con el objeto de que quepa en el espacio disponible entre los elementos. La línea está traspuesta, a fin de cumplir la condición de fase.

12-6. Adaptación por medio de una línea derivada. Un caso de interés intermedio es aquél en que hay que entregar potencia a una línea de transmisión. El principio está ilustrado en la Fig. 12-11. Consi-

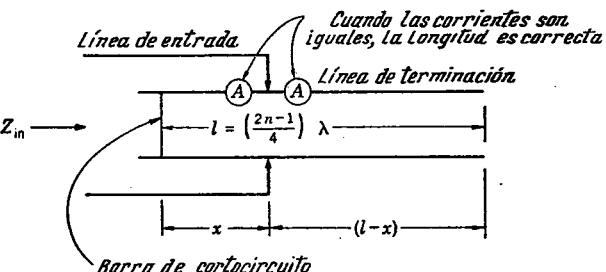


FIG. 12-11. Adaptación de impedancias por medio de derivaciones para excitar una línea de baja disipación de longitud igual a un número impar de cuarto de ondas.

deremos una línea de transmisión que tiene una longitud equivalente a un número impar de cuartos de onda, en cortocircuito por un extremo y abierta por el otro. Se obtienen los dos terminales de entrada tomando una derivación sobre cada lado de la línea, a iguales distancias de los extremos. Luego, en este par de terminales hay dos ramas en paralelo, una representada por la sección de línea en cortocircuito de la izquierda, y la otra, por la sección de línea abierta de la derecha. Las impedancias de estas dos ramas están dadas por

$$Z_{sc} = Z_o \operatorname{tgh} \gamma l$$

$$Z_{oc} = Z_o \operatorname{ctgh} \gamma l$$

En el Cap. X se vio que cuando la atenuación es pequeña la componente reactiva de la impedancia de una línea en circuito abierto podía escribirse

$$X_{oc} = -R_o \operatorname{ctg} \beta l = -R_o \operatorname{ctg} \frac{2\pi l}{\lambda}$$

De modo similar, puede demostrarse que la reactancia de la línea en cortocircuito puede escribirse

$$X_{sc} = +R_o \operatorname{tg} \beta l = +R_o \operatorname{tg} \frac{2\pi l}{\lambda}$$

Aplicadas a la Fig. 12-11, estas ecuaciones adoptan las formas

$$X_{sc} = -R_o \operatorname{ctg} \frac{2\pi(l-x)}{\lambda}$$

$$X_{sc} = +R_o \operatorname{tg} \frac{2\pi x}{\lambda}$$

Si l se hace igual a un número impar de cuartos de onda, entonces $2\pi l/\lambda$ será un múltiplo impar de $\pi/2$, y

$$\operatorname{ctg} \frac{2\pi(l-x)}{\lambda} = \operatorname{ctg} \left[\frac{(2n-1)\pi}{2} - \frac{2\pi x}{\lambda} \right] = \operatorname{tg} \frac{2\pi x}{\lambda}$$

Por lo tanto, en este caso, la reactancia del extremo en cortocircuito será igual y opuesta a la del extremo en circuito abierto. Esta condición es independiente del punto en que se toma la derivación. La longitud correcta de la línea puede ser determinada experimentalmente intercalando en la línea un amperímetro a cada lado de uno de los puntos de derivación, aplicando tensión a los terminales de entrada, y ajustando la longitud de la línea hasta que los dos amperímetros indiquen la misma corriente. El ajuste más conveniente de la longitud es por lo general el que se hace moviendo la barra de cortocircuito.

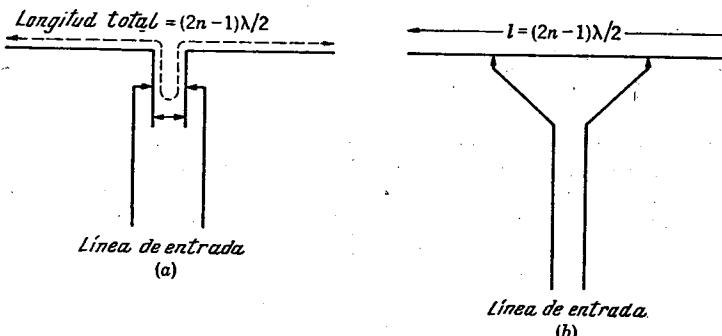


FIG. 12-12. Adaptación de una antena por medio de derivaciones.

Dado que las reactancias de las dos ramas en ambos lados de las derivaciones son iguales, queda establecida la condición para resonancia en paralelo y se presentará una carga resistiva a las derivaciones. Si la línea está sujeta a disipación, puede ajustarse la magnitud de esta carga variando la posición de las derivaciones, pues de esta manera se varía la reactancia de cada rama pero manteniendo las dos siempre iguales y opuestas, como cuando se mueve una derivación sobre la inductancia de un circuito antirresonante (Cap. IV) para variar la magnitud de la resistencia efectiva presentada a la carga.

El principio de la Fig. 12-11 puede ser usado cuando la sección abierta de la línea se extiende de modo de formar una antena, como se indica en la Fig. 12-12a para una antena de longitud cualquiera, y en la Fig. 12-12b para una antena de longitud equivalente a un número impar de medias ondas (de extremo a extremo). La disipación débese entonces principalmente a la radiación de la antena. La longitud física debe ser algo menor que la que se calcularía suponiendo que la velocidad de propagación en la antena es igual a la de la luz, pero se la puede ajustar experimentalmente de la manera descrita. En este caso, las derivaciones se ajustan de manera de terminar la línea de alimentación en su impedancia característica. Este ajuste puede hacerse midiendo la corriente a lo largo de la línea con un amperímetro (que puede ser derivado sobre una porción constante de la línea si es inconveniente cortar ésta) y determinando la posición de las derivaciones que anula la onda estacionaria. Si la corriente aumenta en la línea de alimentación a medida que se avanza desde las derivaciones hacia el generador, la impedancia de terminación de la línea de alimentación es mayor que su impedancia característica y las derivaciones deben acercarse al centro.

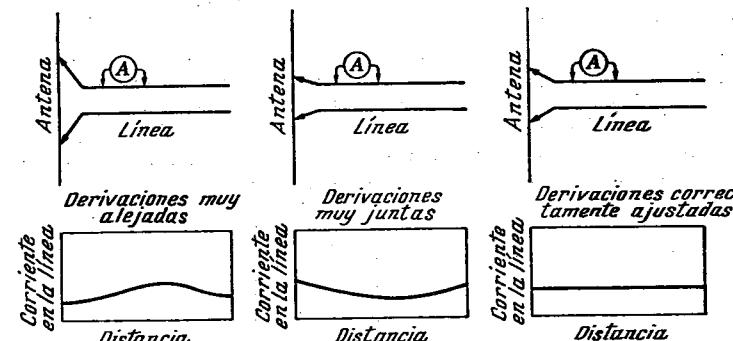


FIG. 12-13. Ajuste de las derivaciones para obtener la correcta terminación de la línea de alimentación de una antena.

Al revés, si la corriente de la línea de alimentación disminuye al alejarse de las derivaciones, la impedancia de terminación es demasiado baja y las derivaciones deben alejarse del centro. Esto está ilustrado en la Fig. 12-13.

PROBLEMAS

12-1. (a) Siguiendo el método de la Fig. 12-1, dibujar las curvas de g_{in} y b_{in} para una terminación general y_r . Usar $\varphi = 2\beta l$ como abscisa. (b) Derivar ecuaciones para los valores de l y s en términos de ρ e y_{max} , suponiendo que la impedancia de entrada tiene que ser R_o .

12-2. En la Fig. 12-2a, $Z_R = 2R_o$. Calcular l y s de modo que el tiro de línea plana más largo posible quede a la derecha del "stub". Usar también un "stub" de longitud mínima.

12-3. Repetir el problema 12-2 para $y_r = 4 + j0,5$.

12-4. En la Fig. 12-4a, $y = 121 + j0$, $l = 0,116\lambda$ y $d = 0,33\lambda$. El "stub" 1 debe estar en circuito abierto y ser lo más corto posible. El "stub" 2 debe estar en cortocircuito.

a. Hallar s_1 y s_2 para que la línea principal sea plana.

b. ¿Cuál es la relación de onda estacionaria entre el "stub" 1 y la carga?

12-5. En la Fig. 12-4a, si $d = 0,2\lambda$, $l = 0,1\lambda$, e $y_r = g_r + jb_r$, ¿qué gama de valores de g_r no pueden ser adaptados con el sistema de doble "stub"?

12-6. En la Fig. 12-4b, $R_o = 200$ ohm. La línea a la izquierda del "stub" 2 es plana cuando $\beta l = 38^\circ$, $\beta d = 120^\circ$, $\beta s_1 = 81,5^\circ$, y $\beta s_2 = 30,5^\circ$. ¿Cuánto vale Z_R ?

12-7. Las mediciones de onda estacionaria en una línea indican que el primer máximo de tensión se halla a 30° de la carga, con $S = 4$. Diseñar un sistema de adaptación de doble "stub". Si es posible, usar $l = 0,1\lambda$, si no, usar $l = 0,2\lambda$. Adoptar $d = 0,4\lambda$.

12-8. Un cable coaxil de 70 ohm está terminado en una carga desconocida. $S = 1,7$, y el primer mínimo de tensión está a $0,174\lambda$ del extremo cargado. El conductor externo de la línea tiene un diámetro interior de 25 mm. Hallar la posición y el diámetro del conductor interno de un transformador adaptador de cuarto de onda.

12-9. En la Fig. 12-10, cada elemento de antena tiene una impedancia de punto de excitación de $72 + j0$ ohm. La línea de alimentación tiene una impedancia característica de 100 ohm. Hallar la longitud y la posición del único "stub" ilustrado.

12-10. Discutir la posibilidad de tomar una derivación en el "stub" resonante de la Fig. 12-14 de modo que $R_{in} = R_o$ del "stub".

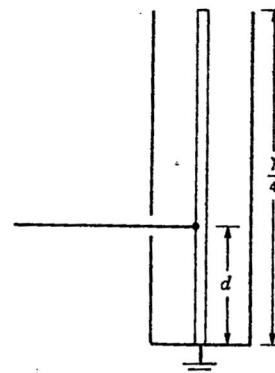


FIG. 12-14. "Stub" coaxil resonante con derivación para el Prob. 12-10.

12-11. Se debe realizar el circuito tanque de un oscilador por medio de una línea coaxil de un cuarto de onda de largo. Los elementos coaxiles son tubos de cobre, para los cuales $r_1 = 12,5$ mm, $r_2 = 25$ mm. La frecuencia de trabajo será de 10^9 c/s.

a. Determinar la posición de la derivación para que la válvula del oscilador trabaje con una carga de 30 kilohm. Usar $\sigma = 5,75 \times 10^7$ siemens/m y suponer que la velocidad relativa es la unidad.

b. ¿Cuál es la componente reactiva de la impedancia de entrada en la derivación?

12-12. Se usa una sección de cuarto de onda para adaptar una línea resonante (es decir, $\rho \neq 1$) a una carga de 12 kilohm en un sistema de antena para radar. La línea resonante debe trabajar en una carga de 5 kilohm, con una longitud de onda de 1 m. Determinar la posición de las derivaciones como en la Fig. 12-11 si la sección de cuarto de onda tiene una resistencia de malla por unidad de longitud de 1,38 ohm/m a la frecuencia de trabajo.

CAPÍTULO XIII

TRASFORMADORES DE IMPEDANCIA
DE BANDA ANCHA

Las diversas redes trasformadoras de impedancias discutidas en los dos últimos capítulos son dispositivos de banda inherentemente anchas. Basados en el comportamiento de elementos reactivos simples, son muy selectivos respecto de la frecuencia y proveen la transformación de impedancias requerida a una sola frecuencia. (La Fig. 11-20 ilustra una excepción.) Las curvas de las Figs. 11-9 y 11-12 indican cómo varía la respuesta de tales circuitos con la frecuencia.

Muchos circuitos de comunicación, no obstante, requieren una respuesta esencialmente uniforme sobre bandas relativamente anchas; por ejemplo, un trasmisor típico de televisión debe trabajar con una carga esencialmente constante dentro de una banda de 4,5 Mc/s de ancho. Este capítulo se ocupa de los sistemas de banda ancha.

Encuéntrense en la práctica dos tipos inherentemente distintos de sistemas de banda ancha: (1) Audio y videofrecuencias, en las que la banda de frecuencia empieza en cero o cerca de cero. (2) Radiofrecuencia, en los que la banda se extiende a ambos lados de una frecuencia "central" o "portadora", por encima de los límites de la gama de audio. Como consecuencia, los problemas propios de estos sistemas serán considerados como distintos.

SISTEMAS DE AUDIO

13-1. Trasformador de audiofrecuencia. El dispositivo trasformador de impedancias básico para audiofrecuencias es el trasformador de audio. El trasformador de audio utiliza corrientemente un núcleo de material ferromagnético, tal como el hierro-silicio o el permalloy, sobre el cual dispónense los arrollamientos primario y secundario; este núcleo sirve de camino para la mayor parte del flujo magnético desarrollado por los dos arrollamientos. El coeficiente de acoplamiento es por lo general poco menor que la unidad.

Cuando dos bobinas están arrolladas sobre un núcleo ferromagnético común, las reluctancias de los caminos para los flujos magnéticos que crean son prácticamente idénticas y la relación de las inductancias es proporcional a la relación de los cuadrados del número de vueltas de las dos bobinas, esto es,

$$\frac{L_p}{L_s} = \frac{N_1^2}{N_2^2} \quad (13-1)$$

Un flujo dado inducirá una tensión en cada bobina que será proporcional al número de vueltas. Si este flujo fuera producido por una corriente que circula por la bobina 1, la relación L_p/M sería igual a la relación de la tensión inducida en la bobina 1 a la inducida en la bobina 2 por la corriente que circula por la bobina 1. Si todo el flujo producido por una de las bobinas concatena todas las espiras de la otra bobina, la inductancia mutua estaría relacionada con la autoinductancia por las relaciones

$$\frac{L_p}{M} = \frac{N_1}{N_2} \quad \frac{L_s}{M} = \frac{N_2}{N_1}$$

Dado que el coeficiente de acoplamiento k representa la proporción del flujo creado por una de las bobinas que efectivamente concatena la otra, la verdadera relación es

$$M = k \frac{N_2}{N_1} L_p = k \frac{N_1}{N_2} L_s \quad (13-2)$$

Por la Ec. (13-2) es evidente que

$$M = k \sqrt{L_p L_s} \quad (13-3)$$

La Ec. (13-3) es también válida para cualquier disposición de inductores, mientras que las Ecs. (13-1) y (13-2) son aplicables solamente cuando son iguales las reluctancias ofrecidas a los flujos de las dos bobinas, y no son por lo tanto válidas para el trasformador sintonizado de radiofrecuencia.

El estudio del trasformador de audio se simplifica mucho por medio de los circuitos equivalentes. Se considerarán dos formas básicas del circuito equivalente. Las ecuaciones de malla para el circuito de la Fig. 13-1a son

$$\begin{aligned} Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 &= E_g & Z_{11} &= R_g + R_{L_p} + j\omega L_p \\ Z_{12}I_1 + Z_{22}I_2 &= 0 & Z_{22} &= Z_R + R_{L_s} + j\omega L_s \\ Z_{12} &= -j\omega M \end{aligned} \quad (13-4)$$

Estas ecuaciones pueden ser vueltas a escribir de la siguiente manera, sin afectar las corrientes:

$$\begin{aligned} [(Z_{11} - Z_{12}) + Z_{12}]I_1 + Z_{12}I_2 &= E_g \\ Z_{12}I_1 + [(Z_{22} - Z_{12}) + Z_{12}]I_2 &= 0 \end{aligned} \quad (13-5)$$

Las Ecs. (13-5) dan el circuito T equivalente del trasformador, Fig. 13-1b.

Ahora bien, si el valor de la impedancia mutua se multiplica por un factor cualquiera a y la impedancia secundaria Z_{22} se multiplica por a^2 , la corriente primaria permanece inalterada, mientras que la corriente secundaria queda modificada por el factor $1/a$.

Esto puede demostrarse introduciendo en las expresiones de las impedancias de punto de excitación y de trasferencia aZ_{12} en lugar de Z_{12} y a^2Z_{22} en lugar de Z_{22} . Se tiene

$$(z_{11})_{\text{nueva}} = Z_{11} - \frac{a^2Z_{12}^2}{a^2Z_{22}} = Z_{11} - \frac{Z_{12}^2}{Z_{22}} = (z_{11})_{\text{vieja}}$$

$$(z_{12})_{\text{nueva}} = \frac{a^2Z_{11}Z_{22} - a^2Z_{12}^2}{-aZ_{12}} = \frac{a(Z_{11}Z_{22} - Z_{12}^2)}{-Z_{12}} = a(z_{12})_{\text{vieja}}$$

Puede verse que no se ha alterado el valor de z_{11} , y, por lo tanto, tampoco el de la corriente primaria, I_1 , mientras que z_{12} ha aumentado en el valor a , de modo que la corriente I_2 se ve reducida en un factor igual a la recíproca de a . La impedancia de punto de excitación es, por

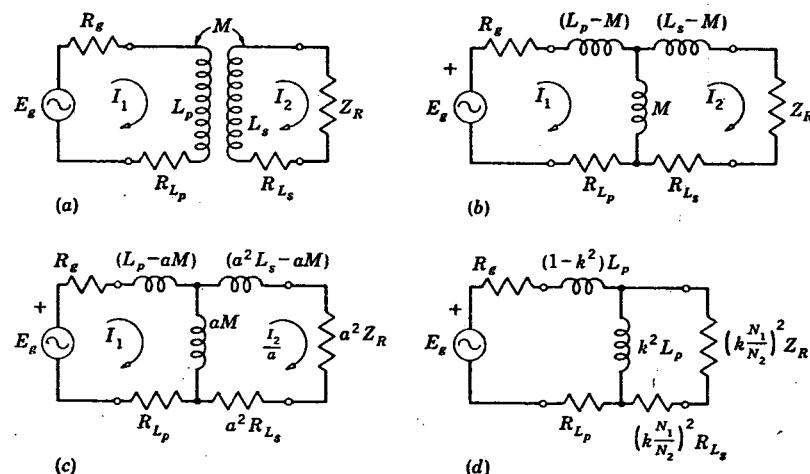


FIG. 13-1. Trasformador y circuitos equivalentes.

lo tanto, en la Fig. 13-1c, la misma que en la Fig. 13-1b; por esta razón llámase a menudo circuito equivalente referido al primario el de la Fig. 13-1c.

Es de práctica común en el diseño de los transformadores de audio hacer la reactancia del primario del transformador grande en comparación con la impedancia presentada a sus terminales de entrada y hacer la reactancia del secundario grande en comparación con la impedancia de carga. Las razones para esto se estudiarán en detalle más adelante. Por consecuencia, la reactancia de la rama aM del circuito de la Fig. 13-1c es en general grande en comparación con las impedancias $a^2R_{L_s}$ y a^2Z_R . En estas circunstancias, si a se elige de manera que la reactancia $a^2L_s - aM$ sea pequeña en comparación con la reactancia de aM , puede obtenerse una buena aproximación despreciando la rama aM , con lo que el circuito equivalente se reduce a un sencillo circuito en

serie. Un valor conveniente para a es el que se obtiene poniendo simplemente $a^2L_s - aM = 0$, es decir,

$$a = \frac{M}{L_s} \quad (13-6)$$

Según la Ec. (13-2); la Ec. (13-6) puede también escribirse

$$a = k \frac{N_1}{N_2} \quad (13-6a)$$

La inductancia $L_p - aM$ en la Fig. 13-1c, deviene, por las Ecs. (13-2) y (13-6a), $L_p(1 - k^2)$, con lo que el circuito equivalente adopta la forma del de la Fig. 13-1d. Al calcular las corrientes puede a menudo despreciarse la rama k^2L_p .

Dado que k no difiere por lo común mucho de la unidad, un valor de a de uso más común en los circuitos equivalentes es

$$a = \frac{N_1}{N_2} = \sqrt{\frac{L_p}{L_s}} \quad (13-7)$$

Para este valor de a , las ramas $L_p - aM$ y $a^2L_s - aM$ resultan ambas iguales a $(1 - k)L_p$ y el circuito equivalente entonces adquiere la forma ilustrada por la Fig. 13-2. Nótese que, aunque la elección de a igual a la relación de vueltas es la más común y conveniente, ella no da lugar sino a uno de una variedad infinita de circuitos equivalentes reducidos al primario.

13-2. Trasformadores ideales. Puede definirse como transformador ideal el que modifica la impedancia de carga, vista desde el generador, sin cambiar su ángulo de fase y sin introducir pérdidas adicionales. Por la consideración de las Figs. 13-1c y 13-2, es evidente que tal transformador tiene los siguientes requisitos que satisfacer:

1. Inductancias infinitas de primario y secundario pero relación L_p/L_s finita.
2. Coeficiente de acoplamiento igual a la unidad.
3. Resistencia cero en el primario y el secundario.

En las frecuencias de audio es posible aproximarse a estas condiciones. Para todas las condiciones prácticas satisfácese el requisito 1 si $X_m^2 \gg |Z_g Z_R|$, para lo cual basta con emplear un núcleo de alta permeabilidad y un número de vueltas suficiente. La condición 2 se satisface aproximadamente usando núcleos de alta permeabilidad y disponiendo los arrollamientos de modo que el flujo producido por uno de ellos se concatene lo más perfectamente posible con el otro arrollamiento. La condición 3 se satisface aproximadamente si la resistencia del primario es pequeña en comparación con la resistencia presentada entre

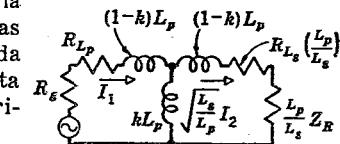


FIG. 13-2. Circuito equivalente al de la Fig. 13-1c cuando $a = N_1/N_2 = \sqrt{L_p/L_s}$.

los terminales de entrada y si la resistencia del secundario es pequeña en comparación con la de la carga.

13-3. Condiciones para la adaptación de impedancias. Las Ecs. (11-21) a (11-23) establecen los requisitos generales para que una sección T reactiva pura proporcione una determinada adaptación de impedancias. En audiofrecuencia, la red debe trabajar dentro de una amplia gama de frecuencias, expresada en octavas. Por ejemplo, la gama de 30 a 15.000 c/s representa aproximadamente nueve octavas. No es posible construir una sección T con inductancias y capacitancias capaz de funcionar correctamente dentro de esta banda tan amplia. Esta es la razón por la cual, para este caso, el adaptador de impedancias se construye con sólo inductancias, a modo de un transformador con núcleo de hierro. En estas condiciones es *imposible* obtener una adaptación *perfecta* a frecuencia alguna. El requisito impuesto por la Ec. (11-23) no puede ser satisfecho, porque en un transformador con acoplamiento puramente inductivo

$$X_m^2 = k^2 X_p X_s$$

siendo $k = M/\sqrt{L_p L_s} < 1$.

Sin embargo, si el coeficiente de acoplamiento puede hacerse aproximadamente igual a la unidad y si $X_p \gg R_{Lp}$, $X_s \gg R_{Ls}$ (condiciones correspondientes a la aproximación del transformador ideal), los segundos términos de los subradicales de las Ecs. (11-23a) y (11-23b), a saber

$$\begin{aligned} X_m &= \pm \sqrt{\frac{R_{I2}}{R_{I1}}} X_p^2 - R_{I1} R_{I2} \\ &= \pm \sqrt{\frac{R_{I1}}{R_{I2}}} X_s^2 - R_{I1} R_{I2} \end{aligned}$$

resultan despreciables y las ecuaciones resultan ser, prácticamente,

$$X_m = X_p \sqrt{\frac{R_{I1}}{R_{I2}}} = X_s \sqrt{\frac{R_{I2}}{R_{I1}}} = \sqrt{X_p X_s} \quad (13-8)$$

Si esta condición se cumple y se elige en primer término X_m , o X_p , o X_s , los otros valores quedan determinados sólo por la magnitud de la relación de transformación de impedancias, y no por las magnitudes de las impedancias individuales y sería posible transformar cualquier resistencia de terminación en la relación X_p/X_s con una sola red.

Si bien la adaptación no es perfecta a frecuencia alguna, obtiéñese en cambio una adaptación *aproximada* dentro de una gama de frecuencias mucho más amplia que la que podría conseguirse con una red T con elementos capacitivos.

El requisito de que en una red transformadora una de las ramas *equivalentes* debe tener un tipo de reactancia opuesto al de X_m es satisfecho en el transformador, puesto que, para k aproximadamente igual a 1, X_m es mayor que X_p o que X_s , pero no que ambas (excepto en el transformador 1:1, en que no es mayor que ninguna), de modo que una de las dos ramas en serie de la Fig. 13-1b es negativa. La ventaja de obtener una reactancia negativa de esta manera está en que la Ec. (11-20a) puede hacerse válida dentro de una amplia gama de frecuencias, mien-

tras que cuando se usa una capacitancia para el mismo propósito, la Ec. (11-20a) es válida para una sola frecuencia.

13-4. Impedancias imágenes en el transformador ideal. En un apartado anterior se han discutido las características del transformador ideal. En este transformador, la impedancia de entrada en circuito abierto es infinita, mientras que es cero la impedancia de entrada en cortocircuito, cualquiera que sea el par de terminales que se consideren como de entrada. Por consiguiente, las impedancias imágenes resultarían indeterminadas según lo indica la Ec. (3-102). No obstante, la *relación* de las impedancias imágenes tiene un valor definido dado por la Ec. (11-20a), puesto que en el transformador ideal hay una relación definida entre la reactancia del primario y la del secundario (igual al cuadrado de la relación de vueltas).

13-5. Comparación de la resistencia reflejada en los transformadores con núcleo de hierro y sintonizados. Otra interesante comparación puede hacerse entre las resistencias de entrada del transformador con núcleo de hierro y la del transformador sintonizado. La impedancia de punto de excitación de un circuito de dos mallas está dada por

$$z_{11} = Z_{11} - \frac{Z_{12}^2}{Z_{22}}$$

En el transformador sintonizado, si se hacen cero las reactancias del primario y del secundario, esta ecuación adopta la forma

$$z_{11} = R_{11} + \frac{\omega^2 M^2}{R_{22}}$$

La resistencia reflejada en el circuito primario por el acoplamiento con el circuito secundario está dada por el término $\omega^2 M^2/R_{22}$ y es *inversamente proporcional* a la resistencia de malla del secundario.

Por otra parte, en el transformador con núcleo de hierro aproximadamente ideal, $X_{11} \gg R_{11}$ y $X_{22} \gg R_{22}$, y si la reactancia externa respecto del transformador es despreciable, $X_{11} X_{22} = X_{12}^2$. Luego la ecuación adopta la forma.

$$\begin{aligned} z_{11} &= R_{11} + jX_{11} + \frac{X_{12}^2}{R_{22} + jX_{22}} \\ &= R_{11} + jX_{11} + \frac{X_{11} X_{22} (R_{22} - jX_{22})}{R_{22}^2 + X_{22}^2} \end{aligned} \quad (13-9)$$

R_{22}^2 puede despreciarse en el denominador en comparación con X_{22}^2 , con lo que reducise la ecuación a

$$\begin{aligned} z_{11} &= R_{11} + jX_{11} + \frac{X_{11}}{X_{22}} R_{22} - jX_{11} \\ &= R_{11} + \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 R_{22} \end{aligned} \quad (13-10)$$

La resistencia reflejada en el primario está dada por el término $(N_1/N_2)^2 R_{22}$ y es así directamente proporcional a la resistencia de malla del secundario.

Otros circuitos pueden quedar comprendidos entre ambos extremos y la situación debe examinarse entonces aplicando las ecuaciones fundamentales.

13-6. Respuesta de frecuencia. La Fig. 13-2 debe ser considerada como una aproximación de primer orden cuando se quiere analizar la respuesta y el rendimiento del transformador. Una representación más exacta del transformador debería incluir capacitancias en derivación sobre los terminales de entrada y de salida y una capacitancia "mutua" entre los dos arrollamientos. Por otra parte, el circuito debería incluir también una conductancia G en paralelo con la rama mutua kL_p en la Fig. 13-2 para tomar en cuenta las pérdidas por histéresis en el material del núcleo. Como regla general, esta conductancia depende de la frecuencia y varía alinealmente con la corriente del primario, de modo que puede introducir distorsión de frecuencia, de retardo y de amplitud (alineal).

En la práctica, la gran mayoría de los transformadores de audio con núcleo de hierro (con excepción de los transformadores utilizados como acoplamiento entre etapas en los amplificadores valvulares) se emplean para adaptar impedancias que están comprendidas entre unos pocos ohm y unos pocos miles de ohm. En este tipo de servicio, las capacitancias en derivación y mutua son tan pequeñas que su efecto no es en general importante dentro de la banda de audio. Cuando el nivel de impedancias de uno o los dos arrollamientos es elevado, digamos, por encima de algunos miles de ohm, es necesario tomar en cuenta la capacitancia de los arrollamientos en las frecuencias de audio más altas. En un transformador bien diseñado y construido, las pérdidas en el hierro son lo suficientemente bajas como para poder despreciar G . Por consecuencia, la aproximación de primer orden de la Fig. 13-2 es a menudo suficiente para el cálculo de la respuesta de frecuencia. (Esto puede no ser cierto en las unidades de diseño económico, en las que las pérdidas en el hierro suelen ser significativas.)

En los transformadores de audio de alta calidad típicos, kL_p tiene un valor entre 50 y 500 veces mayor que la inductancia de dispersión total, $2(1 - k)L_p$. A causa de esta diferencia en magnitudes, el comportamiento del transformador puede ser analizado en tres diferentes bandas de frecuencia, lo que conduce a una gran simplificación. En las frecuencias bajas, la caída de tensión en las reactancias de dispersión es despreciable, y se obtiene entonces el circuito equivalente de la Fig. 13-3a. En las frecuencias más altas, la caída a través de las reactancias de dispersión es significativa, pero ωkL_p resulta tan grande que puede despreciarse la corriente que circula por ella. El circuito equivalente para frecuencias altas de la Fig. 13-3c es entonces el adecuado. En la banda de frecuencias intermedia entre estos dos extremos pueden despreciarse a la vez las reactancias en serie y en paralelo y usarse entonces el circuito muy simplificado de la Fig. 13-3b. El estudiante puede entonces calcular la respuesta de tensión y de corriente como función

de la frecuencia, muy fácilmente, a partir de estos diagramas de circuito equivalente. (Ver Prob. 13-1.)

El examen de la Fig. 13-3 muestra que la respuesta de baja frecuencia mejora cuando se eleva kL_p , mientras que la mejora de la respuesta de alta frecuencia exige la disminución de $(1 - k)L_p$. Si se eleva la inductancia primaria aumentando el número de vueltas con el fin de mejorar el funcionamiento a baja frecuencia, se afectará

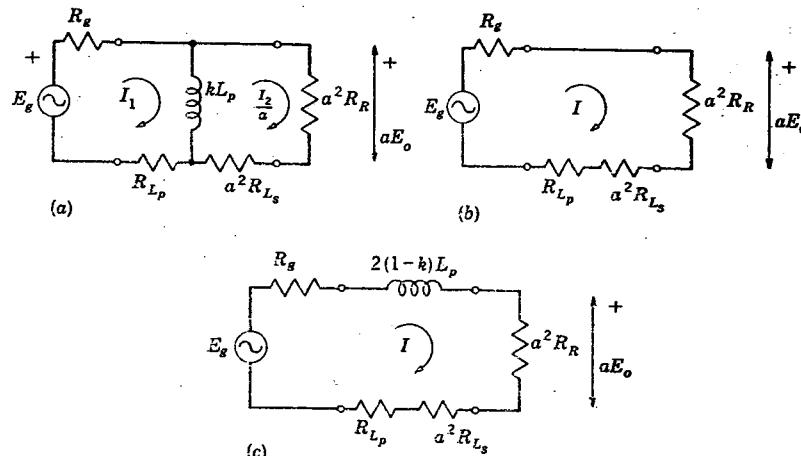


FIG. 13-3. Circuitos equivalentes simplificados para el transformador con núcleo de hierro.
(a) Circuito para baja frecuencia, (b) Circuito para frecuencias medias. (c) Circuito para alta frecuencia.

adversamente la respuesta a las frecuencias altas. Por lo tanto, los valores de L_p y k deben elegirse de modo de satisfacer las inecuaciones

$$\omega(1 - k)L_p \ll \frac{L_p}{L_s} |Z_R| \ll \omega k L_p \quad (13-11)$$

dentro del mayor rango de frecuencias posibles. Es evidente que para ello debe ser k lo más próximo posible a la unidad.

Con el fin de establecer límites aproximados para los valores de L_p y k , consideremos los dos circuitos simplificados de las Figs. 13-3a y c. Dado que k es aproximadamente igual a 1, se lo puede reemplazar por la unidad en la rama kL_p , pero no en la inductancia $(1 - k)L_p$. Se desprecia la resistencia de los dos arrollamientos y se supone que el transformador está adaptando dos resistencias puras, de modo que la resistencia reflejada es igual a la resistencia del generador, esto es, $a^2 R_R = R_g$. Luego, en el caso del transformador ideal, la potencia entregada a la carga sería $E_g^2 / 4R_g$.

En la Fig. 13-3a, la corriente de salida sería

$$I_1 = \frac{E_g(R_g + j\omega L_p)}{R_g^2 + 2j\omega L_p R_g} \quad (13-12)$$

$$\frac{I_2}{a} = \frac{E_g j\omega L_p}{R_g^2 + 2j\omega L_p R_g}$$

Supongamos que la frecuencia más baja de interés es $R_g = \omega L_p$. Luego, la corriente en la carga sería

$$\frac{|I_2|}{a} = \frac{E_g}{\sqrt{5} R_g}$$

La potencia entregada a la carga sería

$$P = \frac{|I_2|^2}{a^2} R_g = \frac{E_g^2}{5R_g} \quad (13-13)$$

Según la Ec. (13-13), la relación de la potencia entregada a la carga de la Fig. 13-3a, para el caso en que $\omega L_p = R_g$, a la potencia que entregaría a la carga el transformador ideal es igual a 0,8, lo que corresponde a una pérdida de aproximadamente 1 dB.

Si en el extremo de alta frecuencia de la banda, en el que tiene importancia $2(1 - k)L_p$, fuera $2\omega(1 - k)L_p$ igual a R_g , la corriente en el circuito de la Fig. 13-3c estaría también dada por la relación

$$|I_1| = \frac{E_g}{\sqrt{5} R_g}$$

y la potencia entregada a la carga sería nuevamente

$$P = \frac{E_g^2}{5R_g} \quad (13-14)$$

lo que corresponde también a una pérdida de 1 dB en comparación con el transformador ideal.

Como ejemplo del uso de estas relaciones, supongamos que queremos diseñar un transformador para adaptar una línea de 600 ohm a una carga de 5.400 ohm dentro de la gama de frecuencia de 30 a 15.000 c/s. Despreciando las resistencias de los arrollamientos, determinaremos las inductancias de primario y secundario y el coeficiente de acoplamiento necesario para que la pérdida no exceda de 1 dB en los extremos de alta y baja frecuencia de la banda.

Entonces

$$2\pi \times 30L_p = 600$$

$$L_p = 3,18 \text{ Henrys}$$

$$4\pi \times 15.000(1 - k)L_p = 600$$

$$1 - k = 0,001$$

$$k = 0,999$$

Debe observarse que de este valor de k depende solamente de la gama de frecuencias y de la tolerancia en los extremos de ésta, y no de las resistencias de terminación.* En cambio, el valor requerido de L_p sí depende de la impedancia que debe presentarse a la fuente de señal.

* Conviene poner en evidencia esta conclusión. En efecto, llamando f_i y f_s las frecuencias para las cuales se admite una pérdida de 1 dB, debe cumplirse la relación

$$2\pi f_i L_p = 2 \times 2\pi f_s (1 - k) L_p = R_g$$

de donde resulta

$$k = 1 - \frac{f_i}{f_s}$$

Dado que en general la construcción del transformador resulta tanto más costosa cuanto más próximo a la unidad se especifique k , esta relación es importante porque demuestra la conveniencia de restringir la banda de respuesta plana lo más posible compatible con los requisitos del sistema de que forma parte el transformador. (N. del T.)

Dado que la relación de la impedancia de carga a la impedancia del generador es de 9:1, la relación de vueltas del transformador debe ser de 1:3. Esto significa que la inductancia del secundario debería ser

$$9 \times 3,18 = 28,62 \text{ H}$$

Debe comprenderse que estos valores son aproximados, ya que se han despreciado las resistencias de los arrollamientos y las pérdidas en el núcleo. Uno de los puntos más importantes es el siguiente: Cuando el transformador se usa para acoplar una carga al circuito de placa de una válvula, la componente continua de la corriente de placa circula por el arrollamiento del transformador. Entonces debe tomarse como L_p la *inductancia incremental* del primario, es decir, la inductancia que toma en cuenta la saturación del núcleo producida por la corriente continua. Volveremos sobre esta cuestión más adelante.

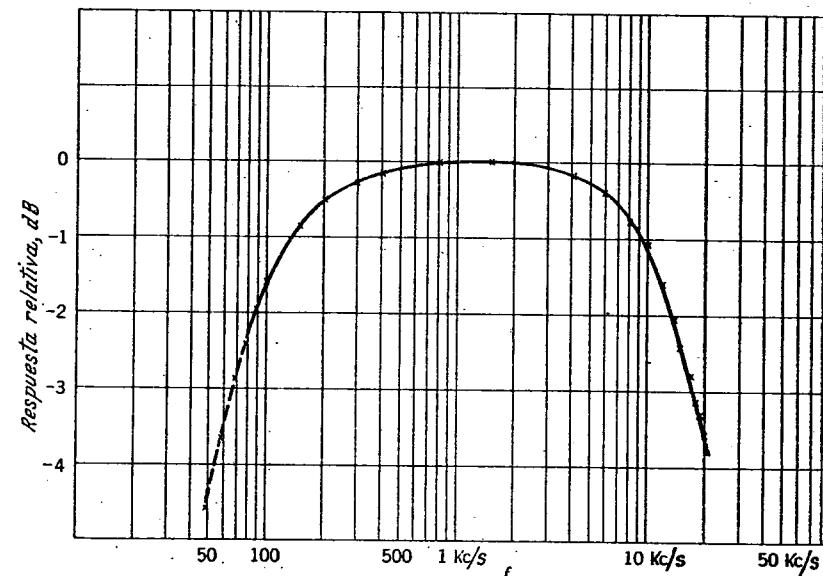


FIG. 13-4. Curva de la respuesta de frecuencia medida de un transformador de núcleo de hierro, económico.

El funcionamiento en push-pull de los elementos circuitales activos evita el desequilibrio de las componentes de corriente continua pero puede introducir otro problema a causa de la reactancia de dispersión entre las dos secciones del primario en push-pull.

La Fig. 13-4 muestra la respuesta relativa medida de un transformador de fabricación económica conectado entre las resistencias nominales de generador y de carga, entregando una potencia de 1 watt a la carga (en 1.000 c/s). La corriente primaria es de 60 mA. La respuesta relativa es

$$N_{dB} = -20 \log \frac{(E_o)_{1\text{ Kc/s}}}{E_o}$$

El transformador del caso está optimísticamente especificado como de una capacidad de potencia de 5 watt en una carga de 3,5 ohm y con un generador de 2.000 ohm. Las lecturas correspondientes a la porción cortada de la curva por debajo de los 70 c/s son dudosas a causa de la distorsión introducida por la saturación del núcleo, de sólo 12,5 × 12,5 mm de sección. Se obtuvo una curva similar con un nivel de salida de 2 watt. Resultó idéntica a la de la Fig. 13-4 por encima de los 130 c/s. Por debajo de esta frecuencia la respuesta era tan pobre que las lecturas de tensión no tendrían sentido. El rendimiento medido del transformador, 1 Kc/s y 1 watt de salida, era de aproximadamente el 75 por ciento.

El estudiante debe observar que la disminución de la potencia de salida en las frecuencias bajas debido al efecto derivador de L_p es importante. Es evidente que la impedancia de entrada de un transformador cargado con una resistencia comienza a tener una componente reactiva apreciable a medida que la frecuencia se va reduciendo por debajo del valor para el cual comienza a decrecer la potencia entregada a la carga. Cuando el transformador está excitado por una válvula de alto vacío, la impedancia hace que la línea de carga de la válvula resulte elíptica más bien que una recta, lo que o da lugar a distorsión alineal o exige que se reduzca la potencia máxima de salida de la válvula. El uso de la línea de carga para analizar la distorsión en las combinaciones de válvula y carga está discutido en la mayoría de los libros de electrónica. Puede esperarse, entonces, que la distorsión de frecuencia y la distorsión alineal comiencen a manifestarse aproximadamente en la misma gama de frecuencias cuando la válvula está excitada a la máxima potencia o a casi la máxima potencia. Dado que la potencia es de ordinario pequeña en las frecuencias altas, un efecto similar que aquí ocurre no merece en general que se lo tome en cuenta.

13-7. Consideraciones sobre el diseño de los transformadores con núcleo de hierro. En las frecuencias bajas, el transformador puede ser representado por medio del circuito equivalente de la Fig. 13-3a. Por lo tanto, el volumen del núcleo y el número de vueltas deben ser lo necesariamente grandes como para obtener la inductancia prevista. Además, el núcleo de hierro debe trabajar sólo en la parte lineal de su curva de magnetización si se quiere evitar la distorsión alineal. La disposición de los dos arrollamientos no tiene mayor importancia para las frecuencias bajas.

En las frecuencias altas, el circuito equivalente es el de la Fig. 13-3c. Según se ha puntualizado, en algunos casos es necesario incluir los efectos de las capacitancias de los arrollamientos además de las resistencias y las inductancias. Hay un conflicto fundamental entre los requisitos para baja inductancia de dispersión y baja capacitancia. Para que la inductancia de dispersión sea pequeña, los dos arrollamientos deben disponerse muy cerca el uno del otro. En cambio, para reducir la capacitancia entre arrollamientos es necesario separar éstos. Es evi-

dente que debe buscarse una solución de compromiso entre estos dos extremos.

En los arrollamientos de alta impedancia, la capacitancia entre capas del arrollamiento puede afectar notablemente la respuesta de alta frecuencia. Los transformadores pueden incluir muchas vueltas de alambre fino con muy poca separación entre capas. La capacitancia entre capas puede ser reducida usando una aislación más gruesa entre capas o arrollando la bobina en cierto número de secciones. En este último caso, se disminuye el gradiente de tensión entre capas sucesivas y, con ello, la capacitancia efectiva.

El rendimiento de los transformadores adaptadores de impedancia es función del tamaño del transformador y del material del núcleo. En los transformadores pequeños, las resistencias de los arrollamientos pueden representar una parte importante de las impedancias que se adaptan. Para reducir las resistencias de los arrollamientos hay que aumentar el tamaño del núcleo, aumentar el diámetro del alambre y disminuir el número de vueltas. También puede aumentarse el rendimiento usando laminaciones muy finas en el núcleo y eligiendo para éste un material de buenas características magnéticas.

Al acondicionar los arrollamientos en un volumen disponible dado, es de interés el efecto de la variación del número de vueltas sobre L y R . Si se aumenta el número de vueltas en la relación m , el área transversal del alambre debe reducirse en el factor $1/m$ para mantener constante el volumen. Si el volumen ocupado por la aislación es despreciable, esto haría que la resistencia se elevara en el factor m^2 . En estas condiciones, dado que la inductancia de una bobina, a igualdad de las demás condiciones, es proporcional al cuadrado del número de vueltas, el valor de L quedaría también multiplicado por m^2 . Por lo tanto, la relación L/R debe permanecer inalterada.

Pero, desafortunadamente, a medida que se reduce el calibre del alambre, la aislación ocupa más lugar. El espesor de la aislación de esmalte de los alambres finos está determinado por la resistencia a la abrasión durante el proceso de arrollamiento y no puede reducirse por debajo de cierto límite en los alambres más finos. Por lo tanto, en la práctica, cuando se aumenta el número de vueltas dentro de un volumen dado, la resistencia crece más rápidamente que m^2 , de modo que la relación L/R disminuye.

En un transformador de audio, particularmente cuando se lo prevé para ser usado con corriente continua en uno de los arrollamientos, introduzcase un entrehierro para asegurar la linealidad de la inductancia; en este caso, la reluctancia del camino magnético depende principalmente de la longitud de este entrehierro. La parte de hierro del circuito continúa en su función de asegurar que el coeficiente de acoplamiento sea lo más próximo posible a la unidad.

Consideremos, por ejemplo, el caso en que se duplican todas las dimensiones lineales del transformador excepto la longitud del entrehierro. En tal caso, la sección transversal de éste queda multiplicada por 4, como también así la permeancia del circuito magnético. La sección transversal del arrollamiento queda también multiplicada por cuad-

tro, pero la longitud media de las espiras sólo se duplica. Por lo tanto, si se mantiene el mismo número de espiras, la resistencia de los arrollamientos reducirse a la mitad. Dado que la permeancia ha aumentado 4 veces, la inductancia (el mismo número de espiras) aumenta 4 veces. Por lo tanto, la relación L/R aumenta en el factor 8, es decir, en la misma relación que el volumen y el peso del transformador. También será del mismo orden el aumento de coste de los materiales.

Para un volumen dado, la relación L/R es aproximadamente independiente del número de vueltas,* de modo que puede aprovecharse la ventaja de una mayor relación L/R en términos de mayor L o menor R rediseñando el transformador.

El mayor volumen con el mismo entrehierro conduce también a la disminución de la inductancia de dispersión. Más aún, el mayor espacio para el arrollamiento permite elegir una disposición más conveniente para las bobinas a fin de reducir las capacitancias y la inductancia de dispersión.

13-8. Atenuadores resistivos. En todas las redes trasformadoras de impedancias que hemos discutido hasta ahora, el diseño se ha basado

en el empleo de elementos reactivos con el objeto de reducir las pérdidas. En ciertas aplicaciones, sin embargo, pueden tolerarse pérdidas bastante grandes y, en algunas circunstancias, estas pérdidas son deseables. En estos casos es posible construir las redes adaptadoras con resistores,

con lo que se obtienen redes de banda inherentemente ancha cuya respuesta de alta frecuencia está sólo limitada por las inevitables capacitancias en derivación. Estas redes adaptadoras resistivas se llaman atenuadores (en inglés, "pad"), y pueden ser diseñadas por aplicación de las Ecs. (11-26), (11-30a), (11-32a) y (11-33a).

Consideremos una sección T de resistencias puras terminada en su impedancia imagen Z_{I2} , como en la Fig. 13-5. Por las Ecs. (11-26) y (11-34), la constante de transferencia imagen de la red está dada por

$$e^\Theta = \sqrt{\frac{E_1 I_1}{E_2 I_2}} \quad (11-34)$$

$$\Theta = A + jB \quad (11-26)$$

Dado que la red contiene sólo resistencias, E_1 y E_2 están en fase, como lo están asimismo I_1 e I_2 ; por lo tanto

$$\Theta = A \text{ nepers} \quad B = 0$$

Además, por la Ec. (11-28), Z_{I1} y Z_{I2} son reales y pueden ser llamadas, respectivamente, R_{I1} y R_{I2} . Luego, por las Ecs. (11-30a), (11-32a),

* Siempre que el calibre del alambre no sea demasiado pequeño, por las razones expuestas en la página anterior. (N. del T.)

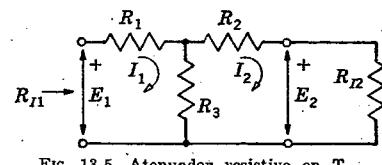


FIG. 13-5. Atenuador resistivo en T.

y (11-33a), los componentes del atenuador T, para una pérdida dada entre resistencias imágenes conocidas, están dados por

$$R_3 = \frac{\sqrt{R_{I1} R_{I2}}}{\operatorname{senh} A} \quad (13-15)$$

$$R_1 = \frac{R_{I1}}{\operatorname{tgh} A} R_3 \quad (13-16)$$

$$R_2 = \frac{R_{I2}}{\operatorname{tgh} A} R_3 \quad (13-17)$$

El estudiante observará que A es un número real; por lo tanto, las funciones hiperbólicas de A son reales y se las puede tomar de las tablas del Apéndice.

Ejercicio. Diseñar un atenuador de 10 dB para funcionar entre 100 y 200 ohm.

Solución. Pasando de dB a nepers:

$$A = 10 \text{ dB} = 0,115 \times 10 = 1,15 \text{ nepers}$$

De las tablas del Apéndice

$$\operatorname{senh} 1,15 = 1,421 \quad \operatorname{tgh} 1,15 = 0,818$$

Según las Ecs. (13-15) a (13-17),

$$R_3 = \frac{\sqrt{(2 \times 10^2) \times 10^2}}{1,421} = \frac{141,4}{1,421} = 98,4 \text{ ohm}$$

$$R_1 = \frac{200}{0,818} - 98,4 = 244,2 - 98,4 = 145,8 \text{ ohm}$$

$$R_2 = \frac{100}{0,818} - 98,4 = 122,1 - 98,4 = 23,7 \text{ ohm}$$

El atenuador π de la Fig. 13-6 puede derivarse del anterior aplicando el principio de dualidad a las Ecs. (13-15) a (13-17).

13-9. Atenuador de pérdida mínima. Si la red resistiva se cons-

truye con el propósito principal de obtener adaptación de impedancias, se la debe diseñar de manera que su pérdida A sea mínima. Diseñado para esta condición, el atenuador se conoce como "atenuador de pérdida mínima". La Ec. (13-17) sirve como base para hallar la condición de pérdida mínima, a saber, que una de las resistencias en serie del atenuador T sea cero.

Para conveniencia, supongamos que R_{I1} sea la mayor de las dos resistencias imágenes, esto es, $R_{I1} > R_{I2}$. Multiplicando esta desigualdad por R_{I2} y tomando la raíz cuadrada,

$$R_{I2} < \sqrt{R_{I1} R_{I2}} \quad (13-18)$$

En el Apéndice se dan curvas de $\operatorname{senh} A$ y $\operatorname{tgh} A$ para valores reales

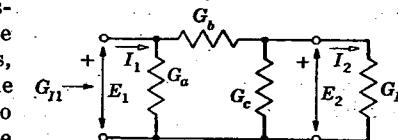


FIG. 13-6. Atenuador resistivo π .

y positivos de A. Según estas curvas y la desigualdad (13-18), puede verse que para A grande,

$$\frac{R_{I2}}{\tgh A} > \frac{\sqrt{R_{I1}R_{I2}}}{\senh A} \quad (13-19)$$

Puede verse también que, cuando A → 0, senh A → tgh A; por lo tanto, para A pequeño,

$$\frac{R_{I2}}{\tgh A} < \frac{\sqrt{R_{I1}R_{I2}}}{\senh A} \quad (13-20)$$

La inecuación (13-20) impone una condición imposible de cumplir en el atenuador resistivo, puesto que ella exige, por la Ec. (13-17), que R_2 sea negativa. Entonces, el valor mínimo posible de A debe ocurrir en el punto de cruce de las dos inecuaciones (13-19) y (13-20), a saber, para

$$\frac{R_{I1}}{\tgh A_{\min}} = \frac{\sqrt{R_{I1}R_{I2}}}{\senh A_{\min}} \quad (13-21)$$

lo que corresponde a $R_2 = 0$. Despejando cosh A_{min} en la (13-21),

$$\cosh A_{\min} = \sqrt{\frac{R_{I1}}{R_{I2}}} \quad (13-22)$$

Es interesante observar que la pérdida mínima depende de sólo la relación de transformación deseada y no de los valores absolutos de R_{I1} y R_{I2} . También es interesante observar que las pérdidas aumentan

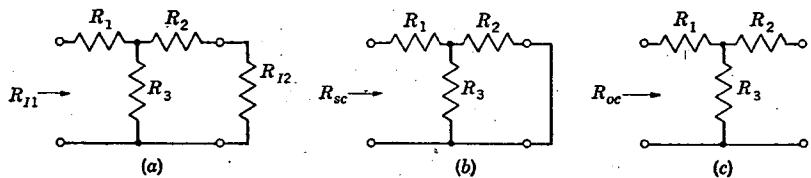


FIG. 13-7. Diagramas para obtener la impedancia de entrada de un atenuador T en diferentes condiciones de carga.

con la relación de transformación, como ocurre también en caso de las secciones adaptadoras reactivas. El estudiante puede derivar expresiones simplificadas para los valores de R_1 y R_3 del atenuador de pérdida mínima eliminando A en las Ecs. (13-15) y (13-16).

13-10. Separación respecto de las variaciones de la carga. El estudiante puede preguntarse por qué razón se utilizaría para los fines de adaptación de impedancia otro atenuador resistivo que el de pérdida mínima. Una respuesta es que las pérdidas del atenuador tienden a hacer que la impedancia de entrada resulte independiente de la carga. Esta propiedad puede ser importante cuando el generador suministra potencia a una carga variable. Se verá que en el atenuador T la máxima desviación de R_{in} respecto de R_{I1} es una función de la pérdida del atenuador A.

Consideremos el atenuador T de la Fig. 13-7a. R_1 , R_2 y R_3 han sido calculados para trasformar la carga nominal R_{I2} en la resistencia de entrada deseada R_{I1} . La carga está sujeta a variaciones, de modo que verificaremos la impedancia de entrada para los límites extremos de tales variaciones. Si la carga se pone en cortocircuito, como en la Fig. 13-7b, la impedancia de entrada viene a ser

$$R_{sc} = R_1 + \frac{R_2R_3}{R_2 + R_3} \quad (13-23)$$

Eliminando R_1 , R_2 y R_3 por medio de las Ecs. (13-15) a (13-17),

$$R_{sc} = R_{I1} \tgh A \quad (13-23a)$$

Luego, expresando la desviación de R_{sc} respecto de R_{I1} como fracción de R_{I1} ,

$$\frac{R_{I1} - R_{sc}}{R_{I1}} = 1 - \tgh A \quad (13-24)$$

El otro extremo de la variación de la carga es el circuito abierto. En este caso, Fig. 13-7c, se tiene

$$R_{oc} = R_1 + R_3 \quad (13-25)$$

$$= \frac{R_{I1}}{\tgh A} \quad (13-25a)$$

Expresando la desviación de R_{oc} respecto de R_{I1} como una fracción de R_{I1} ,

$$\frac{R_{oc} - R_{I1}}{R_{I1}} = \frac{1}{\tgh A} - 1 \quad (13-26)$$

Para fines de comparación, la Ec. (13-26) puede escribirse

$$\frac{R_{oc} - R_{I1}}{R_{I1}} = \frac{1 - \tgh A}{\tgh A} = \frac{1}{\tgh A} \frac{R_{I1} - R_{sc}}{R_{I1}} \quad (13-26a)$$

Dado que $\tgh A < 1$ para cualquier valor finito y positivo de A, se deduce que la desviación máxima posible de la resistencia de entrada respecto de R_{I1} está dada por la terminación en circuito abierto; por lo tanto, podemos usar la Ec. (13-26) para diseñar un atenuador T con vistas a mantener la resistencia de entrada dentro de cualquier tolerancia especificada independientemente de la variación de la carga.

Ejemplo. Un oscilador está sujeto a variaciones de frecuencia cuando varía la carga. Está diseñado para trabajar con una carga de 50 ohm y se lo quiere acoplar a una carga nominal de 200 ohm. Diseñar un atenuador en T para satisfacer la adaptación nominal de impedancias y de tal modo que la carga verdadera del atenuador no se aparte más del 5 por ciento respecto de 50 ohm.

Solución. Dado que la máxima desviación ocurre para circuito abierto del atenuador, usamos la Ec. (13-26):

$$\operatorname{tgh} A = \frac{1}{1+0,05} = \frac{1}{1,05} = 0,951$$

Según la tabla de funciones hiperbólicas del Apéndice,

$$A = 1,84 \text{ nepers} \quad \operatorname{senh} A = 3,07$$

Por la Ec. (13-15),

$$R_3 = \frac{\sqrt{R_{I1} R_{I2}}}{\operatorname{senh} A} = \frac{\sqrt{50 \times 200}}{3,07} = \frac{100}{3,07} = 32.6 \text{ ohms}$$

Por las Ecs. (13-16) y (13-17),

$$R_1 = \frac{R_{I1}}{\operatorname{tgh} A} - R_3 = \frac{50}{0,951} - 32,6 = 52,5 - 32,6 = 19.9 \text{ ohm}$$

$$R_2 = \frac{R_{I2}}{\operatorname{tgh} A} - R_3 = \frac{100}{0,951} - 32,6 = 105 - 32,6 = 72.4 \text{ ohm}$$

Como verificación, calculemos R_{oc} por medio de la Ec. (13-25):

$$R_{oc} = R_1 + R_3 = 52,5 \text{ ohm}$$

$$\text{Desviación en tanto por ciento} = \frac{52,5 - 50}{50} = 5\%$$

Debe observarse que este grado de separación respecto de las variaciones de la carga sólo se obtiene a costa de una pérdida de 1,84 neper, o 16 dB, lo que representa una relación de potencia de salida a potencia de entrada de sólo 0,025.

El estudiante debe observar que en los atenuadores asimétricos, en los que $R_{I1} \neq R_{I2}$, la pérdida de dB no puede calcularse como $20 \log (E_1/E_2)$, a causa de la variación del nivel de impedancia.

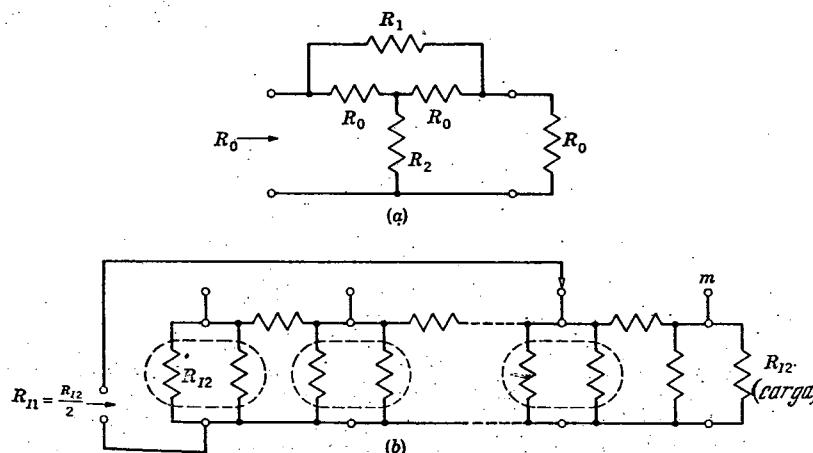


FIG. 13-8. Atenuadores. (a) Simétrico, T puenteado. $R_1 R_2 = R_0^2$. (b) Escalera.

13-11. Atenuadores. En muchos casos es necesario introducir una pérdida determinada entre un generador y una cargada *adaptada*, sin alterar la relación de impedancias. Para este propósito se utilizan redes resistivas en T o en π , llamadas "atenuadores". No obstante, si la pérdida ha de ser ajustable, las redes T y π no representan una solución económica debido al número de resistores y contactos de llave que entonces se necesitan. Ofrece una solución más económica la red T simétrica y puenteada de la Fig. 13-8a. La pérdida puede ser variada comutando simultáneamente los valores de R_1 y R_2 . El estudiante puede verificar que si $R_1 R_2 = R_0^2$,

$$e^\alpha = 1 + \frac{R_1}{R_0} \quad (13-27)$$

para la sección T simétrica y puenteada.

Aún más económico desde el punto de los contactos de commutación es el atenuador en escalera de la Fig. 13-8b, el que consiste en una cascada de redes H simétricas terminada por los dos extremos en R_{I2} . El atenuador en escalera tiene como principal desventaja la de introducir una pérdida mínima de 3 dB (posición m en la figura). Esta pérdida ocurre porque la corriente se divide en dos partes iguales en el contacto, de las cuales sólo una va hacia la carga útil y porque hay una variación de 1 : 2 en el nivel de impedancia. Al realizar prácticamente un atenuador en escalera, los elementos adyacentes en derivación (rodeados por las líneas cortadas en la figura) combinan en resistores únicos para reducir el coste.

SISTEMAS DE RADIOFRECUENCIA

En la gama de las radiofrecuencias no hay nada semejante al transformador de audio con núcleo de hierro como dispositivo transformador de impedancias de banda ancha. Como consecuencia, cada problema de radiofrecuencia debe ser considerado individualmente para derivar un dispositivo transformador de banda ancha, adecuado. Pueden establecerse, no obstante, algunos principios generales de utilidad: (1) Como regla general, obtiénes un mayor ancho de banda cuando la relación de transformación deseada se realiza en varios pasos en lugar de uno solo. (2) El método gráfico de solución es preferible al analítico. El lugar geométrico de la impedancia de terminación se representa gráficamente en función de la frecuencia en el ábaco bicircular o en el de Smith. Dado que la transformación especificada no puede obtenerse *exactamente* en cada uno de los puntos de la banda ancha, puede también representarse una región comprendida dentro de una circunferencia de relación de onda estacionaria tolerable. Esta región define los límites de la impedancia de entrada tolerable. Luego pueden describirse procedimientos generales para dibujar el lugar geométrico de la terminación sobre el ancho de banda deseado y dentro de esta región. El resto del capítulo describe algunos de estos principios y métodos.

Debe comprenderse desde un principio que el término "banda ancha" es relativo. Los anchos de banda en radiofrecuencia, en oposición a lo que ocurre en audio, representan a menudo sólo una fracción de uno por ciento de la frecuencia "central"; es decir, si f_a y f_b son respectivamente los límites inferior y superior del espectro de la señal y f_0 es la media aritmética, o frecuencia central, el ancho de banda fraccional es $(f_b - f_a)/f_0 = \Delta f/f_0$. Como regla general, resérvese el término "banda ancha" para los sistemas en los que el ancho de banda fraccional es igual o mayor que de 0,05 a 0,1 (de 5 a 10 por ciento). Los valores máximos típicos aproximados para los tres tipos de servicio de radio-difusión son los siguientes:

Servicio	$\Delta f/f_0$
Modulación de amplitud, MA	0,02
Modulación de frecuencia, MF	0,002
Televisión, TV	0,1

Puede verse que los sistemas de modulación de amplitud y de frecuencia son de banda angosta, mientras que los de televisión caen dentro de la clasificación de banda ancha.

No obstante, un sistema de antena y línea de transmisión de MF para recepción debe poder trabajar dentro de toda la banda de radio-difusión de MF, la que se extiende de 88 a 108 Mc/s, de modo que

$$\Delta f/f_0 = 20\%_8 = 0,204$$

Esto representa una banda ancha, pero, afortunadamente, en recepción puede tolerarse una relación de onda estacionaria mucho mayor que la admisible en transmisión. En ciertos casos, por ejemplo, en algunos sistemas de radiocomunicación aeronáutica que deben poder trabajar en muchas bandas de frecuencia, $\Delta f/f_0$ puede ser del orden de 0,8 y aún más. Es una suerte que en estos sistemas de banda "muy" ancha puedan tolerarse relaciones de onda estacionaria del orden de 2.

13-12. Respuesta de frecuencia del transformador de un cuarto de onda. El concepto de la obtención de una banda ancha mediante la conexión en cascada de varias secciones transformadoras puede ilustrarse muy bien por medio de los transformadores de un cuarto de onda descritos en el Cap. XII. Como primer paso, veamos cómo varía la impedancia de entrada con la frecuencia cuando una sección de cuarto de onda está terminada por una resistencia pura. Digamos que $R_R = 4R_o$ tiene que ser adaptada a una línea de impedancia característica R_o a la frecuencia f_0 . Luego, por la Ec. (12-1), puede obtenerse la adaptación mediante una sección de un cuarto de onda de impedancia característica R'_o , dada por

$$R'_o = \sqrt{R_R R_o} = \sqrt{4R_o^2} = 2R_o. \quad (13-28)$$

Es conveniente hallar Z_{in} como función de la frecuencia usando el abaco de Smith; normalicemos, por lo tanto, todas las cantidades con respecto a R'_o .

$$r'_r = \frac{R_R}{R'_o} = \frac{4R_o}{2R_o} = 2 \quad (13-29a)$$

$$r'_o = \frac{R_o}{R'_o} = \frac{1}{2} \quad (13-29b)$$

Se supone que la sección adaptadora no tiene pérdidas. Por lo tanto, la velocidad de fase es independiente de la frecuencia y $f\lambda = f_0\lambda_0$. Luego, a una frecuencia cualquiera f la longitud del transformador como fracción del largo de onda es

$$\frac{l}{\lambda} = \frac{l}{\lambda_0} \frac{f}{f_0} = 0,25 \frac{f}{f_0} \quad (13-30)$$

Se usa la Ec. (13-30) para computar, en la tabla 13-1, la longitud eléctrica del transformador en la gama $0,5 \leq f/f_0 \leq 1,5$.

Dado que R_R se considera como independiente de la frecuencia, entramos en el abaco (Fig. 13-9) por $r'_r = 2$ y giramos l/λ sobre la circunferencia $S' = 2$ para cada frecuencia, a fin de hallar el valor normalizado correspondiente de la impedancia de entrada z'_{in} . Indícase en la figura una de esas rotaciones, para $f/f_0 = 0,5$, $l/\lambda = 0,125$. Los

TABLA 13-1. CÁLCULO DE z_{in} PARA UN TRASFORMADOR DE UN CUARTO DE ONDA

f/f_0	l/λ	z'_{in}	z_{in}
1,5	0,375	$0,80 + j0,60$	$1,60 + j1,20$
1,4	0,350	$0,875 + j0,49$	$1,35 + j0,98$
1,3	0,325	$0,95 + j0,36$	$1,18 + j0,72$
1,2	0,300	$0,54 + j0,24$	$1,08 + j0,48$
1,1	0,275	$0,51 + j0,12$	$1,02 + j0,24$
1,0	0,250	$0,50 + j0,00$	$1,00 + j0,00$
0,9	0,225		
0,8	0,200		
0,7	0,175		
0,6	0,150		
0,5	0,125		

Simetría conjugada

valores resultantes están tabulados en la tabla 13-1. Por la Ec. (13-29b) puede verse que la adaptación es perfecta para $f/f_0 = 1$. La impedancia normalizada con respecto a R_o se obtiene mediante

$$z_{in} = \frac{Z_{in}}{R_o} = \frac{Z_{in} R'_o}{R'_o R_o} = 2z'_{in} \quad (13-31)$$

Los valores de z_{in} están indicados en la tabla 13-1 y se representan también en la Fig. 13-9 (lugar geométrico de línea cortada). En la figura se ve que si se puede tolerar una relación de onda estacionaria de 2 o menos en la línea (no en la sección adaptadora) el ancho de banda aceptable es, aproximadamente,

$$\frac{\Delta f}{f_0} = 1,3 - 0,7 = 0,6$$

Es decir, la frecuencia puede variar aproximadamente 30 por ciento a cada lado de la frecuencia de diseño, f_0 , sin que S exceda de 2.

13-13. Trasformadores en cascada. La Fig. 13-9 puede ser usada como base para demostrar que el ancho de banda para una relación de onda estacionaria dada decrece al aumentar la relación de trasformación. Sea S' la relación de onda estacionaria en la sección trasformadora de un cuarto de onda. Luego, para una banda de frecuencias dada, cuanto menor sea S' , tanto menor será la desviación de z'_{in} con respecto al eje real y del valor deseado de la resistencia de entrada. Es por lo tanto deseable mantener pequeño S' en la sección adaptadora.

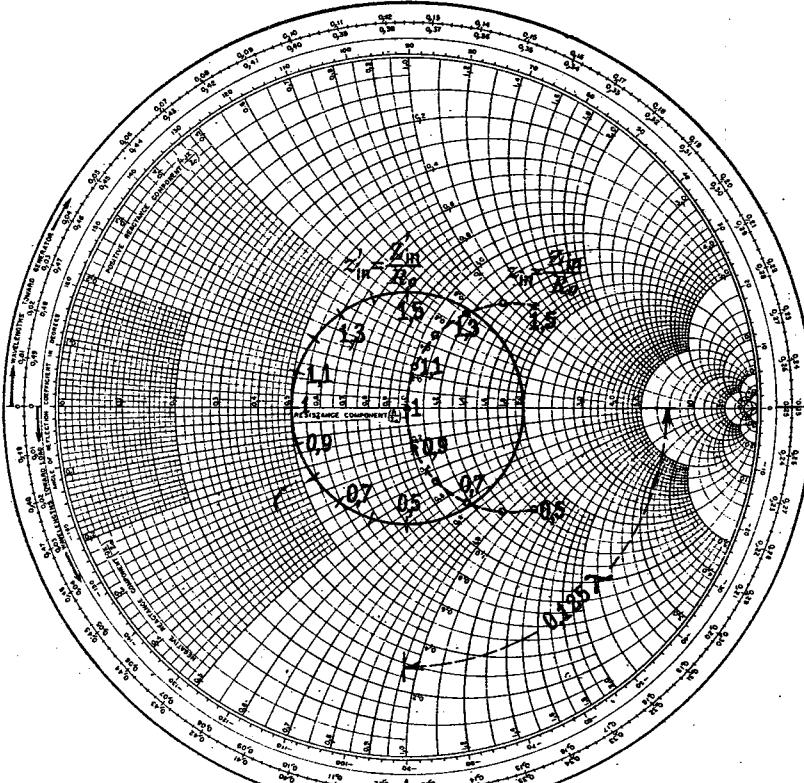


FIG. 13-9. Respuesta de frecuencia de un transformador de un cuarto de onda terminado en una carga resistiva constante.

Pero S' está relacionado con la relación de trasformación de impedancias R_R/R_{in} (o R_{in}/R_R , según cuál resulta mayor que la unidad). Por la Ec. (12-1), la sección adaptadora debe tener, para lograr la

adaptación de R_R a R_{in} en la frecuencia de diseño f_0 , una impedancia característica

$$R'_o = \sqrt{R_R R_{in}}$$

Dividiendo por R_R e invirtiendo,

$$r'_r = \frac{R_R}{R'_o} = \sqrt{\frac{R_R}{R_{in}}} \quad (13-32)$$

Pero, si $R_R > R_{in}$, $S' = r'_r$, o si $R_R < R_{in}$, $S' = 1/r'_r$; luego,

$$S' = \sqrt{\frac{R_R}{R_{in}}} \quad R_R > R_{in} \quad (13-33)$$

$$S' = \sqrt{\frac{R_{in}}{R_R}} \quad R_R < R_{in}$$

Por lo tanto, para obtener un ancho de banda grande, resulta que la relación de impedancias trasformadas debe ser pequeña. De ahí la conveniencia de descomponer la relación de trasformación deseada en dos o más factores, conectando en cascada otras tantas secciones trasformadoras. (El estudiante debe observar que esta conclusión coincide con la del Cap. XI, respecto de la respuesta de las secciones de constantes concentradas L y T .)

Suponiendo, entonces, que hay que conectar dos o más secciones en cascada para trasformar R_R en R_{in} , el problema es ahora el de determinar R'_o , R''_o , R'''_o , etc., las impedancias características de estas secciones. Se han propuesto varias soluciones. Slater¹, entre otros, ha sugerido que los logaritmos vulgares de las relaciones de impedancia en los empalmes del sistema sigan los coeficientes de la serie binomial $(a + b)^n$, es decir:

Nº de secciones de $\lambda/4$, n

2
3
4

Logaritmo de la relación de impedancias

1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

Como ejemplo, consideremos el diseño de un sistema de dos secciones de cuarto de onda. Leyendo de izquierda a derecha en el inserto de la Fig. 13-10, las relaciones de impedancia en las junturas son R''_o/R'_o , R'_o/R''_o , y R_R/R'_o . Dado que el número de secciones es $n = 2$,

$$\log \frac{R'_o}{R''_o} = 2 \log \frac{R''_o}{R'_o} = 2 \log \frac{R_R}{R'_o}$$

¹ J. C. Slater, "Microwave Transmission", pp. 57 y sig., McGraw-Hill Book Company, Inc., Nueva York, 1942. Slater explica también la teoría de la obtención de grandes anchos de banda por medio de la conexión en cascada de secciones considerando la cancelación de las ondas reflejadas en los distintos empalmes del sistema. Algunos trabajos recientes permiten mejores soluciones para el ajuste de los niveles de impedancia. Ver, por ejemplo, R. E. Collins, Theory and Design of Wide-band Multisection Quarter-wave Transformers, Proc. IRE, vol. 43, N° 2, p. 179, febrero de 1955.

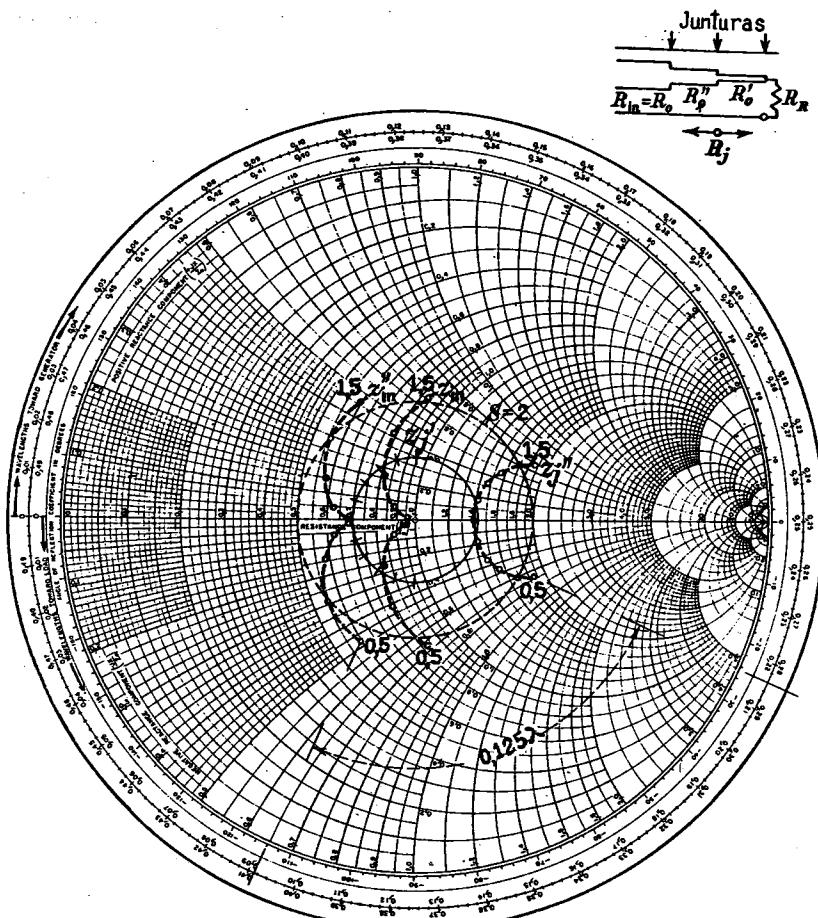


FIG. 13-10. Determinación de la impedancia de entrada de dos transformadores de un cuarto de onda en cascada, terminados en una carga resistiva constante.

es decir, de izquierda a derecha, los logaritmos de las relaciones de impedancia siguen la sucesión 1 2 1, de acuerdo con la tabla anterior. Luego, tomando los antilogaritmos,

$$\frac{R'_o}{R''_o} = \left(\frac{R''_o}{R_o} \right)^2 = \left(\frac{R_R}{R'_o} \right)^2 \quad (13-34)$$

Despejando R'_o y R''_o en términos de R_o y R_R ,

$$R'_o = \frac{R_o R_R}{R''_o} \quad o \quad R'_o = \sqrt[4]{R_R^3 R_o} \quad (13-35a)$$

$$R''_o = \frac{R_o R_R}{R'_o} \quad (13-35b)$$

El estudiante puede verificar para este caso que la impedancia en la juntura de las dos secciones de un cuarto de onda es

$$R_j = \sqrt{R_R R_o} \quad (13-36)$$

Se utilizará ahora esta información para el diseño de un sistema de doble sección para una transformación global de impedancias de 4:1. Se computará entonces la respuesta y se la comparará con los resultados obtenidos en el apartado precedente. Sea, pues, $R_R = 4R_o$. Luego, por las Ecs. (13-35),

$$R'_o = \sqrt[4]{4^3 R_o^4} = 2,83 R_o$$

$$R''_o = \frac{4 R_o^2}{2,83 R_o} = 1,414 R_o$$

Como primer paso, consideremos la sección de la derecha en el diagrama, y normalicemos R_R con respecto a R'_o ,

$$r'_r = \frac{4 R_o}{2,83 R_o} = 1,414$$

Por la Ec. (13-36), la impedancia de entrada normalizada debe ser,

$$r'_j = \frac{2 R_o}{2,83 R_o} = 0,707$$

Siguiendo el método del apartado precedente, entremos al ábaco de Smith (Fig. 13-10) por r'_r , y giremos sobre una circunferencia de S' constante en la fracción de longitud de onda correspondiente a cada frecuencia. Los valores de z'_j están tabulados en la tabla 13-2 y el lugar geométrico correspondiente aparece en la figura.

TABLA 13-2. CÁLCULO DE z_{in} PARA UN TRASFORMADOR DE DOBLE SECCIÓN DE UN CUARTO DE ONDA

f/f_0	l/λ	z'_j	z''_j	z''_{in}	z_{in}
1,5	0,375	$0,94 + j0,34$	$1,88 + j0,68$	$0,59 + j0,475$	$0,84 + j0,67$
1,4	0,350	$0,85 + j0,30$	$1,70 + j0,60$	$0,56 + j0,29$	$0,79 + j0,41$
1,3	0,325	$0,78 + j0,24$	$1,56 + j0,48$	$0,58 + j0,15$	$0,82 + j0,21$
1,2	0,300	$0,74 + j0,16$	$1,48 + j0,32$	$0,625 + j0,05$	$0,88 + j0,71$
1,1	0,275	$0,71 + j0,08$	$1,42 + j0,16$	$0,68 + j0,01$	$0,96 + j0,01$
1,0	0,250	$0,70 + j0,00$	$1,40 + j0,00$	$0,71 + j0,00$	$1,00 + j0,00$
0,9	0,225				
0,8	0,200				
0,7	0,175				
0,6	0,150				
0,5	0,125				

Simetría conjugada

Pero Z_j es la terminación para la sección trasformadora de la izquierda en la Fig. 13-10. Para considerar esta sección en el ábaco de

Smith, hay que normalizar todos los valores respecto de R''_o . La doble prima indicará estas cantidades. Se tiene así:

$$z''_j = \frac{Z_j}{R''_o} = \frac{Z_j}{R'_o} \frac{R'_o}{R''_o} = z'_j \frac{2,83 R_o}{1,414 R_o} = 2z'_j$$

Estos valores se reúnen en la tabla 13-2 y se representan gráficamente en la Fig. 13-10. Dado que z''_j es la terminación de la sección de la izquierda en la Fig. 13-10, obtiénesse z''_{in} entrando en el ábaco por el valor de z''_j , correspondiente a cada frecuencia y girando hacia el generador, sobre una circunferencia de S'' constante, la debida distancia indicada en la tabla. z_{in} está determinada por

$$z_{in} = \frac{Z_{in}}{R_o} = \frac{Z_{in} R''_o}{R''_o R_o} = z''_{in} \frac{1,414 R_o}{R_o} = 1,414 z''_{in}$$

La comparación de las Figs. 13-9 y 13-10 muestra el aumento de ancho de banda ofrecido por las dos secciones en cascada. Puede verse que casi todo el lugar geométrico para $0,5 \leq f/f_0 \leq 1,5$ está comprendido dentro de la circunferencia $S = 2$ en la Fig. 13-10, en comparación con la gama $0,7 \leq f/f_0 \leq 1,3$ correspondiente al caso de una sola sección. Dicho de otra manera, con una sola sección, un ancho de banda fraccional de 60 por ciento conduce a una relación de onda estacionaria $S \approx 2$, mientras que, con dos secciones, resulta $S \approx 1,4$.

Los resultados anteriores son en general aplicables también para las secciones transformadoras de constantes concentradas. Es interesante observar, sin embargo, que con la sección T de 90° de desplazamiento de fase (el análogo de la sección de un cuarto de onda) no se halla presente la simetría conjugada característica de la sección de un cuarto de onda. Este punto se ilustra más adelante, en relación con la Fig. 13-16.

13-14. Redes en serie y en paralelo. El segundo principio para la obtención de anchos de banda grandes consiste en la adición de redes en paralelo o en serie con la carga verdadera, o en la adición de transformadores lineales entre la carga y la línea principal de transmisión de modo que la impedancia de entrada de la combinación resultante quede comprendida dentro de la circunferencia de onda estacionaria prefijada en el ábaco de impedancia. Bennett, Coleman y Meier¹ han presentado algunos diagramas que muestran el efecto de agregar diferentes tipos de elementos. Sus resultados se reproducen adaptados al ábaco de Smith en las Figs. 13-11 a 13-14. Estas curvas pueden servir como guía general para la elección de los elementos compensadores que

¹ F. D. Bennett, P. D. Coleman, and A. S. Meier, *The Design of Broadband Aircraft Antenna Systems*, Proc. IRE, vol. 33, N° 10, p. 671, octubre de 1945. Sus curvas se refieren al ábaco bicircular, en el que las coordenadas de impedancia y admittance son rectangulares. Es más fácil en este caso obtener una imagen del efecto de agregar una reactancia o una susceptancia al lugar geométrico de Z_R o Y_R en estos diagramas. Usamos en este texto el ábaco de Smith porque permite una más fácil determinación de la circunferencia de onda estacionaria (ver Cap. X).

Han desarrollado una solución más analítica, fuera del alcance de este texto, Nelson y Stavis. Véase Staff, Radio Research Laboratory, Harvard University, "Very High Frequency Techniques", vol. 1, Cap. III, McGraw-Hill Book Company, Inc., Nueva York, 1947. Los autores describen un método para establecer curvas de límite para un lugar geométrico \bar{Z}_R dado a partir de las cuales pueden hallarse los elementos transformadores necesarios.

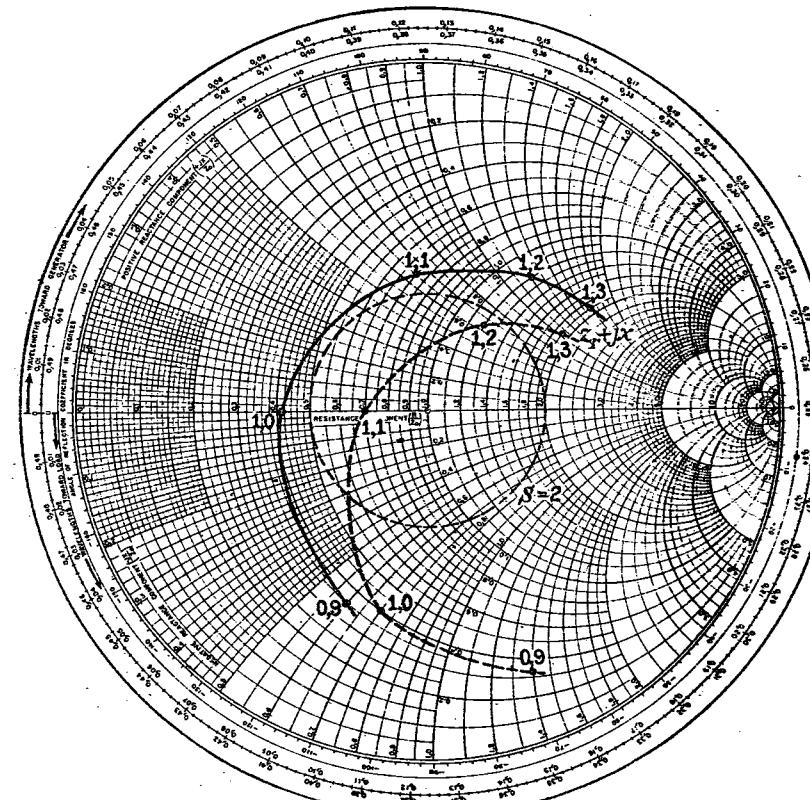


FIG. 13-11. Efecto de un capacitor en serie con una impedancia de carga.
(Según Bennett, Coleman y Meier.)

conviene utilizar para diferentes tipos de lugares geométricos de la carga.

El ejemplo siguiente ofrece un interesante ejemplo del uso de un elemento compensador en paralelo, en el que se combina un "stub" con la adecuada elección de la longitud de una antena para lograr la transformación de impedancias deseada.

Supongamos que se quiere adaptar una antena cilíndrica alimentada por el centro a una línea de 100 ohm. La frecuencia central f_0 es de 42,5 Mc/s. Ha de usarse un "stub" en derivación y la relación de onda estacionaria debe ser como máximo de 1,25 dentro de un ancho de banda de 30 por ciento.

La impedancia (o admittance) de entrada de una antena puede ser controlada dentro de ciertos límites ajustando su longitud y su radio¹. Dado que

¹ Ver, por ejemplo, E. C. Jordan, "Electromagnetic Waves and Radiating Systems", Cap. XIII, Prentice-Hall, Inc., Nueva York, 1950.

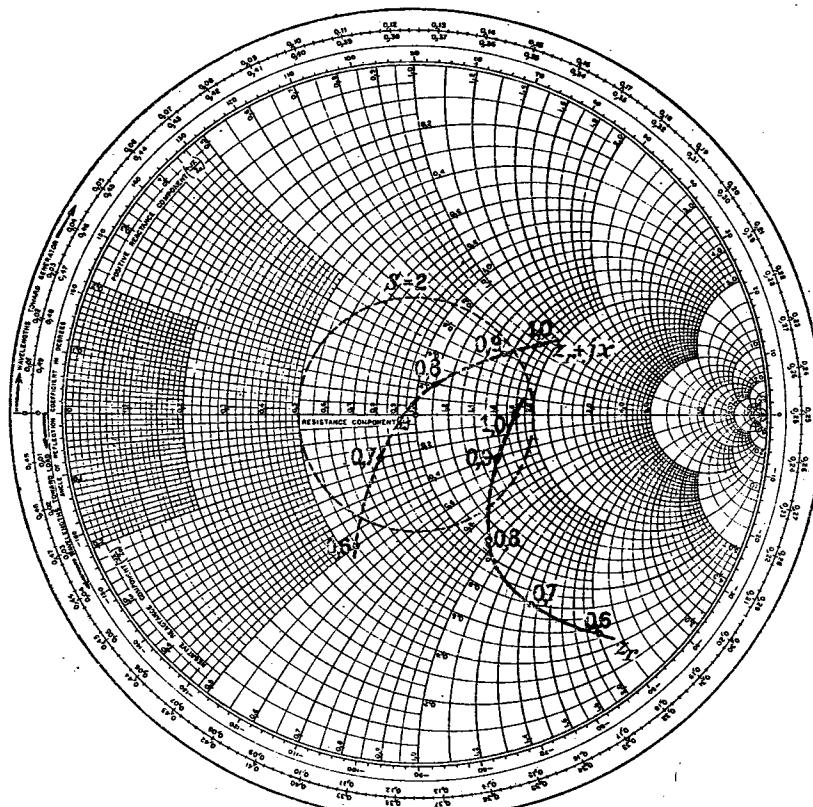


FIG. 13-12. Efecto de un inductor en serie con una impedancia de carga.
(Según Bennett, Coleman y Meier.)

un "stub" en derivación sólo puede modificar la componente susceptiva de la admittance total de terminación de la línea principal, el primer problema es el de elegir las dimensiones de la antena para obtener el valor correcto de la conductancia. Luego puede emplearse el "stub" para cancelar la susceptancia. El lugar geométrico de línea cortada de la Fig. 13-15 muestra la admittance de entrada (normalizada respecto de $R_o = 100$ ohm) de una antena cilíndrica alimentada en el centro como una función de la semilongitud eléctrica $\beta l/2$ para el caso en que la relación de la semilongitud al radio es de 60. El examen de esta curva muestra que la semilongitud eléctrica $\beta l/2 = 1,36$ da una componente normalizada conductiva de aproximadamente 1 y representa, por lo tanto, una solución satisfactoria. La longitud física de la antena a

$$f_0 = 42,5 \text{ Mc/s}$$

debe ser $\beta l/2 = \omega_0 l/2c = 1,36$, o

$$l = \frac{2c \times 1,36}{\omega_0} = \frac{2(3 \times 10^8) \times 1,36}{2\pi \times 42,5 \times 10^6} = \frac{3,06}{120} = 25,5 \text{ mm}$$

y el radio de la antena es

$$\frac{l}{2r} = 60 \quad r = \frac{l}{120} = 25,5 \text{ mm}$$

La segunda parte del problema consiste entonces en elegir la longitud de "stub" adecuada para cancelar la susceptancia normalizada de 0,956 que presenta la antena a f_0 . Una manera de hacerlo consiste en extender la línea de 100 ohm más allá de la antena a modo de "stub", como se muestra en la misma Fig. 13-15. El estudiante puede calcular fácilmente la longitud reque-

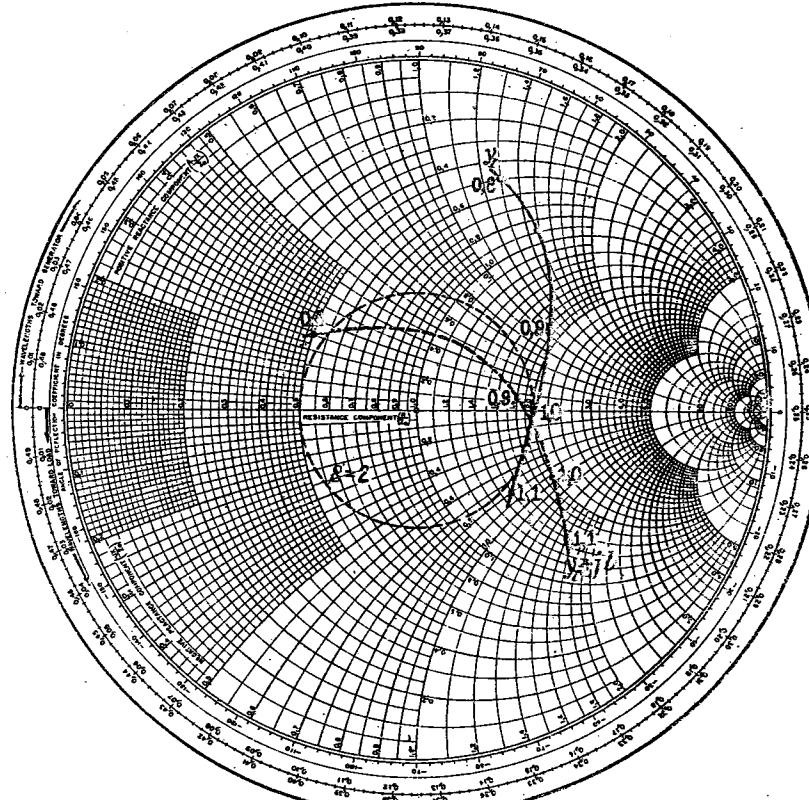


FIG. 13-13. Efecto de un inductor en paralelo sobre una admittance de carga.
(Según Bennett, Coleman y Meier.)

rida. Como solución de alternativa, es posible usar un "stub" coaxil que puede alojarse dentro de la antena. Ello es posible en este caso porque la antena tiene 50 mm de diámetro y sería construida con un tubo por razones de economía. El esquema básico aparece en la vista b de la Fig. 13-15. Se observará que hay dos "stubs" en serie en esta disposición, de modo que cada uno de ellos debe tener una susceptancia igual a $-2b_r$.

Un valor razonable de R'_o para una línea coaxil es el de 70 ohm. Luego, si se usa este valor, la longitud de cada "stub" en cortocircuito en f_0 debe ser

$$B_s = -2b_r/R_o = -\frac{1}{R_o} \cot \frac{360s}{\lambda}$$

$$\cot \frac{360s}{\lambda} = \frac{2 \times 0,956 \times 70}{100} = 1,34$$

$$s = \frac{36,7}{360} \lambda = 0,102\lambda = 71,88 \text{ mm}$$

El mismo resultado puede obtenerse, desde luego, con el ábaco.

Supongamos que el tubo de que está formada la antena tiene una pared

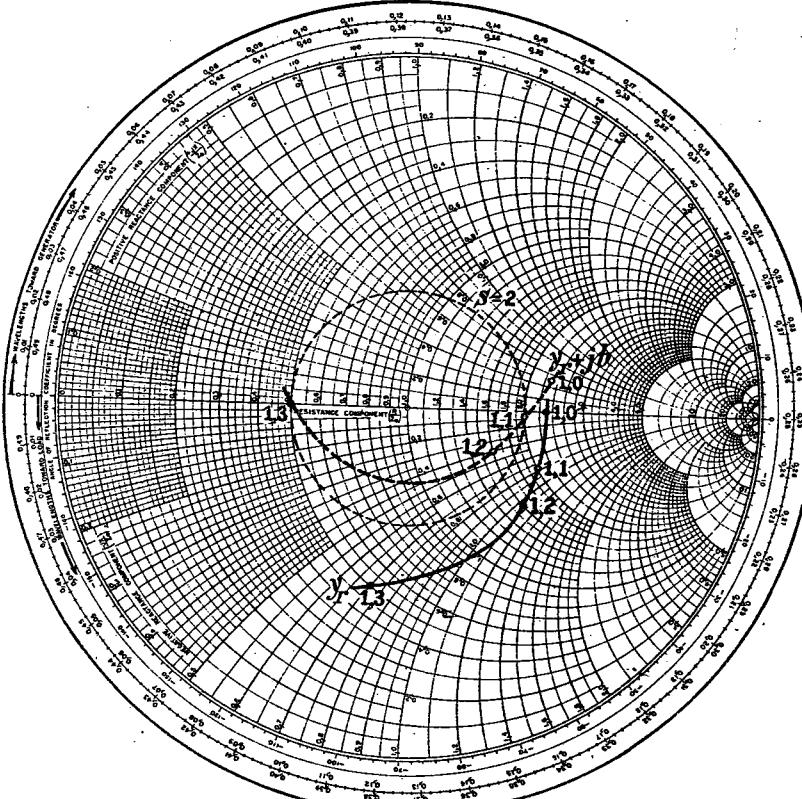


FIG. 13-14. Efecto de un capacitor en paralelo sobre una admittance de entrada.
(Según Bennett, Coleman y Meier.)

de 3 mm de espesor. Entonces el diámetro del conductor externo del "stub" coaxial es $50 - 6 = 44$ mm y el conductor central debe tener un diámetro

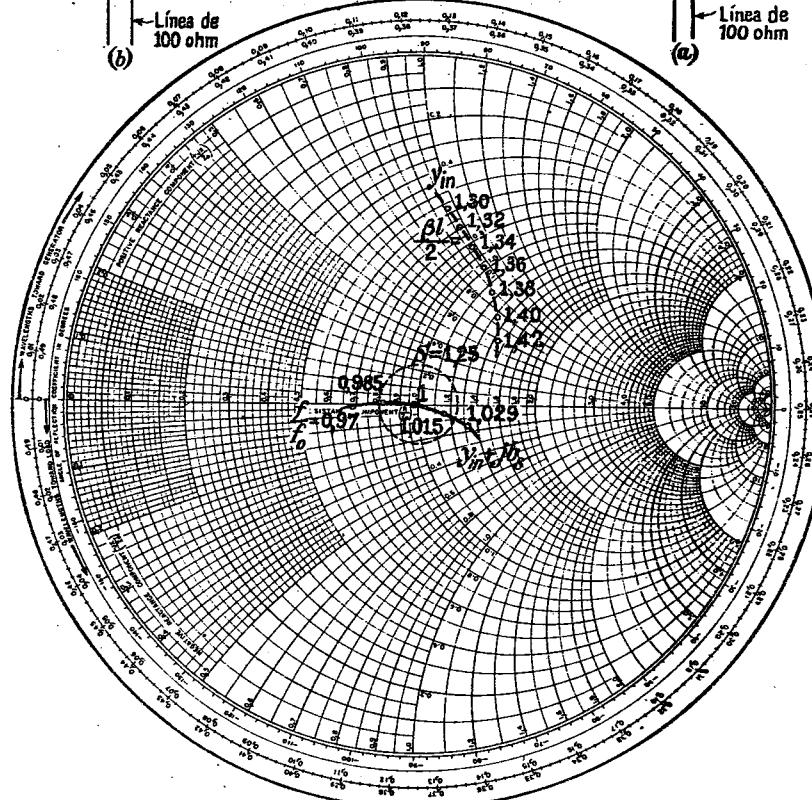
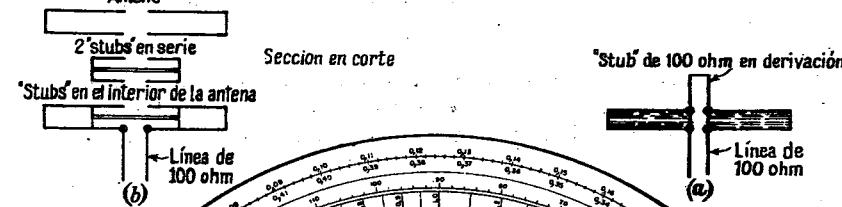
$$R'_o = 138 \log \frac{d_2}{d_1}$$

$$\log \frac{d_2}{d_1} = \frac{70}{138} = 1,28 \text{ mm}$$

$$d_1 = \frac{d_2}{3,21} = \frac{1,75}{3,21} = 1,38 \text{ mm}$$

Los cálculos para la determinación de z_{in} aparecen en la tabla 13-3 y el lugar geométrico de esta impedancia se representa con línea llena en la Fig. 13-15.

Antena



Dado que los puntos $f/f_0 = 0,985$ y $1,015$ están dentro de la circunferencia $S = 1,25$, satisfácense las especificaciones. Debe decirse, no obstante, que otras elecciones de longitud y radio de la antena permiten mejores soluciones del problema.

13-15. Trasformadores de un cuarto de onda con carga variable. En apartados anteriores hemos considerado la respuesta del transformador de cuarto de onda para el caso en que la carga es una resistencia independiente de la frecuencia. La sección de un cuarto de onda es también útil cuando la carga varía con simetría conjugada en torno de la frecuencia central y está fuera de la circunferencia de relación de onda estacionaria tolerable en el ábaco. Un tipo de carga que varía de esta manera es la antena resonante. Se dan valores típicos en la forma normalizada Z_R/R_o en la tabla 13-4, donde R_o es la impedancia caracte-

TABLA 13-4. IMPEDANCIA DE PUNTO DE EXCITACIÓN DE UNA ANTENA RESONANTE

f/f_0	Z_R
0,8	$3,1 + j1,7$
0,9	$3,8 + j1,0$
1,0	$4,0 + j0$
1,1	$3,8 - j1,0$
1,2	$3,1 - j1,7$

terística de la línea de trasmisión principal. Para una adaptación perfecta en f_0 , la impedancia característica de la sección de un cuarto de onda debe ser

$$R'_o = \sqrt{R_R R_o} = \sqrt{4R_o^2} = 2R_o$$

El lugar geométrico de la impedancia de entrada puede calcularse según los métodos antes descritos y se lo representa en la Fig. 13-16.

Es interesante observar el comportamiento del análogo de constantes concentradas de la sección de línea de un cuarto de onda, es decir, el de la sección T con un desplazamiento de fase de $\pm 90^\circ$. Para una sección de este tipo, las ecuaciones de diseño en f_0 son

$$|X_1| = |X_2| = |X_3| = \sqrt{R_R R_o} = 2R_o$$

y, eligiendo X_1 y X_2 como inductiva y X_3 como capacitiva,

$$X_1 = X_2 = 2R_o \frac{f}{f_0} \quad (13-37)$$

$$X_3 = -2R_o \frac{f_0}{f} \quad (13-38)$$

y

$$Z_{in} = jX_1 + j \frac{X_3(Z_R + jX_2)}{Z_R + j(X_2 + X_3)} \quad (13-39)$$

El lugar geométrico de la impedancia de entrada para la sección T puede calcularse por sustitución directa en la Ec. (13-39) o por medio de trasformaciones sucesivas en el ábaco de Smith. El lugar geométrico

resultante es el que se muestra en línea cortada en la Fig. 13-16, marcado z_{in} (T). Puede observarse que la simetría conjugada que se obtiene con la linea de un cuarto de onda se pierde con la sección T análoga. Por esta razón, la sección T se diseña para adaptación perfecta a una

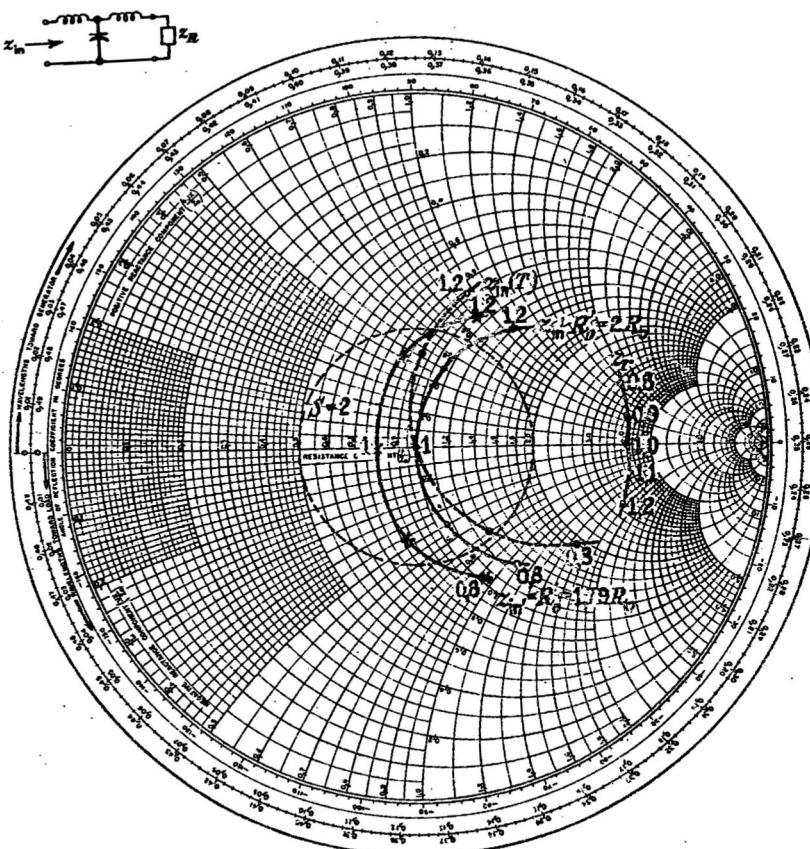


FIG. 13-16. Efecto de las secciones de cuarto de onda sobre una impedancia de carga que tiene simetría conjugada respecto de f_0 . La curva llena corresponde al caso de una sección de línea de un cuarto de onda; la de linea cortada, a una sección T simétrica.

frecuencia menor que f_0 . Esto es, se tolera una ligera falla de adaptación en f_0 para que una mayor parte del lugar geométrico de z_{in} quede comprendida dentro de la circunferencia de onda estacionaria constante deseada.

Volviendo a la sección de línea de un cuarto de onda, obsérvese en la Fig. 13-16 que el procedimiento de diseño para adaptación perfecta en f_0 significa un desperdicio de ancho de banda: el lugar geométrico de z_{in} está todo dentro de la porción derecha del círculo $S = 2$. Podría

ser mejor sacrificar la adaptación perfecta en f_0 para que los extremos exteriores del lugar geométrico de z_{in} entren en el círculo dicho. Por ejemplo, si la sección se diseña para trasformar $r_r = 4$ en $r_{in} = 0,8$ en f_0 , poniendo $R'_o = \sqrt{0,8 \times 4 \times R_o^2} = 1,79R_o$, el lugar geométrico se desplaza hacia la izquierda hasta la posición indicada por las cruces en la Fig. 13-16. Se observará que resulta un pequeño, pero notable, aumento del ancho de banda.

13-16. El transformador de sección de línea. En el último apartado se ha visto que la sección de un cuarto de onda es útil para la transformación de cargas cuyos lugares geométricos tienen simetría conjugada respecto de una frecuencia central f_0 . Para estas cargas, la sección se diseña de modo de trasformar una resistencia pura en otra resistencia pura en la frecuencia f_0 . En las cargas que no presentan simetría conjugada, obtiénes una mejor solución mediante una generalización del transformador de un cuarto de onda, es decir, un transformador de sección de línea con $l \neq \lambda/4$. En este último caso, la sección puede ser usada para transformar una carga *compleja* en una impedancia de entrada compleja en la frecuencia f_0 o cualquier otra frecuencia.

Sea $Z_{in} = R_{in} + jX_{in}$ y $Z_R = R_R + jX_R$; luego, según puede demostrarse (ver Prob. 12-13), las ecuaciones de diseño para la impedancia característica R'_o y la longitud l del transformador son,

$$R'_o = \sqrt{(R_{in}R_R - X_{in}X_R) - \frac{(X_R - X_{in})(R_RX_{in} + R_{in}X_R)}{R_{in} - R_R}} \quad (13-40)$$

$$\operatorname{tg} \beta l = \frac{R'_o(R_{in} - R_R)}{R_RX_{in} + R_{in}X_R} \quad (13-41)$$

Estas ecuaciones pueden ser usadas como guía para el diseño del transformador; la experiencia es muy valiosa para hacer una buena estimación de los valores adecuados de Z_{in} y Z_R para cada situación particular. El método general que conviene seguir está ilustrado por el siguiente ejemplo:

Supongamos que queremos adaptar una antena a una línea de transmisión de alambres paralelos de 100 ohm. La impedancia normalizada de la antena se da en la tabla 13-5 y se representa en la Fig. 13-17a. Dado que el

TABLA 13-5. CÁLCULOS PARA LA FIG. 13-17.

f/f_0	z_r	z'_r	l/λ	z'_{in}	z_{in}
0,8	$0,40 - j0,80$	$0,989 - j1,975$	0,369	$0,89 + j1,80$	$0,36 + j0,77$
0,9	$0,45 - j0,50$	$1,11 - j1,233$	0,415	$2,96 + j0,50$	$1,20 + j0,20$
1,0	$0,60 + j0,00$	$1,48 + j0$	0,461	$1,38 + j0,28$	$0,56 + j0,11$
1,1	$0,75 + j0,50$	$1,85 + j1,233$	0,507	$2,20 + j1,20$	$0,82 + j0,49$
1,2	$1,10 + j0,85$	$2,72 + j2,1$	0,554	$3,20 - j2,00$	$1,30 - j0,81$

lugar geométrico de z_r no tiene simetría conjugada, se decide diseñar el transformador para trasformar $Z_R = 45 - j50$ ohm en $Z_{in} = 120 + j20$ ohm

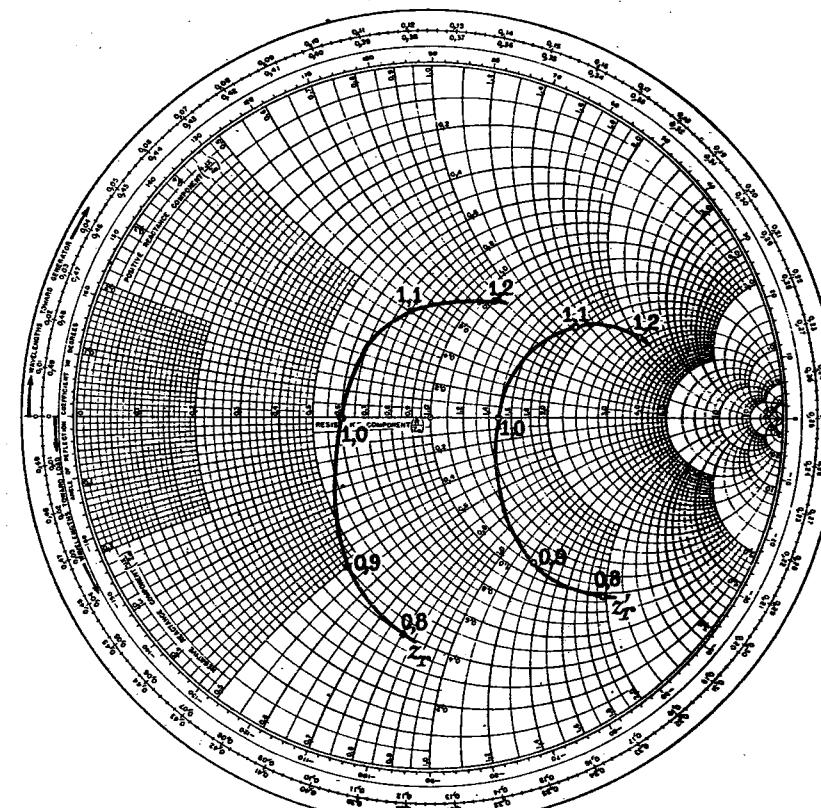


FIG. 13-17. Adaptación de una antena a una línea de transmisión por medio de un transformador de sección de línea. (a) Lugar geométrico normalizado de la carga. (b) Lugar geométrico de la admittance de entrada normalizada.

en la frecuencia $f = 0,9 f_0$. (Obsérvese que se trata de una estimación basada en la forma general del lugar geométrico de z_r .) Se calculan entonces las constantes del transformador con las Ecs. (13-40) y (13-41):

$$R'_o = \sqrt{120(45) - 20(-50)} - \frac{(-50 - 20)[45(20) + 120(-50)]}{120 - 45} = 40,5 \text{ ohm}$$

Luego calculamos y representamos $z'_r = Z_R/R'_o$ (ver tabla 13-5 y Fig. 13-17a). La longitud de la sección de línea para $f = 0,9f_0$ es

$$\operatorname{tg} \beta l = \frac{40,5(120 - 45)}{-5 \cdot 100} = -0,596 \quad \beta l = 149,2^\circ$$

$$l = \frac{149,2}{\beta} = \frac{149,2}{360} \lambda = 0,415\lambda$$

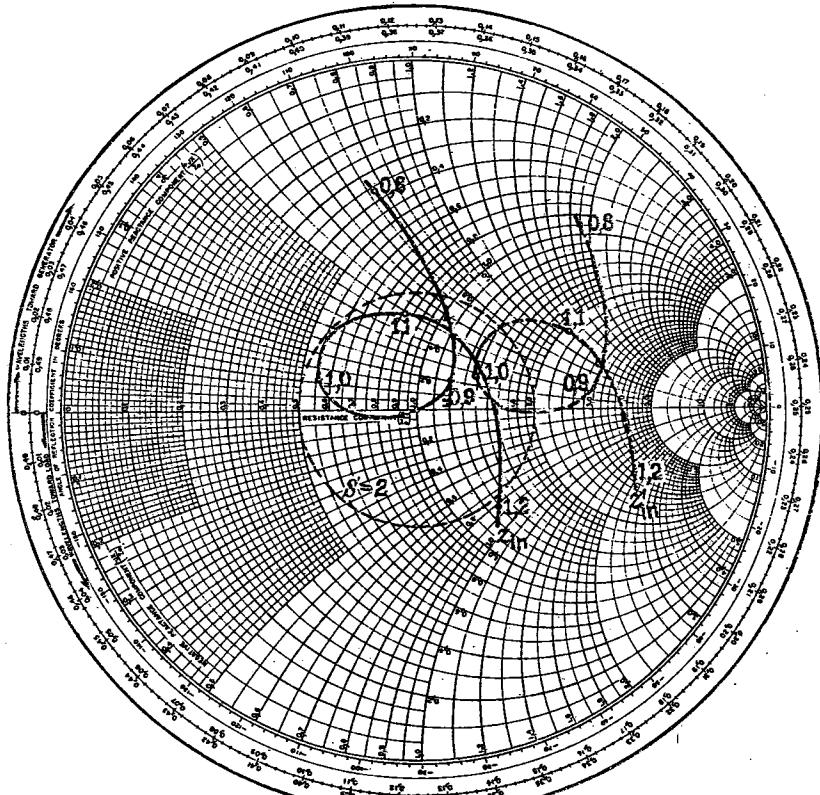


FIG. 13-17. (Continuación).

Para cualquier frecuencia distinta de $0.9f_0$ la longitud expresada como fracción de λ es

$$\frac{l}{\lambda} = \frac{0.415 f}{0.9 f_0}$$

Estos valores están dados en la tabla. Se obtiene entonces la impedancia de entrada normalizada con respecto a $R'_o = 40,5$ ohm entrando en la tabla por cada uno de los puntos y girando hacia el generador sobre la circunferencia de S constante el ángulo que corresponda en cada caso. El lugar geométrico resultante de z'_{in} está indicado en la Fig. 13-17b, junto con z'_{in} . Esta última obtéñese mediante

$$z_{in} = \frac{Z_{in}}{R_o} = \frac{Z_{in} R'_o}{R'_o R_o} = z_{in} \frac{40,5}{100}$$

La figura muestra que una buena porción del lugar geométrico de la impedancia de entrada está dentro de la circunferencia $S = 2$. Otras elec-

ciones de R'_o y l , diferentes de $40,5$ y $0,415\lambda$ respectivamente, pueden llevar a mejores soluciones. El lugar geométrico en espiral es típico para los transformadores de más de un cuarto de onda.

13-17. Elementos combinados. En muchos casos, una combinación de los dispositivos trasformadores de impedancia descritos resultan en una mejor trasformación de banda ancha. El procedimiento general que se emplea consiste en el uso de un primer dispositivo para producir un lugar geométrico ideal para el segundo. El lector que se interese en esta cuestión hará bien en consultar el trabajo de Coleman.

PROBLEMAS

13-1. Usando los circuitos equivalentes de la Fig. 13-3, derivar ecuaciones en la forma polar para A_m , A_l/A_m , y A_h/A_m . En cada caso $A = E_o/E_g$ y los subíndices indican las correspondientes bandas de frecuencia.

13-2. Las constantes medidas del transformador de audio cuya curva de respuesta se da en la Fig. 13-4 son:

Corriente continua en el primario = 60 mA

Inductancia del primario = 2,2 H

Inductancia de dispersión referida al primario = 44,6 mH

Resistencia c.c. del primario = 212 ohm

Resistencia c.c. del secundario = 0,32 ohm

Relación de vueltas del primario al secundario = 28,5.

a. Calcular la respuesta suponiendo que el transformador está excitado por un generador de 2.000 ohm y cargado con 3,5 ohm. Identificar las frecuencias de potencia mitad. Comparar sus resultados con los de la Fig. 13-4 y explicar las diferencias.

b. Despreciando las pérdidas en el núcleo, calcular el rendimiento del transformador.

c. ¿Cuál es el coeficiente de acoplamiento del transformador? Detalle las aproximaciones hechas.

d. Qualitativamente, ¿cuáles serían los efectos de la reducción de la corriente continua del primario sobre las respuestas de baja y alta frecuencia?

13-3. (a) Computar los elementos de un atenuador T diseñado para conectar una carga de 600 ohm a una línea de 1.800 ohm con una pérdida de 20 dB. (b) Diseñar un atenuador de pérdida mínima para adoptar la misma carga a la misma línea.

13-4. Las Ecs. (13-15) a (13-17) son a veces difíciles de usar porque involucran diferencias entre dos números casi iguales. Derivar ecuaciones alternativas de diseño en términos de $p = P_{entrada}/P_{salida}$ en lugar de la pérdida en nepes A.

13-5. Derivar las ecuaciones de diseño para un atenuador π .

13-6. Dos atenuadores simétricos T, cada uno con una pérdida de N dB y diseñado para trabajar entre dos resistencias R , son conectados en cascada. Comparar la separación respecto de las variaciones de carga provista por esta combinación con la de un único atenuador T de $2N$ dB de pérdida y diseñado para trabajar entre resistencias R .

13-7. (a) En un atenuador π , ¿cuál es mayor, $|R_{oc} - R_{11}|/R_{11}$ ó $|R_{sc} - R_{11}|/R_{11}$? (b) Diseñar un atenuador π para adaptar una carga nominal de

500 ohm a 500 ohm. La desviación máxima de R_{in} respecto de R_{I1} no debe exceder de 10 por ciento. (c) ¿Cuál es la admittance de entrada si la resistencia de carga de 500 ohm se deriva con una reactancia capacitativa de igual valor numérico? ¿Qué conclusiones pueden obtenerse de esta respuesta?

13-8. Un atenuador de 600 ohm ($R_{J1} = R_{J2} = 600$ ohm) debe ser diseñado de modo que provea pasos de atenuación de 0, 1, 2, 3, 4 y 5 dB.

a. Diseñar un atenuador T que satisfaga esta especificación. Dibujar el diagrama de circuito, indicando la disposición de los conmutadores. Utilizar una llave de secciones múltiples acopladas con el mínimo número de secciones.

b. Repetir a, pero con una configuración T puenteada.

c. Comparar los costes comparativos de los dos diseños.

13-9. Verificar la Ec. (13-27) para el atenuador T puenteado de la Fig. 13-8. Obsérvese que $R_s R_2 = R_o^2$.

13-10. (a) Diseñar un atenuador escalera con secciones π para $R_{I2} = 600$ ohm y pasos relativos de 0, 1, 2, 3, 4 y 5 dB. Dibujar el diagrama combinando los resistores adyacentes siempre que sea posible. (b) Repetir a, pero usando una escalera de secciones T. (c) Comparar los dos diseños desde el punto de vista de la economía de la construcción.

13-11. (a) Para la impedancia de carga de la tabla 13-4, diseñar una sección L con inductor en serie y capacitor en derivación de modo de obtener un acoplamiento perfecto en f_0 . Representar z_{in} en el ábaco de Smith. (b) Repetir a con una red con capacitor en serie e inductor en derivación. (c) Modificar el diseño de a de modo de obtener un mayor ancho de banda.

13-12. Diseñar dos secciones L en cascada para satisfacer las especificaciones del Prob. 13-11a. Representar z_{in} en el ábaco de Smith y comparar con los resultados del Prob. 13-11a.

13-13. Trazar una curva similar a $z_{in}(T)$ de la Fig. 13-16 para una sección con rama en serie capacitiva y rama en derivación inductiva. Usar los datos de carga de la tabla 13-4. Sacar conclusiones.

13-14. Usando los datos z_r de la tabla 13-5, diseñar un transformador de sección de línea para adaptar una antena previamente elegida a una línea coaxial de 85 ohm. Dibujar un diagrama del sistema, incluyendo un balún (ver Cap. XII). Mostrar el comportamiento (omitiendo el efecto del balún) sobre el ábaco de Smith.

13-15. Usando los datos de z_r de la tabla 13-5, diseñar un transformador de sección de línea de modo de obtener mejores resultados que los de Fig. 13-5.

13-16. Usando los datos de la tabla 13-5, diseñar una sección de cuarto de onda que proporcione una adaptación perfecta en f_0 . Comparar la respuesta con la Fig. 13-17b.

13-17. Una carga dada se comporta de la siguiente manera:

f/f_0	Z ohm
0,8	$310 + j390$
0,9	$340 + j200$
1,0	$360 + j0$

La carga tiene simetría conjugada. Se utiliza un transformador de media onda con

$$R'_o = 500 \text{ ohm}$$

para adaptar esta carga a una línea de 200 ohm. Calcular la impedancia de entrada.

CAPÍTULO XIV

ECUALIZACIÓN

14-1. Principios fundamentales de la ecualización. Se ha visto en el Cap. VI que para la trasmisión libre de distorsión de una señal que posee dos o más componentes de frecuencia todas las componentes deben ser transmitidas con la misma atenuación (o amplificación) y con la misma velocidad de grupo (retardo constante). Las redes que comprenden elementos capacitivos o inductivos no satisfacen por lo general esta condición. Por ejemplo, se ha visto en el Cap. VIII que la atenuación y la velocidad de grupo de un par de cable no cargado son aproximadamente proporcionales a la raíz cuadrada de la frecuencia.

Una manera de corregir la distorsión de frecuencia (α no constante) en los cables telefónicos, descrita en el Cap. VIII, consiste en introducir carga en el cable. La carga de los cables es, sin embargo, cada vez menos común, especialmente en las conexiones interurbanas a causa de que la acción de filtro que resulta de la carga impide el uso del sistema para la trasmisión por onda portadora.

Otra manera de corregir la distorsión de frecuencia en una red de trasmisión consiste en introducir una red adicional que tenga una característica de α en función de la frecuencia tal que la atenuación conjunta de las dos redes resulte prácticamente independiente de la frecuencia. Cuando ello es deseable, puede eliminarse del mismo modo la distorsión de retardo, buscándose entonces que el tiempo total de trasmisión sea independiente de la frecuencia. El problema de la ecualización del retardo se considera posteriormente en este capítulo. En muchos casos de trasmisión de audio es suficiente la ecualización de atenuación, despreciándose la distorsión de retardo.

La Fig. 14-1 muestra gráficamente cómo cumple su propósito el ecualizador de atenuación¹. La curva 1 muestra la característica de pérdida de inserción de un cable terminado en una resistencia de 600 ohm. La curva 2 muestra la característica de pérdida de inserción de un ecualizador ideal que compensaría exactamente la distorsión de frecuencia del cable, junto con su terminación. La curva 3 es la pérdida de inserción total del cable y el ecualizador. Los ecualizadores reales no eliminan por completo la distorsión de frecuencia, puesto que no puede hacerse que su pérdida tome los valores ideales sino sólo en un número limitado de frecuencias.

En los casos prácticos es necesario elegir primero la banda de frecuencias sobre la cual es deseable hacer las pérdidas esencialmente

¹ "Un ecualizador de atenuación es una red correctora para hacer el valor absoluto (o magnitud) de la impedancia de transferencia, con respecto a dos pares de terminales dados, sustancialmente constante para todas las frecuencias de una banda deseada." [ASA C42 65.06.546 (1953).]

constantes. Debe observarse que la pérdida total de la combinación en todas las frecuencias debe ser mayor que la pérdida máxima de la red original dentro de la banda elegida. Por lo tanto, los ecualizadores se utilizan comúnmente en los sistemas junto con amplificadores que sirven para compensar la pérdida introducida por el ecualizador.

Tal como se los aplica a los cables telefónicos, debe hacerse notar una diferencia importante entre los ecualizadores y la carga. La aplicación de carga reduce también la distorsión de frecuencia (por debajo de la frecuencia de corte) y, además, reduce la atenuación en la misma gama de frecuencias. En cambio, el ecualizador puede ser diseñado de modo de proveer una respuesta más plana y puede ser conectado a los terminales, mientras que las bobinas de carga deben ser intercaladas a intervalos regulares a lo largo de la línea. Por lo tanto, la carga es sólo posible en las instalaciones permanentes. Es por supuesto posible utilizar ecualizadores en las líneas cargadas, a fin de lograr algunas de las ventajas de los dos métodos. Los ecualizadores se utilizan también en otros sistemas de transmisión, donde la pupinización no es posible.

En la práctica encuéntranse básicamente dos tipos de ecualizadores de atenuación de cuatro terminales: (1) Los diseñados para trabajar entre resistencias iguales del orden de 50 a 600 ohm, es decir, el rango de las impedancias características de las líneas comunes. Estos ecualizadores se utilizan corrientemente para ecualizar la pérdida de transmisión en las líneas. (2) Los diseñados para trabajar entre resistencias baja a alta o alta a alta, pero no necesariamente iguales. En algunos casos la ecualización puede obtenerse por medio de una red de corrección de dos terminales. La red de resistencia constante es la más versátil, tiene el método de diseño más directo, y será descrita en primer término, aunque históricamente es posterior a las redes de dos terminales en serie o en derivación. El desarrollo de los ecualizadores se debe en gran parte a Hoyt¹ y Zobel² y conviene consultar los respectivos trabajos para un análisis más completo.

La terminación más simple para una red es un resistor. Por otra parte, la impedancia de un resistor es independiente de la frecuencia, excepto por las variaciones secundarias debidas a las capacitancias y las inductancias inherentes a su construcción física. Consideremos una red terminada en una resistencia, cuyas características de transmisión, es decir, pérdida de inserción, han sido determinadas sea ana-

¹ R. S. Hoyt, U. S. Patent 1,453,980.

² O. J. Zobel, Distortion Correction in Electrical Circuits with Constant Resistance Recurrent Networks, Bell System Tech. J., julio de 1928.

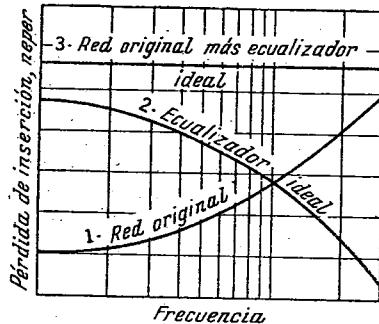


FIG. 14-1. Característica de pérdida de inserción de una red de trasmisión típica y corrección por medio de un ecualizador ideal.

líticamente, sea experimentalmente. Las características de transmisión serán, en general, no sólo función de la atenuación de la red, sino también de las reflexiones debidas a la falsa adaptación de impedancias, las que pueden ocurrir en cualquiera de los extremos. El ecualizador

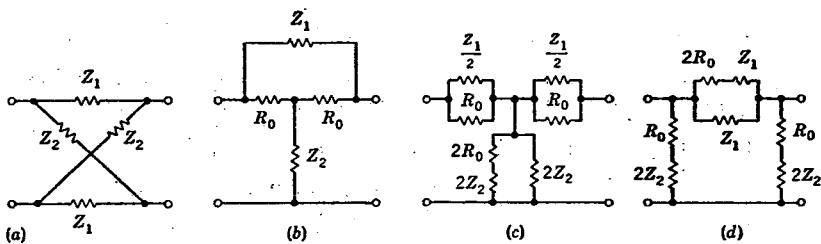


FIG. 14-2. Redes de resistencia constante, cuatro terminales, típicas. En cada caso, $Z_1Z_2 = R_o^2$. (a) Celosía. (b) T puenteada. (c) T. (d) Δ .

puede ser diseñado de modo que compense las variaciones, con la frecuencia, tanto de las reflexiones como de la atenuación.

Desde el punto de vista de la simplicidad, si una red ecualizadora puede ser diseñada de modo que pueda ser insertada sin modificar las condiciones de reflexión, se la puede diseñar correspondientemente enfocando la atención en su característica de atenuación. Esto es posible por medio de las redes de resistencia constante.

Debe insistirse en que el ecualizador de resistencia constante estará terminado, cuando se lo usa, en su impedancia iterativa. Como se explicó en el Cap. VI, cuando una red está terminada de esta manera, la atenuación y la pérdida de inserción coinciden. Esto representa una gran simplificación en el problema de diseño. Por ejemplo, la característica de pérdida de inserción de un cable terminado en una resistencia puede ser obtenida por medición. Puede entonces diseñarse un ecualizador de resistencia constante de modo que proporcione una característica de a especificada, para lo cual hay ecuaciones disponibles.

14-2. Redes de resistencia constante. Se conocen varios tipos de redes de resistencia constante, de los cuales ilustra cuatro la Fig. 14-2. El de más amplio rango de aplicación es la red de celosía de la Fig. 14-2a, aunque la sección T puenteada de b es preferible, a menudo, cuando el sistema tiene una conexión de masa común. Las impedancias Z_1 y Z_2 de las cuatro redes ilustradas deben elegirse de modo que

$$Z_1Z_2 = R_o^2 \quad (14-1)$$

donde R_o es una resistencia que es independiente de la frecuencia. Los pares de redes de dos terminales Z_1 y Z_2 que satisfacen la relación (14-1) se llaman "redes inversas", y se verá después la manera de realizarlos.

Pueden determinarse fácilmente la impedancia característica y la constante de propagación de la red de celosía de la Fig. 14-2a a partir del examen de sus impedancias de circuito abierto y de cortocircuito. Estas resultan de la simple inspección:

$$Z_{oc} = \frac{Z_1 + Z_2}{2} \quad (14-2)$$

$$Z_{sc} = \frac{2Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad (14-3)$$

Por lo tanto $Z_o = \sqrt{Z_{oc} Z_{sc}} = \sqrt{Z_1 Z_2}$ (14-4)

Si se satisface la Ec. (14-1), $Z_o = R_o$, es decir, la impedancia característica es una resistencia independiente de la frecuencia, y la impedancia

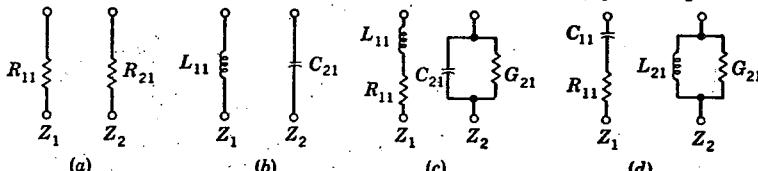


FIG. 14-3. Redes inversas sencillas.

de entrada de la red será independiente de la frecuencia e igual a R_o si la terminación de la red es una resistencia de magnitud R_o . Es esta propiedad la que da a la estructura el nombre de red de "resistencia constante".

La constante de propagación compleja γ puede hallarse también en términos de las impedancias de circuito abierto y de cortocircuito por medio de la Ec. (6-22). Así, para la sección de celosía de la Fig. 14-2a,

$$\begin{aligned} \tgh \gamma &= \sqrt{\frac{Z_{sc}}{Z_{oc}}} = \frac{Z_o}{Z_{oc}} = \frac{2R_o}{Z_1 + Z_2} \\ &= \frac{e^\gamma - e^{-\gamma}}{e^\gamma + e^{-\gamma}} = \frac{e^{2\gamma} - 1}{e^{2\gamma} + 1} \end{aligned} \quad (14-5)$$

Eliminando Z_2 por la Ec. (14-1) y despejando e^γ ,

$$e^\gamma = e^\alpha e^{j\beta} = \pm \frac{1 + Z_1/R_o}{1 - Z_1/R_o} \quad (14-6)$$

14-3. Redes inversas. Es ahora conveniente examinar cómo pueden formarse dos redes inversas. Esto puede hacerse cuando la impedancia de una de las redes tiene la forma general de la admitancia de la otra, es decir, si las dos redes son duales (ver Cap. III), y si se mantienen relaciones definidas entre los elementos correspondientes de las dos redes. La Fig. 14-3 muestra algunos ejemplos de redes inversas. El par más simple es el formado por dos resistores que satisfacen la Ec. (14-1). Sigue en orden de simplicidad una inductancia y una capacitancia. Dado que $Z_1 = j\omega L_{11}$ e $Y_2 = j\omega C_{21}$,

$$Z_1 Z_2 = \frac{Z_1}{Y_2} = \frac{L_{11}}{C_{21}} = R_o^2 \quad (14-7)$$

Consideremos a continuación el caso en que una impedancia del par está formada por una resistencia en serie con una inductancia, es decir,

$$Z_1 = R_{11} + j\omega L_{11} \quad (14-8)$$

La red inversa puede construirse poniendo un resistor en paralelo con

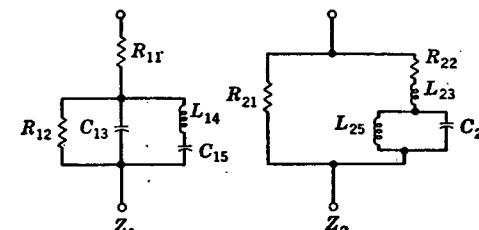


FIG. 14-4. Construcción de una red inversa.

un capacitor y eligiendo los valores de tal modo que

$$\frac{R_{11}}{G_{21}} = \frac{L_{11}}{C_{21}} = R_o^2 \quad (14-9)$$

Pero $Y_{21} = G_{21} + j\omega C_{21}$ (14-10)

Por lo tanto $Z_1 Z_2 = \frac{R_{11} + j\omega L_{11}}{G_{21} + j\omega C_{21}}$ (14-11)

Introduciendo los valores de G_{21} y C_{21} obtenidos de la Ec. (14-9),

$$Z_1 Z_2 = \frac{R_{11} + j\omega L_{11}}{R_{11}/R_o^2 + j\omega L_{11}/R_o^2} = R_o^2 \quad (14-12)$$

lo que prueba que Z_1 y Z_2 son redes inversas. De manera similar pueden obtenerse estructuras más complicadas. La regla es que para cada elemento resistivo en Z_1 debe haber un correspondiente elemento conductivo (resistivo) en Z_2 , para cada elemento inductivo en Z_1 debe haber un correspondiente elemento capacitivo en Z_2 , y viceversa. Además, cuando dos elementos están en serie en Z_1 , los elementos correspondientes deben estar en paralelo en Z_2 . Los elementos correspondientes deben satisfacer la Ec. (14-9), la que, para elementos generales, puede escribirse

$$R_{1m} R_{2m} = \frac{R_{1m}}{G_{2m}} = \frac{L_{1m}}{C_{2m}} = \frac{L_{2n}}{C_{1n}} = R_o^2 \quad (14-13)$$

Por ejemplo, consideremos la Fig. 14-4, donde se muestra un par de redes inversas más complicadas. Los elementos correspondientes, es decir, los que se aparean, tienen el mismo segundo subíndice. Las ecuaciones son, entonces,

$$R_{11} R_{21} = R_{12} R_{22} = \frac{L_{23}}{C_{13}} = \frac{L_{14}}{C_{24}} = \frac{L_{25}}{C_{15}} = R_o^2 \quad (14-13a)$$

14-4. Diseño del ecualizador de celosía de resistencia constante. Como se ha explicado antes, cuando se agrega un ecualizador de resistencia constante a un sistema de transmisión, la única modificación de las características originales de transmisión será la debida a la constante de propagación de la red de resistencia constante. Si se conoce Z_1 , puede derivarse inmediatamente Z_2 de la Ec. (14-13). Por lo tanto,

el único problema es la adecuada selección de Z_1 por medio de la Ec. (14-6).

Si llamamos α la constante de atenuación de la red de resistencia constante en celosía de la Fig. 14-2a, entonces $e^{2\alpha}$ estará dada por el cuadrado del valor absoluto del segundo miembro de la Ec. (14-6). Si R_1 es la componente resistiva de Z_1 (por lo común una función de la frecuencia) y X_1 la componente reactiva de Z_1 (también función de la frecuencia), y si F es un factor de atenuación definido por la relación $F = e^{2\alpha}$, la Ec. (14-6) puede escribirse

$$e^{2\alpha} = F = \frac{(1 + R_1/R_o)^2 + (X_1/R_o)^2}{(1 - R_1/R_o)^2 + (X_1/R_o)^2} \quad (14-14)$$

Se ha explicado en la primera parte de este capítulo, en relación con la Fig. 14-1, la manera de hallar la característica de atenuación ideal de la red ecualizadora. Como regla general, si hay n elementos, tales como resistencias, capacitancias e inductancias, en la impedancia Z_1 , y si la expresión de Z_1 se escribe en función de la frecuencia y de estos n elementos, la Ec. (14-14) tendrá entonces n incógnitas. Si se elige el valor de F para n frecuencias, la Ec. (14-14) da lugar a n ecuaciones simultáneas con n incógnitas. Estas ecuaciones permiten teóricamente calcular los elementos de Z_1 y esta solución constituye el diseño del ecualizador. En un problema dado es posible que la solución no conduzca a una estructura físicamente realizable, esto es, uno o más de los elementos R , L , o C puede resultar negativo.

La solución de un sistema de ecuaciones simultáneas es sencilla sólo en el caso en que las ecuaciones son lineales. La Ec. (14-14) puede ser reducida a la forma lineal por la introducción de funciones auxiliares de los elementos de impedancia desconocidos cuyo número es a menudo igual al número de elementos independientes.

Una red complicada consta de elementos simples conectados sucesivamente en serie o en paralelo. La expresión para los elementos de impedancia en paralelo es $Z_{eq} = Z_a Z_b / (Z_a + Z_b)$.

Dado que los elementos simples tienen impedancias que son del tipo R_{1m} , $j2\pi f L_{1m}$, o $1/j2\pi f C_{1m}$, la expresión resultante para Z_{eq} tendrá un numerador y un denominador cada uno de los cuales es un polinomio en jf . (Un polinomio es una serie finita de potencias enteras de la variable.) Las combinaciones sucesivas en serie y en paralelo tendrán también polinomios en jf como numeradores y denominadores, puesto que la suma y el producto de polinomios son también polinomios. Es por lo tanto posible escribir.

$$\frac{Z_1}{R_o} = \frac{a_0 + a_1(jf) + a_2(jf)^2 + \dots}{b_0 + b_1(jf) + b_2(jf)^2 + \dots} \quad (14-15)$$

Para una red dada, las a y las b de esta expresión son constantes que están determinadas por la disposición y las magnitudes de las resistencias, capacitancias e inductancias de la red. Los términos $a_1(jf)$ significan a_1 veces jf , y no una función de jf como se interpreta a veces esta escritura. Tanto el numerador como el denominador tienen números finitos de términos, determinados por la configuración de cada caso en particular.

Una expresión similar para e^{γ} , dado por la Ec. (14-6), puede escribirse

$$e^{\gamma} = \frac{g_0 + g_1(jf) + g_2(jf)^2 + \dots}{h_0 + h_1(jf) + h_2(jf)^2 + \dots} \quad (14-16a)$$

que también puede escribirse

$$e^{\gamma} = \frac{(g_0 - g_2 f^2 + g_4 f^4 + \dots) + j(g_1 f - g_3 f^3 + g_5 f^5 + \dots)}{(h_0 - h_2 f^2 + h_4 f^4 + \dots) + j(h_1 f - h_3 f^3 + h_5 f^5 + \dots)} \quad (14-16b)$$

De la Ec. (14-16b) puede obtenerse la expresión para $F = e^{2\alpha}$. Es

$$F = e^{2\alpha} = |e^{\gamma}|^2 = \frac{(g_0 - g_2 f^2 + g_4 f^4 + \dots)^2 + (g_1 f - g_3 f^3 + g_5 f^5 + \dots)^2}{(h_0 - h_2 f^2 + h_4 f^4 + \dots)^2 + (h_1 f - h_3 f^3 + h_5 f^5 + \dots)^2} \quad (14-17)$$

Es evidente que al elevar al cuadrado los términos del numerador y del denominador de la Ec. (14-17) se obtienen términos en el numerador y el denominador que sólo incluyen potencias pares de f . Por lo tanto, la Ec. (14-17) puede escribirse

$$F = e^{2\alpha} = \frac{P_0 + P_2 f^2 + P_4 f^4 + \dots}{Q_0 + Q_2 f^2 + Q_4 f^4 + \dots} \quad (14-18)$$

Por otra parte, es siempre posible hacer una de las P o las Q igual a la unidad dividiendo el numerador y el denominador por una constante. Como regla general, habrá tantas P y Q como elementos independientes haya en Z_1 . La Ec. (14-18) puede escribirse

$$F(Q_0 + Q_2 f^2 + Q_4 f^4 + \dots) = P_0 + P_2 f^2 + P_4 f^4 + \dots \quad (14-18a)$$

Esta ecuación es lineal en P y Q . Según se ha dicho, se elige el valor de F para tantas frecuencias como elementos independientes hay en Z_1 , con lo que puede escribirse un número correspondiente de ecuaciones a partir de la Ec. (14-18a) y calcular así las P y las Q . A partir de éstas, pueden determinarse las magnitudes de los elementos de la red.

Como ejemplo, consideremos el caso de la Fig. 14-5. La constante

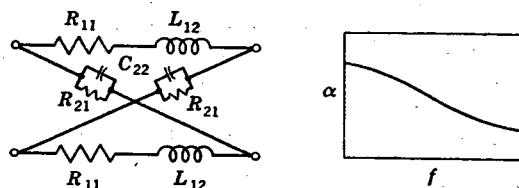


FIG. 14-5. Ecualizador de celosía para cable telefónico no pupinizado.

de atenuación variará con la frecuencia de la manera general ilustrada. Esta red podría por lo tanto utilizarse para ecualizar un cable, dado que la constante de atenuación de este último aumenta con la frecuencia. En esta red

$$\begin{aligned} Z_1 &= R_{11} + j\omega L_{12} \\ \frac{Z_1}{R_o} &= \frac{R_{11}}{R_o} + \frac{2\pi L_{12}}{R_o} jf \end{aligned} \quad (14-19)$$

Si bien es posible relacionar los parámetros circuitales a las P y las Q de la Ec. (14-18) pasando por los pasos intermedios de definir las a y las b de la Ec. (14-15), este último paso es innecesario y las relaciones necesarias pueden establecerse directamente. Así, por la Ec. (14-6),

$$e^r = \frac{(1 + R_{11}/R_o) + 2\pi L_{12} j f / R_o}{(1 - R_{11}/R_o) - 2\pi L_{12} j f / R_o} \quad (14-20)$$

y $F = |e^r|^2 = \frac{(1 + R_{11}/R_o)^2 + (2\pi L_{12}/R_o)^2 f^2}{(1 - R_{11}/R_o)^2 + (2\pi L_{12}/R_o)^2 f^2} \quad (14-20a)$

cuyos coeficientes pueden identificarse con las P y la Q de la Ec. (14-18). Como cosa práctica, para reducir el número de factores que deben ser evaluados, es conveniente dividir por el coeficiente de f^2 , lo que da

$$F = \frac{\left(\frac{R_o + R_{11}}{2\pi L_{12}}\right)^2 + f^2}{\left(\frac{R_o - R_{11}}{2\pi L_{12}}\right)^2 + f^2} = \frac{P_0 + f^2}{Q_0 + f^2} \quad (14-21)$$

y la ecuación lineal resulta ser

$$P_0 - F Q_0 = f^2(F - 1) \quad (14-21a)$$

donde $P_0 = \left(\frac{R_o + R_{11}}{2\pi L_{12}}\right)^2 \quad Q_0 = \left(\frac{R_o - R_{11}}{2\pi L_{12}}\right)^2 \quad (14-22)$

Dado que P_0 y Q_0 son las dos incógnitas en la Ec. (14-21a), sus valores pueden ser obtenidos introduciendo en la ecuación los valores numéricos de F y f para dos frecuencias. Debe observarse muy especialmente que la elección de los valores de F y f es una cuestión de juiciosa estimación, ayudada por la experiencia. Si la respuesta obtenida a raíz de una primera estimación no es adecuada, se hará una segunda y hasta una tercera si es el caso.

Una vez evaluadas P_0 y Q_0 , se las puede introducir en las Ecs. (14-22) para evaluar los elementos de la red, esto es, R_{11} y L_{12} . R_{21} y C_{22} pueden entonces calcularse con la Ec. (14-13). Debe observarse al despejar R_{11} y L_{12} de las Ecs. (14-22) hay cuatro pares de soluciones matemáticamente posibles, de los cuales sólo dos son físicamente admisibles. Esto puede demostrarse del siguiente modo: De las Ecs. (14-22)

$$\frac{R_o + R_{11}}{2\pi L_{12}} = \pm \sqrt{P_0} \quad \frac{R_o - R_{11}}{2\pi L_{12}} = \pm \sqrt{Q_0} \quad (14-23)$$

Sumando

$$\frac{2R_o}{2\pi L_{12}} = \pm \sqrt{P_0} \pm \sqrt{Q_0}$$

Las cuatro soluciones matemáticas son

$$L_{12} = \frac{R_o}{\pi(\sqrt{P_0} + \sqrt{Q_0})} \quad (14-24a)$$

$$L_{12} = \frac{R_o}{\pi(\sqrt{P_0} - \sqrt{Q_0})} \quad (14-24b)$$

$$L_{12} = \frac{R_o}{\pi(-\sqrt{P_0} - \sqrt{Q_0})} \quad (14-24c)$$

$$L_{12} = \frac{R_o}{\pi(-\sqrt{P_0} + \sqrt{Q_0})} \quad (14-24d)$$

Como se verá más adelante, $P_0 > Q_0$; por lo tanto, las soluciones (14-24c) y (14-24d) son físicamente imposibles porque requieren una R_o o una L_{12} negativa.

Restando las Ecs. (14-23), puede demostrarse que las soluciones físicas para R_{11} son

$$R_{11} = R_o \pi L_{12} (\sqrt{P_0} - \sqrt{Q_0}) = R_o \frac{\sqrt{P_0} - \sqrt{Q_0}}{\sqrt{P_0} + \sqrt{Q_0}} \quad (14-25a)$$

$$R_{11} = R_o \pi L_{12} (\sqrt{P_0} + \sqrt{Q_0}) = R_o \frac{\sqrt{P_0} + \sqrt{Q_0}}{\sqrt{P_0} - \sqrt{Q_0}} \quad (14-25b)$$

Los pares de soluciones dan características de atenuación idénticas, pero dan, en cambio, diferentes características de β .

Como ejemplo, consideremos un cable de 16 Km de longitud terminado en cada extremo en sendos resistores de 600 ohm y con la pérdida de inserción dada por la curva de la Fig. 14-6. El problema consiste en diseñar un ecualizador que, conectado en tandem con el cable, proporcione una pérdida de inserción esencialmente constante entre 100 y 3.000 c/s.

Elegimos primero una pérdida de inserción total algo mayor que la atenuación máxima del cable en la gama de frecuencias que se quiere ecualizar. Como primera estimación, fijemos esta pérdida de inserción en 2,6 neper. Dado que el ecualizador tiene dos elementos independientes en Z_1 , puede elegirse la pérdida en dos frecuencias. Estas frecuencias se elegirán algo adentro de los límites de la banda por ecualizar. Sean 200 y 2.400 c/s. La pérdida de inserción del cable en estas frecuencias son:

$$\begin{aligned} f &= 200 \text{ c/s} & \text{Pérdida del cable} &= 0,494 \text{ neper} \\ f &= 2.400 \text{ c/s} & \text{Pérdida del cable} &= 1,949 \text{ neper} \end{aligned}$$

La atenuación que debe proveer el ecualizador es:

$$\begin{aligned} f &= 200 \text{ c/s} & \text{Pérdida del ecualizador} &= 2,6 - 0,494 = 2,106 \text{ neper} \\ f &= 2.400 \text{ c/s} & \text{Pérdida del ecualizador} &= 2,6 - 1,949 = 0,651 \text{ neper} \end{aligned}$$

Los valores de F serán

$$\begin{aligned} F_{200} &= e^{2 \times 2,106} = 67 \\ F_{2.400} &= e^{2 \times 0,651} = 3,68 \end{aligned}$$

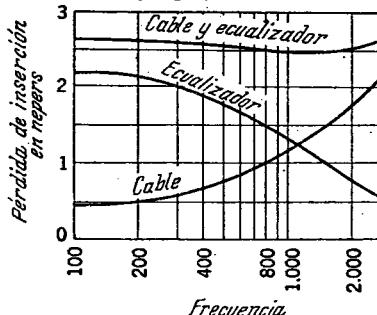


FIG. 14-6. Característica de pérdida de inserción de 16 Km de cable telefónico terminado en una resistencia de 600 ohm y alimentado por un generador de 600 ohm.

Introduciendo estos valores en la Ec. (14-21a) para obtener un par de ecuaciones simultáneas,

$$P_0 - 67Q_0 = 66 \times (200)^2 = 264 \times 10^4$$

$$P_0 = 3,68Q_0 = 2,68 \times (2,400)^2 = 1,542 \times 10^4$$

Despejando P_0 y Q_0 ,

$$Q_0 = 20,2 \times 10^4$$

$$P_0 = 1,616,4 \times 10^4$$

Luego, por las Ecs. (14-24), (14-25) y (14-13) tenemos las siguientes:

Solución a

$$R_{11} = 478 \text{ ohm} \quad L_{12} = 42,8 \text{ mH}$$

$$R_{21} = \frac{(600)^2}{478} = 754 \text{ ohm}$$

$$C_{22} = \frac{42,8 \times 10^{-3}}{(600)^2} = 0,119 \mu\text{F}$$

Solución b

$$R_{11} = 751 \text{ ohm} \quad L_{12} = 53,3 \text{ mH}$$

$$R_{21} = \frac{(600)^2}{751} = 480 \text{ ohm}$$

$$C_{22} = \frac{53,3 \times 10^{-3}}{(600)^2} = 0,148 \mu\text{F}$$

La elección entre las dos soluciones puede basarse en el desplazamiento de fase. Se encontraría que la solución b tiene cierta tendencia a ecualizar la distorsión de retardo a baja frecuencia del cable.

La atenuación del ecualizador puede calcularse a otras frecuencias (aparte de las de 200 y 2.400 c/s) por medio de la Ec. (14-21). Para el ecualizador que se acaba de diseñar la curva resultante es la que aparece en la Fig. 14-6, junto con la pérdida de inserción total de la combinación. Si ésta no se reputa suficientemente plana, podría hacerse otra elección de la pérdida de inserción total y de las frecuencias de corrección, o si con ello la solución tampoco es satisfactoria, recurrirse a una estructura más complicada que permita especificar la atenuación a más de dos frecuencias. De igual modo, si el ecualizador debe usarse sobre una banda de frecuencias más amplia, será por lo común necesario recurrir a estructuras más complejas, con tres o más elementos independientes.

Es evidente, dada la simetría de la estructura de celosía, que pueden intercambiarse las impedancias Z_1 y Z_2 sin afectar las características de la red de resistencia constante. Por lo tanto, hecho un análisis para una configuración cualquiera de Z_1 , se obtendrán los mismos resultados usando la configuración inversa para Z_1 , excepto por una inversión de fase de π radian.

La Fig. 14-7 muestra algunas posibles configuraciones de Z_1 junto con la forma general de variación de la constante de atenuación con la frecuencia. Se da también la ecuación lineal para la atenuación. Las ecuaciones para los elementos de estas redes, en términos de P y Q , pueden derivarse de la manera descrita. Para mayores detalles, véase el trabajo de Zobel,¹ de donde se han obtenido estos datos.

¹ Zobel, op. cit.

El estudiante debe comprender que, aunque las ecuaciones anteriores han sido deducidas para la estructura de celosía, pueden aplicarse los mismos métodos de ataque para los ecualizadores T puenteada, T, y π de las Figs. 14-2b a d.

14-5. Método de los codos. En los apartados anteriores se ha presentado un método de análisis del ecualizador de atenuación en celosía basado en la solución de una ecuación lineal en P_0 y Q_0 , esto es, la Ec. (14-21). Calculando la respuesta a varias frecuencias de una estructura típica, el estudiante se dará cuenta de la tediosa, aunque no difícil, tarea algebraica necesaria. Otro método para calcular la curva de atenuación que es gráfico, más bien que algebraico, es el que se considera a continuación. El método se basa en el concepto de "odo" y es aplicable

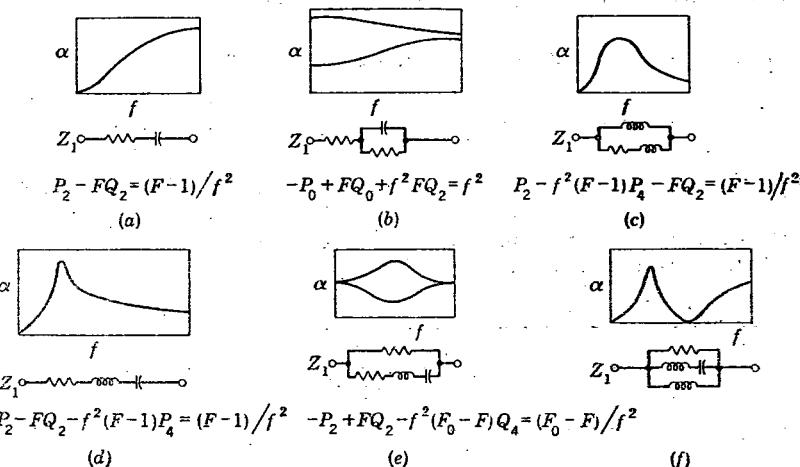


FIG. 14-7. Característica de atenuación de estructuras de celosía con diferentes configuraciones de Z_1 .

a toda red cuya característica de respuesta compleja, T , es la de la forma general¹

$$T = K a \frac{(1 \pm jf/f_{\circ 1})(1 \pm jf/f_{\circ 2}) \dots}{(1 \pm jf/f_{\circ 1})(1 \pm jf/f_{\circ 2}) \dots}$$

donde $a = jf, \frac{1}{jf}, \text{ o } 1$ (14-26)

K = constante escalar

Se hallará que muchos, pero no todos, los ecualizadores comunes

¹ G. E. Aner, Corner Plots, *Radio Television News, Radio-Electronic Engineering Edition*, marzo de 1954, p. 14.

se prestan al cálculo de la atenuación por este método, como se prestan también otros tipos de circuitos.¹

El método de los codos determina cómo afecta cada uno de los factores a , $1 \pm jf/f_{on}$ y $1 \pm jf/f_{ox}$ la respuesta, para sumar después las contribuciones individuales y obtener así la respuesta global. Nos centraremos especialmente en la respuesta de amplitud. Por razones de conveniencia, f_{o1}, f_{o2}, \dots se llamarán "frecuencias de codo positivo", o simplemente "codos positivos", mientras que f_{x1}, f_{x2}, \dots se llamarán "frecuencias de codo negativo" o "codos negativos".²

Consideremos la magnitud de la Ec. (14-26):

$$|T| = K|a| \frac{\sqrt{1 + (f/f_{o1})^2} \sqrt{1 + (f/f_{o2})^2} \dots}{\sqrt{1 + (f/f_{x1})^2} \sqrt{1 + (f/f_{x2})^2} \dots} \quad (14-27)$$

Dado que las funciones de respuesta de amplitud son frecuentemente expresadas en unidades logarítmicas, tales con el decibel o el neper, convertimos la Ec. (14-27) en dB y obtenemos

$$\begin{aligned} |T|_{dB} &= 20 \log K + 20 \log |a| + 10 \log \left[1 + \left(\frac{f}{f_{o1}} \right)^2 \right] \\ &\quad + 10 \log \left[1 + \left(\frac{f}{f_{o2}} \right)^2 \right] + \dots - 10 \log \left[1 + \left(\frac{f}{f_{x1}} \right)^2 \right] \\ &\quad - 10 \log \left[1 + \left(\frac{f}{f_{x2}} \right)^2 \right] - \dots \quad (14-28) \end{aligned}$$

Consideremos, ahora, cómo cada tipo de término de la Ec. (14-28) afecta la respuesta global.

TABLA 14-1. DATOS PARA EL MÉTODO DE LOS CODOS

f/f_o o f/f_x	Relación de frecuencias	$ T , dB^*$	Diferencia aprox. de respuesta, dB	$ T , neper^*$	Diferencia aprox. de respuesta neper	$0^\circ \dagger$
0,10	Década	0,043	0	0,005	5,7	0
0,125	0,067	...	0,008	7,1	...
0,25	0,26	...	0,030	14,0	...
0,50	Octava	0,97	1	0,112	27,0	0,1
1,0	Codo	3,01	3	0,345	45,0	0,35
2,0	Octava	7,00	1	0,805	63,5	0,1
4,0	12,30	...	1,415	70,0	...
8,0	18,10	...	2,808	82,9	...
10,0	Década	20,00	0	2,303	84,3	0

* Los valores son positivos para los codos positivos y negativos para los codos negativos.

† El mismo signo que el contenido en el factor $1 \pm jf/f$ en la Ec. (14-26), opuesto signo al contenido en el factor $1 \pm jf/f_x$ en la Ec. (14-26).

¹ Para una extensión del método de los codos, aplicable a ecuaciones que involucran factores más complicados que los de la Ec. (14-26), véase Research Council of the Academy of Motion Picture Arts and Sciences, "Motion Picture Sound Engineering", Cap. XVI, D. Van Nostrand Company, Inc., Nueva York, 1938.

² El estudiante observará que las frecuencias de codo positivo son *ceros* reales, y que las frecuencias de codo negativo son *pólos* reales (ver Cap. II). Se utiliza aquí la notación de codo por razones de conveniencia.

14-6. Respuesta de codo positivo. Cada una de las frecuencias de codo positivo f_{on} aparece en la Ec. (14-28) en un término de la forma:

$$|T_{on}|_{dB} = 10 \log \left[1 + \left(\frac{f}{f_{on}} \right)^2 \right] \quad (14-29)$$

La sustitución directa de los valores numéricos de f/f_{on} da los valores de $|T_{on}|_{dB}$ indicados en la tabla 14-1. Estos valores se representan (línea cortada) en función de una escala *logarítmica* de frecuencias en la Fig. 14-8.

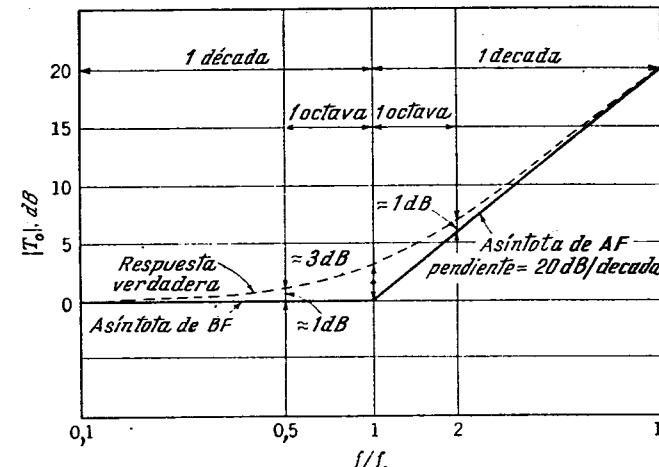


FIG. 14-8. Atenuación en un codo positivo.

Ahora bien, el corazón del método consiste en comparar la respuesta verdadera, que se acaba de considerar, con las respuestas asintóticas a frecuencias mucho más bajas y mucho más altas que la frecuencia de codo. Así, la asintota para las frecuencias muy bajas está dada por

$$\frac{f}{f_{on}} \ll 1 \quad |T_{on}|_{dB} \approx 10 \log 1 = 0 \quad (14-30)$$

y la asintota de alta frecuencia, por

$$\frac{f}{f_{on}} \gg 1 \quad |T_{on}|_{dB} \approx 10 \log \left(\frac{f}{f_{on}} \right)^2 = 20 \log \frac{f}{f_{on}} \quad (14-31)$$

La asintota de baja frecuencia, Ec. (14-30), es una recta horizontal a 0 dB; la asintota de alta frecuencia, Ec. (14-31), representada respecto de una escala de frecuencia logarítmica, es una línea recta con una pendiente positiva de 20 dB/decada (6,02 dB/octava) y que corta el eje de 0 dB en la frecuencia f_{on} (o en la frecuencia normalizada $f/f_{on} = 1$). Estas dos asintotas se han dibujado con línea continua en la Fig. 14-8. La razón de la designación "codo positivo" es aparente;

las asíntotas forman un codo en f_{on} con una asíntota de alta frecuencia de pendiente positiva.

Al comparar las respuestas verdadera y asintótica en la figura, se nota que ellas difieren en aproximadamente 3 dB en el codo, en aproximadamente 1 dB una octava por encima y por debajo del codo, y aproximadamente en 0 dB una década por encima y por debajo del codo. Esta es, entonces, la base del método de los codos: dada una frecuencia de codo positivo, pueden dibujarse las asíntotas y luego esbozarse la respuesta verdadera a partir de las diferencias conocidas en 5 frecuencias en particular.

El mismo procedimiento puede aplicarse cuando se desea la respuesta en neper más bien que en decibel. Tomando el logaritmo natural de la Ec. (14-27),

$$\begin{aligned} |T|_{\text{neper}} = \ln K + \ln |a| + \frac{1}{2} \ln \left[1 + \left(\frac{f}{f_{o1}} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} \ln \left[1 + \left(\frac{f}{f_{o2}} \right)^2 \right] \\ + \dots - \frac{1}{2} \ln \left[1 + \left(\frac{f}{f_{x1}} \right)^2 \right] - \frac{1}{2} \ln \left[1 + \left(\frac{f}{f_{x2}} \right)^2 \right] - \dots \end{aligned} \quad (14-28a)$$

El estudiante puede demostrar que la pendiente de la asíntota de alta frecuencia es de 2,3 neper/década (ó 0,694 neper/octava) y que las diferencias entre la respuesta verdadera y la respuesta asintótica tienen los valores dados en la tabla 14-1.

De la (14-26) es evidente que el ángulo producido por un factor de codo positivo, $1 \pm jf/f_{on}$, es

$$\theta_{on} = \pm \arctg \frac{f}{f_{on}} \quad (14-32)$$

Los valores de θ_{on} se dan también en la tabla 14-1.

14-7. Respuesta de codo negativo. Cada una de las frecuencias de codo negativo f_{xm} aparece en la Ec. (14-28) en un término de la forma

$$|T_{xm}|_{\text{dB}} = -10 \log \left[1 + \left(\frac{f}{f_{xm}} \right)^2 \right] \quad (14-33)$$

Dado que las Ecs. (14-33) y (14-39) son idénticas excepto por el cambio de signo y de subíndice, la respuesta de amplitud especificada en la tabla 14-1 es también aplicable a los codos negativos, siempre que se inserte un signo negativo delante de cada valor. La respuesta verdadera y las asíntotas para el caso del codo negativo están representadas en la Fig. 14-9, y es evidente que son aplicables las mismas reglas para la determinación de la respuesta verdadera a partir de la respuesta asintótica.

Se ve en la Ec. (14-26) que el ángulo aportado por un factor de codo negativo, $1 \pm jf/f_{xm}$, es

$$\theta_{xm} = \mp \arctg \frac{f}{f_{xm}} \quad (14-34)$$

Por lo tanto, los datos angulares de la tabla 14-1 son también aplicables

a los codos negativos siempre que se asocie el signo adecuado con cada valor.

14-8. Respuesta de factor externo. El factor externo a en las Ecs. (14-26) y (14-28) puede tener una de las tres formas jf , $1/jf$, y 1. Consideraremos el efecto de estas tres formas sobre la respuesta global.

1. $a = jf$. Por la Ec. (14-28)

$$|T_a|_{\text{dB}} = 20 \log f \quad (14-35)$$

Luego, la respuesta verdadera es una línea recta de +20 dB/década que cruza el eje de 0 dB en la frecuencia unitaria. En escala de neper, la pendiente es 2,303 neper/década. Por la Ec. (14-26), la respuesta angular será $\theta_a = +90^\circ$.

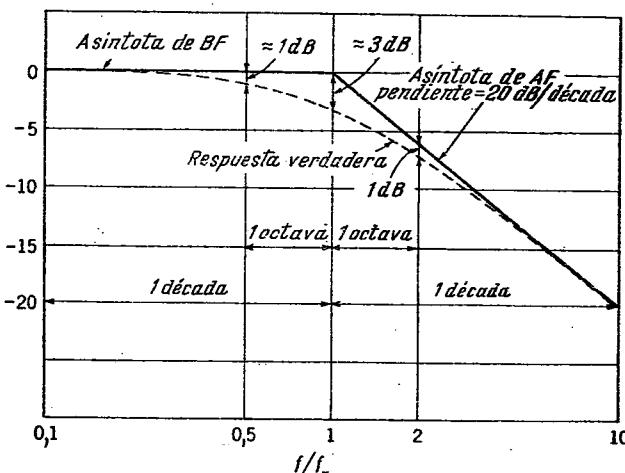


FIG. 14-9. Respuesta de codo negativo.

En muchos casos es conveniente combinar el factor externo jf con el primer factor de codo negativo a fin de obtener una factor de codo modificado. Por ejemplo, considerando estos dos factores en la Ec. (14-26), y reordenando por multiplicación por $-jf_{x1}/f$,

$$\frac{jf}{1 + jf/f_{x1}} = f_{x1} \frac{1}{1 - jf_{x1}/f} \quad (14-36)$$

El factor modificado del segundo miembro de la Ec. (14-36) involucra una variable de frecuencia invertida y puede ser llamado "codo negativo inferior". La respuesta de amplitud puede ser obtenida del primer miembro de la ecuación y resulta la indicada en la Fig. 14-10a. Como primer paso, se combinan las asíntotas de la manera indicada y se dibuja la respuesta final usando los datos de amplitud de la tabla 14-1. Será ventajoso para el estudiante reconocer el factor de codo negativo inferior y trazar directamente su respuesta. Será de utilidad en el

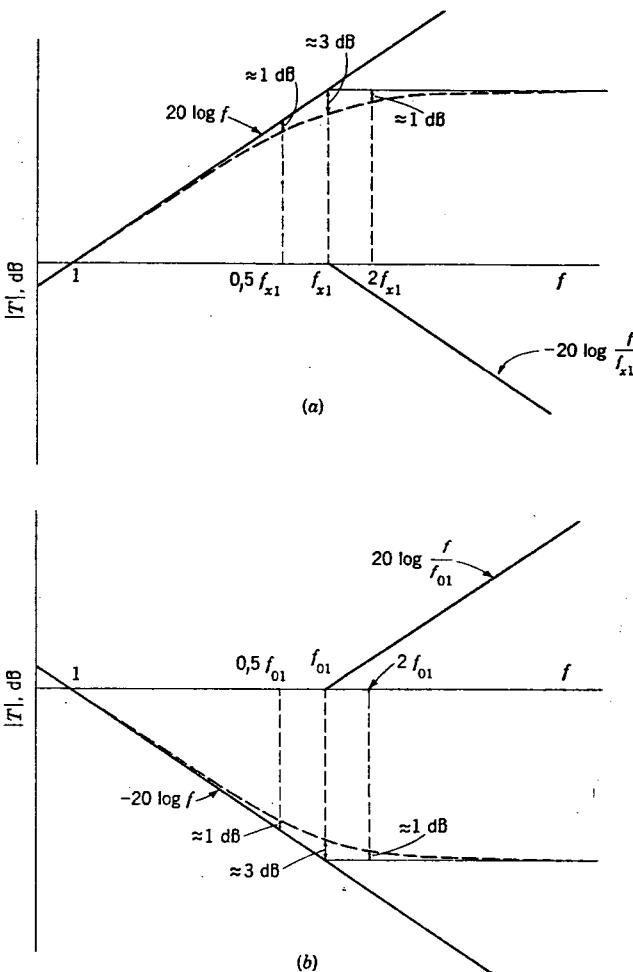


FIG. 14-10. Respuestas de codo modificadas. (a) Codo negativo inferior resultante de la combinación de un factor externo jf y un codo negativo. La asíntota total es $20 \log f$ hasta f_{x1} . En las frecuencias altas, las pendientes se cancelan recíprocamente. La respuesta total se obtiene según las diferencias tabuladas en la tabla 14-1. (b) Codo positivo inferior resultante de la combinación del factor externo $1/jf$ y un codo positivo.

capítulo siguiente. La respuesta angular del codo negativo inferior es $\operatorname{tg}(f_{x1}/f) = \cot(f/f_{x1})$.

2. $a = 1/jf$. Según la Ec. (14-28)

$$|T_a|_{\text{dB}} = 20 \log \frac{1}{f} = -20 \log f \quad (14-37)$$

Por lo tanto, la respuesta es idéntica a la del caso 1, excepto por el cambio de signo de la pendiente. Según la Ec. (14-26), la respuesta

angular será $\theta_a = -90^\circ$. El factor externo $1/jf$ puede ser combinado con el factor de codo positivo para obtener un "codo positivo inferior". Considerando estos factores en la Ec. (14-26) y multiplicando arriba y abajo por $-jf_{01}/f$,

$$\frac{1 + jf/f_{01}}{jf} = \frac{1}{f_{01}} \left(1 - j \frac{f_{01}}{f} \right). \quad (14-38)$$

La respuesta de amplitud resultante está ilustrada por la Fig. 14-10b, y la respuesta angular es $-\operatorname{arc tg}(f_{01}/f) = -\operatorname{arc ctg}(f/f_{01})$.

3. $a = 1$. En este caso, a no tiene efecto sobre la respuesta de amplitud ni sobre la angular.

14-9. Respuesta global. La Ec. (14-28) indica que la respuesta de amplitud global $|T|$ es una combinación lineal de las respuestas individuales con que contribuyen los diversos codos y los factores externos a y K ; por lo tanto, puede hallarse gráficamente $|T|$ sumando las respuestas individuales.

Según la Ec. (14-26), la respuesta angular global resulta ser, como puede demostrarse,

$$\theta = \theta_a + \theta_{01} + \theta_{02} + \dots + \theta_{x1} + \theta_{x2} + \dots$$

y puede así ser obtenida gráficamente sumando las respuestas angulares individuales.

Para ilustrar los métodos de suma de respuesta, consideremos el siguiente ejemplo:

La función respuesta T de una red está dada por

$$T = K \frac{1 + jf/f_0}{1 - jf_x/f}$$

donde

$$\begin{aligned} K &= 0,5 \\ f_x &= 0,2 \text{ Kc/s} \\ f_0 &= 1 \text{ Kc/s} \end{aligned}$$

Queremos representar $|T|$ en decibel. La respuesta ha sido dibujada en la Fig. 14-11. Se dibujan las asíntotas para el codo negativo inferior, con el codo en $f_x = 0,2 \text{ Kc/s}$. Luego se traza la respuesta verdadera para este factor uniendo los puntos correspondientes a $0,2 \text{ Kc/s}$, $0,1 \text{ Kc/s}$, $0,4 \text{ Kc/s}$ y 2 Kc/s , los que se hallan debajo de las asíntotas, a, respectivamente, 3, 1, y 0 dB.

También se han dibujado las asíntotas para el codo superior, con éste ubicado en

$$f_0 = 1 \text{ Kc/s}$$

La respuesta verdadera se dibuja del mismo modo. Se obtiene la respuesta global $|T|/K$ sumando gráficamente las dos curvas cortadas.

Como último paso, tómase en cuenta la constante escalar K . Dado que

$$20 \log K = 20 \log 0,5 = -20 \log 2 = -6 \text{ dB.}$$

K tiene como efecto bajar en 6 dB la curva de respuesta global. Este efecto se toma en cuenta en la figura mediante la escala de ordenadas corregida de la derecha.

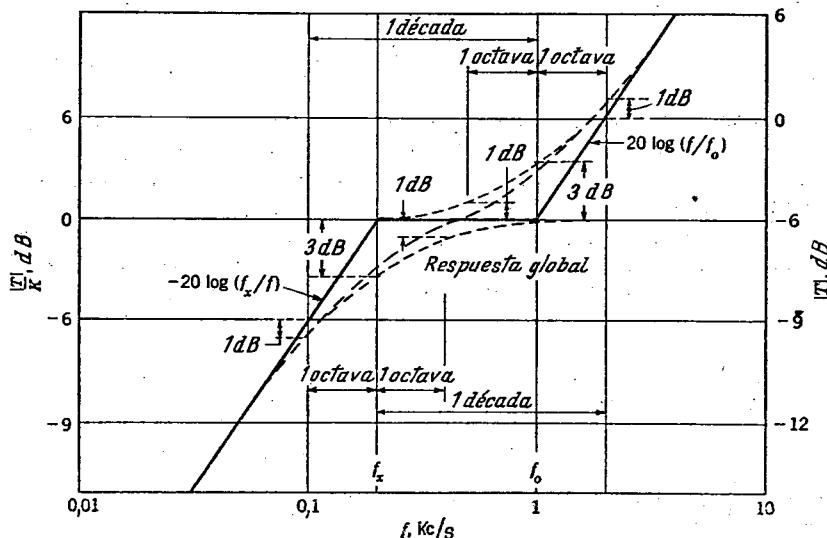


FIG. 14-11. Respuesta de la función

$$T = K \frac{1 + jf/f_0}{1 - jf_x/f}$$

donde $K = 0.5$, $f_x = 0.2$ Kc/s, $f_0 = 1$ Kc/s, por el método de los codos.

14-10. Respuesta del ecualizador de celosía. Otro ejemplo que sirve para ilustrar el método de los codos es el ecualizador de celosía del Ap. 14-4. Se usarán los valores numéricos de la solución b . La ecuación básica de la respuesta es la Ec. (14-20). Reordenando para obtener e^{γ} en la forma del método de los codos, Ec. (14-26),

$$e^{\gamma} = \left(\frac{R_o + R_{11}}{R_o - R_{11}} \right) \left\{ \frac{1 + j \frac{2\pi L_{12}}{R_o + R_{11}} f}{1 - j \frac{2\pi L_{12}}{R_o - R_{11}} f} \right\} \quad (14-39)$$

donde $f_0 = \frac{R_o + R_{11}}{2\pi L_{12}} = \frac{600 + 751}{2\pi(53.3 \times 10^{-3})} = 4.04$ Kc/s
 $f_x = \frac{R_{11} - R_o}{2\pi L_{12}} = \frac{751 - 600}{2\pi(53.3 \times 10^{-3})} = 0.45$ Kc/s

El estudiante puede observar que $f_0 = \sqrt{P_0}$ y $f_x = \sqrt{Q_0}$, donde P_0 y Q_0 son los parámetros de diseño usados en las Ecs. (14-22). Obteniendo α en neper de la Ec. (14-39),

$$\alpha = \ln |e^{\gamma}| = \ln \frac{f_0}{f_x} + \frac{1}{2} \ln \left[1 + \left(\frac{f}{f_0} \right)^2 \right] - \frac{1}{2} \ln \left[1 + \left(\frac{f}{f_x} \right)^2 \right] \quad (14-40)$$

La determinación de α por el método de los codos está ilustrada en la Fig. 14-12a. Se determina primero la respuesta individual a partir de las asíntotas y de los valores de las diferencias indicados en la tabla 14-1. La respuesta global se obtiene sumando las dos respuestas individuales con un compás de puntas secas.

El estudiante observará que la escala de ordenadas en neper de la izquierda es válida para $\alpha = \ln(f_0/f_x)$, es decir, para los codos solamente, exclusive el factor escalar $K = f_0/f_x$. La escala de la derecha se obtiene sumando $\ln(f_0/f_x)$ para obtener α .

Obsérvese que a las frecuencias altas la respuesta global tiende a cero neper asintóticamente. Este hecho puede ser verificado en la Ec. (14-39) como comprobación del método gráfico. Dividiendo el numerador y el denominador por f y tomando el límite para $f \rightarrow \infty$,

$$\lim_{f \rightarrow \infty} e^{\gamma} = \lim_{f \rightarrow \infty} \frac{f_0}{f_x} \left(\frac{1/f + j/f_0}{1/f + j/f_x} \right) \rightarrow 1$$

Entonces $\lim_{f \rightarrow \infty} \alpha = \ln 1 = 0$ neper.

Según la Ec. (14-39) la respuesta de fase del ecualizador resulta ser

$$\beta = \operatorname{arctg} \frac{f}{f_0} - \operatorname{arctg} \frac{f}{f_x} = \theta_0 + \theta_x$$

Los valores de θ_0 y θ_x pueden ser obtenidos de la tabla 14-1 y se representan en la Fig. 14-12b, junto con β , el que se obtiene sumando las dos curvas θ con un compás de puntas secas.

14-11. Diseño de la red de celosía mediante el método de los codos¹. Contrariamente a lo que parece ser a primera vista, el procedimiento de diseño del ecualizador de celosía explicado en el Ap. 14-4 no es unívoco ni definitivo; involucra en efecto un elemento de estimación inteligente en la elección de la pérdida de inserción total de la línea y el ecualizado y en la elección de las frecuencias en las que la ecualización ha de ser exactamente la necesaria. Un procedimiento de diseño de alternativa, consiste en elegir por estimación los valores de las frecuencias de codo f_0 y f_x (lo que equivale a elegir los valores de P_0 y Q_0). La elección se guía por el conocimiento de la forma de la curva de α (Fig. 14-12a) y por el hecho de que a las frecuencias bajas es $\alpha \approx 2.3 \log(f_0/f_x)$ neper por encima de 0 neper, según se indica en la figura. Este hecho, en efecto, fija la relación de f_0 a f_x . Puede entonces elegirse f_0 de modo de situar convenientemente la curva a lo largo del eje de las frecuencias.

¹ Para una extensión del método aquí delineado, véase A. D. Bresler, On the Approximation Problem in Network Synthesis, Proc. IRE, vol. 40, N° 12, p. 1724, diciembre de 1952. Bresler da medios para adaptar las pendientes, de modo que se elimina en gran parte la influencia de la estimación en el problema.

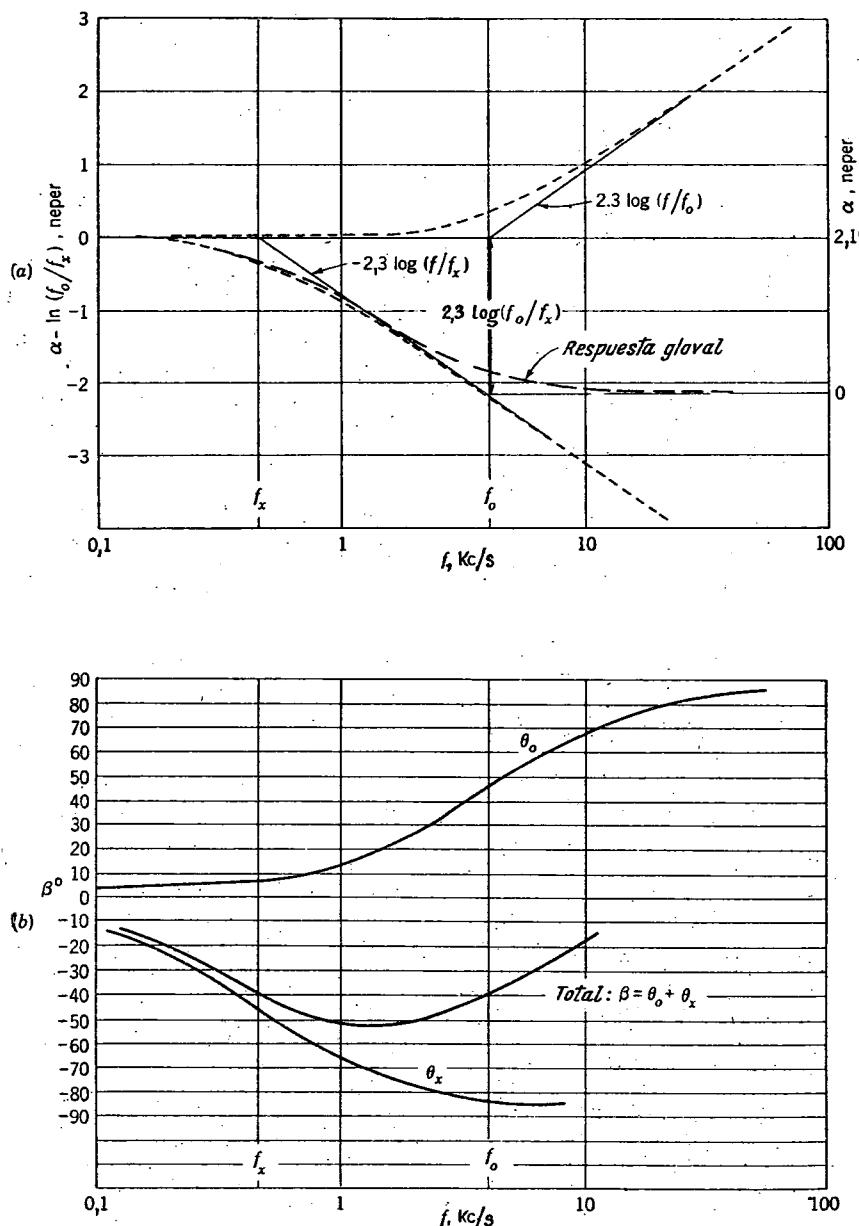


FIG. 14-12. Curvas de respuesta de un ecualizador de celosía. (a) Atenuación.
(b) Desplazamiento de fase.

Debe insistirse en que este método de los codos para el diseño del ecualizador no es más arbitrario, y, de hecho, puede ser más rápido en el uso, que el método algebraico, por lo menos cuando $Z_1 = R_{11} + j\omega L_{12}$. El procedimiento gráfico de diseño se facilita mucho sacrificando una hoja de papel semilogarítmico para la construcción de una plantilla basada en los datos de la tabla 14-1. Esta plantilla simplifica el dibujo de las curvas de respuesta.



FIG. 14-13. Ecualizador de dos terminales en derivación.

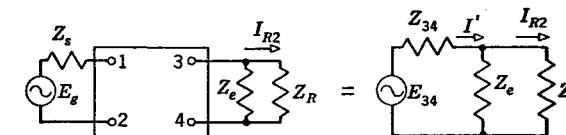
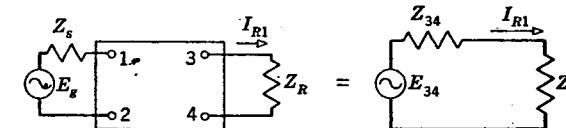


FIG. 14-14. Redes equivalentes para determinar la pérdida de inserción de los ecualizadores de dos terminales en derivación.

14-12. Ecualizador de dos terminales. Otro tipo de ecualizador es el de dos terminales en el que hay una red que se conecta en serie o en derivación con el extremo trasmisor o el extremo receptor de la red que se quiere corregir. Una de las configuraciones de uso más corriente es la ilustrada en la Fig. 14-13. Por inspección, es aparente que la pérdida que esta red introduce será despreciable a la frecuencia de antirresonancia de la combinación LC , y que la pérdida aumenta a medida que la frecuencia se aparta de la de antirresonancia. Si esta estructura tiene que usarse para ecualizar un cable, la frecuencia de antirresonancia debe fijarse en o encima de la frecuencia más alta que se quiere transmitir.

Si el sistema está originalmente terminado en una impedancia Z_R , el ecualizador modificará esta terminación y esta modificación tiene que ser tomada en cuenta al determinar las características. Consideremos el caso en que la estructura está conectada en derivación en el extremo receptor. Por el teorema de Thévenin, la red original puede ser considerada como un generador en serie con una impedancia, como se ve en la Fig. 14-14, donde los sistemas equivalentes se muestran con y sin el ecualizador Z_e en derivación. Z_{34} es la impedancia mirando

desde la derecha hacia los terminales 3 y 4, mientras que E_{34} es la tensión en circuito abierto en los terminales 3 y 4. La pérdida de inserción introducida por el ecualizador puede ser determinada computando la relación I_{R1}/I_{R2} . Por inspección se ve que

$$I_{R1} = \frac{E_{34}}{Z_{34} + Z_R}$$

$$I' = \frac{E_{34}}{Z_{34} + \frac{Z_e Z_R}{Z_e + Z_R}} = \frac{E_{34}(Z_e + Z_R)}{Z_{34} Z_e + Z_{34} Z_R + Z_e Z_R}$$

$$I_{R2} = \frac{Z_e I'}{Z_e + Z_R} = \frac{E_{34} Z_e}{Z_{34} Z_e + Z_{34} Z_R + Z_e Z_R}$$

$$\text{Por lo tanto } \frac{I_{R1}}{I_{R2}} = \frac{Z_{34} Z_e + Z_{34} Z_R + Z_e Z_R}{Z_{34} Z_e + Z_e Z_R}$$

$$= 1 + \frac{Z_{34} Z_R}{Z_e (Z_{34} + Z_R)}$$

Sea Z'_R la impedancia de Z_{34} y Z_R en paralelo. Entonces

$$Z'_R = \frac{Z_{34} Z_R}{Z_{34} + Z_R} \quad (14-41)$$

y, en correspondencia con la notación del caso del ecualizador de resistencia constante, pongamos

$$\frac{I_{R1}}{I_{R2}} = e^\gamma$$

donde, por supuesto, esta γ no es una verdadera constante de propagación. Entonces

$$e^\gamma = 1 + \frac{Z'_R}{Z_e} \quad (14-42)$$

Esta es la ecuación general para el ecualizador de dos terminales, la que corresponde a la Ec. (14-6) para el ecualizador de resistencia constante. Tanto Z'_R como Z_e serán funciones de la frecuencia. El problema consiste en elegir las dimensiones de Z_e de modo que la parte real de γ ecualice las variaciones que ocurren en la pérdida de inserción de la estructura original.

En la configuración ilustrada en la Fig. 14-13, el valor de Z_e será

$$Z_e = R_e + \frac{j\omega L_e}{1 - \omega^2 L_e C_e} \quad (14-43)$$

Hay tres elementos independientes, y, por lo tanto, la pérdida puede prefijarse para tres frecuencias. El primer paso consiste en elegir la frecuencia de antirresonancia para la cual no hay pérdida. Sea esta frecuencia f_3 .

Entonces

$$L_e C_e = \frac{1}{(2\pi f_3)^2}$$

y la Ec. (14-43) puede escribirse

$$Z_e = R_e + \frac{j\omega L_e}{1 - f^2/f_3^2}$$

$$Z_e = R_e + j\omega' L_e \quad (14-44)$$

donde ω' es una función de la frecuencia dada por la relación

$$\omega' = \frac{2\pi f}{1 - f^2/f_3^2} \quad (14-45)$$

Sea

$$Z'_R = R' + jX'$$

$$\gamma = \alpha + j\beta$$

Entonces la Ec. (14-42) deviene

$$e^\gamma = \frac{R' + R_e + j(X' + \omega' L_e)}{R_e + j\omega' L_e}$$

$$F = |e^\gamma|^2 = e^{2\alpha} = \frac{(R' + R_e)^2 + (X' + \omega' L_e)^2}{R_e^2 + (\omega' L_e)^2} \quad (14-46)$$

Pueden elegirse ahora las dos frecuencias de ecualización exacta. Se conocerán los valores de R' y X' para estas dos frecuencias por los datos relativos a la red original. Por lo tanto, pueden escribirse dos ecuaciones simultáneas a partir de la Ec. (14-46), en la que R_e y L_e son las únicas incógnitas. Desafortunadamente, en el caso general, la Ec. (14-46) no puede ser reducida a una ecuación *lineal* en las dos incógnitas. Si X' es despreciable en comparación con R' (por ejemplo, en una línea pupinizada correctamente terminada), la Ec. (14-46) puede escribirse

$$F = \frac{\left(\frac{R' + R_e}{L_e}\right)^2 + (\omega')^2}{\left(\frac{R_e}{L_e}\right)^2 + (\omega')^2}$$

$$= \frac{P_0 + (\omega')^2}{Q_0 + (\omega')^2} \quad (14-47)$$

la que es lineal en P_0 y Q_0 y puede resolverse fácilmente en P_0 y Q_0 . R_e y L_e se obtienen a partir de P_0 y Q_0 con las expresiones

$$L_e = \frac{R'}{\sqrt{P_0} - \sqrt{Q_0}} \quad (14-48a)$$

$$R_e = \frac{R' \sqrt{Q_0}}{\sqrt{P_0} - \sqrt{Q_0}} \quad (14-48b)$$

Si la atenuación puede ser especificada a la frecuencia cero, entonces la Ec. (14-46) deviene

$$F_0 = \frac{(R'_0 + R_e)^2}{R_e^2} \quad (14-49a)$$

El subíndice cero indica en este caso el valor a la frecuencia cero que hay que sustituir. La Ec. (14-49a) puede ser resuelta directamente en R_e :

$$R_e = \frac{R'_0}{\sqrt{F_0} - 1} \quad (14-49b)$$

La red ecualizadora que se discute tendrá un bajo valor de $\omega' L$ a frecuencias bajas, el que se puede despreciar en una ecuación aproximada. Hagamos que el subíndice 1 indique una evaluación a baja frecuencia. La Ec. (14-46) deviene entonces

$$F_1 = \frac{(R'_1 + R_e)^2 + (X'_1)^2}{R_e^2} \quad (14-50a)$$

De esta ecuación puede también despejarse R_e , con el siguiente resultado:

$$R_e = \frac{R'_1 + \sqrt{F_1(R'_1)^2 + (F_1 - 1)(X'_1)^2}}{F_1 - 1} \quad (14-50b)$$

Una vez que R_e ha sido determinado por medio de la Ec. (14-50b) a baja frecuencia, puede usarse la Ec. (14-46) en otra frecuencia para calcular L_e . Dado que se conocen todos los términos de la Ec. (14-46) excepto L_e , esta ecuación es cuadrática en L_e y puede resolverse directamente. La solución es

$$L_e = \frac{X'_2 + \sqrt{F_2(X'_2)^2 + (F_2 - 1)[(R_e + R'_2)^2 - F_2 R_e^2]}}{\omega_2^2(F_2 - 1)} \quad (14-51)$$

Las Ecs. (14-50b) y (14-51) dan valores de primera aproximación para R_e y L_e . Cuando se necesita una solución más exacta, puede llegarse a una segunda aproximación para R_e introduciendo en la Ec. (14-46) el valor de primera aproximación de L_e , y a una segunda aproximación para L_e , introduciendo en la Ec. (14-51) el valor de segunda aproximación de R_e .

Como ejemplo del diseño del ecualizador en derivación, consideremos el cable para el cual se diseñó ya un ecualizador de resistencia constante. Los datos de este cable, terminado en una resistencia de 600 ohm, son, aproximadamente,

$f = 100$	$Z_o = 1.034 - j1.034$	Pérdida de inserción = 0,47 neper
$f = 1.600$	$Z_o = 258 - j258$	Pérdida de inserción = 1,53 neper
$f = 3.200$	$Z_o = 183 - j183$	Pérdida de inserción = 2,37 neper

Tomemos $f_a = 3.200$, $f_s = 1.600$, y $f_c = 100$. Si el ecualizador se ajusta de modo que su pérdida es nula en 3.200 c/s, debe tener una pérdida de $2,37 - 1,53 = 0,84$ neper en 1.600 c/s y de $2,37 - 0,47 = 1,90$ neper en 100 c/s. Supongamos que el cable es lo suficientemente largo para que Z_{ss} en la Fig.

14-14 sea aproximadamente igual a Z_o . Entonces, por la Ec. (14-41) en $f = 100$ c/s:

$$Z'_{R1} = \frac{(1.034 - j1.034) \times 600}{1.634 - j1.034} = 442 - j99 = R'_1 + jX'_1$$

en $f = 1.600$

$$Z_{R2} = \frac{(258 - j258) \times 600}{858 - j258} = 215 - j116 = R'_2 + jX'_2$$

$$F_1 = e^{2 \times 1,600} = 44,8$$

$$F_2 = e^{2 \times 0,84} = 5,37$$

Introduciendo estos valores en la Ec. (14-50b),

$$R_e = \frac{442 + \sqrt{44,8 \times (442)^2 + 43,8 \times (99)^2}}{43,8} \\ = 79 \text{ ohm}$$

Por la Ec. (14-45)

$$\omega_2' = \frac{2\pi \times 1.600}{1 - (1.600/3.200)^2} = 13.380$$

Hagamos a continuación las sustituciones en la Ec. (14-51) para la frecuencia de 1.600 c/s. Resulta, así,

$$L_e = \frac{-116 + \sqrt{5,37 \times (116)^2 + 4,37[(215 + 79)^2 - 5,37 \times (79)^2]}}{13.380 \times 4,37} \\ = 7,45 \times 10^{-3} \text{ henry}$$

$$C = \frac{1}{\omega_2^2 L_e} = \frac{1}{(2\pi \times 3.200)^2 \times 7,45 \times 10^{-3}} = 0,332 \times 10^{-6} \text{ farad}$$

El efecto de agregar este ecualizador en derivación al cable es el ilustrado por la Fig. 14-15.

14-13. Alineación experimental de los ecualizadores. Es a menudo conveniente hacer el ajuste definitivo de los ecualizadores experimentalmente. El ecualizador de dos terminales es de ajuste mucho más sencillo que el de resistencia constante, dado que en este último hay cuatro ramas que ajustar. En el tipo de dos terminales de la Fig. 14-18 es muy común hacer L y C fijos y R ajustable. En este caso, se mide la pérdida de inserción del ecualizador y la línea a una frecuencia vecina a la de antirresonancia de LC y a una frecuencia baja, y se ajusta R hasta que las pérdidas sean iguales para estas dos frecuencias. Se hace a continuación una determinación de la caracte-

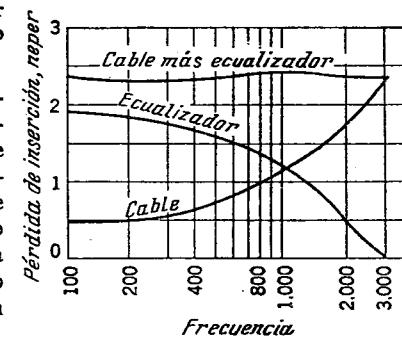


FIG. 14-15. Característica de pérdida de inserción de un cable de 16 Km de largo terminado en 600 ohm y corrección con un ecualizador de dos terminales.

rística de frecuencia y reajústase la resistencia del ecualizador de manera de lograr la mejor solución de compromiso.

14-14. Ecualizadores de resistencia no constante. Un tercer tipo de ecualizador que debe considerarse se utiliza entre impedancias desiguales y no necesita por lo tanto ser diseñado según el criterio de resistencia constante, vale decir, la impedancia de entrada puede variar con la frecuencia. Estos ecualizadores se incorporan generalmente como parte del acoplamiento entre etapas amplificadoras de modo que el ecualizador trabaja sobre la reja de una válvula, la que, para los fines prácticos, puede considerarse como un circuito abierto. Una aplicación típica es la de la ecualización de la característica de grabación de los discos fonográficos en los sistemas de amplificación de alta calidad. Es conveniente una breve discusión del problema básico.

Las partes mecánicas de un sistema de grabación comprenden un plato giradiscos accionado por medio de un motor y que gira, con el disco, a velocidad angular constante. La cabeza grabadora recorre el disco impulsada por un mecanismo de tornillo sínfin en sentido radial, de modo que de la composición de los dos movimientos resulta una trayectoria (surco) en espiral, sobre la superficie del disco.

El sistema eléctrico comprende un micrófono, una red de corrección, un amplificador, y la cabeza grabadora en sí. (Estos son los elementos de un sistema básico. En la práctica, hay una pregrabación en cinta magnética antes de "cortar" el disco.) El micrófono convierte el sonido original en una señal eléctrica correspondiente, la que, a su vez, es amplificada y utilizada para excitar la cabeza grabadora. En esta cabeza, hay un sistema electromecánico que utiliza la señal eléctrica amplificada para producir una vibración lateral del estilete cortador, o grabador, el que se apoya sobre la superficie del disco. Para los fonocaptores que generan tensiones proporcionales a la magnitud de la desviación de la púa, el surco debe reproducir exactamente la forma de onda de la señal acústica; esto es, el período de las ondulaciones del surco debe coincidir con el de la señal acústica, y las amplitudes de las ondulaciones del surco deben ser proporcionales a las de la onda sonora.

Hay, empero, problemas mecánicos que no permiten conservar esta relación de 1:1. Supongamos, por ejemplo, que el estilete debe cortar un surco de ondulación sinusoidal, perpendicular a la dirección de rotación del disco, y que el movimiento del estilete está dado por $\hat{s} = \hat{s}_{max} \sin \omega t$, siendo s el apartamiento instantáneo del estilete respecto de su posición en ausencia de señal. La velocidad del estilete será entonces $v = ds/dt = \omega \hat{s}_{max} \cos \omega t$. Es decir, para una frecuencia dada, $\omega/2\pi$, la velocidad máxima del estilete será $\hat{v}_{max} = \omega \hat{s}_{max}$. Luego, para una señal sonora de amplitud constante, \hat{v}_{max} crece linealmente con la frecuencia. En las frecuencias de audio más altas, el estilete no podría moverse lo suficientemente rápido como para satisfacer este requisito. Para salvar esta dificultad, la amplitud de la señal eléctrica es modificada por una red correctora de modo que su amplitud sea inversamente proporcional a la frecuencia y la velocidad máxima, así, constante. Esto es satisfactorio para las frecuencias altas y resulta en una "grabación de velocidad constante".

En las frecuencias bajas, la grabación de velocidad constante resultaría en valores de \hat{s}_{max} tan grandes que las ondulaciones de los surcos adyacentes podrían superponerse. Para prevenir esta posibilidad, se introduce una transición en la red correctora en la llamada frecuencia de "inversión", de modo que para las frecuencias más bajas se mantiene la relación 1:1 para las amplitudes. Por debajo de la frecuencia de inversión la grabación, pues, es del tipo de "amplitud constante". Las dos regiones, de amplitud constante y de velocidad constante, están ilustradas por las líneas cortadas en la Fig. 14-16.

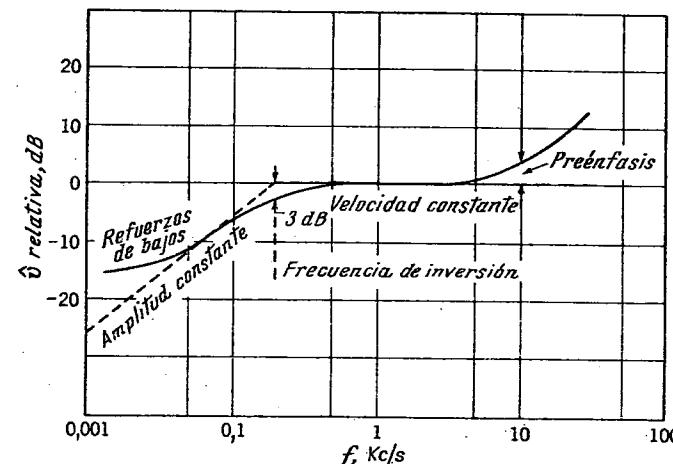


FIG. 14-16. Característica de grabación básica.

Esta es, entonces, la característica básica de grabación que la red correctora debe derivar de la señal eléctrica de amplitud constante.

Introdúzcase sin embargo, otras modificaciones en esta característica básica para enmascarar el ruido que se produce en el sistema de reproducción. Los platos giradiscos están sujetos a vibraciones de baja frecuencia de alrededor de 25 c/s. Estas vibraciones se transmiten a la cabeza reproductora y aparecen en audio como un ruido peculiar de baja frecuencia. Por otra parte, la falta de uniformidad del material del disco y las partículas extrañas acumuladas en el surco producen un movimiento espurio de la púa durante la reproducción. Este movimiento es reproducido por el sistema de audio como un ruido en la gama de 3 a 5 Kc/s conocido como "ruido de superficie". Para mantener en lo posible la señal reproducida por encima de estos ruidos, introdúzcase cierto "preénfasis" en la red correctora, es decir, se elevan las características de muy baja y de muy alta frecuencia por encima de la característica básica. Este "refuerzo de graves" y "preénfasis de agudos" se indican con línea llena en la figura.¹ Debe observarse que el

¹ Ver, por ejemplo, F. H. Slaymaker, Equalization and Tone Controls on Phonograph Amplifiers, Trans. IRE, Professional Group on Audio, AU-3, N° 1, p. 5, enero-febrero de 1955.

preéñfasis de agudos se da en decibeles de refuerzo por encima de la característica básica, a 10 Kc/s. Si bien se han usado muchas características de grabación diferentes en el pasado, hubo un comienzo de normalización en 1954 cuando la mayor parte de la industria acordó la adopción de la característica de la RIAA (Record Industry Association of America), la que se reproduce en la Fig. 14-17.

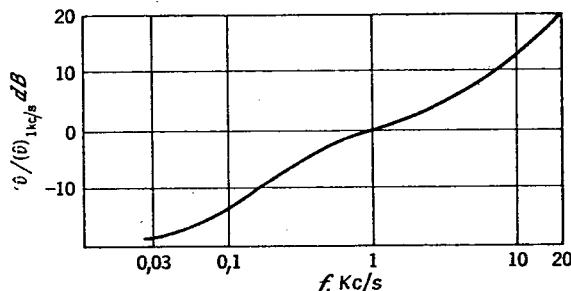


FIG. 14-17. Característica de grabación RIAA.

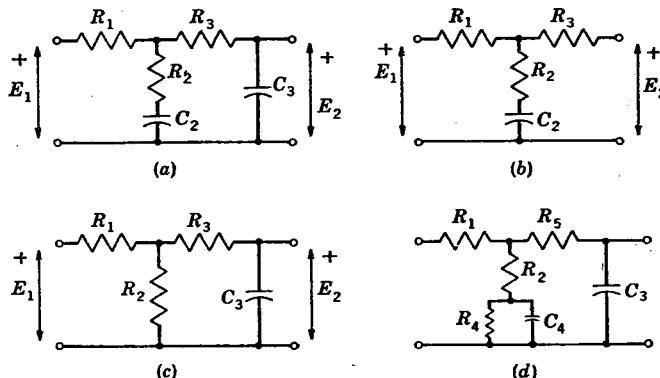


FIG. 14-18. Ecualizador doble-L. (a) RCA Víctor. $R_1 = 330$ kilohm, $R_2 = 7,5$ kilohm, $R_3 = 27$ kilohm, $C_2 = 0,03 \mu\text{F}$, $C_3 = 0,002 \mu\text{F}$. (b) Circuito equivalente de baja frecuencia. (c) Circuito equivalente de alta frecuencia. (d) RIAA. $R_4 = 82$ kilohm, $R_5 = 30$ kilohm, $C_4 = 0,04 \mu\text{F}$. R_2 y C_3 , iguales que en a.

La función, pues, del ecualizador fonográfico es la de proveer un complemento de la característica de grabación de modo que el sistema en conjunto, desde el micrófono hasta el altavoz, sea plano. Esta ecualización puede obtenerse, para todas las características de grabación que se han usado, por medio de una sección doble-L que sólo contiene resistores y capacitores. El método de los codos permite obtener, por lo general, la respuesta de estos ecualizadores, sin dificultades.

14-15. Ecualizador doble-L. En la Fig. 14-18 se ilustra un ecualizador fonográfico típico¹. Dado que la red trabaja esencialmente en

¹ C. P. Boegli, New Developments in Phono Equalizers, *Radio Television News*, vol. 49, N° 4, p. 54, abril de 1958.

circuito abierto, se toma por lo general en cuenta la función de trasferencia $|T| = |E_2/E_1|$ más bien que e^a como en el ecualizador de celosía. Si el estudiante escribe las ecuaciones nodales para la red y despeja T , encontrará que la expresión resultante no tiene la forma general de la Ec. (14-26) y no puede por lo tanto ser resuelta por el método de los codos. Esta dificultad, no obstante, puede salvarse mediante oportunas aproximaciones.

Los valores paramétricos especificados en la Fig. 14-18 muestran que $C_2 = 15C_3$. Como resultado de esta diferencia, C_2 y C_3 controlan T en diferentes partes del espectro. En las frecuencias muy bajas, la rama que contiene C_3 se approxima a un circuito abierto, y el circuito equivalente aproximado es el de la Fig. 14-18b. Por inspección, la función de trasferencia de baja frecuencia, aproximada, es

$$\begin{aligned} T_l &= \frac{R_2 + 1/j\omega C_2}{R_1 + R_2 + 1/j\omega C_2} = \frac{1 + j\omega C_2 R_2}{1 + j\omega C_2 (R_1 + R_2)} \\ T_l &= \frac{1 + jf/f_{\circ 1}}{1 + jf/f_{x 1}} \end{aligned} \quad (14-52)$$

donde

$$f_{\circ 1} = \frac{1}{2\pi C_2 R_2} = \frac{1}{2\pi (3 \times 10^{-8})(7,5 \times 10^3)} = 709 \text{ ciclos}$$

$$f_{x 1} = \frac{1}{2\pi C_2 (R_1 + R_2)} = \frac{1}{2\pi (3 \times 10^{-8})(330 + 7,5) \times 10^3} = 15,7 \text{ ciclos}$$

Para las frecuencias altas, en cambio, la reactancia de C_2 tiende a cero, y puede usarse entonces el circuito equivalente de la Fig. 14-18c. Usando este diagrama, el estudiante puede demostrar que la función de trasferencia aproximada de alta frecuencia es

$$T_h = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{1}{1 + jf/f_{x 2}} \quad (14-53)$$

$$\text{donde } f_{x 2} = \frac{1}{2\pi C_3 \left(R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right)}$$

Puesto que R_1 es mucho mayor que R_2 , la combinación en paralelo de estas dos resistencias es aproximadamente igual a R_2 , la más pequeña; luego

$$f_{x 2} \approx \frac{1}{2\pi C_3 (R_3 + R_2)} = \frac{1}{2\pi (2 \times 10^{-9})(27 + 7,5) \times 10^3} = 2,34 \text{ Kc/s} \quad (14-53a)$$

Las respuestas de codo se dan en la Fig. 14-19. Debe observarse que el codo $f_{x 2}$ se representa en el nivel de -33 dB correspondiente al factor escalar $R_2/(R_1 + R_2)$ en la Ec. (14-53). Puede observarse que hay una discontinuidad entre $|T_l|$ y $|T_h|$ en la región comprendida entre 200 c/s y 5 Kc/s. Esto es el resultado de usar los circuitos equi-

valentes aproximados de baja y de alta frecuencia de las Figs. 14-18b y c. Dado que la red tiene una respuesta continua, las dos curvas deben ser promediadas en esta región. La respuesta se representa por lo general en términos relativos, eligiéndose por lo común la respuesta a 1 Kc/s como nivel de referencia de cero dB.

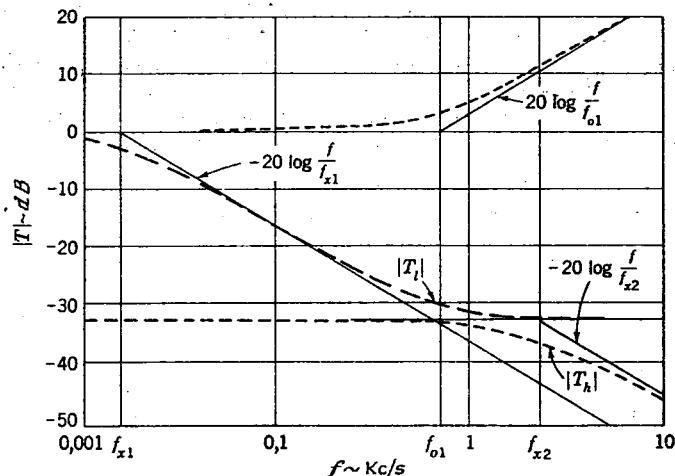


FIG. 14-19. Respuesta de amplitud del ecualizador de la Fig. 14-18a.

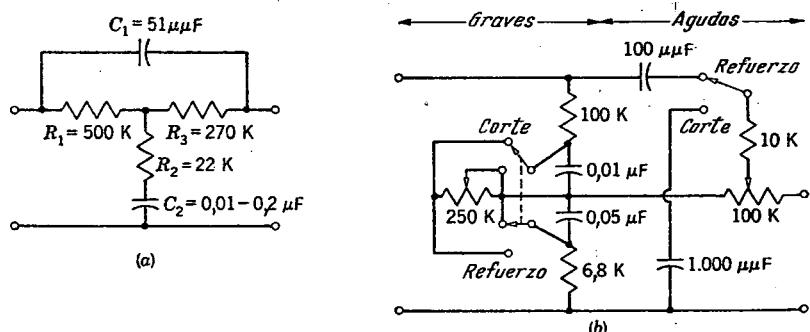


FIG. 14-20. Controles de tono RC típicos.

14-16. Controles de tono. En los sistemas de reproducción de audio es a menudo deseable proveer medios adicionales para modificar la característica de reproducción, por medio de "controles de tono", con el objeto de poder compensar las variaciones debidas al material grabado y el ambiente. La Fig. 14-20 ilustra dos circuitos típicos de control de tono, del tipo *RC*.

El circuito de *a*¹ tiene la forma general de una red T puenteada, pero no está diseñado sobre la base de resistencia constante. C_2 controla la frecuencia de inversión, mientras que el potenciómetro R_1 provee un refuerzo de agudos variable.

El circuito de *b*² en la Fig. 14-20 provee un mayor grado de control en cuanto que permite reforzar o atenuar los graves y los agudos. El comportamiento de este circuito es fácil de predecir, dado un conjunto de posiciones de los interruptores, y la función de trasferencia puede computarse por el método de los codos.

En algunos casos, la red *RC* de control de tono está incorporada en la red de realimentación del amplificador de audio³. El método básico para computar la respuesta es similar al que se emplea en los casos anteriores.

En audio, la característica de fase tiene poco o ningún efecto discernible por el oído. Como consecuencia, no se presta atención a los ángulos de fase introducidos por los ecualizadores y controles de tono.

14-17. Ecualizador de retardo. Las líneas de transmisión exhiben características de desplazamiento de fase dependientes — como la atenuación — de la frecuencia. En las aplicaciones en las que la preservación de la *forma de onda* es importante, por ejemplo, en la transmisión de señales de facsímil o televisión por línea, puede insertarse un ecualizador de retardo⁴ en el sistema con el fin de ecualizar las velocidades de grupo con vistas a reducir al mínimo la distorsión de este origen. Como en el caso de los ecualizadores de atenuación, el ecualizador de retardo debe ser del tipo de resistencia constante para que su inserción en el sistema no altere las relaciones de impedancia. Utilízase de ordinario las configuraciones T puenteada y de celosía. Con el objeto de mantener la ecualización de la característica de atenuación independiente de la ecualización de retardo, el ecualizador de retardo debe ser una estructura del tipo pasatodo, es decir, con $\alpha = 0$ para todas las frecuencias de la banda deseada.

Se ha visto en el Cap. VII que una estructura de celosía en la que Z_1 y Z_2 son reactancias puras e inversas con respecto a R_o , constituye en efecto una estructura "pasatodo" y puede por lo tanto ser utilizada como ecualizador de retardo. El estudiante puede demostrar fácilmente que el desplazamiento de fase de esta red (Fig. 14-21a) está dado por

$$\beta = \pm 2 \arctan \frac{X_1}{R_o} \quad (14-54)$$

El método general de diseño de un ecualizador de fase del tipo de celosía puede ser descrito del siguiente modo: X_1 estará constituida, en ge-

¹ Allan M. Ferres, A Bass-boost Control, *Radio Television News*, vol. 52, N° 1, p. 52, julio de 1954.

² Philip Cheilik, Audio Amplifier-Preamp for Home Use, *Radio Television News*, vol. 52, N° 5, p. 68, noviembre de 1954.

³ Ver, por ejemplo, Arthur J. Rose, Simplified Design of Feedback Equalizers, *Radio Television News*, vol. 52, N° 3, p. 54, setiembre de 1954.

⁴ Un ecualizador de retardo es una red correctora diseñada para hacer el retardo de fase o retardo de envuelta de un circuito o sistema esencialmente constante dentro de una gama de frecuencias deseada [ASA C42, 65.06.548 (1953)].

ral, por una combinación más o menos complicada de inductancias y capacitancias y su comportamiento puede, mediante el teorema de reactancia de Foster, ser expresado únicamente en término de sus polos y ceros y un factor de escala H . Luego, dada una característica β deseada, pueden determinarse los ceros, los polos y H . Puede entonces diseñarse la correspondiente red de Foster según los procedimientos descritos en el Cap. IV. X_2 resulta de la condición $X_2 = -R_o^2/X_1$, puesto que X_1 y X_2 son redes inversas. La respuesta de fase de un ejemplo sencillo está ilustrada en la Fig. 14-21b.

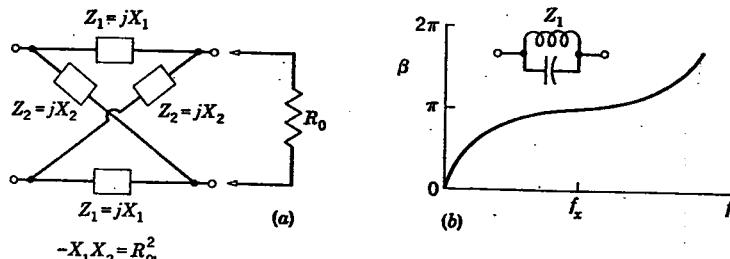


FIG. 14-21. Ecuilizador de retardo de celosía. b muestra la característica β para una configuración particular de Z_1 .

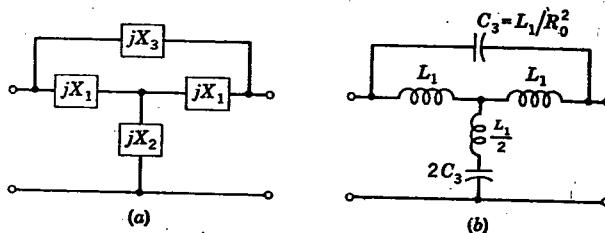


FIG. 14-22. Ecuilizador de retardo del tipo T puenteada.

También puede servir como ecuilizador de fase una estructura T puenteada convenientemente diseñada. Consideremos los requisitos que debe satisfacer la red de la Fig. 14-22a para que se comporte como una red de resistencia constante: evaluando Z_{oc} e Y_{sc} el estudiante puede demostrar que

$$Z_o^2 = \frac{Z_{oc}}{Y_{sc}} = \frac{-X_1 X_3 (2X_2 + X_1)}{2X_1 + X_3} = R_o^2 \quad (14-55)$$

Una posible solución es la de hacer X_1 y X_2 inversas, de modo que

$$-X_1 X_3 = R_o^2 \quad (14-56a)$$

Luego, según la Ec. (14-55)

$$\begin{aligned} \frac{2X_2 + X_1}{2X_1 + X_3} &= 1 \\ X_2 &= \frac{X_1 + X_3}{2} \end{aligned} \quad (14-56b)$$

Si, por ejemplo, se elige X_1 como ωL_1 , la estructura tendrá la forma ilustrada en la Fig. 14-22b. Se deja como ejercicio para el estudiante el demostrar que $\alpha = 0$ y la derivación de la expresión de β para el ecuador de la Fig. 14-22a.

PROBLEMAS

14-1. Demostrar que, en un ecuador de celosía de resistencia constante, α no varía si se intercambian las posiciones de Z_1 y Z_2 en la estructura. ¿Cuál es el efecto sobre β ?

14-2. Demostrar que los circuitos de las Figs. 14-2 b a d son de resistencia constante cuando $Z_1 Z_2 = R_o^2$.

14-3. Dibujar una red que contenga ocho o más elementos, incluyendo R , L y C , y dibujar después la red inversa.

14-4. Diseñar un ecuador de resistencia constante para ecualizar, hasta los 3.000 c/s, la pérdida de inserción de un cable de 40 millas de longitud, de calibre 16, no pupinizado.

Nota: Es a veces conveniente usar más de una sección ecuadora.

14-5. (a) Derivar las ecuaciones de diseño para un ecuador del tipo de T puenteada en el que

$$Z_1 = R_{11} + j\omega L_{12}$$

(b) Trazar la curva de α en función de la frecuencia por el método de los codos. (c) Comente la simplicidad de las ecuaciones de diseño de la red T puenteada en comparación con las de la red de celosía.

14-6. Una sección de cable telefónico está excitada por un generador de 600 ohm y está terminada en una resistencia de 600 ohm. La pérdida de inserción medida en dB es

f	30	100	200	500	1.000	2.000	2.400	4.000	6.000
Pérdida	3,8	3,8	3,9	4,6	6,6	10,5	11,9	16,4	20,7

Diseñar una red de celosía para ecualizar el cable dentro de 2 dB entre 30 y 3.000 c/s. La pérdida de inserción total del cable y el ecuador no debe exceder los 20 dB.

14-7. Usando los datos de pérdida de inserción del Prob. 14-6, diseñar un ecuador del tipo T-puenteada por el método de los codos. Como punto de partida, suponga que f_0 está dos octavas por encima de f_x .

14-8. Una sección de cable coaxial de 75 ohm debe ser usada en un sistema de distribución de televisión en un pueblo. El cable está terminado en $R_o = 75$ ohm. La atenuación del cable está dada por:

f , Mc/s	40	100	150	200	400
α , dB	5,50	9,50	12,00	14,25	21,75

Diseñar un ecualizador para la banda de TV de VHF, de 54 a 220 Mc/s. ¿Debe usarse un ecualizador de celosía o uno del tipo T puenteada? ¿Por qué?

14-9. Un ecualizador de celosía de resistencia constante tiene $Z_1 = R_{11} - j/\omega C_{12}$.

a. Si $R_{11} = 1$ kilohm, $R_m = 250$ ohm, $C_{12} = 0,0212 \mu\text{F}$, y $L_{22} = 5,3$ mH, ¿cuál es la impedancia característica?

b. Representar la pérdida de inserción en dB en función de la frecuencia.

14-10. Un ecualizador del tipo T puenteada debe ser utilizado para atenuar el zumbido de 50 c/s captado por una larga línea de audio, la que está terminada en 600 ohm. Z_2 consiste en un inductor L_{22} y un capacitor C_{22} en serie. $C_{22} = 4,426 \mu\text{F}$, y $L_{22} = 1,591$ H, con un Q de 100 a 50 c/s.

a. Hallar los elementos de Z_1 de modo que el ecualizador sea del tipo de resistencia constante.

b. Hallar la pérdida de inserción a 50 c/s comparada a la de 500 c/s, en dB.

14-11. (a) Derivar ecuaciones de diseño — similares a las Ecs. (14-20a) a (14-22) — para la configuración Z_1 de la Fig. 14-7a. (b) ¿Para cuál de las configuraciones de Z_1 de la Fig. 14-7 puede usarse el método de los codos?

14-12. Representar la curva de β para la solución a del ecualizador de celosía diseñado en el texto (Ap. 14-4).

14-13. Repetir el Prob. 14-4 utilizando un ecualizador de dos terminales.

14-14. Derivar las ecuaciones de diseño para un ecualizador en serie que ha de trabajar en serie con la carga Z_R en la Fig. 14-13, pero que al mismo tiempo debe tener sus demás características idénticas a las del ecualizador en derivación ilustrado en esta figura.

14-15. Aplicar las ecuaciones derivadas en el Prob. 14-14 para diseñar un ecualizador para el cable utilizado en los ejemplos del texto.

14-16. Representar la respuesta $|T|$ del ecualizador RIAA de la Fig. 14-18d. Comparar la curva con la Fig. 14-17. ¿Son ellas complementarias?

14-17. Diseñar un ecualizador para proporcionar el complemento de la curva del Prob. 14-16. ¿Cómo podría utilizarse este circuito en un sistema de grabación?

14-18. (a) Representar la magnitud de la función de trasferencia en función de la frecuencia para el circuito de la Fig. 14-20a. Usar $C_2 = 0,01 \mu\text{F}$ y la derivación en el extremo izquierdo de R_1 . (b) Repetir con $C_2 = 0,2 \mu\text{F}$ y con la derivación en el extremo derecho de R_1 .

14-19. Representar $|T|$ en función de la frecuencia para el circuito de la Fig. 14-20b en las dos posiciones, de refuerzo y corte. Suponer que las tomas de los dos potenciómetros están en la posición media.

CAPÍTULO XV

AMPLIFICADORES LINEALES

Un amplificador es un dispositivo que, al permitir que una onda de entrada controle una fuente local de energía, es capaz de entregar una reproducción agrandada de las características esenciales de la onda. [ASA C42 65.06.105 (1953)]. Hay dos tipos básicos de amplificadores lineales con válvulas de vacío, los que difieren por el carácter de sus características de respuesta de amplitud en función de la frecuencia y que trataremos aquí: el tipo cuasi-pasabajos y el tipo pasabanda.¹ En el primer tipo, la propiedad amplificadora se manifiesta desde una frecuencia baja hasta cierta frecuencia límite superior más o menos definida. En el tipo pasabanda, la propiedad amplificadora se manifiesta dentro de una banda de frecuencias más o menos definida, centrada en una frecuencia muy alejada de la frecuencia cero. (Comparar con los filtros pasabajos y pasabandas del Cap. VII.) Se prestará especial atención a la *amplificación de tensión*, la que se define como la relación de la tensión de salida a la tensión de entrada,² es decir,

$$A = E_{\text{sal}}/E_{\text{ent}}. \quad (15-1)$$

15-1. Circuito equivalente lineal de un pentodo de alto vacío. En contraste con los circuitos que hemos estudiado hasta ahora, el amplificador de válvula de alto vacío es un circuito activo unilateral, más bien que bilateral. Aunque la válvula de alto vacío no es lineal, en cuanto que la componente alterna de la corriente de placa no es una función exactamente lineal de la tensión de señal de entrada, la alinealidad puede despreciarse en muchos casos si se adoptan las precauciones convenientes en cuanto a la limitación de la amplitud de la tensión de señal de entrada y ciertos detalles del diseño. Con estas hipótesis, un pentodo verdadero, como el de la Fig. 15-1a, puede ser reemplazado por el circuito equivalente de Norton de la Fig. 15-1b, en lo que respecta a la componente alterna de la señal. g_m es la "conductancia mutua" o "trasconductancia de rejilla a placa", y r_p la "resistencia de placa" de c.a., de la válvula.

¹ Pueden también construirse los así llamados amplificadores de c.c., los que son verdaderos amplificadores pasabajos, pero su diseño introduce dificultades muy serias, de manera que no se los usa sino cuando son indispensables para amplificar señales unidireccionales lentamente variables.

² El estudiante puede observar que la definición de amplificación de tensión que aquí se da coincide con la función de trasferencia definida en el Cap. XIV y que es también una forma de la función immitancia descrita en el Cap. II. Es de práctica común utilizar A en las redes activas en las que $|E_{\text{sal}}|/|E_{\text{ent}}| > 1$, y T para las redes pasivas, en que esta relación es menor que la unidad.

La propiedad *unilateral* de la válvula de alto vacío en las condiciones supuestas es aparente en el circuito equivalente de la Fig. (15-1b). Una señal E_s aplicada entre la reja y masa, afecta al circuito de placa por intermedio del generador dependiente $g_m E_s$, pero el circuito de placa no tiene un efecto correspondiente sobre el circuito de entrada o de reja. La importancia de esta propiedad unilateral en la aislación de los circuitos de carga de etapas amplificadoras sucesivas en una conexión en cascada será discutida más adelante en este mismo capítulo.

Es un hecho físicamente demostrable que g_m y r_p son independientes de la frecuencia por debajo de la gama de VHF; es por lo tanto evidente en la Fig. 15-1b que la respuesta de frecuencia del amplifica-

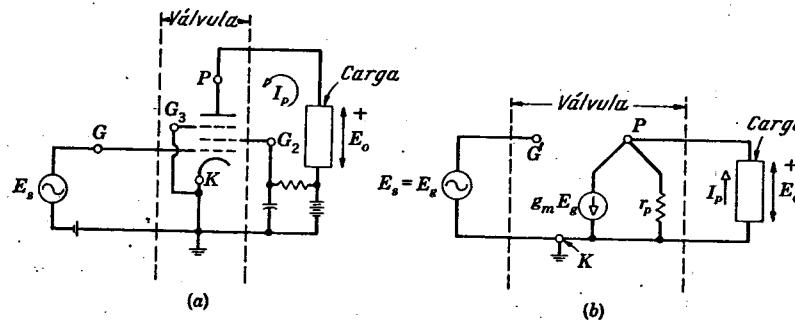


FIG. 15-1. Amplificador pentódico básico. (a) Circuito verdadero. Se supone que G_3 está al potencial alterno de masa. (b) Circuito equivalente de c.a. Se supone que el funcionamiento es lineal.

dor valvular depende sólo de los elementos circuitales pasivos que forman la carga y de las capacitancias interelectrónicas de placa a cátodo y de reja a cátodo (C_{pk} y C_{gk}). Por esta razón, aun cuando la válvula es parte del circuito, la respuesta de frecuencia ($|A|$ en función de f) puede calcularse aplicando los métodos de análisis descritos en los capítulos anteriores.

15-2. Circuito básico RC. El circuito amplificador básico es el amplificador con acoplamiento por resistencia y capacitancia de la Fig. 15-2a, discutido también en el Cap. II. C_a es el capacitor de acoplamiento o de bloqueo que sirve para separar los terminales de salida respecto de las tensiones y corrientes continuas. C_o es la capacitancia de salida de la válvula de alto vacío más la siempre presente capacitancia de dispersión de la base de la válvula y la conexión de placa a masa. C_i es la capacitancia de entrada del circuito cualquiera que se conecta entre los terminales de salida, más las capacitancias dispersas que existen entre la conexión de salida y C_c a masa. Es conveniente definir la capacitancia total en derivación como

$$C_s = C_o + C_i \quad (15-2)$$

El circuito equivalente que resulta de reemplazar la válvula por su circuito equivalente de Norton es el que se da a ver en b, Fig. 15-2.

En las aplicaciones típicas de banda ancha, los valores circuitales son tales que $R_L \ll R_g < r_p$ y $C_s \ll C_c$. Como se ha visto en el Cap. II, estas diferencias en los órdenes de magnitud permiten analizar el comportamiento del circuito en términos de tres diferentes bandas de frecuencias, determinadas por la significación relativa de las reactancias capacitivas en serie y en paralelo. Consideraremos en primer término la región de las frecuencias medias, por cuanto sirve como base para la normalización de la respuesta.

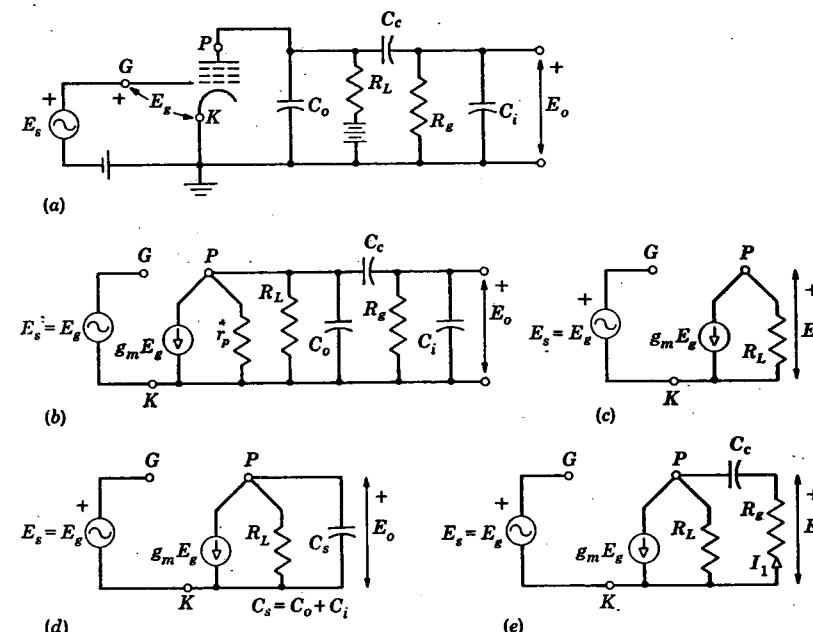


FIG. 15-2. Amplificador RC básico. (a) Circuito completo. (b) Circuito equivalente completo. Circuitos aproximados: (c) Banda media. (d) Banda alta. (e) Banda baja.

Banda media. En la banda de frecuencias media, la magnitud de la reactancia de C_c es despreciablemente pequeña, y la de C_s , muy grande en comparación con R_L . Por lo tanto, C_c puede ser considerado como un cortocircuito y C_s , como un circuito abierto. Luego, dado que $R_L \ll R_g < r_p$, el circuito equivalente aproximado para la banda media adopta la forma ilustrada por la Fig. 15-2c, y, según la Ec. (15-1), la amplificación de tensión en la banda media será

$$A_m = \left(\frac{E_o}{E_s} \right)_{\text{Banda media}} = -g_m R_L \quad (15-3)$$

Banda alta. En las frecuencias superiores a las de la banda media, la reactancia C_c sigue siendo despreciable por pequeña, pero la reactancia de C_s se aproxima en magnitud a la de R_L ; por lo tanto, el

circuito equivalente aproximado para la banda alta resulta ser el de la Fig. 15-2d. La amplificación en la banda alta será, entonces,

$$A_h = \left(\frac{E_o}{E_s} \right)_{\text{Banda alta}} = - \frac{g_m R_L}{1 + j\omega C_s R_L} \quad (15-4)$$

y, normalizando con respecto a la ganancia en la banda media,

$$\frac{A_h}{A_m} = \frac{1}{1 + j\omega C_s R_L} = \frac{1}{1 + jf/f_2} \quad (15-4)$$

donde

$$f_2 = \frac{1}{2\pi C_s R_L}$$

La comparación de las Ecs. (15-4a) y (14-26) muestra que la primera puede ser tratada por el método de los codos y que f_2 es una frecuencia de codo negativo. En el estudio de los amplificadores, llámase a menudo

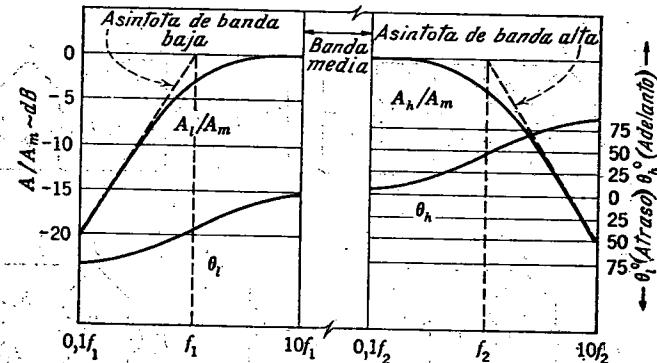


FIG. 15-3. Respuesta normalizada del amplificador RC.

"frecuencia de potencia mitad superior" a f_2 , porque se halla cerca del límite superior de la curva de respuesta y porque a esta frecuencia la tensión de salida a decaído 3 dB con respecto al valor de banda media, lo que corresponde a una relación de tensiones de $1/\sqrt{2}$. Dado que la potencia es proporcional al cuadrado de la tensión para R_L constante, la potencia entregada a R_L en la frecuencia f_2 es la mitad de la que se entrega en la banda media.

Según la Ec. (15-4a), el ángulo entre A_h y A_m es

$$\theta_h = - \arctg \frac{f}{f_2} \quad (15-4b)$$

Es decir, la tensión de salida en la banda alta se *atrasa* con respecto a la tensión de salida de banda media.* Las respuestas de amplitud y

* Esta proposición debe interpretarse con cierto cuidado, por cuanto el *atraso* se refiere a tensiones de distintas frecuencias. En realidad, lo que ocurre es que, en la banda media, la tensión de salida tiene una diferencia de fase, o *atraso*, de 180° respecto

de fase normalizadas de banda alta están representadas gráficamente en la Fig. 15-3.

Banda baja. En las frecuencias más bajas que las de la banda media, las reactancias de C_o y C_i se hacen muy grandes, mientras que la de C_c llega a ser del mismo orden de magnitud que R_g . Por lo tanto, el circuito equivalente aproximado adopta la forma ilustrada por la Fig. 15-2e. Por el teorema de división de corrientes,

$$E_o = -I_1 R_g = - \frac{g_m E_s R_L R_g}{(R_g + R_L) - j/\omega C_c}$$

Pero $R_L \ll R_g$; luego, la amplificación en la banda baja es

$$A_l = \left(\frac{E_o}{E_s} \right)_{\text{banda baja}} = - \frac{g_m R_L}{1 - j/\omega C_c R_g} \quad (15-5)$$

Normalizando con respecto a A_m de la Ec. (15-3),

$$\frac{A_l}{A_m} = \frac{1}{1 - jf_1/f} \quad (15-5a)$$

donde

$$f_1 = \frac{1}{2\pi C_c R_g}$$

La comparación con la Ec. (14-36) demuestra que f_1 es una frecuencia de codo negativo inferior; por lo tanto, la Ec. (15-5a) puede ser analizada según el método de los codos. En el lenguaje común, f_1 se llama "frecuencia de potencia mitad inferior".

Según la Ec. (15-5a), el ángulo entre A_l y A_m es

$$\theta_l = \arctg \frac{f_1}{f} \quad (15-5b)$$

es decir, la tensión de salida de banda baja está *adelantada* con respecto a la tensión de salida de banda media.* Las respuestas normalizadas de amplitud y de fase están también ilustradas en la Fig. 15-3.

15-3. Factor de mérito. Los resultados anteriores indican que la frecuencia de potencia mitad superior f_2 y la magnitud de la amplificación de banda media $|A_m|$ están interrelacionadas por intermedio de la resistencia de carga de placa R_L , y que, con valores paramétricos típicos, la frecuencia de potencia mitad inferior, f_1 , es independiente de R_L . Por consecuencia, puédese definir como un factor de mérito de la etapa RC el producto de $|A_m|$ por f_2 . Así, por las Ecs. (15-3) y (15-4a),

$$|A_m|f_2 = \frac{g_m}{2\pi C_s} \quad (15-6)$$

de la tensión de entrada, según lo indica el signo negativo que precede al segundo miembro de la Ec. (15-3). La Ec. (15-4b) indica que en la banda alta, el atraso de la tensión de salida respecto a la de entrada es mayor que 180° en la medida expresada por esta ecuación. Véase, además, la Fig. 15-3. (N. del T.)

* Véase la N. del T. de la página anterior. En este caso, la tensión de salida está *atrasada* en menos de 180° respecto a la tensión de señal de entrada. (N. del T.)

Con valores circuitales típicos, $f_1 \ll f_2$; entonces, con buena aproximación, el ancho de banda de potencia mitad es

$$BW = f_2 - f_1 \approx f_2 \quad (15-7)$$

y la Ec. (15-6) puede escribirse en la forma

$$|A_m|(BW) \approx \frac{g_m}{2\pi C_s} \quad (15-6a)$$

La consecuencia práctica de esta ecuación es que uno puede, reduciendo R_L , sacrificar la ganancia en la banda media en bien del aumento del ancho de banda, pero el producto $|A_m| (BW)$ queda constante. La Ec. (15-6a) muestra que para los amplificadores de banda ancha debe elegirse una válvula de alta conductancia mutua g_m y bajo valor de C_s . C_i y las capacitancias dispersas presentes deben ser mantenidas en un mínimo mediante una cuidadosa disposición física del amplificador. Pueden obtenerse algunos órdenes de magnitud típicos mediante el siguiente ejemplo:

Se utiliza una válvula 6AC7 como amplificadora de banda ancha. $g_m = 9.000 \mu\text{mho}$, y $C_s = 20 \mu\text{F}$. ¿Qué R_L se necesita para $f_2 = 4,5 \text{ Mc/s}$? ¿Cuánto vale $|A_m|$?

Por la Ec. (14-5a),

$$R_L = \frac{1}{2\pi f_2 C_s} = \frac{1}{2\pi(4,5 \times 10^6)(2 \times 10^{-11})} = 1,77 \text{ kilohm}$$

Por la Ec. (15-3)

$$|A_m| = g_m R_L = (9 \times 10^{-8}) \times 1,77 \times 10^3 = 15,9 \text{ numérico}$$

Debe observarse que si se duplica f_2 queda $|A_m|$ dividido por 2 ó viceversa, en virtud de la Ec. (15-6).

Los valores típicos de C_c y R_g son del orden de $0,1 \mu\text{F}$ y 100 kilohm, respectivamente. Para estos valores, la frecuencia de media potencia inferior es, por la Ec. (15-5a),

$$f_1 = \frac{1}{2\pi C_s R_g} = \frac{1}{2\pi \times 10^{-7} \times 10^5} = 15,9 \text{ ciclos}$$

15-4. Efecto del circuito de autópolarización. Es de práctica usual utilizar autópolarización en las etapas RC , siendo el circuito común una combinación en paralelo de R_K y C_K en el retorno del cátodo de la válvula, como se ve en la Fig. 15-4a. La tensión de polarización es provista por las corrientes continuas de placa y pantalla del pentodo al circular por R_K la que generalmente tiene un valor comprendido entre 100 y 500 ohm. C_K se hace por lo general muy grande, de modo que la impedancia de c.a. entre cátodo y masa es pequeña.* Luego, en un circuito típico, $C_K \gg C_c$ y $R_K < R_L$. La presencia de C_K introduce otro

* Desde luego, esta impedancia puede ser pequeña sólo por encima de cierta frecuencia mínima. (N. del T.)

efecto de frecuencia en la característica de respuesta, confinado al extremo inferior de la banda, porque C_K es tan grande que, en la banda media y la banda alta, la impedancia entre cátodo y masa es esencialmente cero. Puedese analizar el efecto de la combinación $C_K R_K$ sobre la respuesta en baja frecuencia escribiendo y resolviendo las ecuaciones nodales para el circuito equivalente de banda baja (Fig. 15-4b). Las ecuaciones nodales para la Fig. 15-4b son

$$\begin{aligned} (G_K + j\omega C_K)E_K &= g_m E_g = g_m(E_s - E_K) \\ (G_L + j\omega C_s)E_p - j\omega C_s E_o &= -g_m E_g = -g_m(E_s - E_K) \quad (15-8) \\ -j\omega C_s E_p + (G_o + j\omega C_s)E_o &= 0 \end{aligned}$$

La solución de estas ecuaciones, simplificadas por el hecho de que $R_g \gg R_L$ da como resultado

$$\frac{A_l}{A_m} = \frac{1 + j\omega C_K R_K}{(1 + g_m R_K) + j\omega C_K R_K} \left(\frac{1}{1 - j\omega C_s R_g} \right) \quad (15-9)$$

La comparación de las Ecs. (15-9) y (15-5a) muestra que el efecto de la combinación de autópolarización es el de multiplicar la amplificación normalizada por el factor $(1 + j\omega C_K R_K)/[(1 + g_m R_K) + j\omega$

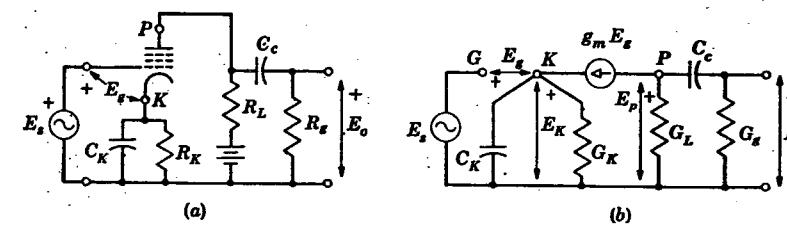


FIG. 15-4. Circuitos y curva de respuesta que ilustra el efecto del circuito de autópolarización $C_K R_K$.

$C_K R_K]$. Este efecto puede interpretarse gráficamente según el método de los codos. Reordenando la Ec. (15-9),

$$\frac{A_1}{A_m} = \frac{1}{1 + g_m R_K} \left(\frac{1 + jf/f_{oK}}{1 + jf/f_{sK}} \right) \left(\frac{1}{1 - jf_1/f} \right)$$

donde

$$f_{oK} = \frac{1}{2\pi C_K R_K}$$

$$f_{sK} = \frac{1 + g_m R_K}{2\pi C_K R_K}$$

$$f_1 = \frac{1}{2\pi C_c R_g}$$
(15-10)

La línea llená de la Fig. 15-4c muestra la respuesta de amplitud resultante para un caso en que $f_1 < f_{oK} < f_{sK}$. Las asíntotas correspondientes a los tres codos se representan con líneas cortadas. Debe observarse que para el caso ilustrado la frecuencia de potencia mitad inferior está determinada predominantemente por la combinación de autopolarización más bien que por R_g y C_o .

15-5. Etapas en cascada. A causa de la separación provista por el carácter unilateral de la válvula de alto vacío, la respuesta global de dos o más amplificadores conectados en cascada es el producto de las respuestas individuales. Esto puede demostrarse sobre la Fig. 15-5. Por definición, amplificación global, o total, es $A_T = E_{o2}/E_{s1}$. Según el diagrama

$$A_T = \frac{E_{o2}}{E_{s1}} = \frac{E_{o1} E_{o2}}{E_{s1} E_{s2}} = A_1 A_2$$
(15-11)

Por otra parte, la propiedad separadora permite hacer ajustes en una etapa sin afectar el funcionamiento ni la respuesta individual de las

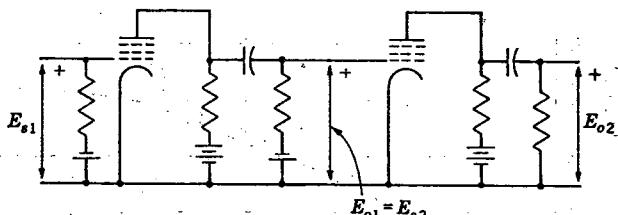


FIG. 15-5. Circuito para calcular la ganancia de etapas en cascada.

otras etapas en la cascada, aunque la respuesta global refleje, naturalmente, los efectos del ajuste. Es de interés observar qué ocurre con el ancho de banda y la ganancia en la banda media cuando se conectan en cascada n etapas idénticas. Por la Ec. (15-11), la amplificación total de banda media es

$$|A_m|_T = |A_m|^n$$
(15-12)

* El efecto de una derivación capacitiva imperfecta de la reja pantalla es similar al del circuito de autopolarización. Véase, por ejemplo, F. E. Terman, "Radio Engineer's Handbook", p. 358, McGraw-Hill Book Company, Inc., Nueva York, 1943.

El efecto sobre la frecuencia de potencia mitad superior del conjunto, F_2 , puede ser observado por el estudiante trazando las respuestas asintóticas de banda alta para, digamos, una, dos y tres etapas RC idénticas. El problema puede ser encarado analíticamente del siguiente modo: Según la Ec. (15-4a), la magnitud de la amplificación normalizada de banda alta para cada etapa es

$$\left| \frac{A_h}{A_m} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + (f/f_2)^2}}$$
(15-13)

donde f_2 es la frecuencia de potencia mitad de cada etapa individual. Por las Ecs. (15-11) y (15-13), la amplificación normalizada de n etapas idénticas será

$$\left| \frac{A_h}{A_m} \right|^n = \frac{1}{[1 + (f/f_2)^2]^{n/2}}$$
(15-13a)

Pero, por definición, la frecuencia de potencia mitad superior del conjunto, F_2 , es la frecuencia para la cual la respuesta normalizada ha caído 3 dB, o es igual a $1/\sqrt{2}$; luego, poniendo $f = F_2$ en la Ec. (15-13a) e invirtiendo,

$$[1 + (F_2/f_2)^2]^{n/2} = 2^{1/2}$$

$$F_2 = f_2 \sqrt{2^{1/n} - 1}$$
(15-14)

La cantidad $F_2/f_2 = \sqrt{2^{1/n} - 1}$ se llama a menudo "factor de contracción del ancho de banda" y está tabulada en la tabla 15-1.

TABLA 15-1. FACTOR DE CONTRACCIÓN DE ANCHO DE BANDA

Para el amplificador RC , $\xi = F_2/f_2 \approx (BW_T)/(BW)$
Para el amplificador de simple sintonía, $\xi = (BW)_T/(BW)$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ξ	1,000	0,644	0,510	0,434	0,385	0,350	0,323	0,308	0,284	0,268

El estudiante puede derivar un factor similar para F_1/f_1 , siendo F_1 la frecuencia de potencia mitad inferior del conjunto de etapas idénticas, y f_1 la de cada etapa individual. En las cascadas típicas de etapas de banda ancha RC , es $F_1 \ll F_2$; por lo tanto, con buena aproximación, el ancho de banda global $(BW)_T$ está dado por

$$(BW)_T = F_2 - F_1 \approx F_2$$

El producto amplificación-ancho de banda de n etapas idénticas en cascada es

$$|A_m|_T (BW)_T = |A_m|^n (BW) \sqrt{2^{1/n} - 1}$$
(15-15)

Puede observarse que, al aumentar n , la amplificación aumenta más rápidamente que lo que disminuye el factor de contracción del ancho de banda.

Ejemplo: Se desea diseñar un amplificador que tenga una frecuencia de potencia mitad superior, global, de 5 Mc/s y una amplificación de tensión total de por lo menos 50 dB. Determinar el número de etapas idénticas requeridas en cascada, si se usan válvulas 6AC7 ($g_m = 9.000 \mu\text{mho}$). La capacitancia en derivación total de cada etapa estimase en $20 \mu\text{F}$.

Solución: Convirtiendo la amplificación en decibel en valor numérico

$$|A_m|_T = 10^{5\%} = 10^{2.5} = 316$$

Se utiliza un procedimiento de tentativas. Por la Ec. (15-6a), para $n = 1$,

$$\begin{aligned}|A_m|f_2 &= \frac{g_m}{2\pi C_s} = \frac{9 \times 10^{-3}}{2\pi(2 \times 10^{-11})} = 71.5 \text{ Mc/s} \\ f_2 &= 5 \text{ Mc} \quad |A_m| = \frac{71.5}{5} = 14.3 \text{ numérico}\end{aligned}$$

Para $n = 2$, por la tabla 15-1, f_2 debe ser

$$f_2 = \frac{5}{0.644} \quad |A_m| = \frac{71.5 \times 0.644}{5} = 9.2 \quad |A_m|^2 = 84.4$$

Para $n = 3$,

$$f_2 = \frac{5}{0.51} \quad |A_m| = \frac{71.5 \times 0.51}{5} = 7.3 \quad |A_m|^3 = 390$$

Puesto que 390 excede la amplificación total requerida, resultarán satisfactorias tres etapas idénticas con $f_2 = 5/0.51 = 9.8$ Mc/s y una amplificación de banda media de 7.3. Según la Ec. (15-3), la resistencia de carga de placa requerida en cada etapa será

$$R_L = \frac{|A_m|}{g_m} = \frac{7.3}{9 \times 10^{-3}} = 811 \text{ ohm}$$

El método de los codos ofrece un medio adecuado para determinar los productos de amplificación-ancho de banda cuando las etapas conectadas en cascada no son idénticas.

15-6. Compensación. La Ec. (15-6) muestra que la amplificación de banda media de la etapa RC básica puede ser sacrificada en bien del aumento de la frecuencia de potencia mitad superior, y viceversa, permaneciendo constante el producto de ambas. Este proceso de modificar R_L , empero, no afecta para nada la forma de la curva de amplificación en función de la frecuencia, como lo muestran las Ecs. (15-4a) y (15-5a). Tanto en las frecuencias muy altas como en las frecuencias muy bajas, la magnitud de la amplificación decrece asintóticamente a razón de 6 dB/octava.

Puedese modificar la forma de esta característica introduciendo cambios en la etapa básica RC mediante la adición de nuevos componentes, un proceso que se conoce con el nombre de "compensación". La compensación de los extremos inferior y superior de la curva de respuesta se hace independientemente. Los métodos generales que pueden utilizarse son los que se discuten en los apartados que siguen.

15-7. Compensación de alta frecuencia. La disminución de la ganancia en las frecuencias altas en el amplificador RC débese a la presencia de C_s , la capacitancia total en derivación. Una manera de modificar la respuesta de alta frecuencia ha de consistir, por lo tanto, en agregar inductancia a la red de acoplamiento, con el fin de compensar al menos parcialmente esta capacitancia. La Fig. 15-6 muestra algunos circuitos típicos para la compensación de la banda alta, siendo el más común el de "compensación en paralelo" de a. Prestaremos preferente atención a este circuito.

Escribiendo las ecuaciones circuitales para la red de compensación en paralelo de la Fig. 15-6a, el estudiante puede verificar fácilmente que

$$\frac{A_h}{A_m} = \frac{1 + j(\omega_2 L / R_L)(\omega / \omega_2)}{[1 - (\omega_2 L / R_L)(\omega / \omega_2)^2] + j\omega / \omega_2} \quad (15-16)$$

donde $\omega_2 = 2\pi f_2$

$$\begin{aligned}f_2 &= \text{frecuencia de media potencia superior sin compensación} \\ &= 1/2\pi C_s R_L\end{aligned}$$

En lo que sigue, es conveniente reemplazar $\omega_2 L / R_L$ por un parámetro de diseño Q , el que es el factor de mérito efectivo de la rama inductiva a la frecuencia f_2 , y f/f_2 por y ; la variable de frecuencia normalizada. Así,

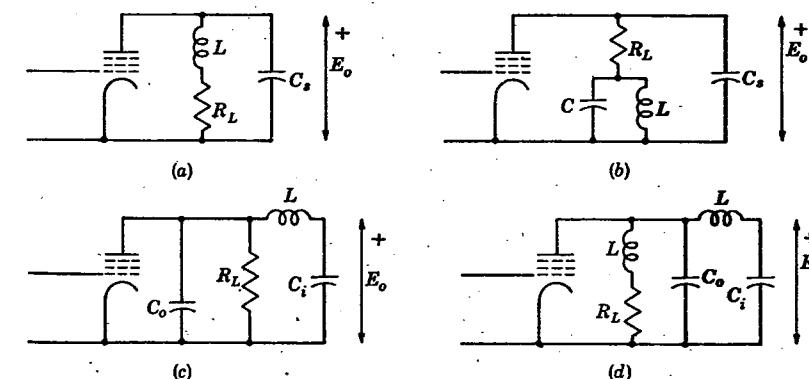


FIG. 15-6. Redes de acoplamiento con compensación de alta frecuencia. Se han omitido las fuentes de c.c., C_c y R_g para mayor simplicidad. (a) Compensación en paralelo. (b) Red m -derivada. (c) Compensación en serie. (d) Compensación en serie-paralelo. Las redes a y b son del tipo de dos terminales, las c y d, del tipo de cuatro terminales.

$$\begin{aligned}\frac{A_h}{A_m} &= \frac{1 + jQy}{(1 - Qy^2) + jy} \\ Q &= \frac{\omega_2 L}{R_L} \quad y = \frac{f}{f_2}\end{aligned} \quad (15-16a)$$

Reduciendo a la forma polar

$$\left| \frac{A_h}{A_m} \right|^2 = \frac{1 + Q^2 y^2}{1 + (1 - 2Q)y^2 + Q^2 y^4} \quad (15-17a)$$

$$\theta_h = \arctg Qy - \arctg \frac{y}{1 - Qy^2} \quad (15-17b)$$

La expresión de θ_h puede ser simplificada por medio de la identidad trigonométrica

$$\operatorname{tg}(\varphi_1 \pm \varphi_2) = \frac{\operatorname{tg} \varphi_1 \pm \operatorname{tg} \varphi_2}{1 \mp \operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi_2} \quad (15-18)$$

Sea

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi_1 &= x_1 & \varphi_1 &= \arctg x_1 \\ \operatorname{tg} \varphi_2 &= x_2 & \varphi_2 &= \arctg x_2 \end{aligned} \quad (15-19)$$

Sustituyendo

$$\arctg x_1 \pm \arctg x_2 = \arctg \frac{x_1 \pm x_2}{1 \mp x_1 x_2} \quad (15-20)$$

Luego, por la Ec. (15-20), la Ec. (15-17b) puede escribirse

$$\theta_h = -\arctg [y(1 - Q + Q^2y^2)] \quad (15-17c)$$

Un parámetro más conveniente que θ_h es el retardo de grupo τ_g , definido por la Ec. (6-49), porque τ_g debe ser constante para que no haya distorsión de retardo. Puesto que θ_h es un ángulo de atraso, τ_g es, para el amplificador con compensación en paralelo,

$$\tau_g = \frac{d|\theta_h|}{d\omega} = \frac{1}{\omega_2} \frac{d|\theta_h|}{dy}$$

Luego, por la Ec. (15-17c),

$$\tau_g = \frac{1}{\omega_2} \frac{(1 - Q) + 3Q^2y^2}{1 + y^2[(1 - Q) + Q^2y^2]^2} \quad (15-17d)$$

En la Fig. 15-7b se presentan curvas de $\omega_2\tau_g$ para varios valores de Q .

A partir de la Ec. (15-17a) puede demostrar que la asíntota de alta frecuencia de la curva de respuesta del amplificador compensado en paralelo tiene una pendiente de -20 dB/década (6 dB/octava) independientemente del valor de Q . Para las frecuencias muy altas, $y^2 \gg 1$, y la ecuación reduce a

$$\left| \frac{A_h}{A_m} \right| \approx \sqrt{\frac{Q^2y^2}{Q^2y^4}} = \frac{1}{y} \quad (15-21)$$

Por lo tanto, la asíntota será

$$\left| \frac{A_h}{A_m} \right|_{dB} = -20 \log y \quad (15-21a)$$

lo que corresponde a la pendiente dicha. Aunque este resultado pueda aparecer desconcertante a causa de la presencia de una inductancia, es fácil reconciliarlo con la situación física. Puede verse en la Fig. 15-6a que C_s está en paralelo con la rama $R_L L$. Así, al elevarse la frecuencia,

la reactancia de C_s , y la impedancia total de carga al mismo tiempo, tiende a cero; por lo tanto, C_s resulta ser el elemento decisivo en la determinación de la respuesta a las frecuencias muy altas.

Si bien la asíntota de frecuencia alta es independiente del valor de Q , la forma de la curva de respuesta verdadera en la vecindad de f_2 está controlada por el valor de Q . Así lo patentiza la Fig. 15-7a. Se observará que el agregado de la inductancia hace que la curva de respuesta se aproxime a la asíntota de manera muy diferente a la que se da en la etapa RC básica ($Q = 0$ en la figura). La Fig. 15-7b muestra, además, cómo puede elegirse Q para el control de la característica de retardó.

15-8. Respuesta de amplitud de máxima "planicidad". Se ha demostrado, en relación con la Ec. (14-17) del último capítulo, que el cuadrado de la respuesta de amplitud de una red puede ser escrito como la relación de dos polinomios que sólo incluyen las potencias pares de la variable de frecuencia. La Ec. (15-17a) satisface esta proposición, y puede escribirse en general

$$|T|^2 = \frac{a_0 + a_2y^2 + a_4y^4 + a_6y^6 + \dots}{b_0 + b_2y^2 + b_4y^4 + b_6y^6 + \dots} \quad (15-22)$$

siendo T una función de respuesta generalizada e y una variable normalizada de frecuencia. La respuesta de amplitud $|T|$ dícese ser de "máxima planicidad" cuando $|T| \approx K$, siendo K una constante escalar sobre la gama más ancha posible de la variable de frecuencia. Si las a y las b son susceptibles de ajuste, se las lleva a la condición requerida para máxima planicidad del siguiente modo: Factoreemos a_0 y b_0 en la Ec. (15-22),

$$|T|^2 = \frac{a_0}{b_0} \frac{1 + (a_2/a_0)y^2 + (a_4/a_0)y^4 + (a_6/a_0)y^6 + \dots}{1 + (b_2/b_0)y^2 + (b_4/b_0)y^4 + (b_6/b_0)y^6 + (b_8/b_0)y^8} \quad (15-22a)$$

Luego, para máxima planicidad, los coeficientes de las potencias correspondientes de y en el numerador y el denominador deben ser igualados en la mayor cantidad de términos posible; esto es, escribimos

$$\frac{a_n}{a_0} = \frac{b_n}{b_0} \quad (15-23)$$

empezando por la potencia más baja de y .* Este concepto puede ser aplicado al circuito compensado en paralelo de la Fig. 15-6a, descrito por la Ec. (15-17a), para hallar el valor de Q que da la respuesta de máxima planicidad. Es evidente por la Ec. (15-17a) que sólo es posible igualar un par de coeficientes en este caso, los de los términos en y^2 ; luego, por la Ec. (15-23)

$$\begin{aligned} Q^2 &= 1 - 2Q && \text{respuesta de máxima planicidad.} \\ Q &= -1 \pm \sqrt{2} \end{aligned}$$

* Puede demostrarse que la condición de máxima planicidad resulta también de igualar a cero el mayor número de derivadas posibles de $|T|^2$ con respecto a y , evaluadas para $y = 0$ (ver Prob. 15-5).

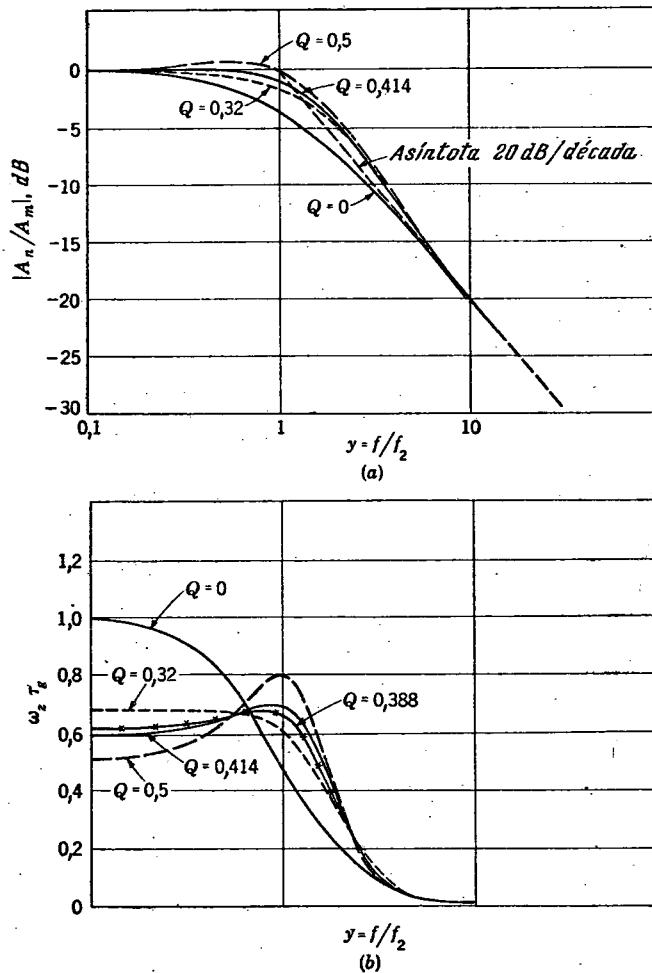


FIG. 15-7. Curvas de respuesta normalizada del amplificador con compensación en paralelo, con $Q = \omega^2 L / R_L$ como parámetro. (a) Amplitud. (b) Retardo de grupo.

Se observará que el signo negativo delante del radical corresponde a un resultado físicamente absurdo, puesto que siendo $Q = \omega^2 L / R_L$, si $Q = -2,414$, se necesita que la inductancia, o la resistencia, sea negativa; por lo tanto, hay que elegir el signo positivo. Entonces, $Q = 0,414$ da la respuesta de máxima planicidad. La forma de la respuesta está ilustrada en la Fig. 15-7a.

Puede demostrarse también que la condición de máxima planicidad proporciona un aumento de la frecuencia de potencia mitad con respecto al circuito no compensado. Sea f'_2 la frecuencia de potencia mitad supe-

rior con compensación. Por definición, en f'_2 , $|A_h/A_m| = 1/\sqrt{2}$. Luego, introduciendo $Q = 0,414$ en la Ec. (15-17a),

$$\left| \frac{A_h}{A_m} \right|^2_{f'_2} = \frac{1 + (0,414)^2 (y'_2)^2}{1 + [1 - 2(0,414)] (y'_2)^2 + (0,414)^2 (y'_2)^4} = \frac{1}{2}$$

Despejando y'_2 ,

$$\begin{aligned} y'_2 &= \frac{f'_2}{f_2} = 1,72 \\ f'_2 &= 1,72 f_2 \end{aligned} \quad (15-24)$$

Puede verse, entonces, que la condición de máxima planicidad proporciona un aumento del 72 por ciento de la frecuencia de potencia mitad superior con respecto a la etapa básica.

Ejemplo: Volver a diseñar el amplificador con válvulas 6AC7 del Ap. 15-3 usando una compensación en paralelo, ajustada para máxima planicidad. Calcular el aumento de la amplificación de banda media que resulta.

Solución: A fin de simplificar la comparación, usemos tilde para distinguir los valores modificados de resistencia de carga y amplificación de banda media. Según las especificaciones, $f'_2 = 4,5$ Mc/s. Por las Ecs. (15-4a) y (15-24),

$$R'_L = \frac{1}{2\pi f'_2 C_s} = \frac{1,72}{2\pi f'_2 C_s} = 1,72 R_L = 3,04 \text{ kilohm}$$

Por las Ecs. (15-16a) y (15-24),

$$L = \frac{QR'_L}{\omega_2} = \frac{1,72 QR'_L}{\omega'_2} = \frac{(1,72 \times 0,414)(3,04 \times 10^3)}{2\pi(4,5 \times 10^6)} = 76,4 \mu\text{H}$$

$$|A'_m| = g_m R'_L = 1,72 g_m R_L = 1,72 |A_m| = 27,4 \text{ numérico} \quad H$$

Puede observarse que el agregado de la compensación ha proporcionado un aumento del 72 por ciento en la amplificación de banda media, en comparación con el diseño original.

15-9. Característica de retardo de máxima planicidad. La técnica delineada en el último apartado puede también ser aplicada para hallar el valor de Q que proporciona la respuesta de fase más lineal, o la característica de tiempo de retardo más plana, con el circuito con compensación en paralelo. Se deja como ejercicio para el estudiante demostrar a partir de la Ec. (15-17d), que el valor de Q que satisface esta condición es el de 0,32. La curva de respuesta resultante aparece en la Fig. 15-7b.

15-10. Respuesta transitoria de un amplificador compensado en paralelo. Los resultados obtenidos hasta ahora en este capítulo se han referido exclusivamente a la respuesta de estado estacionario de un amplificador quasi-pasabajos. En los sistemas de comunicación en que hay que conservar en lo posible la forma de onda de la señal trasmisita, por ejemplo en televisión, cobra la mayor importancia la respuesta transitoria. Según se ha puntualizado en el Cap. II, las respuestas de estado

estacionaria y transitoria están interrelacionadas por medio de los polos y los ceros de la función de respuesta de la red. Se demostró también que el "frente" de la respuesta transitoria a una tensión escalón está ligado a las características de respuesta transitoria en las frecuencias altas. Así, la respuesta "frontal" de una etapa con compensación en paralelo puede ser predicha examinando los ceros y los polos del circuito equivalente de la Fig. 15-6a. En el diagrama,

$$E_o = -g_m E_s \frac{R_L + j\omega L}{1 + j\omega C_s R_L + (j\omega)^2 L C_s} \quad (15-25)$$

Factoreando L/LC_s y reemplazando $j\omega$ con la variable de frecuencia compleja p ,

$$E_o(p) = -\frac{g_m}{C_s} E_s(p) \frac{p + (R_L/L)}{p^2 + R_L p/L + 1/LC_s} \quad (15-26)$$

Sea la tensión de reja una función escalón negativa $-EU(t)$. Entonces, por la tabla 2-1,

$$E_s(p) = -\frac{E_s}{p} \quad (15-27)$$

Entonces $E_o(p) = \frac{g_m}{C_s} E_s \frac{p + p_o}{p(p - \alpha)(p - \beta)}$ (15-28)

donde $p_o = -R_L/L$, es cero, y

$$\frac{\alpha}{\beta} = -\frac{R_L}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R_L}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC_s}} \text{ son polos} \quad (15-29)$$

Es conveniente volver a escribir la Ec. (15-29) en términos de Q y ω_2 , a fin de obtener una mejor correlación con las curvas de estado estacionario. Por la Ec. (15-16a),

$$\frac{R_L}{2L} = \frac{\omega_2}{2Q} \quad (15-30a)$$

y, por la Ec. (15-16),

$$C_s = \frac{1}{\omega_2 R_L} \quad (15-30b)$$

Luego $LC_s = \frac{Q}{\omega_2^2}$ (15-30c)

Por medio de estas identidades, los polos de las Ecs. (15-29) pueden expresarse en la forma

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\omega_2}{2Q} (-1 \pm \sqrt{1 - 4Q}) \quad (15-29a)$$

Puedese ver, así, que la ubicación de los polos en el plano complejo, y de ahí la respuesta transitoria, depende del valor de Q .

Por ejemplo, consideremos el caso en que $4Q < 1$, o $Q < 0.25$.

Luego, los dos polos son reales y negativos, con los valores diferentes, según se los ve en la Fig. 15-8a. Desarrollando la Ec. (15-28) por fracciones parciales,

$$E_o(p) = \frac{g_m E_s}{C_s} \frac{p + p_o}{p(p - \alpha)(p - \beta)} \quad (15-26a)$$

$$= \frac{g_m E_s}{C_s} \left(\frac{A}{p} + \frac{B}{p - \alpha} + \frac{C}{p - \beta} \right) \quad (15-26b)$$

y por los pares de la tabla 2-1,

$$e_o(t) = \frac{g_m E_s}{C_s} (A + Be^{\alpha t} + Ce^{\beta t}) \quad (15-31)$$

lo que indica que la respuesta transitoria es sobreimpulsiva, como se ve en la Fig. 15-8a.

En cambio, si $4Q = 1$, o $Q = 0.25$, los polos de la Ec. (15-29a) se confunden en un único polo de segundo orden, lo que conduce a la respuesta de amortiguamiento crítico de la Fig. 15-8b.

Una tercera posibilidad corresponde a $4Q > 1$, o $Q > 0.25$, caso en que los polos vienen a ser:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\omega_2}{2Q} (-1 \pm j\sqrt{4Q - 1}) \quad (15-32)$$

es decir, los polos son complejos conjugados y la respuesta, por consecuencia, del tipo de sobreimpulso ilustrado en la Fig. 15-8c.

El caso degenerado de $Q = 0$, que corresponde a la etapa RC no compensada, ha sido considerado en el Cap. II, pero se lo vuelve a ilustrar en la Fig. 15-8d para fines de comparación.

Las curvas de respuesta transitoria del amplificador compensado en paralelo se representan en escala para diferentes valores de Q en la Fig. 15-9. Estas curvas ilustran el efecto de Q sobre el "tiempo de crecimiento", el "sobreimpulso" y el "campanilleo". Estas y otras cantidades relacionadas se definen a continuación:

Amplitud de pulso es el máximo valor instantáneo de un pulso. Nota: Las "puntas" y "ondulaciones" superpuestas al pulso se consideran de ordinario como transitorios separados y no se toman en cuenta para considerar las dimensiones del pulso en sí. [ASA C42 65.02.078 (1953).]

Una *punta* es un transitorio de corta duración, que comprende parte de un pulso, durante el cual la amplitud excede considerablemente la amplitud media del pulso. [ASA C42 65.02.087 (1953).]

Sobreimpulso es la respuesta transitoria inicial a un cambio unidireccional en la entrada, que excede la respuesta de estado estacionario. [ASA C42 65.02.085 (1953).]

Tiempo de crecimiento de un pulso es el intervalo de tiempo requerido para que el frente del pulso se eleve del 10 por ciento al 90 por ciento de la amplitud del pulso. [ASA C42 65.02.081 (1953).] Ver τ , en la Fig. 15-8c.

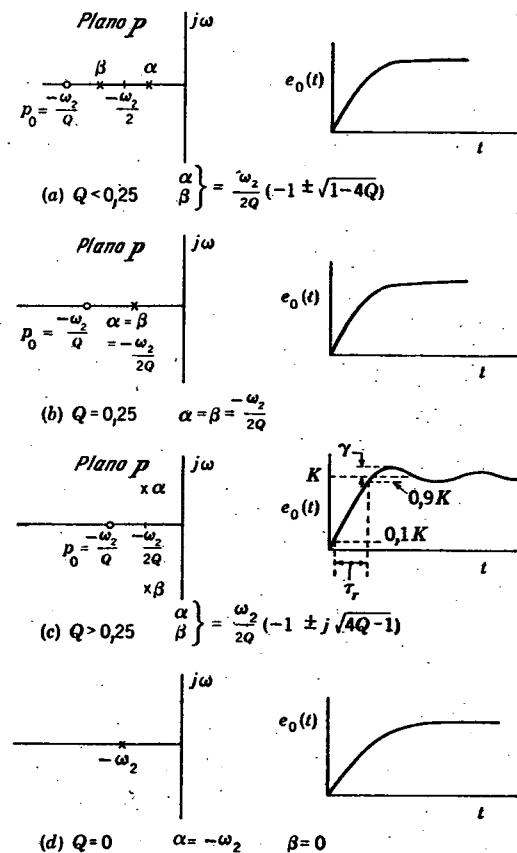


FIG. 15-8. Ubicaciones de los polos y los ceros y respuesta transitoria a una función escalón del amplificador compensado en paralelo, según el valor de Q .

El término *campanilleo*, aunque no definido por la ASA en este sentido, se utiliza a menudo para describir la presencia de variaciones oscilantes en el pulso, en torno de la amplitud de estado estacionario.

Apréciase en la Fig. 15-9 que puede abreviarse τ_r sea elevando Q , sea elevando f_2 , la frecuencia de potencia mitad superior sin compensación. Ambos métodos conducen, sin embargo, a condiciones desventajosas. Si se eleva Q por encima de 0,25, la respuesta tiene campanilleo y sobreimpulso, γ . [Por la Ec. 15-32 puede verse que la frecuencia angular aproximada de la oscilación es $(\omega_2/2Q)\sqrt{4Q-1}$.] Si se eleva f_2 , redúcese la amplificación de banda media del amplificador. Al diseñar una etapa con compensación en paralelo, entonces, debe llegarse a una solución de compromiso entre el tiempo de crecimiento, por una parte, y la amplitud del sobreimpulso y la amplificación de banda media, por la otra.

Palmer y Mautner¹ han calculado curvas de tiempo de crecimiento y sobreimpulso como función de Q para una única etapa con compensación en paralelo y recomiendan $Q = 0,388$ como valor óptimo. Los correspondientes sobreimpulso y tiempo de crecimiento son $\gamma = 2$ por ciento, $\tau_r = 1,27/\omega_2$. En la práctica, se han utilizado frecuentemente

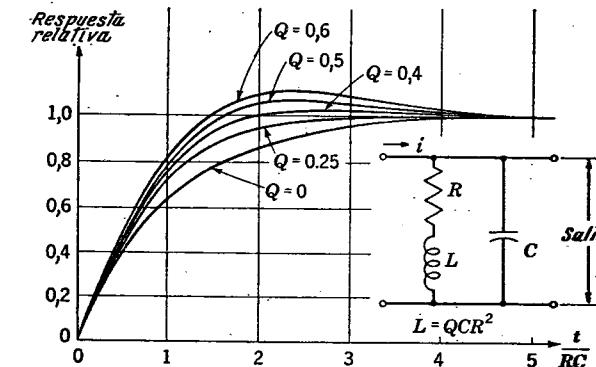


FIG. 15-9. Respuesta transitoria a una función escalón del amplificador compensado en paralelo para diversos valores de Q . (Proc. IRE.)

valores de Q comprendidos entre 0,32 y 0,4, lo que indica una solución compromisoria entre las condiciones de máxima planicidad de amplitud y máxima planicidad de retardo (ver Fig. 15-7).

Cuando se conectan en cascada n etapas idénticas, el diseño de cada etapa es más severo a causa de que los sobreimpulsos y los tiempos de crecimiento se van acumulando, aunque no linealmente, con n . Como guía general², si el sobreimpulso γ por etapa es de 2 por ciento o menos, el tiempo de crecimiento para n etapas es aproximadamente igual a \sqrt{n} veces el τ_r de una sola etapa, y γ aumenta lentamente. Cuando γ es del orden de 5 a 10 por ciento por etapa, γ aumenta aproximadamente en el factor \sqrt{n} .

La comparación de las respuestas de estado estacionario $|A_h/A_m|$ y de estado transitorio de las Figs. 15-7a y 15-9 revela una interesante correlación entre ambas respuestas. Los valores grandes de Q tienden a dar características de corte más abrupto por encima de f_2 en la curva $|A_h/A_m|$ y una mayor tendencia al campanilleo y el sobreimpulso en la curva transitoria, una tendencia ya observada en los así llamados filtros "ideales" discutidos en el Cap. II. Esto sirve como una excelente guía para predecir la respuesta transitoria a partir del conocimiento de las características de respuesta estacionaria en las frecuencias altas; cuanto más abrupto es el corte, más breve es el tiempo de crecimiento y mayor la tendencia a campanillear. Además, a una mayor frecuencia de po-

¹ R. C. Palmer and L. Mautner, A New Figure of Merit for the Transient Response of Video Amplifiers, Proc. IRE, vol. 37, p. 9, setiembre de 1949.

² G. E. Valley, Jr. and H. Wallman (editores), "Vacuum Tube Amplifiers", MIT Radiation Laboratory Series, vol. 18, McGraw-Hill Book Company, Inc., Nueva York, 1948.

tencia mitad superior corresponde siempre un menor tiempo de crecimiento.

El siguiente ejemplo proporcionará al lector alguna idea acerca de las magnitudes involucradas en una etapa práctica.

Ejemplo: Diseñar una etapa con compensación en paralelo usando una válvula 6AU6. $g_m = 5.000 \mu\text{mho}$, y $C_s = 20 \mu\text{F}$. El tiempo de crecimiento debe ser de $0,025 \mu\text{s}$ y el sobreimpulso, de 2 por ciento.

Solución: De acuerdo con la información obtenida en este apartado, elegimos $Q = 0,388$; entonces $\tau_r = 1,27/\omega_2$. Entonces,

$$\omega_2 = \frac{1,27}{\tau_r} = \frac{1,27}{0,25 \times 10^{-7}} = 5,08 \times 10^7 \text{ radian/s}$$

Por la Ec. (15-4a),

$$R_L = \frac{1}{\omega_2 C_s} = \frac{1}{(5,08 \times 10^7)(2 \times 10^{-11})} = 983 \text{ ohm}$$

Por la Ec. (15-16a)

$$L = \frac{QR_L}{\omega_2} = \frac{0,388 \times 983}{5,08 \times 10^7} = 7,5 \mu\text{H}$$

La correspondiente amplificación de banda media es

$$|A_m| = g_m R_L = (5 \times 10^{-3})(0,983 \times 10^3) = 4,9 \text{ numérico}$$

En la práctica, la especificación de tiempo de crecimiento del ejemplo resulta ser bastante severa. Es imposible realizar en la práctica un pulso de entrada de tiempo de crecimiento nulo, tal como el que se supone cuando se utiliza una función escalón para calcular la respuesta transitoria. Como regla general, en un amplificador, τ_r sólo tiene que ser menor que T_p , el tiempo de crecimiento del pulso aplicado para obtener de éste una respuesta satisfactoria. Por supuesto, cuanto menor es el valor de τ_r , tanto mejor la respuesta. Moskowitz y Racker¹ han sugerido como regla práctica que la f_2 del amplificador sea igual o mayor que $1/2T_p$.

15-11. Red m -derivada. En el apartado precedente se ha supuesto tácitamente que el inductor conectado en serie con R_L aporta solamente inductancia. En la práctica, todo inductor tiene cierta capacitancia en derivación asociada, y esta capacitancia puede producir efectos no considerados en la discusión anterior. Cuando se toma en cuenta esta capacitancia (o cualquier capacitancia dispuesta de intento en paralelo con L), el circuito adopta la forma ilustrada por la Fig. 15-6b y se conoce como red compensadora en paralelo m -derivada. Puede demostrarse sin mucha dificultad que la adecuada elección de m proporciona una amplificación de banda media aproximadamente 50 por ciento mayor que la que se consigue con la etapa con compensación en paralelo para un valor dado de $\omega_2 = 1/C_s R_L$. Como puede esperarse según el apartado anterior,

el aumento de la ganancia se obtiene a costa de la buena respuesta transitoria.

El estudiante puede demostrar que la respuesta estacionaria normalizada de la red m -derivada está dada por

$$\frac{A_h}{A_m} = \frac{(1 - mQy^2) + jQy}{[1 - (m + 1)Qy^2] + jy(1 - mQy^2)} \quad (15-33)$$

$$\text{donde } m = \frac{C}{C_s}, \quad Q = \frac{\omega_2 L}{R_L}, \quad \omega_2 = \frac{1}{C_s R_L}, \quad y = \frac{f}{f_2} \quad (15-34)$$

La correspondiente magnitud elevada al cuadrado será

$$\left| \frac{A_h}{A_m} \right|^2 = \frac{1 + (Q^2 - 2mQ)y^2 + m^2 Q^2 y^4}{1 + [1 - 2(m + 1)Q]y^2 + [(m + 1)^2 Q^2 - 2mQ]y^4 + m^2 Q^2 y^6} \quad (15-33a)$$

Es evidente que la presencia del término en y^6 en el denominador significa que la caída de la amplificación por arriba de f_2 es ahora más abrupta que en la etapa compensada en paralelo. Son de esperar, entonces, un menor tiempo de crecimiento y un mayor sobreimpulso. También puede verse que la pendiente de la asymptota de alta frecuencia sigue siendo -20 dB/década . Esto puede deducirse también por consideraciones físicas. En las frecuencias altas, la capacitancia en paralelo C_s es el elemento que determina la respuesta, exactamente como en el circuito con compensación en paralelo.

También puede demostrarse que la condición de máxima planitud en la red m -derivada proporciona una respuesta plana sobre una banda más ancha que en el caso anterior. La razón es que se cuenta ahora con dos parámetros de diseño ajustables; por lo tanto, pueden igualarse los coeficientes de dos pares de términos en el numerador y el denominador de la Ec. (15-33a).

La ecuación en el plano p para la respuesta de tensión de salida de la red m -derivada a una función escalón negativa $-E_s U(t)$ es

$$E_o(p) = \frac{g_m E_s}{C_s p} \frac{p^2 + (\omega_2/m)p + (\omega_2^2/mQ)}{p^3 + \frac{1+m}{m} \omega_2 p^2 + \frac{\omega_2^2}{mQ} p + \frac{\omega_2^2}{mQ}} \quad (15-35)$$

donde m , ω_2 , y Q se definen como en las Ecs. (15-34).

El carácter de la respuesta transitoria estará determinado por los polos de la Ec. (15-35), es decir, por los factores del polinomio de tercer grado en el denominador. Es inmediato que la determinación de estos polos (o las raíces del polinomio igualado a cero), y, por lo tanto, la respuesta transitoria, no puede hallarse de manera directa a menos que se conozcan valores numéricos. Pueden hacerse sin embargo algunas observaciones de carácter general.

El polinomio de tercer grado debe tener por lo menos una raíz real, es decir, la Ec. (15-35) tiene por lo menos un polo real. Los otros dos polos pueden ser reales e iguales, reales y desiguales, o complejos conjugados. Las primeras dos posibilidades conducen a una respuesta

¹ S. Moskowitz and J. Racker, Pulse Amplifier Design, Radio Television News, Radio-Electronic Engineering Edition, vol. 10, p. 2, febrero de 1948.

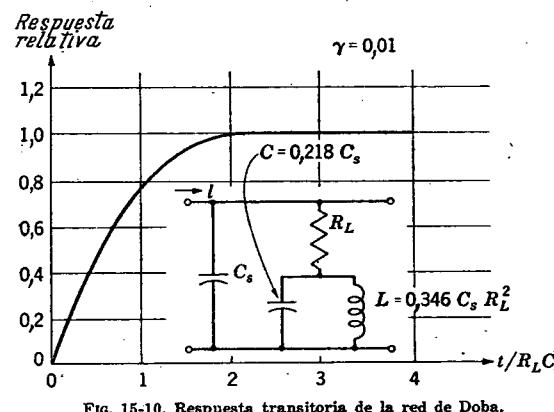


FIG. 15-10. Respuesta transitoria de la red de Doba.

transitoria del tipo amortiguado, sin campanilleo. Si dos de los polos son complejos conjugados, habrá sobreimpulso y campanilleo en la respuesta. Las restricciones que corresponden a estas condiciones en cuanto a m y Q , pueden ser deducidas por medio de la solución de Tartaglia de la ecuación general cúbica¹. No obstante, las expresiones resultantes son tan complicadas que su valor práctico resulta escaso. Cuando se especifican los valores numéricos de m y Q , puede utilizarse la solución de Tartaglia para hallar los polos de la Ec. (15-35) y desarrollarse la ecuación en fracciones parciales para obtener la respuesta transitoria. (Como alternativa, puede hallarse la raíz real del polinomio representando el valor del polinomio en función de valores *reales negativos* sujetos de p . La raíz es entonces el valor de p para el cual el polinomio es cero. La división del polinomio por este factor reduce su grado a 2, de modo que luego pueden hallarse las dos soluciones restantes por medio de la fórmula cuadrática.)

S. Doba, de los Bell Telephone Laboratories, ha recomendado los valores $m = 0,218$ y $Q = 0,346$ para una buena respuesta transitoria. La red m -derivada que se obtiene con estos valores se conoce a menudo con el nombre de "red de Doba". Su respuesta transitoria se reproduce en la Fig. 15-10.

15-12. Redes compensadoras de cuatro terminales. Los dos circuitos compensadores de banda alta de las Figs. 15-6c y d son del tipo de cuatro terminales, dado que la inductancia compensadora mantiene los terminales de entrada y de salida a distintos potenciales. Es importante observar que C_o y C_i no se combinan ya como un único elemento en derivación C_s sobre R_L . Como consecuencia, puede esperarse una mayor ganancia de banda media para un valor dado de $f_2 = 1/2\pi C_s R_L$.

Consideremos el circuito compensado en serie de la Fig. 15-6c. El análisis de este circuito demuestra que la amplificación normalizada de banda alta es

$$\frac{A_h}{A_m} = \frac{1}{1 - mQy^2/(1 + m) + j[y - mQy^3/(1 + m)^2]} \quad (15-36)$$

donde

$$m = \frac{C_i}{C_o}, \quad C_s = C_i + C_o, \quad \omega_2 = \frac{1}{C_s R_L}$$

$$Q = \frac{\omega_2 L}{R_L}, \quad y = \frac{f}{f_2} \quad (15-37)$$

La magnitud elevada al cuadrado y el ángulo son

$$\left| \frac{A_h}{A_m} \right|^2 = \frac{1}{1 + \left(1 - \frac{2mQ}{1 + m} \right) y^2 + \frac{mQ}{(1 + m)^2} (mQ - 2)y^4 + \frac{(mQ)^2}{(1 + m)^4} y^6} \quad (15-36a)$$

$$y \quad \theta_h = \text{arc tg } y \frac{1 - mQy^2/(1 + m)^2}{1 - mQy^2/(1 + m)} \quad (15-36b)$$

Puede observarse que el corte por encima de f_2 es bastante abrupto, debido a la presencia del término en y^6 en el denominador. La asymptota de alta frecuencia resulta ser, como puede demostrarse,

$$\left| \frac{A_h}{A_m} \right|_{\text{db}} = 20 \log \frac{(1 + m)^2}{mQ} - 60 \log y \quad (15-38)$$

Luego, la asymptota tiene una pendiente negativa de 60 dB/década, y su punto de arranque en la escala de las ordenadas en f_2 es una función de m y Q . Por lo tanto, el carácter de la respuesta de alta frecuencia difiere por completo de la de los circuitos antes considerados.

La respuesta frontal a una función escalón negativa de amplitud E_o puede ser determinada mediante la ecuación del plano p :

$$E_o(p) = \frac{g_m R_L E_o}{p} \frac{(1 + m)^2 \omega_2^3 / mQ}{p^3 + (1 + m)\omega_2 p^2 + (1 + m)^2 \omega_2^2 p / mQ + (1 + m)^2 \omega_2^3 / mQ} \quad (15-39)$$

El problema es aquí similar al de la etapa m -derivada, puesto que han de evaluarse los factores de un polinomio de tercer grado. La respuesta transitoria es satisfactoria con $Q = 0,467$ y $m = 2$. Este último valor de la relación C_i/C_o es típico en los circuitos prácticos.

Otra red de cuatro terminales, el tipo de compensación en serie-paralelo, es el de la Fig. 15-6d. Es una combinación de la red de la Fig. 15-6b y de una inductancia de compensación en serie L_2 . La red se conoce con el nombre de R. L. Dietzhold, de los Bell Telephone Laboratories, quien especificó los valores óptimos para los parámetros circuítalos. Los parámetros de diseño y el comportamiento transitorio de ésta y las demás redes estudiadas se resumen en la tabla 15-2.

¹ Ver, por ejemplo, W. L. Hart, "College Algebra", D. C. Heath and Company, Boston, 1926.

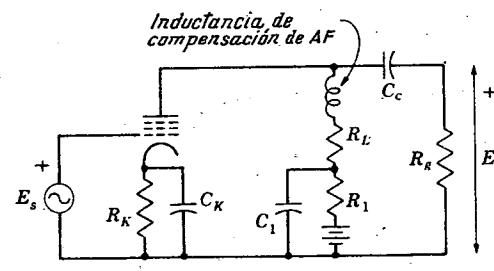
TABLA 15-2. RESUMEN, COMPENSACIÓN DE ALTA FRECUENCIA *

RED	VALORES PARAMETRICOS	$\tau_r \omega_2$	$\gamma, \%$
Paralelo	$L = \frac{0,388 R_L}{\omega_2}$	1,27	2
Doba	$C = 0,218, L = \frac{0,346 R_L}{\omega_2}$	1,24	1
Serie	$C_i = 2, L = \frac{0,467 R_L}{\omega_2}$	0,99	6,4†
Serie-paralelo	$C_i = 2, L_1 = \frac{0,133 R_L}{\omega_2}, L_2 = \frac{0,467 R_L}{\omega_2}$	0,907	1,8
Dietzhold	$C_i = 2, \frac{C}{C_i} = 0,145$ $I_1 = \frac{0,133 R_L}{\omega_2}, L_2 = \frac{0,467 R_L}{\omega_2}$	0,888	0,34

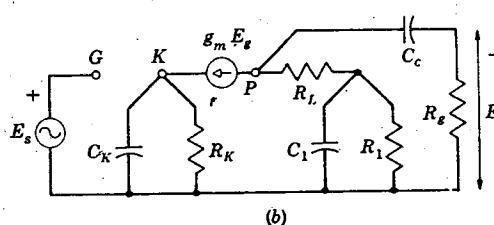
* R. C. Palmer and L. Mautner, A. New Figure of Merit for the Transient Response of Video Amplifiers, Proc. IRE, vol. 37, p. 9, setiembre de 1949.

† 6,4 es la magnitud del primer subimpulso. El sobreimpulso es bastante menor.

15-13. Compensación de banda baja. Se ha visto en los apartados anteriores de este capítulo que la pérdida de amplificación en la banda baja del amplificador básico RC se debe a los efectos de la red de acoplamiento RC y a la degeneración causada por la incompleta derivación capacitiva en el circuito de autopolarización. Cualquiera de estos efectos pueden ser reducidos por los elementos de compensación de



(a)



(b)

FIG. 15-11. Circuitos para estudiar la compensación de banda baja. Los elementos compensadores son R_1 y C_1 .

baja frecuencia C_1 y R_1 , de la Fig. 15-11. En lo que sigue, se supondrá que $R_L \ll R_g$, situación típica en los amplificadores de banda ancha.

Dejando de lado, por el momento, el circuito de autopolarización, es fácil comprender físicamente el comportamiento de los elementos compensadores. En las bandas alta y media, C_1 pone efectivamente en cortocircuito a R_1 , de modo que la única carga de placa es R_L . En baja frecuencia, en cambio, el generador de corriente $g_m E_g$ trabaja en una carga mayor, $R_L + R_1/(1 + j\omega C_1 R_1)$, haciendo que E_p , la tensión de placa, aumente al disminuir la frecuencia. Matemáticamente,

$$E_p = -g_m E_g \left(R_L + \frac{R_1}{1 + j\omega C_1 R_1} \right) = -g_m E_g R_L \frac{(1 + R_1/R_L) + j\omega C_1 R_1}{1 + j\omega C_1 R_1}$$

$$= -g_m E_g (R_L + R_1) \frac{1 + j\omega C_1 R_1 R_1 / (R_L + R_1)}{1 + j\omega C_1 R_1} \quad (15-40)$$

Así, a medida que la frecuencia baja desde la banda media a cero, $|E_p|$ aumenta de $g_m E_g R_L$ a $g_m E_g (R_L + R_1)$, proporcionando la acción compensadora requerida. El estudiante puede demostrar que la tensión de salida de banda baja, incluyendo los efectos de las redes de compensación, de autopolarización y de acoplamiento, es

$$E_o = -g_m E_g R_L \frac{(1 + R_1/R_L) + j\omega C_1 R_1}{1 + j\omega C_1 R_1} \frac{1 + j\omega C_K R_K}{(1 + g_m R_K) + j\omega C_K R_K} \frac{1}{1 - j/\omega C_e R_g} \quad (15-41)$$

y que

$$\frac{A_l}{A_m} = \underbrace{\frac{(1 + R_1/R_L) + j\omega C_1 R_1}{1 + j\omega C_1 R_1}}_a \underbrace{\frac{1 + j\omega C_K R_K}{(1 + g_m R_K) + j\omega C_K R_K}}_b \underbrace{\frac{1}{1 - j/\omega C_e R_g}}_c \quad (15-41a)$$

15-14. Compensación del circuito de polarización. Dado que los factores a y b en la Ec. (15-41a) tienen formas recíprocas, la primera y más obvia aplicación de este circuito compensador es para cancelar el efecto degenerativo del circuito de autopolarización. Entonces, para hacer $ab = 1$,

$$R_1 = g_m R_K R_L \quad \text{compensación del circuito de autopolarización} \quad (15-42)$$

$$C_1 = \frac{C_K R_K}{R_1}$$

Satisfecha las Ecs. (15-42), la respuesta normalizada de banda baja depende solamente de la red de acoplamiento $C_e R_g$, tal como la de la Ec. (15-5a).

En realidad, esta condición da resultados razonablemente buenos en la práctica. Por ejemplo, si $C_e = 0,1 \mu F$ y $R_g = 100$ kilohm, la frecuencia de potencia mitad inferior es, según la Ec. (15-5a),

$$f_1 = \frac{1}{2\pi \times 10^{-7} \times 10^5} = 15,9 \text{ c/s}$$

Debe observarse, sin embargo, que este valor tiende a ser un verdadero límite inferior para f_1 , por las siguientes razones: Los fabricantes de válvulas especifican 100 a 500 kilohm como valor máximo admisible para R_g en la mayoría de las válvulas. Por otra parte, haciendo C_1 de capacitancia mayor que $0,1 \mu\text{F}$, el tamaño físico del capacitor es tal que su contribución a la capacitancia total en derivación, C_s , afecta adversamente la respuesta de banda alta.

Es corriente utilizar un capacitor electrolítico para realizar C_K , con un valor de $10 \mu\text{F}$ o más, puesto en derivación con un capacitor de dieléctrico de papel o de mica de $0,01$ a $0,1 \mu\text{F}$. Esta unidad menor es necesaria porque los capacidores electrolíticos compórtanse por lo general como inductivos en las frecuencias altas. La unidad menor asegura la correcta derivación capacitiva en estas frecuencias. Naturalmente, la unidad en paralelo puede despreciarse en los cálculos de banda baja. Se obtendrán algunas ideas de las magnitudes en juego con el siguiente ejemplo:

Se usa una válvula 6AC7 en un amplificador de banda ancha. $R_K = 160$ ohm y $g_m = 9.000 \mu\text{mho}$. R_L se fija en 3.000 ohm sobre la base de la respuesta de alta frecuencia (respuesta de máxima planicidad con $f'_2 = 4,5 \text{ Mc/s}$, $f_2 = 2,62 \text{ Mc/s}$). Se toma $C_K = 10 \mu\text{F}$.

Los elementos de la red compensadora se determinan a partir de las Ecs. (15-42) :

$$R_1 = g_m R_K R_L = (9 \times 10^{-3}) \times 160 \times (3 \times 10^3) = 4,32 \text{ kilohm}$$

$$C_1 = \frac{C_K R_K}{R_1} = \frac{10^{-5} \times 160}{4,32 \times 10^3} = 0,37 \mu\text{F}$$

Puede observarse, de paso, que en la frecuencia $0,1f_2$, que efectivamente define el límite superior de la banda media, la reactancia de C_1 tiene la magnitud

$$\frac{1}{\omega C_1} = \frac{1}{2\pi(0,262 \times 10^6)(0,37 \times 10^{-6})} = 1,64 \text{ ohm}$$

Esto indica que R_1 está prácticamente en cortocircuito en la banda alta, de modo que la carga de placa se reduce efectivamente a R_L .

El profesor M. H. Crothers, de la Universidad de Illinois, ha sugerido que con esta compensación del circuito de autopolarización C_K puede tener un valor tal que no se necesita para realizarlo un capacitor electrolítico. Dado que el circuito de compensación cancela los efectos de la degeneración introducida por el circuito de autopolarización, C_1 y C_K puede elegirse de manera que R_1 esté adecuadamente derivado para las frecuencias altas. Esto es esencial, dado que C_s está en paralelo con la carga de placa y R_L debe hacerse lo suficientemente pequeña como para satisfacer las condiciones de diseño en la banda alta.

A modo de ilustración, puede tolerarse un 5 por ciento de aumento de la impedancia de carga de placa en la frecuencia $0,1f_2$. Entonces, usando las cifras del último ejemplo, se desea que $1/2\pi(0,1f_2)C_1 \leq 0,05R_L$. Sustituyendo,

$$C_1 \geq \frac{1}{2\pi(0,292 \times 10^6)(5 \times 10^{-2})(3 \times 10^3)} = 0,00363 \mu\text{F}$$

El valor normal siguiente de capacitancia es $0,0039 \mu\text{F}$. Entonces

$$C_1 = 0,0039 \mu\text{F}. \text{ Por la Ec. (15-42),}$$

$$C_K = \frac{C_1 R_1}{R_K} = \frac{0,0039 \times 4,32}{0,16} = 0,117 \Sigma \mu\text{F}$$

La economía en el tamaño y el coste del capacitor es muy evidente con estas cifras. Crothers ha hecho notar también que, para la compensación por el circuito de autopolarización, sólo deben especificarse las tolerancias para las relaciones C_K/C_1 y R_1/R_L más bien que para los valores de los cuatro elementos separados.

15-15. Compensación del circuito de acoplamiento. En los amplificadores en los que se utiliza polarización fija o valores muy grandes de C_K (por ejemplo, del orden de $100 \mu\text{F}$), de modo que no hay degeneración en la banda baja de interés, la red de compensación $R_1 C_1$ de la Fig. 15-11 puede ser utilizada para cancelar *parcialmente* la caída de la respuesta debida a la red de acoplamiento $C_c R_g$. Dado que no interesa ya la degeneración de cátodo, el factor b en la Ec. (15-41a) es igual a la unidad y la respuesta de baja frecuencia viene a ser

$$\frac{A_t}{A_m} = \frac{(1 + R_1/R_L) + j\omega C_1 R_1}{1 + j\omega C_1 R_1} \quad (15-43)$$

Puede observarse que los dos restantes factores no son de forma recíproca; por lo tanto, no es posible la cancelación perfecta. Por esta razón, obténese una mejor idea acerca del efecto de la compensación aplicando el método de los codos.

Reordenando la Ec. (15-43),

$$\frac{A_t}{A_m} = \frac{f_{01}}{f_{x1}} \left(\frac{1 + jf/f_{01}}{1 + jf/f_{x1}} \right) \left(\frac{1}{1 - jf_1/f} \right) \quad (15-44)$$

donde

$$f_{01} = \frac{R_1 + R_L}{2\pi C_1 R_1 R_L}$$

$$f_{x1} = \frac{1}{2\pi C_1 R_1} \quad (15-44a)$$

$$f_1 = \frac{1}{2\pi C_c R_g}$$

La respuesta, entonces, está caracterizada por tres codos, dos de los cuales, f_{01} y f_{x1} , pueden controlarse eligiendo C_1 y R_1 , los elementos de compensación.

Supongamos que la condición de diseño elegida es que $f_{o1} = f_1$. Entonces, por las Ecs. (15-44a),

$$\frac{C_1}{C_c} = \frac{R_g}{R_L} \left(1 + \frac{R_L}{R_1}\right) \quad \text{compensación de la red de acoplamiento} \quad (15-45)$$

La Fig. 15-12a muestra la respuesta para esta condición de diseño. Puede observarse que f_{x1} resulta ser el codo que determina la respuesta, de modo que f'_1 , la frecuencia de potencia mitad inferior con compensación, es idéntica a f_{x1} . Puedese obtener un bajo valor de f'_1 usando un valor grande de C_1 . Debe observarse que C_1 no contribuye a C_s como lo hace C_c ; por lo tanto, esta forma de compensación permite una mejor respuesta de banda baja sin afectar la respuesta de banda alta adversamente.

Como alternativa, C_1 y R_1 pueden elegirse de modo que $f_{x1} < f_1 < f_{o1}$, como se ve en la Fig. 15-12b. Se aprecia que este caso tiene una "joroba" en la curva de respuesta y dícese entonces, a menudo, que el

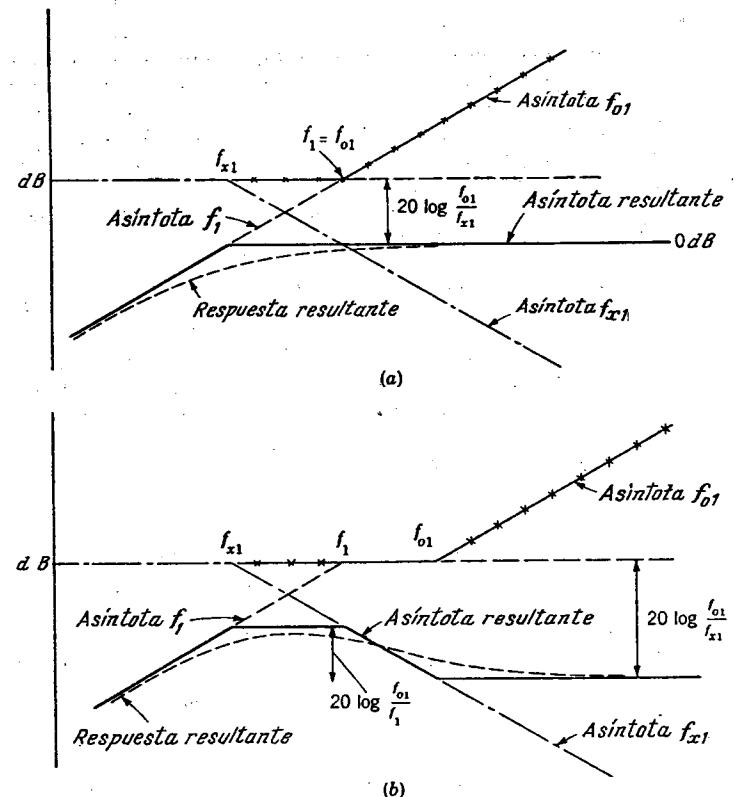


FIG. 15-12. Respuestas de codo que ilustran el efecto de la compensación de baja frecuencia. (a) $f_{o1} = f_1$. La respuesta de banda baja está determinada por el codo f_{x1} . (b) $f_{o1} > f_1 > f_{x1}$. La curva de respuesta resulta sobrecompensada.

circuito está "sobrecompensado". Hay mucha libertad en la elección de los valores de f_{o1} y f_{x1} , tanto en su relación recíproca como con respecto a f_1 . Como puede apreciarse en la figura, la altura de la "joroba" depende de la relación f_{o1}/f_1 . Un estudio de la respuesta transitoria arrojará más luz sobre esta condición de diseño.

15-16. Respuesta transitoria con compensación de banda baja.

La respuesta transitoria del amplificador de banda baja compensada resulta de reemplazar $j\omega$ por la variable de frecuencia compleja p , y E_o por una función escalón adecuada, en la Ec. (15-41). Elegiremos una función escalón negativa $-E_o U(t)$.

Con la compensación del circuito de autopolarización [Ecs. (15-42)], dos de los factores de la Ec. (15-41) se cancelan y la ecuación en p resulta ser

$$E_o(p) = g_m E_g R_L \frac{p}{p(p + \omega_1)} \quad \omega_1 = \frac{1}{C_s R_g} \quad (15-46)$$

Es evidente, entonces, que la respuesta transitoria consiste en un único decrecimiento logarítmico

$$e_o(t) = g_m E_g R_L e^{-\omega_1 t} \quad (15-46a)$$

característico del amplificador RC básico (ver Fig. 2-18c).

En cambio, si el efecto degenerativo es despreciable y se compensa el efecto de la red de acoplamiento, de acuerdo con la Ec. (15-45), la ecuación en p reduce a

$$E_o(p) = g_m E_g R_L \frac{p}{p(p + \omega_{x1})} \quad \omega_{x1} = \frac{1}{C_1 R_1} \quad (15-47)$$

y la respuesta es otra vez un exponencial decreciente. Puesto que $\omega_{x1} < \omega_1$, la sagita será menor que para el amplificador básico sin compensar, lo que indica que la compensación conduce a una mejor respuesta transitoria.

Mucho más interesantes son las posibilidades que ofrece la condición de "sobrecompensación" descrita en el apartado anterior. Suponiendo que no hay efectos de degeneración por cátodo, la ecuación en p equivalente de la Ec. (15-41) con una función escalón negativa $-E_o U(t)$ aplicada es

$$E_o(p) = g_m E_g R_L \frac{[p + (R_1 + R_L)/C_1 R_1 R_L]p}{p(p + 1/C_1 R_1)(p + 1/C_s R_g)} \quad (15-48)$$

Por razones de conveniencia, para relacionar las respuestas de estado transitorio y estacionario, introducimos las Ecs. (15-44a):

$$E_o(p) = g_m E_g R_L \frac{p + \omega_{o1}}{(p + \omega_{x1})(p + \omega_1)} \quad (15-48a)$$

Desarrollando por fracciones parciales,

$$E_o(p) = g_m E_g R_L \left(\frac{A}{p + \omega_{x1}} + \frac{B}{p + \omega_1} \right) \quad (15-48b)$$

donde

$$A = \frac{(\omega_{o1} - \omega_{x1})}{(\omega_1 - \omega_{x1})}$$

$$B = -\frac{(\omega_{o1} - \omega_1)}{(\omega_1 - \omega_{x1})} \quad (15-49)$$

Entonces

$$e_o(t) = g_m E_g R_L (A e^{-\omega_{x1} t} + B e^{-\omega_1 t}) \quad (15-50)$$

Luego, la respuesta está caracterizada por dos exponenciales decrecientes. El problema de compensación es ahora el de reducir al mínimo la sagita o decrecimiento debido a los exponenciales. Esto puede hacerse igualando a cero la pendiente *inicial* de la Ec. (15-50) para $t = 0$. Para hallar los valores de $R_1 C_1$ que satisfacen esta condición, igualamos a cero la derivada respecto del tiempo de la Ec. (15-50).

$$\frac{de_o(t)}{dt} \Big|_{t=0} = g_m E_g R_L (-\omega_{x1} A - \omega_1 B) = 0$$

Introduciendo los valores de A y B de las Ecs. (15-49),

$$\frac{-\omega_{x1}(\omega_{o1} - \omega_{x1}) + \omega_1(\omega_{o1} - \omega_1)}{(\omega_1 - \omega_{x1})} = 0$$

$$\frac{(\omega_1 - \omega_{x1})\omega_{o1} - (\omega_1 - \omega_{x1})(\omega_1 + \omega_{x1})}{(\omega_1 - \omega_{x1})} = 0$$

$$\omega_{o1} - \omega_1 - \omega_{x1} = 0$$

o

Introduciendo las Ecs. (15-44a),

$$C_1 R_L = C_c R_g \quad (15-51)$$

La Ec. (15-51) no impone condición de diseño sobre el valor de R_1 de la red de compensación, es decir, la condición para hacer $de_o(t)/dt = 0$

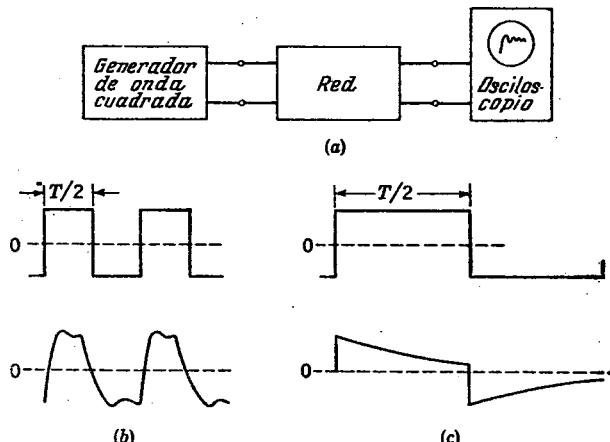


FIG. 15-13. Ensayo de la respuesta transitoria con onda cuadrada. (a) Diagrama en bloques. (b) Para obtener la respuesta frontal, $T/2$ de la onda cuadrada se elige lo suficientemente grande como para que el campanilleo desaparezca. (c) Para la medición de la flecha o sagita, $T/2$ se hace tan grande que la respuesta frontal no es visible.

para $t = 0$ es independiente de R_1 . Esta se elige de modo de hacer mínima la sagita para $t > 0$. El estudiante puede demostrar fácilmente que la sagita disminuye si aumenta R_1/R_L . El límite práctico de R_1 está determinado por la tensión de placa de funcionamiento del pentodo y la tensión de fuente de alimentación disponible.

15-17. Ensayo con onda cuadrada. En este capítulo nos hemos referido muchas veces a la respuesta de un amplificador cuasi pasabajos a una función escalón aplicada. Cabe preguntarse cómo puede determinarse experimentalmente esta respuesta. Dado que la respuesta transitoria consiste en una tensión de salida en función del tiempo, siendo la entrada una función escalón, el osciloscopio de rayos catódicos es el instrumento ideal para la observación de la señal de salida. Hay una dificultad básica, sin embargo: el osciloscopio ordinario necesita ser excitado por una señal repetitiva más bien que por una señal no recurrente.

En los ensayos, la función escalón (utilizada en los cálculos) reemplázase por una "función escalón repetitiva" u onda cuadrada, como lo ilustra la Fig. 15-13a. El principal problema al hacer esta sustitución consiste en determinar el semiperíodo $T/2$ de la onda cuadrada más adecuado para obtener la presentación de la porción, esto es, el frente o la sagita, de respuesta transitoria que interesa particularmente en el ensayo. Este problema se resuelve fácilmente.

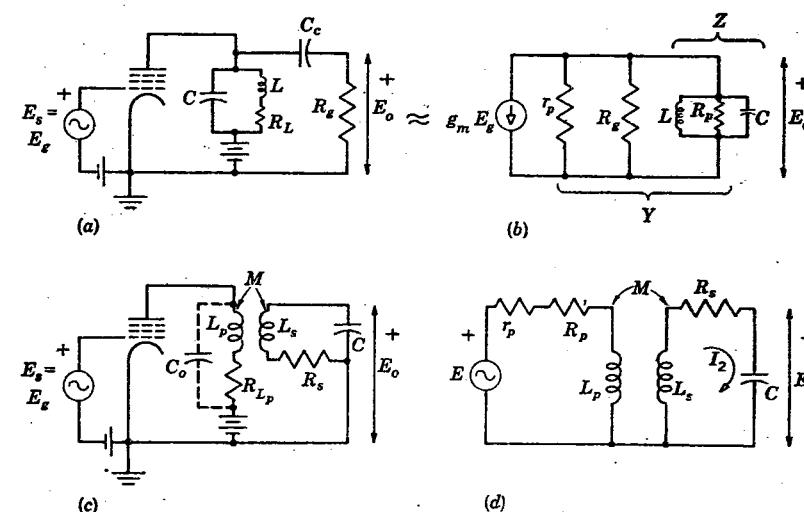


FIG. 15-14. Circuitos amplificadores de sintonía simple.

Los resultados de este capítulo y los del Cap. II demuestran que la respuesta frontal depende de los mismos componentes circuitales que la respuesta estacionaria de banda alta, y que la flecha o sagita está gobernada por los mismos elementos que la respuesta estacionaria de banda baja. Para observar la respuesta frontal, se elige una onda cuad-

drada de frecuencia alta, con la única restricción de que $T/2$ tiene que ser lo suficientemente largo como para que todo campanilleo quede prácticamente amortiguado antes de que la onda cuadrada varíe de amplitud (ver Fig. 15-13b). La flecha o sagita depende de los componentes que determinan la respuesta de baja frecuencia; por lo tanto, la onda cuadrada se elige de una frecuencia lo suficientemente baja como para que la respuesta frontal ocupe una porción insignificante del período de trazado y la flecha resulte así visible.

15-18. Amplificadores del tipo pasabanda. El resto de este capítulo estará dedicado a tres tipos comunes de amplificadores pasabandas o sintonizados, es decir, los que tienen una respuesta de amplitud de estado estacionaria que es aproximadamente simétrica con respecto a una frecuencia central alta. Los amplificadores se agruparán de acuerdo con el número de circuitos sintonizados que emplean.

15-19. Amplificadores de simple sintonía. En la Fig. 15-14 se muestran dos amplificadores básicos que emplean un circuito de simple sintonía y que ofrecen comportamientos equivalentes.

El circuito de *a* se conoce con el nombre de amplificador sintonizado en placa. En *b* la válvula ha sido sustituida por su circuito equivalente lineal, esto es, el generador de corriente $g_m E_g$ en paralelo con la resistencia de placa r_p , C_c , cuya reactancia resulta despreciable a las frecuencias de funcionamiento, no se incluye en el circuito equivalente. La inductancia L , su resistencia equivalente en paralelo $R_p = Q_r \omega_r L$, y la capacitancia C se agrupan en el circuito antirresonante Z . Según el Cap. IV, Z puede expresarse en la forma normalizada

$$Z = \frac{R_p}{1 + jQ_r(f/f_r - f_r/f)} \quad (15-52)$$

donde $Q_r = R_p/\omega_r L$

$$\omega_r^2 = 1/LC$$

Entonces, la tensión de salida será

$$E_o = -\frac{g_m E_g}{Y} = \frac{-g_m E_g}{\frac{1}{r_p} + \frac{1}{R_p} + \frac{1 + jQ_r(f/f_r - f_r/f)}{\omega_r L Q_r}} \quad (15-53)$$

Dividiendo por E_g y despejando la amplificación de tensión,

$$A = \frac{E_o}{E_g} = \frac{-g_m \omega_r L Q_r}{1 + \omega_r L Q_r (1/r_p + 1/R_p) + jQ_r(f/f_r - f_r/f)} \quad (15-54)$$

Para $f = f_r$, la amplificación de resonancia es

$$A_r = \frac{-g_m \omega_r L Q_r}{1 + \omega_r L Q_r (1/r_p + 1/R_p)} = -g_m \omega_r L Q_r \quad (15-55)$$

donde $Q_r = \frac{Q_r}{1 + \omega_r L Q_r (1/r_p + 1/R_p)}$ (15-56)

Por la Ec. (4-29), el ancho de banda de un circuito resonante está dado por la expresión $BW = f_r/Q_r$, en el que Q_r es el valor de resonancia del factor de mérito. Por lo tanto, para este caso,

$$A_r = \frac{-g_m}{2\pi C(BW)} \quad (15-55a)$$

El valor efectivo de Q , Q_e de todo el circuito se introduce por razones de conveniencia.

En muchas aplicaciones de banda ancha, $R_g \ll r_p$, y $Q_r \gg R_g/\omega_r L$, caso en que Q_e reduzce a

$$Q_e = \frac{R_g}{\omega_r L} = \omega_r C R_g \quad r_p \gg R_g \quad Q_r \gg \frac{R_g}{\omega_r L} \quad (15-56a)$$

y $A_r = -g_m R_g$ (15-55b)

La amplificación normalizada del amplificador de simple sintonía obtiénese dividiendo la Ec. (15-54) por la (15-55):

$$\frac{A}{A_r} = \frac{1}{1 + jQ_e(f/f_r - f_r/f)} \quad (15-57)$$

Puede verse en la Ec. (15-57) que la amplificación normalizada sigue la misma ley que la curva universal de resonancia (ver Fig. 4-10) y que el ancho de banda de potencia mitad es

$$BW = \frac{f_r}{Q_e} \quad (15-58)$$

En este capítulo se supondrá que prevalecen las condiciones de simetría aritmética, de modo que la Ec. (15-57) puede ser escrita

$$\frac{A}{A_r} = \frac{1}{1 + j2Q_e \delta} \quad (15-57a)$$

donde $\delta = \frac{f - f_r}{f_r}$ (15-57b)

En el amplificador de simple sintonía, el producto amplificación-ancho de banda es, por las Ecs. (15-55) y (15-58),

$$|A_r|(BW) = \frac{g_m}{2\pi C} \quad (15-59)$$

Puede observarse que ésta es idéntica a la correspondiente cantidad definida para el amplificador quasi-pasabajos (Ec. 15-6a); por lo tanto, puede sacrificarse la amplificación por el ancho de banda y viceversa, permaneciendo constante el producto de ambos, si se varía Q_e .

El estudiante puede ver aquí otro ejemplo de la analogía pasabajos-pasabanda utilizada en el Cap. VII. Por las Ecs. (15-57b) y (15-58),

$$2Q_e \delta = 2Q_e \frac{f - f_r}{f_r} = \frac{f - f_r}{BW/2} \quad (15-60)$$

Por lo tanto, la Ec. (15-57a) puede escribirse

$$\frac{A}{A_r} = \frac{1}{1 + j(f - f_r)/BW/2} \quad \text{BP} \quad (15-61)$$

El amplificador pasabajos análogo tendría la forma indicada en la Fig. 15-15a y su amplificación normalizada sería

$$\frac{A}{A_r} = \frac{1}{1 + jf/f_2}$$

Pero para este caso de pasabajos, $f_2 = BW = 1/2\pi C_s R_L$, por lo tanto,

$$\frac{A}{A_r} = \frac{1}{1 + jf/BW} \quad \text{LP} \quad (15-61a)$$

Las respuestas de amplitud de las Ecs. (15-61) y (15-61a) se presentan en las Figs. 15-15b y c. Se observará que si la frecuencia de resonancia f_r de la Ec. (15-61) es "trasferida a cero", las dos respuestas resultan idénticas, excepto por una relación de 2:1 en los anchos de banda de potencia mitad. Para comportamiento análogo, C_s debe elegirse de modo que

$$2(BW)_{\text{LP}} = (BW)_{\text{BP}} \\ \text{de donde} \quad C_s R_L = 2CR_p \quad (15-61b)$$

Esta analogía se usará en un apartado posterior.

Como regla general, el método de sintonía utilizado en la etapa de simple sintonía de la Fig. 15-14a depende de la gama de sintonía. Hasta unos pocos megaciclos, C es por lo general el elemento variable de sintonía. En las frecuencias para las cuales el producto LC tiene que ser muy pequeño, la capacitancia C reducirse a la aportada por la válvula y las conexiones, no agregándose capacitancia adicional. En esta condición, la sintonía hace variando L , a menudo por medio de un núcleo móvil de alta permeabilidad.

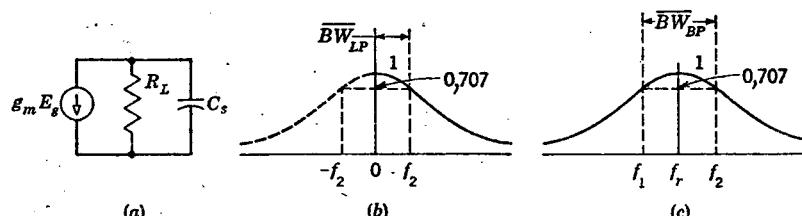


FIG. 15-15. Analogía pasabajos-pasabanda. (a) Amplificador pasabajos análogo al de la Fig. 15-14a. (b) Respuesta de amplitud del amplificador pasabajos. Se incluyen las frecuencias negativas por razones de simetría. (c) Respuesta de amplitud del amplificador pasabanda.

Otro circuito de respuesta idéntica a la de la etapa de simple sintonía es el de la Fig. 15-14c, o amplificador de primario aperiódico y secundario sintonizado. En el circuito físico, L_p estará sintonizado por C_o la capacitancia de salida de la válvula, como se ve en la figura. En las aplicaciones típicas, no obstante, L_p se elige pequeña

en comparación con L_s y C grande en comparación con C_o , de modo que

$$\omega_r^2 = \frac{1}{L_s C} \ll \frac{1}{L_p C_o} \quad (15-62)$$

Se ha visto en el Cap. IV que en esta condición la combinación en paralelo $L_p C_o$ se comporta como una inductancia L_p en las frecuencias próximas a f_r ; por lo tanto, puede omitirse C_o en el circuito equivalente de la Fig. 15-14d. Puede verse entonces que en este amplificador hay también un único circuito sintonizado y demostrarse que tiene la misma respuesta que el amplificador de simple sintonía de la Fig. 15-14a. El circuito puede analizarse considerando las ecuaciones de malla de la Fig. 15-14d. Se tiene, así,

$$E_o = \frac{I_2}{j\omega C} = \frac{-Z_{12}E}{j\omega CZ_{11}(Z_{22} - Z_{12}^2/Z_{11})} \quad (15-63)$$

donde

$$\begin{aligned} E &= g_m r_p E_s \\ Z_{22} &= R_s + j\left(\omega L_s - \frac{1}{\omega C}\right) \\ &= R_s + j\omega_r L_s \left(\frac{f}{f_r} - \frac{f_r}{f}\right) \\ \omega_r^2 &= \frac{1}{L_s C} \\ Z_{12} &= \pm j\omega M \\ Z_{11} &= r_p + R_p + j\omega L_p \end{aligned} \quad (15-64)$$

En la práctica, r_p es del orden de 1 megohm en los circuitos típicos, R_p de unos pocos ohm, y ωL_p , de algunos centenares de ohm; por lo tanto, con buena aproximación

$$Z_{11} = r_p \quad (15-64a)$$

Introduciendo las Ecs. (15-64) y (15-64a) en la Ec. (15-63),

$$E_o = \mp \frac{g_m E_s M}{C} \frac{1}{R_s + j\omega_r L_s \left(\frac{f}{f_r} - \frac{f_r}{f}\right) + \frac{(\omega M)^2}{r_p}} \quad (15-65)$$

Pero $1/C = \omega^2 L_s$; luego, sustituyendo y factorizando $R_s + (\omega M)^2/r_p$ en el denominador,

$$E_o = \mp \sqrt{\left[R_s + \frac{(\omega M)^2}{r_p}\right] \left[1 + j \frac{\omega_r L_s}{R_s + (\omega M)^2/r_p} \left(\frac{f}{f_r} - \frac{f_r}{f}\right)\right]} \quad (15-66)$$

Se demostrará ahora que esta ecuación puede reducirse a la forma de la ecuación de la curva universal mediante la definición oportuna del factor de mérito efectivo. Hagamos

$$Q_e = \frac{\omega_r L_s}{R_s + (\omega M)^2/r_p} \quad (15-67)$$

Introduciendo Q_e en la Ec. (15-66) y dividiendo por E_g para hallar la ganancia,

$$A = \mp \frac{g_m \omega_r M Q_e}{1 + j Q_e (f/f_r - f_r/f)} \quad (15-68)$$

Para $f = f_r$, la amplificación de resonancia será

$$A_r = \mp g_m \omega_r M Q_e \quad (15-69)$$

y la amplificación normalizada,

$$\frac{A}{A_r} = \frac{1}{1 + j Q_e (f/f_r - f_r/f)} \quad (15-70)$$

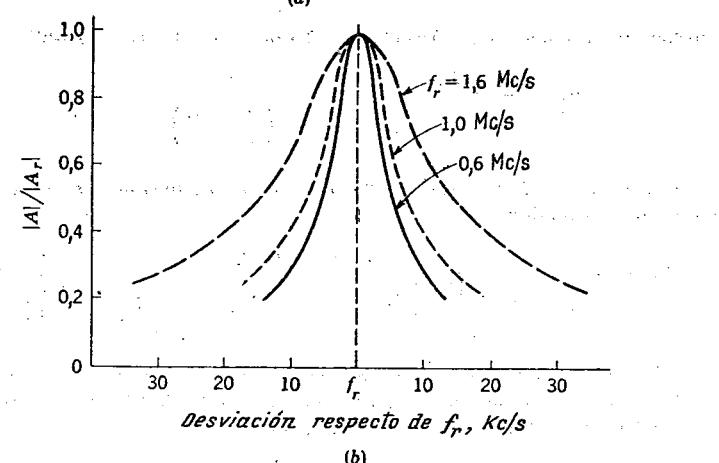
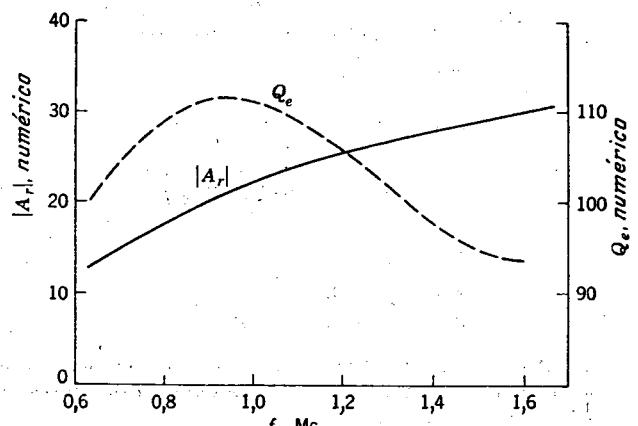


FIG. 15-16. Curvas de Q_e , $|A_r|$, y selectividad para un amplificador de secundario sintonizado típico.

Puede observarse entonces, que, en la hipótesis de que C_o es despreciable y que $Z_{11} \approx r_p$, los dos amplificadores estudiados tienen respuestas idénticas, del tipo de la curva de resonancia universal. Como se ha dicho antes, suponemos en el resto de que este capítulo que Q_e es lo suficientemente grande como para que pueda admitirse que hay simetría aritmética en la respuesta, de modo que las Ecs. (15-57) y (15-70) se escribirán

$$\frac{A}{A_r} = \frac{1}{1 + j 2 Q_e \delta} \quad (15-71)$$

$$\delta = \frac{f - f_r}{f_r}$$

respuesta normalizada del amplificador de primario aperiódico y secundario sintonizado

El amplificador de primario aperiódico y secundario sintonizado aparece a menudo como parte de los radioreceptores para radiodifusión. En esta aplicación, su curva de respuesta a resonancia es tan importante como su curva de selectividad. En la banda de radiodifusión, cada estación tiene asignada un ancho de banda total de 10 Kc/s, como mínimo, centrado en una frecuencia "portadora". Consideremos tres estaciones:

Estación	f portadora, Mc/s	Límites de banda, Mc/s
A	0,600	0,595 — 0,605
B	1,000	0,995 — 1,005
C	1,600	1,595 — 1,605

Para que el receptor funcione correctamente, debe ser capaz de "sintonizar" cualquiera de estas estaciones, es decir, debe poderse hacer coincidir f_r con cualquiera de las frecuencias portadoras, por lo general mediante la variación de C . Por otra parte, es evidentemente deseable que $|A_r|$ y la selectividad permanezcan invariadas sobre toda la banda de radiodifusión (0,535 a 1,605 Mc/s), de modo que todas las estaciones sean tratadas del mismo modo. Sin embargo, de acuerdo con la Ec. (15-69), $|A_r|$ depende de la frecuencia, por ser proporcional a f_r y Q_e . La curva cortada de la Fig. 15-16 muestra la manera típica de variar de Q_e con la frecuencia. En la misma figura se muestra una curva de respuesta en resonancia.

Dado que Q_e varía de manera alineal con la frecuencia, el ancho de banda de potencia mitad varía de estación en estación. En la Fig.

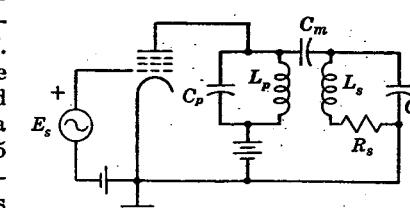


FIG. 15-17. Amplificador sintonizado con acoplamiento capacitivo para aplanar la característica de respuesta en resonancia.

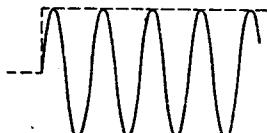
15-16b se muestran curvas típicas de selectividad, es decir, de $|A|/|A_r|$ en función de la frecuencia f . Dado que cada estación ocupa una pequeña fracción de la banda completa de radiodifusión, puede suponerse que Q_e es constante al calcular cada una de estas curvas. Las curvas de la Fig. 15-16 muestran que el amplificador de secundario sintonizado es más selectivo para las estaciones de baja frecuencia que para las de frecuencia alta. Este efecto puede reducirse usando circuitos que emplean dos circuitos sintonizados a diferentes frecuencias de resonancia y acoplados por capacitancias, como se ve en la Fig. 15-17.¹

15-20. Respuesta de envuelta. Los amplificadores pasabanda que han sido tema de los apartados anteriores se utilizan ordinariamente para amplificar señales *moduladas*, centradas en una frecuencia portadora f_c que se hace coincidir con la f_r del amplificador. En estas condiciones lo que interesa es la respuesta de *envuelta* más bien que la respuesta transitoria. En el proceso de modulación de amplitud, la información se superpone a la portadora haciendo que la amplitud de la portadora A varíe en torno de un valor medio E_c de acuerdo con la señal de información, como lo indica la Fig. 1-14, de tal modo que, si se usa una señal moduladora de frecuencia única,

$$e(t) = (\hat{E}_c + \hat{E}_i \operatorname{sen} \omega_i t) \operatorname{sen} \omega_c t \quad (15-72)$$

(la ecuación de la señal modulada en amplitud desarrollada en el Cap. I). En la Fig. 1-14 es evidente que la información está contenida en la *envolvente* de la onda modulada. Mediante los métodos del Cap. II, una señal de información más complicada que la simple sinusoidal, puede ser analizada en una serie, o banda, de términos sinusoidales, de modo que son a ellas aplicables los mismos razonamientos que al caso simple.

En los amplificadores cuasi-pasabanda hemos calculado la respuesta transitoria a la función escalón. Por analogía, entonces, en el caso de las estructuras pasabandas, interesa la respuesta de envolvente a una señal de ensayo consistente en una portadora modulada por una función escalón. Semejante señal sería



$$e(t) = U(t)E_c \operatorname{sen} \omega_c t \quad (15-73)$$

FIG. 15-18. Onda portadora modulada por una función escalón, utilizada para determinar la respuesta de envolvente.

como lo ilustra la Fig. 15-18. La envolvente es aquí, por supuesto, simplemente $\hat{E}_c U(t)$.

La analogía cuasi-pasabajos-pasabanda se ofrece por sí misma como base para un método simplificado para determinar la respuesta de envolvente de un amplificador de simple sintonía a una señal aplicada de la forma representada por la Ec. (15-73). Una manera fácil de trasferir f_r a cero consiste en definir una nueva variable de frecuencia compleja $p' = j(\omega - \omega_r)$, de modo que por las Ecs. (15-71),

¹ Ver, por ejemplo, F. E. Terman, "Ingenieria Electrónica y de Radio", p. 400, 4^a edición Arbo Editores, S. R. L., Buenos Aires, 1958.

$$E_o(p') = \frac{-g_m R_o E_g(p')}{1 + 2Q_e p' / \omega_r}$$

Pero $Q_e / \omega_r = R_o C$. Luego,

$$E_o(p') = -\frac{g_m E_g(p')}{2C} \frac{1}{p' + 1/2R_o C} \quad (15-74)$$

Trasfiriendo la frecuencia portadora a cero en la Ec. (15-73), $E_o(p')$ deviene

$$E_o(p') = -\frac{E_g}{p'} \quad (15-75)$$

habiéndose elegido el signo negativo para obtener una respuesta de envuelta positiva. Luego

$$E_o(p') = \frac{g_m E_g}{2C} \frac{1}{p'(p' + 1/2R_o C)} \quad (15-74a)$$

Dado que ésta es idéntica a la respuesta del amplificador pasabajos análogo a una señal escalón aplicada, la respuesta tendrá la forma de la Fig. 15-19a. Trasfiriendo la frecuencia portadora de cero a f_r , la respuesta tendrá la forma de la Fig. 15-19b. Es aparente que la buena respuesta de envolvente está relacionada con un Q_e bajo, lo que se obtiene con sacrificio de la selectividad contra otras señales.

El estudiante debe observar que el factor 2 que aparece en las Ecs. (15-74) y (15-74a) indica el ajuste requerido en C por la analogía pasabajos-pasabanda discutida en el último apartado.

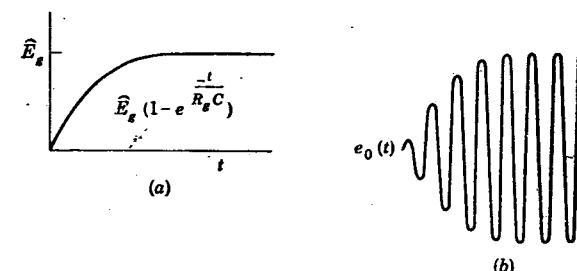


FIG. 15-19. Respuestas análogas de los amplificadores pasabajos y pasabandas. (a) Respuesta transitoria del amplificador pasabajas a una función escalón. (b) Respuesta de envuelta de un amplificador pasabanda a la señal de la Fig. 15-18.

15-21. Cascada de n etapas idénticas. Se ha demostrado que el producto ancho de banda-amplificación $|A_r|(BW)$ es igual a $g_m/2\pi C$ para la etapa de sintonía simple. Si una única etapa no provee un producto suficientemente grande, pueden conectarse en cascada dos o más etapas. Una posibilidad es la de tener n etapas sintonizadas a la misma frecuencia central f_r , caso en el que hablase de etapas "sincrónicamente sintonizadas" o "sincrónicas". Por otra parte, si todas las etapas son

idénticas, es decir, tienen la misma f_r , el mismo ancho de banda e igual A_r , la amplificación global será

$$A_T = A^n = \left(\frac{A_r}{1 + j2Q_e\delta} \right)^n \quad (15-76)$$

El estudiante puede demostrar que el ancho de banda global es en este caso

$$(BW)_T = (BW) \sqrt{2^{1/n} - 1}$$

El factor de contracción de ancho de banda, $\sqrt{2^{1/n} - 1}$, está tabulado en la tabla 15-1. Como en el caso del amplificador RC , a medida que aumenta n , la amplificación central crece más rápidamente que lo que disminuye el ancho de banda, lo que indica una mejora en el producto amplificación-ancho de banda global.

Hay una posibilidad mucho más interesante en el empleo de etapas asincrónicas, o *sintonizadas en escalera* (o de sintonía escalonada).

15-22. Amplificador de sintonía escalonada¹. Cuando las n etapas de una cascada no son sincrónicas, es útil un cambio de notación. Sea para la etapa de orden k de la cascada,

$$\begin{aligned} g_m &= g_k & R_g &= R_k \\ Q_e &= Q_k & f_r &= f_k \\ BW &= (BW)_k & \delta &= \delta_k = \frac{f - f_k}{f_k} \end{aligned} \quad (15-77)$$

Luego, para la etapa de orden k ,

$$A_k = - \left[\frac{g_k}{2\pi C_k (BW)_k} \right] \frac{1}{1 + j2Q_k \delta_k} \quad (15-78)$$

La amplificación global será el producto de las amplificaciones individuales de las n etapas, la que puede expresarse en la forma

$$\begin{aligned} A_T &= A_1 A_2 \cdots A_k \cdots A_n \\ &= \prod_{k=1}^n - \left[\frac{g_k}{2\pi C_k (BW)_k} \right] \frac{1}{1 + j2Q_k \delta_k} \end{aligned} \quad (15-79)$$

donde el símbolo $\prod_{k=1}^n$ significa el *producto* de n factores, de igual modo

que el símbolo $\sum_{k=1}^n$ indica la *suma* de n términos.

¹ El método para escribir la función ganancia que aquí se emplea sigue el trabajo de R. F. Baum, Design of Broad Band I. F. Amplifiers, *J. Appl. Phys.*, vol. 17, N° 6, p. 519, junio de 1946. Baum considera también el caso de la respuesta tipo Tschebycheff. El método para factorizar el denominador en la Ec. (15-82a) es el introducido por Henry Wallman, Stagger-tuned I. F. Amplifiers, *MIT Radiation Lab. Rept.* 524, 1944. Ver también Valley and Wallman, *op. cit.*, Cap. IV.

El estudiante observará que la Ec. (15-79) tiene su razón de ser por la propiedad separadora de las válvulas de la cascada, propiedad que permite el ajuste independiente de los polos por medio de los parámetros físicos individuales tales como L y C de las etapas individuales sin que ello afecte los polos controlados a su vez por otras etapas. En contraste, en una red bilateral de mallas múltiples, cada polo es función de los parámetros físicos de todas las mallas, y su control independiente es muy difícil, cuando no imposible. Por lo tanto, en la síntesis circuital, el empleo de válvulas de alto vacío representa una gran ventaja, independientemente de su propiedad amplificadora.

Este podría ser el momento de introducir un principio general de síntesis. Hay en general ciertas constantes físicas que pueden ser controladas, tales como inductancias, capacitancias, etc. Estas determinan, en general, por medio de trasformación de variables, ciertas constantes del sistema, tales como frecuencias de los polos, que no son de interés primario para el proyectista o el usuario. Estas variables secundarias dependientes determinan a su vez ciertas variables dependientes terciarias que sí son de interés para el proyectista, tal como la respuesta a ciertas frecuencias que determinan la forma de cierta curva característica deseada. Expresado matemáticamente, si x_1, x_2, \dots, x_i son las variables físicas independientes, y_1, y_2, \dots, y_i son las variables de diseño secundarias, y z_1, z_2, \dots, z_i son las variables dependientes terciarias, entonces, en general

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_i) \\ y_2 &= f_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_i) \\ &\vdots \\ y_i &= f_i(x_1, x_2, x_3, \dots, x_i) \end{aligned} \quad (15-80a)$$

y

$$\begin{aligned} z_1 &= g_1(y_1, y_2, y_3, \dots, y_i) \\ z_2 &= g_2(y_1, y_2, y_3, \dots, y_i) \\ &\vdots \\ z_i &= g_i(y_1, y_2, y_3, \dots, y_i) \end{aligned}$$

No obstante, el proyectista debe buscar y asegurarse de alguna manera, si es que se puede, el control del sistema de modo tal que $y_1 = F_1(x_1)$, $y_2 = F_2(x_2)$, $y_i = F_i(x_i)$, y si es posible, de modo que

$$z_1 = G_1(y_1) \cdots z_i = G_i(y_i) \quad (15-80b)$$

Si se puede hacer esto, entonces, analíticamente o experimentalmente, será mucho más fácil determinar los valores de las x que debe elegir para satisfacer las condiciones que se han impuesto sobre las z .

Por ejemplo, en el caso en discusión, las x pueden ser los valores físicos de los inductores, las y las frecuencias de los polos, y las z las respuestas a ciertas frecuencias. En las redes ordinarias de mallas múltiples, es aplicable el primer juego de ecuaciones (15-80a), mientras que con circuitos resonantes sintonizados conectados en cascada entre

válvulas de alto vacío es aplicable el segundo juego, (15-80b). Se verá en el Ap. 15-28 que el amplificador de doble sintonía no permite esta deseable separación.

Dado que en la Ec. (15-79) intervienen n diferentes valores de f_r o δ_k , es conveniente introducir una nueva variable de frecuencia normalizada con respecto a f_0 , la frecuencia central de la curva de respuesta global. Esta puede introducirse del siguiente modo:

$$\delta_k = \frac{f - f_k}{f_k} = \frac{f - f_0}{f_k} + \frac{f_0 - f_k}{f_k}$$

Sea la nueva variable de frecuencia

$$x = \frac{2(f - f_0)}{(BW)_T} \quad (15-81)$$

donde $(BW)_T$ = ancho de banda de potencia mitad del sistema. Puesto que $(BW)_k = f_k/Q_k$,

$$\begin{aligned} 2Q_k\delta_k &= 2Q_k \left[\frac{(BW)_Tx}{2f_k} + \frac{f_0 - f_k}{f_k} \right] \\ &= \frac{(BW)_T}{(BW)_k} x + \frac{2(f_0 - f_k)}{(BW)_k} \end{aligned} \quad (15-82a)$$

Por conveniencia, sea

$$a_k = \frac{(BW)_T}{(BW)_k} \quad b_k = \frac{2(f_0 - f_k)}{(BW)_k} \quad (15-82b)$$

La amplificación de la etapa k es entonces

$$A_k = \frac{-g_k}{2\pi C_k (BW)_k} \frac{1}{1 + j(a_k x + b_k)}$$

y la respuesta global viene a ser

$$A_T = \prod_{k=1}^n \frac{-g_k}{2\pi C_k (BW)_k} \frac{1}{1 + j(a_k x + b_k)} \quad (15-83)$$

15-23. Escalonamiento de máxima planicidad de amplitud. Un método básico para la obtención de un amplificador de banda ancha consiste en ajustar sus parámetros de modo de obtener una respuesta de máxima planicidad. Para lograr esta condición en el caso del amplificador de sintonía escalonada, consideremos la magnitud de la Ec. (15-83) elevada al cuadrado:

$$|A_T|^2 = \prod_{k=1}^n \left[\frac{g_k}{2\pi C_k (BW)_k} \right]^2 \frac{1}{1 + (a_k x + b_k)^2} \quad (15-84)$$

A la frecuencia central f_0 , $x = 0$, y

$$|A_T|_0^2 = \prod_{k=1}^n \left[\frac{g_k}{2\pi C_k (BW)_k} \right]^2 \frac{1}{1 + b_k^2} \quad (15-84a)$$

De modo que la amplificación normalizada al cuadrado deviene

$$\frac{|A_T|^2}{|A_T|_0^2} = \prod_{k=1}^n \frac{1 + b_k^2}{1 + (a_k x + b_k)^2} = \frac{\prod_{k=1}^n (1 + b_k^2)}{D} \quad (15-84b)$$

donde $D = \prod_{k=1}^n [1 + (a_k x + b_k)^2]$. El problema del diseño para máxima planicidad, consiste, entonces, en la adecuada selección de las a y las b . Esta selección se hace desarrollando el denominador, D , de la Ec. (15-84b) a modo de un polinomio en x .

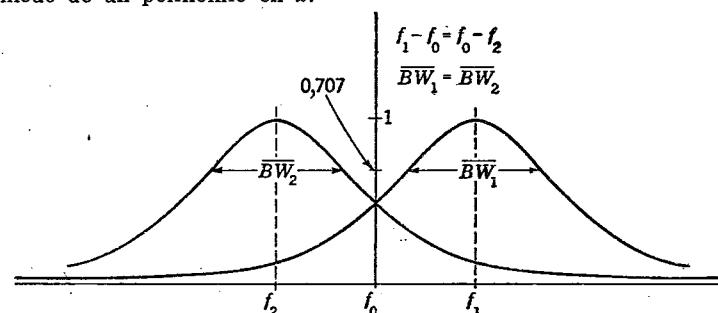


FIG. 15-20. Los pares de etapas en la cascada escalonada se disponen simétricamente respecto de la frecuencia central f_0 .

Una estimación inteligente puede simplificar la tarea. La respuesta será simétrica con respecto a f_0 ; por lo tanto, supongamos que los pares de etapas se disponen simétricamente respecto de f_0 , como en la Fig. 15-20. Luego, si n es par,

$$\begin{aligned} a_{n+1-k} &= a_k \\ b_{n+1-k} &= -b_k \end{aligned} \quad (15-85)$$

y D resulta ser

$$D = \prod_{k=1}^{n/2} [1 + (a_k x + b_k)^2][1 + (a_k x - b_k)^2] \quad n \text{ par} \quad (15-86)$$

Puede demostrarse fácilmente que D es por lo tanto un polinomio que sólo contiene potencias pares de x , siendo la potencia más elevada x^{2n} , con el coeficiente $\prod_{k=1}^{n/2} a_k^4$. El término de exponente cero será $\prod_{k=1}^{n/2} (1 +$

$b_k^2)^2$. Por lo tanto, para n par, la Ec. (15-84b) deviene

$$\frac{|A_T|^2}{|A_T|_0^2} = \frac{\prod_{k=1}^{n/2} (1 + b_k^2)^2}{\prod_{k=1}^{n/2} (1 + b_k^2)^2 + px^2 + qx^4 + \dots + \prod_{k=1}^{n/2} a_k^4 x^{2n}} \quad (15-87)$$

En cambio, si n es impar, se estima que la etapa impar estará centrada en f_0 , de modo que

$$b_{(n+1)/2} = 0 \quad (15-85a)$$

con las otras etapas simétricamente dispuestas de a pares de acuerdo con la Ec. (15-85). En estas condiciones, D deviene

$$D = (1 + a_{(n+1)/2}^2 x^2) \prod_{k=1}^{(n-1)/2} [1 + (a_k x + b_k)^2][1 + (a_k x - b_k)^2] \quad n \text{ impar} \quad (15-86a)$$

que es también un polinomio en x^2 y la respuesta normalizada es la misma que la que da la Ec. (15-87) excepto por un cambio en los límites superiores, que pasan de $n/2$ a $(n-1)/2$. Luego, los mismos argumentos se aplican en el caso de n par que en el caso de n impar.

La respuesta de máxima planicidad se obtiene poniendo p, q, \dots , esto es, todos los coeficientes excepto el primero y el último, iguales a cero. Haciéndolo así, la respuesta de amplitud de máxima planicidad deviene

$$\left. \begin{aligned} \frac{|A_T|^2}{|A_T|_0^2} &= \frac{\prod_{k=1}^{n/2} (1 + b_k^2)^2}{\prod_{k=1}^{n/2} (1 + b_k^2)^2 + \prod_{k=1}^{n/2} a_k^4 x^{2n}} \\ &= \frac{1}{1 + K^{2n} x^{2n}} \end{aligned} \right\} \quad (15-88)$$

donde $K^{2n} = \prod_{k=1}^{n/2} a_k^4 / (1 + b_k^2)^2$.

El valor numérico de K se evalúa fácilmente. Sea F_2 la frecuencia de potencia mitad superior de la respuesta global. Entonces, para $f = F_2$, $x = x_2$, y $|A_T|^2 / |A_T|_0^2 = 1/2$. Introduciendo en la Ec. (15-88):

$$1 + K^{2n} x_2^{2n} = 2$$

$$x_2 = \frac{1}{K}$$

Pero de la Ec. (15-81)

$$x_2 = \frac{2(F_2 - f_0)}{(BW)_T} = 1$$

Por lo tanto, $K = 1$, y la respuesta normalizada al cuadrado es

$$\frac{|A_T|^2}{|A_T|_0^2} = \frac{1}{1 + x^{2n}} \quad (15-88a)$$

Deben hallarse ahora los valores de a y b que reducen a cero los coeficientes p, q, \dots del polinomio denominador. Esto puede hacerse factorizando $1 + x^{2n}$, esto es, buscando las raíces de $1 + x^{2n} = 0$. Sean a_k las raíces de esta ecuación, es decir, las raíces $2n$ de -1 . Entonces,

$$a_k^{2n} = -1 = e^{j(2k-1)\pi}$$

$$a_k = e^{j(\frac{2k-1}{2n}\pi)} = \cos \frac{2k-1}{2n}\pi \pm j \sin \frac{2k-1}{2n}\pi \quad (15-89)$$

Pero, según la Ec. (15-84b), D es también cero si $\prod_{k=1}^n [1 + (a_k a_k + b_k)^2] = 0$; o si $(a_k a_k + b_k)^2 = -1$,

$$a_k = -\frac{b_k}{a_k} \pm \frac{j}{a_k} \quad (15-89a)$$

Luego, comparando los términos correspondientes en las Ecs. (15-89) y (15-89a),

$$\frac{-b_k}{a_k} = \cos \frac{2k-1}{2n}\pi$$

$$\frac{1}{a_k} = \sin \frac{2k-1}{2n}\pi$$

Sustituyendo según las Ecs. (15-82b) y (15-85),

$$\frac{(BW)_k}{(BW)_{n+1-k}} = \pm (BW)_T \sin \frac{2k-1}{2n}\pi \quad (15-90a)$$

$$\frac{f_k}{f_{n+1-k}} = f_0 \pm \frac{(BW)_T}{2} \cos \frac{2k-1}{2n}\pi \quad (15-90b)$$

Dado que para cada etapa

$$\omega_k^2 = \frac{1}{L_k C_k} \quad (BW)_k = \frac{f_k}{Q_k}$$

se dispone del número de ecuaciones suficiente para diseñar un amplificador sintonizado de máxima planicidad.

Una relación adicional es de mucha ayuda para calcular $|A_T|_0$. Por la Ec. (15-84a),

$$|A_T|_0 = \prod_{k=1}^n \frac{g_k}{2\pi C_k (BW)_k \sqrt{1 + b_k^2}} \quad (15-91)$$

Pero, por las Ecs. (15-88) y el hecho de que $K^{2n} = 1$

$$\prod_{k=1}^n \sqrt{1 + b_k^2} = \prod_{k=1}^n a_k$$

Introduciendo el valor de a_k de la Ec. (15-82b),

$$\prod_{k=1}^n \sqrt{1 + b_k^2} = \prod_{k=1}^n \frac{(BW)_T}{(BW)_k} = (BW)_T^n \prod_{k=1}^n \frac{1}{(BW)_k}$$

Sustituyendo en la Ec. (15-91),

$$|A_T|_0 = \frac{1}{[2\pi(BW)_T]^n} \prod_{k=1}^n \frac{g_k}{C_k} \quad (15-92)$$

El uso de estas ecuaciones se ilustrará ahora con un ejemplo numérico.

Diseñemos un triple escalonado ($n = 3$) usando válvulas tipo 6AK5, con $g_m = 4.300 \mu\text{mho}$, $r_p = 420 \text{ kilohm}$, $C = 120 \mu\text{\mu F}$ para las tres etapas. La frecuencia central será de 500 Kc/s, y el ancho de banda de potencia mitad, de 20 Kc/s.

Por la Ec. (15-90b),

$$\begin{aligned} f_1 &= f_0 \pm \frac{(BW)_T}{2} \cos \frac{180^\circ}{6} = f_0 \pm \frac{2 \times 10^4}{2} \cos 30^\circ \\ f_3 &= f_0 \pm 8,66 \times 10^3 \\ f_1 &= 508,66 \text{ kc} \\ f_3 &= 491,34 \text{ kc} \end{aligned}$$

Por la Ec. (15-90b)

$$f_2 = f_0 + \frac{(BW)_T}{2} \cos \frac{3 \times 180^\circ}{6} = f_0 = 500 \text{ kc/s}$$

También, por la Ec. (15-90a),

$$(BW)_1 = (BW)_3 = (BW)_T \sin 30^\circ = \frac{2 \times 10^4}{2} = 10 \text{ kc/s}$$

$$(BW)_2 = (BW)_T \sin 90^\circ = 20 \text{ kc/s}$$

Consideremos los parámetros de la etapa 1:

$$L_1 = \frac{1}{\omega_1^2 C_1} = \frac{1}{4\pi^2 (5,0866 \times 10^5)^2 (1,2 \times 10^{-10})} = 816 \mu\text{H}$$

$$Q_1 = \frac{f_1}{(BW)_1} = \frac{508,66}{10} = 50,9$$

El estudiante debe recordar que este valor representa el Q efectivo de la red completa de acoplamiento. Dado que es altamente improbable que el Q del inductor sea mucho mayor que éste, las aproximaciones de las Ecs. (15-55b) y (15-56a) no son válidas y hay que usar las formas más exactas. Por vía de ilustración, supongamos que el Q , del inductor es de 80. Entonces, por la Ec. (15-56).

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_1} &= \frac{1}{\omega_1 L_1 Q_1} \left(\frac{Q_1}{Q_1 - 1} \right) \frac{1}{r_p} \\ &= \frac{1}{2\pi (5,09 \times 10^5) (0,816 \times 10^{-8}) (8 \times 10^1)} \cdot \frac{1}{0,42 \times 10^6} \\ &= (0,274 - 0,238) \times 10^{-5} \\ R_1 &= 2,78 \text{ megohm} \end{aligned}$$

Los componentes de las otras etapas se calculan de manera similar.

La amplificación global a f_0 será, por la Ec. (15-92),

$$\begin{aligned} |A_T|_0 &= \left[\frac{g_m}{2\pi C (BW)_T} \right]^3 \\ &= \left[\frac{4,3 \times 10^{-3}}{2\pi (1,2 \times 10^{-11}) (2 \times 10^4)} \right]^3 = 23 \times 10^9 = 207,2 \text{ dB} \end{aligned}$$

La respuesta normalizada global del triple escalonado está ilustrada en la Fig. 15-21. La línea cortada muestra la respuesta normalizada de la segunda etapa de la cascada, la que tiene el mismo ancho de banda,

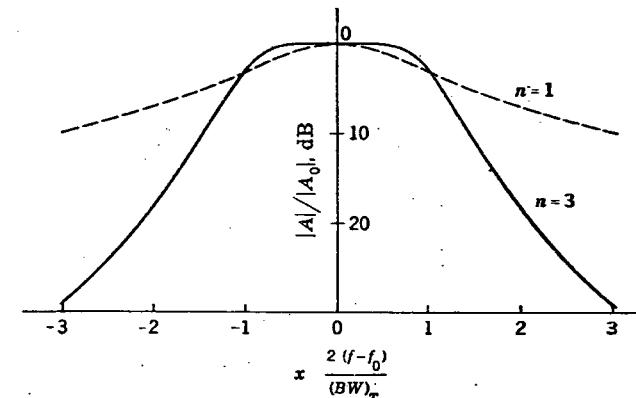


FIG. 15-21. Respuesta normalizada de amplitud de un triple escalonado de máxima planicidad. La curva cortada muestra la respuesta normalizada de la etapa central del triple para comparación. Nótese la mejora de la selectividad obtenida por el escalonamiento.

$(BW)_T$. Es evidente la gran mejora de selectividad que se obtiene con las etapas de sintonía escalonada 1 y 3.

15-24. Limitaciones de la simetría aritmética. Al derivar las condiciones de máxima planicidad para n etapas escalonadas se ha supuesto que prevalecen las condiciones de simetría aritmética. Esta hipótesis, a su vez, impone un límite al valor máximo de $(BW)_T/f_0$ para el cual son válidas las ecuaciones de diseño. Consideremos ahora este límite.

Wallman¹ ha derivado ecuaciones de diseño para el caso de máxima planicidad de amplitud basadas en la forma exacta, con simetría geométrica. Para los valores de $(BW)_T/f_0$ menores que 0,3, sus ecuaciones de diseño se reducen a las llamadas "formas asintóticas":

$$(BW)_k = (BW)_{n+1-k} = \pm (BW)_T \operatorname{sen} \frac{2k-1}{2n} \pi \quad (15-93a)$$

$$f_k = f_0 \left(1 + \frac{(BW)_T}{2f_0} \cos \frac{2k-1}{2n} \pi \right) \quad (15-93b)$$

$$f_{n+1-k} = \frac{f_0}{1 + \frac{(BW)_T}{2f_0} \cos \frac{2k-1}{2n} \pi} \quad (15-93c)$$

La comparación de estas ecuaciones con las Ecs. (15-90) muestra que son idénticas excepto para f_{n+1-k} . Entonces, el límite superior de $(BW)_T/f_0$ para el cual la Ec. (15-90b) es satisfactoria es el valor para el cual la Ec. (15-93c) reduzce a la Ec. (15-90b). Este límite puede ser hallado por medio del desarrollo en serie binomial. Por ejemplo,

$$(1+a)^{-1} = 1 - a + a^2 + \dots \quad (15-94)$$

y el error introducido al reemplazar $(1+a)^{-1}$ por $1-a$ es menor que a^2 . Aplicando este principio el estudiante puede hallar el límite para $(BW)_T/f_0$ como función de n para el cual la Ec. (15-90b) puede ser usada correctamente, digamos, con una aproximación mejor que 1 por ciento.

15-25. Ubicación de los polos para respuesta de amplitud de máxima planicidad². Los valores de α_k especificados por la Ec. (15-89) son las raíces de $D = 0$ en la Ec. (15-86) y son por lo tanto los polos del escalonamiento de máxima planicidad de n etapas. Es de interés observar la ubicación de estos polos en el plano complejo x .

Según la Ec. (15-89), $\alpha_k = e^{j(\frac{2k-1}{2n}\pi)}$. Para cualquier valor de k , es evidente que $|\alpha_k| = 1$; luego, todos los polos k están sobre una circunferencia de radio 1. Por otra parte, el espaciamiento angular entre los valores sucesivos de k es $2\pi/2n$ radián, o $360/2n$ grados. Hay n polos, y ellos estarán todos en la mitad izquierda del plano. Estas conclusiones están ilustradas para el quintuple escalonado de máxima planicidad en la Fig. 15-22a. Los polos imágenes se han indicado también en la figura como ayuda para determinar las posiciones correctas. Puede observarse, según lo anterior, que las frecuencias de potencia mitad globales ocurren para $x = \pm 1$; por lo tanto, el diámetro de la circunferencia en la Fig. 15-22a es igual al ancho de banda normalizado del sistema. Estos resultados pueden ser trasladados al plano de las frecuencias complejas de la manera ilustrada por la Fig. 15-22b.

¹ Wallman, *op. cit.* Ver también Valley and Wallman, *op. cit.*

² Se han descrito las posiciones de los polos para otros tipos de respuesta. Véase, por ejemplo, W. H. Huggins, The Natural Behavior of Broadband Circuits, *Electronics Research Lab. (Air Materiel Command) Rept. E5013A*; W. E. Bradley, A Theory of Wide Band Amplifier Design, *Philco Research Division, Rept. 98M*; Baum, *op. cit.*

15-26. Respuesta de envolvente del escalonamiento de n etapas. La respuesta de envolvente de un amplificador de sintonía escalonada puede calcularse aprovechando la analogía pasabajos-pasabanda descrita en este mismo capítulo. El estudiante debe observar que la Ec. (15-79) tiene una forma adecuada para este cálculo a causa de que los polos están claramente identificados para la fácil expansión por fracciones parciales.

Cuando los pares de etapas están simétricamente dispuestos con respecto a f_0 , los polos correspondientes ocurren como complejos conjugados y la respuesta será de naturaleza oscilatoria. En el caso de amplitud de máxima planicidad, tanto el sobreimpulso como el tiempo de crecimiento crecen con n^1 .

15-27. Amplificador de doble sintonía. Otra forma básica de amplificador pasabanda es el que emplea dos circuitos sintonizados por etapa, como se ve en la Fig. 15-23a, y se lo llama a menudo amplificador de frecuencia intermedia (f.i.) o amplificador de primario y secundario

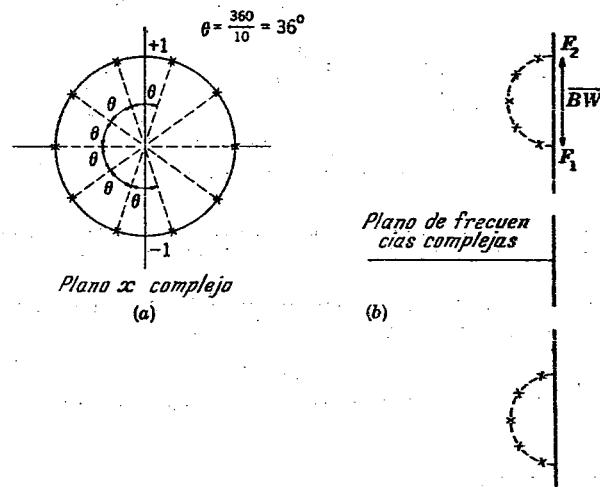


FIG. 15-22. Ubicación de los polos para un quíntuple escalonado. (a) Plano de frecuencias complejas normalizada. (b) Plano de frecuencia compleja.

sintonizados. Este circuito será analizado a continuación en la hipótesis de que los dos circuitos sintonizados tienen la misma frecuencia de resonancia y que los dos inductores tienen el mismo Q , lo suficientemente alto como para que pueda presuponerse la simetría aritmética. Así:

$$\omega_r^2 = \frac{1}{L_p C_p} = \frac{1}{L_s C_s} \quad (15-95a)$$

$$Q = \frac{\omega_r L_p}{R_{L_p}} = \frac{\omega_s L_s}{R_{L_s}} \quad (15-95b)$$

¹ Ver Valley and Wallman, *op. cit.* Ap. 7-5.

El circuito vuelve a dibujarse en la Fig. 15-23b con el pentodo de alto vacío reemplazado por el generador de corriente $g_m E_g$ en paralelo con r_p . En las aplicaciones típicas, empero, $r_p \gg 1/\omega C_p$; por lo tanto r_p puede ser generalmente omitido en el diagrama.

Según el teorema de Thévenin, la porción del circuito que está a la derecha del inductor primario puede ser reducida al circuito equivalente de la Fig. 15-23c. Este circuito es de forma idéntica a la de la red transformadora de impedancias de transformador sintonizado de la Fig. 11-21; por lo tanto el análisis del Ap. 11-28 puede ser adaptado a este amplificador, siempre que R_{L1} sea reemplazado por R_{L1} , R_{L2} , por R_{L2} y

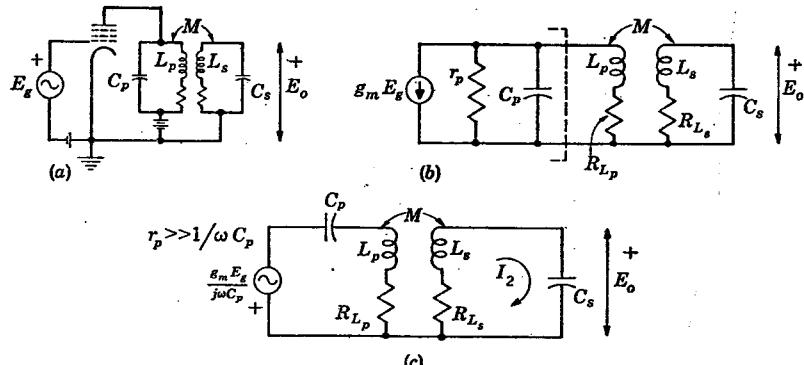


FIG. 15-28. El amplificador de primario y secundario sintonizados. (a) Circuito básico. (b) Sustitución de la válvula por su circuito equivalente. (c) Circuito equivalente según Thévenin.

E_g por $g_m E_g / j\omega C_p$. Entonces, en las hipótesis aceptadas, la magnitud de la corriente secundaria será, por la Ec. (11-74b),

$$|I_2| = \frac{g_m E_g k}{\omega C_p \omega_r \sqrt{L_p L_s} \sqrt{(k^2 + k_c^2 - 4x^2)^2 + 16k_c^2 x^2}} \quad (15-96)$$

donde $x = (f - f_r)/f_r$

$$k = M/\sqrt{L_n L_s}$$

$$k_c = 1/Q$$

La magnitud de la tensión de salida será

$$|E_o| = \frac{|I_2|}{\omega C} \quad (15-97)$$

Luego, introduciendo la Ec. (15-96) en la (15-97) y observando que para simetría aritmética $\omega \approx \omega_c$, y que $\omega^4 C_p C_s \sqrt{L_p L_s} = 1/\sqrt{L_p L_s}$,

$$|E_o| = \frac{g_m E_g \omega_r k \sqrt{L_p L_s}}{\sqrt{(k^2 + k_r^2 - 4r^2)^2 + 16k^2 r^2}} \quad (15-98)$$

El estudiante puede verificar que la amplificación normalizada de la etapa es

$$\left| \frac{A}{A_r} \right| = \frac{k^2 + k_c^2}{\sqrt{(k^2 + k_c^2 - 4x^2)^2 + 16k_c^2 x^2}} \quad (15-99)$$

donde $|A_r| = \frac{g_m \omega_r k \sqrt{L_p L_s}}{k^2 + k_c^2}$ (15-99a)

La comparación de las Ecs. (15-99), (15-98) y (11-74b) muestra que los denominadores son idénticos excepto por un factor constante; por lo tanto, la discusión del Ap. 11-28 y la Fig. 11-25, que se refieren a la respuesta de la red transformadora de impedancias, son también aplicables al amplificador de primario y secundario sintonizados.

15-28. Polos del amplificador de primario y secundario sintonizados. Puede demostrarse que el denominador de la Ec. (15-98), antes de la normalización, puede escribirse en términos de la variable de frecuencia compleja ρ cuya parte imaginaria es $(\omega - \omega_r)/\omega$ en la forma

$$D = 4p^2 + 4k_c p + k_c^2$$

Los polos de la Ec. (15-98) son las raíces de $D^2 = 0$ y tienen los valores

$$p = \frac{1}{2}(-k_x + ik) \quad (15-100)$$

Consideremos, entonces, las condiciones para respuesta de amplitud de máxima planicidad. Según el Ap. 15-25, el espaciado angular entre los polos debe ser $360/4 = 90^\circ$, lo que da la distribución de polos ilustrada por la Fig. 15-24. Para satisfacer esta configuración, $k = k_c$ en la Ec. (15-100); así, cuando el primario y el secundario están sintonizados a la misma frecuencia, la condición de máxima planicidad ocurre cuando el acoplamiento es crítico.

El contraste entre el par escalonado y el amplificador de primario y secundario sintonizados es evidente. En el primero, una válvula de alto vacío impide todo acoplamiento entre los dos circuitos sintonizados, los que se sintonizan a distintas frecuencias; es decir, los polos pueden ser ajustados independientemente. En el amplificador de primario y secundario sintonizados, en cambio, los polos dependen del acoplamiento entre dos circuitos sintonizados a la misma frecuencia y no pueden por lo tanto ser ajustados independientemente.

En general, toda curva de respuesta obtenible con un amplificador de primario y secundario sintonizados, de alto Q , puede ser sintetizada también con un par escalonado. Esto es así porque ambos circuitos están caracterizados por un único par de polos. En el par escalonado no hay ceros, mientras que en la aproximación de alto Q se supone que es nulo el efecto del cero del circuito resonante de dos mallas.

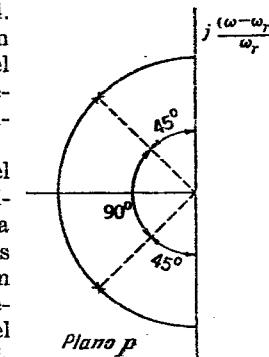


FIG. 15-24. Ubicación de los polos para respuesta de amplitud de máxima planicidad en el amplificador de primario y secundario sintonizado.

15-29. Realimentación. Ninguna discusión de los amplificadores lineales puede ser completa sin referencia al uso de la realimentación *inversa* o *negativa* para el control de sus características de respuesta. Una de las principales aplicaciones de la realimentación inversa es la que se ilustra con el ejemplo específico que sigue.

Consideremos la respuesta de banda alta de dos etapas *RC* idénticas que tienen amplificaciones de banda media A_{m1} y frecuencia de potencia mitad superior f_2 . Entonces, poniendo $A_m = A_{m1}^2$ y $A_h = A_{h1}^2$, se tiene por los resultados anteriores,

$$A_h = \frac{A_m}{(1 + j\omega/\omega_2)^2} = \frac{E_o}{E_s} \quad (15-101)$$

$$E_o = \frac{\omega_2^2 A_m E_s}{(\omega_2 + j\omega)^2} \quad (15-101a)$$

De esta ecuación resulta evidente que la respuesta global de estas dos etapas estará caracterizada por un polo real de segundo orden en $p = -\omega_2$.

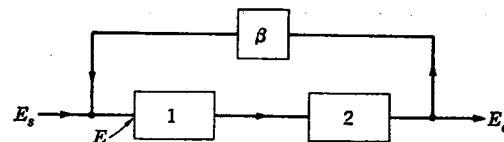


FIG. 15-25. Circuito básico de realimentación.

Introduzcamos ahora un lazo de realimentación alrededor de las dos etapas, como se ve en la Fig. 15-25, de modo tal que la fracción βE_o de la tensión de salida se agrega a E_s . Entonces, la tensión de reja de la etapa 1 será $E_{g1} = E_s + \beta E_o$. Puesto que el amplificador propiamente dicho tiene una amplificación $A_h = E_o/E_{g1}$, resulta, de la figura,

$$E_o = A_h(E_s + \beta E_o) \quad (15-102)$$

$$E_o = \frac{A_h E_s}{1 - A_h \beta}$$

Por la Ec. (15-101),

$$E_o = \frac{A_m E_s}{(1 + j\omega/\omega_2)^2 - A_m \beta}$$

Multiplicando por ω_2^2 , reemplazando $j\omega$ por p , y simplificando,

$$E(p) = \frac{\omega_2^2 A_m E_s(p)}{p^2 + 2\omega_2 p + (1 - A_m \beta) \omega_2^2} \quad (15-103)$$

Con realimentación, entonces, la respuesta de la red estará caracterizada por dos polos

$$\frac{\alpha}{\beta} = \omega_2(-1 \pm \sqrt{A_m \beta}) \quad (15-104)$$

Ahora bien, la realimentación es *negativa* $A_m \beta = -|A_m \beta|$ y los polos devienen

$$\frac{\alpha}{\beta} = \omega_2(-1 \pm j\sqrt{|A_m \beta|}) \quad (15-105)$$

Así, si $|A_m \beta|$ es diferente de cero, los dos polos son complejos conjugados, con $|A_m \beta|$ como determinante de sus partes imaginarias. De acuerdo con el Ap. 15-10, se verá, entonces, que el efecto de la realimentación negativa es en este caso similar al de la compensación en paralelo en un amplificador de video excepto porque $|A_m \beta|$ carece de efecto sobre la parte real de los polos. Por ejemplo, obtiénes la respuesta de amplitud de máxima planicidad si $|A_m \beta| = 1$, de modo que $\frac{\alpha}{\beta} = \omega_2(1 \pm j)$.

La realimentación negativa tiene otras importantes aplicaciones; por ejemplo, se la puede utilizar para reducir la distorsión que se origina dentro del lazo de realimentación. Introduce, por otra parte, un problema de estabilidad en cuanto que el amplificador y el lazo de realimentación tienden a oscilar a menos que se satisfaga cierto criterio. Está fuera del alcance de este volumen considerar éste y otros importantes aspectos de la realimentación. El lector interesado deberá consultar un texto moderno sobre electrónica.

PROBLEMAS

15-1. Una 6AG7 ha de funcionar en condiciones tales que

$$g_m = 11.000 \mu\text{mho} \quad r_p = 0.13 \text{ megohm}$$

Tensión continua de placa = 300 V Tensión de polarización = -3.24 V
Corriente cont. de placa = 32 mA Corriente cont. de pantalla = 8 mA

La capacitancia total en derivación se estima en $25 \mu\text{F}$. Con $C_c = 0.05 \mu\text{F}$, $C_K = 25 \mu\text{F}$, $R_L = 1 \text{ kilohm}$, y $R_g = 100 \text{ kilohm}$:

- Determinar el resistor de cátodo R_K .
- Calcular y representar $|A/A_m|$ y el desplazamiento de fase.
- Determinar las frecuencias de potencia mitad superior e inferior y la amplificación de banda media.

15-2. El amplificador del Prob. 15-1 está precedido por otra etapa con polarización fija y para la cual $f_1 = 200 \text{ c/s}$, $f_2 = 3 \text{ Mc/s}$, $|A_m| = 10$. Representar la característica de respuesta global y determinar las frecuencias de potencia mitad globales.

15-3. Derivar una expresión para F_1/f_1 para n etapas *RC* idénticas en cascada.

15-4. Rediseñar la etapa del Prob. 15-1, usando una compensación en paralelo para obtener la respuesta de banda alta de máxima planicidad. Especificar los nuevos valores de R_L y $|A_m|$.

15-5. Verificar que el valor de Q para la respuesta de banda alta de máxima planicidad, poniendo

15-6. Derivar el valor de Q necesario para obtener una característica de retardo de máxima planicidad con compensación en paralelo.

15-7. (a) Calcular y representar la respuesta transitoria del amplificador con compensación en paralelo para $Q = 0,32$ y $0,414$. (b) Tabular τ_r y γ (en tanto por ciento) para los dos casos.

15-8. Diseñar una etapa con compensación en paralelo usando una 6AK5 con $Q = 0,388$ para obtener un tiempo de crecimiento de $0,05 \mu\text{seg}$. Usar $g_m = 4.300 \mu\text{mho}$, $r_p = 420 \text{ kilohm}$, $C_s = 12 \mu\text{F}$. ¿Cuál es la amplificación de banda media?

15-9. Verificar la Ec. (15-33) para la red de compensación m -derivada.

15-10. (a) Evaluar m y Q para obtener la respuesta de amplitud de máxima planicidad, usando una red m -derivada. (b) Representar $|A_h/A_m|$ para este caso. (c) Determinar f'_2/f_2 analíticamente. (d) Calcular y representar la respuesta frontal. (e) Comparar la respuesta frontal con la Fig. 15-10.

15-11. Repetir el Prob. 15-10 para una característica de retardo de máxima planicidad.

15-12. Verificar la Ec. (15-36) para el amplificador compensado en serie.

15-13. Representar la respuesta transitoria de una etapa compensada en serie para $m = 2$, $Q = 0,467$. Tabular τ_r , f_2 y γ (en tanto por ciento).

15-14. Se quiere hacer funcionar una 6AG7 en las condiciones del Prob. 15-1, excepto porque C_K se eleva a $100 \mu\text{F}$. La fuente de alimentación limita el valor de R_1 a 3 kilohm.

a. Determinar el valor de C_1 para la mejor respuesta transitoria de banda baja.

b. Representar la respuesta transitoria de banda baja a una tensión escalón aplicada.

c. Representar gráficamente $|A_t/A_m|$ en función de la frecuencia para la banda baja.

15-15. (a) Diseñar una etapa amplificadora de simple sintonía capaz de ser sintonizada sobre la banda de radiodifusión normal. Usar un capacitor variable de 20 a $365 \mu\text{F}$. El ancho de banda debe ser igual a 10 Kc/s para $f_2 = 1 \text{ Mc/s}$. Tomar $g_m = 2.000 \mu\text{mho}$, $r_p > 1 \text{ megohm}$. (b) Discutir cuantitativamente la variación de la respuesta de resonancia y de la selectividad sobre la banda de radiodifusión.

15-16. El amplificador del Prob. 15-15 está sintonizado a 1 Mc/s. Se aplica a la entrada una onda sinusoidal de 1 Mc/s de amplitud E durante 1 mS. Calcular y representar la respuesta de envolvente. Hacer aproximaciones razonables para los cálculos.

15-17. Dos etapas de secundario sintonizado idénticas están conectadas en cascada. Para cada etapa, en 560 Kc/s, $L_p = 90 \mu\text{H}$, $Q_p = 90$, $L_s = 220 \mu\text{H}$, $Q_s = 85$, $M = 20 \mu\text{H}$, $r_p = 660 \text{ kilohm}$, $g_m = 1.600 \mu\text{mho}$. Calcular la amplificación y el ancho de banda global.

15-18. (a) Representar gráficamente el espectro de frecuencias de E_i sen $\omega_i t$ incluyendo valores positivos y negativos de frecuencia. (b) Desarrollar la Ec. (15-72) por medio de identidades trigonométricas y representar el espectro de frecuencias resultante. (c) De acuerdo con sus resultados, proponer una analogía pasabajos-pasabanda que relacione el espectro de una onda modulada y su envolvente de modulación.

15-19. Diseñar un amplificador de sintonía sincrónica de mínimo número de etapas que satisfaga las siguientes especificaciones: frecuencia central, 30 Mc/s; amplificación mínima a 30 Mc/s = 50 dB; ancho de banda de potencia mitad global = 4 Mc/s. Se usará la válvula 6AC7: $g_m = 9.000 \mu\text{mho}$, $r_p > 1 \text{ megohm}$. La capacitancia total en derivación por etapa es de $25 \mu\text{F}$.

15-20. En este problema, el estudiante tiene que estudiar un par escalonado, independientemente del método empleado en el texto. Suponer que hay simetría aritmética. Las dos etapas tienen el mismo ancho de banda de potencia mitad BW y tienen frecuencias centrales de

$$f_1 = f_0 \pm \frac{BW}{2} b$$

Usar una variable de frecuencia normalizada definida por

$$x = \frac{2(f - f_0)}{BW}$$

a. Escribir la ecuación de la amplificación global normalizada.

b. ¿Para qué valores de x es la amplificación máxima o mínima? Esbozar la forma de la curva de amplificación normalizada en función de la frecuencia para los casos $b < 1$, $b = 1$, $b > 1$. ¿Qué valor de b da la respuesta de máxima planicidad?

c. En la condición de máxima planicidad, ¿de qué manera está el ancho de banda global $(BW)_T$ relacionado con BW ?

15-21. Diseñar un par de sintonía escalonada de máxima planicidad para satisfacer las especificaciones del ejemplo del Ap. 15-23. Calcular y representar gráficamente la respuesta de amplitud normalizada. ¿Cómo se compara con la Fig. 15-21 para el triple escalonado?

15-22. Diseñar un cuádruple de sintonía escalonada de máxima planicidad ($n = 4$) para satisfacer las especificaciones del ejemplo del Ap. 15-23. Comparar la respuesta con la de la Fig. 15-21.

15-23. Para las dos etapas de simple sintonía del Prob. 15-20, sea $b > 1$.

a. ¿Cuál es la amplificación normalizada en un pico?

b. ¿Qué valor de b (en forma de ecuación) da una relación determinada entre la amplificación en un pico y la amplificación en la frecuencia central?

c. ¿Cuál es el $(BW)_T$?

15-24. Al triple escalonado de máxima planicidad del Ap. 15-23, aplíquese una tensión $U(t)E_g \sin(2\pi \times 5 \times 10^5 t)$. Calcular la respuesta de envolvente.

15-25. Se conectan en cascada tres etapas idénticas a la etapa 2 del ejemplo del Ap. 15-23. Si se aplica la tensión $U(t)E_g \sin(2\pi \times 5 \times 10^5 t)$, calcular la respuesta de envolvente. Comparar con el Prob. 15-24.

15-26. Comparando las Ecs. (15-90b) y (15-93c), determinar los valores máximos de $(BW)_T/f$, para los cuales la Ec. (15-90b) es correcta dentro del 1 por ciento. Calcular para $n = 2$ a $n = 5$. Tabular los resultados.

15-27. Los parámetros circuitales de un amplificador de primario y secundario sintonizados son $g_m = 2.000 \mu\text{mho}$, $r_p > 1 \text{ megohm}$, $L_p = L_s = 1 \text{ mH}$, $Q = 100$, $C_p = C_s = 117,2 \mu\text{F}$, $M = 24,14 \mu\text{H}$.

a. ¿Cuál es la frecuencia central de la respuesta?

b. ¿Cuál es la caída central en dB?

c. ¿Cuál es el ancho de banda?

d. ¿Cuáles son las amplificaciones en los picos y en la frecuencia central?

e. ¿A qué frecuencias se producen los picos?

CAPÍTULO XVI

ACOPLAMIENTOS ELECTROMECANICOS

En el capítulo introductorio hemos hecho referencia al hecho de que los sistemas eléctricos para los fines de la energía y las comunicaciones, a menudo reciben su energía en la forma mecánica y deben a su vez entregar energía en la misma forma. Es posible considerar un sistema tal como una red completa y el acoplamiento electromecánico entre las mallas eléctricas y mecánicas como similares al acoplamiento eléctrico entre dos mallas adyacentes de una red de impedancias eléctricas.

Hay unidades de acoplamiento electromecánico tanto unilaterales como bilaterales. El micrófono de gránulos de carbón es un ejemplo del tipo unilateral, dado que el movimiento mecánico del diafragma puede controlar el flujo de una corriente eléctrica, pero esta corriente no reacciona sobre el sistema mecánico. En cambio, el receptor telefónico ordinario es un dispositivo bilateral, por cuanto se lo puede usar indistintamente como motor o como generador, es decir, puede trasferir energía del sistema eléctrico al mecánico, o del sistema mecánico al eléctrico. En efecto, en el teléfono original de Bell, el mismo dispositivo se utilizaba alternativamente como trasmisor y como receptor.

16-1. Analogías. En comunicaciones, el movimiento mecánico de mayor interés es el alternativo. Los principios que se han desarrollado para el análisis de las corrientes eléctricas alternas pueden aplicarse al estudio de las vibraciones mecánicas y acústicas.

Al extender nuestros conocimientos hacia nuevos campos, es posible aprovechar las analogías que relacionan nuestra experiencia previa con la nueva situación. Hay que hacer una distinción entre las analogías cualitativas y las cuantitativas. Hay analogía cuantitativa cuando las ecuaciones que relacionan las nuevas cantidades son exactamente de la misma forma que las que relacionan las cantidades viejas. Las cantidades nuevas y viejas que ocupan idénticas posiciones en las ecuaciones, dicen análogas. Una analogía bien conocida es la que existe entre el flujo de agua en un caño y la corriente eléctrica en un conductor. No obstante, la relación entre presión y velocidad en el sistema hidráulico no tiene el carácter lineal de la ley de Ohm, de modo que la analogía es cualitativa más bien que cuantitativa. Es posible, sin embargo, idear un sistema eléctrico alineal que es cuantitativamente análogo al sistema hidráulico, tal como se ha hecho en la construcción de ciertos analizadores para la consideración de situaciones hidráulicas complicadas.

En cambio, muchas de las ecuaciones diferenciales de los circuitos eléctricos son similares a los del movimiento mecánico. Discutiremos algunas de ellas.

La segunda ley de Newton puede escribirse

$$f = \frac{d(mv)}{dt} \quad (16-1)$$

$$\begin{aligned} &= m \frac{dv}{dt} + v \frac{dm}{dt} \\ &= m \frac{d^2x}{dt^2} + v \frac{dm}{dt} \end{aligned} \quad (16-1a)$$

donde f es la fuerza aplicada.

De modo similar, la ley de la f.e.m. inducida es

$$e = \frac{d(n\Phi)}{dt} \quad (16-2)$$

donde e es la f.e.m. aplicada.

Pueden entonces establecerse las siguientes analogías: *La fuerza es análoga a la f.e.m. La cantidad de movimiento es análoga al flujo concatenado.*

Otro concepto común es el de inductancia o flujo concatenado por ampere. Cuando L no es función de la corriente, pero puede ser función del tiempo (no hay analogía mecánica para la saturación),

$$L = \frac{n\Phi}{i} \quad (16-3)$$

Introduciendo la Ec. (16-3) en la (16-2).

$$\begin{aligned} e &= \frac{d(Li)}{dt} \\ &= L \frac{di}{dt} + i \frac{dL}{dt} \\ &= L \frac{d^2q}{dt^2} + i \frac{dL}{dt} \end{aligned} \quad (16-4)$$

Comparando las Ecs. (16-4) y (16-1a), se deducen las siguientes analogías: *La masa es análoga a la inductancia. El desplazamiento es análogo a la carga.*

Estas comparaciones se corroboran mediante las expresiones de la energía cinética y de la energía almacenada en un campo magnético. Llámemos W a la energía:

$$W = \frac{Li^2}{2} \text{ en un sistema eléctrico en el que } L \text{ es independiente de } i \quad (16-5)$$

$$W = \frac{mv^2}{2} \text{ en un sistema mecánico} \quad (16-6)$$

Consideraremos el caso de un resorte perturbado por una fuerza. Entonces, la fuerza ejercida sobre el resorte para producir un desplazamiento es

$$f = kx \quad (16-7a)$$

donde k es el coeficiente de rigidez y se supone que la deformación se conserva dentro de los límites elásticos.

En los circuitos eléctricos es común escribir

$$e = \frac{q}{C} \quad (16-7b)$$

donde la tensión e es la tensión externa aplicada que produce la carga eléctrica q en el capacitor.

La recíproca de la capacitancia llámase a veces *elastancia*. Por lo tanto, la *rigidez es análoga a la elastancia*. La recíproca de la rigidez mecánica se denomina *compliancia*, de modo que la *compliancia es análoga a la capacitancia*.

La analogía no es tan perfecta en el caso de la resistencia. En el caso de las velocidades bajas, la fuerza mecánica debida a la fricción es casi proporcional a la velocidad. Esto es también cierto para las fuerzas mecánicas debidas a la velocidad de doblamiento, etc. La ecuación de la fuerza que debe aplicarse a un cuerpo en un medio viscoso sería entonces

$$f = r_{mec}v \quad (16-8a)$$

donde r_{mec} es un factor de proporcionalidad llamado "resistencia mecánica". Comparando esta ecuación con la ley de Ohm,

$$e = Ri \quad (16-8b)$$

donde e es la tensión aplicada a la resistencia, resulta que la *resistencia mecánica es análoga a la resistencia eléctrica*.

Las dimensiones del ohm mecánico pueden derivarse de la Ec. (16-8a) :

$$r_{mec} = \frac{f}{v} \text{ newton/s/m}$$

Cuando la fuerza friccional no es directamente proporcional a la velocidad, pueden utilizarse los mismos principios a que se ocurre en el caso de las resistencias eléctricas alineales.

En la Fig. 16-1 ilústrase un simple sistema mecánico que vibra en un medio viscoso. Se eligen dirigidos hacia abajo los sentidos positivos de la fuerza y el desplazamiento. La ecuación sería

$$f = m \frac{d^2x}{dt^2} + r \frac{dx}{dt} + kx \quad (16-9)$$

Se verá que ésta es similar a la ecuación que se obtendría para un circuito formado por resistencia, inductancia y capacitancia en serie, vale decir,

$$\begin{aligned} e &= L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt \\ e &= L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} \end{aligned} \quad (16-10)$$

Estas ecuaciones, junto con las condiciones límites, describen las oscilaciones transitorias de los sistemas mecánico y eléctrico. Cuando el sistema mecánico está sujeto a fuerzas mecánicas alternas estacionarias, las velocidades estarán relacionadas con estas fuerzas tanto en magnitud como en fase, del mismo modo como lo están las corrientes a las tensiones en los sistemas eléctricos. Por lo tanto, podrá introducirse un operador de impedancia de estado estacionario que es el análogo cuantitativo de la impedancia eléctrica y que puede ser manipulado del mismo modo, por ejemplo, mediante el empleo de cantidades complejas. Una impedancia mecánica de Z ohm indicaría que la relación de la fuerza alterna máxima medida en newton a la velocidad alterna máxima, medida en metro/segundo, tendría el valor numérico Z .

Habrá además un desplazamiento de fase, el que se calcularía del mismo modo que en el circuito de c.a. análogo.

Debe observarse que la suma de las tensiones *alrededor de una malla* en un circuito eléctrico, da el mismo tipo de ecuación que la suma de las fuerzas que actúan sobre una masa en un sistema mecánico. En un sistema mecánico complejo, los desplazamientos, velocidades y aceleraciones, requerirán más de una variable espacial para la descripción de sus configuraciones en función del tiempo. Habrá por lo tanto tantas ecuaciones independientes como variables espaciales. Si hay n variables de esta clase, dícese que el sistema tiene n grados de libertad. Las n ecuaciones resultarán análogas a las n ecuaciones independientes que se obtienen en un circuito eléctrico de n mallas independientes. Si se escriben las ecuaciones de movimiento para el sistema mecánico, se podrá reconocer el sistema eléctrico análogo. Las ecuaciones para un sistema eléctrico de n mallas se han dado en el Cap. III, como Ecs. (3-6). Este grupo de ecuaciones puede hacerse aplicable a las corrientes y tensiones instantáneas reemplazando el operador impedancia Z_{mn} por un operador integro-diferencial de la forma

$$- \left(L_{mn} \frac{d}{dt} + R_{mn} + S_{mn} \int dt \right)$$

El término mutuo general $Z_{mn}I_n$ adoptaría entonces la forma

$$Z_{mn}I_n = - \left(L_{mn} \frac{di_n}{dt} + R_{mn}i_n + S_{mn} \int i_n dt \right)$$

donde L_{mn} , R_{mn} y $S_{mn} = 1/C_{mn}$ son los elementos circuitales comunes

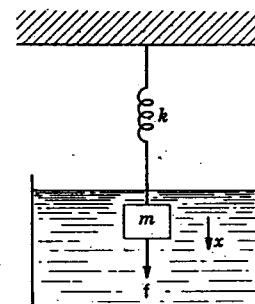


FIG. 16-1. Sistema vibrante mecánico simple.

a dos mallas, m y n . Las ecuaciones mecánicas se dan en términos de desplazamiento y no de velocidad, mientras que el término eléctrico ge-

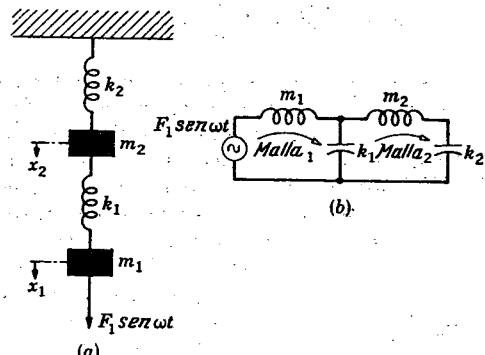


FIG. 16-2. Sistema mecánico con dos grados de libertad y su circuito eléctrico análogo.

neral puede escribirse también

$$Z_{mn}I_n = - \left(L_{mn} \frac{d^2q_n}{dt^2} + R_{mn} \frac{dq_n}{dt} + S_{mn}q_n \right) \quad (16-11)$$

Como se ha explicado en el Cap. III, se usaría el término negativo para los términos mutuos, pero se emplearía el signo positivo para las autoimpedancias ($m = n$). Así,

$$Z_{nn}I_n = L_{nn} \frac{d^2q_n}{dt^2} + R_{nn} \frac{dq_n}{dt} + S_{nn}q_n \quad (16-12)$$

Como ejemplo, consideremos el sistema mecánico de la Fig. 16-2, con las masas m_1 y m_2 colgadas de los dos resortes de coeficientes de rigidez k_1 y k_2 . Admitamos que los pesos toman su posición inicial debida a la gravedad, la que puede entonces dejarse de lado para estudiar el movimiento debido a una fuerza alterna $\hat{F}_1 \sin \omega t$. Supongamos que son despreciables las fuerzas friccionales o dissipativas.

Sean:

x_1 el desplazamiento de m_1 respecto de su posición inicial, hacia abajo.
 x_2 el desplazamiento de m_2 respecto de su posición inicial, hacia abajo.
Las fuerzas positivas cuando se dirijan hacia abajo.

Entonces el resorte 2 sería estirado en la magnitud x_2 hacia abajo y ejercería una fuerza de reacción $-k_2x_2$ sobre la masa m_2 . El resorte 1 sería estirado en la magnitud $x_1 - x_2$ y ejercería una fuerza $+k_1(x_1 - x_2)$ sobre la masa m_2 y una fuerza $-k_1(x_1 - x_2)$ sobre la masa m_1 . Las ecuaciones de movimiento se obtendrán entonces sumando las fuerzas que actúan sobre *cada una* de las masas e igualando cada suma al producto ma de la correspondiente masa. Obtiéndense así las dos ecuaciones siguientes

$$\hat{F}_1 \sin \omega t = m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} + k_1x_1 - k_1x_2 \quad (16-13)$$

$$0 = m_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} + (k_1 + k_2)x_2 - k_1x_1 \quad (16-14)$$

El examen de las Ecs. (16-13) y (16-14) muestra que se necesitan dos variables y dos ecuaciones para describir el sistema mecánico, de modo que el sistema eléctrico análogo sería un circuito de dos mallas. Las ecuaciones más generales para un circuito eléctrico de dos mallas son

$$\begin{aligned} E_1 &= Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 \\ E_2 &= Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 \end{aligned}$$

las que pueden darse con mayor detalle en la forma diferencial

$$e_1 = \left(L_{11} \frac{d^2q_1}{dt^2} + R_{11} \frac{dq_1}{dt} + S_{11}q_1 \right) - \left(L_{12} \frac{d^2q_2}{dt^2} + R_{12} \frac{dq_2}{dt} + S_{12}q_2 \right) \quad (16-15)$$

$$e_2 = - \left(L_{21} \frac{d^2q_1}{dt^2} + R_{21} \frac{dq_1}{dt} + S_{21}q_1 \right) + \left(L_{22} \frac{d^2q_2}{dt^2} + R_{22} \frac{dq_2}{dt} + S_{22}q_2 \right) \quad (16-16)$$

La comparación de las Ecs. (16-13) y (16-14) con las (16-15) y (16-16) patentiza las siguientes analogías cuantitativas:

$$\begin{array}{lll} x_1 \rightarrow q_1 & \hat{F}_1 \sin \omega t \rightarrow e_1 & m_1 \rightarrow L_{11} \\ x_2 \rightarrow q_2 & 0 \rightarrow e_2 & m_2 \rightarrow L_{22} \\ k_1 \rightarrow S_{11} & k_1 \rightarrow S_{12} & \text{Todas las } R = 0 \\ k_1 + k_2 \rightarrow S_{22} & k_1 \rightarrow S_{21} & L_{12} = L_{21} = 0 \end{array}$$

Dado que L_{nn} y S_{nn} son los valores totales de la malla n , el circuito equivalente viene a ser el de la Fig. 16-2b.

Dado que las ecuaciones diferenciales se corresponden y tienen las mismas soluciones, los dos sistemas son análogos tanto en el estado transitorio como en el estacionario. En el sistema MKS, la fuerza en newton puede reemplazar la tensión en volt, la masa en kilogramo puede reemplazar la inductancia en henry, la rigidez en newton/metro puede reemplazar la reciproca de capacitancia en farad, y la velocidad máxima o eficaz en metro/segundo puede reemplazar a la corriente máxima o eficaz en ampere. Esto significa que las nociones de impedancia y valores efectivos que se usan en los circuitos eléctricos de c.a. pueden ser también útiles en el estudio de los sistemas mecánicos vibrantes, a los que pueden entonces aplicarse directamente las Ecs. (3-6) del Cap. III. La "impedancia mecánica" será definida como la relación fasorial de la fuerza alterna aplicada a la velocidad alterna.

No es necesario hacer la fuerza análoga a la f.e.m. y el desplazamiento análogo a la carga al escribir las ecuaciones mecánicas. Pueden usarse otras coordenadas siempre que la cantidad análoga a la f.e.m. multiplicada por la cantidad análoga a la carga tenga la dimensión del trabajo. Por ejemplo, es muy común escribir ecuaciones en términos de cupla y desplazamiento angular, y éstas ocuparían las mismas posiciones en las ecuaciones diferenciales y serían por lo tanto análogas, respectivamente, a la tensión y la carga. Por otra parte, la cupla multiplicada por el desplazamiento angular es igual a trabajo.

Se ha visto en el Cap. III que los duales eléctricos son análogos entre ellos. Por lo tanto, sería posible hacer la fuerza análoga a la corriente, la velocidad análoga a la tensión, la masa análoga a la capacitancia, etc. En este caso el circuito equivalente sería el equivalente del dual del circuito obtenido con las analogías antes consideradas. Esto es particularmente útil cuando la función mecánica impulsora es una velocidad conocida más bien que una fuerza, como ocurre, por ejemplo, en un fonocaptor.

Es posible escribir ecuaciones simultáneas en los sistemas electromecánicos en que aparecen simultáneamente corrientes y velocidades, y estas ecuaciones serán las correspondientes a un circuito de mallas múltiples con algunas diferencias en el carácter de las impedancias mutuas que serán explicadas más adelante. Daremos un ejemplo en relación con la impedancia motriz. Es también posible usar más de un tipo de coordenadas de espacio y fuerza en un sistema mecánico siempre que se mantenga la homogeneidad dimensional. Por ejemplo, el movimiento de un cuerpo que experimenta a la vez rotación y traslación puede ser descrito en términos de desplazamientos lineal y angular. Estas coordenadas, a su vez, pueden hacerse análogas a la carga eléctrica en un circuito eléctrico equivalente obtenido por examen de las ecuaciones diferenciales simultáneas.

16-2. Analogías acústicas. Dado que las vibraciones acústicas involucran el movimiento mecánico de los gases, pueden aplicarse a los sistemas acústicos analogías similares a las descritas en relación con los sistemas mecánicos. Rayleigh, en su "Theory of Sound", ha echado las bases fundamentales de la acústica de manera maestra, y después de muchos años su trabajo es todavía la autoridad en el tema. Webster, en su análisis de las bocinas, introdujo por primera vez el concepto de impedancia acústica, y esta aplicación de una analogía eléctrica ha demostrado ser una de las herramientas más poderosas introducidas en la acústica después de la obra de Rayleigh.

16-3. Efecto de la baja velocidad de propagación en las analogías acústicas y mecánicas. Se ha puntualizado ya que, cuando las dimensiones son del orden de la longitud de onda en los circuitos eléctricos, el análisis debe basarse en la consideración de las constantes distribuidas y la propagación ondulatoria. Esto ocurre en las líneas telefónicas largas y, con dimensiones mucho menores, en las frecuencias muy altas. Dado que la longitud de onda es igual a la velocidad de propagación dividida por la frecuencia, una baja velocidad de propagación reduce las dimensiones a las cuales ha de tomarse en cuenta el efecto de la distribución de las constantes. En las vibraciones mecánicas y acústicas, la velocidad es muy baja; por ejemplo, la velocidad del sonido a presión y temperatura normales, en el aire, es de unos 340 m/s, lo que significa que la longitud de onda de una onda de 1.000 c/s es de sólo 0,34 cm. Por lo tanto, muchos de los fenómenos que aparecen en los circuitos eléctricos con frecuencias del orden de 10⁹ c/s manifiéstanse ya en frecuencias de audio en los sistemas acústicos de dimensiones iguales. Un tubo corto puede ser considerado acústicamente sobre la misma base que una sección de línea, pero el análisis hecho sobre

 $f = kx$ $f = \hat{F} \sin \omega t$ $x = \frac{\hat{F}}{k} \sin \omega t$	 $e = S q = \frac{q}{C}$ $q = C \hat{E} \sin \omega t$ $i = \frac{dq}{dt} = \omega C \hat{E} \cos \omega t$	 $f = r \frac{dx}{dt}$ $f = \hat{P} \sin \omega t$ $x = \int \frac{dx}{dt} dt = -\frac{\hat{P}}{m} \cos \omega t$	 $e = L \frac{di}{dt}$ $i = \frac{e}{L}$ $i = \int \frac{di}{dt} dt = -\frac{\hat{E} \sin \omega t}{L}$
Ver nota^* $f = kx$ $f = \hat{F} \sin \omega t$ $y \quad e = \hat{E} \sin \omega t$	$q = \frac{e}{C}$ $q = \hat{C} \hat{E} \sin \omega t$ $i = \frac{dq}{dt} = \omega C \hat{E} \cos \omega t$	$v = \frac{dx}{dt}$ $v = \int \frac{dx}{dt} dt = -\frac{\hat{P}}{m} \cos \omega t$ $\hat{v} = \frac{\hat{P}}{\omega m}$	$f = r \frac{dz}{dt}$ $f = \hat{P} \sin \omega t$ $z = \int \frac{dz}{dt} dt = -\frac{\hat{E} \cos \omega t}{R}$ $\hat{v} = \frac{\hat{E}}{R}$
$\text{Velocidad y corriente}$ $v = \frac{dx}{dt} = \frac{\hat{P}}{m} \cos \omega t$	$\hat{v} = \omega C \hat{E}$ $I = \omega C E$	$\hat{I} = \frac{\hat{P}}{\omega m}$ $I = \frac{F}{\omega m}$	$\hat{I} = \frac{\hat{E}}{\omega L}$ $I = \frac{V}{\omega L}$
Valor máximo $V_m = \frac{\hat{F}}{k}$ $V = \frac{\hat{F}}{k}$	$V_m = \frac{\hat{E}}{C}$ $V = \frac{\hat{E}}{C}$	$Z = \omega m$ $Z = j \omega m$	$Z = \omega L$ $Z = j \omega L$
Valor eficaz $(= F/V \text{ y } E/I)$ $Z = \frac{k}{\omega}$	$Z = \frac{1}{\omega C}$ $Z = j \omega m$	$Z = r$ $Z = j \omega r$	$Z = R$ $Z = j \omega R$
$\text{Impedancias fotorresistivas}$ $Z = -j \frac{k}{\omega}$			

* En estos casos, f y e son las fuerzas y las tensiones ejercidas sobre los elementos. Las fuerzas ejercidas por los elementos son iguales y opuestas.

Fig. 16-3. Resumen de las analogías comunes entre impedancias eléctricas y mecánicas.

la base de constantes concentradas debe ser siempre examinado cuidadosamente para determinar el orden del error que entonces se introduce. Los diafragmas vibrantes presentan múltiples frecuencias de resonancia debido a su masa y compliancia distribuidas.

En general, el funcionamiento por debajo y en la vecindad de la primer frecuencia de resonancia de un sistema vibrante puede ser analizado sobre la base de constantes concentradas, mientras que el funcionamiento por encima de esa frecuencia, debe ser tratado sobre la base de constantes distribuidas, excepto casos especiales.

16-4. Control de los sistemas mecánicos por rigidez, masa y resistencia. Uno de los ideales en la construcción de la mayor parte de los equipos de comunicación es la eliminación de la distorsión de frecuencia. En los dispositivos electromecánicos, tales como micrófonos, receptores telefónicos y altavoces, se verá que pueden obtenerse relaciones deseables entre *fuerza mecánica* y *movimiento* mediante tipos de control que caen dentro de tres principales categorías. Estas son las del control por rigidez, por masa y por resistencia y corresponden, respectivamente, al control por capacitancia, por inductancia y por resistencia en los circuitos eléctricos. Así como en los sistemas eléctricos no es posible tener capacitancia sin inductancia, en los sistemas mecánicos no es posible producir rigidez sin la presencia de alguna masa, ni viceversa. De acuerdo con el Cap. IV, si la resistencia es pequeña en un circuito eléctrico en serie que contiene capacitancia e inductancia, la reactancia capacitiva predomina en las frecuencias inferiores a la de resonancia, rango en el cual puede prácticamente despreciarse la inductancia. Por otra parte, en las frecuencias superiores a la de resonancia, predomina la reactancia inductiva y puede despreciarse, prácticamente, la capacitancia. De igual modo, la rigidez será el factor de control debajo de la frecuencia de resonancia en el caso de un diafragma, mientras que lo es la masa para las frecuencias superiores a la de resonancia hasta la frecuencia en que el carácter distribuido de las constantes comienza a adquirir importancia con la aparición de otras frecuencias de resonancia. Otras características adicionales son las que se discuten a continuación y se resumen en la Fig. 16-3.

16-5. Control por rigidez (frecuencia de resonancia por encima de la banda de frecuencias de funcionamiento). En este caso, la impedancia mecánica resulta *reactiva y casi inversamente proporcional a la frecuencia*. En las ecuaciones siguientes se desprecia la inductancia (o la masa).

$$\text{Ecuación eléctrica: } I = jE2\pi fC \quad (16-17a)$$

$$\text{Ecuación mecánica: } V = jF \frac{2\pi f}{k} \quad (16-17b)$$

$$Z_{\text{mec}} = - \frac{jk}{2\pi f} \quad (16-17c)$$

donde V = velocidad eficaz, cm/s

F = fuerza eficaz, newton

f = frecuencia, c/s

k = rigidez mecánica, newton/m.

Estos son valores eficaces. En valores instantáneos las ecuaciones pueden escribirse del siguiente modo:

$$\text{Ecuación eléctrica: } i = \hat{E}2\pi fC \cos 2\pi ft \quad (16-18a)$$

$$\text{Ecuación mecánica: } v = \hat{F} \frac{2\pi f}{k} \cos 2\pi ft \quad (16-18b)$$

La carga, o el desplazamiento, se halla integrando respecto del tiempo:

$$\text{Ecuación eléctrica: } q = \int_0^t i dt_1 = \hat{E}C \sin 2\pi ft \quad (16-19a)$$

$$\text{Ecuación mecánica: } x = \int_0^t v dt_1 = \frac{\hat{F}}{k} \sin 2\pi ft \quad (16-19b)$$

Por lo tanto, con control por rigidez, el desplazamiento máximo es directamente proporcional a la fuerza máxima e independiente de la frecuencia, como la carga máxima del capacitor es proporcional a la tensión máxima aplicada e independiente de la frecuencia.

16-6. Control por masa (frecuencia de resonancia por debajo de la gama de frecuencias de funcionamiento). En este caso, la impedancia mecánica es reactiva y directamente proporcional a la frecuencia.

$$\text{Ecuación eléctrica: } I = \frac{-jE}{2\pi fL} \quad (16-20a)$$

$$\text{Ecuación mecánica: } V = \frac{-jF}{2\pi fm} \quad (16-20b)$$

$$Z_{\text{mec}} = j2\pi fm \quad (16-20c)$$

donde m = masa en kilogramo.

16-7. Control por resistencia. En ciertos casos, es posible proveer una carga mecánica en la que la velocidad está en fase con una fuerza aplicada sinusoidal y en relación de magnitudes independiente de la frecuencia. No hay, por lo tanto, efectos importantes de resonancia. Es el caso del control por resistencia, igual que en los circuitos eléctricos.

$$\text{Ecuación eléctrica: } I = \frac{E}{R} \quad (16-21a)$$

$$V = \frac{F}{r_{\text{mec}}} \quad (16-21b)$$

16-8. Unidades de acoplamiento. Los sistemas electromecánicos utilizados en comunicaciones pueden ser clasificados de diversas maneras. Según su uso, la clasificación podría ser la siguiente:

1. Acopladores de eléctrico a mecánico.

- a. Receptores que funcionan comprimidos contra el oído.
- b. Altavoces que funcionan al aire libre.

2. Acopladores de mecánico a eléctrico.

- a. Micrófonos.
- b. Dispositivos para reflejar elementos mecánicos como constantes eléctricas en un circuito.

En lo que respecta a su uso, estos elementos, con excepción del 2b, pueden ser indiferentemente unilaterales o bilaterales. De hecho, la mayoría de los elementos útiles, con excepción del micrófono de carbón, son bilaterales, y, por lo tanto, son pasibles de cualquiera de las aplicaciones mencionadas.

16-9. Receptores telefónicos. Las partes esenciales de un receptor telefónico son las ilustradas en la Fig. 16-4. Consiste el receptor en un imán permanente, una bobina para modificar el flujo de acuerdo con las fluctuaciones de una corriente, y un diafragma de hierro dulce.

La fuerza de atracción de un imán es proporcional al cuadrado del flujo. Dado que el flujo es proporcional a la corriente cuando no se usa imán permanente, la fuerza ejercida sobre el diafragma sería entonces proporcional al cuadrado de la corriente. Si en tal caso aplicárase una onda sinusoidal de tensión a la bobina, el movimiento del diafragma se produciría a dos veces la frecuencia de esta tensión. Esto está ilustrado por la Fig. 16-5. Matemáticamente, lo expresa la ecuación

$$f = k_1 \Phi^2 \quad (16-22)$$

Sea

$$i = \hat{i}_1 \sin \omega_1 t \quad (16-23)$$

Si no hubiera componente continua de la corriente ni flujo permanente, entonces

$$\Phi = k_2 i = k_2 \hat{i}_1 \sin \omega_1 t \quad (16-24)$$

FIG. 16-5. Corriente y fuerza sobre el diafragma de un receptor telefónico sin imán permanente.

El segundo término de la Ec. (16-25) muestra la existencia de una segunda armónica en la fuerza ejercida sobre el diafragma.

De modo similar, si se aplicara una onda sinusoidal con varias componentes sinusoidales a la bobina, la fuerza, y, por lo tanto, el movimiento, tendría componentes de frecuencias iguales a las sumas y diferencias de cada dos frecuencias de la entrada, a la vez que segundas armónicas.

Si se agrega una componente continua al flujo, por medio de un imán componente o una componente continua de corriente en el circuito eléctrico, la situación mejora en gran medida. Sea, en este caso,

$$\Phi = \Phi_1 + k_2 i \quad (16-24a)$$

donde Φ_1 es un flujo unidireccional constante.

Introduciendo la Ec. (16-24a) en la Ec. (16-22),

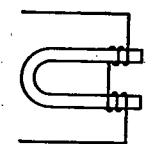
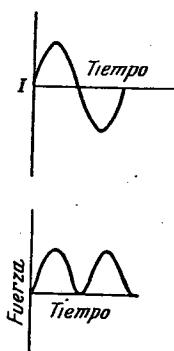


FIG. 16-4. Elementos de un receptor telefónico sencillo.



$$f = k_1 k_2^2 \hat{i}_1^2 \sin^2 \omega_1 t = \frac{k_1 k_2^2 \hat{i}_1^2}{2} - \frac{k_1 k_2^2 \hat{i}_1^2}{2} \cos 2\omega_1 t \quad (16-25)$$

$$\begin{aligned} f &= k_1(\Phi_1 + k_2 i)^2 \\ &= k_1(\Phi_1^2 + 2k_2\Phi_1 i + k_2^2 i^2) \end{aligned} \quad (16-26)$$

La Ec. (16-26) contiene tres términos. El primero es una fuerza permanente $k_1 \Phi_1^2$, independiente de la señal. El segundo es el término $2k_1 k_2 \Phi_1 i$, que es proporcional a la corriente i y contiene por lo tanto todas las componentes de la corriente de entrada. El tercero es el término $k_1 k_2^2 i^2$, el que contiene todos los términos de distorsión que se presentan cuando no hay imán permanente. La relación del término deseado al término indeseado es, entonces,

$$\frac{\text{Amplitud de las frecuencias deseadas}}{\text{Amplitud de las frecuencias indeseadas}} = \frac{2k_2\Phi_1 i}{k_2^2 i^2} = \frac{2\Phi_1}{k_2 i} \quad (16-27)$$

Haciendo que el flujo permanente sea grande en comparación con el producido por la corriente, es posible hacer tan grande como se quiera la relación (16-27).

El efecto del flujo permanente puede verse cualitativamente considerando el movimiento del diafragma de la Fig. 16-4 en los dos casos. Si no hay componente continua de magnetización, el diafragma no tendrá ninguna tensión mecánica aplicada cuando la corriente es cero. Si se hace pasar una corriente alterna por la bobina, el diafragma será atraído durante la alternancia positiva, vuelve a normal cuando la corriente pasa por cero, y es atraído nuevamente durante la alternancia negativa. Desarrolla así dos ciclos de movimiento por cada período eléctrico. Cuando se agrega el flujo permanente, el diafragma está deformado aun en ausencia de corriente. Cuando la f.m.m. debida a la corriente ayuda al flujo permanente, aumentará la atracción total y el diafragma se moverá hacia el imán, mientras que durante la alternancia siguiente de la corriente, la atracción disminuye y el diafragma se aleja del imán. Por lo tanto, un ciclo de corriente produce un ciclo de movimiento mecánico.

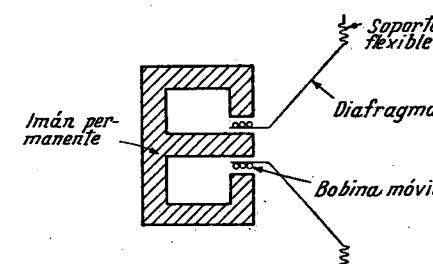


FIG. 16-6. Elementos de un acoplador electrodinámico utilizado en los altavoces y en los micrófonos.

Además de reducir la distorsión, es evidente que el imán permanente aumenta la sensibilidad del receptor. La amplitud de la salida deseada, representada por el término central de la Ec. (16-26), es proporcional al flujo permanente Φ_1 .

Una forma de acoplamiento electromecánico de uso común como motor de altavoz y algunos de los mejores receptores telefónicos es la ilustrada por la Fig. 16-6. El elemento eléctrico, o bobina móvil, es un solenoide que está fijo al diafragma. El imán permanente es cilíndrico y permanece fijo.

drico, con un polo en el centro y el otro concéntrico con el primero, de modo que la bobina móvil se mueve en un campo de densidad de flujo idealmente constante. La fuerza ejercida sobre la bobina móvil será

$$f = Blv \quad (16-28)$$

donde f = fuerza, newton

B = densidad de flujo, weber/m²

l = longitud del alambre de la bobina, m

i = corriente en la bobina móvil ampere.

Dado que la fuerza es directamente proporcional a la corriente, no hay en este caso distorsión del tipo presente en el receptor de la Fig. 16-4. No obstante, en las frecuencias bajas, el movimiento de la bobina móvil puede ser tan amplio que la bobina sale de la región de densidad de flujo constante, dando lugar, así, a una severa distorsión alineal.

16-10. Impedancia mociónal. El acoplador de la Fig. 16-16 puede ser usado también como un generador para convertir energía mecánica en eléctrica. La tensión generada será

$$e = Blv \quad (16-29)$$

donde v es la velocidad en metro/segundo. Por consiguiente, el acoplador puede ser también usado como micrófono.

Todo dispositivo que puede actuar como generador o como motor, actuará como ambos simultáneamente. Cuando se manda una corriente a través de la bobina y hay movimiento mecánico, este movimiento provoca la inducción de una f.e.m. en la bobina, tensión que modifica la impedancia. La variación de la impedancia debida al movimiento mecánico se llama "impedancia mociónal".

En un motor de c.c., la ecuación de la tensión en la armadura es

$$E_t = I_a R_a + E_b \quad (16-30)$$

donde E_t = tensión terminal aplicada a la armadura

I_a = corriente de armadura

R_a = resistencia de armadura

E_b = f.c.e.m. debida al movimiento de la armadura.

La Ec. (16-30) puede escribirse

$$\frac{E_t}{I_a} = R_a + \frac{E_b}{I_a} \quad (16-31)$$

E_t/I_a es la resistencia aparente de la armadura. Está formada por dos partes, la resistencia normal R_a y el término E_b/I_a que es debido al movimiento de la armadura y que podría por eso ser llamado "resistencia mociónal".

A medida que aumenta la carga del motor, se notará que la corriente de armadura aumenta y que la resistencia mociónal disminuye. Por lo tanto, esta resistencia mociónal en el circuito eléctrico es *inversamente proporcional* a la resistencia mecánica de la carga.

El acoplador electromecánico se diferencia del motor de c.c. en que es alterna la tensión aplicada a la bobina y es alterno también el movimiento del diafragma. El diafragma tiene las propiedades mecánicas de rigidez, masa y resistencia. La resistencia es debida a la fricción interna y a la carga acústica impuesta por el aire. Por debajo y cerca de la primera frecuencia de resonancia, el sistema mecánico puede ser representado por medio de una combinación de constantes mecánicas concentradas. Los sistemas mecánico y eléctrico están acoplados por una acción bilateral y el sistema puede ser resuelto por medio de un par de ecuaciones simultáneas.

El análisis del mecanismo de la Fig. 16-6 como acoplador entre un sistema eléctrico y un sistema mecánico puede hacerse del siguiente modo: Supongamos que el diafragma del receptor tiene masa y rigidez y que está cargado con una resistencia mecánica. Estos valores mecánicos pueden asociarse en una impedancia mecánica Z_{mec} . Supongamos que la bobina está conectada en un circuito eléctrico cuya impedancia, incluso la bobina, es Z_{elec} . Supongamos que este circuito tiene aplicada una tensión E .

Entonces, la corriente compleja I en la bobina produce una fuerza compleja sobre el diafragma

$$F = BlI \quad (16-32)$$

La resultante velocidad compleja del diafragma será

$$V = \frac{F}{Z_{mec}} = \frac{BlI}{Z_{mec}} \quad (16-33)$$

Este movimiento induce en la bobina una tensión

$$E_{ind} = BlV = \frac{(Bl)^2 I}{Z_{mec}} \quad (16-34)$$

Por lo tanto, la ecuación del circuito eléctrico será

$$E_{ap} = Z_{elec} I + \frac{(Bl)^2 I}{Z_{mec}} \quad (16-35)$$

$$\frac{E_{ap}}{I} = Z_{elec} + \frac{(Bl)^2}{Z_{mec}} \quad (16-36)$$

El término $(Bl)^2/Z_{mec}$ se denomina *impedancia mociónal*. Se ve que la impedancia mociónal es inversamente proporcional a la impedancia mecánica, de modo que ocurre una inversión similar a la que se da en los circuitos eléctricos de dos mallas [ver Ec. (11-56)].

Otra manera de describir las dos mallas es por medio de ecuaciones simultáneas, como sigue:

$$E = Z_{elec} I + BlV \quad (16-37)$$

$$BlI = Z_{mec} V \quad (16-38)$$

$$0 = -BlI + Z_{mec} V \quad (16-38)$$

Se observará que las Ecs. (16-37) y (16-38) son similares a las ecuaciones de dos circuitos eléctricos acoplados excepto por la importante diferencia de que los signos de los términos de impedancia mutua son opuestos. Por consiguiente, hay que tener cuidado en todo intento de representar un sistema electromecánico en términos de un circuito equivalente, puesto que la impedancia mutua entre un sistema mecánico y un sistema eléctrico no es exactamente lo mismo que la impedancia mutua entre dos mallas eléctricas, o, lo que es lo mismo, entre dos mallas mecánicas.

En esta derivación se han despreciado los efectos de la histéresis y de las corrientes parásitas. En la práctica, estos efectos hacen que el flujo se retrase respecto de la f.m.m. que lo produce. Esto hace que la impedancia mociónal de un receptor real esté atrasada con respecto a la impedancia que se tendría si el circuito magnético fuera ideal.

16-11. Circunferencias de impedancia mociónal. En el Cap. IV se ha visto que el lugar geométrico de la admitancia de un circuito resonante en serie es una circunferencia. Por lo tanto, el lugar geométrico de la impedancia mociónal de un receptor telefónico es también una circunferencia, dado que ella es proporcional a la *admitancia* mecánica del diafragma. Una vez obtenida la impedancia mociónal dentro de cierta gama de frecuencias, pueden obtenerse la frecuencia de resonancia, la resistencia efectiva, y la agudeza de resonancia del diafragma del receptor.

Con el objeto de determinar la impedancia mociónal, se mide primero la impedancia del receptor con el diafragma bloqueado, de modo que no pueda moverse. Luego se mide la impedancia del receptor con el diafragma libre. La diferencia *fasorial* entre estas dos impedancias es la impedancia mociónal.

La Fig. 16-7 muestra cómo puede medirse este fasor a diferentes frecuencias. Esta figura ha sido obtenida midiendo la impedancia de

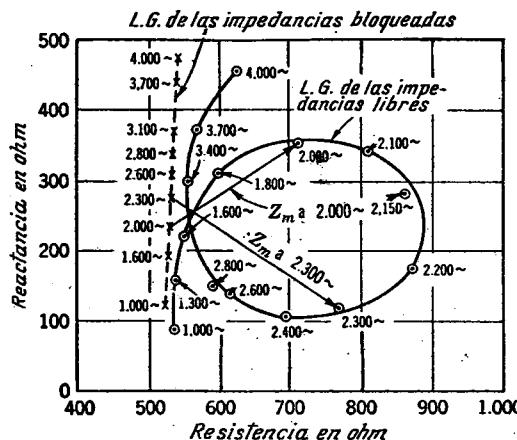


FIG. 16-7. Lugar geométrico de las impedancias de un receptor Western Electric 555 W medido a través de un transformador de 600/15 ohm con el diafragma libre y con el diafragma bloqueado.

un altavoz Western Electric 555W a través de un transformador de 600/15 ohm, de alto rendimiento. Este receptor es del tipo ilustrado por la Fig. 16-6 y está previsto para ser cargado con una bocina exponencial. La curva cortada es la que se obtiene con el diafragma bloqueado. Esta curva da el lugar geométrico fasorial de las impedancias, en la cual cada punto representa el extremo de un fasor que arranca en el origen. La curva de línea llena se obtiene con el diafragma libre. La medición se hizo sin bocina, de modo que se realiza en consecuencia el efecto de resonancia del diafragma en sí. Al recorrer el lugar geométrico, hay que tomar incrementos pequeños de frecuencia, por cuanto las variaciones son rápidas en la vecindad de la frecuencia de resonancia. Toda línea que une puntos de las dos curvas correspondientes a la misma frecuencia, dará el fasor de impedancia mociónal a esa frecuencia. Si se obtienen estos fasores para las frecuencias de una banda y se trasladan luego a un origen común, sus extremos se hallarán sobre una circunferencia, como se ve en la Fig. 16-8. El diámetro de esta circunferencia, OA, forma un ángulo determinado, debajo de la horizontal, debido a la histéresis y las corrientes parásitas.

La admitancia mecánica máxima ocurre a la frecuencia de resonancia del diafragma, de modo que la máxima impedancia mociónal ocurre a esta misma frecuencia. Esta es la frecuencia para la cual obtiénes el fasor OA en la Fig. 16-8. Si no se ha hecho medición a esta frecuencia, se la puede determinar por interpolación.

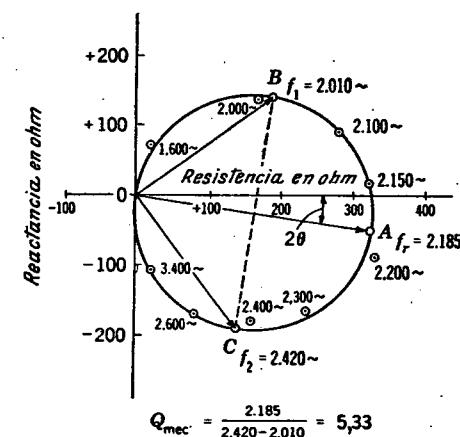


FIG. 16-8. Impedancia mociónal del receptor Western Electric 555 W derivada de la Fig. 16-7.

La agudeza de resonancia de un circuito eléctrico ha sido definida en el Cap. IV en términos de la diferencia entre las dos frecuencias para las cuales la admitancia cae a $1/\sqrt{2}$ del valor máximo. De modo similar, la agudeza de resonancia del diafragma de un receptor puede ser definida en términos de la diferencia entre las dos frecuencias entre estos dos puntos de potencia mitad. Las frecuencias para las cuales la admittance mecánica cae a 0,707 del valor máximo son los correspondientes

a los fasores OB y OC en la Fig. 16-8. La línea BC pasa por el centro formando un ángulo recto con OA . Si f_1 es la frecuencia para el falso OB y f_2 es la frecuencia para el falso OC , el Q efectivo del diafragma puede obtenerse mediante la Ec. (4-29) :

$$\frac{f_2 - f_1}{f_r} = \frac{1}{Q} = \frac{R_{\text{mec}}}{2\pi f_r L_{\text{mec}}} \quad (16-39)$$

Un diafragma no es de constantes concentradas, sino más bien distribuidas, de modo que puede resonar a diversas frecuencias. Para cada una de estas frecuencias se formará un lazo en la curva de impedancia, y las puede entonces medir fácilmente. En la vecindad de cada frecuencia de resonancia puede suponerse un circuito equivalente en serie de constantes concentradas.

16-12. Requisitos de control mecánico en los receptores de baja distorsión. Los receptores telefónicos comunes se utilizan manteniéndolos bastante apretados contra el oído. Esto hace que el oído presente al diafragma una carga acústica que es esencialmente de carácter capacitivo. El movimiento alternativo del diafragma causa una presión variable sobre el tímpano, superpuesta a la presión atmosférica. El valor instantáneo de esta presión es, por la ley de Boyle, proporcional al desplazamiento del diafragma, siempre que las dimensiones de la cavidad del oído sean pequeñas en comparación con la longitud de onda. El receptor telefónico es un dispositivo de muy bajo rendimiento, excepto cerca de la frecuencia de resonancia, y por eso la impedancia motriz no es un factor importante en la determinación de la corriente que circula por la bobina. Por lo tanto, la relación deseable para mínima distorsión es que el desplazamiento del diafragma sea proporcional a la corriente en la bobina e independiente de la frecuencia. La fuerza aplicada al diafragma es directamente proporcional a la corriente. Se ha visto en un apartado anterior que en condiciones de control por rigidez el desplazamiento resulta proporcional a la fuerza, de modo que éste es el tipo de control deseable en el receptor telefónico.

Se ha demostrado que hay control por rigidez en un sistema mecánico resonante por debajo de la primera frecuencia de resonancia, de modo que la frecuencia de resonancia debería situarse en el extremo superior de la banda de frecuencias que el receptor debe reproducir. No se sigue ordinariamente este criterio en los aparatos telefónicos de abonado, dado que se desea un buen rendimiento aun a costa de la calidad. La Fig. 16-9 muestra la característica de respuesta de un

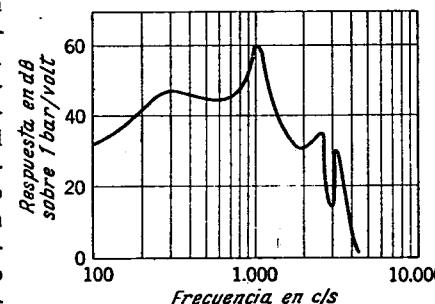


FIG. 16-9. Característica de respuesta de un receptor telefónico común aplicado al oído. (American Telephone and Telegraph Company.)

receptor telefónico según las mediciones de Inglis, Gray y Jenkins¹, la que indica que la respuesta está razonablemente libre de distorsión por debajo de la primera frecuencia de resonancia. Esta curva muestra también los efectos de las resonancias múltiples del diafragma, las que causan la aparición de crestas. Esta medición se ha hecho sin evitar la fuga de aire entre el auricular y la oreja, lo que explica la caída en las frecuencias bajas.

16-13. Otros acopladores electromagnéticos. Además de los simples receptores ilustrados en las Figs. 16-4 y 16-6, hay otros, utilizados en la construcción de receptores, altavoces y micrófonos.

Otro tipo de receptor utilizado es el de la Fig. 16-10. La corriente en la bobina crea en la armadura un polo norte en un extremo y un polo sur en el otro, lo que la hace oscilar alrededor del centro y accionar de este modo el diafragma. La fuerza que actúa sobre la armadura se invierte con la corriente. Esta disposición es magnéticamente similar a un circuito en push-pull, y los términos de distorsión de segunda armónica no contenidos en la entrada eléctrica resultan eliminados y no aparecen en el movimiento del diafragma.

Este tipo de unidad se utiliza a veces en los fonocaptores para convertir energía mecánica en eléctrica. Para esta aplicación no es importante el rendimiento, puesto que los fonocaptores se usan siempre asociados con amplificadores de válvulas.

La unidad acopladora del tipo de cinta se utiliza extensamente para ciertos propósitos. Está ilustrada por la Fig. 16-11. La cinta está col-

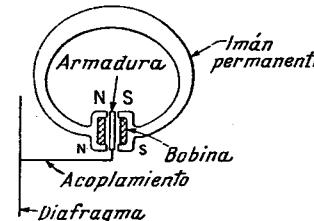


FIG. 16-10. Receptor telefónico en push-pull.

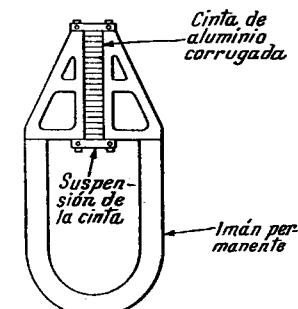


FIG. 16-11. Micrófono del tipo de cinta.

gada en un campo magnético transversal y conduce la corriente. La cinta actúa a la vez como conductor de corriente y como diafragma; está por lo general doblada en zig-zag, a fin de reducir su rigidez y, por lo tanto, su frecuencia de resonancia.

16-14. Acopladores piezoelectrinos. Otro tipo de acoplador entre redes mecánicas y eléctricas aprovecha el efecto piezoelectrino de ciertos cristales y es también importante. Este efecto fue descubierto por los esposos Curie.

¹ A. H. Inglis, C. H. G. Gray y R. T. Jenkins, A Voice and Ear for Telephone Measurements, Bell System Tech. J., vol. 11, p. 283, 1932.

Cuando un cristal piezoelectrico es sometido a un esfuerzo mecanico, resulta una polarización dieléctrica o deformación eléctrica cuya magnitud es proporcional al esfuerzo mecanico. Al revés, si se aplica un campo eléctrico al cristal, se crea en él una deformación mecanica.

Dado que estos cristales pueden trasferir energía de una red mecanica a una eléctrica y viceversa, se los puede usar como receptores o como transmisores uniéndolos a un diafragma. Así lo demostró Nicolson antes de 1919. Los cristales piezoelectricos hallan también aplicación en la generación de ondas ultrasónicas del orden de 20.000 a varios millones de ciclos en el agua o en el aire.

Antes de 1940, dos eran los materiales piezoelectricos de uso común. El cuarzo natural se usaba exclusivamente en los filtros de onda eléctricos y en el control de la frecuencia de los osciladores electrónicos. Los cristales de sal de Rochela se usaban en los fonocaptadores, en los micrófonos, y los trasductores subáqueos.

Desde 1940, se ha desarrollado una gran variedad de nuevos cristales piezoelectricos. A causa de sus favorables características mecanicas, el cuarzo, aunque menos activo, es todavía el único cristal piezoelectrico utilizado para el control de la frecuencia de los osciladores. En cambio, dos nuevos cristales sintéticos han sido desarrollados para su uso en los filtros de onda, a saber, el tartrato de etilenodiamina y el tartrato dipotásico. Estos dos cristales admiten cortes de coeficiente de temperatura cero, tienen alto Q y poseen un elevado coeficiente electromecánico, son poco afectados por las condiciones atmosféricas y son estables en el transcurso del tiempo.

En el campo de los trasductores subáqueos, el fosfato dihidrógeno de amonio ha desplazado en gran parte a la sal de Rochela. Estos cristales, conocidos también como cristales ADP, se utilizan también para fonocaptadores. No contienen agua de cristalización y soportan temperaturas de hasta 100°C. Tienen también un elevado coeficiente electromecánico y pueden ser utilizados para radiar una potencia acústica considerable por unidad de área sin peligro de que se rompan. Su estabilidad con respecto al vapor de agua representa una gran ventaja en comparación con los cristales de sal de Rochela.

Además del efecto de primer orden, los materiales piezoelectricos exhiben un efecto de segundo orden o electrostrictivo (deformación mecanica proporcional al cuadrado del desplazamiento eléctrico). Este efecto es extremadamente pequeño en todos los materiales, excepto los del tipo ferroeléctrico. Se descubrió en 1947 que el cristal ferroeléctrico de titanato de bario exhibe un gran efecto electrostrictivo cuando está en la forma policristalina. Este material cerámico encuentra ahora importantes aplicaciones en los trasductores subáqueos. Aplicando un campo continuo de polarización y excitando el material con un campo alterno de amplitud pequeña en comparación con la polarización continua, obtiene un material cerámico que actúa como un cristal piezoelectrico lineal. Este material cerámico ofrece grandes ventajas sobre otros cristales piezoelectricos por cuanto permite obtener prácticamente cualquier forma de elemento y cualquier dirección de polarización. Esta ventaja, combinada con el alto coeficiente de acoplamiento electrome-

cánico del material, su relativa robustez y su insolubilidad en el agua, hace que este material sea especialmente adecuado para las aplicaciones subáqueas e industriales, en las que se requieren grandes energías ultrasónicas. El titanato de bario se utiliza también para la construcción de fonocaptadores.

16-15. Acopladores electrostáticos. Otro dispositivo de acoplamiento electromecánico de interés es el capacitor ordinario. Si se permite que una de las placas vibre, el capacitor puede usarse indiferentemente como micrófono o como receptor.

Si se carga el capacitor, su potencial está dado por la ecuación

$$E = \frac{Q}{C} \quad (16-40)$$

Si se mantiene constante la carga y se varía la capacitancia, varía en correspondencia el potencial E , de modo que un capacitor con placas móviles puede ser utilizado como micrófono. La Fig. 16-12 muestra un circuito típico.

Hay una fuerza de atracción entre las dos placas y es necesario entregar energía a un capacitor cargado para disminuir su capacitancia, mientras que el capacitor entrega energía al exterior cuando se aumenta su capacitancia. Si se aplica un potencial variable entre las dos placas, varía en correspondencia la fuerza que actúa entre éstas y si una de ellas puede moverse, este movimiento absorbe energía del circuito eléctrico en correspondencia con el trabajo hecho. El capacitor puede así ser usado como receptor.

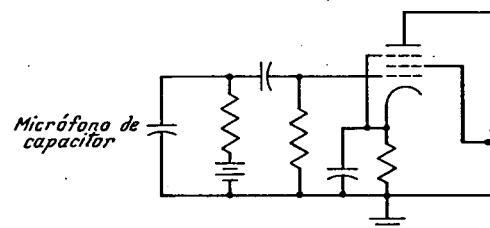


FIG. 16-12. Circuito típico para el micrófono de capacitor.

En un receptor capacitivo es necesario aplicar un campo eléctrico de polarización, fijo, por la misma razón por la que es preciso aplicar un campo magnético de polarización en el caso del receptor magnético. Esto se debe a que la fuerza entre las placas es proporcional al cuadrado del potencial y la polarización reduce la importancia de los términos de distorsión y aumenta la sensibilidad del receptor.

16-16. Altavoces. Si bien pueden usarse los mismos tipos de acopladores para la construcción de receptores telefónicos, altavoces y micrófonos, el diseño de los sistemas mecánicos asociados con las unidades impulsoras o generadoras puede tener muchas diferencias para las distintas aplicaciones. Una de las aplicaciones importantes es el altavoz, el que difiere del receptor telefónico por el hecho de que funcio-

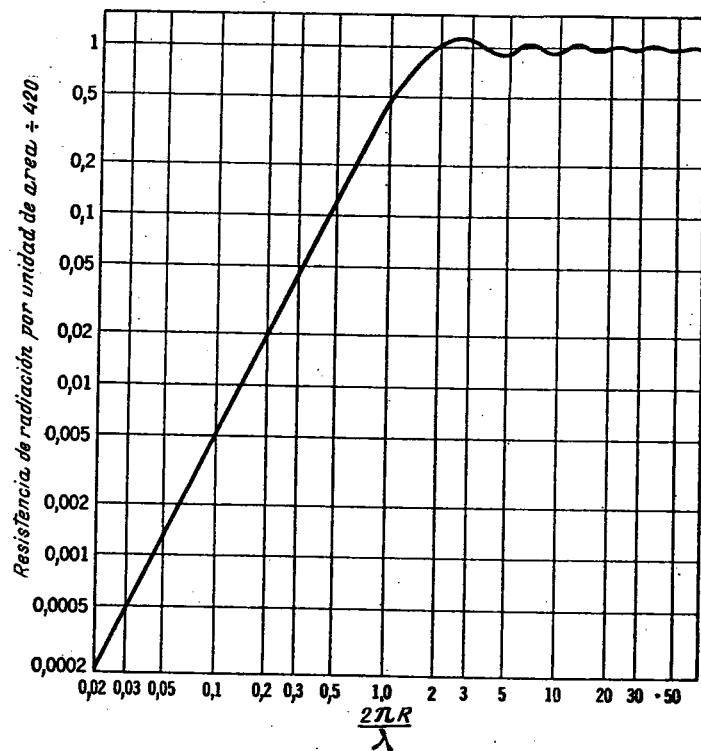


FIG. 16-13. Característica de radiación de un pistón vibrante.

na entregando energía al aire libre más bien que a la cavidad del oído. Hay dos tipos principales de altavoz: (1) El altavoz de cono, que emplea un gran diafragma con el objeto de lograr una carga acústica apreciable; (2) el altavoz de bocina, el que emplea una bocina como dispositivo adaptador de impedancias entre un diafragma relativamente pequeño y el aire.

En el altavoz, la energía debe ser impartida como movimiento ondulatorio al aire. Es un problema muy similar, entonces, al de una antena de radio.

Con el fin de entregar energía acústica de manera directa y con rendimiento razonable al aire, debe usarse un diafragma relativamente extenso. La potencia en watt entregada en una *frecuencia cualquiera* es igual a una constante multiplicada por el cuadrado de la velocidad eficaz del diafragma en metros por segundo. Esta constante, o coeficiente de proporcionalidad, se llama "resistencia de radiación". Las limitaciones de espacio nos impiden obtener la expresión de la resistencia de radiación de un diafragma. La dio por primera vez Rayleigh, pero se la encuentra actualmente en muchos libros. La ecuación de la resistencia de radiación de un diafragma en el que todos los puntos de la superficie se mueven en fase es

$$r_{\text{rad}} = \rho c \pi R^2 \left[1 - \frac{J_1(2kR)}{kR} \right] \quad (16-41)$$

$$= 420 \pi R^2 \left(\frac{k^2 R^2}{2} - \frac{k^4 R^4}{2^2 3} + \frac{k^6 R^6}{2^2 3^2 4} - \dots \right) \quad (16-42)$$

donde ρ = densidad del aire, Kg/m^3

= 1,205 para el aire

c = velocidad de propagación del sonido, m/s

= 344 para el aire

R = radio del diafragma, m

J_1 = función de Bessel, cuyo desarrollo en serie está dado en la Ec. (16-42)

$k = 2\pi f/c = 2\pi/\lambda$

La Ec. (16-41) está representada gráficamente en la Fig. 16-13. La abscisa es proporcional a la frecuencia para un tamaño dado de diafragma. Para las frecuencias más bajas, la resistencia de radiación está dada aproximadamente por el primer término de la serie, esto es,

$$r_{\text{rad}} = \frac{420 \times 2\pi^3 R^4 f^2}{c^2}$$

$$r_{\text{rad}} = 0,22 R^4 f^2 \quad (16-43)$$

Por inspección de la Fig. 16-13, es evidente que esta expresión puede usarse como aproximación hasta el punto en que $2\pi R/\lambda \approx 1,5$ o $R = \lambda/4$. Para las frecuencias superiores a ésta, la resistencia de radiación es aproximadamente constante y está dada por

$$r_{\text{rad}} = 420 \pi R^2 \quad (16-44)$$

Para un cono de 8 pulgadas, que es un tamaño común para receptores de radiodifusión, el radio es de aproximadamente 0,10 m. La resistencia de radiación será proporcional al cuadrado de la frecuencia hasta

$$\lambda \approx 4 \times 0,10 \approx 0,40 \text{ m}$$

$$f \approx \frac{c}{\lambda} = \frac{344}{0,40} \approx 860 \text{ ciclos/s}$$

El primer problema por considerar es el del carácter del control mecánico que sería deseable con el fin de reproducir las frecuencias bajas sin distorsión. Para una corriente dada en la bobina impulsora, la potencia acústica de salida debe ser independiente de la frecuencia, con el objeto de que no haya distorsión de frecuencia. Por definición de resistencia de radiación, la potencia de salida P en watt está dada por

$$P = |V|^2 r_{\text{rad}} \quad (16-45)$$

donde V es la velocidad eficaz, es decir, $V = \hat{V}/\sqrt{2}$.

La relación entre fuerza y velocidad en un sistema mecánico está dada por

$$|V| = \frac{|F|}{|Z_{mec}|} \quad (16-46)$$

Por lo tanto

$$P = F^2 \frac{r_{rad}}{|Z_{mec}|^2} \quad (16-47)$$

Dado que la fuerza ejercida sobre el diafragma es directamente proporcional a la corriente impulsora, la salida será independiente de la frecuencia si lo es r_{rad}/Z_{mec}^2 . Dado que se ha visto por la Ec. (16-41) que la resistencia de radiación es proporcional al cuadrado de la frecuencia hasta aproximadamente los 1.000 c/s, la impedancia mecánica dentro de esta banda de frecuencia debe ser *directamente proporcional a la frecuencia*. Por referencia a la Ec. (16-20c), se verá que esto exige el control por masa, es decir, la frecuencia de resonancia debe estar en el extremo inferior de la gama que se desea reproducir. Por lo tanto, la suspensión del cono debe tener una gran compliancia, esto es, muy poca rigidez. Por debajo de la frecuencia de resonancia, la impedancia mecánica será inversamente proporcional a la frecuencia, de manera que la potencia radiada dada por la Ec. (16-47) será proporcional a la cuarta potencia de la frecuencia. Luego, la radiación cae muy rápidamente y puede decirse, como aproximación, que no hay potencia radiada por debajo de la frecuencia de resonancia del diafragma. Compárese el funcionamiento del diafragma en el espacio libre, como altavoz, con el de un receptor mantenido contra el oído, caso en que, según se ha visto, la distorsión es mínima cuando el control se hace por rigidez. Este contraste es muy notable como cambio de calidad cuando se separa el receptor del oído y se lo deja sobre la mesa. Se tiene así un altavoz de cono, y la reproducción por debajo de la frecuencia de resonancia desaparece, dando lugar a una reproducción de tono alto y distorsionada.

Se ha visto que en las frecuencias más altas, la resistencia de radiación del cono deja de crecer y se hace en cambio casi constante, siempre que todos los puntos del diafragma continúen vibrando en fase. En las frecuencias bajas, el diafragma se mueve en conjunto, es decir, todas sus partes están en fase; en cambio, en las frecuencias altas, entra en juego el carácter distribuido de la masa y la rigidez del cono. A estas frecuencias, el comportamiento del cono es similar al de una línea eléctrica con disipación (debida a la resistencia de radiación). La dificultad que se encuentra en el desarrollo de altavoces capaces de cubrir una amplia gama de frecuencias, ha dado lugar a la costumbre de emplear en los sistemas de alta fidelidad de dos a cuatro altavoces, limitado cada uno a una gama restringida por medio de circuitos divisores del tipo estudiado en el Cap. VII.

El dispositivo acoplador de un altavoz de bocina puede tener un diafragma pequeño el que tendría una resistencia de radiación muy baja si se lo expusiera directamente al aire. Mediante el uso de una bocina, es posible adaptar a la unidad impulsora la resistencia de radiación representada por la gran área de la boca de la bocina.

La bocina no es un dispositivo amplificador. Es un dispositivo adaptador de impedancias que sirve para conectar el dispositivo impulsor de

alta impedancia a la atmósfera, de baja impedancia. Esto puede hacerse alterando gradualmente una red asimétrica de constantes distribuidas.

Webster ha demostrado que la bocina exponencial se adecúa muy bien para este propósito. Una bocina de esta clase actúa como un filtro pasaaltos que no transmite sonido por debajo de cierta frecuencia de umbral. La teoría es, en muchos aspectos, similar a la de una línea de transmisión, excepto por la variación de las constantes con la longitud creciente. En el diseño de una bocina entran dos factores, la constante de propagación a lo largo de la bocina y la reflexión en los extremos. Cuanto menor es la rapidez de acampanamiento, tanto menor es el límite inferior de las frecuencias transmitidas.

La ecuación de la sección transversal de una bocina exponencial es

$$S = S_1 e^{mx} \quad (16-48)$$

donde S_1 = área inicial de la garganta

x = distancia medida desde la garganta

m = constante de la que depende la menor frecuencia transmitida.

La Fig. 16-14 representa esquemáticamente una bocina de esta clase.

Crandall ha dado, como ecuación para la frecuencia de corte de una bocina,

$$f_c = \frac{mc}{4\pi} \quad (16-49)$$

donde c = velocidad del sonido en el aire

m = coeficiente en el exponente de la Ec. (16-48).

Si c está dado en metro por segundo, la distancia x de la Ec. (16-48) estará medida en metro. Por debajo de f_c no hay transmisión apreciable del sonido a lo largo de la bocina; por encima de f_c , la transmisión aumenta rápidamente hasta un máximo.

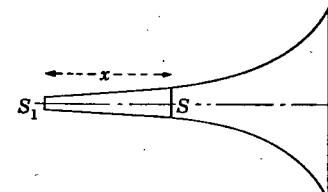


FIG. 16-14. Bocina exponencial.

Por debajo de la frecuencia de corte, la presión y la velocidad difieren casi 90° en fase, como lo hacen la corriente y la tensión en un filtro eléctrico, de modo que no puede haber transmisión de energía entre los dos extremos.

El régimen de acampanamiento determina la transmisión a lo largo de la bocina, mientras que el área de la boca determina la terminación y, por lo tanto, la reflexión en este punto. La reflexión no varía con la frecuencia tan rápidamente como la característica de transmisión. No se ha desarrollado una teoría exacta sin aproximaciones, pero puede suponerse que el extremo abierto de la bocina representa un diafragma sin peso que radia en el aire libre. Es deseable que esta resistencia de radiación sea constante para todas las frecuencias que interesa radiar. Con referencia a la Fig. 16-13 y a la discusión que le sigue, se ha visto que la resistencia de radiación es aproximadamente constante cuando el radio del diafragma es mayor que un cuarto de longitud de

onda. Por lo tanto, el diámetro de la boca de la bocina debe ser igual a aproximadamente media longitud de onda en la frecuencia más baja de interés.

Los requisitos de acampanamiento muy gradual y área de boca grande conduce a bocinas muy largas cuando hay que reproducir las frecuencias bajas. El tamaño físico de la bocina suele reducirse por plegado. Estas bocinas pueden proveer una carga adecuada para el diafragma de la unidad motora, con un factor de potencia de cerca del 100 por ciento. En tales casos, la circunferencia de impedancia mociónal tiene un diámetro pequeño y el amortiguamiento es grande.

La carga impuesta por la bocina al diafragma de la unidad acopladora da lugar al control por resistencia. La masa del diafragma y la rigidez de la suspensión deben ser pequeñas para que predomine el control por resistencia y la velocidad del diafragma sea directamente proporcional a la fuerza y, por lo tanto, a la corriente de la bobina. El diafragma debe ser rígido para que todos sus puntos se muevan en fase, pero la rigidez de la suspensión debe ser mínima.

16-17. Micrófonos. En un micrófono, las vibraciones acústicas actúan sobre un diafragma y lo hacen vibrar. Esto a su vez da lugar a una tensión en el circuito eléctrico. La fuerza alterna sobre el diafragma es directamente proporcional a la presión alterna de la onda acústica. Un micrófono ideal generaría una tensión independiente de la frecuencia y directamente proporcional a la presión acústica, es decir, a la fuerza mecánica que actúa sobre el diafragma. Los micrófonos de diafragma pueden dividirse en dos grupos:

Grupo 1. La tensión generada es proporcional al desplazamiento del diafragma.

Grupo 2. La tensión generada es proporcional a la velocidad del diafragma.

En un micrófono de carbón la tensión generada es proporcional a la variación de la resistencia. Esta variación de la resistencia se debe a la compresión y descompresión de los gránulos de carbón y es por lo tanto proporcional al desplazamiento del diafragma. Por consecuencia, el micrófono de carbón pertenece al grupo 1. En relación con la discusión del acoplador electrostático o micrófono de capacitor se ha visto por la Ec. (16-40) que la tensión generada es en este caso inversamente proporcional a la capacitancia. Dado que la capacitancia es inversamente proporcional a la separación entre placas, la tensión generada resulta ser proporcional en todo instante al desplazamiento del diafragma y este tipo de micrófono entra también en el grupo 1. Lo mismo ocurre con el micrófono piezoelectrónico.

En el micrófono electrodinámico la tensión de salida es producida por el movimiento de un conductor en un campo magnético. En tal micrófono, la tensión generada es entonces proporcional a la velocidad del conductor, la que a su vez es proporcional a la velocidad del diafragma. De modo similar, si la tensión generada se debe a la variación del campo magnético por modificación del entrehierro, la tensión inducida es también proporcional a la velocidad del diafragma. Todos estos tipos corresponden, por lo tanto, al grupo 2.

El tipo de control mecánico conveniente para mínima distorsión depende del grupo. En el grupo 1, el máximo desplazamiento del diafragma para una fuerza dada debe ser independiente de la frecuencia. Con referencia a la Ec. (16-19b) vese que esto ocurre cuando el sistema mecánico está controlado por rigidez. El control por rigidez se obtiene haciendo que la frecuencia de resonancia del diafragma esté en el extremo superior de la gama de frecuencias de interés.

En el grupo 2, la *velocidad* del diafragma debe ser directamente proporcional a la fuerza aplicada. Esto exige el control por resistencia. Este tipo de control obtiénesse de ordinario amortiguando el diafragma mediante el empleo de tubos o ranuras estrechas que comunican una cámara de aire cerrada por el diafragma con el exterior.

Se conoce un tercer tipo de micrófono en el que la tensión es generada como en los del grupo 2, pero cuyo diafragma es una cinta expuesta por sus dos caras a la onda acústica. Trátase del micrófono de cinta ilustrado en la Fig. 16-11. Una onda acústica plana puede ser representada como una función del tiempo y el espacio por la siguiente ecuación (compárese con la ecuación de la onda progresiva, Cap. VI):

$$p = A \operatorname{sen} 2\pi f \left(t - \frac{x}{c} \right) \quad (16-50)$$

donde p = presión incremental instantánea (diferencia entre la presión en un punto de la onda y la presión atmosférica).

x = distancia medida en la dirección de propagación de la onda.

c = velocidad de propagación del sonido.

La fuerza que actúa sobre la cinta del micrófono es en un instante cualquiera proporcional a la diferencia de presión entre sus dos caras. Sea p_1 la presión sobre una cara de la cinta. Entonces, la presión sobre la otra cara será

$$p_1 + \frac{\partial p}{\partial x} \Delta x \quad (16-51)$$

donde Δx es la distancia entre las dos caras expuestas, pequeña en comparación con la longitud de onda.

La fuerza es, por consiguiente,

$$\begin{aligned} f &= k \left[p_1 - \left(p_1 + \frac{\partial p}{\partial x} \Delta x \right) \right] \\ &= -k \frac{\partial p}{\partial x} \Delta x \end{aligned} \quad (16-52)$$

Introduciendo la Ec. (16-50) en la (16-52),

$$f = \frac{2\pi k A f \Delta x}{c} \cos 2\pi f \left(t - \frac{x}{c} \right) \quad (16-53)$$

Se ve que la fuerza que actúa sobre la cinta es directamente proporcional a la frecuencia. Al mismo tiempo, la impedancia mecánica debe elegirse de modo que la velocidad sea independiente de la frecuencia.

Por referencia a la Ec. (16-20c), se comprenderá que esto exige el control por masa. Así, la frecuencia de resonancia de la cinta debe estar por debajo de la frecuencia más baja de interés.

La determinación del tipo de control para los distintos tipos de receptores telefónicos, altavoces y micrófonos, está resumida en la tabla 16-1.

16-18. Resonancia controlada mecánicamente. El cristal piezoelectrónico encuentra su aplicación más interesante en la reflexión de sus

TABLA 16-1. ANÁLISIS DE LOS TIPOS DE CONTROL MECÁNICO PARA MÍNIMA DISTORSIÓN

Tipo de instrumento	Fuerza en el diafragma proporcional a	Relación necesaria para mínima distorsión	Información adicional	Control mecánico requerido	Ubicación de la frecuencia de resonancia del diafragma
Receptor telefónico	Corriente	Presión en un volumen cerrado independiente de la frecuencia	Presión proporcional al desplazamiento del diafragma	Rigidez	Arriba de la banda de trasmisión
Altavoz de cono	Corriente	Potencia radiada independiente de la frecuencia	Resistencia de radiación proporcional al cuadrado de la frecuencia	Masa	Debajo de la banda de trasmisión
Altavoz de bocina	Corriente	Potencia radiada independiente de la frecuencia	Resistencia de radiación independiente de la frecuencia	Resistencia	Ausente
Micrófono de carbón, capacitor, y cristal	Presión de la onda sonora	Tensión inducida independiente de la frecuencia	Tensión inducida proporcional al desplazamiento del diafragma	Rigidez	Arriba de la banda de trasmisión
Micrófono dinámico	Presión de la onda sonora	Tensión inducida independiente de la frecuencia	Tensión inducida proporcional a la velocidad del diafragma	Resistencia	Ausente
Micrófono de cinta	Presión de la onda sonora multiplicada por la frecuencia	Tensión inducida independiente de la frecuencia	Tensión inducida proporcional a la velocidad de la cinta	Masa	Debajo de la banda de trasmisión

constantes mecánicas hacia un circuito eléctrico. La relación entre la reactancia efectiva y la resistencia efectiva es, en muchos sistemas mecánicos, mucho mayor que la que puede obtenerse en los circuitos eléctricos. El uso de mallas mecánicas permitirá así obtener sistemas resonantes muy agudos. Es esencial que el acoplamiento entre la red eléctrica y la malla mecánica actúe en los dos sentidos para que el sistema eléctrico pueda reaccionar del mismo modo que si se introdujera en el sistema una malla eléctrica de muy alto Q .

Se ha mostrado cómo las características mecánicas del diafragma de un receptor telefónico aparecen en el circuito eléctrico a modo de una impedancia mociónal. En el receptor, empero, esta impedancia mociónal se suma fasorialmente a la impedancia del arrollamiento. Dado que esta última es bastante grande y no posee un alto valor de Q , la reactancia efectiva del diafragma no es suficiente para que el Q del receptor en conjunto resulte muy grande.

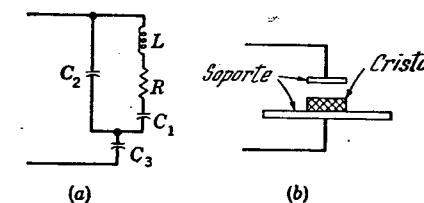


FIG. 16-15. Circuito equivalente y montaje de un cristal de cuarzo piezoelectrónico.

La ventaja del cristal piezoelectrónico es la de estar accionado por un campo eléctrico más bien que magnético. Los campos eléctricos pueden producirse con mucho menor disipación de energía que los magnéticos. Lo ejemplifica el hecho de que un capacitor bien construido de una reactancia dada tiene una resistencia equivalente en serie mucho menor que la que puede conseguir con un inductor de igual reactancia. Las constantes mecánicas de un cristal pueden entonces ser reflejadas sobre el circuito eléctrico con prácticamente ninguna resistencia adicional debida al circuito de excitación.

16-19. Circuito equivalente de un cristal piezoelectrónico. Van Dyke y Dye han dado como red equivalente del cristal la de la Fig. 16-15a. El cristal está montado de la manera que ilustra en términos generales la Fig. 16-15b. La placa superior puede estar o no en contacto con el cristal.

En la red equivalente de la Fig. 16-15a, L es la inductancia efectiva debida a la masa del cristal, R es la resistencia efectiva debida a las pérdidas internas, y C_1 es la capacitancia efectiva debida a la rigidez del cristal. C_2 es la capacitancia eléctrica que hay entre las dos caras del cristal, las que forman un capacitor con el cristal como dielectrico. C_2 es del orden de $100 C_1$. C_3 es la capacitancia efectiva en serie introducida por el espacio de aire cuando la placa superior de la Fig. 16-15b no está en contacto directo con el cristal.

Puede obtenerse la curva de reactancia para el circuito de la Fig. 16-15a procediendo del modo explicado en el Cap. IV. Está ilustrada

en la Fig. 16-16, donde se desprecia el efecto de C_3 . Dado que C_2 es tanto mayor que C_1 , la pendiente de la curva de susceptancia de C_2 será mucho mayor en el origen que la de la curva de la rama LC_1 .

Este circuito tiene un cero y un polo. Debido al alto valor de C_2/C_1 , estas dos frecuencias diferirán poco.

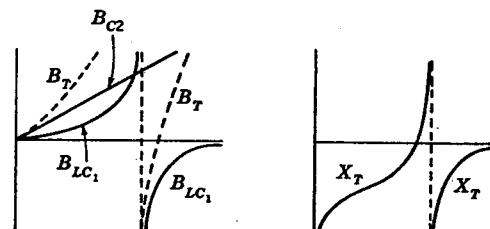


FIG. 16-16. Curvas de reactancia para un cristal piezoelectrico.

Una medición del cristal cerca de la frecuencia de antirresonancia da una circunferencia como lugar geométrico del fotor impedancia, del mismo tipo que en el caso del receptor telefónico. El amortiguamiento resulta ser muy pequeño. Si se aplica una f.e.m. a través del cristal, la curva de corriente en función de la frecuencia es similar a la de la Fig. 16-17.

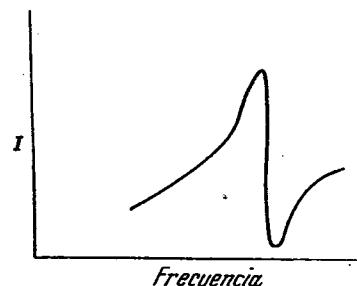


FIG. 16-17. Curva de resonancia de un cristal piezoelectrico.

La curva de la Fig. 16-17 muestra claramente la presencia de una frecuencia de resonancia un poco por encima de la frecuencia de antirresonancia.

Según se ha explicado en el Cap. VII, una de las aplicaciones más importantes de los cristales piezoelectricos se halla en los filtros de onda como elemento de alto Q . Su aplicación más común es como "tanque" en los osciladores. Como tal, gracias a su elevado Q , proporciona un funcionamiento sumamente estable en el que la frecuencia depende sólo levemente de las otras constantes del circuito.

PROBLEMAS

16-1. Determinar las ecuaciones de movimiento y el circuito eléctrico equivalente de una varilla horizontal suspendida de los extremos por medio de sendos resortes.

16-2. Mostrar gráficamente la analogía entre las ondas sonoras en un tubo y las ondas eléctricas en una línea. Dibujar el circuito eléctrico equivalente a un tubo de órgano cerrado. Repetir para un tubo de órgano abierto. A partir de estas analogías, determinar la configuración de tubo que proporcionaría una reactancia acústica inductiva. Determinar la configuración que proporcionaría una reactancia acústica capacitativa.

16-3. Una masa de 1 kilogramo está suspendida de un resorte cuyo coeficiente de rigidez es

$$k = 10^3 \text{ newton/m.}$$

¿Cuál es la frecuencia natural del sistema? A la masa aplíquese una fuerza $f = \bar{F} \sin \omega t$. Si $\bar{F} = 10^{-1}$ newton, trazar una curva que represente la amplitud de la oscilación en función de la frecuencia, de 0 a 10 c/s. $r = 1$ newton-s/m.

16-4. Un cono de 0,25 m de diámetro vibra como un pistón. ¿Cuál debe ser la amplitud de la vibración con el fin de entregar al aire una potencia acústica igual a 100 mW de energía eléctrica cuando la frecuencia es de 100 c/s? Repetir para una frecuencia de 1.000 c/s.

16-5. El cono del Prob. 16-4 tiene una masa de 0,1 Kg y la rigidez de la suspensión es tal que la frecuencia de resonancia mecánica es de 50 c/s. Determinar la fuerza que hay que aplicar en la cúspide del cono para obtener la radiación especificada en el Prob. 16-4.

16-6. El mecanismo de impulsión para el cono del Prob. 16-4 es similar al de la Fig. 16-6. La densidad de flujo es de 1,5 weber/m². La bobina móvil tiene un diámetro de 3 cm y posee 150 vueltas. ¿Cuál debe ser la corriente eficaz a 100, 500 y 1.000 c/s para radiar una potencia acústica de 100 mW? Si la resistencia de la bobina móvil es de 10 ohm. ¿cuál es el rendimiento del altavoz?

APÉNDICE

FUNCIONES HIPERBÓLICAS

Funciones hiperbólicas complejas. Las tres funciones hiperbólicas primarias defínense mediante los exponentiales

$$\operatorname{senh} \theta = \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2} \quad (\text{A-1})$$

$$\cosh \theta = \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2} \quad (\text{A-2})$$

$$\operatorname{tgh} \theta = \frac{\operatorname{senh} \theta}{\cosh \theta} = \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{e^\theta + e^{-\theta}} = \frac{e^{2\theta} - 1}{e^{2\theta} + 1}. \quad (\text{A-3})$$

Obsérvese que, para valores reales de θ , $0 < \operatorname{senh} \theta < \infty$, $1 < \cosh \theta < \infty$, $0 < \operatorname{tgh} \theta < 1$. Las curvas de la Fig. A-1 ilustran estas

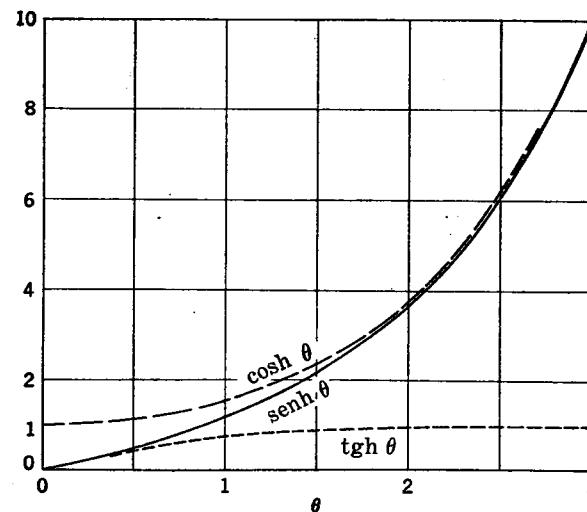


FIG. A-1. Curvas de $\operatorname{senh} \theta$, $\cosh \theta$ y $\operatorname{tgh} \theta$ para valores reales y positivos de θ .

variaciones. Las funciones están tabuladas en la tabla A-1 para valores reales de θ .

Las fórmulas de suma y diferencia se demuestran mediante la manipulación algebraica de las definiciones.

LUIS J. BRANDO
INGENIERO
TECNOLOGICO
ELECTRONICO

$$\begin{aligned}\operatorname{senh}(A \pm B) &= \operatorname{senh} A \cosh B \pm \cosh A \operatorname{senh} B \\ \cosh(A \pm B) &= \cosh A \cosh B \pm \operatorname{senh} A \operatorname{senh} B\end{aligned}\quad (\text{A-4}) \quad (\text{A-5})$$

Puede demostrarse que las funciones hiperbólicas y circulares (trigonométricas) están mutuamente relacionadas, puesto que, por definición,

$$\operatorname{sen} x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2j}$$

Sea

$$\begin{aligned}x &= j\theta \\ \operatorname{sen} j\theta &= (e^{-\theta} - e^{\theta})/2j = j(e^{\theta} - e^{-\theta})/2 \\ \text{o} \quad \operatorname{sen} j\theta &= j \operatorname{senh} \theta\end{aligned}\quad (\text{A-6})$$

Similarmente

$$\begin{aligned}\cos j\theta &= \cosh \theta \\ \operatorname{tg} j\theta &= j \operatorname{tgh} \theta\end{aligned}\quad (\text{A-7}) \quad (\text{A-8})$$

Las tres últimas identidades sirven para convertir cualquiera de las identidades trigonométricas en las correspondientes identidades hiperbólicas. Por ejemplo, dado $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$, sea

$$\begin{aligned}x &= j\theta \\ \cos^2 j\theta + \operatorname{sen}^2 j\theta &= 1\end{aligned}$$

Por las Ecs. (A-6) y (A-7),

$$\cosh^2 \theta - \operatorname{senh}^2 \theta = 1 \quad (\text{A-9})$$

Como ejemplo adicional, consideremos la familiar identidad trigonométrica

$$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$$

Sea

$$\begin{aligned}x &= j\theta \\ \operatorname{sen} j2\theta &= 2 \operatorname{sen} j\theta \cos j\theta\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 2\theta &= j2 \operatorname{senh} \theta \cosh \theta \\ \text{o} \quad \operatorname{senh} 2\theta &= 2 \operatorname{senh} \theta \cosh \theta\end{aligned}\quad (\text{A-10})$$

Como otro ejemplo, sea la identidad

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

Sea

$$\begin{aligned}x &= j\theta \\ (\operatorname{sen} j\theta)^2 &= \frac{1 - \cos j2\theta}{2} \\ - \operatorname{senh}^2 \theta &= \frac{1 - \cosh 2\theta}{2} \\ \text{o} \quad \operatorname{senh}^2 \theta &= \frac{\cosh 2\theta - 1}{2}\end{aligned}\quad (\text{A-11})$$

Pueden derivarse las inversas de las Ecs. (A-6) a (A-8) para rela-

cionar las funciones hiperbólicas de variable imaginaria a las funciones circulares de variable real.

Reemplazando θ con $j\theta$ en la Ec. (A-1)

$$\operatorname{senh} j\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2} = j \operatorname{sen} \theta \quad (\text{A-12})$$

De modo similar

$$\cosh j\theta = \cos \theta \quad (\text{A-13})$$

$$\operatorname{tgh} j\theta = j \operatorname{tg} \theta \quad (\text{A-14})$$

Las identidades anteriores pueden ser utilizadas para evaluar las funciones hiperbólicas de variable compleja. Por ejemplo, supongamos que se quiere evaluar $\operatorname{senh}(A \pm jB)$. Por la Ec. (A-4)

$$\operatorname{senh}(A \pm jB) = \operatorname{senh} A \cosh jB \pm \cosh A \operatorname{senh} jB$$

Por las Ecs. (A-13) y (A-14)

$$\operatorname{senh}(A \pm jB) = \operatorname{senh} A \cos B \pm j \cosh A \operatorname{sen} B \quad (\text{A-15})$$

Similarmente

$$\cosh(A \pm jB) = \cosh A \cos B \pm j \operatorname{senh} A \operatorname{sen} B \quad (\text{A-16})$$

En coordenadas polares

$$\begin{aligned}\operatorname{senh}(A + jB) &= \sqrt{\operatorname{senh}^2 A \cos^2 B + \cosh^2 A \operatorname{sen}^2 B} / \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} B}{\operatorname{tgh} A} \\ &= \sqrt{\operatorname{senh}^2 A(1 - \operatorname{sen}^2 B) + (1 + \operatorname{senh}^2 A) \operatorname{sen}^2 B} / \operatorname{arctgh}(\operatorname{tg} B \operatorname{ctgh} A) \\ &= \sqrt{\operatorname{senh}^2 A + \operatorname{sen}^2 B} / \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} B \operatorname{ctgh} A)\end{aligned}\quad (\text{A-15a})$$

Similarmente

$$\begin{aligned}\cosh(A + jB) &= \sqrt{\cosh^2 A \cos^2 B + \operatorname{senh}^2 A \operatorname{sen}^2 B} / \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} B \operatorname{tgh} A) \\ &= \sqrt{\operatorname{senh}^2 A + \cos^2 B} / \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} B \operatorname{tgh} A)\end{aligned}$$

Prueba de las Ecs. (6-20) y (6-23). A menudo conócese una función hiperbólica de un número complejo y se quiere conocer el número en sí. Para ello, es necesario manipular las ecuaciones de modo que puedan resolverse independientemente las partes real e imaginaria del número. Como ejemplo, supongamos que $\cosh(\alpha + j\beta) = A + jB$, donde A y B son cantidades conocidas. Se quieren evaluar α y β . Entonces, por la Ec. (A-16)

$$A + jB = \cosh(\alpha + j\beta) = \cosh \alpha \cos \beta + j \operatorname{senh} \alpha \operatorname{sen} \beta$$

Igualando las partes reales

$$A = \cosh \alpha \cos \beta$$

Igualando las partes imaginarias

$$B = \operatorname{senh} \alpha \operatorname{sen} \beta$$

Elevando al cuadrado y sumando

$$A^2 + B^2 = \cosh^2 \alpha \cos^2 \beta + \operatorname{senh}^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \beta$$

Eliminando $\cos^2 \beta = 1 - \operatorname{sen}^2 \beta$,

$$\begin{aligned} A^2 + B^2 &= \cosh^2 \alpha (1 - \operatorname{sen}^2 \beta) + \operatorname{senh}^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \beta \\ &= \cosh^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \beta \end{aligned}$$

Sumando 1,

$$1 + A^2 + B^2 = \cosh^2 \alpha + \cos^2 \beta \quad (\text{A-17})$$

Completoando el cuadrado por suma de $2A = 2 \cosh \alpha \cos \beta$,

$$1 + 2A + A^2 + B^2 = \cosh^2 \alpha + 2 \cosh \alpha \cos \beta + \cos^2 \beta$$

Tomando la raíz cuadrada

$$\sqrt{(1 + A)^2 + B^2} = \cosh \alpha + \cos \beta \quad (\text{A-18})$$

Completoando el cuadrado por resta de $2A = 2 \cosh \alpha \cos \beta$ en la Ec. (A-17)

$$\sqrt{(1 - A)^2 + B^2} = \cosh \alpha - \cos \beta \quad (\text{A-19})$$

Luego, por las Ecs. (A-18) y (A-19)

$$\begin{aligned} \cosh \alpha &= \frac{\sqrt{(1 + A)^2 + B^2} + \sqrt{(1 - A)^2 + B^2}}{2} \\ \cos \beta &= \frac{\sqrt{(1 + A)^2 + B^2} - \sqrt{(1 - A)^2 + B^2}}{2} \end{aligned} \quad (\text{6-20})$$

Dado que en las dos últimas ecuaciones sólo aparecen cantidades reales, puede hallarse el valor de α en la tabla A-1 y β , en una tabla de funciones circulares.

A menudo se conoce la tangente hiperbólica de un número complejo y se quiere hallar el número. Sea

$$C + jD = \operatorname{tgh}(\alpha + j\beta) = \frac{\operatorname{senh}(\alpha + j\beta)}{\cosh(\alpha + j\beta)}$$

$$C + jD = \frac{\operatorname{senh} \alpha \cos \beta + j \cosh \alpha \operatorname{sen} \beta}{\cosh \alpha \cos \beta + j \operatorname{senh} \alpha \operatorname{sen} \beta}$$

$$C + jD =$$

$$\frac{(\operatorname{senh} \alpha \cosh \alpha)(\cos^2 \beta + \operatorname{sen}^2 \beta) + j(\operatorname{sen} \beta \cos \beta)(\cosh^2 \alpha - \operatorname{senh}^2 \alpha)}{\cosh^2 \alpha \cos^2 \beta + \operatorname{senh}^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \beta}$$

$$C + jD = \frac{\operatorname{senh} \alpha \cosh \alpha + j \operatorname{sen} \beta \cos \beta}{\operatorname{senh}^2 \alpha + \cos^2 \beta}$$

Igualando las partes reales e imaginarias de esta ecuación,

$$C = \frac{\operatorname{senh} \alpha \cosh \alpha}{\operatorname{senh}^2 \alpha + \cos^2 \beta} = \frac{\operatorname{senh} 2\alpha}{2(\operatorname{senh}^2 \alpha + \cos^2 \beta)}$$

$$D = \frac{\operatorname{sen} \beta \cos \beta}{\operatorname{senh}^2 \alpha + \cos^2 \beta} = \frac{\operatorname{sen} 2\beta}{2(\operatorname{senh}^2 \alpha + \cos^2 \beta)}$$

$$C^2 + D^2 = \left| \frac{\operatorname{senh}^2 \gamma}{\cosh^2 \gamma} \right| = \frac{\operatorname{senh}^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \beta}{\operatorname{senh}^2 \alpha + \cos^2 \beta}$$

$$1 + C^2 + D^2 = \frac{2 \operatorname{senh}^2 \alpha + 1}{\operatorname{senh}^2 \alpha + \cos^2 \beta} = \frac{\cosh 2\alpha}{\cosh^2 \alpha + \cos^2 \beta}$$

$$1 - (C^2 + D^2) = \frac{\cos^2 \beta - \operatorname{sen}^2 \beta}{\operatorname{senh}^2 \alpha + \cos^2 \beta} = \frac{\cos 2\beta}{\operatorname{senh}^2 \alpha + \cos^2 \beta}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \operatorname{tgh} 2\alpha &= \frac{2C}{1 + C^2 + D^2} \\ \operatorname{tg} 2\beta &= \frac{2D}{1 - (C^2 + D^2)} \end{aligned} \quad (6-23)$$

Mediante estas ecuaciones pueden computarse las funciones reales de γ , después de lo cual α y β se obtienen de las tablas de estas funciones reales.

TABLA A-1. FUNCIONES HIPERBÓLICAS REALES *

x , radian	senh x	cosh x	tgh x	x , radian	senh x	cosh x	tgh x
0,00	0,00000	1,00000	0,00000	0,45	0,46534	1,10297	0,42190
0,01	0,01000	1,00005	0,01000	0,46	0,47640	1,10768	0,43008
0,02	0,02000	1,00020	0,02000	0,47	0,48750	1,11250	0,43820
0,03	0,03000	1,00045	0,02999	0,48	0,49865	1,11743	0,44624
0,04	0,04001	1,00080	0,03998	0,49	0,50984	1,12247	0,45422
0,05	0,05002	1,00125	0,04996	0,50	0,52110	1,12763	0,46212
0,06	0,06004	1,00180	0,05993	0,51	0,53240	1,13289	0,46995
0,07	0,07006	1,00245	0,06989	0,52	0,54375	1,13827	0,47770
0,08	0,08009	1,00320	0,07983	0,53	0,55516	1,14377	0,48538
0,09	0,09012	1,00405	0,08976	0,54	0,56663	1,14938	0,49299
0,10	0,10017	1,00500	0,09967	0,55	0,57815	1,15510	0,50052
0,11	0,11022	1,00606	0,10956	0,56	0,58973	1,16094	0,50798
0,12	0,12029	1,00721	0,11943	0,57	0,60137	1,16690	0,51536
0,13	0,13037	1,00846	0,12927	0,58	0,61307	1,17297	0,52267
0,14	0,14046	1,00982	0,13909	0,59	0,62483	1,17916	0,52990
0,15	0,15056	1,01127	0,14889	0,60	0,63665	1,18547	0,53705
0,16	0,16068	1,01283	0,15865	0,61	0,64854	1,19189	0,54413
0,17	0,17082	1,01448	0,16838	0,62	0,66049	1,19844	0,55113
0,18	0,18097	1,01624	0,17808	0,63	0,67251	1,20510	0,55805
0,19	0,19115	1,01810	0,18775	0,64	0,68459	1,21189	0,56490
0,20	0,20134	1,02007	0,19738	0,65	0,69675	1,21879	0,57167
0,21	0,21155	1,02213	0,20697	0,66	0,70897	1,22582	0,57836
0,22	0,22178	1,02430	0,21652	0,67	0,72126	1,23297	0,58498
0,23	0,23203	1,02657	0,22603	0,68	0,73363	1,24025	0,59152
0,24	0,24231	1,02894	0,23550	0,69	0,74607	1,24765	0,59798
0,25	0,25261	1,03141	0,24492	0,70	0,75858	1,25517	0,60437
0,26	0,26294	1,03399	0,25430	0,71	0,77117	1,26282	0,61068
0,27	0,27329	1,03667	0,26362	0,72	0,78384	1,27059	0,61691
0,28	0,28367	1,03946	0,27291	0,73	0,79659	1,27849	0,62307
0,29	0,29408	1,04235	0,28213	0,74	0,80941	1,28652	0,62915
0,30	0,30452	1,04534	0,29131	0,75	0,82232	1,29468	0,63515
0,31	0,31499	1,04844	0,30044	0,76	0,83530	1,30297	0,64108
0,32	0,32549	1,05164	0,30951	0,77	0,84838	1,31139	0,64693
0,33	0,33602	1,05495	0,31852	0,78	0,86153	1,31994	0,65271
0,34	0,34659	1,05836	0,32748	0,79	0,87478	1,32862	0,65841
0,35	0,35719	1,06188	0,33638	0,80	0,88811	1,33743	0,66404
0,36	0,36783	1,06550	0,34521	0,81	0,90152	1,34638	0,66959
0,37	0,37850	1,06923	0,35399	0,82	0,91503	1,35547	0,67507
0,38	0,38921	1,07307	0,36271	0,83	0,92863	1,36168	0,68048
0,39	0,39996	1,07702	0,37136	0,84	0,94233	1,37404	0,68581
0,40	0,41075	1,08107	0,37995	0,85	0,95612	1,38353	0,69107
0,41	0,42158	1,08523	0,38847	0,86	0,97000	1,39316	0,69626
0,42	0,43246	1,08950	0,39693	0,87	0,98398	1,40293	0,70137
0,43	0,44337	1,09388	0,40532	0,88	0,99806	1,41284	0,70642
0,44	0,45434	1,09837	0,41364	0,89	1,01224	1,42289	0,71139

* Reproducida por autorización de "Smithsonian Physical Tables".

TABLA A-1. FUNCIONES HIPERBÓLICAS REALES (Continuación)

x , radian	senh x	cosh x	tgh x	x , radian	senh x	cosh x	tgh x
0,90	1,02652	1,43309	0,71630	1,35	1,79909	2,05833	0,87405
0,91	1,04090	1,44342	0,72113	1,36	1,81977	2,07643	0,87639
0,92	1,05539	1,45390	0,72590	1,37	1,84062	2,09473	0,87869
0,93	1,06998	1,46453	0,73059	1,38	1,86166	2,11324	0,88095
0,94	1,08468	1,47530	0,73522	1,39	1,88289	2,13196	0,88317
0,95	1,09948	1,48623	0,73978	1,40	1,90430	2,15090	0,88535
0,96	1,11440	1,49729	0,74428	1,41	1,92591	2,17005	0,88749
0,97	1,12943	1,50851	0,74870	1,42	1,94770	2,18942	0,88960
0,98	1,14457	1,51988	0,75307	1,43	1,96970	2,20900	0,89167
0,99	1,15983	1,53141	0,75736	1,44	1,99188	2,22881	0,89370
1,00	1,17520	1,54308	0,76159	1,45	2,01427	2,24884	0,89569
1,01	1,19069	1,55491	0,76576	1,46	2,03686	2,26910	0,89765
1,02	1,20630	1,56689	0,76987	1,47	2,05965	2,28958	0,89958
1,03	1,22203	1,57904	0,77391	1,48	2,08265	2,31029	0,90147
1,04	1,23788	1,59134	0,77789	1,49	2,10586	2,33123	0,90332
1,05	1,25386	1,60379	0,78181	1,50	2,12928	2,35241	0,90515
1,06	1,26996	1,61641	0,78566	1,51	2,15291	2,37382	0,90694
1,07	1,28619	1,62919	0,78946	1,52	2,17676	2,39547	0,90870
1,08	1,30254	1,64214	0,79320	1,53	2,20082	2,41736	0,91042
1,09	1,31903	1,65525	0,79688	1,54	2,22510	2,43949	0,91212
1,10	1,33565	1,66852	0,80050	1,55	2,24961	2,46186	0,91379
1,11	1,35240	1,68196	0,80406	1,56	2,27434	2,48448	0,91542
1,12	1,36929	1,69557	0,80757	1,57	2,29930	2,50735	0,91703
1,13	1,38631	1,70934	0,81102	1,58	2,32449	2,53047	0,91860
1,14	1,40347	1,72329	0,81441	1,59	2,34991	2,55384	0,92015
1,15	1,42078	1,73741	0,81775	1,60	2,37557	2,57746	0,92167
1,16	1,43822	1,75171	0,82104	1,61	2,40146	2,60135	0,92316
1,17	1,45581	1,76618	0,82427	1,62	2,42760	2,62549	0,92462
1,18	1,47355	1,78083	0,82745	1,63	2,45397	2,64990	0,92606
1,19	1,49143	1,79565	0,83058	1,64	2,48059	2,67457	0,92747
1,20	1,50946	1,81066	0,83365	1,65	2,50746	2,69951	0,92886
1,21	1,52764	1,82584	0,83668	1,66	2,53459	2,72472	0,93022
1,22	1,54598	1,84121	0,83965	1,67	2,56196	2,75021	0,93155
1,23	1,56447	1,85676	0,84258	1,68	2,58959	2,77596	0,93286
1,24	1,58311	1,87250	0,84546	1,69	2,61748	2,80200	0,93415
1,25	1,60192	1,88842	0,84828	1,70	2,64563	2,82832	0,93541
1,26	1,62088	1,90454	0,85106	1,71	2,67405	2,85491	0,93665
1,27	1,64001	1,92084	0,85380	1,72	2,70273	2,88180	0,93786
1,28	1,65930	1,93734	0,85648	1,73	2,73168	2,90897	0,93906
1,29	1,67876	1,95403	0,85913	1,74	2,76091	2,93643	0,94023
1,30	1,69838	1,97091	0,86172	1,75	2,79041	2,96419	0,94138
1,31	1,71818	1,98800	0,86428	1,76	2,82020	2,99224	0,94250
1,32	1,73814	2,00528	0,86678	1,77	2,85026	3,02059	0,94361
1,33	1,75828	2,02276	0,86925	1,78	2,88061	3,04925	0,94470
1,34	1,77860	2,04044	0,87167	1,79	2,91125	3,07821	0,94576

TABLA A-1. FUNCIONES HIPERBÓLICAS REALES (Continuación)

x , radian	senh x	cosh x	tgh x	x , radian	senh x	cosh x	tgh x
1,80	2,94217	3,10747	0,94681	2,25	4,69117	4,79657	0,97803
1,81	2,97340	3,13705	0,94783	2,26	4,73937	4,84372	0,97846
1,82	3,00492	3,16694	0,94884	2,27	4,78804	4,89136	0,97888
1,83	3,03674	3,19715	0,94983	2,28	4,83720	4,93948	0,97929
1,84	3,06886	3,22768	0,95080	2,29	4,88684	4,98810	0,97970
1,85	3,10129	3,25853	0,95175	2,30	4,93696	5,03722	0,98010
1,86	3,13403	3,28970	0,95268	2,31	4,98758	5,08684	0,98049
1,87	3,16709	3,32121	0,95359	2,32	5,03870	5,13697	0,98087
1,88	3,20046	3,35305	0,95449	2,33	5,09032	5,18762	0,98124
1,89	3,23415	3,38522	0,95537	2,34	5,14245	5,23878	0,98161
1,90	3,26816	3,41773	0,95624	2,35	5,19510	5,29047	0,98197
1,91	3,30250	3,45058	0,95709	2,36	5,24827	5,34269	0,98233
1,92	3,33718	3,48378	0,95792	2,37	5,30196	5,39544	0,98267
1,93	3,37218	3,51733	0,95873	2,38	5,35618	5,44873	0,98301
1,94	3,40752	3,55123	0,95953	2,39	5,41093	5,50256	0,98335
1,95	3,44321	3,58548	0,96032	2,40	5,46623	5,55695	0,98367
1,96	3,47923	3,62009	0,96109	2,41	5,52207	5,61189	0,98400
1,97	3,51561	3,65507	0,96185	2,42	5,57847	5,66739	0,98431
1,98	3,55234	3,69041	0,96259	2,43	5,63542	5,72346	0,98462
1,99	3,58942	3,72611	0,96331	2,44	5,69294	5,78010	0,98492
2,00	3,62686	3,76220	0,96403	2,45	5,75103	5,83732	0,98522
2,01	3,66466	3,79865	0,96473	2,46	5,80969	5,89512	0,98551
2,02	3,70283	3,83549	0,96541	2,47	5,86893	5,95352	0,98579
2,03	3,74138	3,87271	0,96609	2,48	5,92876	6,01250	0,98607
2,04	3,78029	3,91032	0,96675	2,49	5,98918	6,07209	0,98635
2,05	3,81958	3,94832	0,96740	2,50	6,05020	6,13229	0,98661
2,06	3,85926	3,98671	0,96803	2,51	6,11183	6,19310	0,98688
2,07	3,89932	4,02550	0,96865	2,52	6,17407	6,25453	0,98714
2,08	3,93977	4,06470	0,96926	2,53	6,23692	6,31658	0,98739
2,09	3,98061	4,10430	0,96986	2,54	6,30040	6,37927	0,98764
2,10	4,02186	4,14431	0,97045	2,55	6,36451	6,44259	0,98788
2,11	4,06350	4,18474	0,97103	2,56	6,42926	6,50656	0,98812
2,12	4,10555	4,22558	0,97159	2,57	6,49464	6,57118	0,98835
2,13	4,14801	4,26685	0,97215	2,58	6,56068	6,63646	0,98858
2,14	4,19089	4,30855	0,97269	2,59	6,62738	6,70240	0,98881
2,15	4,23419	4,35067	0,97323	2,60	6,69473	6,76901	0,98903
2,16	4,27791	4,39323	0,97375	2,61	6,76276	6,83629	0,98924
2,17	4,32205	4,43623	0,97426	2,62	6,83146	6,90426	0,98946
2,18	4,36663	4,47967	0,97477	2,63	6,90085	6,97292	0,98966
2,19	4,41165	4,52356	0,97526	2,64	6,97092	7,04228	0,98987
2,20	4,45711	4,56791	0,97574	2,65	7,04169	7,11234	0,99007
2,21	4,50301	4,61271	0,97622	2,66	7,11317	7,18312	0,99026
2,22	4,54936	4,65797	0,97668	2,67	7,18536	7,25461	0,99045
2,23	4,59617	4,70370	0,97714	2,68	7,25827	7,32683	0,99064
2,24	4,64344	4,74989	0,97759	2,69	7,33190	7,39978	0,99083

TABLA A-1. FUNCIONES HIPERBÓLICAS REALES (Conclusión)

x , radian	senh x	cosh x	tgh x	x , radian	senh x	cosh x	tgh x
2,70	7,40626	7,47347	0,99101	3,0	10,0179	10,0677	0,99505
2,71	7,48137	7,54791	0,99118	3,1	11,0765	11,1215	0,99595
2,72	7,55722	7,62310	0,99136	3,2	12,2459	12,2866	0,99668
2,73	7,63383	7,69905	0,99153	3,3	13,5379	13,5748	0,99728
2,74	7,71121	7,77578	0,99170	3,4	14,9654	14,9987	0,99777
2,75	7,78935	7,85328	0,99186	3,5	16,5426	16,5728	0,99818
2,76	7,86828	7,93157	0,99202	3,6	18,2855	18,3128	0,99851
2,77	7,94799	8,01065	0,99218	3,7	20,2113	20,2360	0,99878
2,78	8,02849	8,09053	0,99233	3,8	22,3394	22,3618	0,99900
2,79	8,10980	8,17122	0,99248	3,9	24,6911	24,7113	0,99918
2,80	8,19192	8,25273	0,99263	4,0	27,2899	27,3082	0,99933
2,81	8,27486	8,33506	0,99278	4,1	30,1619	30,1784	0,99945
2,82	8,35862	8,41823	0,99292	4,2	33,3357	33,3507	0,99955
2,83	8,44322	8,50224	0,99306	4,3	36,8431	36,8567	0,99963
2,84	8,52867	8,58710	0,99320	4,4	40,7193	40,7316	0,99970
2,85	8,61497	8,67281	0,99333	4,5	45,0030	45,0141	0,99975
2,86	8,70213	8,75940	0,99346	4,6	49,7371	49,7472	0,99980
2,87	8,79016	8,84686	0,99359	4,7	54,9690	54,9781	0,99983
2,88	8,87907	8,93520	0,99372	4,8	60,7511	60,7593	0,99986
2,89	8,96887	9,02444	0,99384	4,9	67,1412	67,1486	0,99989
2,90	9,05956	9,11458	0,99396	5,0	74,2032	74,2099	0,99991
2,91	9,15116	9,20564	0,99408	5,1	82,0079	82,0140	0,99993
2,92	9,24368	9,29761	0,99420	5,2	90,6334	90,6389	0,99994
2,93	9,33712	9,39051	0,99431	5,3	100,1659	100,1709	0,99995
2,94	9,43149	9,48436	0,99443	5,4	110,7010	110,7055	0,99996
2,95	9,52681	9,57915	0,99454	5,5	122,3439	122,3480	0,99997
2,96	9,62308	9,67490	0,99464	5,6	135,2114	135,2151	0,99997
2,97	9,72031	9,77161	0,99475	5,7	149,4320	149,4354	0,99998
2,98	9,81851	9,86930	0,99485	5,8	165,1483	165,1513	0,99998
2,99	9,91770	9,96798	0,99496	5,9	182,5174	182,5201	0,99999
				6,0	201,7132	201,7156	0,99999

Si x es mayor que los valores dados en esta tabla, e^{-x} es despreciable y

$$\text{senh } x = \cosh x = \frac{e^x}{2}$$

$$\tgh x = 1$$

INDICE ANALITICO

A

Abaco, bicircular, 379.
de reactancias, 145.
de Smith, 390.
Acoplamiento, crítico, 452.
electromecánico, 604.
insuficiente, 445, 453.
suficiente, 451.
Activas, redes, 131.
Activo, trasductor, 18.
Acústica, analogía, 610.
Adaptación de impedancias, 415.
con líneas derivadas, 473.
con stubs, 465.
Admitancias, nodal, 110.
de excitación, 106.
de trasferencia, de malla, 106.
nodal, 112.
ADP, cristal, 622
Adpedancia, 65.
Aislador de cuarto de onda, 395.
Alineal, distorsión, 30.
Altavoz, 18, 623.
Alteración, teorema de, 118.
Amplificación de tensión, 549.
Amplificador, en cascada, 556.
compensación del, 558.
de doble sintonía, 597.
lineal, 549.
m-derivado, 568.
pasabanda, 580.
respuesta transitoria, 96, 563.
sintonía escalonada, 588.
sintonía simple, 580.
RC, 93, 550.
Amplitud, modulación de, 33.
análisis espectral de la, 41.
factor de, 33.
Analogía, 604.
acústica, 610.
onda acústica, 353.
PB-LP, 275, 582.
Análisis, 15, 69, 71, 74, 99.
armónico, 202.
de lazo, 99, 101.
de malla, 99, 101.
nodal, 99, 108.
Ancho de banda, 81.
telefónico, 81.
telegráfico, 81.

Angular, modulación, 33, 35.
análisis espectral, 41.
interferencia, 39.
Anticipatoria, propiedad, 77.
Antiresonancia, 162.
Anti-tono lateral, circuitos, 212.
Arcos, en las líneas coaxiales, 406.
Arg, 231.
Armónica, 65.
Armónico, analizador, 200.
Articulación, 28.
Artificial, línea, 315.
Asimétrica, red, 136.
Atenuación, banda de, 259.
Atenuación, constante de, 231.
Atenuación, factor, 520.
Atenuación, pérdida de, 254.
Atenuador, 495.
Atenuadores fijos, 490.
Audibilidad, umbral de, 29.
Audiotrasformador, 478.
Autopolarización, 68.

B

Balún, 471.
Banda, de atenuación, 259.
detenida, 259.
pasante, 259.
de trasmisión, 259.
Banda ancha, trasformación de impedancia de, 478.
Bario, titanato de, 622.
Bazooka, 471.
Bessel, función de, 42.
Bicircular, abaco, 379.
Bit, 52.
Blindaje, 177.
B, 65.
Bobina híbrida, 216.
Bocina exponencial, 626.

C

Cable, 307, 321.
normal, 251.
Calidad, factor de, 147.
Campbell, fórmula de, 325.
Canal, capacidad de un, 53.

Canónicas, formas, 186, 189, 190, 194.
 Capacidad, de un canal, 53.
 Capacitancia, de un cable, 308, 309.
 de una línea, 308, 309, 332.
 Capacitores, 178.
 Característica, impedancia, 230, 306, 308.
 de una red de reactancias puras, 260.
 Carga de las líneas, 321.
 Cascada, 229.
 Cascada, amplificador en, 556.
 Cauer, red de, 190.
 Celosía, filtro, 294.
 red, 130, 238.
 Cero, 89, 183.
 Cinta, micrófono de, 621.
 Circuito de polarización, compensación del, 573.
 Circuito equivalente de un pentodo, 549.
 Circuito fantasma, 214.
 Circuitales, parámetros, 178.
 Coaxil, línea, 305.
 Código de Morse, 18.
 Codificación, 17, 32.
 Codificadores, 18, 19.
 Coeficiente, de acoplamiento, 479.
 de reflexión, 343.
 Cofactor, 105.
 Compensación, 558.
 de circuito de acoplamiento, 575.
 de circuito de polarización, 573.
 de frecuencias altas, 559.
 de frecuencias bajas, 572.
 Compensación, teorema de, 118.
 Compensación, teorema A de, 119.
 Complementaria, función, 59.
 Compliancia, 606.
 Componentes circuitales, 175.
 Comportamiento transitorio, 58.
 Compuesto, filtro, 286.
 Computador, 21.
 Constante, de atenuación, 231.
 de desplazamiento de fase, 231.
 de longitud de onda, 231.
 de propagación, 231, 261.
 de retardo, 231.
 de trasferencia, 351.
 Control, 17.
 por masa, 613.
 por resistencia, 613.
 por rigidez, 613.
 Convención de signos, 100.
 Cosh, 235, 634.
 Corriente, generador de, 100, 107.
 Corriente, lugar geométrico de, 61.
 Corte, frecuencia de, 77, 263.
 Crecimiento, tiempo de, 77, 565.
 Cristal, circuito equivalente, 623.
 piezoelectrónico, 297, 622.
 Cuadratura, modulación en, 50.

Cuarto de onda, transformador de, 469, 508.
 Cuarzo, 622.
 Cuasi LP, estructura, 246.
 Cuatro terminales, red, 129.

D
 Década, 62.
 Decibel, 232, 251.
 Decodificación, 32.
 Decodificador, 19.
 Delta, 125.
 Desplazamiento de fase, constante de, 231.
 medición del, 211.
 Desviación de frecuencia, 36.
 Determinante, 105.
 Directa, modulación, 50.
 Discriminación contra las interferencias, 40.
 Disipación, 434.
 Disipativa, red, 196.
 Distorsión, 19, 30.
 alineal, 30.
 de frecuencia, 30.
 de línea, 317
 de retardo, 30.
 Distribuidos, parámetros, 303.
 División de corriente, teorema, 120.
 División en el tiempo, 51.
 Doba, red de, 570.
 Dominio, de frecuencia, 64.
 de tiempo, 64.
 Doble stub, adaptación de, 465.
 Dr (f), 64.
 Dr (t), 64.
 Dual, red, 115.
 Dual del teorema de Thévenin, 134.
 Dualidad, 99, 115.
 Dúplex, circuito, 213.
 Dúplex, telegrafía, 213.

E
 Eco, supresor de, 364.
 Ecos, 364.
 Ecualización, 515.
 doble L, 542.
 de dos terminales, 535.
 de resistencia constante, 519.
 de resistencia no constante, 540.
 de retardo, 520.
 Elastancia, 606.
 Electromecánico, acoplamiento, 604.
 tránsistor, 18.
 Electrostático, acoplador, 623.
 Eliminación de banda, filtro, 276.
 Enclavamiento, 247.
 Energía, división de, 331.

Ecualizadores, 515.
 Envolvente, 34.
 respuesta de, 586, 597.
 Espectral, análisis, modulación angular 42, 45.
 modulación de amplitud, 41.
 modulación de fase, 45.
 modulación de frecuencia, 45.
 Espectro, de frecuencia, 21.
 de pulsos, 72.
 Especular, simetría, 67.
 Equilibrio de un puente, 200.
 Equilibrio a tierra, 129.
 Equivalencia, de dos terminales, 535.
 general, 120.
 limitada, 121.
 T-PI, 127.
 Equivalente, red activa, 131.
 red de cuatro terminales, 129.
 red pasiva, 120.
 Escala, factor de, 89.
 Escalera, red en, 263.
 Escalón, función, 63.
 Estacionario, estado, 58.
 Estadísticas, 28.
 Estrella, 123.
 Exponencial, bocina, 627.

Frecuencia, de corte, 77.
 distorsión de, 31.
 instantánea, 36.
 normalizada, 269.
 de potencia mitad, 151.
 Frecuencia, espectro de, 21.
 traslación de, 31.
 Frecuencia, modulación de, 36.
 análisis espectral, 47.
 índice de, 36.
 Función, complementaria, 59.
 de pérdidas, 403.
 escalón, 63.
 hiperbólica, 235, 266, 634.
 pareada, 82.

G

Ganancia, 552.
 Generadores, de corriente, 100.
 de tensión, 100.
 General, equivalencia, 120.
 Geométrica, simetría, 155.

H

H, 89.
 H, red, 130.
 Hartley-Shannon, ley de, 52.
 Hibrida, bobina, 216.
 Hiperbólica, función, 235, 266, 634.
 Hiperbólico, radián, 311.

I

Ideal, filtro, 75, 77, 270.
 transformador, 481.
 Im, 61.
 Imagen, impedancia, 137.
 del transformador ideal, 473.
 Immitancia, 65.
 Impar, simetría, 67.
 Impedancia, ábaco bicircular, 379.
 ábaco de Smith, 390.
 Impedancia, adaptación de, 417.
 con stubs, 463.
 Impedancia, característica, 233, 306, 308.
 de malla, 102.
 de trasferencia de malla, 107.
 de trasferencia nodal, 113.
 imagen, 137.
 iterativa, 136.
 mociónal, 616.
 mutua, 102.
 nominal, 270.
 punto de excitación, 106.
 nodal, 112.

Impedancia, transformación de, 415.
de banda ancha, 481.
teorema de, 416.

Indice, de modulación de frecuencia, 36.
de modulación de fase, 36.

Inductancia, de un cable, 308, 309.
de una línea, 308, 309, 332.
mutua, 103.

Inductancia mutua, puente de, 200.

Inductores, 175.

Infinita, línea, 303.

Información, elaboración de, 16.

Inicial, onda, 341.

Inserción, pérdida de, 254, 350.

Instantánea, frecuencia, 36.

Insuficiente, acoplamiento, 445.

Integral, de Fourier, 27, 64, 71.
particular, 59.
seno, 76.

Interferencia, 35, 39.
discriminación contra la, 40.

Interno, cero, 183.

Interno, polo, 183.

Inversa, red, 518.

Inversión, 145.

Iterativa, impedancia, 136.
red, 229.

K

K- constante, filtro de, 268.
Kirchhoff, reglas de, 99.

L

L, red, 282, 417.

Lazo, 99.

Ley de Hartley-Shannon, 52.
de Kirchhoff, 99.
de Weber-Fechner, 254.

Limitada, equivalencia, 120.

Línea, artificial, 315.
de alambres abiertos, 308.
cargada, 321.
cargada en derivación, 328.
en circuito abierto, 354.
coaxil, 305.
en cortocircuito, 358.
de baja distorsión, 319.
de bajas pérdidas, 329.
distorsión en la, 317.
infinita, 303.
sin distorsión, 318.
sin pérdidas, 331, 369.
de transmisión, 305.

Línea, transformador de, 510.

Longitud de onda, 243.
constante de, 231.

LP-BP, analogía, 275, 582.

Lugar geométrico, 61, 145.

M

Malla, admitancia de trasferencia, 106.

Malla, ecuaciones de, 104.

Malla, impedancia de, 102.

Malla, impedancia de trasferencia, 106.

Máxima trasferencia de potencia, 412.

Máxima velocidad, 332.

Máximamente plana, amplitud, 561.

Máximamente plano, escalonamiento, 590.
retardo, 563.

Maxwell, puente de, 205.

m-derivado, amplificador, 568.
filtro, 278, 286.

Media onda, transformador de, 472.

Menor, 105.

Mérito, número de, 553.

Micrófono, 18, 628.

Milla de cable normal, 251.

Modulación, 18, 31, 33, 64.
angular, 33, 35.
de amplitud, 33.
de fase, 35, 45.
de frecuencia, 36.
de pulsos, 33, 50.
directa, 49.
en cuadratura, 49.
simultánea, 48.

Morse, código de, 18.

Mocional, impedancia, 617.

Muestras, teorema sobre las, 50.

Múltiple, resonancia, 181.

Mutua, admitancia, 110.
conductancia, 549.
impedancia, 102.
inductancia, 104.

N

Neper, 232, 311.

Neutralización, 219.

Nodal, admitancia, mutua, 110.
admitancia de punto de excitación, 112.
admitancia de trasferencia, 113.
análisis, 108.
impedancia de punto de excitación, 113.
impedancia de trasferencia, 113.

Nodo, 99.
admitancia de, 110.

Nominal, impedancia, 270.
T, 315.

Normalizada, frecuencia, 269.
resistencia, 376.

Norton, teorema de, 134.

Número de mérito, 553.

INDICE ANALITICO

O

O, red, 129.

Octava, 61.

Oido, 29.

Onda, 18, 239.
de corriente, 240.
inicial, 341.
reflejada, 341.
trampa de, 181.

Ondas cuadradas, ensayo con, 578.

Ondas estacionarias, relación de, 373.

Ondulatoria, tensión, 239.

Ondulatorio, movimiento, 239.

Operador, 64.

Optima, resonancia, 448.

P

Par, simetría, 67.

Paralela, resonancia, 162.

Parámetros distribuidos, 304.

Parcial, resonancia, 446.

Pareadas, funciones, 82.

Particular, integral, 59.

Pasaaltos, filtro, 272.

Pasabajos, filtro, 75, 270.

Pasabanda, 259.

Pasabanda, amplificador, 79, 273.
filtro, 79, 273.

Pasiva, red, 121, 123.

Pasivo, trasductor, 18.

Pérdida, de atenuación, 254.
de inserción, 255.
de transmisión, 255.

Pérdida, función de, 403.

Pérdidas, línea sin, 331, 369.

Pi, red, 115, 136.

Pi-T, equivalencia, 127.

Piezoelectrónico, acoplador, 622.
crystal, 297, 622.

Placa, resistencia de, 549.

Polo, 89, 183.

Potencia mitad, frecuencia de, 150.

Propagación, constante de, 231.

Propiedad de anticipación, 77.
de separación, 183.
unilateral, 550.

Puente, de c. a., 200.
de impedancia mutua, 209.
de Maxwell, 205.
red en, 200.
sensibilidad del, 203.
sustitución, 207.
de Wheatstone, 200.
de Wien, 206.

Puenteada en T, red, 139, 226.

Pulso, amplitud, 565.
espectro de, 73.
modulación de, 33, 50.

Q

Q, 147.

Q-metro, 178.

Q-stub, 404.

R

R (f), 64.

R (t), 64.

Radar, 21.

Radiación, resistencia de, 304, 624.

Radianes hiperbólicos, 311.

Radiofrecuencia, transformador de, 444.

RC, amplificador, 93, 550.

Re, 60.

Reactancia, ábaco, 150.
curvas de, 144.
teorema de Foster, 183.

Realimentación, 225, 600.

Realizabilidad física, 90, 127.

Receptor telefónico, 614.

Reciprocidad, teorema de, 118.

Red, activa, 131.

asimétrica, 138.

de Cauer, 190.

de celosía, 130, 238.

de cero, 200.

dissipativa, 196.

de Doba, 570.

dual, 115.

equilibrada en T y en Pi, 130.

equilibrante, 216, 334.

equivalente, 120, 129.

escalera, 263.

H, 130.

iterativa, 229.

L, 282, 417.

Pi, 115.

puente, 200.

redundante, 189.

relacionada, 232.

resistencia constante, 517.

T, 115.

T puenteada, 139, 226.

Redes, teoremas sobre, 99, 116.

Redundante, red, 189.

Reflejada, onda, 341.

resistencia, 483.

Reflexión, 338.

localización de la, 362.

Reflexión, coeficiente de, 343.

factor de, 351.

Relación de onda estacionaria, 373.

Relacionada, red, 232.

Rendimiento de las redes en cascada, 439.

Rendimiento de transmisión, 401.

Repetida, derivación, 292.

Repetidor, 21, 218.

Repetidor telefónico, 218.
Resistencia constante, red de, 517.
Resistencia, normalizada, 375.
de placa, 549.
reflejada, 483.
Resonancia, 143.
agudeza de, 150, 168, 245.
anti, 162.
múltiple, 181.
óptima, 448.
en paralelo, 162.
parcial, 446.
en serie, 143.
Resonancia, curva universal de, 393.
Resonantes, stubs, 393.
Respuesta, de envolvente, 586.
transitoria, 58, 63, 75, 95, 563.
Retardo, de fase, 241.
de grupo, 246.
Retardo, constante de, 231.
distorsión de, 545.
ecualizadores de, 545.
Rigidez, 607.
Rochela, sal de, 622.
Ruido, 19, 20, 52, 54.

S

Selectividad, 150, 169, 245.
Senh, 236, 634.
Seno integral, 76.
Sensibilidad de los puentes, 203.
Señalización, velocidad de, 333.
Separación, propiedad de, 183.
Serie de Fourier, 51, 65.
Serie, resonancia en, 142.
Shannon, ley de, 52.
Si (x), 72.
Signos, convención de, 100.
Simetría, 67, 155, 157.
Simétrica, red, 138.
Sin distorsión, línea, 318.
Sincrónico, capacitor, 409.
Síntesis, 1, 68, 72, 74, 186.
Sintonía, 160.
Sintonizado, transformador, 444.
Smith, abaco de, 390.
Sobreimpulso, 64, 567.
Stub, adaptación con, 460, 465.
 Q de un, 404.
resonante, 393.
Suficiente, acoplamiento, 451.
Superposición, teorema de, 117.
Supresor de ecos, 364.

T

T gemelas, 315.
T-paralela, circuito, 220.
T-Pi, equivalencia, 127.
T-puenteada, 139, 226.

Tándem, 229.
Tanque, 236, 634.
Telegrafía, 81.
dúplex, 213.
Telefónico, receptor, 614.
repetidor, 216.
Televisión, 20, 82, 220.
Tensión, amplificación de, 549.
Teorema, de alteración, 118.
de compensación, 118.
A, 119.
de división de corriente, 120.
de máxima trasferencia de potencia, 412.
de muestras, 50.
de Norton, 134.
de reactancias de Foster, 183.
de reciprocidad, 118.
de superposición, 117.
de Thévenin, 131, 134.
de transformación de impedancias, 416.
Tiempo de crecimiento, 77.
Tiempo, división en el, 51.
dominio de, 64.
múltiplex de, 51.
Tierra, 205.
Tono, control de, 544.
Trampa de ondas, 181.
Transitoria, respuesta, 29, 58.
del amplificador RC, 93.
con compensación en paralelo, 563.
del filtro pasabajos, 75.
del filtro pasabanda, 78.
Trasconductancia, 549.
Trasdutor, 18, 136.
Trasferencia, admittance de, 106.
constante de, 351.
impedancia de, 106.
Trasformada de Fourier, 82.
Trasformación de impedancias, 412.
Trasformación T-Pi, 127.
Trasformador, de audio, 478.
con núcleo de hierro, 488.
de cuarto de onda, 469.
de línea, 510.
de media onda, 472.
de radiofrecuencia, 444.
diseño del, 488.
ferromagnético, 478.
ideal, 481.
sintonizado, 444, 483.
Trasmisión, banda de, 262.
línea de, 307.
pérdidas de, 255.
rendimiento de, 401.
unidad de, 251.

U

Umbral de audibilidad, 29.
Unidad de transmisión, 251.

Unilateral, propiedad, 550.
Unitaria, función escalón, 63.
Universal, curva de resonancia, 154, 170.

Velocidad máxima, 332.
Voz, 17, 20, 21.

W

V
Velocidad de fase, 241.
Velocidad de grupo, 246.
Velocidad de señalización, 333.

W (f), 64.
Wagner, tierra de, 205.
Weber-Fechner, ley de, 254.
Wheatstone, puente de, 200.
Wien, puente de, 206.