

## Versiónes

202209270845

Advertencia! El presente documento trata sobre la traducción del libro y de resoluciones de ejemplos en matlab. Actualmente está en desarrollo, así que puede contener secciones con errores, sin edición y revisión de terminología y fórmulas.

## **Analog and Digital Filters Design and Realization**

### Temas

<b>1. Introducción.....</b>	<b>6</b>
<b>1-1 Función de magnitud.....</b>	<b>8</b>
<b>1-2 Funciones de retardo de fase y grupo.....</b>	<b>13</b>
<b>1-3 Procedimiento de diseño.....</b>	<b>16</b>
<b>Referencias y lecturas adicionales.....</b>	<b>18</b>
<b>Problemas.....</b>	<b>19</b>
<b>2. Construcción de bloques.....</b>	<b>23</b>
<b>2-1 Representación.....</b>	<b>24</b>
<b>2-2 Componentes del circuito.....</b>	<b>26</b>
2-2-1. Bloques de construcción básicos.....	26
2-2-2. Bloques de construcción secundarios.....	29
<b>Referencias y lecturas adicionales.....</b>	<b>43</b>
<b>Problemas.....</b>	<b>44</b>
<b>3. Propiedades de las funciones de redes.....</b>	<b>45</b>
<b>3-1 Polinomios de variable compleja.....</b>	<b>45</b>
<b>3-2 Funciones de redes.....</b>	<b>48</b>
3-2-1. Transformada de Hilbert.....	49
3-2-2. Partes pares e impares.....	54
3-2-3. Funciones de fase y magnitud.....	59
<b>Referencias y lecturas adicionales.....</b>	<b>63</b>
<b>Problemas.....</b>	<b>64</b>
<b>4. Funciones real positiva y pasividad.....</b>	<b>67</b>
<b>4-1 Polinomio de Hurwitz.....</b>	<b>70</b>
<b>4-2 Funciones reales y positivas (PR).....</b>	<b>79</b>
<b>4-3 Pasividad.....</b>	<b>84</b>
<b>Referencias y lecturas adicionales.....</b>	<b>85</b>
<b>Problemas.....</b>	<b>86</b>

<b>5. Propiedades y realizaciones de las funciones propias (DP, driving-point) sin pérdidas.</b>	<b>92</b>
<b>5-1 Propiedades de funciones DP sin perdidas.....</b>	<b>92</b>
<b>5-2 Realización de funciones DP sin perdidas.....</b>	<b>98</b>
5-2-1 Métodos de realizaciones de Foster.....	98
<i>Resolución matlab – Ejemplo 5-1.....</i>	102
5-2-2 Métodos de realización de Cauer.....	103
5-2-2-1 Primera forma de Cauer.....	103
<i>Resolución Matlab – Ejemplo 5-2.....</i>	107
5-2-2-2 Segunda forma de Cauer.....	109
<b>5-3 Observaciones finales.....</b>	<b>115</b>
<b>Referencias y lecturas adicionales.....</b>	<b>117</b>
<b>Problemas.....</b>	<b>118</b>
<b>6. Propiedades y las realizaciones de funciones de redes RC pasivas.....</b>	<b>122</b>
<b>6-1 Propiedades de funciones RC DP de impedancia.....</b>	<b>122</b>
<b>6-2 Propiedades de las funciones DP RC de admitancia.....</b>	<b>128</b>
<b>6-3 Ejemplos de Métodos de realización de Foster .....</b>	<b>132</b>
<b>6-4 Métodos de realización de Cauer.....</b>	<b>134</b>
6-4-1. Primera forma de Cauer.....	134
6-4-2. Segunda forma de Cauer.....	140
<b>6-5 Observaciones finales.....</b>	<b>146</b>
<b>Referencias y lecturas adicionales.....</b>	<b>148</b>
<b>Problemas.....</b>	<b>149</b>
<b>7. Realización pasiva de funciones de transferencia.....</b>	<b>154</b>
<b>7-1 Redes de escalera (Ladder).....</b>	<b>154</b>
7-1-1. Redes de escalera RC.....	155
7-1-2. Redes de escalera LC.....	166
7-1-3. Consideraciones alternativas.....	171
<b>7-2 Redes Celosía (Lattice).....</b>	<b>177</b>
<b>7-3 Métodos de Darlington.....</b>	<b>180</b>
7-3-1. Redes sin perdidas con simple terminación.....	183
7-3-2. Redes de dispositivos de dos puertos sin perdida en ambos extremos.....	192
<b>7-4 Observaciones finales.....</b>	<b>203</b>
<b>Referencias y lecturas adicionales.....</b>	<b>206</b>
<b>Problemas.....</b>	<b>207</b>
<b>8. Aproximación del Filtro.....</b>	<b>213</b>
<b>8-1 La aproximación de Butterworth.....</b>	<b>218</b>
8-1-1. Propiedades básicas.....	220
8-1-2. Función de transferencia.....	222
8-1-3. Realización del circuito.....	228
8-1-4. Ejemplos.....	230
<i>Resolución Matlab – Ejemplo 8-2.....</i>	232
<b>8-2 La aproximación de Chebyshev.....</b>	<b>237</b>
8-2-1. Polinomios de Chebyshev.....	238

8-2-2. Filtros Chebyshev.....	240
<i>Resolución Matlab – Ejemplo 8-4</i> .....	252
8-2-3. Función de transferencia.....	253
8-2-4. Realización de circuitos.....	257
8-2-5. Ejemplos.....	259
8-2-6. Filtros elípticos.....	260
<b>8-3 La aproximación de Bessel.....</b>	<b>262</b>
8-3-1. Función de transferencia.....	263
8-3-2. Diseño y Realización.....	269
8-3-3. Filtros de transición.....	272
<b>8-4 Transformaciones básicas de frecuencia y de red.....</b>	<b>273</b>
8-4-1. Transformación de paso bajo a paso bajo.....	274
<i>Resolución Matlab – Problema 8-12</i> .....	277
<i>Resolución Matlab – Problema 8-12 (alternativa)</i> .....	278
8-4-2. Transformación de paso bajo a paso banda.....	281
<i>Resolución Matlab – Problema 8-14</i> .....	287
8-4-3. Transformación de paso bajo a rechazo de banda.....	289
8-4-4. Transformación de paso bajo a paso alto.....	292
8-4-4-1. Filtros Chebyshev inversos.....	293
8-4-5. Escalado de impedancia.....	295
8-4-6. Ejemplos.....	297
<b>8-5 Filtros paso todos.....</b>	<b>300</b>
<b>Referencias y lecturas adicionales.....</b>	<b>302</b>
<b>Apéndice del capítulo 8.....</b>	<b>303</b>
<b>Problemas.....</b>	<b>309</b>
<b>9. Sensibilidad.....</b>	<b>321</b>
<b>9-1 Sensibilidades del Polo y del cero.....</b>	<b>322</b>
9-1-1. Técnicas de computación.....	322
9-1-2. Algunos resultados generales.....	331
<b>9-2 Sensibilidades de función de red.....</b>	<b>332</b>
9-2-1. Algunos resultados generales.....	333
<b>9-3 Sensibilidades de filtro de segundo orden.....</b>	<b>335</b>
<b>Referencias y lecturas adicionales.....</b>	<b>338</b>
<b>Problemas.....</b>	<b>339</b>
<b>10. Filtros activos.....</b>	<b>340</b>
<b>10-1 Enfoque de realización directa.....</b>	<b>342</b>
10-1-1. Realización directa a través de circuitos pasivos.....	342
10-1-1-1. Métodos de inductancia simulada.....	342
10-1-1-2. Método de escalado de impedancia variable.....	345
10-1-2. Realización directa con redes RC de dos puertos—Método de Kuh.....	350
10-1-3. Realización directa con dispositivos RC de un puerto.....	356
10-1-3-1. Método Yanagisawa.....	358
10-1-3-2. Método de Mathews-Seifert.....	361
10-1-3-3. Método de Lovering.....	363
10-1-3-4. Método de Mitra.....	365
10-1-3-5. Algunos comentarios.....	368
10-1-4. Realización directa a través de la técnica de variable de estado.....	368
<b>10-2 Enfoque de realización de cascada.....</b>	<b>372</b>
10-2-1. Amplificador único Biquad.....	374

10-2-1-1. Biquad de un solo amplificador: técnica personalizada.....	374
10-2-1-2. Biquad de amplificador único: técnica de circuito canónico.....	385
10-2-2. Multiamplificador Biquad.....	391
10-2-2-1. Multiamplificador Biquad—Técnica de variable de estado.....	391
10-2-2-2. Amplificador Múltiple Biquad—Circuito de Tow.....	398
10-2-2-3. Algunos comentarios.....	407
10-2-3. Configuraciones de circuitos complementarios.....	408
10-2-4. Selección de pares de polos y ceros.....	412
10-2-5. Consideraciones sobre la sensibilidad de los polos.....	413
<b>10-3 Consideración del amplificador operacional no ideal.....</b>	<b>414</b>
10-3-1. Amplificador inversor de ganancia de voltaje.....	416
10-3-2. Amplificador de ganancia de voltaje no inversor.....	420
10-3-3. Integrador.....	422
10-3-4. Sección de filtro de paso de banda Friend.....	426
<b>10-4 Circuitos activos sin condensadores.....</b>	<b>430</b>
10-4-1. Un circuito biquadrático R activo de paso de banda de alta frecuencia de alta Q.....	430
10-4-2. Un circuito Biquad R activo.....	432
<b>Referencias y lecturas adicionales.....</b>	<b>442</b>
<b>Problemas.....</b>	<b>444</b>
<b>11. Introducción a filtros digitales.....</b>	<b>456</b>
<b>    11-1 Señales y sistemas digitales.....</b>	<b>456</b>
<b>    11-2 Transformada Z.....</b>	<b>463</b>
11-2-1. Propiedades de la Transformada z.....	467
11-2-2. Transformada Z inversa.....	470
<b>    11-3 Transformada de Fourier.....</b>	<b>477</b>
11-3-1. Teorema de muestreo.....	480
<b>    11-4 Transformada de Fourier discreta.....</b>	<b>485</b>
<b>    11-6 Consideraciones de estabilidad.....</b>	<b>493</b>
<b>    11-7 Un ejemplo de filtro digital sencillo.....</b>	<b>496</b>
<b>    11-8 Análisis de filtros digitales.....</b>	<b>498</b>
<b>Referencias y lecturas adicionales.....</b>	<b>500</b>
<b>Problemas.....</b>	<b>501</b>
<b>12. Diseño de filtros digitales.....</b>	<b>507</b>
<b>    12-1 Diseño de filtros digitales IIR.....</b>	<b>511</b>
12-1-1. Técnicas de Integración Numérica.....	513
<i>Resolución Matlab – Ejemplo 12-1</i> .....	515
12-1-2. Transformación invariante de impulso.....	519
<i>Resolución Matlab – Ejemplo 12-3</i> .....	523
<i>Resolución Matlab – Ejemplo 12-6 – condiciones de un filtro digital</i> .....	532
12-1-3. Transformación bilineal.....	534
<i>Resolución Matlab – Ejemplo 12-10 – condiciones de un filtro digital</i> .....	542
12-1-4. Transformaciones de frecuencia.....	544
12-1-4-1. Transformación de paso bajo a paso bajo.....	548
12-1-4-2. Transformación de paso bajo a paso de banda.....	549
12-1-4-3. Transformación de paso bajo a rechazo de banda.....	550
12-1-4-4. Transformación de paso bajo a paso alto.....	552
12-1-5. Diseño de filtros digitales de paso todo.....	553

<b>12-2 Diseño de filtros digitales FIR.....</b>	<b>557</b>
12-2-1. Método de muestreo de frecuencia.....	560
<i>Resolución Matlab – Problema 12-16.....</i>	562
12-2-2. El método de ventanas (windowing).....	563
12-2-3. Algunos comentarios sobre los filtros digitales FIR.....	566
<b>Referencias y lecturas adicionales.....</b>	<b>567</b>
<b>Problemas.....</b>	<b>568</b>
<b>13 Realización de filtros digitales.....</b>	<b>575</b>
<b>13-1 Realización de filtros digitales IIR.....</b>	<b>575</b>
13-1-1. Realización Directa.....	576
13-1-1-1. Formas Directas.....	576
13-1-1-2. Formas de escalera.....	581
13-7-7-3. Eliminación de bucles sin retardo.....	594
13-1-2. Realización indirecta.....	600
13-1-2-1. Realizaciones en cascada.....	604
13-1-2-2. Realización Paralela.....	606
<b>13-2 Realización del filtro digital FIR.....</b>	<b>608</b>
<b>Referencias y lecturas adicionales.....</b>	<b>611</b>
<b>Problemas.....</b>	<b>612</b>

## 1. Introducción.

En el sentido más general, un "filtro" es un dispositivo o un sistema que altera de una manera prescrita la entrada que pasa a través de él. En esencia, un filtro convierte las entradas en salidas de tal manera que ciertas características deseables de las entradas se conservan en las salidas mientras que se suprimen las características indeseables.

Hay muchos tipos de filtros; aquí sólo se dan algunos ejemplos. En automóviles, el filtro de aceite elimina las partículas no deseadas que están suspendidas en el aceite que pasa a través del filtro; el filtro de aire deja pasar aire pero evita que la suciedad y el polvo lleguen al carburador. El vidrio coloreado puede usarse como filtro óptico para absorber luz de ciertas longitudes de onda, alterando así la luz que llega a la película sensibilizada en una cámara.

Un filtro eléctrico está diseñado para separar y transmitir una señal deseada de una mezcla de señales deseadas y no deseadas. Los ejemplos típicos de filtros eléctricos complejos son televisores y radios. Más específicamente, cuando un televisor se cambia a un canal en particular, digamos el Canal 2, pasará esas señales (de audio y visuales) transmitidas por el Canal 2 y bloqueará todas las demás señales. A menor escala, los filtros son componentes electrónicos básicos en muchos sistemas de comunicación como el teléfono, la televisión, la radio, el radar y la sonda. Los filtros eléctricos también se pueden encontrar en circuitos de conversión de energía y sistemas de energía en general. De hecho, los filtros eléctricos impregnán tanto la tecnología moderna que es difícil pensar en un dispositivo electrónico moderadamente complejo que no emplee un filtro de una forma u otra.

Los filtros eléctricos pueden clasificarse de varias formas. Los filtros analógicos se utilizan para procesar señales analógicas o de tiempo continuo; Los filtros digitales se utilizan para procesar señales digitales (señales de tiempo discreto con niveles de magnitud cuantificados).<sup>1</sup> Los filtros analógicos pueden clasificarse como agrupados o distribuidos según los rangos de frecuencia para los que están diseñados.<sup>2</sup> Finalmente, los filtros analógicos también pueden clasificarse como pasivo o activo según el tipo de elementos utilizados en sus realizaciones.

En términos más abstractos, un filtro es un sistema caracterizado por un conjunto de pares de entrada-salida o pares de excitación-respuesta, como se muestra en la figura 1-1, donde

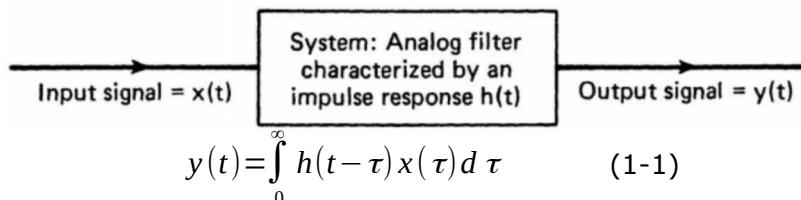


Fig. 1-1 Un filtro es un sistema con un conjunto de propiedades de entrada y salida prescritas.

Al escribir (1-1), asumimos que el filtro analógico de entrada única y salida única en consideración es causal, lineal, concentrado e invariante en el tiempo y que  $h(f)$  es la respuesta al impulso del filtro. La transformada de Laplace de (1-1) da

$$Y(s) = H(s)X(s) \quad (1-2)$$

donde  $Y(s)$ ,  $H(s)$  y  $X(s)$  son, respectivamente, las transformadas de Laplace de  $y(t)$ ,  $h(t)$  y  $x(t)$ . Aquí, el filtro es caracterizado por  $H(s)$ , la función de transferencia del filtro<sup>3</sup> (o la función de respuesta en frecuencia cuando  $s = j\omega$ ). Debido a que  $s$  o  $j\omega$  es una variable

<sup>1</sup> Analizamos los filtros digitales en el Capítulo 11. En la siguiente discusión, tratamos únicamente con filtros analógicos y sistemas de tiempo continuo.

<sup>2</sup> En este libro, solo consideramos los filtros agrupados o concentrados(lumped).

<sup>3</sup> En el análisis de estado estable sinusoidal, dejamos  $s = j\omega$ .

compleja,  $H(s)$  o  $H(j\omega)$  es una cantidad compleja. Es decir,  $H(j\omega)$  tiene una parte real  $\text{Re}[H(j\omega)]$  y una parte imaginaria  $\text{Im}[H(j\omega)]$ , y

$$H(j\omega) = \text{Re}[H(j\omega)] + j\text{Im}[H(j\omega)] \quad (1-3)$$

En términos de representación polar, podemos escribir

$$H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\angle H(j\omega)} \quad (1-4)$$

donde  $|H(j\omega)|$  y  $\angle H(j\omega)$  denotan respectivamente la *magnitud* y el *ángulo de avance de fase* de  $H(j\omega)$ , con

$$\begin{aligned} |H(j\omega)|^2 &= [\text{Re}[H(j\omega)]]^2 + [\text{Im}[H(j\omega)]]^2 \\ &= H(j\omega)H(-j\omega) \end{aligned} \quad (1-5)$$

$$\angle H(j\omega) = \tan^{-1} \frac{\text{Im}[H(j\omega)]}{\text{Re}[H(j\omega)]} \quad (1-6)$$

$$\text{Re}[H(j\omega)] = |H(j\omega)| \cos(\angle H(j\omega)) \quad (1-7)$$

$$\text{Im}[H(j\omega)] = |H(j\omega)| \sin(\angle H(j\omega)) \quad (1-8)$$

Tenga en cuenta que la última igualdad de (1-5) se cumple porque se supone que todos los coeficientes de  $H(j\omega)$  son reales.

## 1-1 Función de magnitud

Como se mencionó anteriormente, el propósito general de un filtro eléctrico es separar y pasar una señal deseada de una mezcla de señales deseadas y no deseadas. En el caso de un receptor de radio, la señal que ingresa al receptor es una mezcla de ruido eléctrico y señales de todas las estaciones de radio en el área, incluida la estación deseada. Al sintonizar el receptor de radio en un ajuste de frecuencia particular, filtramos "todas" las señales de las estaciones no deseadas y pasamos la señal transmitida por la estación deseada. Debido a las limitaciones de los sistemas causales, no podemos construir un receptor que pase una frecuencia en particular,  $\omega_p$ , y rechace todas las demás frecuencias, ni podemos construir una estación de radiodifusión que transmita exactamente  $\omega_p$ . En consecuencia, construimos un filtro que dejará pasar señales dentro de un intervalo de frecuencias ( $\omega_{p1}$ ,  $\omega_{p2}$ ) que contienen  $\omega_p$  y rechazará todas las demás, donde las palabras "pasar" y "rechazar" se usan en un sentido relativo en lugar de en un sentido absoluto. De (1-2), tenemos

$$|Y(j\omega)| = |H(j\omega)||X(j\omega)| \quad (1-9)$$

$$|Y(j\omega)| = |H(j\omega)||X(j\omega)| \quad (1-10)$$

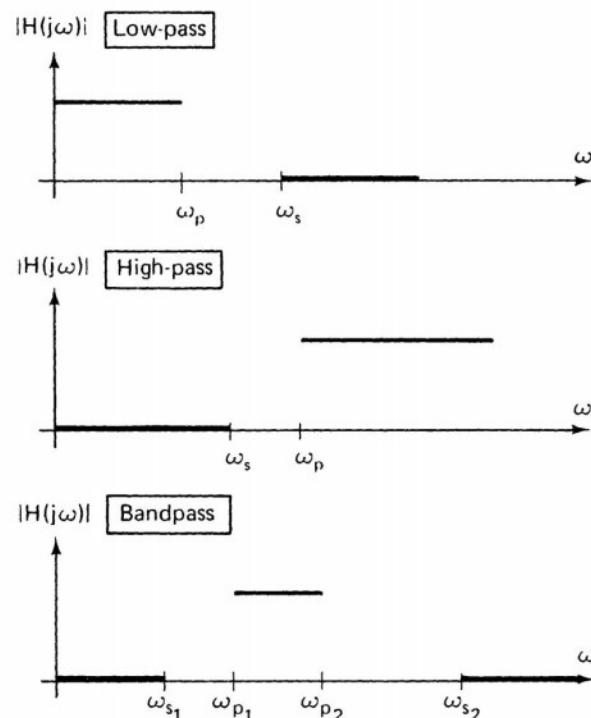
La ecuación (1-9) dice que la magnitud de la señal de salida es el producto de las magnitudes de la señal de entrada y la función de respuesta de frecuencia del filtro. Esto significa que si un filtro tiene una función de magnitud  $|H(j\omega)|$  igual a cero (o aproximadamente igual a cero) para un cierto rango de frecuencia, digamos entre  $\omega_{s1}$  y  $\omega_{s2}$ , entonces la señal de salida tendrá una magnitud cero (o aproximadamente cero) si la frecuencia de la señal de entrada está dentro de esta banda de frecuencia de ( $\omega_{s1}$ ,  $\omega_{s2}$ ). Por tanto, el intervalo ( $\omega_{s1}$ ,  $\omega_{s2}$ ) se denomina banda de rechazo del filtro. Del mismo modo, si la función de magnitud  $|H(j\omega)|$  es mayor o igual a algún número cercano a uno dentro de la banda de frecuencia ( $\omega_{p1}$ ,  $\omega_{p2}$ ), entonces ( $\omega_{p1}$ ,  $\omega_{p2}$ ) se denomina *banda de paso* del filtro.<sup>4</sup> Este nombre se da porque si la frecuencia de entrada está dentro de ( $\omega_{p1}$ ,  $\omega_{p2}$ ), entonces la señal de salida es una versión mejorada o, en el peor de los casos, ligeramente atenuada de la señal de entrada. Además, definimos una banda de transición como una banda de frecuencias entre una banda de paso y una banda de supresión. Una especificación sobre la magnitud de la función de respuesta de frecuencia de un filtro puede incluir especificaciones sobre bandas de paso y bandas de parada, así como bandas de transición.

Basándonos en (1-9), podemos definir los siguientes cinco tipos básicos de filtros selectivos de frecuencia:

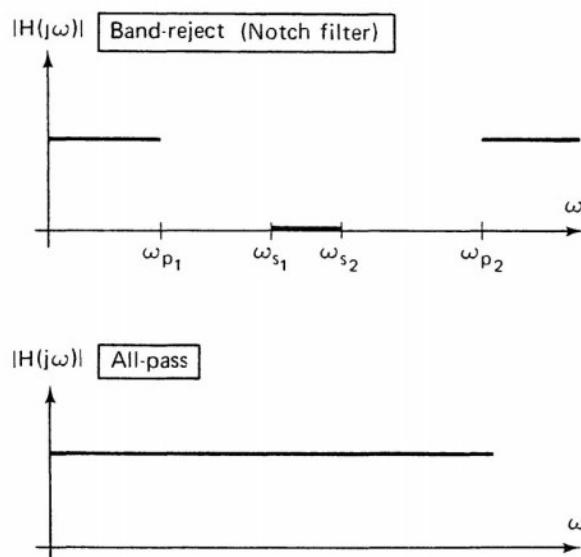
- 1. Filtro paso bajo:** un filtro cuya banda de paso es de 0 a alguna frecuencia  $\omega_p$  y cuya banda de supresión se extiende desde cierta frecuencia  $\omega_s$  hasta infinito, donde  $\omega_p < \omega_s$ .
- 2. Filtro paso alto:** un filtro cuya banda de paso va desde alguna frecuencia  $\omega_p$  hasta el infinito y cuya banda de parada es de 0 a  $\omega_s$ , donde  $\omega_s < \omega_p$ .
- 3. Filtro paso banda:** un filtro cuya banda de paso va de alguna frecuencia  $\omega_{p1}$  a alguna otra frecuencia  $\omega_{p2}$  y cuyas bandas de parada van de 0 a  $\omega_{s1}$  y de  $\omega_{s2}$  a  $\infty$ , donde  $\omega_{s1} < \omega_{p1} < \omega_{p2} < \omega_{s2}$ .
- 4. Filtro rechaza banda:** un filtro cuyas bandas de paso son de 0 a  $\omega_{p1}$  y de  $\omega_{p2}$  a  $\infty$  y cuya banda de parada es de  $\omega_{s1}$  a  $\omega_{s2}$ , donde  $\omega_{p1} < \omega_{s1} < \omega_{s2} < \omega_{p2}$ .
- 5. Filtro pasa todo:** un filtro cuya magnitud es 1 para todas las frecuencias (es decir, cuya banda de paso es de 0 a  $\infty$ ). Este tipo de filtro se utiliza principalmente para fines de compensación y desplazamiento de fase.

Estos cinco tipos básicos de filtros selectivos de frecuencia se ilustran en la Fig. 1-2. Por supuesto, hay filtros que no pertenecen a ninguno de estos cinco tipos.

<sup>4</sup> El de aquí puede interpretarse como una unidad normalizada con respecto a una referencia de magnitud.

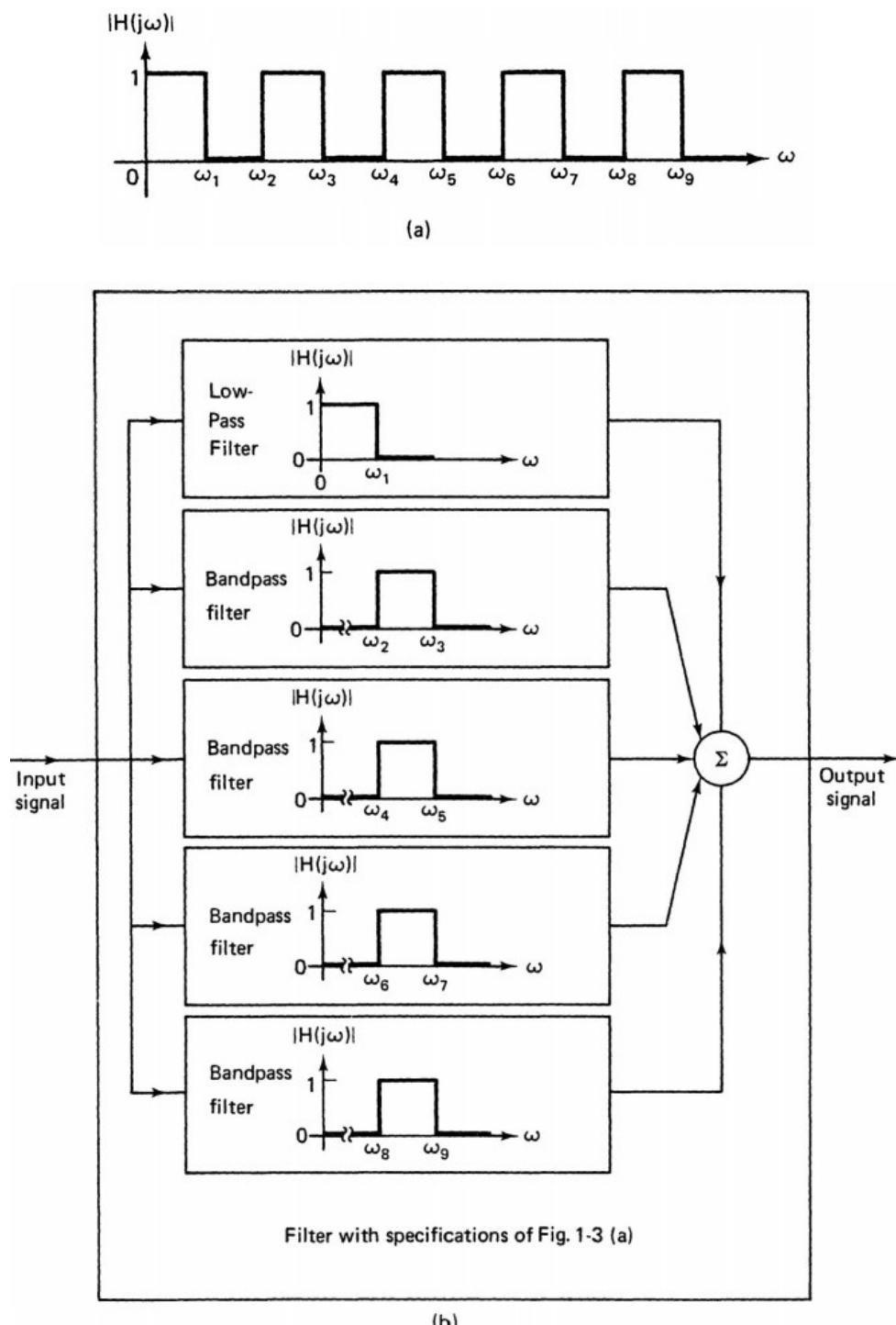


**Fig. 1-2** Five basic types of frequency-selective filters.



**Fig. 1-2** (Continued)

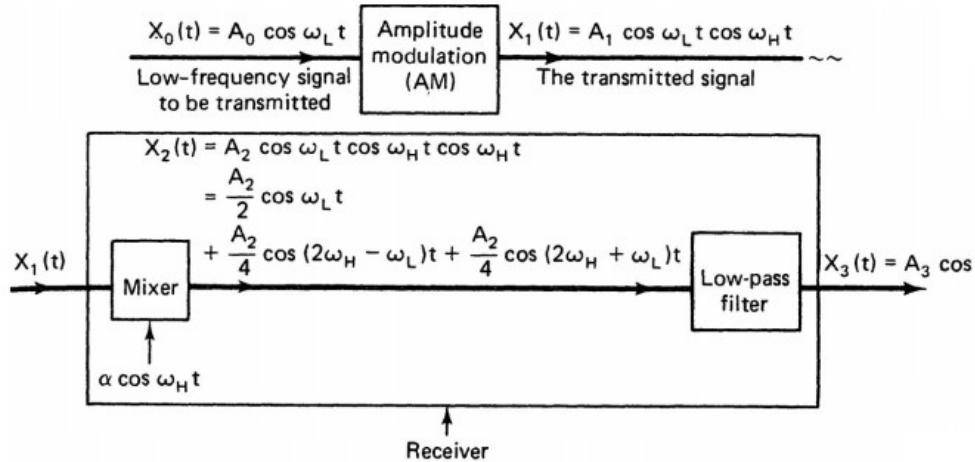
En la mayoría de los casos de interés, las especificaciones de magnitud de los filtros se incluirán en una de estas cinco categorías básicas o en una combinación de estos cinco tipos. Un ejemplo de ello es un filtro cuya magnitud se especifica en la Fig. 1-3 (a). Este filtro puede considerarse una combinación de un filtro de paso bajo y cuatro de paso de banda, como se muestra en la Fig. 1-3 (b).



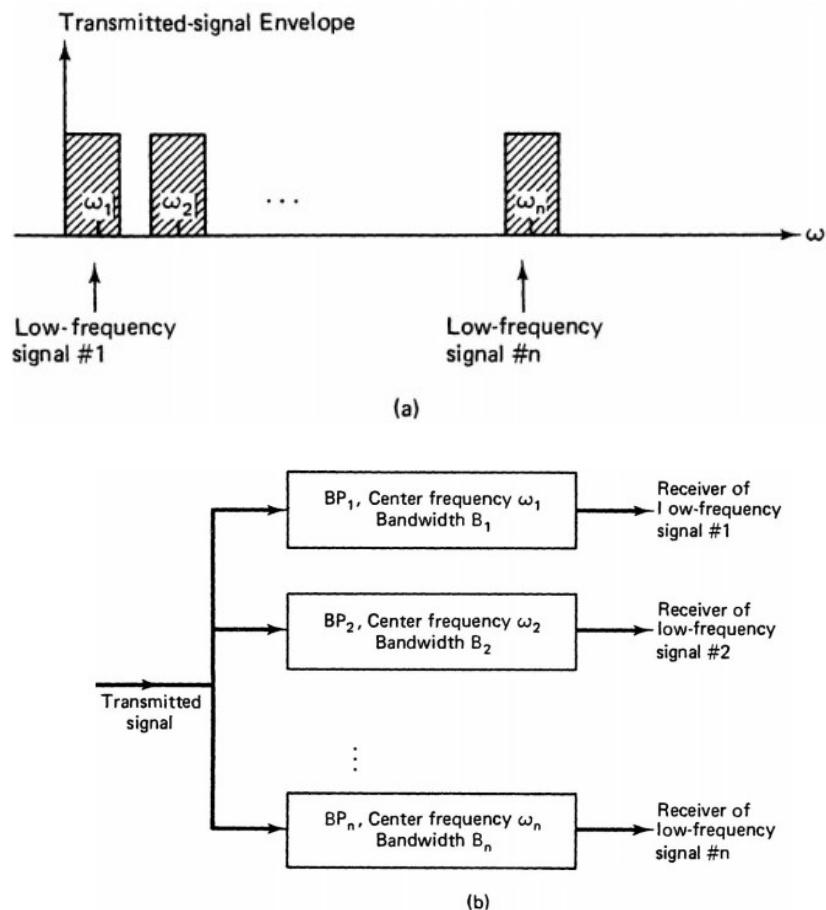
**Fig. 1-3** An example of a decomposable filter.

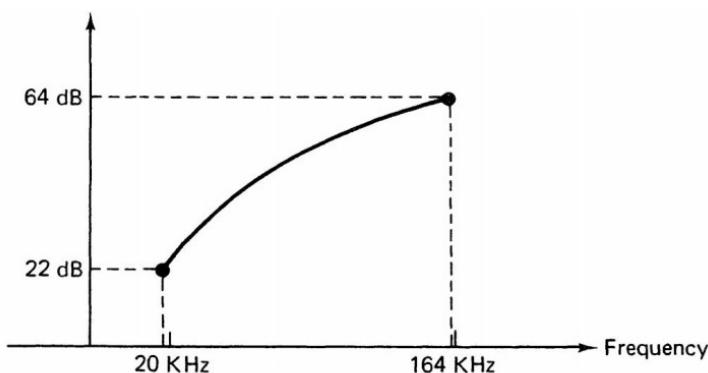
Para ilustrar algunos usos de algunos de estos filtros, consideremos los dos ejemplos siguientes:

- Al transmitir una señal de baja frecuencia  $X_0(t)$ , como una señal de voz, a distancia, es imperativo modular esta señal de baja frecuencia con una portadora de señal de alta frecuencia antes de transmitir. Hay varias formas de modular una señal. La Fig. 1-4 es un diagrama esquemático de una modulación de amplitud de doble banda lateral. En el receptor, la señal transmitida  $X_1(t)$  pasa por un mezclador donde la señal transmitida se multiplica por una señal a la frecuencia de modulación. Para recuperar la señal de baja frecuencia deseada  $X_0(t)$ , la señal de salida del mezclador se pasa a través de un filtro de paso bajo con una banda de paso que contiene  $[0, \omega_L]$  y una banda de parada que contiene las frecuencias de  $(2\omega_H - \omega_L)$  a infinito.

**Fig. 1-4** A schematic diagram of a double sideband amplitude modulation.

2. En la comunicación de larga distancia, una línea transporta muchas señales simultáneamente. Esto se logra empleando multiplexación de frecuencia: cada una de las señales de entrada de baja frecuencia se traduce en frecuencia a una frecuencia central diferente, como se muestra en la Fig. 1-5 (a), donde  $\omega_n$  es la frecuencia central de la  $n$ -ésima frecuencia baja. señal de frecuencia. En el extremo receptor, la señal transmitida se alimenta a través de una banda de filtros de paso de banda paralelos a los receptores de mensajes correspondientes, como se muestra en la Figura 1-5 (b).

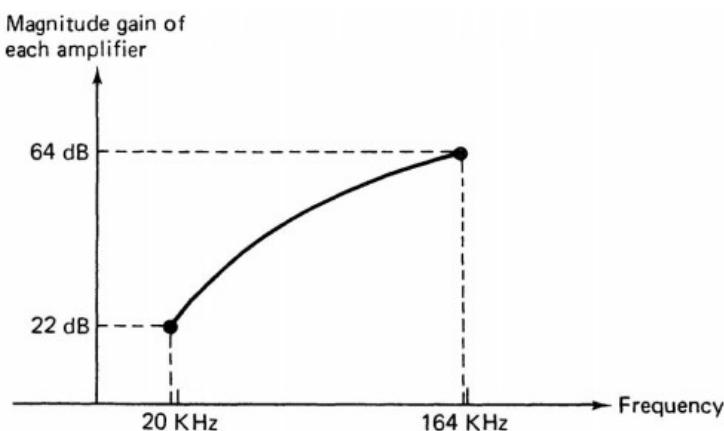
**Fig. 1-5** A schematic diagram for frequency multiplexing.



**Fig. 1-6** An example of a magnitude filter that is not a linear combination of the five basic types of frequency selective filters.

Por supuesto, hay casos en los que ninguno de los cinco tipos básicos de filtros es adecuado. Un caso específico es el siguiente:

Consideré un cable submarino coaxial transatlántico de aproximadamente 2000 millas de largo. La banda de frecuencia utilizada es de 20 KHz a 164 KHz.<sup>5</sup> Esta banda se divide en 36 canales telefónicos, cada uno con un ancho de banda de 4 KHz. Debido a la pérdida de cobre y eléctrica en el cable, las señales se atenúan. Para el canal de frecuencia más alta, la pérdida de cable en la distancia de 2000 millas es de aproximadamente 3200 dB.<sup>6</sup> Para el canal de frecuencia más baja, la pérdida en la misma distancia es de aproximadamente 1100 dB. En otras palabras, si asumimos que la señal de entrada tiene un nivel de amplitud de 1 voltio, entonces al final del cable de 2000 millas, el canal más alto tendrá un nivel de amplitud de voltaje de  $10^{-160}$  voltios y el nivel de señal del canal más bajo estará en  $10^{-55}$  voltios. Claramente, se necesita amplificación. Como consecuencia, los repetidores amplificadores están ubicados a intervalos de 40 millas a lo largo del cable. Esto significa que cada amplificador debe suministrar una ganancia de 22 dB al canal más bajo pero de 64 dB al canal más alto y en algún punto intermedio a los canales intermedios. Cada amplificador tendrá una curva de respuesta de frecuencia similar a la que se muestra en la Fig. 1-6.



**Fig. 1-6** An example of a magnitude filter that is not a linear combination of the five basic types of frequency selective filters.

5 Para reducir los costos de las comunicaciones de larga distancia, es conveniente transportar tantos canales por línea como sea posible. Pero debido a que las pérdidas de amplitud de la señal son mayores a frecuencias más altas, existe un límite en la cantidad de canales que puede transportar una línea. Por la misma razón, aunque la variable de frecuencia  $\omega$  puede tomar cualquier valor entre 0 y  $\infty$ , existe una banda limitada (asignada a cada estación por la FCC) que se puede utilizar para transmisiones de radio y televisión. Más allá de un cierto límite de frecuencia, la transmisión de señales es muy poco práctica.

6 Magnitud de perdidas en  $dB = -20 \log |H(j\omega)| = -10 \log |H(j\omega)|^2$ . Magnitud de ganancia en  $dB = -20 \log |H(j\omega)| = 10 \log |H(j\omega)|^2$ .

## 1-2 Funciones de retardo de fase y grupo

Hasta ahora, solo hemos considerado la parte de magnitud de la función de respuesta de frecuencia de un filtro; examinemos ahora la otra parte que caracteriza a un filtro, a saber, su ángulo de fase  $\phi(\omega)$ , o de manera equivalente, su función de retardo de grupo  $\tau(\omega)$  definida por<sup>7</sup>

$$\phi(\omega) \triangleq -\angle H(j\omega) \quad (1-11)$$

$$\tau(\omega) \triangleq \frac{d}{d\omega} \phi(\omega) = -\frac{d}{d\omega} \angle H(j\omega) \quad (1-12)$$

Para comprender la implicación física del ángulo de fase o la función de retardo de grupo de un filtro, estudiemos los dos casos siguientes:

Considere primero un filtro con una especificación

$$\begin{aligned} H_1(j\omega) &= 1 \quad \text{for } -\omega_c \leq \omega \leq \omega_c \\ &= 0 \quad \text{otherwise} \end{aligned} \quad (1-13)$$

es decir, un filtro con un ángulo de fase cero y, en consecuencia, un retardo de grupo cero para todo el  $\omega$ . La respuesta al impulso viene dada por

$$\begin{aligned} h_1(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_1(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{\pi t} \frac{1}{2j} [\exp(j\omega_c t) - \exp(-j\omega_c t)] \\ &= \frac{1}{\pi t} \sin \omega_c t = \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin \omega_c t}{\omega_c t} \end{aligned} \quad (1-14)$$

Ahora considere el segundo filtro caracterizado por

$$\begin{aligned} H_2(j\omega) &= 1 \exp\left[-j\frac{k\pi\omega}{2\omega_c}\right] \quad \text{for } -\omega_c \leq \omega \leq \omega_c \\ &= 0 \quad \text{otherwise} \end{aligned} \quad (1-15)$$

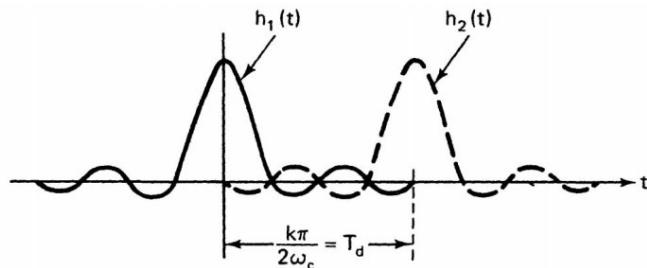
Este filtro se diferencia del último solo por el ángulo de desfase en la banda de paso.

La respuesta al impulso viene dada por

$$h_2(t) = \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin\left(\omega_c t - \frac{k\pi}{2}\right)}{\omega_c t - \frac{k\pi}{2}} \quad (1-16)$$

Comparando (1-14) y (1-16), vemos que el último filtro tiene un retardo de tiempo de  $(k\pi)/(2\omega_c)$  con respecto al anterior, como se indica en la Figura 1-7.

<sup>7</sup> En general, por ángulo de fase, nos referimos al ángulo de retardo de fase  $\phi(\omega)$ .  $\angle H(j\omega)$  se llama ángulo de avance de fase.



**Fig. 1-7** An example illustrating the effect of group delay.

Observe que el retraso de grupo del segundo filtro,

$$\tau(\omega) = \frac{d}{d\omega} \left( \frac{k\pi\omega}{2\omega_c} \right) = \frac{k\pi}{2\omega_c} = T_d \quad (1-17)$$

es igual al retraso de tiempo en su respuesta al impulso.

Una comparación de las respuestas al impulso de estos dos filtros indica que existe una relación directa entre el retraso de grupo del filtro [de manera equivalente, el ángulo de retraso de fase] y el retraso de tiempo de su respuesta al impulso. De hecho, (1-17) se cumple en todos los casos.

Para ser más precisos, consideremos un filtro caracterizado por una función de transferencia

$$H(s) = K e^{-st_o} \quad (1-18)$$

Por lo tanto, la función de retraso de grupo del filtro es

$$\tau(\omega) = -\frac{d}{d\omega}(-\omega t_o) = t_o \quad (1-19)$$

Si excitamos este filtro con una entrada

$$x(t) = u(t - T_o) \quad (1-20)$$

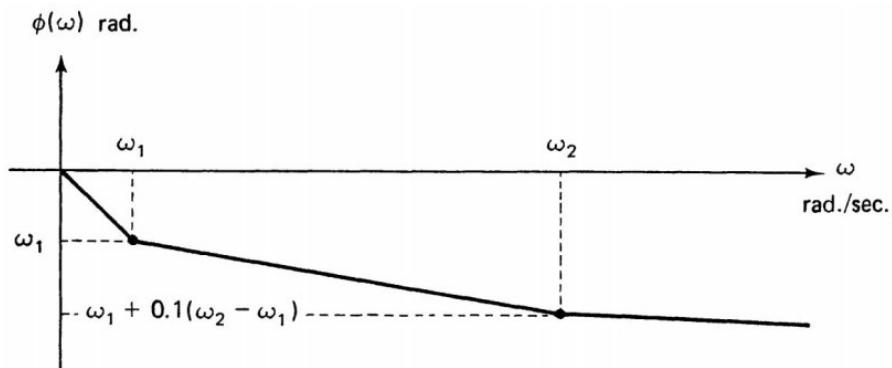
donde  $u(t)$  representa la función de paso unitario, entonces la salida  $y(t)$  estará dada por

$$y(t) = K u(t - (t_o + T_o)) \quad (1-21)$$

Esto implica que el **retardo de grupo de un filtro es esencialmente igual a  $t_{out} - t_{in}$** , donde  $t_{in}$  es el momento en que la entrada alcanza su valor de estado estable y el  $t_{out}$  el momento en que la salida se establece en su estado de estado estable.

Si la determinación del momento en que la señal entra en el filtro es de gran importancia en aplicaciones como los sistemas de radar, se requiere que los filtros involucrados en el procesamiento de las señales de retorno tengan un ángulo de fase lo más lineal posible o, de manera equivalente, una función de retraso de grupo lo más cercana a una constante como sea posible. Tenga en cuenta que una pequeña desviación de un ángulo de fase lineal distorsionará la respuesta al impulso de muchas formas y, por lo tanto, introducirá un error en la estimación del tiempo de las señales que llegan.

El procesamiento del habla es otra área en la que los filtros de fase lineal encuentran aplicaciones. Considere el caso en el que una señal de voz pasa a través de un filtro que tiene una característica de fase que se muestra en la Figura 1-8. En este caso, los componentes de alta frecuencia de la señal de voz pasarán por el filtro antes que los componentes de baja frecuencia. En consecuencia, la salida será una versión muy distorsionada de la entrada. Claramente, esto no es deseable en muchas aplicaciones de procesamiento de voz.



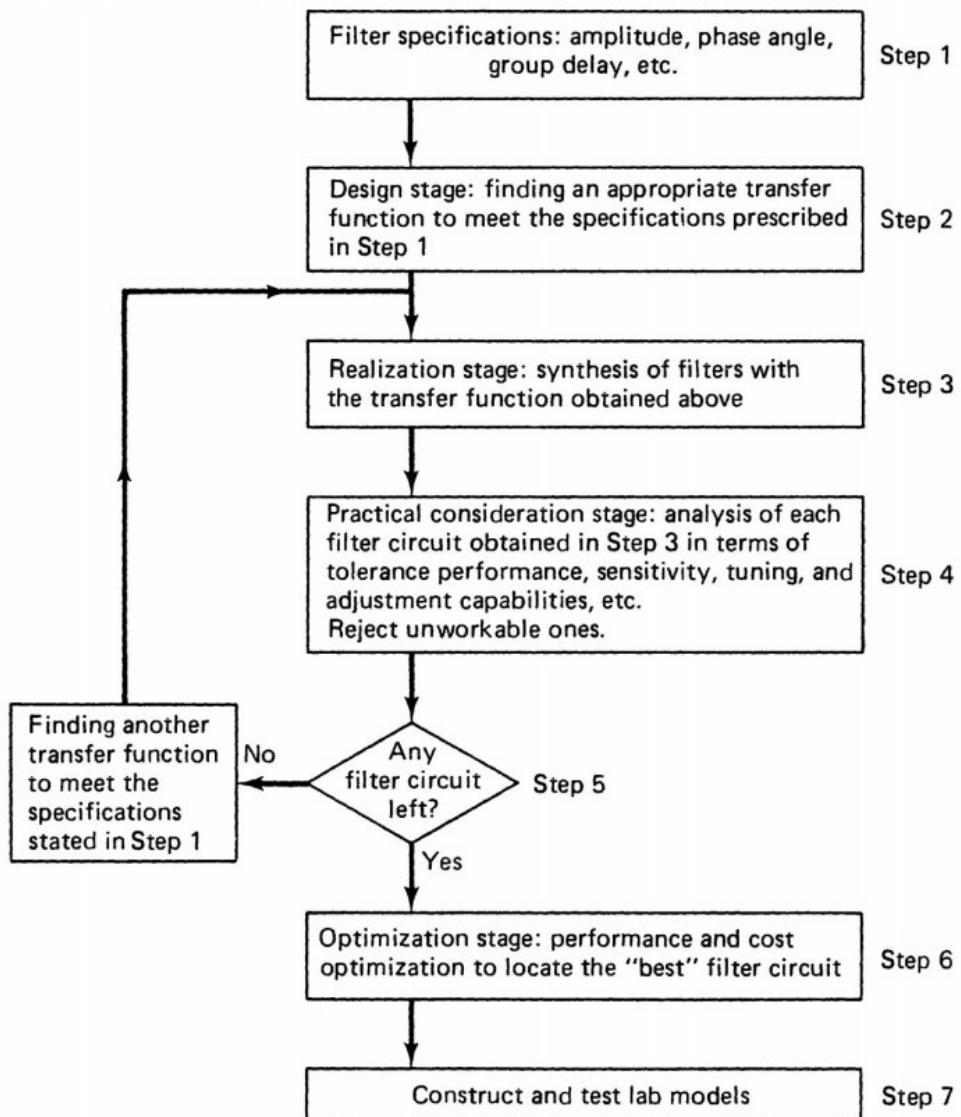
**Fig. 1-8** An example illustrating the effect of a nonlinear phase filter.

Es bien sabido que los filtros analógicos agrupados (lumped) no pueden tener una fase lineal perfecta en todo el eje  $\omega$ .<sup>8</sup> Por lo tanto, cuando se requiere un filtro de fase lineal, se debe determinar el rango de frecuencia de aplicación y luego diseñar un filtro que tenga una característica de fase lineal sobre la banda de frecuencia de interés.

<sup>8</sup> Los filtros digitales de respuesta de impulso finito se pueden diseñar para que tengan una característica de fase lineal en todas las frecuencias.

### 1-3 Procedimiento de diseño

Una vez que se especifican la amplitud y el ángulo de fase o el retardo de grupo de un filtro, el filtro está completamente caracterizado. Se puede utilizar un procedimiento de diseño como el que se muestra en la Fig. 1-9 para realizar un filtro práctico que cumpla con los requisitos de procesamiento de señales prescritos.



**Fig. 1-9 A design procedure.**

En la Fig. 1-9, el Paso 1 contiene las especificaciones de los filtros deseados. Puede contener especificaciones de amplitud en bandas de paso y bandas de parada, anchos de banda de transición, ángulo de fase o especificaciones de retardo de grupo y otras características deseables como nivel de impedancia de entrada, nivel de impedancia de salida, nivel de señal, tamaño, peso y costo.

El Paso 2 especifica la tarea de encontrar una función de transferencia adecuada para cumplir con las especificaciones del filtro como se indica en el Paso 1.

La elección estará influenciada por el rango de frecuencia de operación, la sensibilidad de los ceros y polos, los niveles de impedancia, etc.

El Paso 3 trata de las realizaciones del circuito de la función de transferencia obtenida en el Paso 2.

Dado que ningún componente eléctrico es ideal, los filtros obtenidos en el Paso 3 deberán pasar por

estudios de tolerancia para determinar su validez en la práctica, como se indica en el Paso 4. Si ninguno de los circuitos obtenidos en el Paso 3 es satisfactorio, entonces podemos volver al Paso 2, o podemos bajar nuestro estándar de rendimiento y comenzar el Paso 4 de nuevo.

Si quedan circuitos después del Paso 4, se utilizará un procedimiento de optimización de costos y rendimiento para determinar el "mejor" circuito, como se muestra en el Paso 6. Una vez hecho esto, se puede construir y probar un modelo de laboratorio real para que sirva como prototipo para una mayor investigación.

En este libro, consideraremos principalmente las tareas incluidas en los Pasos 2, 3 y 4.

### **Referencias y lecturas adicionales**

- [1] Kuh, E. S., and Pederson , D. O. Principles of Circuit Synthesis. New York: McGraw-Hill, 1959.
- [2] Weinberg, L. Network Analysis and Synthesis. Huntington, N.Y.: R. E. Krieger, 1975.
- [3] Humphreys, D. S. The Analysis, Design, and Synthesis of Electrical Filters. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1970.
- [4] Temes, G. C., and Mitra , S. K. Modern Filter Theory and Design. New York: Wiley-Interscience, 1973.
- [5] Stover, W. A. Circuit Design for Audio, AMIFM and TV. New York: McGraw-Hill, 1967.

**Problemas**

1-1. Para cada uno de los siguientes  $H(j\omega)$ , encuentre el  $\text{Re}[H(j\omega)]$  correspondiente,  $\text{Im}[H(j\omega)]$ ,  $|H(j\omega)|$ ,  $\angle H(j\omega)$ ,  $\phi(\omega)$ , y  $\tau(\omega)$

$$(a) H(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$H(s) = \frac{1}{s+1} \Big|_{s=j\omega} = \frac{1}{j\omega + 1} = \frac{1}{1+j\omega} \cdot \frac{1-j\omega}{1-j\omega} = \frac{1-j\omega}{1+\omega^2}$$

$$\text{Re}\{H(j\omega)\} = \frac{1}{1+\omega^2}$$

$$\text{Im}\{H(j\omega)\} = \frac{-\omega}{1+\omega^2}$$

$$\angle H(j\omega) = \tan^{-1} \frac{-\omega}{1+\omega^2} = -\tan^{-1}(\omega)$$

$$\phi(\omega) = -\tan^{-1}(\omega)$$

$$\frac{d \tan^{-1} f(x)}{dx} = \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}$$

$$\tau = \frac{d}{d\omega} \tan^{-1}(\omega) = \frac{1}{1+\omega^2}$$

$$(b) H(s) = \frac{2}{s+1}$$

$$(d) H(s) = \frac{s}{s^2 + s + 1}$$

$$(e) H(s) = \frac{s^2}{s^2 + s + 1}$$

$$(c) H(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

$$(f) H(s) = \frac{3}{s^2 + 3s + 3}$$

$$(g) H(s) = \frac{3s}{s^2 + 3s + 3}$$

$$(h) H(s) = \frac{s^2}{s^2 + 3s + 3}$$

$$(i) H(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$$

$$(j) H(s) = \frac{\sqrt{2}s}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$$

$$(k) H(s) = \frac{s^2}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$$

1-2. Dibuje las funciones de magnitud de los siguientes  $H(s)$  .

(a)  $H(s) = \frac{1}{s+1}$

(b)  $H(s) = \frac{s}{s+1}$

(c)  $H(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$

(d)  $H(s) = \frac{s}{s^2 + s + 1}$

(e)  $H(s) = \frac{s^2}{s^2 + s + 1}$

1-3. Dibuje las funciones de retardo de grupo y fase de los siguientes  $H(s)$  .

(a)  $H(s) = \frac{1}{s+1}$

(b)  $H(s) = \frac{s}{s+1}$

(c)  $H(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 3}$

(d)  $H(s) = \frac{s}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$

(e)  $H(s) = \frac{s^2}{s^2 + s + 1}$

1-4. Demuestra que las siguientes afirmaciones son verdaderas.

(a)  $\operatorname{Re}[H(j\omega)] = \operatorname{Re}[H(-j\omega)]$

(b)  $\operatorname{Im}[H(j\omega)] = -\operatorname{Im}[H(-j\omega)]$

(c)  $|H(j\omega)| = |H(-j\omega)|$

(d)  $\underline{|H(j\omega)}| = -\underline{|H(-j\omega)}|$

(e)  $\phi(\omega) = -\phi(-\omega)$

(f)  $\tau(\omega) = \tau(-\omega)$

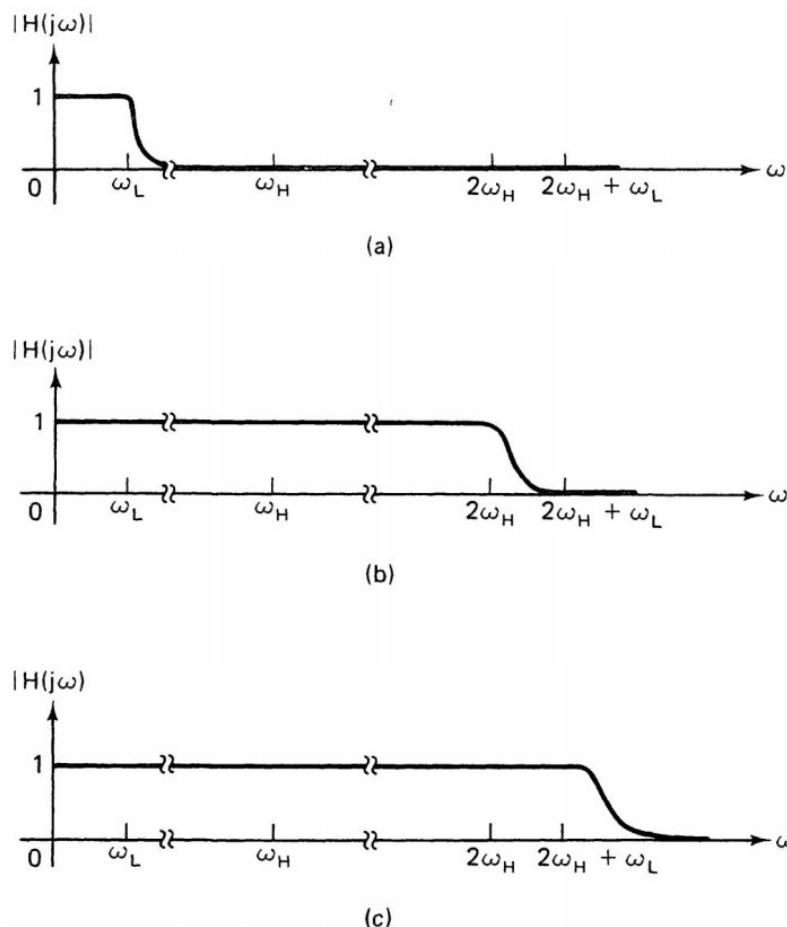
1-5. Considere el sistema que se muestra en la Fig.1-4. Si la función de magnitud del filtro de paso bajo está dada por

(a) Fig. P1-5(a)

(b) Fig. P1-5(b)

(c) Fig. P1-5(c)

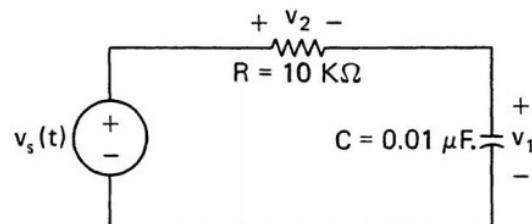
encuentre el  $x_3(t)$  correspondiente.



**Fig. P1-5**

1-6. Para el circuito que se muestra en la figura P1-6, encuentre las soluciones de estado estacionario  $v_1(t)$  y  $v_2(t)$  cuando

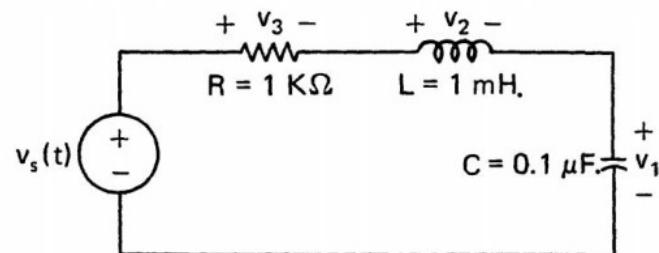
- $v_s(t) = \cos 10^3 t$
- $v_s(t) = \cos 10^6 t$
- Con base en los resultados de (a) y (b), ¿qué tipo de filtro es  $V_1/V_s$ ?  $V_2/V_s$ ?



**Fig. P1-6**

1-7. Para el circuito que se muestra en la figura PI-7, encuentre las soluciones de estado estacionario  $v_1(t)$ ,  $v_2(t)$  y  $v_3(t)$  cuando

- $v_s(t) = \cos 100t$
- $v_s(t) = \cos 10^5 t$



**Fig. P1-7**

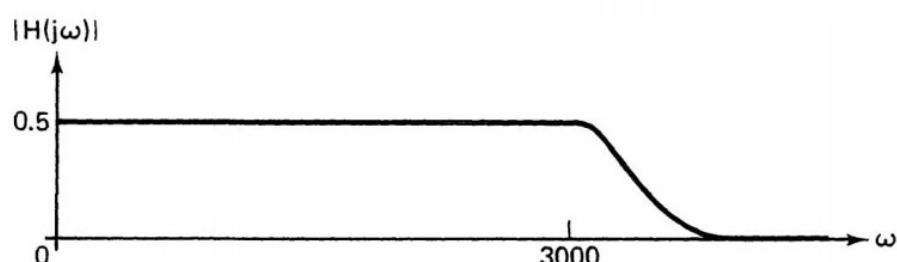
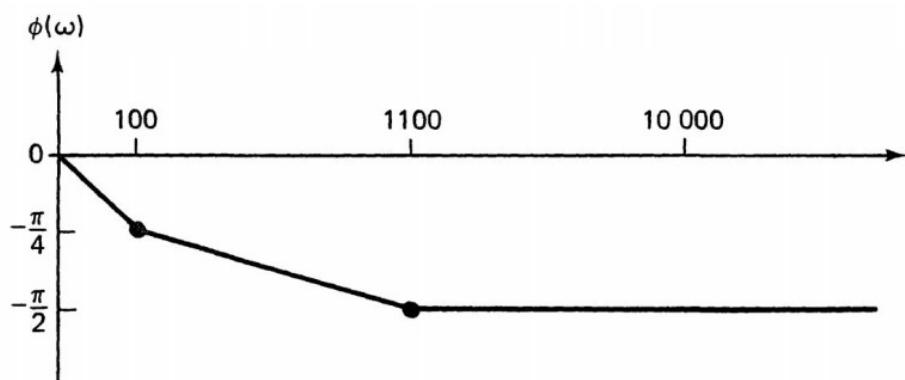
- (c)  $v_s(t) = \cos 10^8 t$
- (d) Con base en los resultados de (a), (b) y (c), ¿qué tipo de filtro es  $V_1/V_s$ ?  $V_2/V_s$ ?  $V_3/V_s$ ?
- (e) Encuentre las funciones de transferencia

$$H_i(s) \triangleq \frac{V_i}{V_s}$$

donde  $i=1,2,3$

- f) Dibuje las funciones de magnitud  $|H_i(s)|$  para  $i = 1, 2, 3$ .
- (g) Dibuje las funciones de fase ( $\phi_i(\omega)$ ) de  $H_i(s)$  para  $z = 1, 2, 3$ .

1-8. Considere un filtro F cuyas características de frecuencia se muestran en la figura PI-8.



**Fig. P1-8**

Si la entrada  $x(t)$  al filtro  $F$  está dada por

$$x(t) = \cos 60t + 10 \cos 600t + \cos 3000t$$

encuentre la salida de estado estacionario  $y(t)$ .

## 2. Construcción de bloques.

Un *puerto*, como se muestra en la Fig. 2-1 (a), es un par de terminales con la condición de que la corriente instantánea que ingresa a una terminal siempre será igual a la corriente instantánea que sale de la otra terminal del puerto. Es decir,  $i_{in}(t)=i_{out}(t)$  para todo  $t$ . Las direcciones de referencia de un dispositivo de un puerto y de un dispositivo de dos puertos se muestran en las Figs. 2-1 (b) y (c), respectivamente.

Tenga en cuenta que un dispositivo de tres terminales puede considerarse como dispositivo de dos puertos, como se muestra en las Figs. 2-1 (d) y (e) pero no a la inversa.

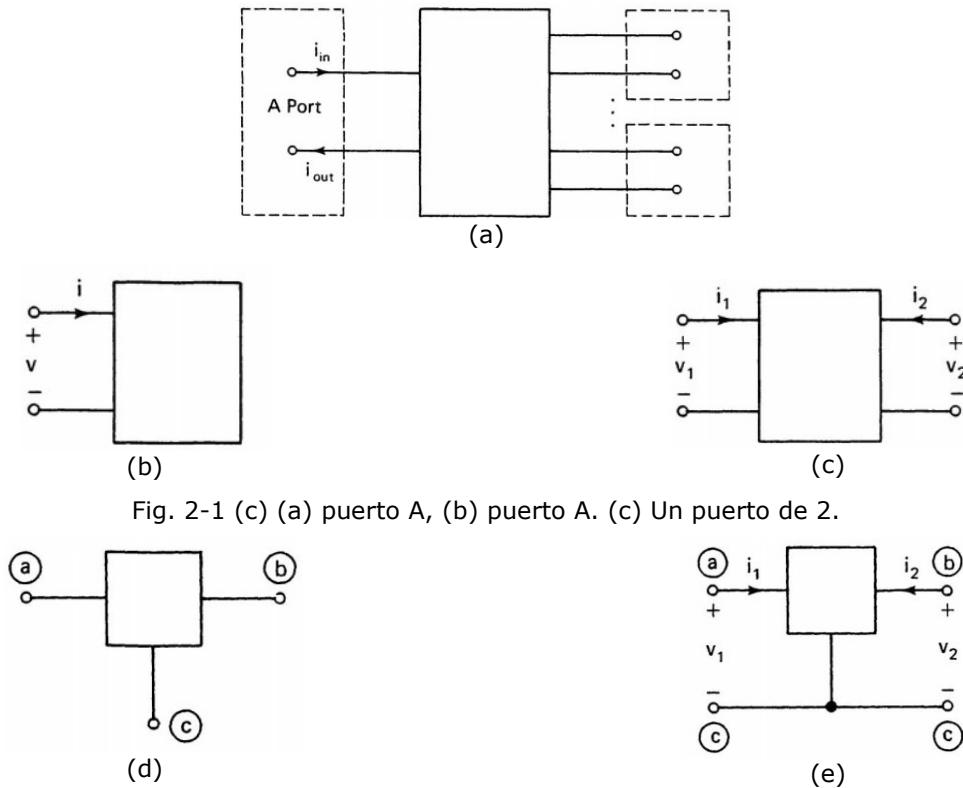


Fig. 2-1 (c) (a) puerto A, (b) puerto A. (c) Un puerto de 2.

Fig. 2-1 (d) Un elemento de 3 terminales, (e) Un elemento de 3 terminales considerado como un dispositivo de dos puertos.

## 2-1 Representación

En este libro, consideramos solo elementos lineales, concentrados(lumped) e invariantes en el tiempo.

Además, asumimos que todos los dispositivos de un puerto y de dos puertos no contienen fuentes internas independientes y que todas las condiciones iniciales son cero. Por lo tanto, un elemento de un puerto puede estar representado por  $V=ZI$ , donde  $Z$  se llama impedancia del dispositivo de un puerto, o por  $I=YV$ , donde  $Y$  se llama admitancia del dispositivo de un puerto.<sup>9</sup> Claramente,  $Y=1/Z$  y  $Z=1/Y$ . En el caso de un dispositivo de dos puertos, la cuestión de la representación se vuelve más complicada. Básicamente, existen seis representaciones básicas para los dispositivos dos puertos regulares.<sup>10</sup> Son:

(a) Representación de impedancia

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad \text{o} \quad V=ZI \quad (2-1)$$

(b) Representación en admitancia

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad \text{o} \quad I=YV \quad (2-2)$$

(c) y (d) Representaciones híbridas

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad (2-3)$$

y

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{h}_{11} & \hat{h}_{12} \\ \hat{h}_{21} & \hat{h}_{22} \end{bmatrix} = \hat{H} \begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (2-4)$$

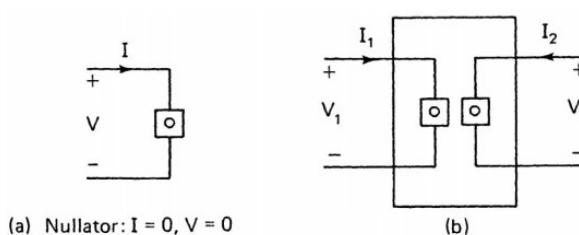
(e) y (f) Representaciones de transmisión o cadena

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \quad (2-5)$$

y

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \hat{C} \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} \quad (2-6)$$

<sup>9</sup> Hay algunos elementos de un puerto-1 que no se pueden representar mediante  $V=ZI$  or  $I=YV$ . Un ejemplo de dicho elemento es un anulador, que se muestra en la Fig. 2-2 (a), que se caracteriza por  $V=0$  e  $I=0$ .



**Fig. 2-2** (a) An example of a nonregular 1-port. (b) An example of a nonregular 2-port.

<sup>10</sup> Hay casos degenerados en los que un dispositivo de dos puertos no puede ser representado por una matriz 2x2 relacionando las variables terminales  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $I_1$ , y  $I_2$ . Un ejemplo de ello es un puerto de un puerto-2 que contiene dos nuladores, como se muestra en la Fig. 2-2 (b). Este puerto 2 se caracteriza por cuatro ecuaciones:  $V_1=0$ ,  $V_2=0$ , y  $I_1=0$  e  $I_2=0$ .

Claramente,  $Z=Y^{-1}$  ,  $Y=Z^{-1}$  ,  $H=\hat{H}^{-1}$  ,  $\hat{H}=H^{-1}$  ,  $C=\hat{C}^{-1}$  y  $\hat{C}=C^{-1}$  .

Se dice que un dispositivo de dos puertos es recíproco si  $z_{12}=z_{21}$  o  $y_{12}=y_{21}$  . Todos los dispositivos un puerto son elementos recíprocos por definición. Un multipuerto resultante de una interconexión de elementos recíprocos es recíproco. Para los dispositivos de tres puertos, hay más variaciones en sus representaciones.

Debido a que consideramos principalmente dispositivos de un puerto y dos puerto con la única excepción de los amplificadores operacionales (que son, estrictamente hablando, dispositivos de tres puerto), no consideramos el problema de las representaciones de elementos de tres puertos.

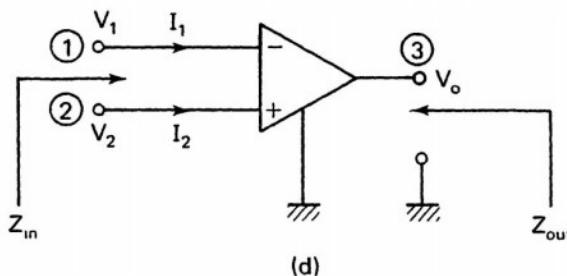
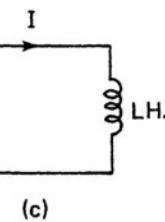
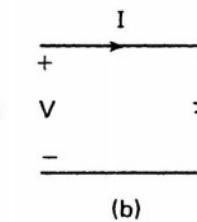
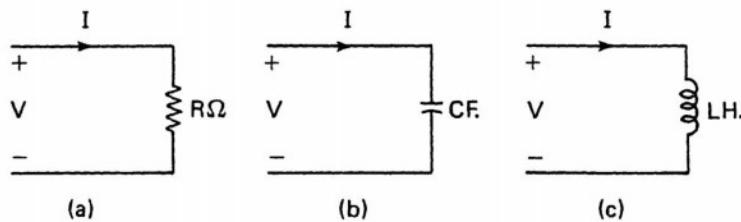
## 2-2 Componentes del circuito

Debido a que los elementos involucrados son lineales, agrupados e invariantes en el tiempo, los filtros construidos como resultado de una interconexión de estos elementos se denominan filtros lineales, agrupados e invariantes en el tiempo. (Por conveniencia, de aquí en adelante omitimos los adjetivos "lineal", "agrupado" e "invariante en el tiempo" al describir un elemento o circuito). Los componentes utilizados para construir este tipo de filtros se pueden clasificar en dos categorías amplias: bloques de construcción básicos y bloques de construcción secundarios. Esta clasificación se basa en la observación de que todos los elementos de la categoría de bloques de construcción secundarios pueden realizarse interconectando elementos en la categoría de bloques de construcción básicos. Claramente, los bloques de construcción secundarios no son fundamentales; sin embargo, son útiles como herramienta conceptual.

### 2-2-1. Bloques de construcción básicos

En esta categoría, tenemos

**1. Resistencias.** Un resistor, que se muestra en la Fig. 2-3 (a), se caracteriza por una relación  $V=RI$  o  $I=G \cdot V$ , donde  $G=1/R$ .



**Fig. 2-3 Basic building blocks.** (a) A resistor. (b) A capacitor. (c) An inductor. (d) An operational amplifier.

**2. Condensadores.** Un condensador, que se muestra en la Fig. 2-3 (b), se caracteriza por una relación  $I=s \cdot C \cdot V$  o  $V=\frac{1}{s \cdot C} \cdot I$ .

**3. Inductores.** Un inductor, que se muestra en la Fig. 2-3 (c), se caracteriza por una relación  $V=sLI$  o  $I=\frac{1}{sL}V$ .

**4. Amplificadores operacionales (Op. Amp.).** Un amplificador operacional, mostrado en la Fig. 2-3 (d), es caracterizado por

(a) impedancia de entrada  $Z_{in}=\infty$

(b) impedancia de salida  $Z_{out}=0$

(c)  $V_o=A(V_2-V_1)$  con  $A \rightarrow \infty$

donde  $V_1$ ,  $V_2$  y  $V_o$  son los voltajes entre el nodo 1 y tierra, el nodo 2 y tierra, y el nodo 3 y tierra, respectivamente. Este dispositivo de 3 puertos se puede representar mediante

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ V_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -A & A & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ I_o \end{bmatrix} \quad (2-7)$$

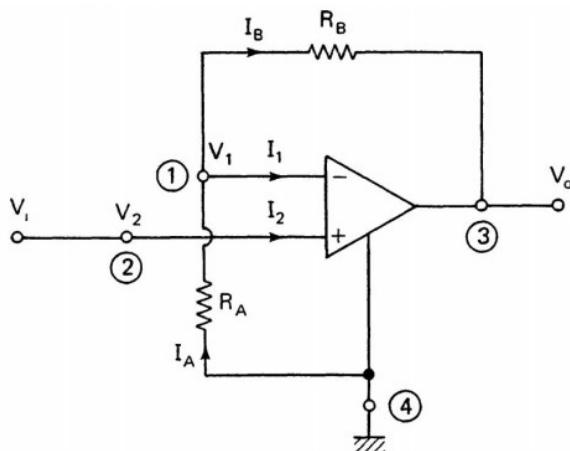
donde  $A \rightarrow \infty$ . Normalmente, el op. amp. la conexión a tierra no se muestra pero se entiende que está presente.

Antes de continuar, debe enfatizarse que estos bloques de construcción básicos son solo elementos ideales; son de tipo lápiz y papel y no del tipo del mundo físico real. En general, el rendimiento eléctrico de un elemento físico real puede modelarse con un grado suficiente de precisión mediante una combinación de estos elementos ideales. Por ejemplo, un inductor real, en la mayoría de los casos, puede modelarse adecuadamente mediante una combinación en serie de un resistor ideal y un inductor ideal. De hecho, los rendimientos de muchos componentes no se desvían significativamente de sus características ideales, particularmente cuando están diseñados para funcionar dentro de sus rangos operativos especificados. Otro punto a tener en cuenta es que una operación física. amperio. puede tener características descritas de cerca por las ideales especificadas anteriormente, siempre que esté polarizado adecuadamente, compensado en fase y compensado con precisión, y si se opera en los rangos de baja frecuencia con su nivel de voltaje de salida dentro de  $\pm E$  voltios, donde  $E$  es generalmente unos pocos voltios, dependiendo de las fuentes de alimentación.

Para proporcionar algunos atajos en los cálculos de circuitos con op. amp., recordamos que  $I_1=I_2=0$ , lo que significa que ninguna corriente entrará nunca en los terminales de entrada del op. amperio. Además, invocamos el principio de cortocircuito virtual, que establece:

*El principio de cortocircuito virtual:*<sup>11</sup> Si los terminales de entrada a través de los nodos 1 y 2 de un op. amp. no están conectados directamente a través de los terminales de una fuente de voltaje dependiente o controlada, entonces  $V_1=V_2$ .

Para ver cómo ayuda este principio en el cálculo, analizamos el circuito de la Fig. 2-4 de dos formas: una con invocar el principio de cortocircuito virtual y otra sin invocar el principio de cortocircuito virtual.



**Fig. 2-4** An example illustrating the use of the principle of virtual short circuit.

Hallaremos ahora la relación entre  $V_o$  y  $V_i$  sin invocar el principio de cortocircuito virtual. Como  $I_1=I_2=0$ , una ecuación de nodo en el nodo 1 da

<sup>11</sup> El principio de cortocircuito virtual es válido bajo el supuesto de que el op. amperio. está funcionando en modo lineal.

$$I_A = I_B \quad (2-8)$$

Una ecuación de bucle alrededor de los nodos 3413 da

$$R_B I_B + R_A I_A + V_o = 0 \quad (2-9)$$

Otra ecuación de bucle alrededor de los nodos 414 da

$$V_1 + R_A I_A = 0 \quad (2-10)$$

Además, op. amp. las características dan

$$V_o = A(V_2 - V_1) \quad \text{con} \quad A \rightarrow \infty \quad (2-11)$$

Para encontrar la relación entre  $V_i = V_2$  y  $V_o$ , intentamos eliminar todas las demás variables en (2-8) a (2-11). Las ecuaciones (2-8) y (2-10) implican que

$$I_A = I_B = -\frac{V_1}{R_A} \quad (2-12)$$

Sustituyendo (2-12) en (2-9) y (2-11), obtenemos

$$V_o = \frac{R_A + R_B}{R_A} V_1 = A(V_2 - V_1) \quad (2-13)$$

que se puede escribir como

$$\left( A + \frac{R_A + R_B}{R_A} \right) V_1 = A V_2$$

o

$$V_1 = \frac{A}{A + [(R_A + R_B)/R_A]} V_2 \quad (2-14)$$

Sustituyendo (2-14) en la primera mitad de (2-13), tenemos

$$V_o = \frac{R_A + R_B}{R_A} \left( \frac{A}{A + [(R_A + R_B)/R_A]} \right) V_2$$

Como  $A \rightarrow \infty$ , obtenemos

$$V_o = \frac{R_A + R_B}{R_A} V_2$$

o

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{R_A + R_B}{R_A} \quad (2-15)$$

Aplicando el principio de cortocircuito virtual y haciendo el cálculo desde cero, vemos que el cálculo es más sencillo:

$$V_1 = V_2 \implies -R_A I_A = V_i \quad \text{or} \quad I_A = -\frac{V_i}{R_A} \quad (2-16)$$

Una ecuación de bucle alrededor de los nodos 3413 y una ecuación de nodo en el nodo 1 dan

$$R_B I_B + R_A I_A + V_o = 0 \quad (2-17)$$

$$I_A = I_B \quad (2-18)$$

Usando (2-16) y (2-18), (2-17) se convierte en

$$V_o = -(R_A + R_B) I_A = \frac{R_A + R_B}{R_A} V_i \quad (2-19)$$

que es el resultado que obtuvimos en (2-15) después de un largo cálculo y un proceso de limitación. Consideraremos los amplificadores operacionales más extensamente más adelante junto con la síntesis de filtro activo en el Capítulo 10.

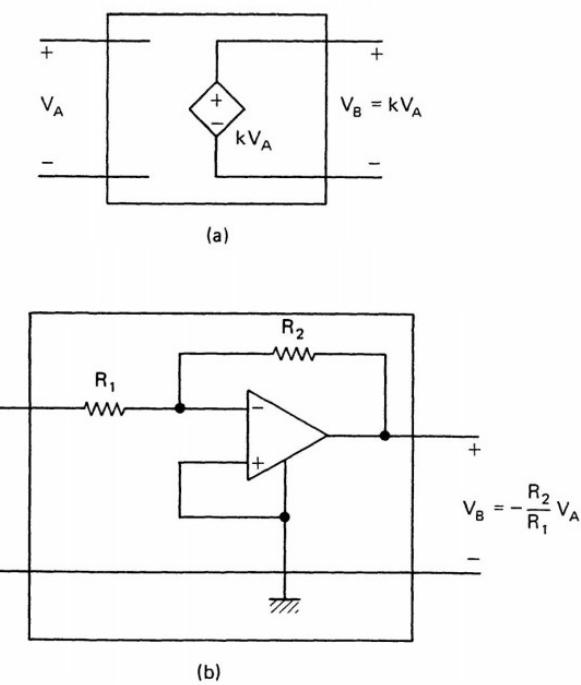
### 2-2-2. Bloques de construcción secundarios

A medida que avanza la tecnología de circuitos integrados, hay cada vez más elementos en esta categoría. Restringimos nuestro estudio a los siguientes ocho elementos.

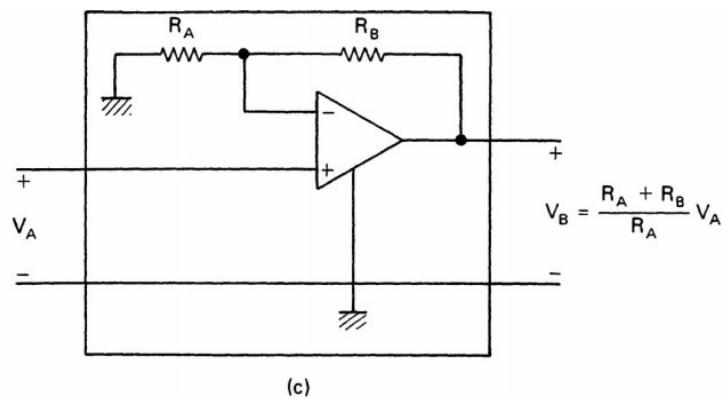
A medida que avanza la tecnología de circuitos integrados, hay cada vez más elementos en esta categoría. Restringimos nuestro estudio a los siguientes ocho elementos.

#### 1. Fuentes controladas.

(a) Una fuente de voltaje controlada por voltaje (VCVS), que se muestra en la Fig. 2-5 (a), es caracterizado por una relación  $V_B = kV_A$ . Dos realizaciones de un VCVS se dan en las Figs. 2-5 (b) y (c).



**Fig. 2-5** Voltage-controlled voltage source. (a) Symbol of a VCVS.  
(b) An inverting VCVS.



**Fig. 2-5** (c) A noninverting VCVS.

(b) Una fuente de corriente controlada por voltaje (VCIS), que se muestra en la Fig. 2-6 (a), se caracteriza por una relación  $I_B = g_c V_A$ . En las Figs 2-6(b) y (c). Se dan dos realizaciones de VCIS

en las Figs. 2-6 (b) y (c). En la Fig. 2-6 (b), generalmente se usa un capacitor para acelerar la respuesta transitoria. Además, las resistencias se ajustan de modo que  $R_1 R_3 = R_2 R_4$  para producir, además de otros efectos, una alta impedancia interna y, por lo tanto, el circuito funcionará más de cerca como una verdadera fuente de corriente. Normalmente,  $R_1$  y  $R_2$  son grandes para generar pequeñas corrientes, y  $R_3$  y  $R_4$  son pequeños para reducir las caídas de voltaje a través de ellos.

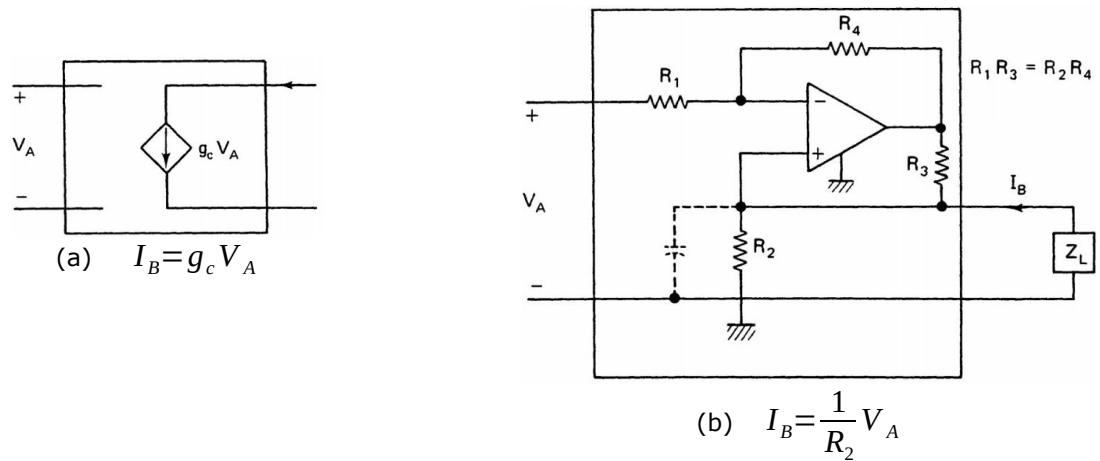


Fig. 2-6 Fuente de corriente controlada por voltaje. (a) El símbolo para un VCIS.  
(b) Un VCIS de carga de tierra (ground-load)

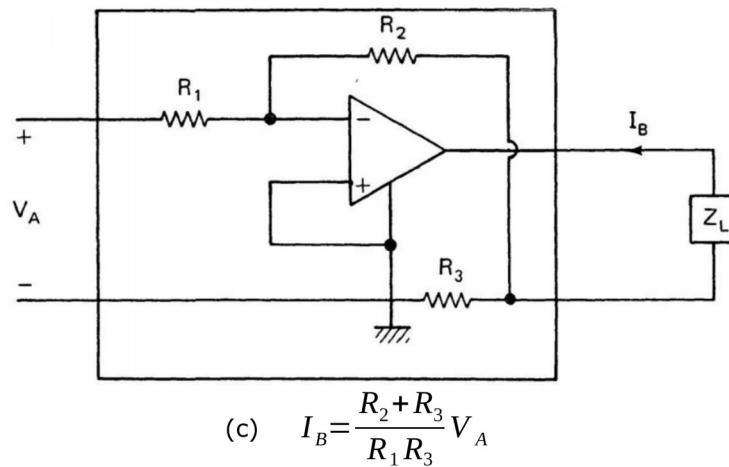
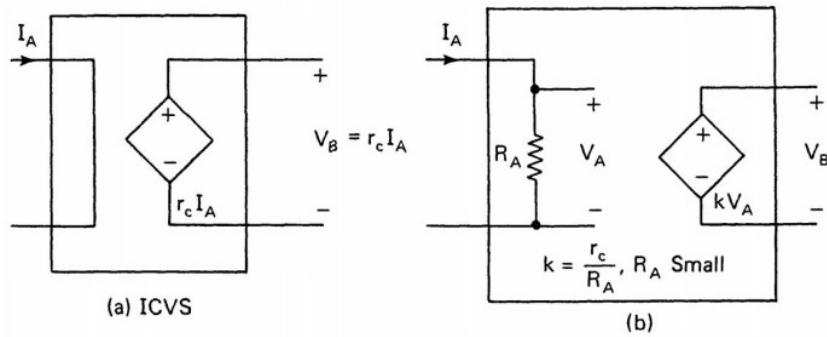


Fig. 2-6 (c) A floating-load VCIS.

c) Una fuente de voltaje controlada por corriente (ICVS), que se muestra en la Fig. 2-7 (a), se caracteriza por una relación  $V_B = r_c I_A$ . Debido a la dificultad de detectar corrientes, se inserta una pequeña resistencia en la rama que lleva la corriente de control  $I_A$  para producir una caída de voltaje  $V_a$ , como se muestra en la Fig. 2-7 (b). El problema de realizar un ICVS se reduce entonces al problema de realizar un VCVS.



**Fig. 2-7** Current-controlled voltage source.

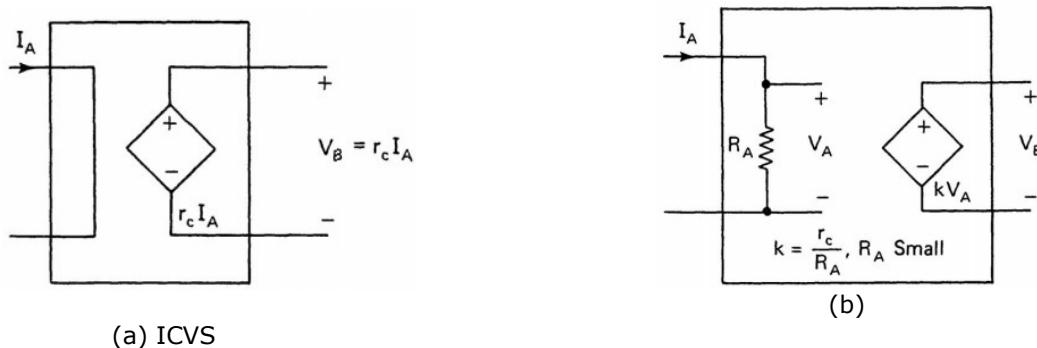
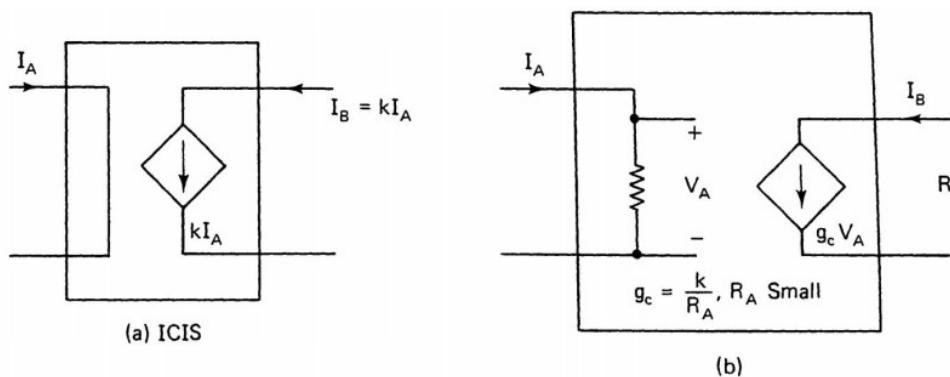


Fig. 2-7 Fuente de tensión controlada por corriente

(d) Una fuente de corriente controlada por corriente (ICIS), que se muestra en la Fig. 2-8 (a), se caracteriza por una relación  $I_B = kI_A$ . La ICIS también se realiza de una manera aproximada como la de ICVS, como se muestra en Fig. 2-8 (b). Tenga en cuenta que los cuatro tipos de fuentes controladas son elementos de 2 puertos no recíprocos. Por lo general, la mitad izquierda o el lado de control de una fuente controlada no se muestra explícitamente en los diagramas de circuitos.



**Fig. 2-8** Current-controlled current source.

**2. Giradores.** Un girador, que se muestra en la Fig. 2-9 (a), es un dispositivo de 2 puertos. Se caracteriza por la siguiente representación de admisión:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & g_1 \\ -g_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad (2-20)$$

Con base en (2-20), se puede realizar un giro mediante dos VCIS, como se muestra en la Fig. 2-9 (b). Una realización de un girador con  $g_1=g_2$  usando op. amp. se muestra en la Fig. 2-9 (c). En la mayoría de los casos de intereses prácticos, tenemos  $q_1=q_2=q$ , y la Fig. 2-9 (a) se simplifica a la

Fig. 2-9 (d).

Para mostrar que la Fig. 2-9 (c) es un girador, usamos el principio de cortocircuito virtual, que da

$$I_C = \frac{V_1}{R} \quad (2-21)$$

Escribir ecuaciones de bucle alrededor de 32G3, 31G3, G543G, 6G346 y 6G56 dan

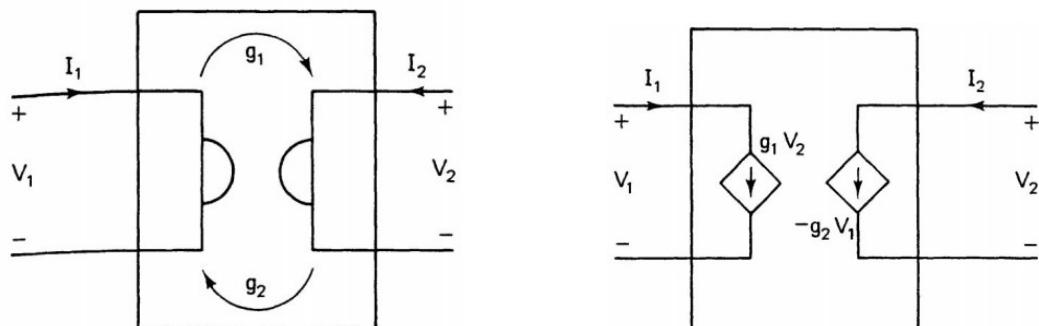
$$V_D = 2RI_C = 2V_1 \quad (2-22)$$

$$V_D = -RI_B + V_1 \implies -I_B = \frac{V_1}{R} \quad (2-23)$$

$$-V_2 - RI_D + V_D = 0 \implies I_D = \frac{-V_2 + 2V_1}{R} \quad (2-24)$$

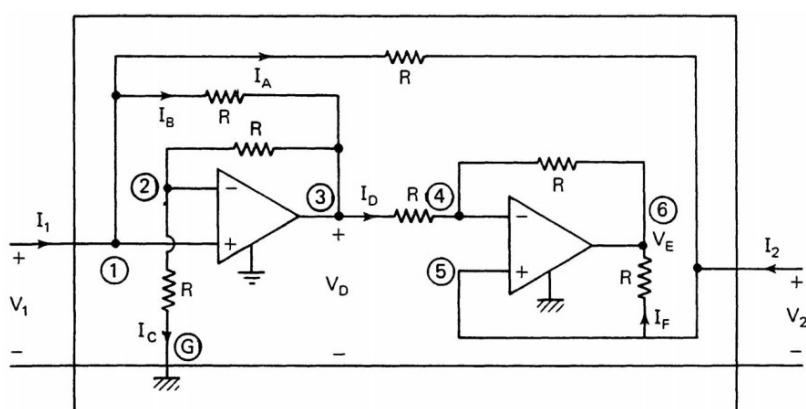
$$V_E - V_D + 2I_D R = 0 \implies V_E + 2I_D R = 2V_1 \quad (2-25)$$

$$V_E - V_2 + RI_F = 0 \quad (2-26)$$



(a)

(b)



(c) Realización de Circuito de un girador con  $|g_1|=|g_2|=\frac{1}{R}$

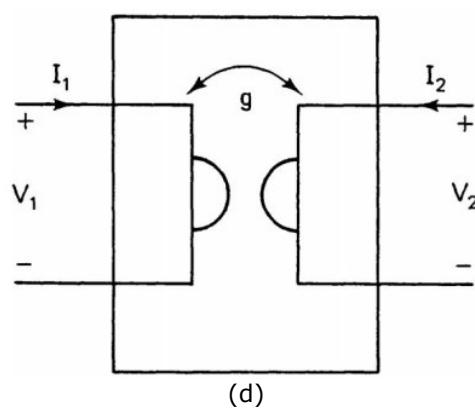


Fig. 2-9 Giradores, (a) Símbolo de un girador, (b) Un girador realizado por dos VCIS. (c) Un girador realizado por op. amperios, (d) Símbolo para un girador con una conductancia de giro  $g$ .

Sustituyendo (2-24) y (2-26) en (2-25), obtenemos

$$V_2 - RI_F - 2V_2 + 4V_1 = 2V_1 \Rightarrow I_F = \frac{2V_1 - V_2}{R} \quad (2-27)$$

Entre los nodos 1 y 5, tenemos

$$I_A = \frac{V_1 - V_2}{R} \quad (2-28)$$

Con la ayuda de (2-23), (2-27) y (2-28) dan

$$I_1 = I_A + I_B = \frac{V_1}{R} - \frac{V_2}{R} - \frac{V_1}{R} = -\frac{V_2}{R} \quad (2-29)$$

$$I_2 = -I_A + I_F = -\frac{V_1}{R} + \frac{V_2}{R} + \frac{2V_1}{R} - \frac{V_2}{R} = \frac{V_1}{R} \quad (2-30)$$

Es decir

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{R} \\ \frac{1}{R} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad (2-31)$$

que es un girador con  $g = -1/R$ .

Un uso importante de los giradores en el dominio de los filtros activos, como en otros lugares, es la realización de inductores. El circuito que se muestra en la Fig. 2-10 (a) es una realización esquemática de un inductor. El cálculo viene dado por

$$\text{la ecuación del condensador: } I_2 = -sCV_2 \quad (2-32)$$

$$\text{la ecuación del girador: } I_1 = gV_2 \text{ y } I_2 = -gV_1 \quad (2-33)$$

Combinando estas dos ecuaciones, obtenemos

$$-gV_1 = I_2 = -sCV_2 = -sC\left(\frac{1}{g}\right)I_1 \implies Z_{in} = \frac{V_1}{I_1} = s\left(\frac{C}{g^2}\right) \quad (2-34)$$

que es equivalente a un inductor con una inductancia de  $C/g^2$  Henries, como se muestra en la Fig. 2-10 (b).

Debido a que los giradores están conectados a tierra,<sup>12</sup> la figura 2-10 (a) puede realizar inductores conectados a tierra solamente (es decir, un terminal del inductor sintético está conectado a tierra). En la figura 2-10 (c) se muestra una realización típica de un inductor flotante (es decir, ambos terminales del inductor sintético no están conectados directamente a tierra). El análisis es el siguiente:

$$\text{la primera ecuación del girador: } I_1 = gV \text{ y } \hat{I}_1 = -gV_1 \quad (2-35)$$

donde  $V = \hat{V}_1 = \hat{V}_2$

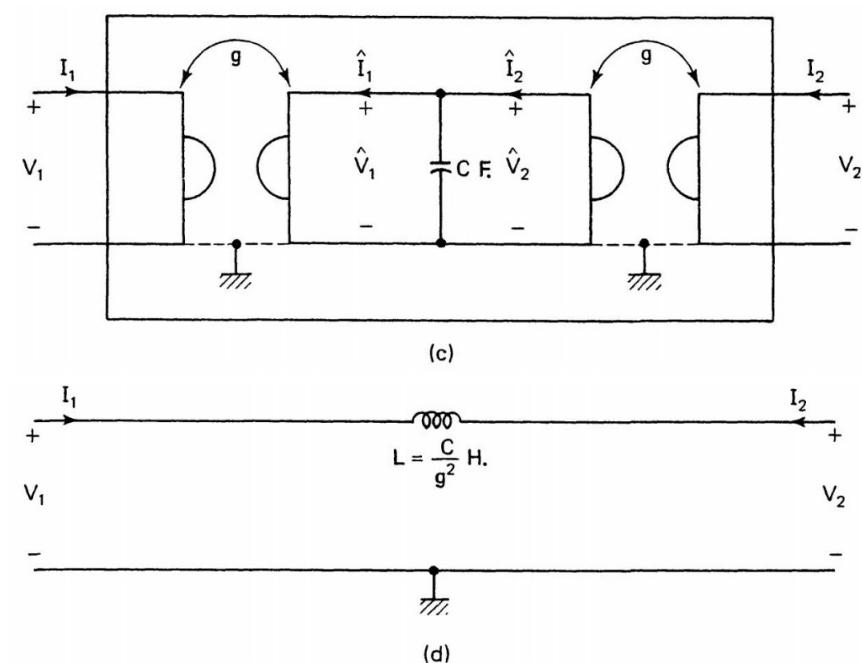
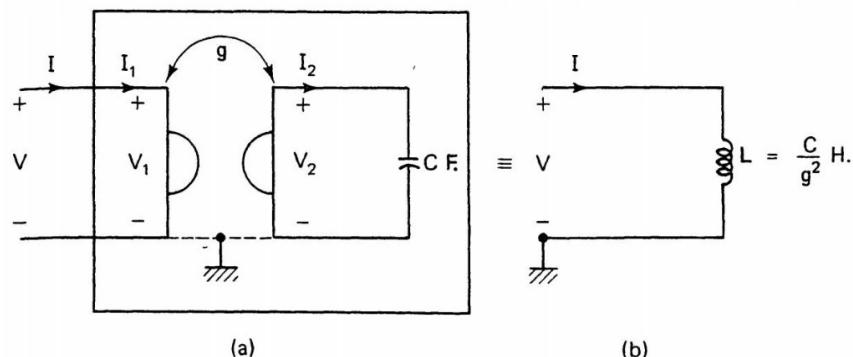
<sup>12</sup> En todas las realizaciones de circuitos existentes de giradores de 2 puertos, los terminales "inferiores" de ambos puertos están conectados a tierra. La figura 2-9 (c) es un ejemplo de ello.

$$\text{la segunda ecuación del girador: } \hat{I}_1 = gV_2 \quad \text{y} \quad I_2 = -gV \quad (2-36)$$

$$\text{la segunda ecuación del girador: } -\hat{I}_1 + (-\hat{I}_2) = sCV \quad (2-37)$$

La primera mitad de (2-35) y la segunda mitad de (2-36) dan el resultado

$$I_1 = -I_2 \quad (2-38)$$

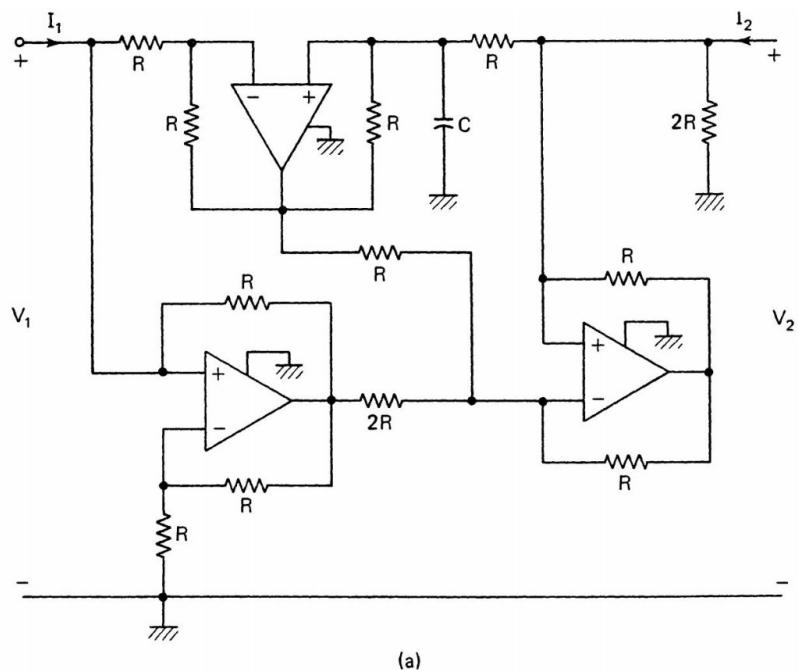


**Fig. 2-10** Realizations of inductors by gyrator-capacitor combinations. (a) and (b) A synthetic grounded inductor. (c) and (d) A synthetic floating inductor.

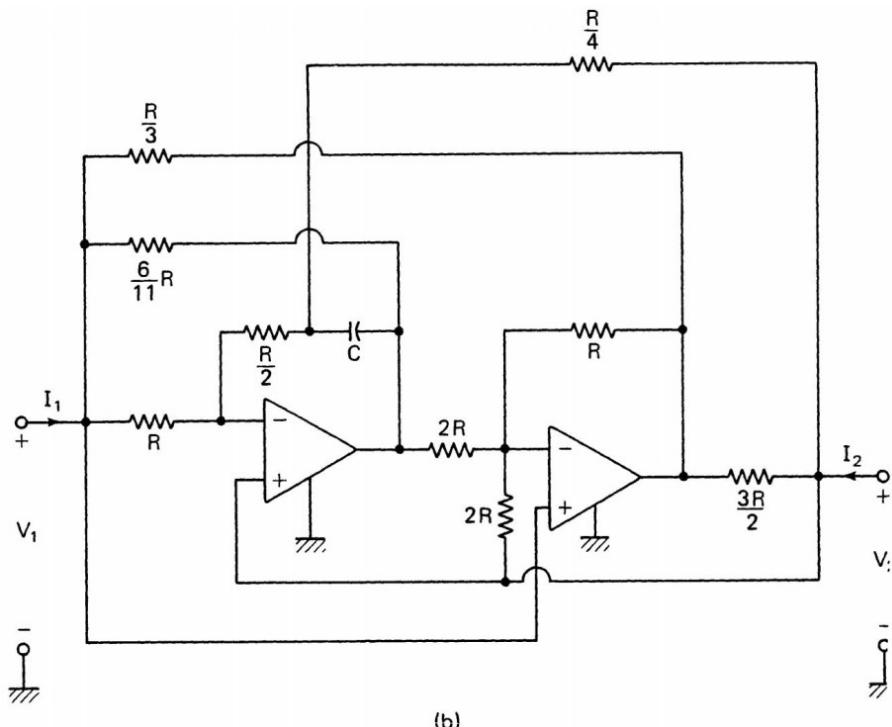
Sustituyendo (2-35) y (2-36) en (2-37), obtenemos

$$gV_1 - gV_2 = sCV = sC\left(\frac{1}{g}\right)I_1 \implies V_1 - V_2 = s\left(\frac{C}{g^2}\right)I_1 \quad (2-39)$$

Juntos (2-38) y (2-39) describen un inductor flotante con inductancia  $C/g^2$  Henries, como se muestra en la Fig. 2-10 (d).

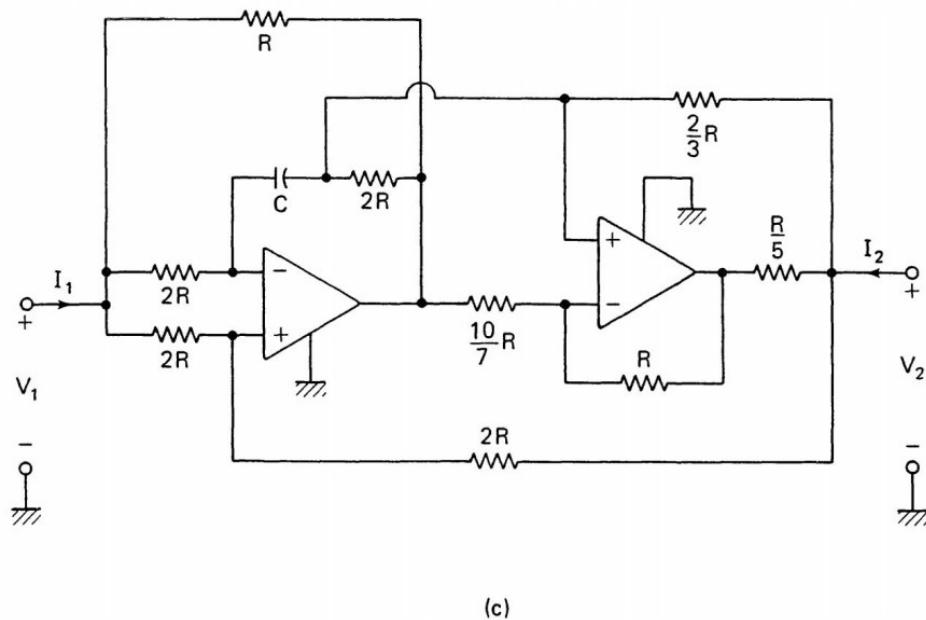


(a)



(b)

**Fig. 2-11** Realizations of floating inductors (a) with 3 op. amps.; (b) and (c) with 2 op. amps.



(c)

**Fig. 2-11 (Continued)**

**3. Convertidor de impedancia negativa (NIC).**<sup>13</sup> Una NIC, que se muestra en la Fig. 2-12 (a), es un dispositivo de dos puertos caracterizado por una matriz de transmisión<sup>14</sup>

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \quad (2-40)$$

donde  $k$  es una constante positiva.

Una simple realización de un NIC con un solo amplificador operacional se muestra en la Fig. 2-12 (b).

Para ver que la Fig. 2-12 (b) se caracteriza por (2-40), aplicamos el principio de cortocircuito virtual y obtenemos

$$V_1 = V_2 \quad (2-41)$$

Además, una ecuación de bucle alrededor de 31G23 da

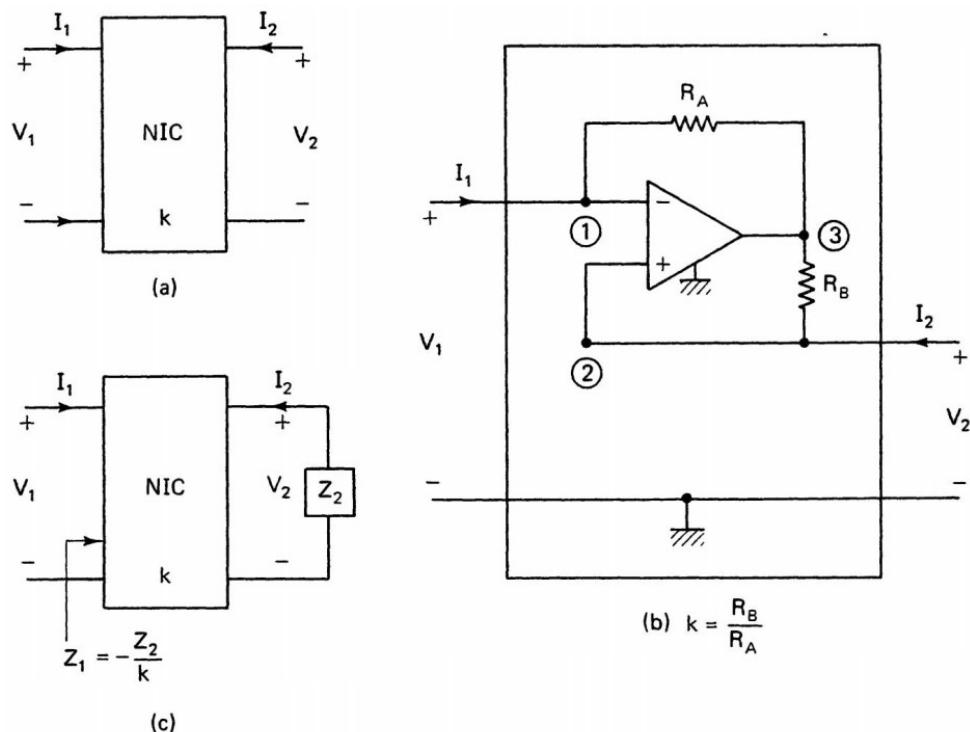
$$-R_a I_1 + V_1 - V_2 + R_b I_2 = 0 \implies I_1 = \frac{R_b}{R_a} I_2 \quad (2-42)$$

Claramente, podemos poner (2-41) y (2-42) en forma de (2-40).

13 En la bibliografía se denomina convertidor de inmitancia negativa.

14 Para ser precisos, (2-40) describe un convertidor de impedancia negativa de inversión de corriente, o INIC. Un convertidor de impedancia negativa de inversión de voltaje, o VNIC, se caracteriza por

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$



**Fig. 2-12** Negative impedance converter. (a) Symbol for NIC. (b) A realization of an NIC with one operational amplifier. (c) An example illustrating a typical use of an NIC.

La razón por la que llamamos al circuito de la Fig. 2-12 (a) *un convertidor de impedancia negativa* es que si conectamos una impedancia  $Z_2$  a través del puerto 2, como se muestra en la figura 2-12 (c), entonces se da la impedancia de entrada  $Z_t$  por

$$Z_t = -\frac{Z_2}{k} \quad (2-43)$$

Es decir, la impedancia de entrada es el negativo de la impedancia de carga escalada por una constante  $1/k$ .

**4. Convertidor de impedancia generalizada (GIC).**<sup>15</sup> Un convertidor de impedancia generalizada, que se muestra en la Fig. 2-13 (a) es un dispositivo de 2 puertos capaz de hacer que la impedancia de entrada de uno de sus dos puertos sea el producto de la impedancia que termina su puerto restante y algunas impedancias internas.

<sup>15</sup> En la literatura se le llama convertidor de inmitancia generalizada, porque se aplica tanto a admitancias como a impedancias.

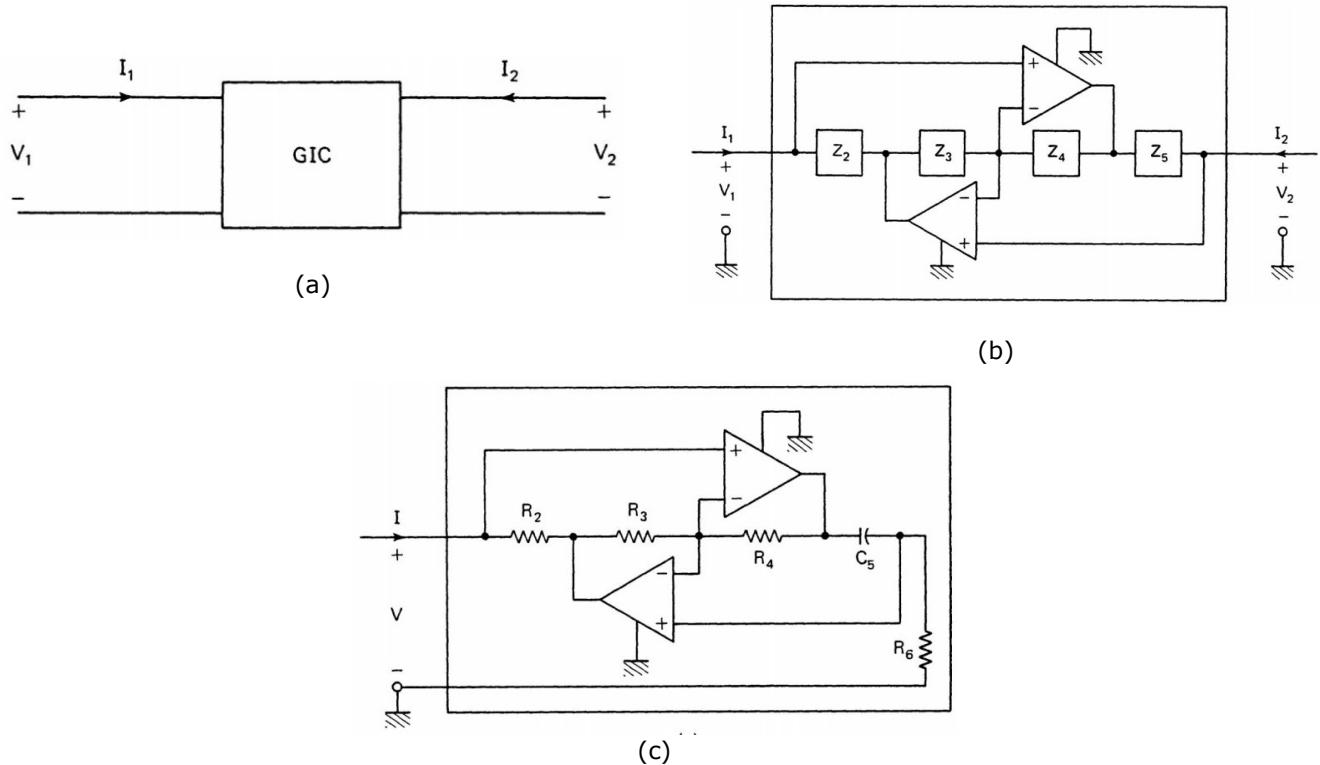


Fig. 2-13 Convertidor de impedancia generalizada, (a) Símbolo para GIC.  
 (b) Una realización de circuito de un GIC con  $k=1$  y  $f(s)=(Z_2Z_4)/(Z_3Z_5)$ .  
 . (c) Un inductor puesto a tierra con  $L=R_2R_4R_6C_5/R_3$  Henries.

Se caracteriza por una matriz de cadena.

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & \frac{1}{f(s)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \quad (2-44)$$

donde  $f(s)$  se denomina función de transformación de impedancia y  $k$  generalmente se normaliza a la unidad. Realización de un circuito de un GIC con

$$k=1 \text{ y } f(s)=\frac{Z_2Z_4}{Z_3Z_5} \quad (2-45)$$

se muestra en la Fig. 2-13 (b). En particular, si dejamos que  $Z_2=R_2$ ,  $Z_3=R_3$ ,  $Z_4=R_4$  y  $Z_5=1/sC_5$ , entonces el puerto 2 se caracteriza por

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{R_3}{R_2R_4C_5s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \quad (2-46)$$

Observe que si ahora terminamos el dispositivo de dos puertos con una resistencia  $R_6$ , como se muestra en la Fig. 2-13 (c), obtenemos una función de impedancia (driving-point impedance).

$$Z_{in} \triangleq \frac{V_1}{I_1} = \frac{R_2R_4R_6C_5s}{R_3} \quad (2-47)$$

Esto significa que el dispositivo de un puerto resultante es equivalente a un inductor conectado a tierra con  $R_2R_4R_6C_5/R_3$  Henries.

**5. Resistencia negativa dependiente de la frecuencia (FDNR).** Un FDNR es un dispositivo de un puerto con una impedancia  $1/(s^2 D)$  donde  $D$  es una constante positiva y tiene la unidad DE Faradios al cuadrado, o  $F^2$ . En operaciones de estado estable sinusoidal, la impedancia  $Z(s)$  de un FDNR se vuelve

$$Z(j\omega) = -\frac{1}{\omega^2 D} \quad (2-48)$$

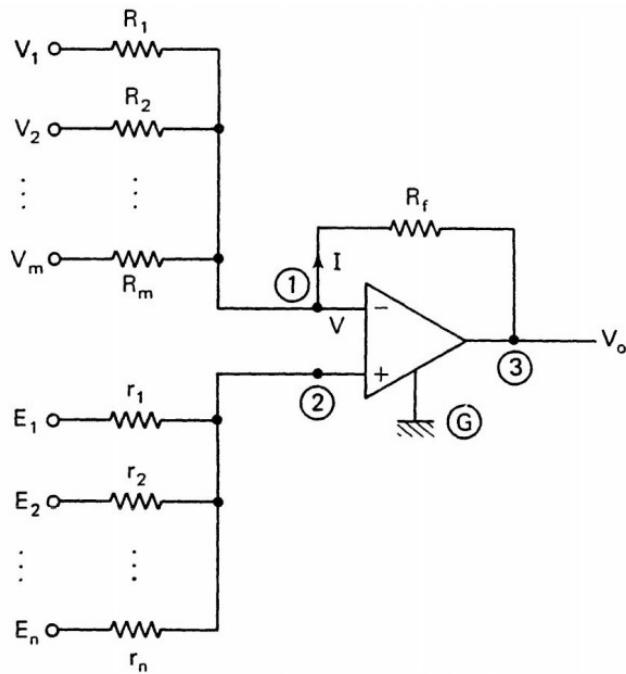
que es equivalente a una resistencia cuya resistencia negativa depende de la frecuencia de operación. Ésta es la razón de su extenso nombre.

Un FDNR tiene el símbolo de circuito que se muestra en la Fig. 2-14 (a). Se puede obtener una realización de circuito de un FDNR terminando el puerto 1 del GIC de (2-45) con un capacitor, como se muestra en la figura 2-14 (b). La impedancia del punto de conducción del puerto 1 resultante viene dada por

$$Z_{in} = \frac{1}{s^2(R_2 R_4 C_1 C_5 / R_3)} \quad (2-49)$$

Se sabe que los inductores son extremadamente difíciles de fabricar en circuitos integrados. En este momento, los inductores conectados a tierra pueden diseñarse sin demasiados problemas mediante pares giratorios-capacitores, pero los inductores flotantes realizados activamente (es decir, a través de giradores, amplificadores operacionales y NIC) son extremadamente inestables, sensibles y no muy prácticos. Una forma de evitar inductores en los circuitos es mediante un mecanismo de escala de impedancia variable, con un factor de escala de  $1/s$ . Este método es el siguiente: dada una función de transferencia de relación de voltaje o corriente, diseñamos un circuito para cumplir con la función de transferencia requerida con elementos RLC. Entonces, cada inductor de  $L$  Henries se reemplaza por una resistencia  $L\Omega$  [es decir, su impedancia de rama se escala de  $sL$  a  $(1/s)sL=L$ ]; cada resistor de  $R\Omega$  se reemplaza por un capacitor de  $1/R$  Faradio [es decir, su impedancia de rama se escala de  $R$  a  $(1/s)R$ ]; y cada condensador de  $C$  Faradios se reemplaza por un FDNR con una impedancia de  $1/(s^2 C)$  [es decir, su impedancia de rama se escala de  $1/sC$  a  $(1/s)(1/sC)$ ]. Al completar este proceso, llegamos a un nuevo circuito sin inductores. Además, tanto el circuito original como el circuito escalado de frecuencia variable tienen la misma función de transferencia de relación de voltaje o corriente.

**6. Sumador.** Un verano es un dispositivo multiterminal con la salida una suma ponderada algebraicamente de las entradas. En la figura 2-15 se muestra un circuito de verano sencillo; todos los voltajes indicados son voltajes de nodo a datum.



$$V_o = \sum_{i=1}^n \frac{1 + R_f G}{r_i g} E_i - \sum_{i=1}^m \frac{R_f}{R_i} V_i \quad \text{Where } G = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i} \quad \text{and } g = \sum_{i=1}^n \frac{1}{r_i}$$

**Fig. 2-15** A summer circuit.

Para ver que la Fig. 2-15 es un circuito sumador, escribamos dos ecuaciones KCL en los nodos 1 y 2 y una ecuación KVL alrededor del bucle 3G213 de la siguiente manera:

$$\sum_{k=1}^m \frac{V_k - V}{R_k} = I \quad (2-50)$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{E_k - V}{r_k} = 0 \quad (2-51)$$

$$V_o - V + R_f I = 0 \quad (2-52)$$

tomando que

$$g = \sum_{k=1}^n \frac{1}{r_k} \quad \text{and} \quad G = \sum_{k=1}^m \frac{1}{R_k} \quad (2-53)$$

Nosotros podemos escribir (2-51) y (2-50) como

$$\sum_{k=1}^n \frac{E_k}{r_k} = \sum_{k=1}^n \frac{V}{r_k} = gV \implies V = \sum_{k=1}^n \frac{E_k}{gr_k} \quad (2-54)$$

$$\sum_{k=1}^m \frac{V_k}{R_k} = I + \sum_{k=1}^m \frac{V}{R_k} = I + GV \implies I = \sum_{k=1}^m \frac{V_k}{R_k} - GV \quad (2-55)$$

Sustituyendo (2-54) en (2-55), obtenemos

$$I = \sum_{k=1}^m \frac{V_k}{R_k} - \sum_{k=1}^n \frac{G}{gr_k} E_k \quad (2-56)$$

Finalmente, usando (2-54) y (2-56), podemos escribir (2-52) como

$$\begin{aligned}
 V_o &= V - R_f I \\
 &= \sum_{k=1}^n \frac{E_k}{gr_k} + \sum_{k=1}^n \frac{R_f G}{gr_k} E_k - \sum_{k=1}^m \frac{R_f}{R_k} V_k \\
 &= \sum_{k=1}^n \frac{1 + R_f G}{gr_k} E_k - \sum_{k=1}^m \frac{R_f}{R_k} V_k
 \end{aligned} \tag{2-57}$$

Si  $E_n = Q$  en la figura 2-15 (es decir, si el resistor  $r_n$  está conectado a tierra, que suele ser el caso), entonces

$$V_o = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1 + R_f G}{r_k g} E_k - \sum_{k=1}^m \frac{R_f}{R_k} V_k \tag{2-58}$$

donde  $G$  y  $g$  vienen dados como antes por (2-53). Específicamente, el circuito de la Fig. 2-16 da

$$V_o = -\frac{R_f}{R_1} V_1 - \frac{R_f}{R_2} V_2 + \frac{1 + GR_f}{gr_1} E_1 \tag{2-59}$$

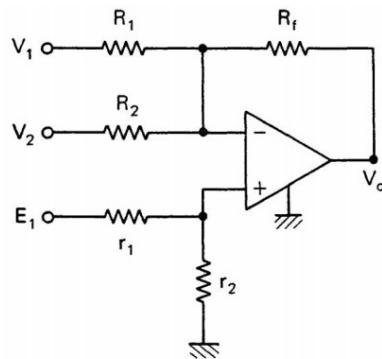


Fig. 2-16 A summer circuit.

donde

$$g = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \quad y \quad G = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \tag{2-60}$$

**7. Integrador.** Realización de un circuito de un integrador con un op. amp. se muestra en la figura 2-17, donde

$$V_o = -\frac{1}{sCR} V_{in} \tag{2-61}$$

Si  $RC = 1$ , entonces  $V_o = -(1/s)V_{in}$ , que es un integrador inversor.

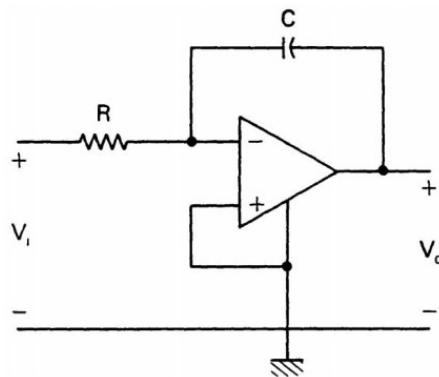


Fig. 2-17 Un integrador inversor.

**8. Diferenciador.** Realización de un circuito de un diferenciador con una op. amp. se da en la Fig. 2-18, donde

$$V_o = -s C R V_{in} \quad (2-62)$$

Si  $RC=1$ , entonces  $V_o = -s V_{in}$ , que es un diferenciador inverso.

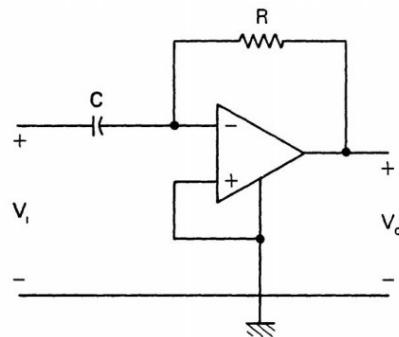


Fig. 2-18 An inverting differentiator.

## Referencias y lecturas adicionales

- [1] Desoer, C. A., and Kuh , E. S. Basic Circuit Theory. New York: McGraw- Hill, 1969.
- [2] Graeme, J. G., Tobey , G. E., and Huelsman , L. P. Operational Amplifiers: Design and Application, New York: McGraw-Hill, 1971.
- [3] Smith, J. I. Modern Operational Circuit Design, New York: Wiley-Interscience, 1971.
- [4] Wait, J. V., Huelsman , L. P., and Korn, G. A. Introduction to Operational Amplifier Theory and Application, New York: McGraw-Hill, 1975.
- [5] Roberge, J. K. Operational Amplifiers: Theory and Practice, New York: Wiley, 1975.
- [6] Stout, D. F., and Kaufman, M. Handbook of Operational Amplifier Circuit Design, New York: McGraw-Hill, 1976.
- [7] Su, K. L. Active Network Synthesis, New York: McGraw-Hill, 1965.
- [8] Mitra, S. K. Analysis and Synthesis of Linear Active Networks, New York: Wiley, 1968.
- [9] Mitra, S. K. Active Inductorless Filters, New York: IEEE Press, 1971.
- [10] Deboo, G. J. "Application of a Gyrator Type Circuit to Realize Ungrounded Inductors." IEEE Trans. Circuit Theory CT-14 (May 1967); 101-2.
- [11] The, L. Q., and Yanagisawa , T. "Some New Lossless Floating Inductance Circuits." Proc. IEEE 65 (1977); 1071-2.

## Problemas

2-1. Un FET tiene un modelo de circuito de señal pequeño que se muestra en la Fig. P2-1, donde  $r_{gs} \approx 10^{11} \Omega$ ,  $g_{fs} \approx 10^{-3} mhos$  y  $r_{ds} \approx 300 K\Omega$ . Encuentre la admitancia, la impedancia y una representación híbrida del FET pequeño. -modelo de circuito de señal.

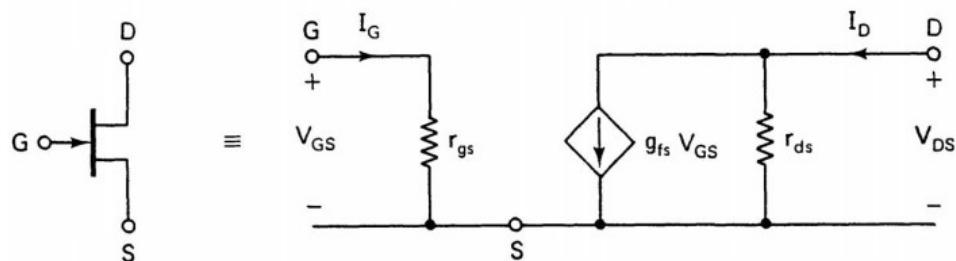


Fig. P2-1

2-2. En la Fig. P2-2 se muestra un circuito equivalente de pequeña señal de un transistor, donde  $C_c = 200 pF$ ,  $C_e = 20 pF$ ,  $r_e = 25 \Omega$ ,  $r_b = 120 \Omega$ ,  $r_c = 1,25 M\Omega$  y  $\alpha = 0,98$ . Encuentre la admitancia, la impedancia y una representación híbrida del circuito equivalente del transistor.

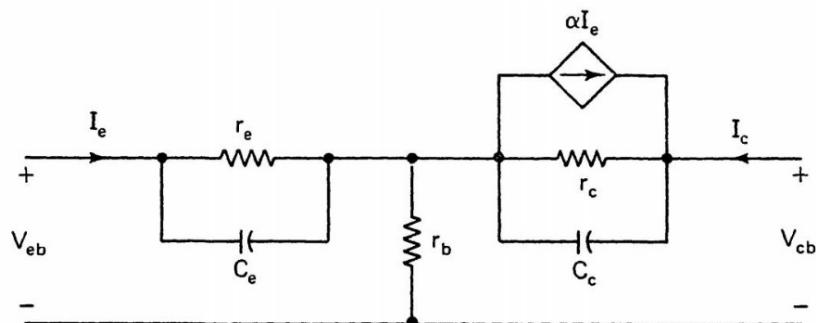


Fig. P2-2

### 3. Propiedades de las funciones de redes.

La función de red es la transformada de Laplace de la respuesta al impulso. Su forma es una razón de dos polinomios de la frecuencia compleja  $s$ . Antes de embarcarnos en nuestra discusión de las propiedades de las funciones de redes, revisamos algunas propiedades relacionando a los polinomios de variable compleja  $s$ .

#### 3-1 Polinomios de variable compleja

Se dice que un polinomio  $p(s)$  es par si es una suma de potencias pares, y se dice que es impar si es una suma de potencias impares. Por ejemplo,  $p_1(s)$  y  $p_2(s)$  son polinomios pares, mientras que  $p_3(s)$  y  $p_4(s)$  son polinomios impares, donde

$$\begin{aligned} p_1(s) &= as^6 + bs^2 + c \\ p_2(s) &= ds^{20} + e \\ p_3(s) &= fs^5 + gs^3 + hs \\ p_4(s) &= ks^7 + ls^3 \end{aligned}$$

y  $a, b, c, d, e, f, g, h, k$  y  $l$  son constantes. Observe que si  $M(s)$  es un polinomio par y  $N(s)$  es un polinomio impar,<sup>16</sup> luego

$$M(s) = M(-s) \quad (3-1)$$

$$N(s) = -N(-s) \quad (3-2)$$

Considere un polinomio general  $p(s)$  dado por

$$p(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3 + a_4 s^4 + a_5 s^5 + \dots$$

Podemos siempre escribir  $p(s)$  como una suma de un polinomio par y uno impar

$$\begin{aligned} p(s) &= (a_0 + a_2 s^2 + a_4 s^4 + \dots) + (a_1 s + a_3 s^3 + a_5 s^5 \dots) \\ &\triangleq M(s) + N(s) \end{aligned} \quad (3-3)$$

donde  $p(s) = a_0 + a_2 s^2 + a_4 s^4 + \dots$  y  $p(s) = a_1 s + a_3 s^3 + a_5 s^5 + \dots$  y son llamados, respectivamente, luego *la partes par e impar* de  $p(s)$ . En vista de (3-1) y (3-2), tenemos

$$p(-s) = M(-s) + N(-s) = M(s) - N(s) \quad (3-4)$$

En este libro, los coeficientes de todos los polinomios bajo consideración son reales. Con esta condición de inicio, tenemos las propiedades siguientes para polinomios de variable compleja  $s$ :

**1. Sea  $p(s)$  un polinomio de  $s$ . Luego**

$$\overline{p(s)} = p(\bar{s}) \quad (3-5)$$

donde  $\bar{a}$  denota el complejo conjugado de  $a$ . Por ejemplo, sea

<sup>16</sup> En este capítulo, así como en los Capítulos 4 al 8,  $M(s)$  y  $N(s)$ , con o sin subíndices, denotan respectivamente un polinomio par o impar o una función racional.

$$p(s) = a_2 s^2 + a_1 s + a_0$$

por lo tanto

$$\overline{p(s)} = \overline{a_2} \bar{s}^2 + \overline{a_1} \bar{s} + \overline{a_0} = a_2 \bar{s}^2 + a_1 \bar{s} + a_0 = p(\bar{s})$$

**2. Si  $M(s)$  es un polinomio par,** entonces, por (3-1) y (3-5), tenemos

$$\overline{M(j\omega)} = M(\overline{j\omega}) = M(-j\omega) = M(j\omega) \quad (3-6)$$

donde la primera igualdad de (3-6) se debe a (3-5), y la última igualdad (3-6) se debe a (3-1). En vista de (3-6),  $M(j\omega)$  es una cantidad real para todo  $\omega$

**3. Si  $N(s)$  es un polinomio impar,** entonces, por (3-2) y (3-5), tenemos

$$\overline{N(j\omega)} = N(\overline{j\omega}) = N(-j\omega) = -N(j\omega) \quad (3-7)$$

Por tanto,  $N(j\omega)$  es una cantidad puramente imaginaria, y  $N(j\omega)$  se puede expresar como

$$N(j\omega) = j X(\omega) \quad (3-8)$$

donde  $X(j\omega)$  es una función real de una variable real  $\omega$ .

**4. Si  $s_k$  es una raíz del polinomio  $p(s)$ ,** es decir,

$$p_k(s) = M(s_k) + N(s_k) = 0$$

donde  $M(s)$  y  $N(s)$  son, respectivamente, las partes pares e impares de  $p(s)$  entonces  $(-s_k)$  es una raíz del polinomio  $p(-s) = M(s) - N(s)$ . Claramente, lo contrario también es cierto. Por lo tanto, tenemos:

**LEMÁ 3-1.**  $s_k$  es una raíz de  $[M(s) + N(s)]$  si, y solo si,  $(-s_k)$  es un raíz de  $[M(s) - N(s)]$ , donde  $M(s)$  es un polinomio par y  $N(s)$  es un polinomio impar.

**5. La función de magnitud** al cuadrado de  $p(s) = M(s) + N(s)$ , donde  $M(s)$  y  $N(s)$  son las partes pares e impares de  $p(s)$ , está dada por

$$\begin{aligned} |p(j\omega)|^2 &= p(s)p(-s)|_{s=j\omega} \\ &= [M(s) + N(s)][M(s) - N(s)]|_{s=j\omega} \\ &= [M(s)^2 - N(s)^2]|_{s=j\omega} = M(j\omega)^2 - N(j\omega)^2 \end{aligned} \quad (3-9)$$

Como  $M(j\omega)$  es real y  $N(j\omega)$  es puramente imaginario,  $M^2(j\omega)$  y  $N^2(j\omega)$  son reales,  $M^2(j\omega) \geq 0$  y  $N^2(j\omega) \leq 0$  para todo  $\omega$ . Como consecuencia,

$$|p(j\omega)|^2 \geq 0 \text{ para todo } \omega \quad (3-10)$$

Además, podemos concluir que  $|p(j\omega)|^2$  es un polinomio de  $\omega^2$ , o de manera equivalente,  $|p(j\omega)|^2$  es un polinomio par de variable real  $\omega$ . Por ejemplo, sea

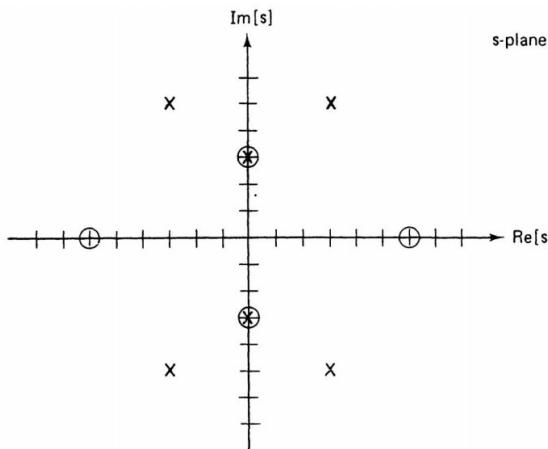
$$p(s) = s^2 + \sqrt{2}s + 1$$

luego

$$\begin{aligned} M(s) &= s^2 + 1 \quad y \quad N(s) = \sqrt{2}s \\ M^2(s) - N^2(s) &= s^4 + 2s^2 + 1 - 2s^2 = s^4 + 1 \\ |p(j\omega)|^2 &= [s^4 + 1]_{s=j\omega} = 1 + \omega^4 \end{aligned}$$

**6.** Las raíces de  $f(s) \triangleq [p(s)p(-s)] = M^2(s) - N^2(s)$  **ocurren con simetría cuadrantal**, lo que significa que:

- (a) Las raíces en el eje real del plano  $s$  ocurren en pares en  $\sigma_1$  y  $-\sigma_1$ ;
- (b) Las raíces en el eje imaginario del plano  $s$  ocurren con multiplicidad par y pares conjugados complejos [es decir, si  $j\omega_1$  es una raíz de  $f(s)$ , entonces tanto  $j\omega_1$  como  $(-j\omega_1)$  son dobles, o cuádruples, o ..., raíces de  $f(s)$ ]; y
- (c) Las raíces complejas ocurren de manera cuádruple [es decir,  $\sigma_1 + j\omega_1$  es una raíz de  $p(s)p(-s)$ , donde  $\sigma_1 \neq 0$  y  $\omega_1 \neq 0$ , luego  $\sigma_1 + j\omega_1$ ,  $-(\sigma_1 + j\omega_1)$  y  $-(\sigma_1 - j\omega_1)$  también son raíces de  $p(s)p(-s)$ ] - Se ilustra esta propiedad de ubicación de la raíz de  $p(s)p(-s)$  en la Figura 3-1.



Legend:

- $\times$  = Complex roots in quadruples
- $\circ$  = Real roots in pairs
- $\otimes$  = Imaginary axis roots in conjugate pairs and with even multiplicities

**Fig. 3-1** Roots of  $f(s) \triangleq p(s)p(-s)$  are in quadrant symmetry.

Las propiedades de simetría cuadrantal de las ubicaciones de las raíces de  $p(s)p(-s)$  se pueden demostrar usando el Lema 3-1. Un ejemplo sencillo está dado por

$$p(s) = (s^2 + 1)(s^2 + \sqrt{2}s + 1)(s + 1)$$

En este caso, tenemos

$$p(s)p(-s) = (s^2 + 1)^2(s^4 + 1)(-s^2 + 1)$$

Por tanto, las raíces de  $p(s)p(-s)$  son

$$\begin{aligned}
 s_1 &= 1, \quad s_2 = -1 \\
 s_3 &= s_4 = j, \quad s_5 = s_6 = -j \\
 s_7 &= \frac{1}{\sqrt{2}} + j \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad s_8 = \frac{1}{\sqrt{2}} - j \frac{1}{\sqrt{2}} \\
 s_9 &= -\frac{1}{\sqrt{2}} + j \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \text{and} \quad s_{10} = -\frac{1}{\sqrt{2}} - j \frac{1}{\sqrt{2}}
 \end{aligned}$$

### 3-2 Funciones de redes.

Sea  $F(s)$  una función de red que puede ser una función propia de impedancia o admitancia (driving point impedance) (DP) de un elemento de un puerto o que puede ser una función de transferencia entre el puerto de entrada y el puerto de salida de una red de dos puertos.

Luego  $F(s)$  es una función racional de  $s$  con coeficientes reales y puede ser escrita como una razón de dos polinomios de la siguiente manera:

$$F(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{\sum_{i=0}^m a_i s^i}{\sum_{i=0}^n b_i s^i} = \frac{M_1(s) + N_1(s)}{M_2(s) + N_2(s)} \quad (3-11)$$

donde  $A(s)$  y  $B(s)$  son, respectivamente, los polinomios del numerador y del denominador de  $F(s)$ ;  $M_1(s)$  y  $N_1(s)$  son, respectivamente, las partes par e impar de  $A(s)$ ; y  $M_2(s)$  y  $N_2(s)$  son, respectivamente, las partes par e impar de  $B(s)$ .

Multiplicando (3-11) por  $B(-s)/B(-s)$ , obtenemos.

$$\begin{aligned}
 F(s) &= \frac{A(s)B(-s)}{B(s)B(-s)} = \frac{[M_1(s) + N_1(s)][M_2(s) - N_2(s)]}{[M_2^2(s) - N_2^2(s)]} \\
 &= \frac{[M_1(s)M_2(s) - N_1(s)N_2(s)]}{[M_2^2(s) - N_2^2(s)]} + \frac{[N_1(s)M_2(s) - N_2(s)M_1(s)]}{[M_2^2(s) - N_2^2(s)]} \quad (3-12)
 \end{aligned}$$

Observe que los primeros términos de (3-12) en una función impar,

$$\begin{aligned}
 N(s) &\triangleq N_1(s)M_2(s) - N_2(s)M_1(s) \\
 &= \frac{-N_1(-s)M_2(-s) + N_2(-s)M_1(-s)}{M_2^2(-s) - N_2^2(-s)} = -N(-s) \quad (3-14)
 \end{aligned}$$

De ahora en adelante, llamaremos  $M(s)$  y  $N(s)$ , respectivamente, las partes pares e impares de la función racional  $F(s)$  dada por (3-11). Al establecer  $s = j\omega$ , (3-13) y (3-14) dicen que  $M(j\omega)$  es real y  $N(j\omega)$  es puramente imaginario. Consecuentemente

$$M(j\omega) = \operatorname{Re}[F(j\omega)] \quad \text{y} \quad N(j\omega) = j \operatorname{Im}[F(j\omega)] \quad (3-15)$$

Observe que la (3-15) dice que dada la parte  $\operatorname{real}\{\text{imaginaria}\}$  de  $F(s)$ , podemos encontrar la parte  $\operatorname{par}\{\text{impar}\}$  de  $F(s)$ , y viceversa.

### 3-2-1. Transformada de Hilbert

Las relaciones entre las partes real e imaginaria de una función de red (que representa un sistema causal) se pueden expresar mediante la transformada de Hilbert de la siguiente manera: Supongamos que una función de red  $F(s)$  es analítica en la mitad derecha cerrada<sup>17</sup> (incluido el lado imaginario eje) del plano  $s$ .<sup>18</sup> Escribamos

$$F(j\omega) = R(\omega) + jX(\omega) \quad (3-16)$$

donde  $R(\omega)$  y  $X(\omega)$  son, respectivamente, las partes real e imaginaria de  $F(j\omega)$ . Si

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} F(j\omega) = R(\infty) = \text{una constante real y finita} \quad (3-17)$$

entonces  $R(\omega)$  y  $X(\omega)$  están relacionados por<sup>19</sup>

$$X(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R(\zeta)}{\omega - \zeta} d\zeta \quad (3-18)$$

$$R(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X(\zeta)}{\omega - \zeta} d\zeta + R(\infty) \quad (3-19)$$

Tenga en cuenta que hay una falta de simetría entre (3-18) y (3-19). Esta falta de simetría se debe al hecho de que estamos considerando solo funciones de red cuyas transformadas inversas de Laplace son funciones reales de tiempo. Si consideramos funciones complejas de tiempo, entonces hay un término  $X(\infty)$  en el lado derecho de (3-18), y las dos ecuaciones, a saber (3-18) y (3-19), serán simétricas. Por otro lado, si la respuesta al impulso  $f(t)$ , que es la transformada de Laplace inversa de  $F(s)$ , no contiene la función de impulso en  $t=0$ , entonces  $R(\infty)=0$  y (3-19) se simplifica en<sup>20</sup>

$$R(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X(\zeta)}{\omega - \zeta} d\zeta \quad (3-19')$$

La transformada de Hilbert dice que si se cumplen ciertas condiciones (para circuitos causales estables, se cumplen las condiciones requeridas), entonces:

1. Si se nos da la parte imaginaria  $X(\omega)$ , podemos encontrar la parte real  $R(\omega)$  a través de (3-19). De  $R(\omega)$  y  $X(\omega)$ , podemos formar  $F(j\omega)$ . Por continuación analítica (es decir, reemplazando  $\omega$  con  $s/j$ , obtenemos  $F(s)$ .
2. Si se nos da la parte real  $R(\omega)$ , (3-18) da  $X(\omega)$ . Juntos podemos volver a formar  $F(j\omega)$ . Al establecer  $\omega=s/j$ , obtenemos  $F(s)$ .

<sup>17</sup> De ahora en adelante, dejamos que el plano RH {LH} representa la mitad derecha [mitad izquierda] del plano-s.

<sup>18</sup> Como  $F(s)$  es una función racional, "  $F(s)$  es analítica en el plano-s cerrado RH" significa que  $F(s)$  no tiene polos -  $F(s) \neq \infty$  para todo  $s$  - en el plano-s RH. Para que la transformada de Hilbert sea aplicable aquí, es suficiente requerir que la función racional  $F(s)$  no tenga polos en el plano-s RH y que todos los polos del eje imaginario de  $F(s)$  sean simples.

<sup>19</sup> Hay muchas otras expresiones equivalentes para las transformadas de Hilbert. Ver referencia [4]

<sup>20</sup> De ahora en adelante, asumimos que  $R(\infty)=0$  y nos referimos a las ecuaciones (3-19) y (3-19') como (3-19).

**Ejemplo 3-1**

Dada la parte real  $R(\omega)$  como

$$R(\omega) = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$$

Encuentre la función de red asociada  $F(s)$ .

**Solución:** La parte imaginaria  $X(\omega)$  viene dada por (3-18) como

$$X(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha}{(\alpha^2 + \zeta^2)(\omega - \zeta)} d\zeta = -\frac{\omega}{\alpha^2 + \omega^2}$$

Por eso,

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= R(\omega) + jX(\omega) \\ &= \frac{\alpha - j\omega}{\alpha^2 + \omega^2} = \frac{\alpha - j\omega}{\alpha^2 - (j\omega)^2} = \frac{1}{\alpha + j\omega} \end{aligned}$$

es decir

$$F(s) = \frac{1}{s + \alpha}$$

Tenga en cuenta que, en general, las evaluaciones de las integrales en (3-18) y (3-19) no son fáciles y a menudo requieren consulta con tablas de integración y con un área de las matemáticas llamada teoría de la distribución.

Si ahora prestamos más atención a (3-18) y (3-19), vemos que ambas integrales tienen la forma de una integral de convolución.

$$\begin{aligned} f(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\zeta) h(\omega - \zeta) d\zeta \\ &\triangleq g(\omega) * h(\omega) \end{aligned} \tag{3-20}$$

donde  $h(\omega) \triangleq \pm 1/(\pi\omega)$ , y  $g(\omega)$  es  $R(\omega)$  en (3-18) y  $X(\omega)$  en (3-19). Algunos ahorros en el esfuerzo pueden resultar en evaluar (3-18) y (3-19) si aprovechamos las propiedades de las integrales de convolución. Algunos de estos son:

1. Las transformadas de Laplace de  $f(\omega)$  están dadas por el producto de las transformadas de Laplace de  $g(\omega)$  y  $h(\omega)$ . Tenga en cuenta que en (3-18) y (3-19), las transformadas de Laplace se realizarán en funciones de  $\omega$  en lugar de las funciones de tiempo habituales.

2. La ecuación (3-20) también se puede escribir como

$$\begin{aligned} f(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega - \zeta) h(\zeta) d\zeta \\ &= g(\omega) * h(\omega) \end{aligned} \tag{3-21}$$

3.  $f(\omega) = g(\omega) * h(\omega)$

$$\begin{aligned} &= [k\text{-ésima derivada de } g(\omega)] * [k\text{-ésima integral de } h(\omega)] \\ &= [k\text{-ésima integral de } g(\omega)] * [k\text{-ésima derivada de } h(\omega)] \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\omega} f(\omega') d\omega' &= \left[ \int_{-\infty}^{\omega} g(\omega') d\omega' \right] * h(\omega) \\ &= g(\omega) * \left[ \int_{-\infty}^{\omega} h(\omega') d\omega' \right] \end{aligned} \tag{3-23}$$

5.

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\omega}f(\omega) &= \left[ \frac{d}{d\omega}g(\omega) \right] * h(\omega) \\ &= g(\omega) * \left[ \frac{d}{d\omega}h(\omega) \right]\end{aligned}\quad (3-24)$$

Se ha demostrado que la transformada de Hilbert se puede utilizar para encontrar la parte real de una función de red si se da la parte imaginaria o viceversa. Observe que la transformada de Hilbert es solo un conjunto de relaciones entre la parte real e imaginaria de una función compleja que es analítica en el plano-s RH.

Si escribimos

$$F(j\omega) = e^{-\alpha(\omega)} e^{-j\phi(\omega)} = e^{-[\alpha(\omega)+j\phi(\omega)]} \quad (3-25)$$

entonces  $\alpha(\omega) \triangleq -\ln|F(j\omega)|$  se llama función de *atenuación o pérdida del filtro*, y  $\phi(\omega) \triangleq -\angle F(j\omega)$  se llama *función de fase* (para ser precisos: la función de desfase (phase lag function) del filtro). Tomando logaritmos de (3-25), obtenemos

$$\begin{aligned}\gamma(j\omega) &\triangleq -\ln F(j\omega) \\ &= -\ln e^{\alpha(\omega)+j\phi(\omega)} \\ &= \alpha(\omega) + j\phi(\omega)\end{aligned}\quad (3-26)$$

Observe que si  $\gamma(s)$  es analítica en el plano-s RH, entonces  $\alpha(\omega)$  y  $\phi(\omega)$ , siendo las partes real e imaginaria de  $\gamma(j\omega)$ , estarían relacionadas por las ecuaciones de la transformada de Hilbert como:

$$\phi(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha(\zeta)}{\omega - \zeta} d\zeta \quad (3-27)$$

$$\alpha(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(\zeta)}{\omega - \zeta} d\zeta \quad (3-28)$$

**Ejemplo 3-2** Sea la función de desfase de un filtro deseado dada por

$$\begin{aligned}\phi(\omega) &= -\frac{k\pi}{2} \quad \text{para } \omega \leq -\omega_c \\ &= \frac{k\pi}{2} \frac{\omega}{\omega_c} \quad \text{para } -\omega_c \leq \omega \leq \omega_c \\ &= \frac{k\pi}{2} \quad \text{para } \omega \geq \omega_c\end{aligned}\quad (3-29)$$

como se muestra en la Fig. 3-2 (a). Encuentre la función de atenuación o pérdida asociada  $\alpha(\omega)$  del filtro deseado.

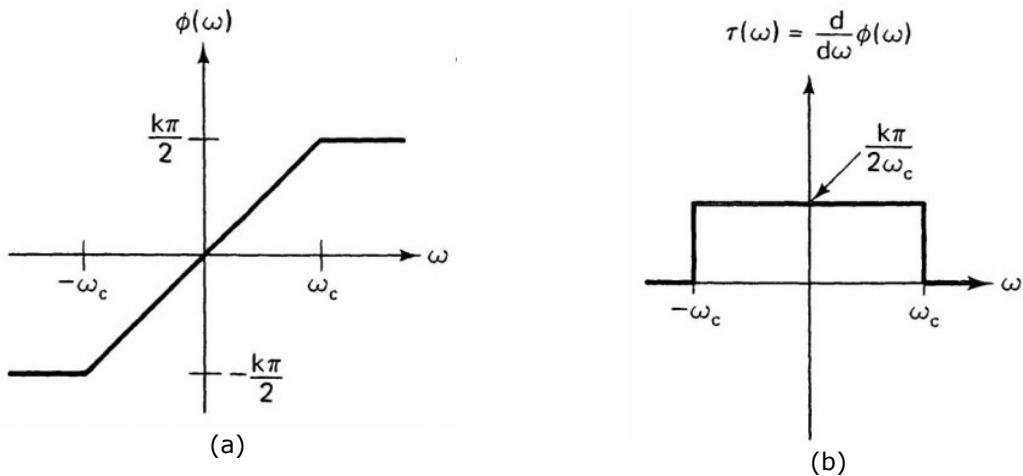


Fig. 3-2 (a) Filtro de fase lineal. (b) Filtro de retardo de grupo constante.

**Solución:** Como  $\tau(j\omega) \triangleq d\phi(\omega)/d\omega$  [que se muestra en la Fig. 3-2 (b)] tiene una forma más simple que la de  $\phi(\omega)$ , aplicamos (3-24) a (3-28) y obtener

$$\frac{d\alpha(\omega)}{d\omega} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{\omega - \xi} \phi(\xi) d\xi \quad (3-30)$$

Por eso,

$$\frac{d\alpha(\omega)}{d\omega} = \frac{1}{\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \frac{k\pi}{2\omega_c} \frac{1}{\omega - \xi} d\xi = \frac{k}{2\omega_c} \ln \left| \frac{\omega - \omega_c}{\omega + \omega_c} \right| \quad (3-31)$$

Integrando (3-31), obtenemos

$$\begin{aligned} \alpha(\omega) &= \int_0^\omega \frac{k}{2\omega_c} \ln \left| \frac{x - \omega_c}{x + \omega_c} \right| dx \\ &= \frac{k}{2} \left[ \ln \left| \frac{\omega^2}{\omega_c^2} - 1 \right| - \frac{\omega}{\omega_c} \ln \left| \frac{\omega_c - 1}{\omega_c + 1} \right| \right] \end{aligned} \quad (3-32)$$

La función de retardo de grupo constante perfecta de la Fig. 3-2 (b) dentro del intervalo  $[-\omega_c, \omega_c]$  es de gran interés en el diseño de filtros. Por tanto, su función de atenuación asociada bajo la condición de fase mínima<sup>21</sup> es de gran interés práctico. Sin embargo, es difícil ver cómo se comporta (3-32) excepto en regiones extremas como:

1. Para  $\omega \ll \omega_c$  tomando la serie de Taylor de (3-32), encontramos<sup>22</sup>

$$\alpha(\omega) \approx \frac{k}{2} \left[ \frac{\omega}{\omega_c} \right]^2$$

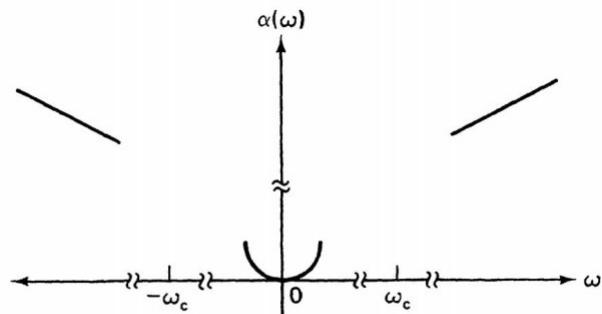
2. Cuando  $\omega \rightarrow \infty$  es decir, para  $\omega \gg \omega_c$ , la aproximación da

$$\begin{aligned} \alpha(\omega) &\simeq \frac{k}{2} \ln \left[ \frac{\omega}{\omega_c} \right]^2 + \frac{k}{2} \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right) \frac{2\omega_c}{\omega + \omega_c} \\ &\simeq \frac{k}{2} \ln \left[ \frac{\omega}{\omega_c} \right]^2 + k = k \ln \left| \frac{\omega}{\omega_c} \right| + k \end{aligned}$$

21 El concepto de fase mínima se presenta más adelante en este capítulo.

22 Tenga en cuenta que  $\ln(1+x) \approx x$  cuando  $|x| \ll 1$ .

En la Fig. 3-3 se muestra un esquema de  $\alpha(\omega)$  .



**Fig. 3-3** The attenuation function associated with a constant group delay filter.

Para aplicar la transformada de Hilbert a las funciones de fase y magnitud de una función de red, necesitamos que  $y(s)$  sea analítica en el plano-s RH. Por lo tanto, no solo requerimos que  $F(s)$  sea analítica en el plano-s RH sino también su inverso  $1/F(s)$  (*sería el reciproco!*). Esto se debe a que  $y(s) = -\ln F(s) = \ln 1/F(s)$  y si  $y(s)$  es analítica, también lo es  $-y(s) = \ln F(s)$ . Por lo tanto, para aplicar (3-27) y (3-28), debemos asegurarnos de que tanto  $F(s)$  como  $1/F(s)$  sean analíticas en el plano-s RH, lo que significa que no hay cero o polo de  $F(s)$  en el plano-s RH.<sup>23</sup> Este tipo de función se llama *fase mínima*.

La razón del nombre fase mínima es que si hay dos funciones de red  $F(s)$  y  $\hat{F}(j\omega)$  con la misma función de magnitud,

- (i)  $|F(j\omega)| = |\hat{F}(j\omega)|$  para todos  $\omega$  tal que
- (ii)  $F(s)$  tiene uno o más ceros en el plano-s RH, y
- (iii)  $\hat{F}(j\omega)$  no tiene ceros en el plano-s RH,

luego

$$\hat{\phi}(\omega) \leq \phi(\omega) \text{ para todo } \omega \geq 0$$

donde  $\hat{\phi}(\omega) \triangleq -\angle \hat{F}(j\omega)$  y  $\phi(\omega) \triangleq -\angle F(j\omega)$  son las funciones de fase de  $\hat{F}(s)$  y  $F(s)$ , respectivamente. En otras palabras, la función de red  $\hat{F}(s)$  que no tiene cero en el plano-s RH tendrá un ángulo de fase menor que el de la función de red  $F(s)$  que tiene uno o más ceros en el plano-s RH.

Aunque la estabilidad del sistema no restringe las ubicaciones de los ceros de una función de red, los filtros más comunes se caracterizan por funciones de fase mínima. De lo contrario, se requerirían acoplamientos mutuos, múltiples caminos entre la entrada y la salida del filtro, o sus combinaciones. Todos estos se evitan en la práctica, porque tienden a aumentar la complejidad y sensibilidad de la red de filtros resultante.

Como se ilustra en los Ejemplos 3-1 y 3-2, la evaluación de las integrales asociadas con las transformaciones de Hilbert es extremadamente difícil en general. La fuerza de la transformación de Hilbert reside en lo que dice más que en lo que hace. La transformada de Hilbert establece que si la parte real o par (la parte imaginaria o impar) de un filtro se especifica para cumplir con ciertos requisitos de procesamiento de señales, entonces el filtro se especifica completamente. De manera similar, si se prescribe la función de fase o de magnitud de un filtro de fase mínima a lo largo del eje

23 Se dice que un punto  $z_k \{p_k\}$  es un {polo} cero de una función de red  $F(s)$  si  $F(z_k) = 0$   $\{F(p_k) = \infty\}$ . Como consecuencia de esta definición, un [polo] cero puede ser una raíz del polinomio numerador (denominador) de  $F(s)$  o ser el punto en el infinito [es decir,  $z_k = \infty \{p_k = \infty\}$ ] si el grado del polinomio numerador de  $F(s)$  es menor [mayor] que el grado del polinomio denominador de  $F(s)$  .

imaginario del plano-s, entonces el filtro está completamente caracterizado. En otras palabras, un filtro puede diseñarse para cumplir con las especificaciones de fase o de magnitud, pero no ambas en general. De esta manera, la transformada de Hilbert detalla las limitaciones teóricas sobre el rendimiento del filtro.

### 3-2-2. Partes pares e impares

Siempre que  $F(s)$  sea analítica en el plano-s RH, la transformada de Hilbert proporciona un medio para construir la función  $F(s)$  completa si se especifica su parte real o imaginaria a lo largo del eje imaginario del plano-s. Si, además,  $F(s)$  es de fase mínima, entonces la transformada de Hilbert establece que podemos encontrar  $F(s)$  si se da su magnitud o fase o función de retardo de grupo. Sin embargo, las dificultades de evaluar las integrales de Hilbert asociadas reducen la practicidad de la transformada de Hilbert a casi nada. En esta sección, describimos métodos alternativos para construir la función de red si se da su parte real (par) o su parte imaginaria (impar). El otro caso que involucra funciones de magnitud y fase se analiza en la siguiente sección.

Recuerde que una función de red  $F(s)$  se puede escribir como

$$F(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{\sum_{i=0}^m a_i s^i}{\sum_{i=0}^n b_i s^i} = \frac{M_1(s) + N_1(s)}{M_2(s) + N_2(s)} = M(s) + N(s) \quad (3-33)$$

donde

$$M(s) = \frac{M_1(s)M_2(s) - N_1(s)N_2(s)}{M_2^2(s) - N_2^2(s)} \quad (3-34)$$

y

$$N(s) = \frac{N_1(s)M_2(s) - N_2(s)M_1(s)}{M_2^2(s) - N_2^2(s)} \quad (3-35)$$

Suponga que la parte par  $M(s)$  de la función de red  $F(s)$  se da como<sup>24</sup>

$$M(s) = \frac{C(s)}{D(s)} \quad (3-36)$$

Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $D(s)$  es un polinomio par con raíces cuadrantalmente simétricas.<sup>25</sup> Entonces

---

<sup>24</sup> Si la parte real  $R(\omega)$  de  $F(s)$  está dada, entonces por (3-15), podemos formar  $M(s)$  como  $M(s) = R(s/j)$ .

<sup>25</sup> Si las raíces de una  $D(s)$  dada no son cuadrantalmente simétricas, entonces multiplicamos ambos  $C(s)$  y  $D(s)$  de la dada  $M(s)$  por un polinomio  $k(s)$  de modo que el denominador resultante,  $\hat{D}(s) \triangleq k(s)D(s)$ , tiene raíces cuadrantalmente simétricas. En este caso, consideramos la función dada como  $M(s) = \frac{\hat{C}(s)}{\hat{D}(s)} \triangleq \frac{k(s)C(s)}{k(s)D(s)}$ . Una elección simple (pero no necesariamente la mejor) de  $k(s)$  es dejar  $k(s) \triangleq D(-s)$ .

$$\begin{aligned}
 D(s) &= M_2^2(s) - N_2^2(s) \\
 &= [M_2(s) + N_2(s)][M_2(s) - N_2(s)] \\
 &= [M_2(s) + N_2(s)][M_2(-s) + N_2(-s)] \\
 &= B(s)B(-s)
 \end{aligned} \tag{3-37}$$

Por lo tanto, podemos usar el eje imaginario del plano-s como un límite divisorio con cualquiera de los polos LH o RH asignados a  $B(s)$  y la mitad restante asignada a  $B(-s)$ .<sup>26</sup> Matemáticamente hablando, no hay preferencia en cuanto a qué mitad debe asignarse a  $B(s)$ . Sin embargo, como ingenieros, preferimos trabajar con funciones de red estables (aquellas que no contienen polos en el plano-s RH). En consecuencia, asignamos los polos del plano-s LH de  $D(s)$  a  $B(s)$  y los polos RH pasarán automáticamente a  $B(-s)$ . Es decir, hemos utilizado  $D(s)$ , el denominador de la  $M(s)$  dada, para determinar el denominador de la función de red deseada  $F(s)$ .

Sabiendo que  $B(s) = M_2(s) + N_2(s)$ , un polinomio de numerador  $A(s) = \sum_{i=0}^m a_i s^i$  con un conjunto de coeficientes indeterminados  $i = 0, 1, 2, \dots, m$  se asume como:

$$F(s) = \frac{\sum_{i=0}^m a_i s^i}{M_2(s) + N_2(s)} \tag{3-38}$$

Al comparar el numerador de la parte par de la (3-38) y  $C(s)$ , el numerador de la función  $M(s)$  dada, obtenemos un sistema de ecuaciones simultáneas de  $(m+1)$  incógnitas (que involucra los  $a_i$  de  $s$ ).<sup>27</sup> La solución de este sistema dará los valores de la  $a_i$  de  $s$  deseada. Por tanto,  $F(s)$  está completamente determinado.

**Ejemplo 3-3** Dada la parte par  $M(j\omega)$  de  $F(j\omega)$  siendo

$$M(j\omega) = \frac{\omega^2}{\omega^6 + 1} \tag{3-39}$$

construir  $F(s)$ .

**Solución:** Porque

$$M(j\omega) = \frac{\omega^2}{\omega^6 + 1} = \frac{-(j\omega)^2}{-(j\omega)^6 + 1}$$

obtenemos

$$M(s) = \frac{-s^2}{-s^6 + 1} \triangleq \frac{C(s)}{D(s)} \tag{3-40}$$

Por lo tanto,

26 Si usamos el eje imaginario del plano-s como línea divisoria, entonces, ¿qué sucede con las raíces en el eje imaginario? Debido a que todas las raíces del eje imaginario, digamos  $s_k$ , de  $D(s)$  deben ocurrir con multiplicidad par, digamos  $2l$ , podemos asignar / raíces en  $s_k$  a  $B(s)$  y las restantes / raíces en  $s_k$  a  $B(-s)$ . Es decir, las raíces del eje imaginario de  $D(s)$  se dividen de manera que la mitad vaya a  $B(s)$  y la otra mitad a  $B(-s)$ . De ahora en adelante, los factores LH incluirán la mitad de las raíces del eje imaginario como los factores RH.

27 Tenga en cuenta que el sistema de ecuaciones que surge en este procedimiento puede contener  $m+1$  ecuaciones o menos, dependiendo de la situación. En cualquier caso, sin embargo, existe al menos un conjunto de  $a_i$  de  $s$  que satisface el sistema de ecuaciones anterior.

$$\begin{aligned} B(s)B(-s) &= M_2^2(s) - N_2^2(s) = -s^6 + 1 \\ &= (-s+1)(s^2-s+1)(s+1)(s^2+s+1) \end{aligned} \quad (3-41)$$

Los factores que dan las raíces en el plano-s LH de  $D(s)$  son  $(s+1)$  y  $(s^2+s+1)$ .

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} B(s) &= M_2(s) + N_2(s) = (s+1)(s^2+s+1) \\ &= s^3 + 2s^2 + 2s + 1 \end{aligned} \quad (3-42a)$$

$$M_2(s) = 2s^2 + 1 \quad (3-42b)$$

$$N_2(s) = s^3 + 2s \quad (3-42c)$$

De (3-34) y (3-40), el numerador de la parte par de  $F(s)$  es

$$M_1(s)M_2(s) - N_1(s)N_2(s) = -s^2 \triangleq C(s) \quad (3-43)$$

Con  $M_2(s)$  y  $N_2(s)$  dados por (3-42), podemos elegir  $M_1(s)$  y  $N_1(s)$  como polinomios de grados 2 y 1, respectivamente.<sup>28</sup> Por tanto, podemos suponer que

$$\begin{aligned} A(s) &= \sum_{i=0}^2 a_i s^i = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 \\ &= M_1(s) + N_1(s) \end{aligned} \quad (3-44)$$

Eso decir,  $M_1(s) = a_0 + a_2 s^2$  y  $N_1(s) = a_1 s$ . En consecuencia, (3-43) se convierte en

$$(a_2 s^2 + a_0)(2s^2 + 1) - (a_1 s)(s^3 + 2s) = -s^2$$

implicando que

$$(2a_2 - a_1)s^4 + (2a_0 + a_2 - 2a_1)s^2 + a_0 = -s^2 \quad (3-45)$$

Al igualar coeficientes de las mismas potencias en ambos lados de (3-45), obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ 2a_0 + a_2 - 2a_1 &= -1 \\ 2a_2 - a_1 &= 0 \end{aligned} \quad (3-46)$$

Resolver (3-46) da la solución

$$a_0 = 0, \quad a_1 = \frac{2}{3}, \quad a_2 = \frac{1}{3} \quad (3-47)$$

Eso decir

$$F(s) = \frac{(2/3)s + (1/3)s^2}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}$$

<sup>28</sup> Bajo las restricciones de (3-42), hay muchas opciones de  $A(s)$  que satisfarán (3-43). En este caso, la opción más simple es cuando  $A(s)$  es un polinomio de segundo grado. Sin embargo, también podemos dejar que  $A(s)$  sea cualquier polinomio de grado  $n$ , donde  $n > 0$  es un número entero par. Como regla general, el polinomio general en el lado izquierdo de (3-43) debe tener un grado al menos tan grande como el grado de  $C(s)$ .

Si ahora se nos da la parte impar  $N(s)$  de la función de red  $F(s)$ , por usando (3-35) en lugar de (3-34), podemos construir un  $F(s)$  estable de una manera similar al caso anterior cuando se da  $M(s)$ . Ahora resumimos el procedimiento de construcción de la siguiente manera:

### PROCEDIMIENTO DE CONSTRUCCIÓN 3-1

0. Sea la función dada la parte impar {par}  $N(s) \{ M(s) \}$  de  $F(s)$  como

$$N(s) \{ M(s) \} = \frac{C(s)}{D(s)}$$

donde se asumió que  $D(s)$  tiene raíces de simetría cuadrantal.

1. Encuentre las raíces de  $M_2^2(s) - N_2^2(s)$  factorizando el polinomio  $D(s)$ .

2. Los factores asociados con las raíces de  $D(s)$  en el plano-s LH son asignadas a  $B(s) = M_2(s) + N_2(s)$ . Multiplique todos estos factores para obtener

$$B(s) = \sum_{i=0}^n b_i s^i$$

Por lo tanto, determinamos  $M_2(s)$  y  $N_2(s)$ , las partes pares e impares de  $B(s)$ , respectivamente.

3. Suponga que  $A(s) = \sum_{i=0}^m a_i s^i$  donde las  $a_i$  de  $s$  están indeterminadas en este punto. Forme  $M_1(s)$  y  $N_1(s)$  basándose en este supuesto  $A(s)$ . Tenga en cuenta que el grado  $m$  se determina comparando  $M_1(s)$ , el numerador dado de  $N(s)\{N_2(s)\}$ , con la ecuación (3-35) {(3-34)}.

4. Forme el polinomio  $[N_1(s)M_2(s) - N_2(s)M_1(s)][M_1(s)M_2(s) - N_1(s)N_2(s)]$ . Iguale este polinomio resultante con  $C(s)$ . Esto dará lugar a un conjunto de  $k$  ecuaciones simultáneas en  $(m+1)$  incógnitas, donde  $1 \leq k \leq m+1$ . Las incógnitas son los coeficientes de  $A(s)$ .

5. Resuelva el sistema de ecuaciones obtenido en el Paso 4 para  $a_i$ ,  $z=0,1,2,\dots,m$ , y luego forme  $F(s) = A(s)/B(s)$ .

**Ejemplo 3-4** Dada la parte impar  $N(s)$  de  $F(s)$  por

$$N(j\omega) = \frac{-j\omega}{1+\omega^6} \quad (3-48)$$

Encuentre la función de red deseada  $F(s)$ .

**Solución:** De (3-48), obtenemos

$$N(s) = \frac{-s}{1-s^6} \triangleq \frac{C(s)}{D(s)} \quad (3-49)$$

Es decir

$$M_2^2(s) - N_2^2(s) = 1 - s^6 = D(s) \quad (3-50)$$

y

$$N_1(s)M_2(s) - N_2(s)M_1(s) = -s = C(s) \quad (3-51)$$

Ahora seguimos los pasos descritos en el Procedimiento de construcción 3-1:

$$1. \quad 1 - s^6 = (-s+1)(s^2-s+1)(s+1)(s^2+s+1) \quad (3-52a)$$

$$2. \quad B(s) = (s+1)(s^2+s+1) = s^3 + 2s^2 + 2s + 1 \quad (3-52b)$$

$$M_2(s) = 2s^2 + 1$$

$$B(s) = (s+1)(s^2+s+1) = s^3 + 2s^2 + 2s + 1 \quad (3-52c)$$

3. Para determinar el grado más bajo del polinomio  $A(s)$ , consideremos la ecuación del numerador de la parte impar

$$N_1(s)M_2(s) - N_2(s)M_1(s) = -s \quad (3-53)$$

Dado que  $M_2(s)$  es de segundo grado y  $N_2(s)$  de tercero, la elección más sencilla sería asumir que el grado de  $N_1(s)$  es 1 y el de  $M_1(s)$  es cero. (La siguiente opción más simple sería asumir que  $A(s)$  es un polinomio de tercer grado.) Si tomamos la ruta más simple y asumimos que  $A(s)$  es

$$A(s) = a_1 s + a_0 \quad (3-54a)$$

luego

$$M_1(s) = a_0 \quad (3-54b)$$

$$N_1(s) = a_1 s \quad (3-54c)$$

4. Sustituyendo (3-52) y (3-54) en (3-53), obtenemos

$$(a_1 s)(2s^2 + 1) - (s^3 + 2s)(a_0) = -s$$

o

$$(2a_1 - a_0)s^3 + (a_1 - 2a_0)s = -s \quad (3-55)$$

Al igualar los coeficientes de ambos lados de (3-55), obtenemos un sistema de dos ecuaciones en dos incógnitas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} 2a_1 - a_0 &= 0 \\ a_1 - 2a_0 &= -1 \end{aligned} \quad (3-56)$$

5. Resolver (3-56) produce

$$a_0 = \frac{2}{3} \quad y \quad a_1 = \frac{1}{3} \quad (3-57)$$

Por lo tanto

$$A(s) = \frac{1}{3}(s+2) \quad (3-58)$$

y

$$F(s) = \frac{(1/3)(s+2)}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1} = \frac{(s+2)}{3s^3 + 6s^2 + 6s + 3} \quad (3-59)$$

### 3-2-3. Funciones de fase y magnitud

El procedimiento de construcción presentado en la sección anterior proporciona un método para obtener  $F(s)$  si se da su parte impar o su parte par. En cierto sentido, esto es análogo a la transformada de Hilbert, que relaciona las partes real e imaginaria de  $F(s)$ . Debido a que la transformada de Hilbert también establece que si se da su función de ángulo de fase o su función de pérdida [siempre que, por supuesto,  $F(s)$  sea de fase mínima], entonces  $F(s)$  se caracteriza completamente, una pregunta natural es: Dada ya sea la función de fase o de magnitud, ¿se puede construir una **función de red de fase mínima**  $F(s)$  de manera única sin recurrir a las integrales de Hilbert? Las respuestas a ambas partes de esta pregunta son afirmativas. Sin embargo, los procedimientos de construcción para estos dos problemas son bastante diferentes. Consideraremos sus soluciones una por una.

Consideré la función de red de (3-33) a (3-35). Con la ayuda de (3-15), tenemos

$$\begin{aligned}\phi(\omega) &= -\tan^{-1} \frac{\text{Im}[F(j\omega)]}{\text{Re}[F(j\omega)]} \\ &= -\tan^{-1} \frac{N(j\omega)}{jM(j\omega)} \\ &= -\tan^{-1} \frac{N_1(j\omega)M_2(j\omega) - N_2(j\omega)M_1(j\omega)}{j[M_1(j\omega)M_2(j\omega) - N_1(j\omega)N_2(j\omega)]} \quad (3-60) \\ &\triangleq -\tan^{-1} \left. \frac{\phi_o(s)}{j\phi_e(s)} \right|_{s=j\omega}\end{aligned}$$

donde

$$\phi_o(s) \triangleq N_1(s)M_2(s) - N_2(s)M_1(s) \quad (3-61)$$

y

$$\phi_e(s) \triangleq M_1(s)M_2(s) - N_1(s)N_2(s) \quad (3-62)$$

Observe que  $\phi_o(s)$  es un polinomio impar y que  $\phi_e(s)$  es un polinomio par. Si sumamos  $\phi_o(s)$  y  $\phi_e(s)$  juntos obtenemos

$$\begin{aligned}\phi_o(s) + \phi_e(s) &= M_1(s)M_2(s) + N_1(s)M_2(s) - N_1(s)N_2(s) - N_2(s)M_1(s) \\ &= [M_1(s) + N_1(s)][M_2(s) - N_2(s)] \\ &= A(s)B(-s)\end{aligned} \quad (3-63)$$

La ecuación (3-63) es la clave para construir  $F(s)$ . Si asumimos que  $F(s)$  es de fase mínima, entonces todos los ceros y polos de  $F(s)$  estarán en el plano-s LH.

Es decir,

1. Todas las raíces del polinomio  $A(s)$  estarán en el plano-s LH.
2. Todas las raíces del polinomio  $B(s)$  estarán en el plano-s LH. Por Lema 3-1, todas las raíces del polinomio  $B(-s)$  estarán en el plano-s RH.

Por lo tanto, (3-63) sugiere un procedimiento para construir  $F(s)$  [siempre que  $F(s)$  sea la fase mínima] de la siguiente manera:

### PROCEDIMIENTO DE CONSTRUCCIÓN 3-2

1. Sea  $p(s) \triangleq \phi_o(s) + \phi_e(s)$ . Observe que una vez que se da  $\phi(s)$ , se pueden obtener  $\phi_o(s)$  y  $\phi_e(s)$ .
2. Factorice  $p(s)$  o, de manera equivalente, localice las raíces de  $p(s)$ .
3. Los factores asociados con las raíces en el plano-s LH de  $p(s)$  se asignan  $A(s)$ . Los factores asociados con el plano-s RH de  $p(s)$  se asignan a  $B(-s)$ .
4. Encuentre  $B(s)$  simplemente reemplazando  $s$  con  $(-s)$  en la expresión de  $B(s)$  encontrada en el Paso 3.
5. Forma  $F(s) = A(s)/B(s)$ .

Este procedimiento dará lugar a una función de red de fase mínima  $F(s)$  únicamente. Si no asignamos factores como se indica en el Paso 3, entonces algunas de las raíces en el plano-s RH de  $p(s)$  se asignarán a  $A(s)$  y, por lo tanto,  $F(s)$  no será de fase mínima y el procedimiento de construcción no dará lugar a una única  $F(s)$ .

**Ejemplo 3-5** Construir  $F(s)$  a partir de la función de fase

$$\phi(\omega) = -\tan^{-1} \frac{-\omega^5 + 5\omega^3 - 2\omega}{2\omega^4 - \omega^2 + 5} \quad (3-64)$$

**Solución:** dejando  $\omega = s/j$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \phi(\omega) &= -\tan^{-1} \frac{-(j\omega)^5 - 5(j\omega)^3 - 2j\omega}{j[2(j\omega)^4 + (j\omega)^2 + 5]} \\ &= -\tan^{-1} \frac{-s^5 - 5s^3 - 2s}{j[2s^4 + s^2 + 5]} \triangleq -\tan^{-1} \left. \frac{\phi_o(s)}{j\phi_e(s)} \right|_{s=j\omega} \end{aligned}$$

Es decir,  $\phi_o(s) = -s^5 - 5s^3 - 2s$  y  $\phi_e(s) = 2s^4 + s^2 + 5$ . Sigamos ahora el procedimiento del Procedimiento de construcción 3-2.

1.  $p(s) = \phi_o(s) + \phi_e(s) = -s^5 + 2s^4 - 5s^3 + s^2 - 2s + 5$
2.  $p(s) = (-s+1)(s^2+s+1)(s^2-2s+5)$
3. Asignando  $s^2+s+1$  a  $A(s)$  y  $(-s+1)(s^2-2s+5)$  a  $B(-s)$ . Tal que es,

$$A(s) = s^2 + s + 1$$

$$B(-s) = (-s+1)(s^2-2s+5)$$

4. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} B(s) &= (s+1)(s^2+2s+5) \\ &= s^3 + 3s^2 + 7s + 5 \end{aligned}$$

$$5. \quad F(s) = \frac{s^2 + s + 1}{s^3 + 3s^2 + 7s + 5} \quad (3-65)$$

Antes procedemos a describir un procedimiento para construir una función de **red de fase mínima**  $F(s)$  cuando la función de magnitud  $|F(j\omega)|$  dada, consideraremos una propiedad importante

de  $|F(j\omega)|$ . Debido a que los coeficientes de la función racional de  $F(s)$  son reales, tenemos

$$\begin{aligned}|F(j\omega)|^2 &= F(j\omega)\overline{F(j\omega)} = F(j\omega)F(-j\omega) \\ &= F(s)F(-s) \Big|_{s=j\omega}\end{aligned}\quad (3-66)$$

Sea  $F(s)$  dada por (3-33); entonces podemos escribir

$$|F(j\omega)|^2 = \frac{A(s)A(-s)}{B(s)B(-s)} \Big|_{s=j\omega} \quad (3-67)$$

Esto significa que tanto los polos como los ceros de  $|F(j\omega)|^2 \Big|_{\omega=s/j} = F(s)F(-s)$  ocurren en simetría cuádruple. Por tanto, (3-67) nos proporciona una clave para construir una función de red de fase mínima  $F(s)$ .

Dado  $|F(j\omega)|$ , un procedimiento de construcción para obtener  $F(s)$  se da de la siguiente manera:

### PROCEDIMIENTO DE CONSTRUCCIÓN 3-3

1. Desde

$$|F(j\omega)|^2 \Big|_{\omega=s/j} \triangleq \frac{C(s)}{D(s)} \quad (3-68)$$

donde  $C(s)$  y  $D(s)$  son, respectivamente, el numerador y el denominador de  $|F(j\omega)|^2 \Big|_{\omega=s/j}$ . Claramente, por (3-67),

$$C(s) = A(s)A(-s) \quad (3-69)$$

$$D(s) = B(s)B(-s) \quad (3-70)$$

2. Factorice  $C(s)$ . Asigne los factores asociados con los ceros en el plano-s LH a  $A(s)$ .

3. Factorice  $D(s)$ . Asigne los factores asociados con los polos en el plano-s LH a  $B(s)$ .

4. Desde la función de red de fase mínima

$$F(s) = \frac{A(s)}{B(s)}$$

donde  $A(s)$  y  $B(s)$  se obtienen en los Pasos 2 y 3, respectivamente.

**Ejemplo 3-6** Dado

$$|F(j\omega)|^2 = \frac{4+\omega^2}{1+\omega^6} \quad (3-71)$$

Encuentre la función de red de fase mínima  $F(s)$

**Solución:** Siguiendo los pasos descritos en el Procedimiento de construcción 3-3, tenemos

$$1. \quad |F(j\omega)|^2 \Big|_{\omega=s/j} = \frac{4-s^2}{1-s^6} \triangleq \frac{C(s)}{D(s)}$$

$$C(s) = 4-s^2 \quad y \quad D(s) = 1-s^6$$

$$2. \quad C(s) = (2+s)(2-s) \implies A(s) = 2+s$$

$$3. \quad D(s) = (s+1)(s^2+s+1)(1-s)(s^2-s+1)$$

$$B(s) = (s+1)(s^2+s+1)$$

4.  $F(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{s+2}{(s+1)(s^2+s+1)}$  (3-72)

Tenga en cuenta que, como lo indica la transformada de Hilbert, si se da la parte impar o la parte par de  $F(s)$ , podemos encontrar  $F(s)$  siempre que  $F(s)$  sea analítico en el semi plano-s RH [todos los polos de  $F(s)$  están en el plano-s cerrado de LH con los polos del eje imaginario simples]. Sin embargo, si se da la magnitud o la función de fase de  $F(s)$ , podemos construir una  $F(s)$  única solo si  $F(s)$  es de fase mínima [todos los ceros y polos de  $F(s)$  deben ocurrir en el plano-s cerrado de LH con los polos y ceros del eje imaginario siendo simples].

### **Referencias y lecturas adicionales**

- [1] Weinberg, L. Network Analysis and Synthesis. Huntington, N.Y.: R. E. Krieger, 1975.
- [2] Humphreys, D. S. The Analysis, Design, and Synthesis of Electrical Filters. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1970.
- [3] Leon, B. J., and Wintz , P. A. Basic Linear Networks for Electrical and Electronics Engineers. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1970.
- [4] Papoulis, A. The Fourier Integral and Its Applications. New York:McGraw-Hill, 1962.

**Problemas**

3-1. Encuentra las partes pares, las partes impares y las funciones de magnitud al cuadrado de los siguientes polinomios.

- (a)  $p(s)=s^2+2s+2$
- (b)  $p(s)=s^3+3s+2$
- (c)  $p(s)=4s^4+3s^3+2s^2+s+2$
- (d)  $p(s)=s^5+0.5s^3+s$
- (e)  $p(s)=6s^6+\sqrt{2}s^2+s$

3-2. Encuentra las partes pares e impares de las siguientes funciones racionales,

- (a)  $f(s)=\frac{1}{s+1}$
- (b)  $f(s)=\frac{2s}{s+1}$
- (c)  $f(s)=\frac{s}{s^2+2s+2}$
- (d)  $f(s)=\frac{1}{s^2+2s+2}$
- (e)  $f(s)=\frac{s^2}{s^2+2s+2}$
- (f)  $f(s)=\frac{s+1}{s^2+2s+2}$
- (g)  $f(s)=\frac{s^2+1}{s^2+2s+2}$
- (h)  $f(s)=\frac{s^2+s+1}{s^2+2s+2}$
- (i)  $f(s)=\frac{s}{s^2+1}$
- (j)  $f(s)=\frac{s^2+1}{s^3+3s}$

3-3. Supongamos que se da que las raíces del polinomio  $f(s)=s^4+as^2+b$  ocurren con simetría cuadrantal. Por tanto,  $f(s)$  se puede expresar como

$$f(s)=p(s)p(-s)$$

donde  $p(s)$  es un polinomio de segundo orden. Demuestre que  $p(s)$  está dado por

$$p(s)=s^2+a_0s+b_0$$

donde  $b_0=\sqrt{b}$  y  $a_0=\sqrt{2b_0-a}$  y tanto  $a_0$  como  $b_0$  son reales.

3-4. Encuentra las raíces de los siguientes polinomios.

- (a)  $f(s) = s^4 + 1$
- (b)  $f(s) = s^4 - 2s^2 + 1$
- (c)  $f(s) = s^4 + 9s^2 + 25$
- (d)  $f(s) = s^4 + 5s^2 + 9$
- (e)  $f(s) = s^4 - 10s^2 + 9$
- (f)  $f(s) = s^6 - 1$
- (g)  $f(s) = s^6 + s^4 + 7s^2 - 9$
- (h)  $f(s) = s^6 - 3s^4 + 3s^2 - 1$
- (i)  $f(s) = s^6 - 3s^4 - 3s^2 - 4$
- (j)  $f(s) = s^6 - 7s^4 + 21s^2 - 36$
- (k)  $f(s) = s^6 - 2s^4 + s^2 - 36$

*Hint:*  $s = -1$  is a root of (f), (g), and (h).

$s = -2$  is a root of (i), (j), and (k).

The roots occur with quadrantal symmetry.

3-5. Para cada parte real  $R(\omega)$  dada a continuación, encuentre su función racional asociada  $F(s)$  tal que  $R(\omega) = \operatorname{Re}[F(j\omega)]$ .

- (a)  $R(\omega) = \frac{\omega^4}{1+\omega^6}$
- (b)  $R(\omega) = \frac{4-\omega^2}{\omega^4-3\omega^2+4}$
- (c)  $R(\omega) = \frac{4\omega^2+160}{\omega^2+16}$
- (d)  $f(s) = \frac{1+\omega^2}{\omega^4-\omega^2+1}$
- (e)  $R(\omega) = \frac{2\omega^2-1}{1+\omega^6}$
- (f)  $R(\omega) = \frac{\omega^4-3\omega^2}{\omega^6+3\omega^4+3\omega^2+1}$
- (g)  $R(\omega) = \frac{-\omega^4+3\omega^2+6}{\omega^6+2\omega^4+\omega^2+36}$

3-6. Para cada parte imaginaria  $X(\omega)$  dada a continuación, encuentre su función racional asociada  $F(s)$  tal que  $X(\omega) = \operatorname{Im}[F(j\omega)]$ .

- (a)  $X(\omega) = \frac{-\omega^3 + \omega}{\omega^4 - \omega^2 + 1}$
- (b)  $X(\omega) = \frac{-2\omega^3 + \omega}{\omega^4 - \omega^2 + 1}$
- (c)  $X(\omega) = \frac{-\omega^3}{\omega^4 - 3\omega^2 + 4}$
- (d)  $X(\omega) = \frac{3\omega^3 - \omega}{\omega^6 + 3\omega^4 + 3\omega^2 + 1}$
- (e)  $X(\omega) = \frac{-3\omega^3 - \omega}{\omega^6 + 2\omega^4 + \omega^2 + 36}$
- (f)  $X(\omega) = \frac{2\omega - \omega^3}{1 + \omega^6}$

3-7. Dada la parte impar  $N(s)$  de una función de red  $F(s)$  como

$$N(s) = \frac{2s^3 + 22s}{s^4 + s^2 + 25}$$

- a) Encuentre una  $F(s)$  tal que  $F(\infty) = 1$ .
  - (b) Encuentre una  $F(s)$  tal que  $F(0) = 1$ .
- Dé razones si no es posible encontrar tal  $F(s)$ .

3-8. Para cada una de las siguientes funciones de fase  $\Phi(\omega)$ , encuentre su función de fase mínima asociada.

- (a)  $\phi(\omega) = -\tan^{-1} \frac{-\omega^3}{4 - \omega^2}$
- (b)  $\phi(\omega) = -\tan^{-1} \frac{2\omega^3 - \omega}{\omega^2 + 1}$
- (c)  $\phi(\omega) = -\tan^{-1} \frac{2\omega - \omega^3}{-1 + 2\omega^2}$
- (d)  $\phi(\omega) = -\tan^{-1} \frac{3\omega^3 - \omega}{\omega^4 - 3\omega^2}$
- (e)  $\phi(\omega) = -\tan^{-1} \frac{-3\omega^3 - \omega}{-\omega^4 + 3\omega^2 + 6}$

3-9. Para cada función de magnitud dada a continuación, encuentre su función de fase mínima asociada.

- (a)  $|H(j\omega)|^2 = \frac{\omega^4 - 5\omega^2 + 9}{\omega^4 + 10\omega^2 + 9}$
- (b)  $|H(j\omega)|^2 = \frac{1 + \omega^2}{\omega^6 - \omega^4 + 7\omega^2 + 9}$
- (c)  $|H(j\omega)|^2 = \frac{\omega^4 - 9\omega^2 + 25}{\omega^6 + 3\omega^4 - 3\omega^2 + 4}$
- (d)  $|H(j\omega)|^2 = \frac{\omega^4 + 10\omega^2 + 9}{\omega^6 + 7\omega^4 + 21\omega^2 + 36}$
- (e)  $|H(j\omega)|^2 = \frac{1 + \omega^6}{\omega^6 + 2\omega^4 + \omega^2 + 36}$
- (f)  $|H(j\omega)|^2 = \frac{\omega^4 + 2\omega^2 + 1}{\omega^8 - 5\omega^6 + 11\omega^4 - 11\omega^2 + 4}$

3-10. Escriba un programa de computadora para implementar

- (a) Procedimiento de construcción 3-1.
- (b) Procedimiento de construcción 3-2.
- (c) Procedimiento de construcción 3-3.

#### 4. Funciones real positiva y pasividad.

Sea  $\eta$  un elemento de un dispositivo de un puerto que no contiene fuentes independientes internas. Suponiendo que todas las condiciones iniciales dentro de  $\eta$  son cero, entonces  $\eta$  se puede caracterizarse por  $I(s) = Y(s)V(s)$  o  $V(s) = Z(s)I(s)$  donde  $I(s)$  y  $V(s)$  son, respectivamente, las transformadas de Laplace de la corriente que entra y el voltaje a través del elemento de un dispositivo de un puerto;  $Y(s)$  y  $Z(s)$  se denominan, respectivamente, las funciones de admitancia e impedancia propias (driving-point, DP) del elemento de un dispositivo de un puerto. La base para la mayoría de las síntesis con solo resistencias, inductores y condensadores **de valor positivo**<sup>29</sup> es el concepto de **funciones reales positivas**. Brune<sup>30</sup> ha demostrado que cada función propia (driving-point DP) de un dispositivo de un puerto que contiene solo elementos **pasivos** es real y positiva. Por el contrario, **cada función real positiva se puede realizar como una función propia (driving point, DP) de una red** que contiene solo elementos pasivos como elementos RLC positivos, transformadores ideales y bobinas acopladas con matrices de inductancia definidas como simétricas y positivas.<sup>31</sup>

Se dice que una función  $F(s)$  es real positiva (PR) si satisface las dos condiciones siguientes:

1.  $F(s)$  es real cuando  $s$  es real.
2.  $\operatorname{Re}[F(s)] \geq 0$  siempre que  $\operatorname{Re}[s] \geq 0$ .

La primera condición puede comprobarse con bastante facilidad mediante inspección, porque simplemente requiere que todos los coeficientes de  $F(s)$  sean reales. La segunda condición significa que la función compleja  $F(\cdot)$  mapea la mitad derecha (RH) y el eje imaginario del plano-s en RH y el eje imaginario del plano-F, como se muestra en la Fig. 4-1.

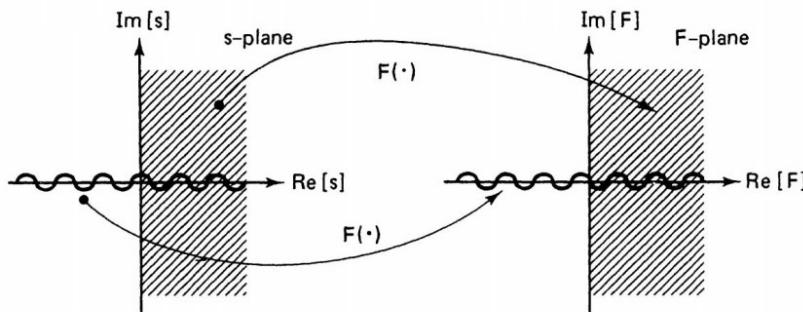


Fig. 4-1 Properties of PR functions.

Con estos antecedentes, ahora consideramos un concepto fundamental en la síntesis de circuitos pasivos.

29 En adelante, a menos que se especifique explícitamente lo contrario, se supone que todas las resistencias, inductancias y capacitancias tienen valores positivos.

30 Ver referencia [1].

31 Los resistores, inductores y condensadores pasivos (RLC) son aquellos con resistencias, inductancias y capacitancias positivas, respectivamente.

Se dice que una matriz  $A$  simétrica de  $n \times n$  es definida como positiva si  $x^t A x > 0$  para todo vector  $x \neq 0$   $n$  dimensional.

**TEOREMA 4-1** Sea  $\eta$  una red de un dispositivo de un puerto que contiene únicamente elementos pasivos. Entonces, tanto las funciones DP de impedancia y de admitancia de  $\eta$  son PR (función real positiva).

**PRUEBA.** Para simplificar nuestra demostración, asumimos que solo contiene resistencias, inductores y condensadores pasivos. La extensión de esta prueba simplificada al caso general es clara. Además, demostramos el teorema solo para la función de impedancia. El caso de admitancia puede probarse de forma dual.

Consideré el circuito de la Fig. 4-2, donde la red  $\eta$  de un dispositivo de un puerto contiene solo resistores pasivos, inductores y capacitores. El teorema de Tellegen establece que

$$\sum_{k=1}^b V_k \bar{I}_k = 0 \quad (4-1)$$

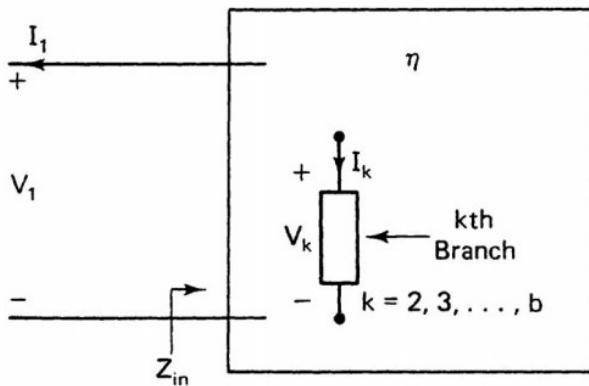


Fig. 4-2 Un circuito de un dispositivo de un puerto  
conteniendo  $b - 1$  elementos RLC pasivos

donde  $\bar{I}_k$  es el conjugado complejo de  $I_k$ , y asumimos que  $\eta$  contiene  $b - 1$  elementos, es decir, de 2 a  $b$ . Claramente, (4-1) se puede escribir como

$$-V_1 \bar{I}_1 = \sum_{k=2}^b V_k \bar{I}_k = \sum_R V_k \bar{I}_k + \sum_C V_k \bar{I}_k + \sum_L V_k \bar{I}_k \quad (4-2)$$

donde  $\sum_R$ ,  $\sum_C$  y  $\sum_L$  denotan sumas sobre todos los resistores, todos los capacitores y todos los inductores, respectivamente. Sea  $Z_{in}(s)$  la impedancia DP de  $\eta$ , entonces

$$V_1 = -Z_{in}(s) I_1 \quad (4-3a)$$

Además, si la rama  $k$  es una resistencia de  $R_k \Omega$ , entonces

$$V_k = R_k I_k \quad (4-3b)$$

Si la rama  $k$  es un condensador de  $C_k$  Faradios, entonces

$$V_k = \frac{1}{s C_k} I_k \quad (4-3c)$$

Finalmente, si la rama  $k$  es un inductor de  $L_k$  Henries, entonces

$$V_k = s L_k I_k \quad (4-3d)$$

Debido a que  $\eta$  contiene solo elementos pasivos, tenemos

$$R_k > 0 , L_k > 0 , y C_k > 0 \quad (4-4)$$

Después de sustituir (4-3) en (4-2), obtenemos

$$\begin{aligned} Z_{in}(s)|I_1|^2 &= \sum_k R_k |I_k|^2 + \sum_e \frac{1}{sC_k} |I_k|^2 + \sum_k sL_k |I_k|^2 \\ \implies Z_{in}(s) &= \sum_k R_k \frac{|I_k|^2}{|I_1|^2} + \frac{1}{s} \sum_e \frac{1}{C_k} \frac{|I_k|^2}{|I_1|^2} + s \sum_k L_k \frac{|I_k|^2}{|I_1|^2} \end{aligned} \quad (4-5)$$

Sea  $s = \sigma + j\omega$ . Entonces (4-5) se convierte en

$$Z_{in}(s) = \sum_k R_k \frac{|I_k|^2}{|I_1|^2} + \frac{\sigma}{\sigma^2 + \omega^2} \sum_e \frac{1}{C_k} \frac{|I_k|^2}{|I_1|^2} + \sigma \sum_k L_k \frac{|I_k|^2}{|I_1|^2} - j \frac{\omega}{\sigma^2 + \omega^2} \sum_e \frac{1}{C_k} \frac{|I_k|^2}{|I_1|^2} + j\omega \sum_k L_k \frac{|I_k|^2}{|I_1|^2} \quad (4-6)$$

Por lo tanto, tenemos

$$\operatorname{Re}[Z_{in}(s)] = \sum_k R_k \frac{|I_k|^2}{|I_1|^2} + \frac{\sigma}{\sigma^2 + \omega^2} \sum_e \frac{1}{C_k} \frac{|I_k|^2}{|I_1|^2} + \sigma \sum_k L_k \frac{|I_k|^2}{|I_1|^2} \quad (4-7)$$

Desde (4-7), concluimos que si  $\sigma \geq 0$ , luego  $\operatorname{Re}[Z_{in}(s)] \geq 0$ . Es decir

$$\operatorname{Re}[Z_{in}(s)] \geq 0 \text{ cuando sea } \operatorname{Re}[s] \geq 0$$

Desde (4-6), si  $\omega = 0$ , luego  $Z_{in}(s)$  es real. Por lo tanto, también concluimos que  $Z_{in}(s)$  es real cuando  $s$  es real. Así,  $Z_{in}(s)$  es PR (función real positiva).

Brune ha demostrado que lo contrario al Teorema 4-1 es cierto, y simplemente expresamos el resultado.

**TEOREMA 4-2** Sea  $F(s)$  una función real positiva. Entonces  $F(s)$  se puede realizar como una función DP de impedancia o de admitancia de un dispositivo de un puerto que contenga solo elementos pasivos.

En vista de los dos teoremas anteriores, podemos concluir:

**COROLARIO 4-3**  $F(s)$  es PR si, y solo si,  $1/F(s)$  es PR.

## 4-1 Polinomio de Hurwitz

En general, es muy difícil verificar la condición 2 de una función PR. Por lo tanto, es deseable tener condiciones alternativas pero equivalentes para verificar si la función es real positiva. Una forma de lograr este objetivo es a través del concepto de Hurwitz y polinomios modificados de Hurwitz.

Se dice que un polinomio  $p(s)$  es Hurwitz si todas las raíces de  $p(s)$  están ubicadas en el semiplano izquierdo (LH, Left Half) (**sin incluir el eje imaginario**); se dice que  $p(s)$  es un polinomio de **Hurwitz modificado** si ninguna de sus raíces está en el semiplano-s derecho, RH (Right Half) y todas las raíces del eje imaginario son simples, con multiplicidad igual a uno.<sup>32</sup>

Con base en las definiciones establecidas en el párrafo anterior, necesitamos ubicar todas las raíces de un polinomio  $p(s)$  antes de poder decir si  $p(s)$  es un polinomio de Hurwitz o un polinomio de Hurwitz modificado. Se sabe que encontrar todas las raíces de un polinomio no es una tarea fácil. En consecuencia, las aplicaciones directas de la definición de un polinomio de Hurwitz o de un polinomio modificado de Hurwitz no son deseables. En esta sección, describimos métodos para determinar si un polinomio es Hurwitz o Hurwitz modificado (o ninguno) sin encontrar sus raíces.

Sea  $p(s)$  el polinomio en cuestión. Suponga primero que  $p(s)$  no es un polinomio par ni impar. Para probar si tal polinomio  $p(s)$  es de hecho un polinomio de Hurwitz, podemos usar la prueba de Hurwitz, que aplica los pasos del algoritmo de Euclides (para encontrar el mayor factor común) a las partes pares e impares de  $p(s)$  con algunas modificaciones menores. Específicamente, primero descomponemos  $p(s)$  en sus partes pares e impares,  $M(s)$  y  $N(s)$ , respectivamente, como  $p(s)=M(s)+N(s)$ . Usando  $M(s)$  y  $N(s)$  formamos la razón de prueba  $T(s)$ , cuyo numerador tiene un grado más alto que el de su denominador. Suponga que  $p(s)$  es un polinomio de grado  $d$ . Luego

$$T(s)=\frac{N(s)}{M(s)} \quad \text{si } d \text{ un entero impar} \quad (4-8a)$$

Y

$$T(s)=\frac{M(s)}{N(s)} \quad \text{si } d \text{ un entero par} \quad (4-8b)$$

A continuación, realizamos la expansión de fracción continua alrededor de infinito en la relación de prueba  $T(s)$ , eliminando un polo a la vez en forma de cociente  $q_i s$ , lo que da como resultado

$$\begin{aligned} T(s) = & q_1 s + \cfrac{1}{q_2 s + \cfrac{1}{q_3 s + \ddots}} \\ & + \cfrac{1}{q_{\hat{d}} s} \end{aligned} \quad (4-9)$$

donde  $q_i s$  es el i-ésimo cociente,  $q_i$  es el coeficiente asociado.

Si hay uno o más cocientes con coeficientes negativos, entonces  $p(s)$  no es ni un polinomio de Hurwitz ni un polinomio de Hurwitz modificado. Por otro lado, si hay  $d$  cocientes ( $\hat{d}=d$ ) y cada cociente tiene un coeficiente positivo, entonces  $p(s)$  es un polinomio de Hurwitz. Finalmente, si el número de cociente  $\hat{d}$  es menor que  $d$  pero cada cociente tiene un coeficiente positivo, esto significa que hay un factor común  $k(s)$  entre  $M(s)$  y  $N(s)$ . Por tanto, podemos escribir  $p(s)$  como

<sup>32</sup> Claramente, un polinomio de Hurwitz modificado no es necesariamente Hurwitz, pero un polinomio de Hurwitz también es un polinomio de Hurwitz modificado.

$$p(s) = k(s)[\hat{M}(s) + \hat{N}(s)] = k(s)\hat{p}(s) \quad (4-10)$$

donde  $M(s) = k(s)\hat{M}(s)$ ,  $N(s) = k(s)\hat{N}(s)$  y  $\hat{p}(s) = \hat{M}(s) + \hat{N}(s)$

Debido a que  $k(s)$  es un factor común tanto de un polinomio par como de uno impar,  $k(s)$  es un polinomio par o impar. Consideremos primero el caso en el que  $k(s)$  es un polinomio par. En este caso, podemos escribir

$$k(s) = k(-s) \quad (4-11)$$

Esto implica que las raíces de  $k(s)$  ocurrirán con simetría con respecto al origen:  $s_j$  es una raíz de  $k(s)$  si y solo si  $-s_j$  es una raíz de  $k(s)$ . Observe que si  $s_j$  no es un número puramente imaginario, entonces  $k(s)$  contendrá una raíz en el plano-s RH (porque si  $s_j$  está en el plano-s LH, entonces  $-s_j$  estará en el plano-s RH, y viceversa al revés). Por tanto,  $k(s)$  es a lo sumo un polinomio de Hurwitz modificado. Esto ocurre sólo si todas las raíces de  $k(s)$  son simples y puramente imaginarias, en el eje imaginario del plano-s. En consecuencia,  $p(s)$  no puede ser un polinomio de Hurwitz.

Supongamos ahora que  $k(s)$  es un polinomio impar. Debido a que un polinomio impar se puede escribir como un producto de  $s$  y de un polinomio par,  $k(s)$  es como mucho un polinomio de Hurwitz modificado. Por tanto, nuevamente,  $p(s)$  no puede ser un polinomio de Hurwitz.

Debido a que todos los  $\hat{d}$  cocientes de  $T(s)$  tienen coeficientes positivos, el polinomio  $p(s)$  en la (4-10) es Hurwitz. Por lo tanto, si  $k(s)$  es un polinomio de Hurwitz modificado [es decir, si todas las raíces de  $k(s)$  son simples y puramente imaginarias], entonces  $p(s)$  es un polinomio de Hurwitz modificado.

A continuación se describe un procedimiento para determinar si  $k(s)$  es un polinomio de Hurwitz modificado junto con el caso en el que  $p(s)$  es un polinomio par o impar.

Supongamos ahora que  $p(s)$  es un polinomio par o impar de grado  $d$ . Entonces  $p(s)$  es un polinomio de Hurwitz modificado si y solo si  $p(s)$  solo tiene raíces de eje simple e imaginario (incluido el origen).

Para determinar si  $p(s)$  es un polinomio de Hurwitz modificado, formamos una razón de prueba  $\hat{T}(s)$  como

$$\hat{T}(s) = \frac{p(s)}{(d/ds)p(s)} = \frac{p(s)}{p'(s)} \quad (4-12)$$

y realice la expansión de fracción continua alrededor del infinito en  $\hat{T}(s)$ , como en (4-9). Entonces  $p(s)$  es un polinomio de Hurwitz modificado si y solo si hay  $d$  cocientes en la expansión y cada cociente tiene un coeficiente positivo.<sup>33</sup> Los siguientes ejemplos ilustran estos procedimientos de prueba.

<sup>33</sup> En el caso de que  $p(s)$  sea un polinomio par o impar, si hay uno o más coeficientes negativos en la expansión fraccionaria continua de  $\hat{T}(s)$ , entonces  $p(s)$  tiene una raíz del plano-s RH; y si todos los coeficientes son positivos pero solo hay  $\hat{d} < d$  cocientes, entonces todas las raíces de  $p(s)$  están en el eje imaginario del plano-s, pero  $p(s)$  tiene raíces no simples o múltiples. Cualquiera de las situaciones implica que  $p(s)$  no es un polinomio de Hurwitz modificado.

**Ejemplo 4-1** Determine si

$$p(s) = s^4 + 3s^3 + 5s^2 + 5s + 2 \quad (4-13)$$

es un polinomio de Hurwitz.

**Solución:**

$$\begin{aligned} p(s) &= s^4 + 3s^3 + 5s^2 + 5s + 2 \\ &= (s^4 + 5s^2 + 2) + (3s^3 + 5s) \\ &= M(s) + N(s) \end{aligned}$$

Como  $d=4$  es par, la razón de prueba es

$$T(s) \triangleq \frac{M(s)}{N(s)} = \frac{s^4 + 5s^2 + 2}{3s^3 + 5s} \quad (4-14)$$

Claramente, en  $s=\infty$ ,  $T(s)=\infty$  [es decir,  $T(s)$  tiene un polo en el infinito]. Extrayendo este polo en el infinito en forma de cociente, obtenemos

$$T(s) = \frac{1}{3}s + \frac{1}{T_1(s)} \quad (4-15)$$

donde  $(1/3)s$  es el primer cociente,  $1/3$  es su coeficiente, y

$$\frac{1}{T_1(s)} = T(s) - \frac{1}{3}s = \frac{(10/3)s^2 + 2}{3s^3 + 5s}$$

es el resto. Por lo tanto,

$$T_1(s) = \frac{3s^3 + 5s}{(10/3)s^2 + 2} \quad (4-16)$$

Observe que  $T_1(\infty) = \infty$ . Por tanto, podemos extraer un polo de  $T_1(s)$  en forma de cociente como hicimos con  $T(s)$ . El resultado es escribir  $T_1(s)$  como

$$T_1(s) = \frac{9}{10}s + \frac{1}{T_2(s)} \quad (4-17)$$

donde  $(9/10)s$  es el segundo cociente,  $9/10$  es su coeficiente y  $1/T_2(s)$  es el segundo resto. Sustituyendo (4-17) en (4-16), tenemos

$$T(s) = \frac{1}{3}s + \frac{1}{(9/10)s + [1/T_2(s)]} \quad (4-18)$$

Donde

$$\frac{1}{T_2(s)} = T_1(s) - \frac{9}{10}s = \frac{(16/5)s}{(10/3)s^2 + 2}$$

o

$$T_2(s) = \frac{(10/3)s^2 + 2}{(16/5)s} \quad (4-19)$$

Claramente,  $T_2(\infty) = \infty$ . Removiendo el polo en el infinito de  $T_2(s)$ , obtenemos

$$T_2(s) = \frac{25}{24}s + \frac{1}{T_3(s)} \quad (4-20)$$

donde  $(25/24)s$  es el tercer cociente,  $25/24$  es su coeficiente y

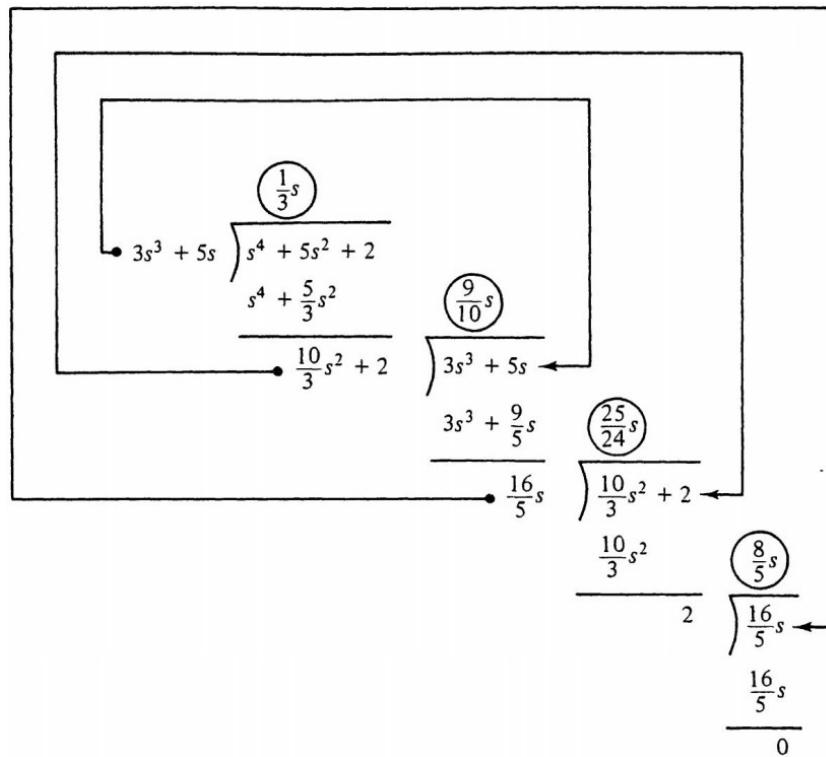
$$\frac{1}{T_3(s)} = T_2(s) - \frac{25}{24}s = \frac{2}{(16/5)s} = \frac{1}{(8/5)s} \quad (4-21)$$

es el tercer resto. Sustituyendo (4-20) y (4-21) en (4-18), obtenemos la expansión de fracción continua de  $T(s)$  en  $s=\infty$  como

$$T(s) = \frac{1}{3}s + \cfrac{1}{(9/10)s + \cfrac{1}{(25/24)s + \cfrac{1}{(8/5)s}}} \quad (4-22)$$

Debido a que hay cuatro cocientes y sus coeficientes son positivos (siendo  $1/3$ ,  $9/10$ ,  $25/24$  y  $8/5$ ),  $p(s)$  es Hurwitz.

El ejemplo anterior proporciona un procedimiento paso a paso para obtener una expansión de fracción continua de la relación de prueba  $T(s)$ . Aunque el proceso da una idea de lo que realmente hace una expansión de fracción continua, es un procedimiento engorroso. Afortunadamente, es posible obtener la expansión fraccionaria continua de una función racional por un medio más simple: un método de división larga. Como ejemplo, la expansión de fracción continua de  $T(s)$  de (4-12) en  $s=\infty$  viene dada por



donde las cantidades rodeadas son los cocientes. Con estos cocientes, podemos formar (4-22) con bastante facilidad. De hecho, podemos determinar si un polinomio es Hurwitz o no simplemente verificando los coeficientes de las cantidades rodeadas.

**Ejemplo 4-2** Determine si el polinomio

$$p(s) = s^4 + s^3 + 6s^2 + 2s + 8 \quad (4-23)$$

es un polinomio de Hurwitz o de Hurwitz modificado (o ninguno).

**Solución:** debido a que  $p(s)$  no es un polinomio par ni impar, escribimos  $p(s)$  como

$$p(s) = (s^4 + 6s^2 + 8) + (s^3 + 2s) \triangleq M(s) + N(s)$$

y formar la relación de prueba

$$T(s) = \frac{M(s)}{N(s)} = \frac{s^4 + 6s^2 + 8}{s^3 + 2s} \quad (4-24)$$

Una expansión de fracción continua de  $T(s)$  en  $s = \infty$  da

$$T(s) = s + \frac{1}{(1/4)s} \quad (4-25)$$

Esto implica que existe un factor común entre  $M(s) \triangleq s^4 + 6s^2 + 8$  y  $N(s) \triangleq s^3 + 2s$ . Encontrar el máximo común divisor, MCD(greatest common factor, GCF) entre  $M(s)$  y  $N(s)$  es trivial si realizamos la expansión de fracción continua mediante el método de división larga: el MCD es el divisor que deja el resto cero. Por ejemplo, en este caso, el proceso de división larga viene dado por

$$\begin{array}{r} s \\ \hline s^3 + 2s \overline{)s^4 + 6s^2 + 8} & \frac{1}{4}s \\ s^4 + 2s^2 & \\ \hline 4s^2 + 8 \overline{)s^3 + 2s} & \\ s^3 + 2s & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Por tanto,  $(4s^2 + 8)$  es el MCD entre las partes pares e impares de  $p(s)$ . Es decir, podemos escribir  $p(s)$  como

$$p(s) = (4s^2 + 8)[(s^2 + 4) + s] \triangleq k(s)\hat{p}(s)$$

Como todos los coeficientes en (4-25) son positivos,  $\hat{p}(s) \triangleq s^2 + s + 4$  es Hurwitz. Por tanto, si  $k(s) \triangleq 4s^2 + 8$  es Hurwitz modificado, entonces  $p(s)$  también es un polinomio de Hurwitz modificado.

Para probar si  $k(s)$  es un polinomio de Hurwitz modificado, formamos la razón de prueba

$$\hat{T}(s) = \frac{k(s)}{(d/ds)k(s)} = \frac{4s^2 + 8}{8s} \quad (4-26)$$

La expansión de fracción continua de  $\hat{T}(s)$  en  $s = \infty$  está dada por

$$\hat{T}(s) = \frac{1}{2}s + \frac{1}{s} \quad (4-27)$$

Como  $k(s)$  es un polinomio de segundo grado y hay dos cocientes, ambos con coeficientes positivos,  $k(s)$  es Hurwitz modificado. Por tanto,  $p(s)$  de (4-23) es un polinomio de Hurwitz modificado.

Dados los números  $c, e, \alpha$  es factor común de ambos en " $\alpha$ " multiplicado por otro número de  $c$  y de igual forma con " $e$ ".

$$\text{Si } p = c + e \wedge T = \frac{c}{e} \Rightarrow \frac{e}{c} \Rightarrow T = \frac{\alpha b}{\alpha d} \wedge \hat{p} = b + d$$

Entonces  $\boxed{p = k \cdot \hat{p}}$  siendo  $k$  múltiplo de  $b+d$  o sea  $\alpha = k$   
Por lo tanto si  $\hat{p}$  es Hurwitz,  $\wedge$  como  $k$  puede llegar a ser Hurwitz modificado entonces  $\hat{p}$  llega a ser un Hurwitz modificado

$$\text{Siendo } p(s) = (s^4 + 6s^2 + 8) + (s^3 + 2s) \Rightarrow \text{cociente de } T(s) = \frac{s^4 + 6s^2 + 8}{s^3 + 2s}$$

Usando el método de división larga

$$\begin{array}{r} (s) \\ \hline s^3 + 2s ) s^4 + 6s^2 + 8 \\ - s^4 + 2s^2 \\ \hline 4s^2 + 8 ) s^3 + 2s \\ - s^3 + 2s \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\frac{(s)}{(4)} \Rightarrow d = 2$$

Como  $d < d$ , viendo que  $T(s) = s + \frac{1}{\frac{d}{4}} = \frac{s^2 + 4}{s} = \frac{(s^2 + 4)}{s}$   
tiene coeficientes positivos, nos da que  $\hat{p}(s) = (s^2 + 4) + \frac{s}{s}$

$$\text{Ahora } p(s) = k(s) \left( \frac{\hat{p}(s)}{s^2 + s + 4} \right) \text{ tiene un } k(s) \text{ factor común}$$

$$\Rightarrow k(s) = \frac{p(s)}{\hat{p}(s)}$$

$$\Rightarrow p(s) = M + N$$

$$\begin{array}{r} s^4 + 6s^2 + 8 ) s^2 + s + 4 \\ - s^4 + s^3 + 4s^2 \\ \hline s^3 + 2s + 8 \\ - s^3 + 2s + 8 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$(s^2 + 2) = k(s)$$

Finalmente

$$p(s) = (s^2 + 2) \left( \frac{(s^2 + 4) + s}{s^2 + s + 4} \right)$$

$$\text{es Hurwitz porque los coef de la div} > 0$$

**Ejemplo 4-3** Determine si el polinomio

$$p(s) = s^6 + s^5 + 4s^4 + 2s^3 + 5s^2 + s + 2 \quad (4-28)$$

es Hurwitz o Hurwitz modificado o ninguno.

**Solución:** escribamos  $p(s)$  como

$$\begin{aligned} p(s) &= (s^6 + 4s^4 + 5s^2 + 2) + (s^5 + 2s^3 + s) \\ &\triangleq M(s) + N(s) \end{aligned}$$

Por tanto, la razón de prueba  $T(s)$  viene dada por

$$\begin{aligned} T(s) &= \frac{s^6 + 4s^4 + 5s^2 + 2}{s^5 + 2s^3 + s} \\ &= s + \frac{1}{(1/2)s} \end{aligned} \quad (4-29)$$

Esto implica que el MCD,  $k(s)$ , entre  $M(s) \triangleq s^6 + 4s^4 + 5s^2 + 2$  y  $N(s) \triangleq s^5 + 2s^3 + s$  no es una constante. De hecho,  $k(s)$  viene dado por

$$k(s) = 2s^4 + 4s^2 + 2 \quad (4-30)$$

Para probar si  $k(s)$  es Hurwitz modificado, formamos la razón de prueba  $\hat{T}(s)$  como

$$\hat{T}(s) = \frac{k(s)}{d/ds k(s)} = \frac{2s^4 + 4s^2 + 2}{8s^3 + 8s} \quad (4-31)$$

y realice la expansión de fracción continua de  $\hat{T}(s)$  en  $s = \infty$  como

$$\hat{T}(s) = \frac{1}{4}s + \frac{1}{(1/4)s} \quad (4-32)$$

Debido a que  $k(s)$  es un polinomio de cuarto grado y solo hay dos cocientes en (4-32),  $k(s)$  tiene múltiples raíces de eje imaginario. De hecho,  $s = \pm j$  son raíces dobles de  $k(s)$ . Por tanto,  $p(s)$  de (4-28) no es ni un polinomio de Hurwitz ni un polinomio modificado de Hurwitz.

**Ejemplo 4-4** Determine si

$$p(s) = s^5 + 2s^3 + 2s \quad (4-33)$$

es un polinomio de Hurwitz modificado.

**Solución:** debido a que  $p(s)$  es un polinomio impar, formamos la razón de prueba

$$\hat{T}(s) = \frac{s^5 + 2s^3 + 2s}{5s^4 + 6s^2 + 2} \quad (4-34)$$

Una expansión de fracción continua (parcial) de  $\hat{T}(s)$  en  $s = \infty$  da

$$\begin{aligned} \hat{T}(s) &= \frac{1}{5}s + \frac{1}{\frac{25}{4}s + \frac{1}{-\frac{1}{5}s + \frac{2s}{-4s^2 + 2}}} \end{aligned} \quad (4-35)$$

Debido a que el tercer cociente tiene un coeficiente negativo, podemos terminar el proceso de expansión y concluir que  $p(s)$  de (4-33) no es un polinomio de Hurwitz modificado. De hecho,  $p(s)$  tiene dos raíces en el plano-s RH.

**Ejemplo 4-5** Determine si

$$p(s) = s^6 + 6s^4 + 11s^2 + 6 \quad (4-36)$$

es un polinomio de Hurwitz modificado.

**Solución:** Por (4-12), la relación de prueba es

$$\hat{T}(s) = \frac{s^6 + 6s^4 + 11s^2 + 6}{6s^5 + 24s^3 + 22s} \quad (4-37)$$

Una expansión de fracción continua de  $\hat{T}(s)$  en  $s=\infty$  da

$$\begin{aligned} \hat{T}(s) = & \frac{1}{6}s + \cfrac{1}{3s + \cfrac{1}{s + \cfrac{1}{\frac{3}{5}s + \cfrac{1}{\frac{25}{3}s + \cfrac{1}{\frac{1}{15}s}}}}} \\ & (4-38) \end{aligned}$$

Como hay seis cocientes y todos tienen coeficientes positivos,  $p(s)$  es un polinomio de Hurwitz modificado.

La prueba de Hurwitz es una herramienta fundamental en muchas disciplinas, especialmente en estudios de estabilidad de sistemas lineales. Se han encontrado muchas condiciones necesarias; condiciones que debe cumplir un polinomio para ser candidato a polinomio de Hurwitz. Dos de estas condiciones necesarias son:

1. No faltan términos en el polinomio. (4-39a)

2. O todos los coeficientes son positivos o todos son negativos. (4-39b)

Por ejemplo, el polinomio  $p_1(s) = s^3 + s + 2$  no es Hurwitz, porque le falta un término: el término de segunda potencia. El polinomio  $p_2(s) = s^3 + s^2 - s + 1$  no es Hurwitz, porque hay coeficientes tanto positivos como negativos presentes en el polinomio.

Debe enfatizarse aquí que las dos condiciones en (4-39) son necesarias pero no suficientes. Por ejemplo, el polinomio

$$p_3(s) = s^4 + s^3 + 6s^2 + 26s + 20 \quad (4-40)$$

satisface las dos condiciones necesarias de (4-39), pero  $p_3(s)$  de (4-40) no es un polinomio de Hurwitz, porque  $p_3(s)$  tiene un par de raíces complejas  $1 \pm j3$  en el semiplano plano-s RH. En otras palabras, si un polinomio  $p(s)$  no pasa ninguna de las dos pruebas en (4-39), entonces  $p(s)$  no es Hurwitz. Sin embargo, si  $p(s)$  pasa todas estas dos condiciones, no significa que  $p(s)$  sea Hurwitz. En ese caso, se debe administrar una prueba de Hurwitz a  $p(s)$  para determinar su estado. Para casos simples, también conocemos algunas condiciones suficientes. Ellos son:

1. Un polinomio de primer o segundo orden sin términos faltantes y con todos sus coeficientes del mismo signo es Hurwitz. (4-41a)

2. Un producto de los polinomios de Hurwitz es Hurwitz. (4-41b)

Estas dos condiciones suficientes pueden utilizarse ventajosamente. Por ejemplo, si un polinomio complicado se puede factorizar en (o tiene la forma de) un producto de polinomios de primer y segundo orden como

$$p(s) = p_1(s)p_2(s)\dots p_q(s) \quad (4-42)$$

donde cada  $p_i(s)$ ,  $i=1,2,\dots,q$ , es un polinomio de primer o segundo grado, entonces la prueba de Hurwitz de  $p(s)$  ahora se reduce a verificar los coeficientes de cada factor polinómico  $p_i(s)$ , donde  $i=1,2,\dots,q$ . Si cada factor  $p_i(s)$ , donde  $i=1,2,\dots,q$ , es Hurwitz, entonces  $p(s)$  es Hurwitz. Por otro lado, si un factor, digamos  $p_k(s)$ , no es un polinomio de Hurwitz, entonces  $p(s)$  tampoco es un polinomio de Hurwitz.

**Ejemplo 4-6** Determine si

$$p(s) = s^5 + 6s^4 + 16s^3 + 27s^2 + 22s + 12 \quad (4-43)$$

es un polinomio de Hurwitz.

**Solución:** Claramente  $p(s)$  de (4-43) satisface las condiciones en (4-39). Podemos administrar la prueba de Hurwitz para determinar si  $p(s)$  es Hurwitz, o podemos aprovechar las condiciones suficientes de (4-41) factorizando  $p(s)$  de la siguiente manera:

$$p(s) = (s^2 + s + 1)(s^2 + 2s + 4)(s + 3) \quad (4-44)$$

La primera prueba de condición suficiente dice que cada uno de los tres factores de  $p(s)$  es Hurwitz, y la segunda prueba de condición suficiente concluye que  $p(s)$  Hurwitz.

Observe que los productos de Hurwitz y los polinomios de Hurwitz modificados no son necesariamente polinomios de Hurwitz modificados. Se da un ejemplo a continuación: Suponga que  $p(s)$  es un producto de un polinomio de Hurwitz y dos polinomios de Hurwitz modificados como

$$p(s) = (s^2 + s + 1)(s^3 + s)(s^2 + 1) \quad (4-45)$$

Debido a que  $p(s)$  tiene raíces dobles en  $s = \pm j$ ,  $p(s)$  no es un polinomio de Hurwitz modificado. Sin embargo, un producto de polinomios de Hurwitz y un polinomio de Hurwitz modificado es siempre un polinomio de Hurwitz modificado.

Finalmente, exponemos un resultado que será de utilidad más adelante.

**TEOREMA 4-4** Sea  $p(s) = M(s) + N(s)$  un polinomio de Hurwitz donde  $M(s)$  y  $N(s)$  son, respectivamente, las partes pares e impares de  $p(s)$ , las funciones racionales

$$F_1(s) \triangleq \frac{M(s)}{N(s)} \quad \text{y} \quad F_2(s) \triangleq \frac{N(s)}{M(s)} \quad (4-46)$$

se puede realizar como funciones características (DP) de impedancia o admitancia de redes de un polo que contienen únicamente inductores y condensadores.

Por el contrario, la suma del numerador y el denominador de una función características (DP) de un dispositivo de un puerto sin pérdidas es un polinomio de Hurwitz.

## 4-2 Funciones reales y positivas (PR)

Recordamos que aquella función real y positiva  $F(s)$  satisface dos condiciones: sobre la parte real -  $F(s)$  es real cuando  $s$  es real [la cual significa que los coeficientes del polinomio de numerador y denominador de  $F(s)$  deben ser reales] - y sobre la parte positiva -  $\text{Re}[F(s)] \geq 0$  siempre que  $\text{Re}[s] \geq 0$ . En general, la parte positiva es en la que se presenta dificultad a verificar. En lo siguiente, establecemos algunas alternativas pero equivalentes condiciones.

**Teorema 4-5**  $F(s) \triangleq A(s)/B(s)$  es PR si, y solamente si, este satisface las siguientes condiciones:

1.  $F(s)$  es real cuando  $s$  es real.
2.  $B(s)$  es un polinomio de Hurwitz o un polinomio modificado de Hurwitz.
3. Los polos del eje imaginario de  $F(s)$  son simples<sup>34</sup> y los residuos son reales y positivos.
4.  $\text{Re}[F(j\omega)] \geq 0$  para todo  $\omega$

Tenga en cuenta que el residuo de una función  $F(s)$  en el polo simple  $s_k$ , denotado por  $\xi_k$ , está dado por

$$\xi_k = [(s-s_k)F(s)]|_{s=s_k} = \frac{A(s)}{(d/ds)B(s)} \Big|_{s=s_k} \quad \text{si } s_k \text{ es finito} \quad (4-48a)$$

$$\xi_k = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s F(s)} \quad \text{si } s_k = \infty \quad (4-48b)$$

donde  $A(s)$  y  $B(s)$  son, respectivamente, el numerador y el denominador polinomios de  $F(s)$ . De (4-48), observamos que el residuo de  $F(s)$  en un polo real es real y los residuos de  $F(s)$  en un par de polos conjugados complejos son conjugados complejos.

Para ilustrar el uso de (4-48), consideremos la función racional

$$F(s) = \frac{4s+2}{s^3 + 7s^2 + 17s + 15} = \frac{4s+2}{(s+3)(s+2+j)(s+2-j)} \quad (4-49)$$

Aquí,  $F(s)$  tiene tres polos simples, a saber:  $s_1 = -3$ ,  $s_2 = -2 - j$  y  $s_3 = -2 + j$ . El residuo de  $F(s)$  en  $s_1$  se ha calculado de dos formas, como se indica en (4-48), como

$$\begin{aligned} \xi_1 &= [(s-s_1)F(s)]|_{s=s_1} = \frac{4s_1+2}{(s_1+2+j)(s_1+2-j)} \\ &= \frac{-12+2}{(-1+j)(-1-j)} = -\frac{10}{2} = -5 \end{aligned}$$

O

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{4s+2}{(d/ds)[s^3 + 7s^2 + 17s + 15]} \Big|_{s=s_1} = \frac{4s+2}{3s^2 + 14s + 17} \Big|_{s=s_1=-3} \\ &= \frac{-12+2}{27-42+17} = -\frac{10}{2} = -5 \end{aligned} \quad (4-50a)$$

Los residuos de  $F(s)$  en los polos  $s_2$  y  $s_3$  se dan como sigue:

<sup>34</sup> Los polos del eje imaginario de  $F(s)$  incluyen el polo en  $s=\infty$  o (si aplica). Debido a que la condición 2 del teorema 4-5 ya asegura que los polos del eje imaginario finito de  $F(s)$  son simples, necesitamos preocuparnos solo por el polo (posible) en el infinito. Si el grado de  $A(s)$  es como máximo un grado mayor que el grado de  $B(s)$ , entonces  $F(s)$  tiene como máximo un polo simple en  $s=\infty$ .

$$\xi_2 = \left. \frac{4s+2}{(s+3)(s+2-j)} \right|_{s=s_2=-2-j} = \frac{3+2j}{1+j} = \frac{5-j}{2} \quad (4-50b)$$

$$\xi_3 = \left. \frac{4s+2}{(s+3)(s+2+j)} \right|_{s=s_3=-2+j} = \frac{5+j}{2} \quad (4-50c)$$

Las condiciones 2 a 4 del teorema 4-5 forman un conjunto de criterios de prueba para la condición positiva de  $F(s)$ ; es decir,

$$\operatorname{Re}[F(s)] \geq 0 \text{ siempre que } \operatorname{Re}[s] \geq 0 \quad (4-51)$$

A diferencia de (4-51), la condición 4 del teorema 4-5 requiere que probemos  $\operatorname{Re}[F(s)]$  sólo a lo largo del eje imaginario. Esto, en general, se realiza mediante fuerza bruta o cálculos directos. En casos complicados, se puede utilizar una prueba de Sturm<sup>35</sup> para determinar si se cumple la condición 4 del Teorema 4-5.

En vista del Corolario 4-3 (que la inversa de una función PR es otra función PR) y de las condiciones establecidas en el Teorema 4-5, algunas de las siguientes condiciones son necesarias para que  $F(s)=A(s)/B(s)$  sea una función PR:

1. La diferencia entre los grados polinomiales de  $A(s)$  y  $B(s)$  es como máximo uno.

(4-52a)

(La razón es que los polos del eje imaginario de una función PR deben ser simples, y los polos en el origen y el infinito se consideran polos del eje imaginario. Por lo tanto, los polos en el origen y el infinito tienen que ser simples).

2. La diferencia entre las potencias más bajas de  $A(s)$  y  $B(s)$  es como máximo uno.

(4-52b)

(La misma razón que en la condición 1.)

3. Todos los coeficientes de  $A(s)$  y  $B(s)$  son no negativos.<sup>36</sup>

(Esto es para asegurar que tanto  $A(s)$  como  $B(s)$  sean al menos Hurwitz modificado).

4. No hay múltiplos de polos o de ceros en el eje imaginario. No hay polos o ceros en el semiplano plano-s RH.

(4-52d)

### Ejemplo 4-7

1.  $F_1(s)=(s^4+s^3+s^2+s+1)/(2s+7)$  no es PR, porque la diferencia entre las potencias más altas de  $A(s)$  y  $B(s)$  es más de uno.
2.  $F_2(s)=s^2/(2s+7)$  no es PR, porque la diferencia entre las potencias más bajas de  $A(s)$  y  $B(s)$  es más de uno.
3.  $F_3(s)=-(s^2+4s-3)/(s^2+4s+9)$  no es PR, porque hay un coeficiente negativo en  $A(s)$ .
4.  $F_4(s)=(s^2+4s-3)/(-s^2+4s+9)$  no es PR, porque hay un coeficiente negativo en  $B(s)$ .
5.  $F_5(s)=(s-3)/(s+4)$  no es PR debido a un cero en el plano-s RH.
6.  $F_6(s)=(s+3)/(s+4)$  no es PR, porque hay un polo en el plano-s RH.

<sup>35</sup> Consulte la Referencia [8] para obtener más detalles.

<sup>36</sup> Se pueden permitir coeficientes cero en  $A(s)$  y  $B(s)$ , porque  $A(s)$  y  $B(s)$  pueden ser polinomios de Hurwitz modificados y, sin embargo,  $F(s)$  es PR. Consulte  $F_{10}(s)$  en el ejemplo 4-8.

7.  $F_7(s) = (s^3 + s^2 + s + 2)/(s^4 + 2s^2 + 1)$  y  $F_8(s) = (s+3)/s^2$  son no PR debido a múltiples polos en el eje imaginario.
8.  $F_9(s) = [s^2(s+1)]/(s^3 + 3s^2 + 2s + 1)$  no es PR debido a los múltiples ceros del eje imaginario.

Las condiciones enumeradas en (4-52) son necesarias pero no suficientes. Se utilizan para filtrar funciones obvias que no son funciones PR. Para declarar que una función racional es PR, debemos aplicar el Teorema 4-5 o sus equivalencias.

**Ejemplo 4-8** Determine si la función racional

$$F_{10}(s) = \frac{s^2 + s + 2}{s^2 + 2} \quad (4-53)$$

es PR.

**Solución:** se puede demostrar fácilmente que  $F_{10}(s)$  pasa todas las pruebas de condición necesarias de (4-52). Esto significa que  $F_{10}(s)$  es una función PR potencial. Ahora aplicamos el teorema 4-5.

1.  $F_{10}(s)$  es real cuando  $s$  es real.
2. El denominador  $B(s)$  de  $F_{10}(s)$  es Hurwitz modificado, con los polos del eje imaginario en  $s_1 = j\sqrt{2}$  y  $s_2 = -j\sqrt{2}$ . Ambos polos son simples.
3. Sea  $\xi_k$  el residuo de  $F_{10}(s)$  en el polo  $s_k$ . Entonces

$$\xi_1 = \left. \frac{s^2 + s + 2}{s + j\sqrt{2}} \right|_{s=s_1=j\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

y

$$\xi_2 = \left. \frac{s^2 + s + 2}{s - j\sqrt{2}} \right|_{s=s_2=-j\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

Es decir, tanto  $\xi_1$  como  $\xi_2$  son reales y positivos.

$$\begin{aligned} 4. \quad \operatorname{Re}[F_{10}] &= \operatorname{Re} \left[ \frac{2 - \omega^2 + j\omega}{2 - \omega^2} \right] \\ &= \frac{2 - \omega^2}{2 - \omega^2} = 1 \quad \text{para todo } \omega \end{aligned}$$

Como  $F_{10}(s)$  satisface las cuatro condiciones del Teorema 4-5,  $F_{10}(s)$  es PR.

**Ejemplo 4-9** Determine si la función racional

$$F(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{s^3 + 5s^2 + 7s + 4}{s^3 + 2s^2 + 6s + 5} \quad (4-54)$$

es una función de relaciones públicas.

**Solución:** Seguimos la ruta tomada en el Ejemplo 4-8.

0.  $F(s)$  satisface todas las pruebas de observación enumeradas en (4-52) y, por lo tanto, es un candidato para PR.

1. Todos los coeficientes de  $F(s)$  son reales; por tanto,  $F(s)$  es real cuando  $s$  es real.
  2. El polinomio denominador de  $F(s)$ ,  $B(s)=s^3+2s^2+6s+5$ , es Hurwitz. Esto se puede verificar mediante la prueba de Hurwitz realizada en  $B(s)$ .
- Por tanto, todos los polos de  $F(s)$  [o las raíces de  $B(s)$ ] están en el plano  $s$  de LH.
3. No hay polos de ejes imaginarios.
  4. Del Capítulo 3, sabemos que  $\operatorname{Re}[F(s)] = M(s) =$  la parte par de  $F(s)$ .

Por tanto, (3-34) implica

$$\operatorname{Re}[F(j\omega)] = M(j\omega) = \frac{M_1(j\omega)M_2(j\omega) - N_1(j\omega)N_2(j\omega)}{M_2^2(j\omega) - N_2^2(j\omega)} \quad (4-55)$$

donde  $M_1(s)$  y  $M_2(s)$  son las partes pares de  $A(s)$  y  $B(s)$  respectivamente y  $N_1(s)$  y  $N_2(s)$  son las partes impares de  $A(s)$  y  $B(s)$ , respectivamente. Porque  $|B(j\omega)|^2 = M_2^2(j\omega) - N_2^2(j\omega) \geq 0$  para todo  $\omega$ , concluimos que:  $\operatorname{Re}[F(j\omega)] > 0$  para todo  $\omega$  si, y solo si,

$$M_1(j\omega)M_2(j\omega) - N_1(j\omega)N_2(j\omega) \geq 0 \quad \text{para todo } \omega \quad (4-56)$$

En este caso particular, tenemos

$$M_1(s) = 5s^2 + 4, \quad N_1(s) = s^3 + 7s, \quad M_2(s) = 2s^2 + 5, \quad \text{y} \quad N_2(s) = s^3 + 6$$

Por tanto, (4-56) se convierte en

$$\operatorname{Re}[F(j\omega)] > 0$$

Por (4-56), concluimos que

$$\operatorname{Re}[F(j\omega)] > 0 \quad \text{para todo } \omega$$

Por tanto, se satisfacen las cuatro condiciones del teorema 4-5. Esto significa que  $F(s)$  es PR.

Como se demostró en los Ejemplos 4-8 y 4-9, las pruebas PR afirmativas son relativamente fáciles para funciones racionales simples como  $F_{10}(s)$  de la (4-53), pero las pruebas PR requieren mucho tiempo para funciones complicadas como  $F(s)$  de la (4-54). Si es posible descomponer una función racional complicada en sumas de funciones más simples, entonces podemos aprovechar el siguiente hecho:

Una suma de funciones PR es una función PR (4-57)

A continuación, enumeramos algunas condiciones equivalentes más para probar funciones de relaciones públicas.

**TEOREMA 4-6**  $F(s) = A(s)/B(s)$  es PR si, y solo si,

1.  $F(s)$  es real cuando  $s$  es real.
2.  $p(s) \triangleq A(s) + B(s)$  es Hurwitz.
3.  $\operatorname{Re}[F(j\omega)] \geq 0$  para todos los  $\omega$ .

Tenga en cuenta que, en muchas ocasiones, probar las condiciones del Teorema 4-6 puede ser más

fácil que probar las del teorema 4-5.

**TEOREMA 4-7**  $F(s)$  es PR si, y solo si,

1.  $F(s)$  es real cuando  $s$  es real.
2.  $|F(s)| \leq |s|$  siempre que  $|s| < \pi/2$ .

**TEOREMA 4-8** Sea  $F(s) = A(s)/B(s)$  y

$$G(s) \triangleq \frac{F(s)-1}{F(s)+1} = \frac{A(s)-B(s)}{A(s)+B(s)} \quad (4-58)$$

Entonces  $F(s)$  es PR si, y solo si,

1.  $F(s)$  es real cuando  $s$  es real.
2.  $|G(s)| \leq 1$  siempre que  $\operatorname{Re}[s] \geq 0$ .

**TEOREMA 4-9** Sea  $G(s)$  definido por (4-58). Entonces  $F(s)$  es PR si, y solo si,

1.  $F(s)$  es real cuando  $s$  es real.
2.  $A(s) + B(s)$  es Hurwitz.
3.  $|G(s)| \leq 1$  para todo  $\omega$ .

### 4-3 Pasividad

Para cerrar este capítulo, consideramos muy brevemente el concepto de pasividad y su relación con las funciones de PR.

Se dice que un elemento de red de un dispositivo de un puerto es pasivo si su voltaje terminal  $v(t)$  y su corriente  $i(t)$  satisfacen la condición

$$\int_{t_0}^t v(\tau)i(\tau)d\tau + \epsilon(t_0) \geq 0 \text{ para todo } t \geq t_0 \quad (4-59)$$

donde  $\epsilon(t_0)$  es la energía almacenada en la red en el momento  $t_0$ . Se dice que un puerto-1 está inicialmente relajado en  $t_0$  si todas las condiciones iniciales en  $t_0$  son cero. Consecuentemente,  $\epsilon(t_0)=0$ . Por lo tanto, un puerto 1 inicialmente relajado (asumiremos que este es el caso de ahora en adelante en nuestras discusiones sobre pasividad) es pasivo si

$$\int_{t_0}^t v(\tau)i(\tau)d\tau \geq 0 \text{ para todo } t \geq t_0 \quad (4-60)$$

La ecuación (4-60) simplemente significa que la energía consumida por el puerto-1 es mayor o igual a cero. Se dice que un dispositivo de un puerto es activo si no es pasivo.

En términos de especificaciones de dominio de frecuencia, (4-60) implica que la función característica (DP) de un dispositivo de un puerto es PR.<sup>37</sup> Es decir, un dispositivo de un puerto es pasivo si, y solo si, sus funciones DP son PR. Los elementos pasivos básicos incluyen elementos RLC y transformadores ideales. La función DP de un dispositivo de un puerto que contiene solo elementos RLC y transformadores ideales es PR.<sup>38</sup> Tenga en cuenta que los transformadores ideales y los elementos LC son elementos sin pérdidas. Son casos especiales de elementos pasivos.

Tenga en cuenta también que, aunque los giradores no tienen pérdidas si las constantes de giro son iguales, los excluimos de la lista anterior de elementos pasivos porque los giradores se sintetizan en este libro mediante el uso de amplificadores operacionales, que son dispositivos activos. Por lo tanto, el término filtro pasivo denota un filtro que contiene solo RLC y transformadores ideales. La realización pasiva significa solo que los elementos pasivos se utilizan en el proceso de síntesis y diseño. Si solo se utilizan elementos pasivos, las funciones DP realizables están en el dominio de las funciones PR.

<sup>37</sup> Véanse, por ejemplo, las referencias [9] o [10].

<sup>38</sup> En este libro, no utilizamos transformadores ideales para la realización de circuitos.

## Referencias y lecturas adicionales

- [1] Brune, O. "Synthesis of a Finite Two-Terminal Network Whose Driving-Point Impedance Is a Prescribed Function of Frequency." *J. Math. Phys.* 10 (1931): 191-237.
- [2] Weinberg , L. *Network Analysis and Synthesis*. Huntington, N.Y.: R. E. Krieger, 1975.
- [3] Desoer, C. A., and Kuh , E. S. *Basic Circuit Theory*. New York: McGraw-Hill, 1969.
- [4] Humphreys , D. S. *The Analysis, Design, and Synthesis of Electrical Filters*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1970.
- [5] Chen, C. T. *Introduction to Linear System Theory*. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1970.
- [6] Zadeh, L. A., and Desoer , C. A. *Linear System Theory*. New York: McGraw-Hill, 1963.
- [7] Anderson, B. D. O., and VONGPANITLERD, S. *Network Analysis and Synthesis*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1973.
- [8] Lal, M., Singh, H., and Panwar, R. S. "Sturm Test Algorithm for Digital Computer." *IEEE Trans. Circuit and Systems CAS-22* (1975): 62-63.
- [9] Kuh, E. S., and Rohrer , R. A. *Theory of Linear Active Networks*. San Francisco, CA.: Holden-Day, 1967.
- [10] Newcomb, R. W. *Linear Multiport Synthesis*. New York: McGraw-Hill, 1966.

**Problemas**

4-1. Determine cuáles de los siguientes polinomios son Hurwitz o Hurwitz modificado.

- (a)  $p(s) = s^4 + 2s^3 + s^2 + 7s + 1$
- (b)  $p(s) = s^4 + s^3 + 3s^2 + s + 2$
- (c)  $p(s) = s^4 + 2s^3 + 5s^2 + 2s + 6$
- (d)  $p(s) = 3s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 2s + 3$
- (e)  $p(s) = s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 2$
  
- (f)  $p(s) = s^4 + 5s^3 + 11s^2 + 11s + 4$
- (g)  $p(s) = s^5 + s^4 + 4s^3 + 2s^2 + 2s + 1$
- (h)  $p(s) = 3s^5 + 5s^4 + 5s^3 + 5s^2 + 5s + 3$
- (i)  $p(s) = s^5 + s^4 + 3s^3 + 3s^2 + 2s + 2$
- (j)  $p(s) = s^5 + s^4 + 2s^3 + 2s^2 + s + 1$
- (k)  $p(s) = s^5 + 3s^3 + s$
- (l)  $p(s) = s^4 + s^2 + 1$
- (m)  $p(s) = s^5 + 5s^3 + 4s$
- (n)  $p(s) = s^6 + s^2 + 1$
- (o)  $p(s) = s^6 + s^4 + s^2 + 1$
- (p)  $p(s) = s^6 + 2s^4 + s^2 + 3$

4-2. Encuentre las condiciones bajo las cuales un polinomio de enésimo grado es Hurwitz, donde  $n=1,2,3$  y  $4$ .

4-3. Considere el polinomio

$$p(s) = s^4 + 2s^3 + as^2 + 2s + 1$$

Encuentre el rango de valores para  $a$  tal que  $p(s)$  es un polinomio de Hurwitz.

4-4. Considere el polinomio

$$p(s) = s^3 + 2s^2 + as + 1$$

Encuentre el rango de valores para  $a$  tal que  $p(s)$  sea al menos un polinomio de Hurwitz modificado.

4-5. Considere el polinomio

$$p(s) = s^3 + as^2 + bs + 1$$

Encuentre las relaciones entre  $a$  y  $b$  tales que

- (a)  $p(s)$  es un polinomio de Hurwitz.
- (b)  $p(s)$  es al menos un polinomio de Hurwitz modificado.

Si  $a$  oscila entre 1 y 2, encuentre el rango de  $b$  tal que

- (c)  $p(s)$  es un polinomio de Hurwitz.
- (d)  $p(s)$  es al menos un polinomio de Hurwitz modificado.

4-6. Considere las siguientes tres funciones racionales

$$F_1(s) = \frac{(s+1)^2}{(s^2+1)(s^2+s+1)}$$

$$F_2(s) = \frac{s^2+s+1}{(s^2+1)(s+1)}$$

y

$$F_3(s) = \frac{s^2+1}{(s+1)^2(s^2+s+1)}$$

Determine cuáles de las siguientes  $F(s)$  son funciones PR. Da tus razones.

(a)  $F(s) = F_1(s) + F_2(s)$

(e)  $F(s) = F_1(s)F_2(s)$

(b)  $F(s) = F_1(s) + F_2(s) - F_3(s)$

(f)  $F(s) = F_1(s)F_3(s)$

(c)  $F(s) = \frac{F_1(s)}{F_2(s)}$

(g)  $F(s) = F_2(s)F_3(s)$

(d)  $F(s) = \frac{F_1(s)}{F_3(s)}$

(h)  $F(s) = F_1(s)F_2(s)F_3(s)$

4-7. Determine cuáles de las siguientes funciones son PR. Justifique sus respuestas.

(a)  $F(s) = s$

(h)  $F(s) = \frac{s^3+6s^2+2s+1}{(s+1)^2}$

(b)  $F(s) = \frac{1}{s}$

(i)  $F(s) = \frac{s^3+2s^2+3s+1}{s^3+5s^2+11s+10}$

(c)  $F(s) = \frac{s+2}{s+1}$

(j)  $F(s) = \frac{s+2}{s+1}$

(d)  $F(s) = \frac{s+4}{s^2+s+15}$

(k)  $F(s) = \frac{(s+2)^2(s+1)}{s^4+6s+9}$

(e)  $F(s) = \frac{s^2+s+4}{s+5}$

(l)  $F(s) = \frac{s^4+s^3+2s^2+5}{4s^2+2s+1}$

(f)  $F(s) = \frac{s^2+9}{s^3+4s}$

(m)  $F(s) = \frac{3s^3+s}{s^4+s^3+2s^2+s+5}$

(g)  $F(s) = \frac{s^2+9}{s^3+4}$

(n)  $F(s) = \frac{10s^4+8s^2+1}{4s^5+10s^3+4s}$

4-8. Para cada  $F(s)$  dada a continuación, encuentre el rango de tal que  $F(s)$  sea una función PR.

$$(a) F(s) = \frac{s^2 + as + 1}{s^2 + 3s + 2}$$

$$(b) F(s) = \frac{s^2 + as + 1}{s^2 + 2}$$

$$(c) F(s) = \frac{s^2 + as + 1}{s^3 + 2s}$$

$$(d) F(s) = \frac{s + 2}{s^2 + as + 1}$$

$$(e) F(s) = \frac{s^2 + 3s + a}{(s + 2)^2}$$

$$(f) F(s) = \frac{(s^2 + 2)(s + 1)}{as^2 + s + 2}$$

$$(g) F(s) = \frac{s^2 + 4s + 2a}{(s + 1)^2(s + 2)}$$

$$(h) F(s) = \frac{s}{s^2 + 3s + a}$$

$$(i) F(s) = \frac{s^2 + 2s + 1}{(s + 1)(s^2 + 3s + a)}$$

$$(j) F(s) = \frac{(s + 1)(s^2 + 1)}{(s^2 + 2s + a)(s^2 + as + 1)}$$

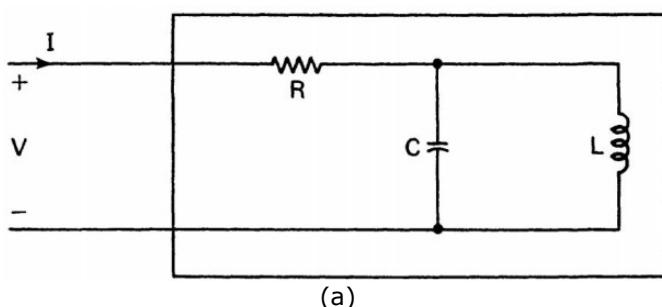
4-9. Dada la parte impar  $N(s)$  de una función de red  $F(s)$  como

$$N(s) = \frac{2s^3 + 22s}{s^4 + s^2 + 25}$$

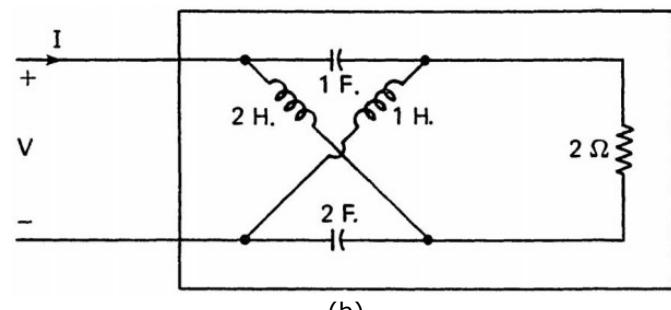
(a) Encuentre un  $F(s)$  tal que  $F(s)$  sea PR y  $F(\infty) = 1$ .

(b) Encuentre un  $F(s)$  tal que  $F(s)$  sea PR y  $F(0) = 1$ .

4-10. Demuestre que las redes de 1 puerto de la figura P4-10 son pasivas.

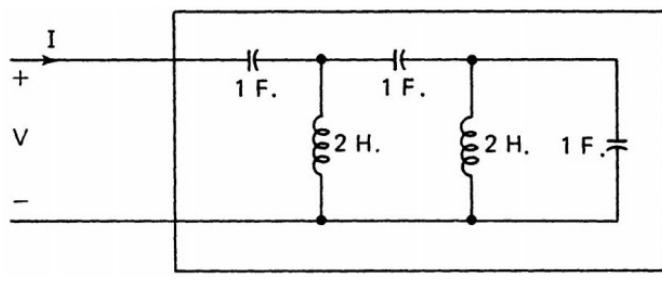


(a)

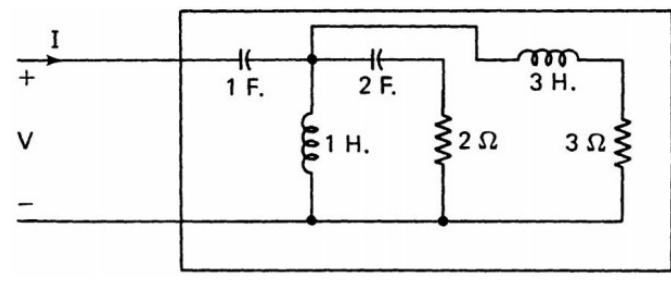


(b)

Fig. P4.10(a),(b)



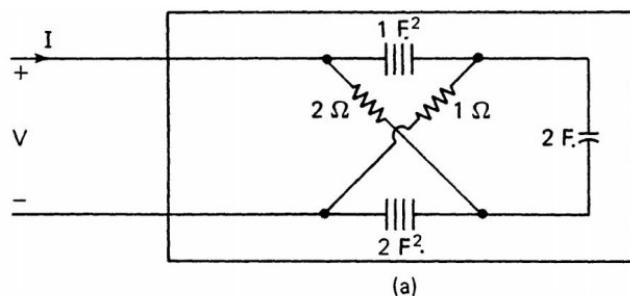
(c)



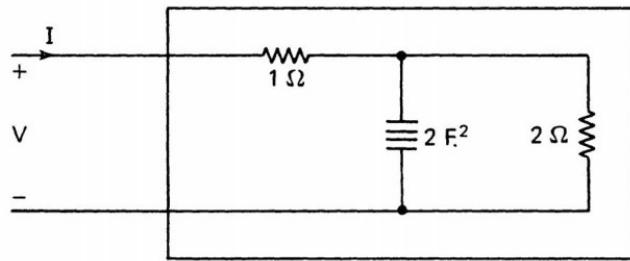
(d)

Fig. P4.10(c),(d)

4-11. Determine cuáles de las redes de un dispositivo de un puerto de la Figura P4-11 son pasivas.

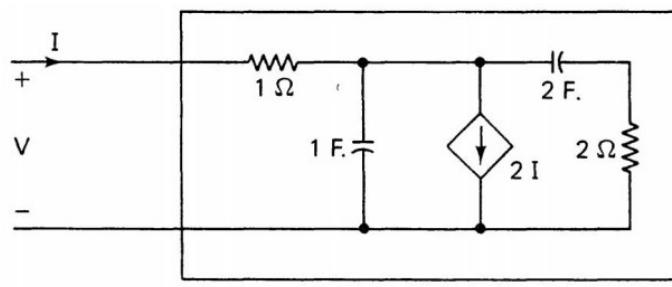


(a)

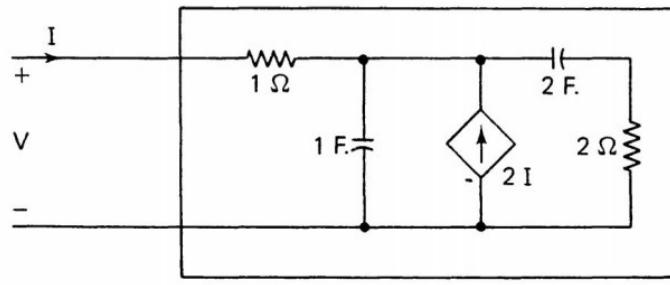


(b)

**Fig. P4-11(a), (b)**



(c)



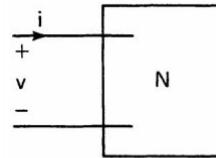
(d)

**Fig. P4-11(c), (d)**

4-12. (a) Encuentre la función de impedancia del punto impulsor de la red N de un dispositivo de un puerto en la Figura P4-12 para cumplir con las siguientes especificaciones:

- (i) Si se aplica un voltaje de paso unitario a N, la corriente  $i(t)$  viene dada por  $i(t) = b_1 + b_2 e^{-4t}$ .
- (ii) Si se aplica una corriente de paso unitario a N, el voltaje  $v(t)$  viene dado por  $v(t) = a_1 + a_2 e^{-t}$ .
- (iii) Si se aplica un voltaje de 4 voltios a N, la corriente de estado estable es de 3 amperios.

(b) Demuestre que N puede realizarse mediante componentes pasivos.



**Fig. P4-12**

4-13. Dados los coeficientes de un polinomio

$$p(s) = p_0 + p_1 s + p_2 s^2 + \dots + p_n s^n$$

escribir un programa de computadora para determinar si  $p(s)$  es un polinomio de Hurwitz, un polinomio de Hurwitz modificado u otros.

4-14. Dados los coeficientes de dos polinomios

$$A(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_m s^m$$

y

$$B(s) = b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots + b_n s^n$$

escribir un programa de computadora para determinar si la función racional

$$F(s) = \frac{A(s)}{B(s)}$$

es una función PR.

## 5. Propiedades y realizaciones de las funciones propias (DP, driving-point) sin pérdidas

Un elemento de circuito se dice que es sin perdida si no consume nada de potencia promedio. En la condición sinusoidal de estado estacionario, la potencia de promedio disipada en un elemento es dada por

$$\begin{aligned} P_{av} &= \frac{1}{T} \int_0^T i(t)v(t)dt \\ &= \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\phi_v - \phi_i) \end{aligned} \quad (5-1)$$

donde  $i(t) = I_m \cos(\omega t + \Phi_i)$  y  $v(t) = V_m \cos(\omega t + \Phi_v)$  son, respectivamente, la corriente que entra y el voltaje a través del elemento, y  $T = 2\pi/\omega$ . Porque el valor absoluto de la diferencia entre los ángulos de fase de la forma de onda del voltaje y la forma de onda de la corriente de un inductor o un capacitor,  $|\Phi_v - \Phi_i|$ , es siempre de  $90^\circ$ , es evidente que los inductores y los capacitores son elementos sin pérdidas. En la sección 5-1, consideramos las propiedades de funciones propias DP de un dispositivo de un puerto que contienen solo elementos sin pérdidas.<sup>39</sup> Juntas, estas propiedades constituyen las condiciones de una función DP que es realizable con elementos sin pérdidas. En la sección 5-2, consideramos algunos procedimientos de síntesis para Realización de funciones DP de un dispositivo de un puerto sin pérdidas. Resulta que cada función DP de un dispositivo de un puerto sin pérdidas se puede realizar mediante un dispositivo de un puerto que contiene solo inductores y condensadores. Por lo tanto, en lo sucesivo, llamaremos a una función DP de un dispositivo de un puerto sin pérdidas una función DP LC y a un dispositivo de un puerto que contiene solo inductores y condensadores un dispositivo LC de un puerto.

### 5-1 Propiedades de funciones DP sin perdidas.

Hay básicamente seis propiedades importantes asociadas con una función DP de un dispositivo de un puerto sin perdidas. Conjuntamente, estas seis propiedades determinan la forma general de las funciones DP de un dispositivo de un puerto sin perdidas.

**PROPIEDAD 1.** Todos los polos y ceros de una función DP de impedancia o de admitancia de un dispositivo de un puerto sin perdidas ocurren sobre el eje imaginario del plano-s

**Prueba.** Por simplicidad, asumimos que el dispositivo  $\eta$  de un puerto sin perdidas contiene solamente inductores y capacitores. La extensión de incluir otros elementos sin perdida es sencilla pero engorrosa.

Esto ha sido mostrado en el capítulo 4 en que el que la función de impedancia  $Z_{in}(s)$  de un dispositivo  $\eta$  de un puerto contiene solamente inductores y capacitores que están dadas por

$$Z_{in}(s) = s \sum_L L_k \frac{|I_k|^2}{|I_1|^2} + \frac{1}{s} \sum_C \frac{1}{C_k} \frac{|I_k|^2}{|I_1|^2} \quad (5-2)$$

Observe que la (5-2) es obtenida desde (4-5) bajo la condiciones de que el dispositivo  $\eta$  no contiene resistores. Desde la (5-2), observamos que los ceros de  $Z_{in}(s)$  satisfacen las ecuaciones de la forma

$$\alpha s + \frac{1}{s} \beta = 0$$

<sup>39</sup> Además de los inductores y condensadores, los elementos sin pérdidas incluyen transformadores ideales, bobinas acopladas y giradores.

o

$$\alpha s^2 + \beta = 0 \quad (5-3a)$$

donde

$$\alpha \triangleq \sum_L L_k \frac{|I_k|^2}{|I_1|^2} \geq 0$$

y

$$\beta \triangleq \sum_C \frac{1}{C_k} \frac{|I_k|^2}{|I_1|^2} \geq 0$$

Tenga en cuenta que tanto  $\alpha$  como  $\beta$  dependen de los  $I_k$  e  $I_1$ , los cuales estos son funciones de  $s$ . Por tanto,  $\alpha$  y  $\beta$  dependen de  $s$ . Porque todas las soluciones de (5-3a) también deben satisfacer la ecuación

$$s^2 = -\frac{\beta}{\alpha} < 0 \quad (5-3b)$$

Aún así podemos concluir de la (5-3) que los ceros de  $Z_{in}(s)$  están en el eje imaginario del plano-s. De manera dual, también podemos mostrar que la función DP de admitancia  $Y_{in}(s)$  debe estar dada por

$$Y_{in}(s) = s \sum_C C_k \frac{|v_k|^2}{|v_1|^2} + \frac{1}{s} \sum_L \frac{1}{L_k} \frac{|v_k|^2}{|v_1|^2} \quad (5-4)$$

Por lo tanto, los ceros de  $Y_{in}(s)$  también ocurren en el eje imaginario del plano-s.

Porque

$$Y_{in}(s) = \frac{1}{Z_{in}(s)} \quad \text{y} \quad Z_{in}(s) = \frac{1}{Y_{in}(s)} \quad (5-5)$$

Llegamos a la conclusión de que todos los polos y ceros de una función propia, de impedancia o de admitancia, de un dispositivo de un puerto sin pérdidas están en el eje imaginario del plano  $s$ .

**PROPIEDAD 2.** Cada función DP de impedancia o admitancia de un dispositivo de un puerto sin pérdidas es una función racional **ímpar**.

**PRUEBA.** Es bien sabido que en la condición de estado estable sinusoidal, la potencia promedio consumida por un dispositivo  $\eta$  sin pérdidas de un puerto viene dada por

$$\operatorname{Re}[Z(j\omega)]|I(j\omega)|^2 = \operatorname{Re}[Y(j\omega)]|V(j\omega)|^2 = 0 \quad (5-6)$$

donde  $Z$  e  $Y$  son, respectivamente, las funciones DP de impedancia y de admitancia de  $\eta$ . La ecuación (5-6) significa que las funciones DP de cada dispositivo sin pérdidas  $\eta$  de un puerto tiene una propiedad fundamental;

$$\operatorname{Re}[F_{LC}(j\omega)] = 0 \quad (5-7)$$

donde  $F_{LC}(s)$  denota la función DP de impedancia o la función DP de admitancia de un

dispositivo de un puerto sin pérdidas.<sup>40</sup> Por (3-15) del Capítulo 3, la (5-7) implica que la parte par de  $F_{LC}(s)$  es *idénticamente cero*. Consecuentemente,  $F_{LC}(s)$  es una función racional impar de  $s$ .

Por lo tanto,

$$F_{LC}(s)=\frac{N(s)}{M(s)} \quad \text{o} \quad F_{LC}(s)=\frac{M(s)}{N(s)} \quad (5-8)$$

donde  $N(s)$  es un polinomio impar y  $M(s)$  es un polinomio par.

**PROPIEDAD 3.** Suponga que la función DP de un dispositivo sin pérdidas de un puerto viene dada por (5-8). Sean  $d_N$  y  $d_M$  los grados de los polinomios  $N(s)$  y  $M(s)$ , respectivamente.

Luego

$$|d_N - d_M| = 1 \quad (5-9)$$

**PRUEBA.** Debido a que una red sin pérdidas de un dispositivo de un puerto es pasiva,  $F_{LC}(s)$  es PR (función Real Positiva). Una condición necesaria para que  $F_{LC}(s)$  sea PR es que

$$|d_N - d_M| \leq 1 \quad (5-10)$$

Dado que  $N(s)$  es impar y  $M(s)$  es par,

$$|d_N - d_M| = \text{un entero impar} \quad (5-11)$$

Claramente, (5-10) y (5-11) implican (5-9).

**PROPIEDAD 4.** Todos los polos y ceros de  $F_{LC}(s)$  son simples.

**PRUEBA.** Según la propiedad 1, todos los polos y ceros de  $F_{LC}(s)$  están en el eje imaginario del plano-s. Como  $F_{LC}(s)$  es PR, todos los polos y ceros de su eje imaginario son simples. De ahí la conclusión.

Las propiedades 1 y 2 implican que tanto el numerador como el denominador de  $F_{LC}(s)$ . Están compuestos de factores en la forma de  $(s^2 + \omega_k^2)$  excepto, por supuesto, para un término  $s$  en el numerador o en el denominador de  $F_{LC}(s)$ . Por lo tanto,  $F_{LC}(s)$  tiene una de las dos formas siguientes:

$$F_{LC}(s) = \frac{k(s^2 + \omega_1^2)(s^2 + \omega_3^2) \dots (s^2 + \omega_r^2)}{s(s^2 + \omega_2^2)(s^2 + \omega_4^2) \dots (s^2 + \omega_q^2)} \quad (5-12a)$$

$$F_{LC}(s) = \frac{k s(s^2 + \omega_2^2)(s^2 + \omega_4^2) \dots (s^2 + \omega_q^2)}{(s^2 + \omega_1^2)(s^2 + \omega_3^2) \dots (s^2 + \omega_r^2)} \quad (5-12b)$$

donde  $r$  es un número entero impar y  $q$  es un número entero par. La propiedad 3 dice que

$$q = r + 1 \quad \text{o} \quad r = q + 1 \quad (5-13)$$

y la Propiedad 4 exige que

40 De ahora en adelante, dejamos que  $F_{LC}(s)$  denote la función de impedancia o admitancia de una red sin pérdidas de un dispositivo de un puerto.

$$\omega_i \neq \omega_k \text{ cuando sea } i \neq k = 1, 2, \dots, r, q \text{ o } q, r \quad (5-14)$$

A partir de aquí, desarrollamos principalmente el  $F_{LC}(s)$  de (5-12a) únicamente. El  $F_{LC}(s)$  de (5-12b) puede desarrollarse de manera análoga.

**PROPIEDAD 5.** Excepto en los polos de  $F_{LC}(s)$ ,  $F_{LC}(j\omega)/j$  es una función de  $\omega$  monótona creciente .

**PRUEBA.** Dividiendo la (5-12a) por  $s$  y dejando  $p=s^2$ , obtenemos

$$\frac{F_{LC}(s)}{s} = \frac{k(p+\omega_1^2)(p+\omega_3^2)\dots(p+\omega_r^2)}{p(p+\omega_2^2)(p+\omega_4^2)\dots(p+\omega_q^2)} \quad (5-15)$$

Una expansión de fracción parcial de (5-15) da

$$\frac{F_{LC}(s)}{s} = k_\infty + \frac{k_0}{p} + \sum_{i=par}^q \frac{k_i}{p + \omega_i^2}$$

o

$$F_{LC}(s) = k_\infty s + \frac{k_0}{s} + \sum_{i=par}^q \frac{k_i s}{s^2 + \omega_i^2} \quad (5-16)$$

Tenga en cuenta que el término  $k_\infty$  está presente en (5-16) solo si  $r=q+1$  que es el caso en (5-12a). Para ver la naturaleza de las constantes  $k_i$ ,  $i=0, 2, 4, \dots, q$  e  $\infty$  escribamos (5-16) como

$$F_{LC}(s) = k_\infty s + \frac{k_0}{s} + \sum_{i=par}^q \frac{\alpha_i}{s+j\omega_i} + \frac{\bar{\alpha}_i}{s-j\omega_i} \quad (5-17)$$

donde  $\bar{\alpha}_i$  denota el conjugado complejo de  $\alpha_i$ .<sup>41</sup> Debido a que los dispositivos de un puerto sin pérdidas son pasivos,  $F_{LC}(s)$  es PR. Por tanto, las constantes  $k_\infty$  [el residuo de  $F_{LC}(s)$  en el polo  $s=\infty$ ],  $k_0$  [el residuo de  $F_{LC}(s)$  en el polo  $s=0$ ] y  $\alpha_i$  y  $\bar{\alpha}_i$  [los residuos de  $F_{LC}(s)$  en los polos  $-j\omega_i$  y  $j\omega_i$ ] son positivos y reales.<sup>42</sup> Así,  $\alpha_i = \bar{\alpha}_i$  es positivo y real. Igualando (5-16) y (5-17), obtenemos la relación entre  $k_i$  y  $\alpha_i$  como

$$\frac{k_i s}{s^2 + \omega_i^2} = \frac{\alpha_i(s - j\omega_i) + \alpha_i(s + j\omega_i)}{s^2 + \omega_i^2} = \frac{2\alpha_i s}{s^2 + \omega_i^2}$$

o

$$k_i = 2\alpha_i \quad (5-18)$$

Cada  $\alpha_i$  es una constante real y positiva; por tanto,  $k_i$  también es una constante positiva y real. Por lo tanto, tenemos

$$k_i = \text{real y positiva} \quad (5-19)$$

donde  $z=0, 2, 4, \dots, q$  y  $\infty$ . Diferenciando (5-16) con respecto a  $s$ , obtenemos

41 Recuerde que (4-48a) implica que los residuos en un par de polos conjugados complejos son conjugados complejos entre sí.

42 Estrictamente hablando, las constantes  $k_\infty$  y  $k_0$  son reales y no negativas. Decimos que  $k_\infty$  y  $k_0$  son reales y positivos, porque siempre que los términos  $k_\infty s$  y  $k_0/s$  están presentes en (5-17),  $k_\infty$  y  $k_0$  son reales y positivos.

$$\frac{dF_{LC}(s)}{ds} = k_\infty - \frac{k_0}{s^2} + \sum_{i=par}^q \frac{k_i(\omega_i^2 - s^2)}{(s^2 + \omega_i^2)^2} \quad (5-20)$$

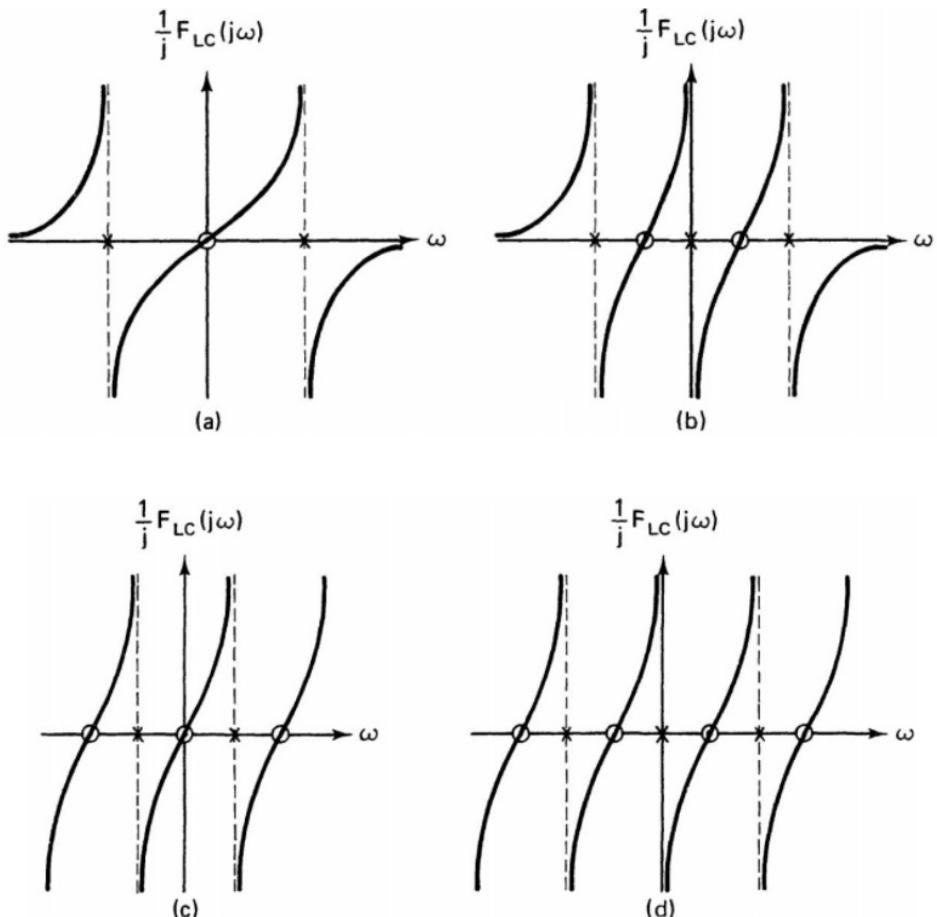
Dejando  $s=j\omega$ , (5-20) da

$$\frac{dF_{LC}(j\omega)}{d(j\omega)} = k_\infty + \frac{k_0}{\omega^2} + \sum_{i=par}^q \frac{k_i(\omega_i^2 + \omega^2)}{(\omega_i^2 - \omega^2)^2} \quad (5-21)$$

Excepto cuando  $\omega$  está en un polo de  $F_{LC}(s)$ , cada término en el lado izquierdo de (5-21) es positivo para todo  $\omega$ . Por tanto, concluimos que

$$\frac{dF_{LC}(j\omega)}{j d\omega} > 0 \quad (5-22)$$

para todo  $\omega$  excepto en los polos de  $F_{LC}(s)$ , y nuestra conclusión continua.



Legend: 0 = zero of  $F_{LC}(s)$ , and x = pole of  $F_{LC}(s)$ .  
Fig. 5-1 Some typical plots of  $(1/j)F_{LC}(j\omega)$  versus  $\omega$ .

En la Fig. 5-1 se muestran algunos esquemas típicos de la función  $F_{LC}(j\omega)/j$  con respecto a  $\omega$ , donde las discontinuidades ocurren en los polos de  $F_{LC}(s)$ . Observe que  $s=0$  es un cero o un polo de  $F_{LC}(s)$ , y también lo es en el punto  $s=\infty$ . En vista de la Fig. 5-1 y la propiedad de aumento monótono de la propiedad 5, está claro que los ceros y los polos de  $F_{LC}(s)$  deben entrelazarse entre sí en el eje imaginario del plano-s. Por lo tanto, tenemos

$$0 \leq \omega_1 \leq \omega_2 \leq \omega_3 \dots \quad (5-23)$$

Esta es otra propiedad importante de la función DP sin pérdidas. Para referencia futura, observamos

**PROPIEDAD 6.** Los puntos  $s=0$  y  $s=\infty$  son frecuencias críticas<sup>43</sup> de  $F_{LC}(s)$ . Además, los polos y ceros de  $F_{LC}(s)$  se alternan entre sí a lo largo del eje imaginario del plano-s.

---

43 Una frecuencia crítica de  $F_{LC}(s)$  es un polo o un cero de  $F_{LC}(s)$ .

## 5-2 Realización de funciones DP sin pérdidas.

En esta sección presentamos cuatro métodos para realizar funciones DP sin pérdidas. Son la primera y segunda forma de Foster y la primera y segunda forma de Cauer.

### 5-2-1 Métodos de realizaciones de Foster.

Para considerar el problema de realización de las funciones DP generales sin pérdidas, reescribamos (5-16) como:

$$F_{LC}(s) = k_\infty s + \frac{k_0}{s} + \sum_{i=par}^q \frac{1}{\frac{s}{k_i} + \frac{1}{(k_i/\omega_i^2)s}} \quad (5-24)$$

donde todos sus  $k_i$  y sus  $\omega_i$  son positivos y reales. Si  $F_{LC}(s)$  es una función DP de impedancia, entonces podemos escribir

$$F_{LC}(s) = Z_{LC}(s) = L_\infty s + \frac{1}{C_0 s} + \sum_{i=par}^q \frac{1}{C_i s + (1/L_i s)} \quad (5-25)$$

donde

$$L_\infty = k_\infty, \quad C_0 = \frac{1}{k_0}, \quad C_i = \frac{1}{k_i}, \quad \text{y} \quad L_i = \frac{k_i}{\omega_i^2} \quad (5-26)$$

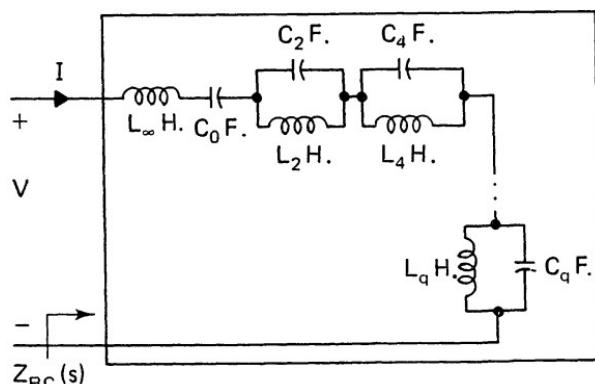


Fig. 5-2 Primera forma de Foster.

La Fig. 5-2<sup>44</sup> da una realización de circuito de la (5-25). La ecuación (5-25) con la (5-26) o la Fig. 5-2 se denomina **primera forma de Foster**. De forma dual, si  $F_{LC}(s)$  es una función DP de admitancia, entonces podemos escribir (5-24) como

$$F_{LC}(s) = Y_{LC}(s) = C_\infty s + \frac{1}{L_0 s} + \sum_{i=par}^q \frac{1}{L_i s + (1/C_i s)} \quad (5-27)$$

donde

$$C_\infty = k_\infty, \quad L_0 = \frac{1}{k_0}, \quad L_i = \frac{1}{k_i}, \quad \text{y} \quad C_i = \frac{k_i}{\omega_i^2} \quad (5-28)$$

<sup>44</sup> En todos los diagramas de circuitos de este libro, el símbolo, "Z=" "Y=" "significa "La función DP de impedancia {admitancia} mirando en el circuito del dispositivo de un puerto desde aquí es igual a".

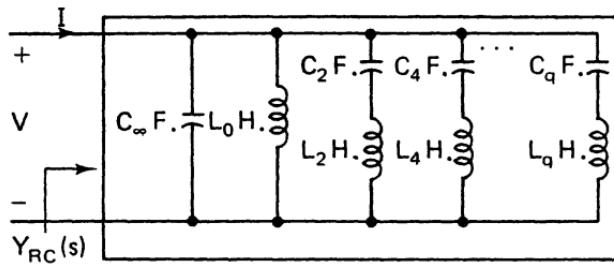


Fig. 5-3 Segunda forma Foster.

En la Fig. 5-3 se muestra una implementación de circuito de (5-27). La ecuación (5-27) con (5-28) o la Fig. 5-3 se llama **segunda forma de Foster**.

Observe que la primera forma de Foster trata solo con funciones DP de impedancia, y la segunda forma de Foster trata solo con funciones DP de *admitancia*. En vista de estas dos formas de Foster, podemos llegar a la siguiente conclusión:

**Teorema 5-1** Todas las funciones DP sin pérdidas se pueden realizar mediante un dispositivo de un puerto que contiene solo inductores y condensadores.

**Ejemplo 5-1.** Dada la función de impedancia sin perdida.

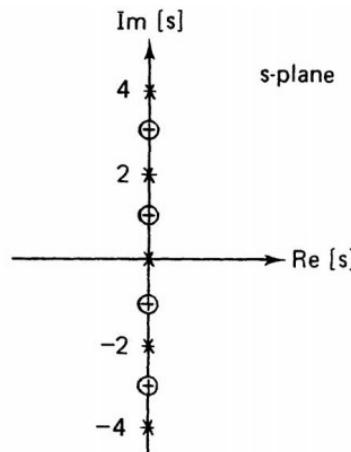
$$Z(s) = \frac{(s^2+1)(s^2+9)}{s(s^2+4)(s^2+16)} \quad (5-29)$$

Encontrar las realizaciones del circuito de (5-29) vía los dos método de Foster.

**Solución:** Primero verificamos si  $Z(s)$  satisface todas las propiedades de la función DP LC.<sup>45</sup> Para comenzar con esto,  $Z(s)$  es una función racional impar, con el polinomio del denominador de grado uno mayor que el polinomio del numerador.  $Z(s)$  tiene un polo en  $s=0$  y un cero en  $s=\infty$ . Los ceros son  $\pm j1$ ,  $\pm j3$ , y  $\infty$ ; los polos son en  $0$ ,  $\pm j2$ , y  $\pm j4$ , como muestra en Fig. 5-4. Claramente, todos los polos y ceros son simple, y ellos alternan sobre el eje imaginario de el plano-s. Para encontrar el residuo, haciendo  $p=s^2$ , se reescribe como:

$$\begin{aligned} \frac{Z(s)}{s} &= \frac{(s^2+1)(s^2+9)}{s^2(s^2+4)(s^2+16)} = \frac{(p+1)(p+9)}{p(p+4)(p+16)} \\ &= \frac{p^2+10p+9}{p(p+4)(p+16)} \\ &= \frac{A}{p} + \frac{B}{p+4} + \frac{C}{p+16} \triangleq \hat{Z}(p) \end{aligned} \quad (5-30)$$

45 Debemos verificar para asegurarnos de que la función DP dada satisface todas las propiedades de las funciones DP LC antes de proceder a realizarla con elementos sin pérdidas. Sin embargo, por razones obvias, no realizamos estas comprobaciones en ejemplos posteriores.

Fig. 5-4 Diagrama de polo cero de  $Z(s)$  de la (5-29).

Donde  $A$ ,  $B$ , y  $C$  son residuos de  $\hat{Z}(p)$  en los polos  $p_1=0$ ,  $p_2=-4$ , y  $p_3=-16$ . Por (4-48), encontramos que

$$A=\frac{9}{64}, \quad B=\frac{5}{16} \quad y \quad C=\frac{35}{64}$$

Por lo tanto,

$$\frac{Z(s)}{s}=\frac{9/64}{s^2}+\frac{(5/16)s}{s^2+4}+\frac{(35/64)s}{s^2+16} \quad (5-31)$$

o

$$Z(s)=\frac{9/64}{s}+\frac{(5/16)s}{s^2+4}+\frac{(35/64)s}{s^2+16} \quad (5-31)$$

Es decir, todos los residuos de  $Z(s)$  son reales y positivos. Por tanto,  $Z(s)$  satisface todas las propiedades de una función DP LC<sup>46</sup>—  $Z(s)$  se puede realizar únicamente con elementos sin pérdidas.

Para realizar  $Z(s)$ , escribamos la (5-31) como

$$Z(s)=\frac{\frac{1}{64}}{\frac{9}{64}s}+\frac{\frac{1}{16}}{\frac{5}{64}s+\frac{1}{5}}+\frac{\frac{1}{35}}{\frac{35}{64}s+\frac{1}{1024}} \quad (5-32)$$

La realización de la primera forma de Foster de (5-29) o equivalente (5-32) está dado por la Fig 5-5(a).

<sup>46</sup> La propiedad 5—  $(1/j)\zeta(j\omega)$  es una función monotómicamente creciente de  $\omega$ , excepto en los polos de  $Z(s)$  — se satisface, porque los polos y ceros de  $F_{LC}(s)$  se alternan en el eje imaginario de el plano-s y los puntos  $s=0$  y  $s=\infty$  son frecuencias críticas.

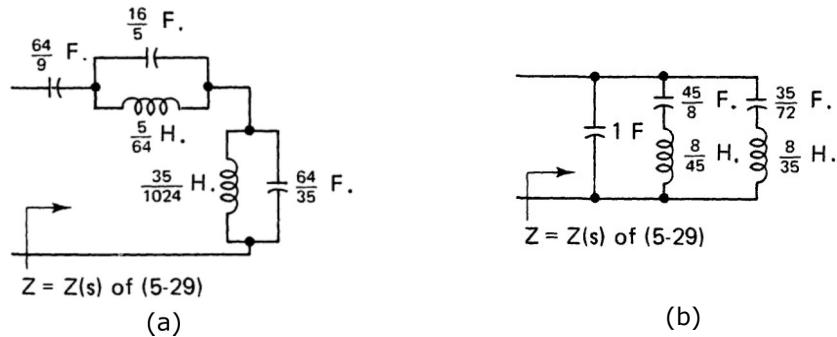


Fig. 5-5 Realizaciones de  $Z(s)$  de la (5-29).  
 (a) Primera Forma de Foster (b) Segunda forma de Foster.

Otra realización de  $Z(s)$  de (5-29) puede ser obtenida vía la segunda forma de Foster. Porque  $Y(s)=1/Z(s)$ , tenemos que

$$Y(s) = \frac{s(s^2+4)(s^2+16)}{(s^2+1)(s^2+9)}$$

$$\frac{Y(s)}{s} = 1 + \frac{45/8}{s^2 + 1} + \frac{35/8}{s^2 + 9}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 Y(s) &= s + \frac{(45/8)s}{s^2+1} + \frac{(35/8)s}{s^2+9} \\
 &= s + \frac{1}{\frac{8}{45}s + \frac{1}{(45/8)s}} + \frac{1}{\frac{8}{35}s + \frac{1}{(35/72)s}}
 \end{aligned} \tag{5-33}$$

La realización de la segunda forma de Foster de  $Z(s)$  de (5-29) vía (5-33) está dada en la Fig. 5-5(b). Observe que ambos Figs. 5-5(a) y (b) tienen la misma funciones DP de impedancia y de admitancia.

**Resolución matlab – Ejemplo 5-1**

```

clear all; clc;

syms s p 'real'
Z(s) = ((s^2 +1)*(s^2 +9)) / (s*(s^2 +4)*(s^2 +16))

% cambio de variable s^2 por p
Z(p)=subs(Z(s)/s,s^2,p);

% extraigo el polinomio numerador y denominador
[n,d]=numden(Z(p));

% ordeno con collect y extraigo los coeficientes.
b=sym2poly(collect(n));
a=sym2poly( collect(d));

[r,po,k]=residue(b,a);

% construyo la expresión con fracciones parciales
Zf(p)=sym('0');
for n=1:length(r)
    Zf(p)=Zf(p)+r(n) / (p-po(n));
end

%pretty(Zf(p))

% cambio de variables p por s^2
Z(s)=subs(Zf(s)*s,p,s^2);

pretty(expand(Z(s), 'ArithmeticOnly',true))

```

$$Z(s) = \frac{(s^2 + 1)(s^2 + 9)}{s(s^2 + 4)(s^2 + 16)}$$

$$\frac{5s}{16(s+4)} + \frac{35s}{64(s+16)} + \frac{9}{64}$$

## 5-2-2 Métodos de realización de Cauer.

Las formas de Foster no es la única forma de realización de circuitos de funciones DP sin perdida. En general, si la función de impedancia  $Z(s)$ , o una función de admitancia  $Y(s)$ , es realizable, entonces existen muchas y a veces incluso un número infinito de posibles realizaciones de circuitos. En esta sección, consideramos los métodos de Cauer para realizar funciones de DP sin pérdidas.

### 5-2-2-1 Primera forma de Cauer.

Por la propiedad 3, el grado de los polinomios del numerador y del denominador de una función DP sin perdida difiere exactamente en 1. Por lo tanto, el punto  $s=\infty$  es un polo o un cero de  $F_{LC}(s)$ . Sin perdida de generalidad, podemos asumir que  $s=\infty$  es un polo de  $F_{LC}(s)-F_{LC}(\infty)=\infty$ , o el grado del numerador de  $F_{LC}(s)$  es mayor que el grado del denominador. Sea  $p(s)$  el polinomio que es la suma de ambos polinomios numerador y denominador de  $F_{LC}(s)$ . Por el Teorema 4-4,  $p(s)$  es Hurwitz. Por lo tanto,  $F_{LC}(s)$ , siendo el cociente de prueba de  $p(s)$  en la verificación de Hurwitz, tiene una expansión de fracciones continuadas en  $s=\infty$  como

$$F_{LC}(s) = k_1 s + \frac{1}{k_2 s + \frac{1}{k_3 s + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{k_n s}}}} \quad (5-34)$$

donde  $n$  es el grado del polinomio del numerador de  $F_{LC}(s)$  y los coeficientes  $k_1, k_2, \dots, k_n$  son constantes reales y positivas. Para examinar estas constantes, siendo  $F_{LC_1}(s)=F_{LC}(s)$ , se escribe.

$$F_{LC_1}(s) = k_1 s + \frac{1}{F_{LC_2}(s)} \quad (5-35a)$$

Donde

$$k_1 = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} F_{LC_1}(s) \quad (5-35b)$$

es el residuo de  $F_{LC_1}(s)$  en el polo  $s=\infty$ <sup>47</sup>. Desde la (5-34), observamos que

$$F_{LC_1}(\infty) = \lim_{s \rightarrow \infty} k_1 s \quad (5-36)$$

Por lo tanto, el otro término de la (5-35a) satisface la ecuación.

$$\frac{1}{F_{LC_2}(\infty)} = 0$$

o

$$F_{LC_2}(\infty) = \infty \quad (5-37)$$

47 Ver (4-48b).

Así, podemos realizar estos procedimientos de extracción de polos en  $F_{LC_1}(s)$  como

$$F_{LC_2}(s) = k_2 s + \frac{1}{F_{LC_3}(s)} \quad (5-38a)$$

donde de nuevo.

$$k_2 = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} F_{LC_2}(s) \quad (5-38b)$$

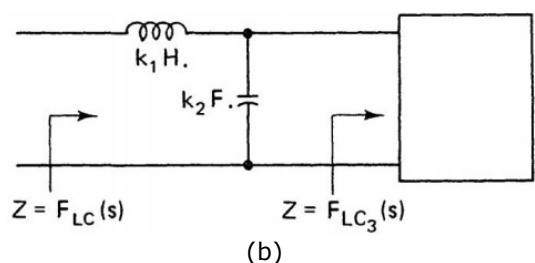
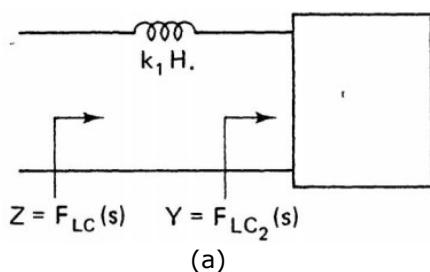
Es el residuo de  $F_{LC_2}(s)$  en el polo  $s=\infty$ . Si nosotros repetimos los procedimientos de (5-35) y (5-38) tantas veces como sea necesario. Luego las constantes  $k_i$  son residuos de  $F_{LC_1}(s)$  en el polo  $s=\infty$ , donde  $k=1,2,\dots,n$ .

**Si  $F_{LC}(s)$  tiene un cero en el infinito en lugar de un polo como asumimos anteriormente, dejamos  $F_{LC_1}(s)=1/F_{LC}(s)$ .** Por tanto,  $F_{LC_1}(s)$  tiene un polo en el infinito. Ahora se puede realizar el proceso de (5-34) o el proceso repetido de (5-35) a (5-38) como en el caso anterior. En este caso, la expansión de la fracción continua resultante en el infinito viene dada por

$$\begin{aligned} F_{LC}(s) &= \frac{1}{F_{LC_1}(s)} = \frac{1}{k_1 s + \frac{1}{k_2 s + \frac{1}{k_3 s + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{k_n s}}}}} \quad (5-39) \\ &= \frac{1}{k_1 s + \frac{1}{k_2 s + \frac{1}{k_3 s + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{k_n s}}}}} \end{aligned}$$

donde  $n$  es el grado del polinomio denominador de  $F_{LC}(s)$ . A continuación, consideramos (5-34) solamente. La ecuación (5-39) se ilustra con un ejemplo.

Si  $F_{LC}(s)=Z_{LC}(s)$  es una función de impedancia, el (5-35) tiene una interpretación de circuito que se muestra en la Fig. 5-6 (a). De manera similar, actúa la (5-38) que se muestra en la Fig. 5-6 (b) y la Fig. 5-6 (c) que muestra el siguiente paso. Por otro lado, si  $F_{LC}(s)=Y_{LC}(s)$  es una función de admitancia, entonces las interpretaciones del circuito de (5-35) y (5-38) se muestran, respectivamente, en las Figs. 5-7 (a) y (b), y la Fig. 5-7 (c) que muestra el paso siguiente. Tenga en cuenta que en ambas Figs. 5-6 y 5-7, la expansión de  $F_{LC}(s)$  sobre el punto en  $s=\infty$  da lugar a realizaciones de circuitos con inductores en serie y condensadores en derivación. Esto se llama la **primera forma de Cauer**.



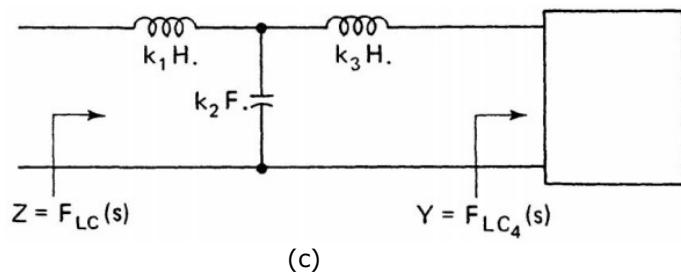


Fig. 5-6 Procedimiento de realización de primera forma de Cauer de una función de impedancia DP sin pérdidas  $F_{LC}(s)$ .

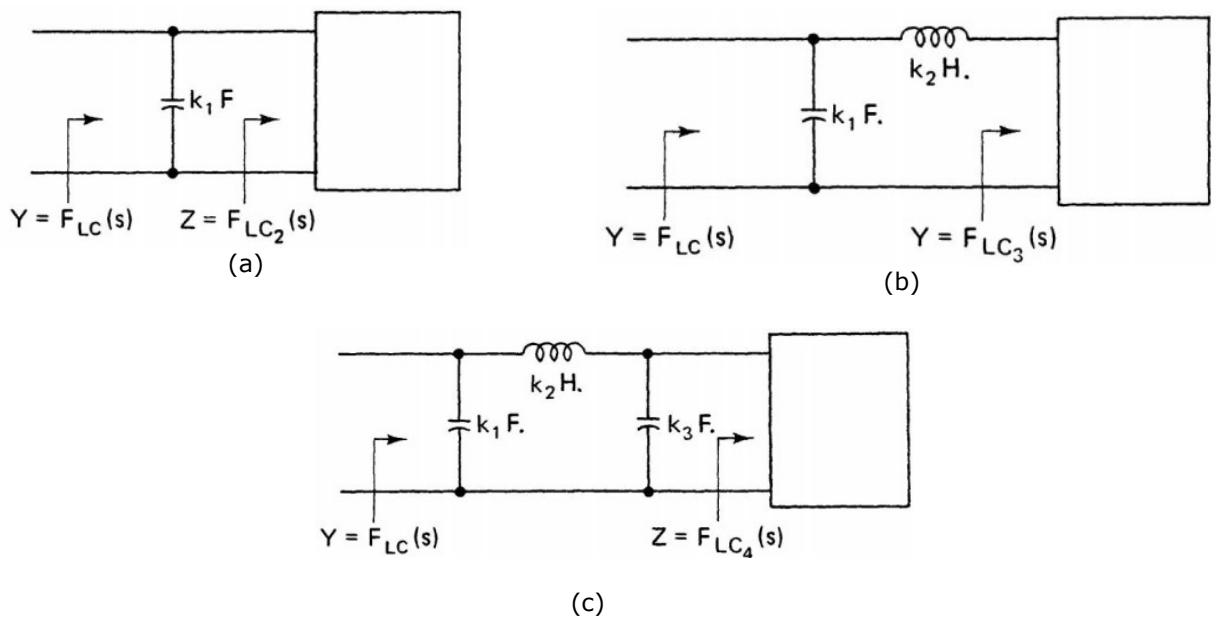


Fig. 5-7 Procedimiento de realización de primera forma de Cauer de una función DP de admitancia sin pérdidas  $F_{LC}(s)$ .

**Ejemplo 5-2** Realice la función de impedancia DP

$$Z(s) = \frac{(s^2+1)(s^2+9)}{s(s^2+4)(s^2+16)} = \frac{s^4+10s^2+9}{s^5+20s^3+64s} \quad (5-40)$$

por la primera forma de Cauer.

**Solución:** Porque el polinomio denominador de  $Z(s)$  es mayor grado,  $Z(s)$  tiene un cero en  $s=\infty$ . Aunque, realizamos una expansión en fracciones continuadas en  $s=\infty$ . Por lo tanto, realizamos una expansión fraccional continua en  $s=\infty$  en la función de admitancia correspondiente  $Y(s)$  como<sup>48</sup>

$$Y(s) = \frac{1}{Z(s)} = \frac{s^5+20s^3+64s}{s^4+10s^2+9} = s + \frac{1}{\frac{1}{10}s + \frac{1}{\frac{20}{9}s + \frac{1}{\frac{9}{70}s + \frac{1}{\frac{35}{9}s}}}} \quad (5-41)$$

Realizar la función de impedancia dada  $Z(s)$  de (5-40) es equivalente a realizar la función de admitancia  $Y(s)$  de (5-41). Debido a que  $Y(s)$  se puede escribir como una suma de dos términos como

$$Y(s) = s + \frac{1}{Z_2(s)} \quad (5-42)$$

donde

$$Z_2(s) = \frac{1}{10}s + \frac{1}{\frac{20}{9}s + \frac{1}{\frac{9}{70}s + \frac{1}{\frac{35}{9}s}}} \quad (5-43)$$

nos damos cuenta de  $Y(s)$  conectando un capacitor de 1 Faradio en paralelo con un dispositivo de un puerto que tiene una función DP de impedancia  $Z_2(s)$  dada por la (5-43). Observe que  $Z_2(s)$  a su vez es la suma de dos términos como

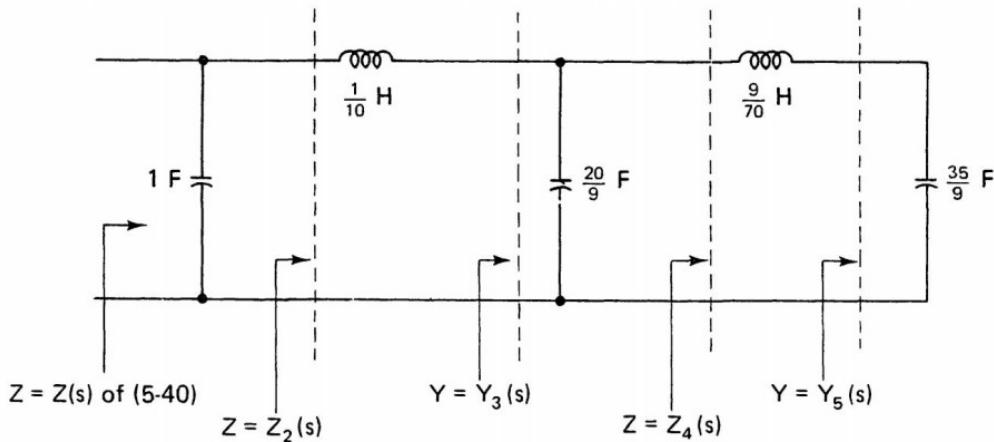
$$Z_2(s) = \frac{1}{10}s + \frac{1}{Y_3(s)} \quad (5-44)$$

donde

$$Y_3(s) = \frac{20}{9}s + \frac{1}{\frac{9}{70}s + \frac{1}{\frac{35}{9}s}} \quad (5-45)$$

Por lo tanto, podemos realizar la función de impedancia DP  $Z_2(s)$  conectando un inductor con  $1/10$  Henries en serie con un dispositivo de un puerto caracterizado por una función DP de admitancia  $Y_3(s)$  de (5-45). Claramente, podemos repetir este proceso hasta que hayamos completado la realización de  $Y(s)$  de (5-41).

48 La primera forma de Cauer requiere que realicemos la expansión de fracción continua en el punto  $s=\infty$  de la función DP cuyo grado de polinomio numerador es mayor que el de su denominador.

Fig. 5-8 Realización de la primera forma de Cauer de  $Z(s)$  de la (5-40).

La Fig. 5-8 es una realización del circuito de la función DP de impedancia  $Z(s)$  de (5-40) mediante el procedimiento descrito en el párrafo anterior. Las funciones DP de  $Z_5(s)$  e  $Y_5(s)$  en la Fig. 5-8 están dadas por

$$Z_4(s) = \frac{9}{70}s + \frac{1}{(35/9)s} \quad (5-46a)$$

y

$$Y_5(s) = \frac{35}{9}s \quad (5-46b)$$

### Resolución Matlab – Ejemplo 5-2

Usando la definición del libro

```
clear all; clc;
syms s p 'real';

z(s) = (s^2+1)*(s^2+9)/(s*(s^2+4)*(s^2+16));
FLC(s)=1/z(s)

n=1;
while FLC(s)~=Inf
    kn=limit(FLC(s)/s,s,inf)
    if kn== sym(0)
        break;
    end
    k(n)=kn;
    FLC(s)=1/collect( FLC(s)-k(n)*s );
    n=n+1;
end
k
```

$FLC(s) = \frac{s(s^2+4)(s^2+16)}{(s^2+1)(s^2+9)}$   
 $k = \left( 1 \quad \frac{1}{10} \quad \frac{20}{9} \quad \frac{9}{70} \quad \frac{35}{9} \right)$

El inconveniente que presenta este método es que por precisión numérica del  $k(n)$  puede que no se reduzca del todo el término  $k*s$

Usando residuos, este método no da coeficientes exactos, pero a diferencia del método anterior, si funciona mejor en casos más generales.

```

syms s p 'real';

z(s) = (s^2+1)*(s^2+9)/(s*(s^2+4)*(s^2+16));

FLC(s)=z(s);

k=[];
seguir=1;
n=1;
while seguir
    FLC(s)=1/FLC(s);

    % extraigo el denominado - primero ordeno
    % en potencias descendentes
    [B,A]=numden(collect(FLC(s)));
    [r,p,K]=residue(sym2poly(B),sym2poly(A));

    % ensamble de la siguiente
    FLC(s)=sum(r(1:end)./(s-p(1:end)));

    if length(r)>0
        k(n)=K(1);
    else
        k(n)=K(1);
        seguir=0;
    end
    n=n+1;
end
display( real(k) )

```

	1.0000	0.1000	2.2222
	0.1286	3.8889	

### 5-2-2-2 Segunda forma de Cauer

En el desarrollo anterior de la primera forma de Cauer, expandimos la función DP sobre el polo en  $s=\infty$ . Consideremos ahora el caso en el que la función DP sin pérdidas se expande en el polo  $s=0$ .

Considere una función DP sin pérdidas  $F_{LC}(s)$ . Sin pérdida de generalidad, supongamos, en vista de la (5-8), que el denominador es un polinomio impar y que el numerador es un polinomio par.<sup>49</sup> Entonces  $F_{LC}(s)$  tiene un polo en  $s=0$ . Si tomamos que  $F_{LC_1}(s)=F_{LC}(s)$  y extraemos el polo de  $F_{LC_1}(s)$ , en  $s=0$ , obtenemos

$$F_{LC_1}(s) = \frac{k_1}{s} + \frac{1}{F_{LC_2}(s)} \quad (5-47a)$$

donde

$$k_1 = s F_{LC_1}(s) \Big|_{s=0} \quad (5-47b)$$

es el residuo de  $F_{LC_1}(s)$  en el polo  $s=0$ , y el término restante  $[F_{LC_2}(s)]^{-1}$  tiene un cero en  $s=0$ . Es decir,  $F_{LC_2}(s)$  tiene un polo en  $s=0$ . Por lo tanto, podemos repetir el procedimiento anterior de extraer el polo de  $F_{LC_2}(s)$  en  $s=0$ . Este proceso da

$$F_{LC_2}(s) = \frac{k_2}{s} + \frac{1}{F_{LC_3}(s)} \quad (5-48a)$$

Donde

$$k_2 = s F_{LC_2}(s) \Big|_{s=0} \quad (5-48b)$$

y  $F_{LC_3}(s)$  nuevamente tiene un polo en  $s=0$ . Sustituyendo (5-48) en (5-47) se obtiene

$$F_{LC_1}(s) = \frac{k_1}{s} + \frac{1}{\frac{k_2}{s} + \frac{1}{F_{LC_3}(s)}} \quad (5-49)$$

Repitiendo el proceso tantas veces como sea necesario, finalmente obtenemos

$$\begin{aligned} F_{LC}(s) = F_{LC_1}(s) &= \frac{k_1}{s} + \frac{1}{\frac{k_2}{s} + \frac{1}{\frac{k_3}{s} + \dots}} \\ &+ \frac{1}{\frac{k_n}{s}} \end{aligned} \quad (5-50)$$

<sup>49</sup> Tenga en cuenta que si  $F_{LC}(s)$  tiene un polinomio de numerador impar y un polinomio de denominador par, entonces podemos trabajar con  $[F_{LC}(s)]^{-1}$  en lugar de  $F_{LC}(s)$  en sí. En este caso, dejamos  $F_{LC_1}(s) \triangleq [F_{LC}(s)]^{-1}$ . El propósito es trabajar con una función DP sin pérdidas (ya sea la función de impedancia o de admitancia) que tiene un polinomio denominador impar, es decir, con un polo en  $s=0$ .

Si  $F_{LC}(s)$  es una función DP de impedancia sin pérdidas, entonces (5-47) y (5-48) se ilustran en las Figs. 5-9 (a) y (b), y la Fig. 5-9 (c) señala el tercer paso del proceso.

Por otro lado, si  $F_{LC}(s)$  es una función DP de admitancia, entonces la interpretación del circuito de (5-47) y (5-48) se muestra en las Figs. 5-10 (a) y (b), y la Fig. 5-10 (c) ilustra la acción del siguiente paso.

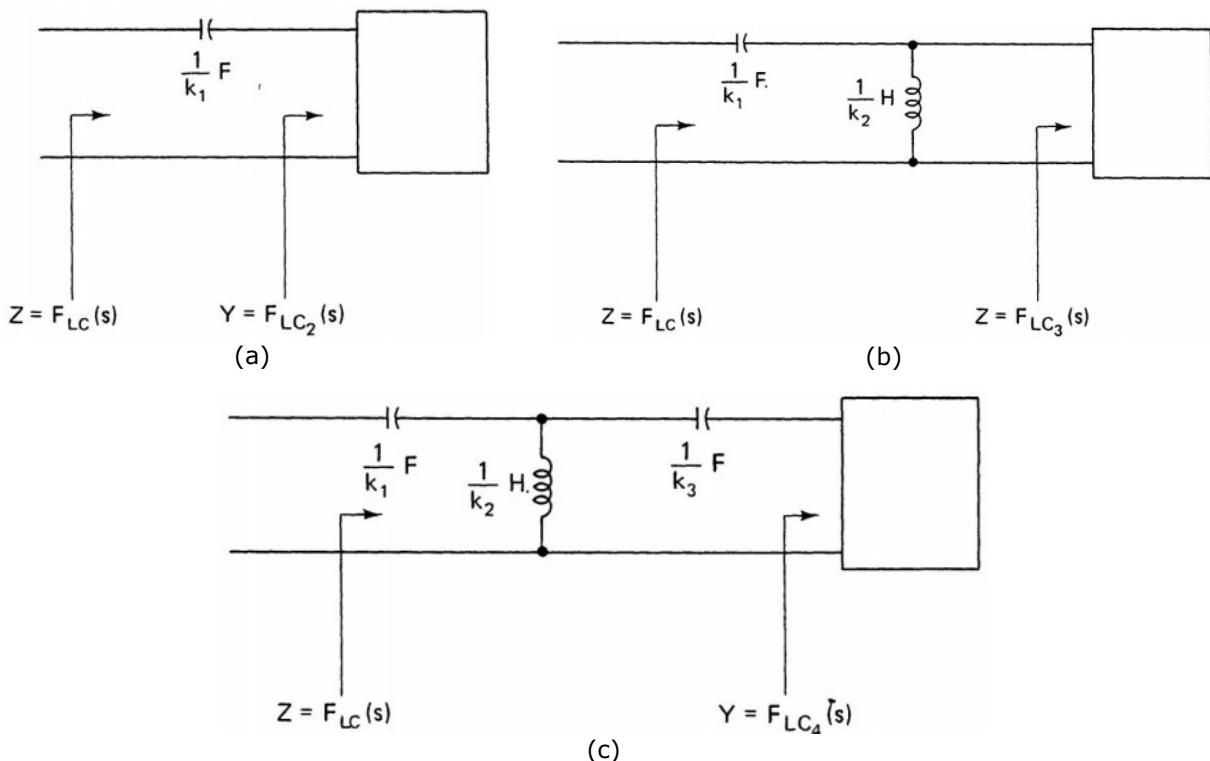


Fig. 5-9 Procedimiento de realización de la segunda forma de Cauer de una función de impedancia sin pérdidas DP  $F_{LC}(s)$

La ecuación (5-50) y la Fig. 5-9 o la Fig. 5-10 constituyen la segunda forma de Cauer. Observe que en la segunda forma de Cauer, solo hay dos tipos de elementos de circuito, a saber, **condensadores en serie e inductores en derivación(shunt)**. Debido a que los inductores conectados a tierra son más fáciles de realizar mediante circuitos activos, a diferencia de los inductores flotantes, la segunda forma de Cauer es una forma más preferible entre los métodos discutidos, para realizar funciones DP sin pérdidas cuando el dispositivo de un puerto resultante deseado está conectado a tierra. Sin embargo, como veremos en capítulos posteriores, el método utilizado para realizar una determinada función DP de a menudo está dictado por otros factores. Uno de estos factores son los **requisitos de cero de transmisión de la función de transferencia asociada**.

Observe que la (5-50) es una expansión de fracción continua de  $F_{LC}(s)$ . Cada cociente es igual a infinito en el punto  $s=0$ ; por lo tanto, se dice que esta expansión de fracción continua de  $F_{LC}(s)$  se realiza en el punto  $s=0$ . Observe también que llegamos a (5-50) a través de una serie de procesos de división e inversión. Por tanto, podemos obtener (5-50) mediante un largo proceso de división. Con los polinomios numerador y denominador de  $F_{LC}(s)$  dispuestos en potencias ascendentes de  $s$ , eliminamos el término de menor potencia en cada división. Por ejemplo, la expansión de fracción continua en  $s=0$  de

$$F(s) = \frac{9+10s^2+s^4}{64s+20s^3+s^5} \quad (5-51)$$

se puede obtener de la siguiente manera:

Tenga en cuenta que en cada inversión, hemos dividido tanto el numerador como el denominador en  $s$ . Con estos cocientes (las cantidades encerradas en un círculo en la división larga), podemos formar la expansión fraccionaria continua de  $F(s)$  en  $s=0$  como

$$F(s) = \frac{0,1406}{s} + \frac{1}{8,904 + \frac{1}{0,5821 + \frac{1}{44,53 + \frac{1}{0,2773}}}} \quad (5-52)$$

Otro método para obtener la expansión de la fracción continua en  $s=0$  se puede ver escribiendo (5-50) como

$$F_{LC}(s) = k_1 p + \frac{1}{k_2 p + \frac{1}{k_3 p + \dots + \frac{1}{k_n p}}} \quad (5-53)$$

donde  $p \triangleq s^{-1}$ . Tenga en cuenta que (5-34) y (5-53) son idénticos en forma si reemplazamos  $s$  por  $p$ . Por lo tanto, podemos **obtener la expansión fraccionaria continua de una función  $F(s)$  en el punto  $s=0$**  mediante el siguiente procedimiento:

1. Suponga que  $F(s)$  está dado por

$$F(S) = \frac{M(s)}{N(s)}$$

donde  $M(s)$  es un polinomio par de grado  $d_M$  y  $N(s)$  es un polinomio impar de grado  $d_N$ . Siendo

$$d = \max\{d_N, d_M\}$$

2. Multiplica el numerador y el denominador de  $F(s)$  por  $s^{-d}$  y se define como

$$\hat{F}(s) = \frac{A(p)}{B(p)} \triangleq \frac{s^{-d} M(s)}{s^{-d} N(s)} = F(s) \quad (5-54)$$

donde  $p \triangleq s^{-1}$ .

3. Realice la expansión de fracción continua en el punto  $p=\infty$  de la función  $\hat{F}(p)$  como en (5-34).

4. Reemplace  $p$  en el Paso 3 por  $s^{-1}$ . El resultado es una expansión fraccionaria continua de  $F(s)$  en el punto  $s=0$ .

Para ilustrar este procedimiento, consideremos la función  $F(s)$  de (5-51). Para encontrar la expansión fraccionaria continua de  $F(s)$  en el punto  $s=0$ , realizamos los siguientes pasos:

1. Dado que  $d_N=5$  y  $d_M=4$ ,  $d=5$ .

$$2. \hat{F}(p) = \frac{s^{-5}[9+10s^2+s^4]}{s^{-5}[64s+20s^3+s^5]} = \frac{9p^5+10p^3+p}{64p^4+20p^2+1} \quad (5-55)$$

3. La expansión de fracción continua de  $\hat{F}(p)$  en  $p=\infty$  está dada por

4.

$$F(p) = 0.1406 p + \cfrac{1}{8.904 p + \cfrac{1}{0.5821 p + \cfrac{1}{44.53 p + \cfrac{1}{0.2773 p}}}} \quad (5-56)$$

Reemplazando  $p$  por  $1/s$ , obtenemos la expansión de fracción continua en  $s=0$  de  $F(s)$  como en (5-52).

**Ejemplo 5-3** Realice  $Z(s) = (64s+20s^3+s^5)/(9+10s^2+s^4)$  por la segunda forma de Cauer.

**Solución:** para aplicar la segunda forma de Cauer, consideraremos<sup>50</sup>

$$Y_1(s) = \frac{1}{Z(s)} = \frac{9+10s^2+s^4}{64s+20s^3+s^5} \quad (5-57)$$

La expansión de fracción continua de  $Y_1(s)$  en  $s=0$  está dada por

50 Recuerde que la segunda forma de Cauer requiere que consideremos la función cuyo denominador es un polinomio impar y cuyo numerador es un polinomio par.

$$Y_1(s) = \frac{0.1406}{s} + \frac{1}{\frac{8.904}{s} + \frac{1}{\frac{0.5821}{s} + \frac{1}{\frac{44.53}{s} + \frac{1}{\frac{0.2773}{s}}}}} \quad (5-58)$$

En la Fig. 5-11 se da una realización de circuito de (5-57) o equivalentemente (5-58) usando la segunda forma de Cauer, donde

$$\begin{aligned} Y_5(s) &= \frac{0.2773}{s} \\ Z_4(s) &= \frac{44.53}{s} + \frac{1}{Y_5(s)} \\ Y_3(s) &= \frac{0.5821}{s} + \frac{1}{Z_4(s)} \end{aligned} \quad (5-59)$$

y

$$Z_2(s) = \frac{8.904}{s} + \frac{1}{Y_3(s)}$$

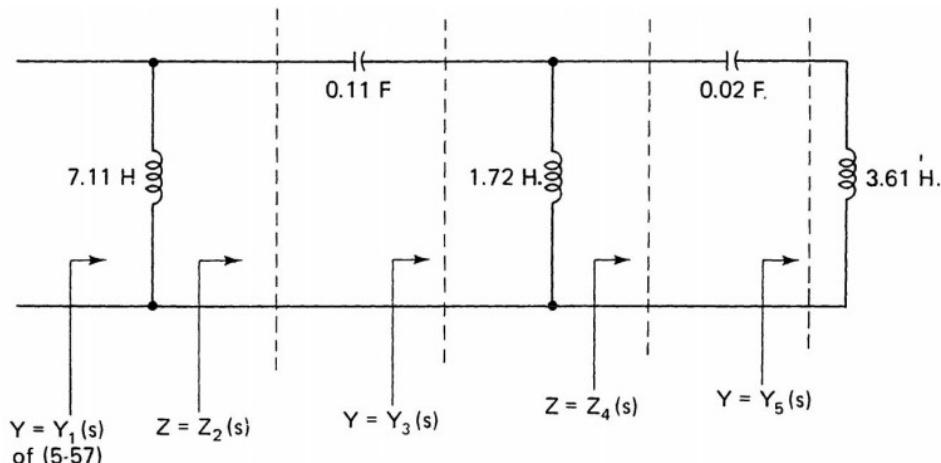


Fig. 5-11 Realización en segunda forma de Cauer de  $Z(s)$  del ejemplo 5-3.

Para concluir esta sección, debe señalarse que la realización de una función DP sin pérdidas puede iniciarse mediante cualquiera de las cuatro formas mencionadas anteriormente, a saber, las dos formas de Foster y las dos formas de Cauer. La forma inicial de realización puede terminarse en cualquier etapa y la realización puede continuar utilizando otra forma. Este cambio de métodos de realización puede ser tan frecuente como uno desee. En ese caso, el resultado final, por supuesto, no será una forma Cauer o Foster. Sin embargo, el circuito resultante seguirá realizando la función DP sin pérdidas dada.

**Ejemplo 5-4** Realice la función DP de admitancia

$$Y(s) = \frac{s^3 + 3s}{s^2 + 1} \quad (5-60)$$

primero usando la segunda forma de Cauer una vez y el resto usando la primera forma de Cauer.

**Solución:** Para usar la segunda forma de Cauer, consideraremos la función DP con un polinomio de denominador impar. Por lo tanto, consideraremos la función de impedancia

$$Z(s) = \frac{1}{3s} + \frac{(2/3)s}{s^2 + 3} \triangleq \frac{1}{3s} + Z_R(s) \quad (5-62)$$

La implementación del circuito de (5-62) se muestra en la Fig. 5-12 (a). Según las instrucciones del problema, nos daremos cuenta

$$Z_R(s) = \frac{(2/3)s}{s^2 + 3} \quad (5-63)$$

por la primera forma de Cauer. Debido a que la primera forma de Cauer trata con la función DP LC con un grado de polinomio numerador más alto, necesitamos trabajar con la función de admitancia

$$Y_R(s) = \frac{s^2 + 3}{(2/3)s} \quad (5-64)$$

La expansión de fracción continua de  $Y_R(s)$  en  $s=\infty$  está dada por

$$Y_R(s) = \frac{3/2s + \frac{1}{(2/9)s}}{(2/9)s} \quad (5-65)$$

$Y_R(s)$  de (5-65) se realiza en la Fig. 5-12 (b). Por tanto, la realización deseada del circuito de (5-60) se da en la Fig. 5-12 (c).

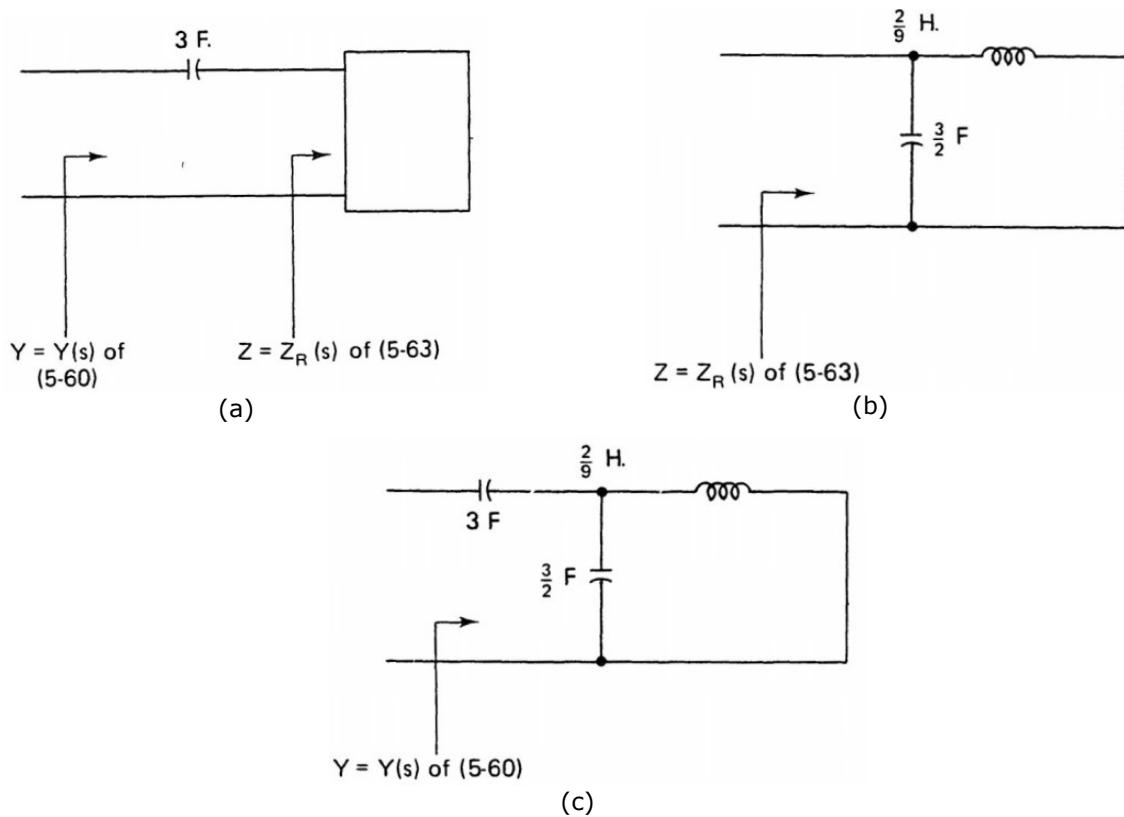


Fig. 5-12 Solución del ejemplo 5-4.

### 5-3 Observaciones finales.

En este capítulo, tenemos presentados las propiedades básicas de las funciones DP sin perdidas. Estas propiedades forman las condiciones de realizabilidad de las funciones DP LC. Un resumen de estas condiciones son las siguientes.

#### Condiciones de realizabilidad de las funciones DP de LC.

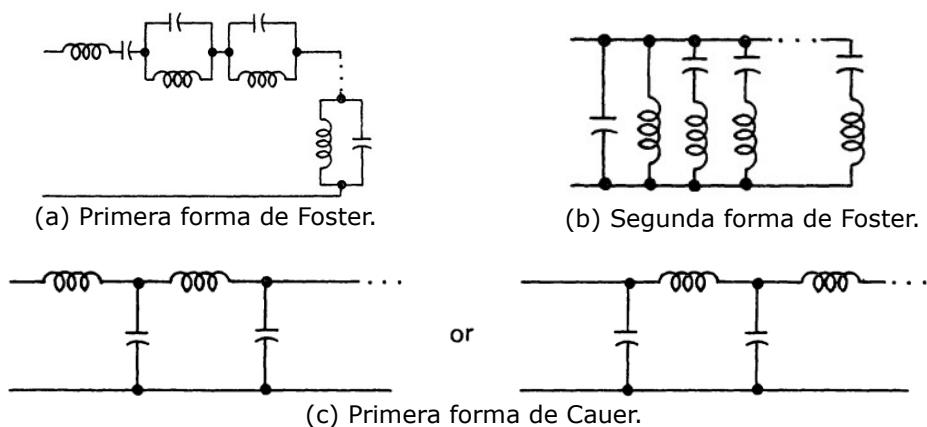
1. Todos los polos y ceros de  $F_{LC}(s)$  son simples y que están sobre el eje imaginario del plano-s
2. Los polos y ceros de  $F_{LC}(s)$  se alternan en el eje imaginario.
3. Los puntos  $s=0$  y  $s=\infty$  son frecuencias críticas.
4.  $F_{LC}(s)$  es una función racional impar la cual el grado del polinomio numerador y del polinomio del denominador difieren exactamente en uno.
5. Todos los residuos de  $F_{LC}(s)$  son real y positivos.

En este capítulo, también hemos presentado cuatro métodos para realizar funciones de DP sin pérdidas.

La primera forma de Foster se aplica solo a las funciones de impedancia, y la segunda forma de Foster se ocupa solo de las funciones de admisión.

Las dos formas de Cauer se pueden aplicar a una función de impedancia o de admitancia. La primera forma de Cauer trabaja con una función DP cuyo polinomio numerador es de **mayor grado** que el del polinomio denominador, y la segunda forma de Cauer trabaja con una función DP cuyo denominador es un polinomio impar (**es como menor grado**).

Las formas de Foster son relativamente más fáciles de implementar, pero las formas de Cauer son más útiles, particularmente en la realización de funciones de transferencia como se discutió en el Capítulo 7. La estructura del circuito de la primera forma de Foster consiste en conexiones en serie de ramas LC paralelas, y la de la segunda forma de Foster consta de conexiones en paralelo de ramales de la serie LC. La configuración del circuito de ambas formas de Cauer son circuitos en escalera. La primera forma de Cauer consiste en inductores en serie y capacitores en derivación, creando ceros de transmisión<sup>51</sup> en  $s=\infty$ , y la segunda forma de Cauer consiste en capacitores en serie e inductores en derivación, creando ceros de transmisión en  $s=0$ . Las configuraciones básicas del circuito de las formas de Foster y Cauer son resumido en la Fig. 5-13.



<sup>51</sup> El concepto de cero de transmisión se introduce en el capítulo 7. Aquí basta con decir que los ceros de transmisión del circuito son ceros de una función de red asociada con el circuito.

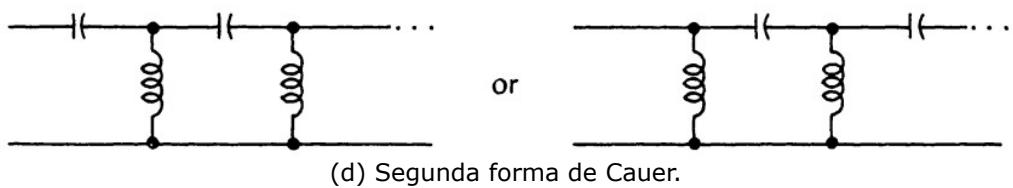


Fig. 5.13 Las estructuras de circuito de las dos formas de Foster  
y las dos formas de Cauer.

### **Referencias y lecturas adicionales**

- [1] Desoer, C. A., and Kuh, E. S. Basic Circuit Theory. New York: McGraw-Hill, 1969.
- [2] Foster, R. M. "A Reactance Theorem." Bell Syst. Tech. J. 3 (1924): 259-67.
- [3] Weinberg, L. Network Analysis and Synthesis. Huntington, N.Y.: R. E. Krieger, 1975.
- [4] Humphreys, D. S. The Analysis, Design, and Synthesis of Electrical Filters. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1970.
- [5] Peikari, B. Fundamentals of Network Analysis and Synthesis. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1974.
- [6] Budak, A. Passive and Active Network Analysis and Synthesis. Boston, MA.: Houghton Mifflin, 1974.
- [7] Anderson, B. D. O., and Vongpanitlerd, S. Network Analysis and Synthesis. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1973.

## Problemas

5-1. Determine cuáles de las siguientes  $F(s)$  se pueden realizar como funciones DP sin pérdidas. Justifica tus respuestas.

$$(a) F(s) = \frac{s^4 + 5s^2 + 6}{s^4 + 3s^2 + 2}$$

$$(b) F(s) = \frac{s^4 + 5s^2 + 6}{s^4} + 3s^2 + 2$$

$$(c) F(s) = \frac{s^3 + 1.5s}{s^4 + 3s^2 + 2}$$

$$(d) F(s) = \frac{s^3 + 1.5s}{s^4 + 2s^2 + 1}$$

$$(e) F(s) = \frac{s^3 + 1.5s}{s^4 + 2s^2 + 1}$$

$$(f) F(s) = \frac{s^4 + 5s^2 + 6}{s^4 + 3s^2 + 2}$$

$$(g) F(s) = \frac{s^5 + 3s^3 + 2s}{s^4 + 5.5s^2 + 6}$$

$$(h) F(s) = \frac{s^4 + 3s^2 + 2}{s^5 + 5.5s^3 + 6s}$$

$$(i) F(s) = \frac{s^4 + 3s^2 + 2}{s^5 + 5.5s^3 + 6}$$

$$(j) F(s) = \frac{s^4 + 3s^2 + 2}{s^6 + 2s^4 + 6s^2 + 3}$$

5-2. Considere la red de un dispositivo de un puerto  $N$  que se muestra en la Fig. P5-2.

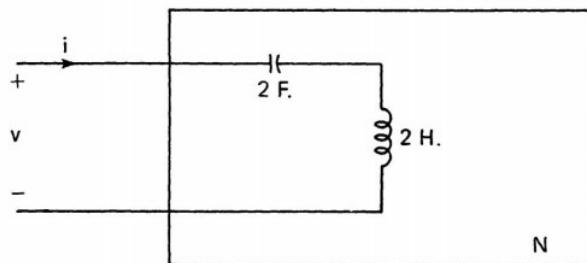


Fig. P5-2

(a) Si  $v(t) = A \cos \omega t$ , encuentre la respuesta de estado estable  $i(t)$  y demuestre que la disipación de potencia promedio es cero.

(b) Encuentre la función DP de impedancia  $Z(s)$  de  $N$ , y demuestre que  $Z(s)$  satisface todas las propiedades de una función DP sin pérdidas.

5-3. Considere el televisor de red de un dispositivo de un puerto que se muestra en la Fig. P5-3.

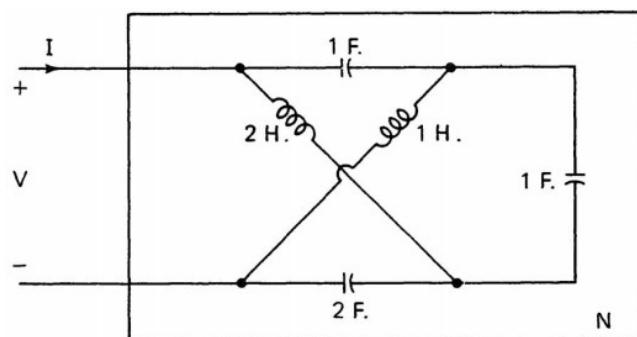


Fig. P5-3

(a) Encuentre la función DP de impedancia  $Z(s)$  de  $N$ .

- (b) Muestre que  $Z(s)$  satisface todas las propiedades de una función DP sin pérdidas.
- (c) Realice  $Z(s)$  en la primera forma de Foster.
- (d) Realice  $Z(s)$  en la segunda forma de Foster.
- (e) Realice  $Z(s)$  por la primera forma de Cauer.
- (f) Realice  $Z(s)$  por la segunda forma de Cauer.

Nota: La función DP de impedancia de N viene dada por

$$Z(s) = \frac{10s^4 + 8s^2 + 1}{4s^5 + 10s^3 + 4s}$$

5-4. Repetir el Problema 5-3 para las redes de un dispositivo de un puerto mostrado en la Fig. P5-4

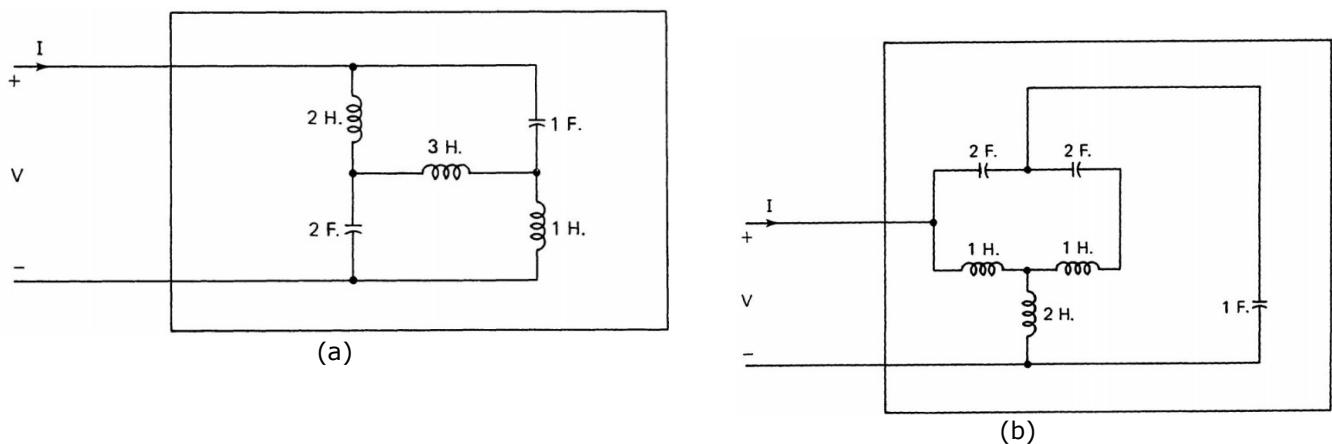


Fig. P5-4

5-5. Para cada  $F(s)$  dado a continuación, encuentre el rango de tal que  $F(s)$  sea realizable como una función DP sin pérdidas.

- (a)  $F(s) = \frac{s^3 + as}{s^4 + 3s^2 + 2}$
- (b)  $F(s) = \frac{s^5 + as^3 + 1.5s}{s^4 + 3s^2 + 2}$
- (c)  $F(s) = \frac{s^3 + 4s}{s^4 + as^2 + 2}$
- (d)  $F(s) = \frac{2.5s^4 + 2s^2 + a}{s^5 + 2.5s^3 + s}$
- (e)  $F(s) = \frac{2.5s^4 + as^2 + 0.25}{s^5 + 2.5s^3 + s}$

5-6. Realice las siguientes funciones DP de impedancia mediante dos formas de Foster y dos de Cauer. Si una  $Z(s)$  dada no es realizable, exponga sus razones.

$$(a) \ Z(s)=\frac{s(s^2+2)}{(s^2+1)}$$

$$(d) \ Z(s)=\frac{s(s^2+2)(s^2+4)}{(s^2+1)(s^2+3)}$$

$$(b) \ Z(s)=\frac{(s^2+3)}{s(s^2+4)}$$

$$(e) \ Z(s)=\frac{(s^2+2)(s^2+4)}{s(s^2+1)(s^2+3)}$$

$$(c) \ Z(s)=\frac{(s^2+1)(s^2+3)}{s(s^2+2)}$$

<pre> clear all;clc; syms s p 'real';  z(s) = str2sym('(s^2+1)*(s^2+3)/(s*(s^2+2))');  FLC(s)=z(s)  n=1; while FLC(s)~=Inf     kn=limit(FLC(s)/s,s,inf)     if kn== sym(0)         break;     end     k(n)=kn;     FLC(s)=1/collect( FLC(s)-k(n)*s );     n=n+1; end k </pre>	$\text{FLC}(s) =$ $((s^2 + 1)*(s^2 + 3))/(s*(s^2 + 2))$  $k =$ $[1, 1/2, 4, 1/6]$
---	---

5-7. Realice las siguientes funciones DP de admisión mediante dos formularios de Foster y dos formularios de Cauer. Si un  $Y(s)$  dado no es realizable, exponga sus razones.

$$(a) \ Y(s)=\frac{s(s^2+2)}{(s^2+1)}$$

$$(d) \ Y(s)=\frac{s(s^2+2)(s^2+4)}{(s^2+1)(s^2+3)}$$

$$(b) \ Y(s)=\frac{(s^2+3)}{s(s^2+4)}$$

$$(e) \ Y(s)=\frac{(s^2+2)(s^2+4)}{s(s^2+1)(s^2+3)}$$

$$(c) \ Y(s)=\frac{(s^2+1)(s^2+3)}{s(s^2+2)}$$

5-8. Realice la función DP de impedancia

$$Z(s)=\frac{(s^2+1)(s^2+4)}{s(s^2+3)(s^2+5)}$$

mediante los siguientes procedimientos:

- Comience con la primera forma de Cauer (para dos elementos) y complete la realización con la segunda forma de Cauer.
- Comience con la segunda forma de Cauer (para tres elementos) y complete la realización con la primera forma de Cauer.
- Comience con la primera forma de Cauer (para un elemento); luego cambie a la segunda forma de Cauer (para un elemento) y complete la realización con la primera forma de Foster.

**5-10. (a) Realice la función de impedancia DP**

$$Z(s) = \frac{4s^3 + 6s}{s^4 + 5s^2 + 4}$$

por la segunda forma de Cauer.

(b) Verifique que la función de impedancia DP del circuito obtenido en (a) esté dada por  $Z(s)$ .

**5-11. Dados los coeficientes de los polinomios**

$$A(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_m s^m$$

y

$$B(s) = b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots + b_n s^n$$

escribir un programa de computadora para determinar si

$$F(s) = \frac{A(s)}{B(s)}$$

es realizable como una función DP sin pérdidas.

**5-12. Dada una función de impedancia DP sin pérdidas {admitancia}  $Z(s)$  { $Y(s)$ } , escriba un programa de computadora para realizar  $Z(s)$  { $Y(s)$ } por**

- (a) Primera forma de Foster.
- (b) Segunda forma de Foster.
- (c) Primera forma de Cauer.
- (d) Segunda forma de Cauer.

## 6. Propiedades y las realizaciones de funciones de redes RC pasivas.

Para operaciones de **baja frecuencia**, normalmente se requieren **grandes valores de inductancia** que conducen a inductores discretos que son pesados, con pérdidas, voluminosos y costosos. Además, los verdaderos **inductores de circuito integrado todavía no son posibles**. Los **inductores sintéticos**, como los producidos por combinaciones de girador-condensador, **todavía presentan problemas prácticos**. Con estas restricciones, los circuitos físicos factibles son simplemente circuitos RC pasivos y activos.<sup>52</sup>

En este capítulo se muestra que tanto los polos como **los ceros** de una función pasiva de impedancia o admitancia de un dispositivo RC de un puerto **están en el eje real negativo del plano-s**. Esto significa que los polos de una función de transferencia de un dispositivo pasivo RC de dos puertos deben estar en el eje real negativo del plano-s.<sup>53</sup> Afortunadamente, con la inclusión de dispositivos activos, como amplificadores operacionales y VCVS, se pueden obtener **polos en el plano-s complejo**. Por lo tanto, en teoría, **una red RC activa** parece ser capaz de realizar todas las funciones de filtrado de sus contrapartes RLC pasivas. Sin embargo, las tolerancias de los componentes y las sensibilidades de los parámetros, en particular las asociadas con un **dispositivo activo**, a menudo bordean o superan los límites prácticos de realizabilidad a altas frecuencias. Por otro lado, **en aplicaciones de baja frecuencia para las que las variaciones de parámetros no son tan críticas**, los dispositivos RC activos son las formas dominantes de realización. Como veremos más adelante, la realización de funciones DP por resistencias y condensadores es de fundamental importancia para el diseño de circuitos activos RC.

### 6-1 Propiedades de funciones RC DP de impedancia.

Las propiedades y técnicas de realización de las funciones DP RC se establecen más fácilmente haciendo comparaciones en paralelo con las de las funciones DP LC. Aunque este no es el procedimiento más riguroso, conduce a resultados precisos y proporciona información adicional sobre las propiedades de las funciones de impedancia y admitancia de dos elementos.

En el Capítulo 5, se ha demostrado que cada función de impedancia de un dispositivo LC de un puerto sin pérdidas se puede describir mediante la (5-25), que se repite aquí por conveniencia

$$Z_{LC}(s) = L_\infty s + \frac{1}{C_0 s} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i s + \frac{1}{L_i s}} \quad (6-1)$$

Esto significa que todo el dispositivo LC de un puerto admite un circuito de un dispositivo de un puerto equivalente en la forma de Fig. 5-2

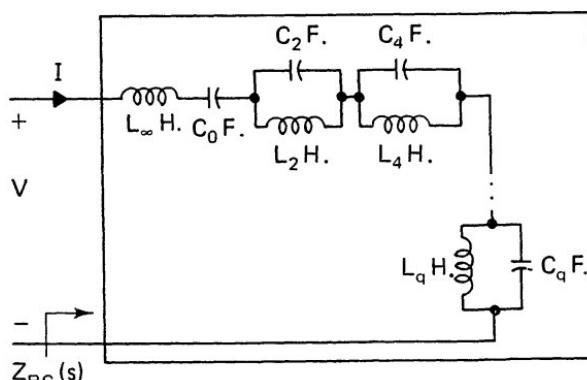


Fig. 5-2 Primera forma de Foster.

52 Los circuitos RC pasivos son circuitos que contienen resistencias y condensadores únicamente. Los circuitos RC activos contienen dispositivos activos además de resistencias y condensadores.

53 En este libro, el eje real negativo del plano-s incluye el origen  $s=0$  y el punto  $s=\omega$ .

Dado un dispositivo RC de un puerto  $\eta_{RC}$ , sea  $\hat{\eta}_{LC}$  el circuito de un dispositivo de un puerto obtenido al reemplazar cada resistor de  $R_k \Omega$  en  $\eta_{RC}$  con un inductor de  $R_k H$ . En vista de los comentarios del párrafo anterior,  $\eta_{LC}$  admite un circuito de un dispositivo de un puerto equivalente  $\hat{\eta}_{LC}$  en la forma de la Fig. 5-2. Si ahora obtenemos un circuito de un dispositivo de un puerto  $\hat{\eta}_{RC}$  reemplazando cada inductor de  $L_k H$  en  $\hat{\eta}_{LC}$  por una resistencia de  $L_k \Omega$ , entonces claramente,  $\hat{\eta}_{RC}$  es equivalente de  $\eta_{RC}$  así como  $\hat{\eta}_{LC}$  es equivalente a  $\eta_{LC}$ .

La impedancia DP de  $\hat{\eta}_{LC}$  viene dada por (6-1), y  $\hat{\eta}_{RC}$  se obtiene reemplazando cada rama de impedancia de  $sL_k$  en  $\hat{\eta}_{LC}$  con una impedancia de  $R_k = L_k$ ; por lo tanto, la función de impedancia DP de  $\hat{\eta}_{RC}$  está dada por

$$Z_{RC}(s) = R_\infty + \frac{1}{C_o s} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i s + (1/R_i)} \quad (6-2)$$

siendo

$$\sigma_i = \frac{1}{R_i C_i}, \quad k_i = \frac{1}{C_i}, \quad k_\infty = R_\infty \quad k_0 = \frac{1}{C_o} \quad (6-3)$$

(6-2) se convierte en

$$Z_{RC}(s) = k_\infty + \frac{k_0}{s} + \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{s + \sigma_i} \quad (6-4)$$

donde  $\sigma_i$  y  $k_i$  para  $i=1,2,\dots,n$ ;  $k_0$  y  $k_\infty$  son positivos y reales. Debido a que  $\eta_{RC}$  y  $\hat{\eta}_{RC}$  son dispositivos de un puerto equivalentes, la función de impedancia DP de  $\eta_{RC}$  también está claramente dada por (6-4). Por lo tanto, llegamos a la conclusión de que la función de impedancia de cada dispositivo RC de un puerto se puede escribir en la forma de (6-4).

Con el trabajo preliminar completado, ahora discutimos algunas propiedades generales de las funciones de impedancia de un dispositivo RC de un puerto.

**PROPIEDAD ZRC1** Todos los polos y ceros de una función de impedancia RC de un dispositivo de un puerto ocurren en el eje real negativo del plano-s.

**PRUEBA.** De (4-5), la función de impedancia DP de un dispositivo RC de un puerto satisface la siguiente ecuación

$$Z_{in}(s) = \sum_k R_k \frac{|I_k|^2}{|I_1|^2} + \frac{1}{s} \sum_e \frac{1}{C_k} \frac{|I_k|^2}{|I_1|^2} \quad (6-5)$$

A su vez, (6-5) dice que los ceros de  $Z_{in}(s)$  deben satisfacer ecuaciones de la forma

$$\alpha s + \beta = 0 \quad (6-6)$$

Donde

$$\alpha \triangleq \sum_k R_k \frac{|I_k|^2}{|I_1|^2} \geq 0$$

y

$$\beta \triangleq \sum_e \frac{1}{C_k} \frac{|I_k|^2}{|I_1|^2} \geq 0$$

Aunque tanto  $\alpha$  a como  $\beta$  son funciones de  $s$ , según (6-6), aún podemos concluir que los ceros de una función de impedancia de un dispositivo RC de un puerto están en el eje real

negativo del plano-s. De *manera dual*, podemos concluir que los ceros de una función de admitancia RC de un dispositivo de un puerto también deben estar en el eje real negativo del plano-s. Por lo tanto, tanto los ceros como los polos de una función DP de un dispositivo RC de un puerto están en el eje real negativo del plano-s.

Con base en la forma general de una función de impedancia RC DP,  $Z_{RC}(s)$  de (6-4), hacemos las siguientes observaciones:

**PROPIEDAD ZRC2** Los residuos de  $Z_{RC}(s)$  son reales y positivos.

**PRUEBA.** De (6-4), los residuos de  $Z_{RC}(s)$  son las constantes  $k_i$ ; donde  $i=0,1,2,\dots,n$ ; e  $\infty$ . Estos residuos son reales y positivos como lo indica (6-3).<sup>54</sup>

**PROPIEDAD ZRC3**  $Z_{RC}(s)$  no puede tener un polo en  $s=\infty$ . Además,<sup>55</sup>

$$Z_{RC}(\infty) < Z_{RC}(0) \quad (6-7)$$

**PRUEBA.** De la (6-4),  $Z_{RC}(\infty)=k_\infty$  que es un número finito no negativo. Por tanto,  $s=\infty$  no puede ser un polo de  $Z_{RC}(s)$ . Además, de (6-4)

$$Z_{RC}(0)=k_\infty + \frac{k_0}{0} + \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{\sigma_i} \quad (6-8)$$

Si  $k_0 \neq 0$ , entonces  $Z_{RC}(s)$  tiene un polo en  $s=0$ , y  $Z_{RC}(0)=\infty$ . Si  $k_0=0$ , entonces el punto  $s=0$  no es un polo de  $Z_{RC}(s)$ . En este caso, tenemos

$$Z_{RC}(0)=k_\infty + \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{\sigma_i} = Z_{RC}(\infty) + \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{\sigma_i} > Z_{RC}(\infty) \quad (6-9)$$

Esto completa la prueba de propiedad **ZRC3**.

**PROPIEDAD ZRC4**  $Z_{RC}(s)$  es una función decreciente monótona a lo largo del eje real del plano-s, excepto en los polos de  $Z_{RC}(s)$ .

**PRUEBA.** Diferenciando (6-4) con respecto a  $s$ , obtenemos

$$\frac{dZ_{RC}(s)}{ds} = -\frac{k_0}{s^2} - \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{(s+\sigma_i)^2} \quad (6-10)$$

Configurando  $s=\sigma$ , (6-10) se convierte en

$$dZ_{RC}(\sigma) = -\frac{k_0}{\sigma^2} - \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{(\sigma+\sigma_i)^2} \quad (6-11)$$

Debido a que sus  $k_i$  son positivos y reales según lo concluido por la propiedad **ZRC2**,

$$\frac{dZ_{RC}(\sigma)}{d\sigma} < 0 \quad (6-12)$$

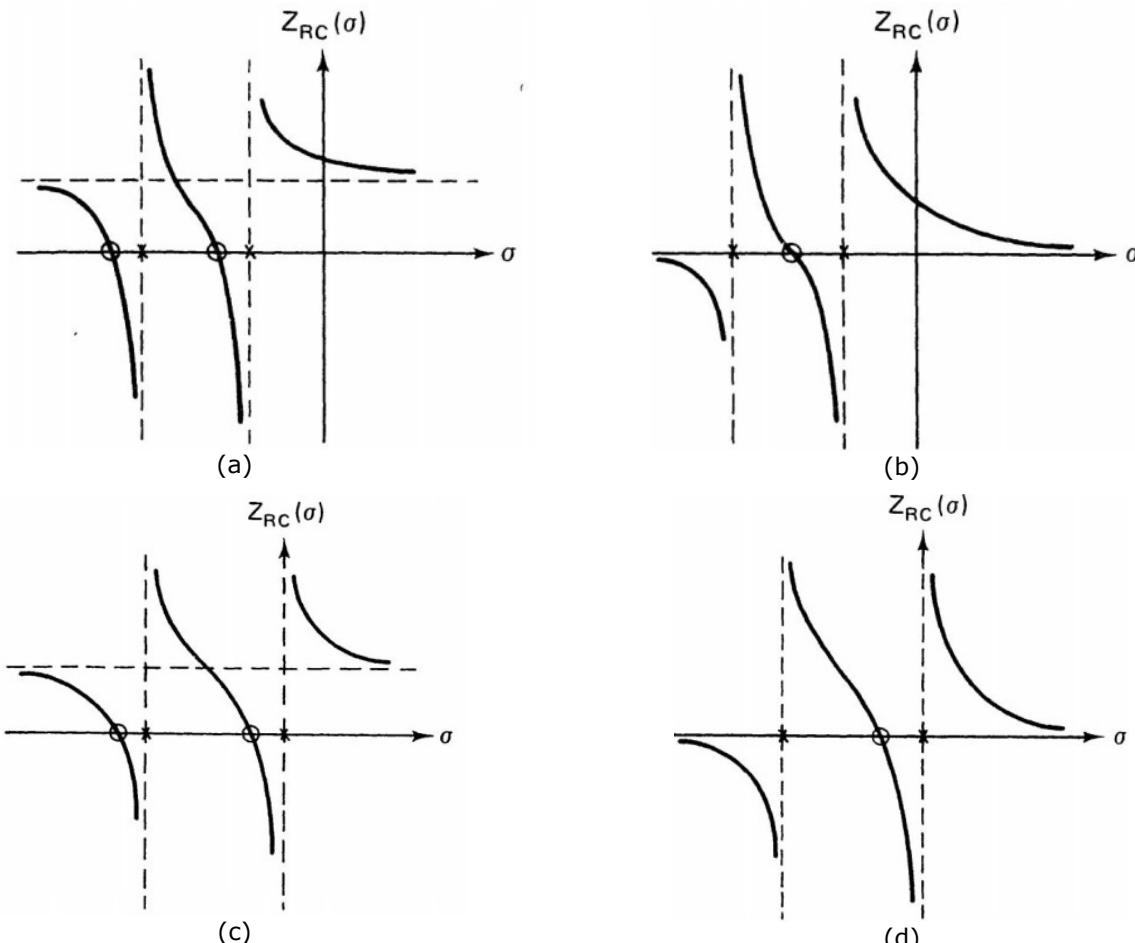
<sup>54</sup> Las constantes  $k_0$  y  $k_\infty$  son reales y positivas siempre que aparecen en (6-4). Estrictamente hablando,  $k_0$  y  $k_\infty$  constantes reales y no negativas.

<sup>55</sup> Tenga en cuenta que  $Z_{RC}(-\infty)=Z_{RC}(\infty)$ .

para todo  $\sigma$ , excepto cuando  $\sigma = -\sigma_i$  los cuales se encuentran los polos de  $Z_{RC}(s)$ .

En la Fig. 6-1 se muestran algunos esquemas típicos de  $Z_{RC}(\sigma)$  respecto a  $\sigma$ . Como consecuencia de la propiedad **ZRC4**, tenemos las siguientes dos propiedades:

**PROPIEDAD ZRC5** Todos los polos y ceros de  $Z_{RC}(s)$  son simples y se entrelazan a lo largo del eje real negativo del plano-s. El punto crítico más cercano al origen debe ser un polo (puede ocurrir justo en el origen), y el más cercano a  $s=\infty$  es cero (nuevamente, puede ocurrir en  $s=\infty$ ). Incluyendo el punto  $s=\infty$ , el número de polos de  $Z_{RC}(s)$  es igual al número de ceros de  $Z_{RC}(s)$ . (Vea la Fig. 6-1.)



Leyenda. 0 = cero y x = polo

Fig. 6-1 Gráficos típicos de  $Z_{RC}(\sigma)$  respecto a  $\sigma$  (a) y (c)  $s=\infty$  no es un cero de  $Z_{RC}(s)$ . (b) y (d)  $s=\infty$  es un cero de  $Z_{RC}(s)$ . (a) y (b)  $s=0$  no es un polo de  $Z_{RC}(s)$ . (c) y (d)  $s=0$  es un polo de  $Z_{RC}(s)$ .

**PROPIEDAD ZRC6** Si  $s=\infty$  no es cero de  $Z_{RC}(s)$ , entonces  $Z_{RC}(s)$  se puede escribir como

$$Z_{RC}(s) = \frac{k_\infty(s+\hat{\sigma}_2)(s+\hat{\sigma}_4)\dots(s+\hat{\sigma}_r)}{(s+\hat{\sigma}_1)(s+\hat{\sigma}_3)\dots(s+\hat{\sigma}_{r-1})} \quad (6-13)$$

Donde

$$0 \leq \hat{\sigma}_1 < \hat{\sigma}_2 < \hat{\sigma}_3 \dots < \hat{\sigma}_r \quad (6-14)$$

y  $r$  es un número entero par. Por otro lado, si  $s=\infty$  es cero de  $Z_{RC}(s)$ , entonces  $Z_{RC}(s)$  viene dado por

$$Z_{RC}(s) = \frac{k(s+\hat{\sigma}_2)(s+\hat{\sigma}_4)\dots(s+\hat{\sigma}_r)}{(s+\hat{\sigma}_1)(s+\hat{\sigma}_3)\dots(s+\hat{\sigma}_{r+1})} \quad (6-15)$$

donde  $r$  es un número entero par, y

$$0 \leq \hat{\sigma}_1 < \hat{\sigma}_2 < \dots < \hat{\sigma}_{r+1} \quad (6-16)$$

Tenga en cuenta que (6-13) simplemente dice que hay tantos polos finitos como ceros finitos.<sup>56</sup> Por tanto, los grados del polinomio del numerador y del polinomio del denominador son iguales. En (6-15), el grado del polinomio del denominador es uno mayor que el del polinomio del numerador, lo que implica que hay más polos finitos que ceros finitos. Si  $Z_{RC}(s)$  se da como una relación de dos polinomios como  $Z_{RC}(s)=A(s)/B(s)$ , donde  $A(s)$  y  $B(s)$  son polinomios de grados  $d_A$  y  $d_B$ , respectivamente, entonces Propiedad ZRC6 implica que

$$d_B - 1 \leq d_A \leq d_B \quad (6-17)$$

Las propiedades **ZRC5** y **ZRC6** juegan un papel muy importante en el diseño de filtros activos RC en el Capítulo 10.

**PROPIEDAD ZRC7**  $\operatorname{Re}[Z_{RC}(j\omega)]$  disminuye monótonamente a medida que  $|\omega|$  aumenta.

**PRUEBA.** De (6-4), la parte real de  $Z_{RC}(j\omega)$  viene dada por

$$\operatorname{Re}[Z_{RC}(j\omega)] = k_\infty + \sum_{i=1}^n \frac{k_i \sigma_i}{(\omega^2 + \sigma_i^2)} \quad (6-18)$$

Como  $|\omega|$  aumenta, el segundo término en el lado derecho de (6-18) disminuye y el primer término permanece constante. Por tanto, sigue nuestra conclusión.

La propiedad **ZRC7** significa que  $\operatorname{Re}[Z_{RC}(j\omega)]$  alcanza su valor mínimo en  $\omega=\infty$ . De (6-4),  $Z_{RC}(j\infty)=Z_{RC}(\infty)$  es una cantidad real. Por lo tanto, tenemos

$$Z_{RC}(\infty) = \operatorname{Re}[Z_{RC}(\infty)] \leq \operatorname{Re}[Z_{RC}(j\omega)] \text{ para todo } \omega \quad (6-19)$$

La ecuación (6-19) es muy útil en la síntesis de funciones DP RC de un puerto, particularmente con la primera forma de Cauer. Resulta que  $Z_{RC}(\infty)$  es la mayor constante positiva que se puede extraer de  $Z_{RC}(s)$ , y sin embargo, la función de impedancia restante  $Z_{RC}^r(s) \triangleq Z_{RC}(s) - Z_{RC}(\infty)$  es una función PR que tiene todas las propiedades de una función DP RC de impedancia.<sup>57</sup> Este hecho se utiliza en la primera forma de realización de Cauer de las funciones DP RC.

56 Se dice que un punto  $s_k$  es un *punto finito* {cero} de una función racional  $F(s)$  si  $s_k$  es un polo {cero} de  $F(s)$  y  $|s_k| \neq \infty$ .

57 Consulte las referencias [1] y [2] para obtener más detalles.

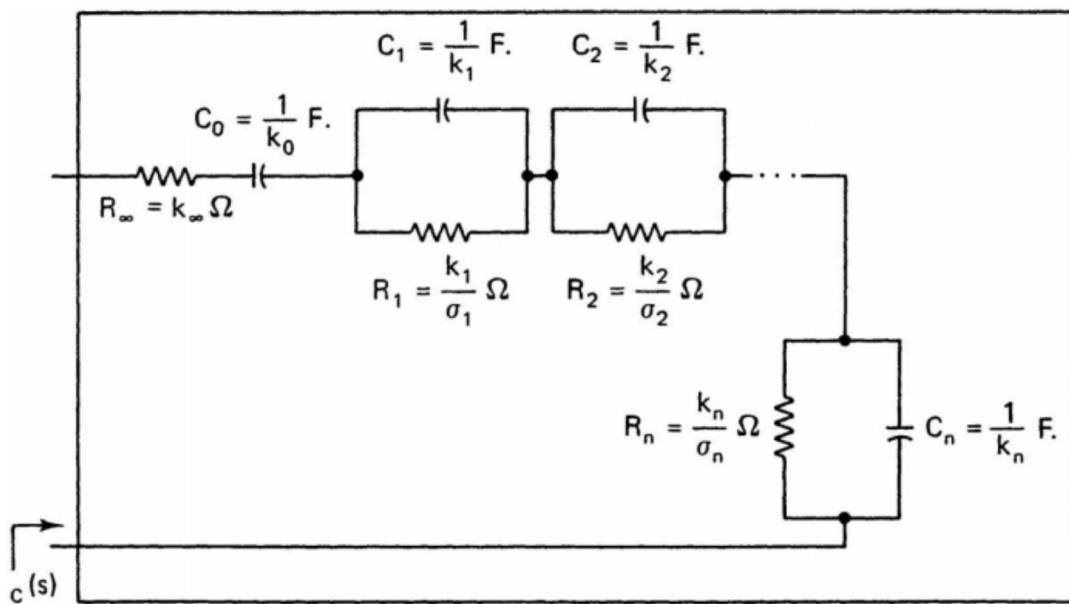


Fig. 6-2 Estructura del circuito de la primera forma de Foster.

En la Fig. 6-2 se da una realización de circuito de la (6-2) mediante la expansión de fracción parcial de (6-4) y (6-3), que se denomina **primera forma de Foster**. Observe que el circuito de la Fig. 6-2 es el mismo que el de la Fig. 5-2, excepto que los inductores se reemplazan por resistencias con valores apropiados.

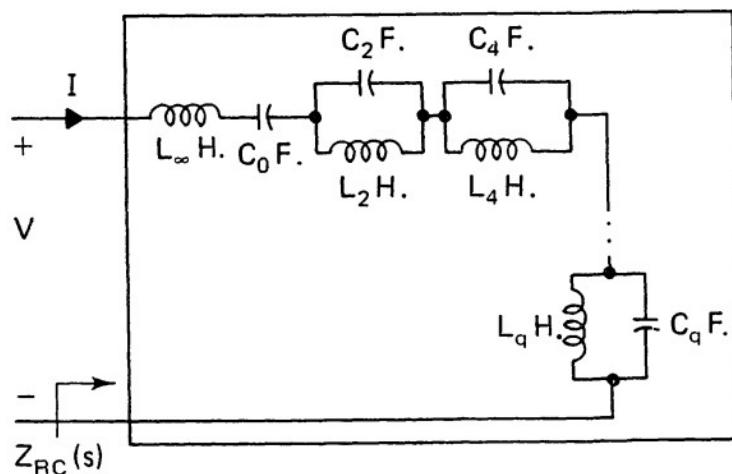


Fig. 5-2 Primera forma de Foster.

## 6-2 Propiedades de las funciones DP RC de admitancia.

Basado en (5-27) en lugar de (5-25), podemos mostrar que la función DP de admitancia de un dispositivo RC de un puerto tiene la siguiente forma general

$$Y_{RC}(s) = C_\infty s + \frac{1}{R_o} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i + \frac{1}{C_i s}} \quad (6-20)$$

siempre que

$$k_0 = \frac{1}{R_o}, \quad k_i = \frac{1}{R_i}, \quad k_\infty = C_\infty \quad y \quad \sigma_i = \frac{1}{R_i C_i} \quad (6-21)$$

luego (6-20) puede ser escrito como

$$Y_{RC}(s) = k_\infty s + k_0 + \sum_{i=1}^n \frac{k_i s}{s + \sigma_i} \quad (6-22)$$

donde  $k_i$  y  $\sigma_i$ , para  $i=1,2,\dots,n$ ;  $k_0$ ; y  $k_\infty$  son positivos y real. En la vista del formato de la función DP RC de admitancia  $Y_{RC}(s)$  de (6-20) a (6-22), podemos establecer lo siguiente.<sup>58</sup>

**PROPIEDAD YRC1.** Todos los polos y ceros de  $Y_{RC}(s)$  están en el eje real negativo del plano-s.

**PROPIEDAD YRC2.** Los residuos de  $Y_{RC}(s)$  en los polos reales y negativos finitos son reales y negativos. El residuo de  $Y_{RC}(s)$  en el polo  $s=\infty$  es positivo y real.<sup>59</sup>

**PRUEBA.** De (6-22), el residuo de  $Y_{RC}(s)$  En  $s=\infty$  viene dado por

$$\xi_\infty = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} Y_{RC}(s) = k_\infty \quad (6-23)$$

Por (6-21),  $\xi_\infty$  es positivo y real.

El residuo de  $Y_{RC}(s)$  en un polo real negativo finito  $s=-\sigma_j$  está dado por

$$\xi_j = (s + \sigma_j) Y_{RC}(s) \Big|_{s=-\sigma_j} \quad (6-24)$$

Sustituyendo (6-22) en (6-24), obtenemos

$$\xi_j = k_j s \Big|_{s=-\sigma_j} = -k_j \sigma_j \quad (6-25)$$

De (6-21) y (6-25), es negativo y real.

**PROPIEDAD YRC3**  $Y_{RC}(s)$  no puede tener un polo en  $s=0$ . Además,

$$Y_{RC}(0) \leq Y_{RC}(\infty) = |Y_{RC}(-\infty)| \quad (6-26)$$

Tenga en cuenta que los  $Y_{RC}(s)$  pueden tener un polo en  $s=\infty$  y/o un cero en  $s=0$ .

58 Si una propiedad de  $Y_{RC}(s)$  puede demostrarse mediante un desarrollo dual, paralelo al de  $Z_{RC}(s)$ , simplemente establecemos esa propiedad.

59 Siempre que el término  $k_\infty s \{k_o\}$  aparece en (6-22),  $k_\infty s \{k_o\}$  es una constante real y positiva.

**PROPIEDAD YRC4**  $Y_{RC}(s)$  es una función que aumenta monótonamente a lo largo del eje real del plano-s, excepto en los polos de  $Y_{RC}(s)$ .

**PRUEBA.** Diferenciando (6-22), obtenemos

$$\frac{dY_{RC}(\sigma)}{d\sigma} = k_\infty + \sum_{i=1}^n \frac{k_i \sigma_i}{\sigma + \sigma_i^2} \quad (6-27)$$

Por (6-21) y (6-27),

$$\frac{dY_{RC}(\sigma)}{d\sigma} > 0 \quad (6-28)$$

para todo  $\sigma$  excepto en los polos de  $Y_{RC}(s)$

En la Fig. 6-3 se dan algunos esquemas típicos de  $Y_{RC}(\sigma)$  respecto a  $\sigma$ .

**PROPIEDAD YRC5** Todos los polos y ceros de  $Y_{RC}(s)$  son simples y se entrelazan a lo largo del eje real negativo del plano-s. El punto crítico más cercano al origen debe ser un cero (puede ocurrir en el origen), y el más cercano al infinito es un polo  $s=\infty$  puede ser un polo). Incluyendo el punto  $s=\infty$ , el número de polos de  $Y_{RC}(s)$  es igual al número de ceros de  $Y_{RC}(s)$ . (Vea la Fig. 6-3.)

**PROPIEDAD YRC6** Si  $s=\infty$  no es un polo de  $Y_{RC}(s)$ , entonces  $Y_{RC}(s)$  se puede escribir como:

$$Y_{RC}(s) = \frac{k_\infty(s+\hat{\sigma}_1)(s+\hat{\sigma}_3)\dots(s+\hat{\sigma}_r)}{(s+\hat{\sigma}_2)(s+\hat{\sigma}_4)\dots(s+\hat{\sigma}_{r+1})} \quad (6-29)$$

donde  $r$  es un número entero impar, y

$$0 \leq \hat{\sigma}_1 < \hat{\sigma}_2 < \dots < \hat{\sigma}_{r+1} \quad (6-30)$$

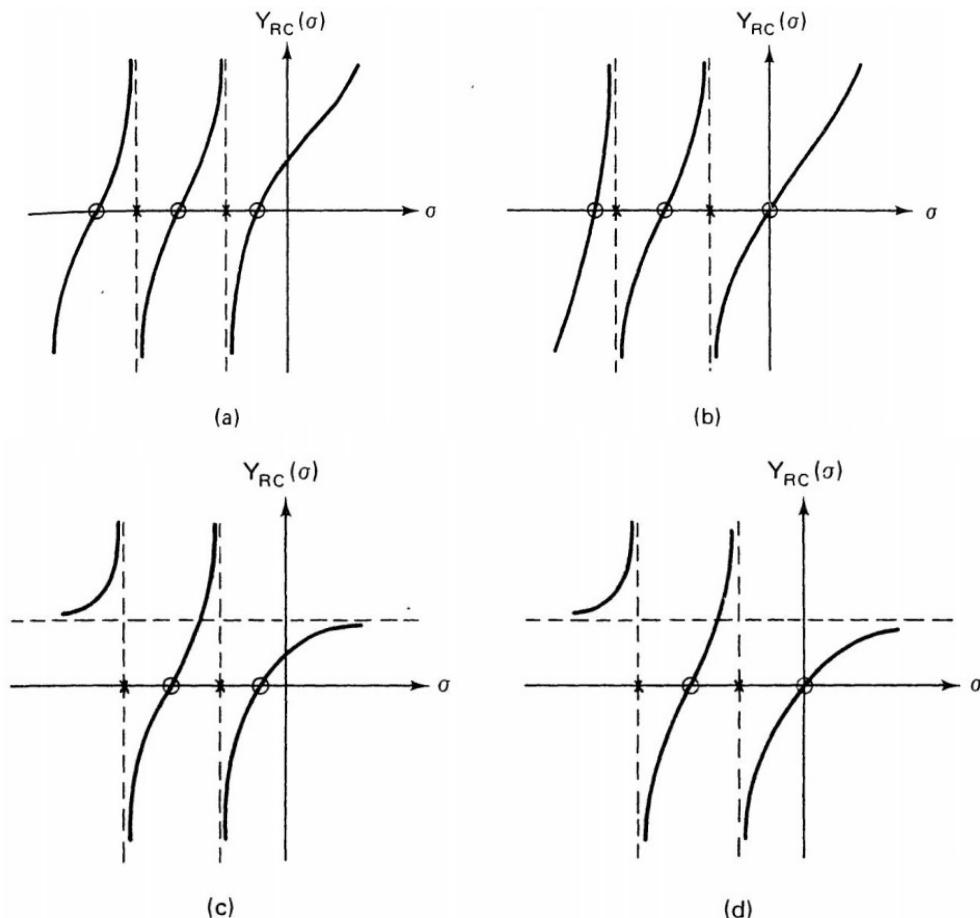
En este caso, tanto el numerador como el denominador polinomios de  $Y_{RC}(s)$  tienen el mismo grado. Por otro lado, si  $s=\infty$  es un polo de  $Y_{RC}(s)$ , entonces  $Y_{RC}(s)$  se puede escribir como:

$$Y_{RC}(s) = \frac{k(s+\hat{\sigma}_1)(s+\hat{\sigma}_3)\dots(s+\hat{\sigma}_r)}{(s+\hat{\sigma}_2)(s+\hat{\sigma}_4)\dots(s+\hat{\sigma}_{r-1})} \quad (6-31)$$

donde  $r$  es un número entero impar, y

$$0 \leq \hat{\sigma}_1 < \hat{\sigma}_2 < \dots < \hat{\sigma}_r \quad (6-32)$$

La ecuación (6-31) dice que el polinomio numerador de  $Y_{RC}(s)$  es de un grado mayor que el del polinomio denominador.



Legend  $x$  = poles and  $0$  = zeros

Fig. 6-3 Gráficos típicos de  $Y_{RC}(\sigma)$  versus  $\sigma$ . (a) y (c)  $s=0$  no es un cero de  $Y_{RC}(s)$ . (a) y (b)  $s=\infty$  es un polo de  $Y_{RC}(s)$ . (c) y (d)  $s=\infty$  no es un polo de  $Y_{RC}(s)$ .

**PROPIEDAD YRC7**  $\operatorname{Re}[Y_{RC}(j\omega)/j\omega]$  disminuye a medida que  $|\omega|$  aumenta.

**PRUEBA.** Desde (6-22)

$$\frac{Y_{RC}(s)}{s} = k_\infty + \frac{k_0}{s} + \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{s + \sigma_i} \quad (6-33)$$

Observe que  $Y_{RC}(s)$  tiene la forma de una función de impedancia RC DP de (6-4). Por lo tanto, por la propiedad **ZRC7** de las funciones de impedancia DP de los dispositivos RC de un puerto, concluimos que  $\operatorname{Re}[Y_{RC}(j\omega)/j\omega]$  disminuye cuando  $|\omega|$  aumenta.

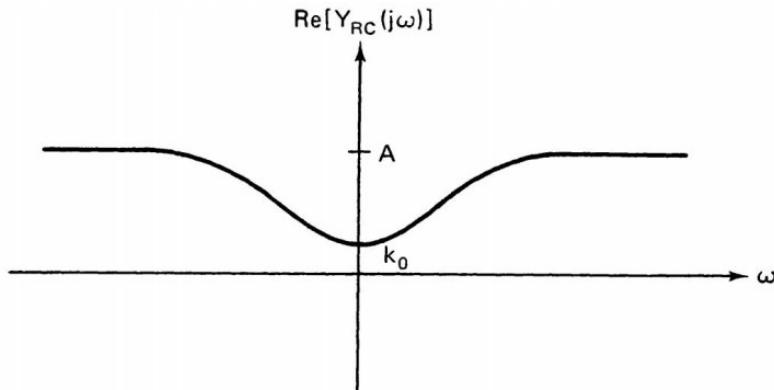
**PROPIEDAD YRC8**  $\operatorname{Re}[Y_{RC}(j\omega)]$  es una función que aumenta monótonamente de  $|\omega|$ . Además

$$Y_{RC}(0) \leq \operatorname{Re}[Y_{RC}(j\omega)] \text{ para todo } \omega \quad (6-34)$$

**PRUEBA.** De (6-22), obtenemos

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}[Y_{RC}(j\omega)] &= k_0 + \sum_{i=1}^n \frac{k_i j \omega}{j \omega + \sigma_i} \\ &= k_0 + \sum_{i=1}^n \frac{k_i \omega^2}{\sigma_i^2 + \omega^2}\end{aligned}\quad (6-35)$$

Claramente,  $\operatorname{Re}[Y_{RC}(0)] = k_0$  es el valor mínimo de  $\operatorname{Re}[Y_{RC}(j\omega)]$ , porque el segundo término en el lado derecho de (6-35) es positivo para todo  $\omega \neq 0$ .



**Fig. 6-4** A typical plot of  $\operatorname{Re}[Y_{RC}(j\omega)]$  versus  $\omega$ .

A partir de (6-35) se puede demostrar que  $\operatorname{Re}[Y_{RC}(j\omega)]$  es una función monótona creciente de  $|\omega|$ . En la Fig. 6-4 se muestra un esquema de  $\operatorname{Re}[Y_{RC}(j\omega)]$  con respecto a  $\omega$ , donde

$$A = \operatorname{Re}[Y_{RC}(\infty)] = k_0 + \sum_{i=1}^n k_i \geq k_0 = Y_{RC}(0) \quad (6-36)$$

Resulta que  $Y_{RC}(0)$  es la constante más grande que se puede extraer de  $Y_{RC}(s)$  de modo que la función restante  $Y_{RC}^r(s) \triangleq Y_{RC}(s) - Y_{RC}(0)$  sigue siendo una función PR que tiene todas las propiedades de un RC Función de admitancia DP. Este hecho forma la base básica para la realización de segunda forma de las funciones RC DP de Cauer.

En la Fig. 6-5 se da una realización de circuito de (6-22) o equivalentemente (6-20) con (6-21), que se denomina **segunda forma de Foster**.

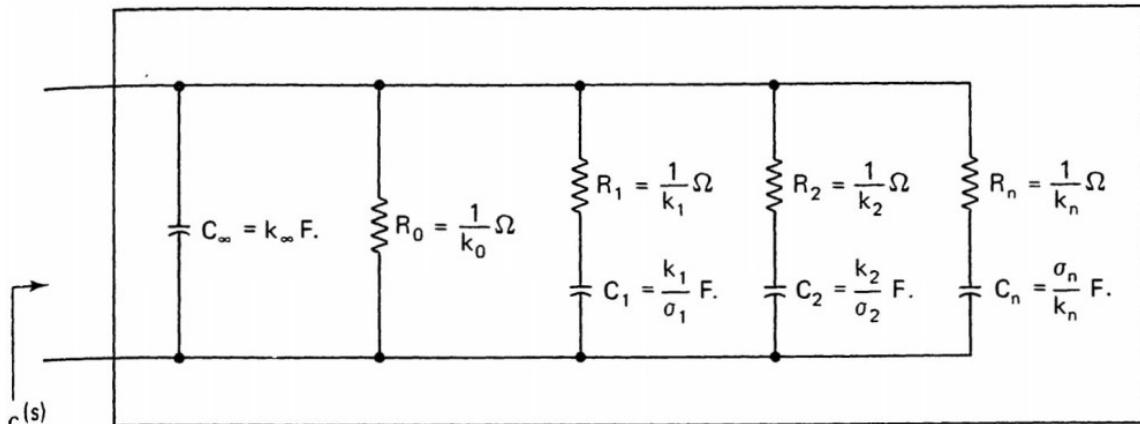


Fig. 6-5 Estructura del circuito de la segunda forma de Foster.

### 6-3 Ejemplos de Métodos de realización de Foster .

**Ejemplo 6-1** Realice.

$$Z_{RC}(s) = \frac{(s+1)(s+3)}{s(s+2)(s+4)} \quad (6-37)$$

Por las formas de Foster.

**Solución:** se puede demostrar que la función de impedancia de (6-37) satisface todas las propiedades de una función RC DP de impedancia pasiva. Por tanto, son posibles las realizaciones en circuitos RC pasivos.

Una expansión de fracción parcial de (6-37) conduce a

$$Z_{RC}(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+4} \quad (6-38)$$

donde  $A$ ,  $B$  y  $C$  son los residuos de  $Z_{RC}(s)$  en los polos  $s_1=0$ ,  $s_2=-2$  y  $s_3=-4$ , respectivamente. Por lo tanto,

$$A = s Z_{RC}(s)|_{s=0} = \frac{3}{8}$$

$$B = (s+2) Z_{RC}(s)|_{s=-2} = \frac{1}{4}$$

$$C = (s+4) Z_{RC}(s)|_{s=-4} = \frac{3}{8}$$

y (6-38) se convierte en

$$Z_{RC}(s) = \frac{3/8}{s} + \frac{1/4}{s+2} + \frac{3/8}{s+4} \quad (6-39)$$

Escribir (6-39) en forma de (6-2) da

$$Z_{RC}(s) = \frac{1}{(8/3)s} + \frac{1}{4s+8} + \frac{1}{(8/3)s+(32/3)} \quad (6-40)$$

En la Fig. 6-6 (a) se da una realización de circuito de (6-37) o equivalentemente (6-40).

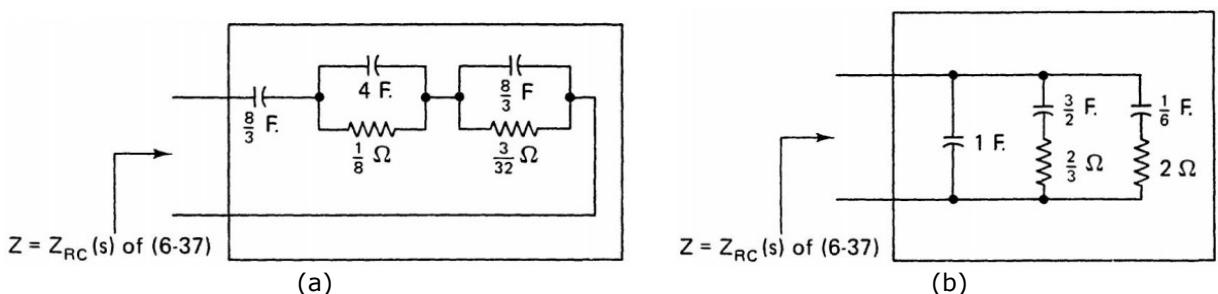


Fig.6-6 Realizaciones del circuito de la función RC DP de impedancia de (6-37) a través de (a) la primera forma de Foster y (b) la segunda forma de Foster.

Para realizar (6-37) por la segunda forma de Foster, consideramos

$$Y_{RC}(s) = \frac{1}{Z_{RC}(s)} = \frac{s(s+2)(s+4)}{(s+1)(s+3)} \quad (6-41)$$

Tomando la expansión de la fracción parcial de  $Y_{RC}(s)/s$  obtenemos

$$D = (s+1) \frac{2s+5}{(s+1)(s+3)} \Big|_{s=-1} = \frac{3}{2} \quad (6-42)$$

donde

$$D = (s+1) \frac{2s+5}{(s+1)(s+3)} \Big|_{s=-1} = \frac{3}{2}$$

y

$$E = (s+3) \frac{2s+5}{(s+1)(s+3)} \Big|_{s=-3} = \frac{1}{2}$$

Por tanto, (6-42) se convierte en

$$\frac{Y_{RC}(s)}{s} = 1 + \frac{3/2}{s+1} + \frac{1/2}{s+3}$$

o

$$\begin{aligned} Y_{RC}(s) &= s + \frac{(3/2)s}{s+1} + \frac{(1/2)s}{s+3} \\ &= s + \frac{1}{\frac{2}{3} + \frac{2}{3s}} + \frac{1}{2 + \frac{6}{s}} \end{aligned} \quad (6-43)$$

La Fig. 6-6 (b) da una realización de circuito de (6-37) mediante la segunda forma de (6-43) de Foster.

## 6-4 Métodos de realización de Cauer

Como en el caso de los dispositivos LC de un puerto, las dos formas de Foster no son los únicos métodos disponibles para sintetizar las funciones DP RC de impedancia o admitancia. En esta sección, consideramos dos métodos adicionales: las dos formas de Cauer. El primera forma de Cauer se basa en los siguientes dos datos:

- 1a.**  $s=\infty$  puede ser un polo de  $Y_{RC}(s)$
- 2b.**  $Z_{RC}(\infty) \leq \operatorname{Re}[Z_{RC}(j\omega)]$  para todo  $\omega$ .

Como consecuencia de **1a**, la función de impedancia restante  $Z_{RC}^r(s) \triangleq Z_{RC}(s) - Z_{RC}(\infty)$  sigue siendo una función DP RC de impedancia. Además,  $Z_{RC}^r(\infty) = 0$ . Por tanto,  $Y_{RC}^r(s)$  tiene un polo en  $s=\infty$ . De manera similar, la segunda forma de Cauer depende de los siguientes dos hechos:

- 2a.**  $s=0$  puede ser un polo de  $Z_{RC}(s)$ .
- 2b.**  $Y_{RC}(0) \leq \operatorname{Re}[Y_{RC}(j\omega)]$  para todo  $\omega$ .

En consecuencia, la función de admitancia restante  $\hat{Y}_{RC}(s) \triangleq Y_{RC}(s) - Y_{RC}(0)$  sigue siendo una función PR que tiene todas las propiedades de una función DP de admitancia de un dispositivo RC de un puerto. Además,  $\hat{Y}_{RC}(0) = 0$ . Por tanto,  $\hat{Z}_{RC}(s)$  tiene un polo en  $s=0$ .

### 6-4-1. Primera forma de Cauer

La primera forma de Cauer examina alternativamente  $Z_{RC}(s)$  y  $Y_{RC}(s)$  en el punto  $s=\infty$ . Consideremos primero  $Y_{RC}(s)$  en  $s=\infty$ . Hay dos posibilidades:  $Y_{RC}(\infty)$  es finito, o  $s=\infty$  es un polo de  $Y_{RC}(s)$ . Suponga primero que  $s=\infty$  es un polo de  $Y_{RC}(s)$ . Luego, el polo puede ser removido en la forma de condensador en derivación (shunt). Matemáticamente hablando, esto equivale a escribir  $Y_{RC}(s)$  como

$$Y_{RC}(s) = C_o s + Y_1(s) \quad (6-44a)$$

donde

$$C_o = \frac{1}{s} Y_{RC}(s) \Big|_{s=\infty} \quad (6-44b)$$

es el residuo de  $Y_{RC}(s)$  en el polo  $s=\infty$ , y la función de resto

$$Y_1(s) = Y_{RC}(s) - C_o s \quad (6-44c)$$

es también una función DP RC de admitancia donde  $Y_1(\infty)$  es una cantidad finita. Debido a que  $Y_{RC}(s)$  se escribe como una suma de dos términos como en (6-44), podemos realizar  $Y_{RC}(s)$  conectando un capacitor (en derivación) en paralelo con un dispositivo RC de un puerto caracterizado por la función DP de admitancia de  $Y_1(s)$ , como se muestra en la Fig. 6-7 (a).

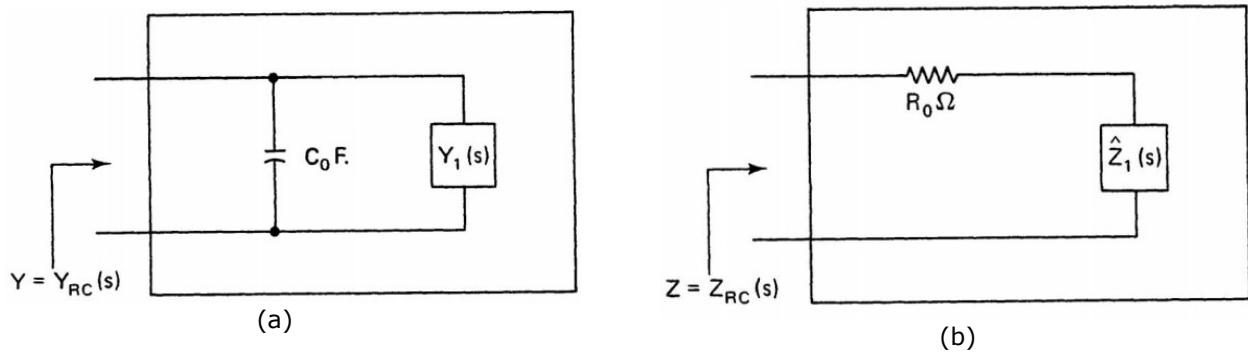


Fig. 6-7 Procedimiento básico de realización para la primera forma de Cauer (a) cuando  $s=\infty$  es un polo de  $Y_{RC}(s)$ , y (b) cuando  $s=\infty$  no es un polo de  $Y_{RC}(s)$ .

Claramente,  $Y_1(s)$  es más simple que  $Y_{RC}(s)$ . Para realizar  $Y_1(s)$ , consideramos la otra posibilidad para  $Y_{RC}(s)-s=\infty$  no es un polo de  $Y_{RC}(s)$ . En este caso, invirtamos  $Y_{RC}(s)$  para obtener  $Z_{RC}(s)$ . Según la condición **1b** o la propiedad **ZRC7** de  $Z_{RC}(s)$ , podemos remover  $Z_{RC}(\infty)$  de  $Z_{RC}(s)$ , que corresponde a una resistencia en serie, y todavía deja una función de impedancia RC DP. En forma de ecuación, esto corresponde a escribir  $Z_{RC}(s)$  como

$$Z_{RC}(s) = R_o + \hat{Z}_1(s) \quad (6-45a)$$

donde

$$Y_1(s) = Y_{RC}(s) - C_o s \quad (6-45b)$$

y la función restante  $\hat{Z}_1(s)$  es una función de impedancia RCDP. Debido a que  $Z_{RC}(s)$  se escribe como una suma de dos términos, como en (6-45), podemos realizar  $Z_{RC}(s)$  conectando una resistencia (en serie) en serie con un puerto-1 RC caracterizado por una función de impedancia DP de  $\hat{Z}_1(s)$ . Esto se ilustra en la Fig. 6-7 (b). De (6-45), obtenemos

$$\hat{Z}_1(\infty) = 0 \quad (6-46)$$

Por tanto,  $s=\infty$  es un polo de  $\hat{Y}_1(s)$ . Para realizar  $\hat{Y}_1(s)$ , volvemos al caso anterior cuando  $s=\infty$  es un polo de una función de admitancia RC DP. Este proceso puede repetirse y llegamos a la primera forma de Cauer que se muestra en la Fig. 6-8.

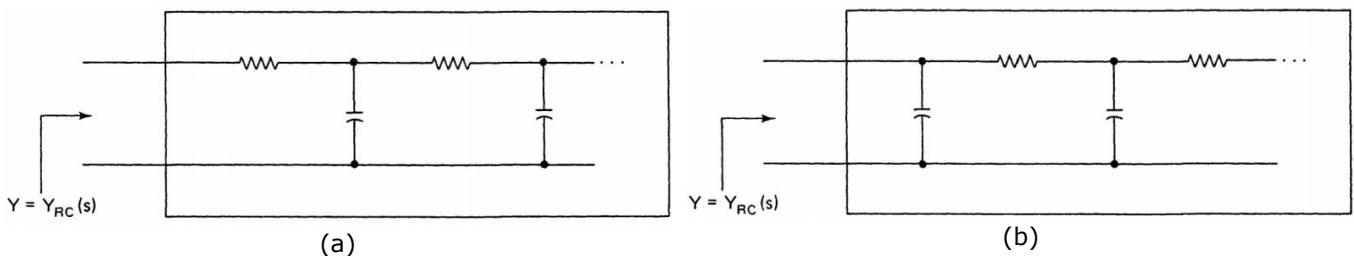
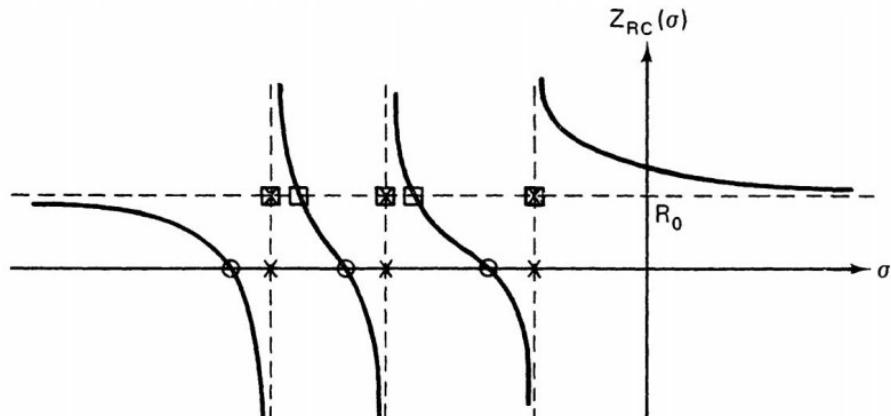


Figura 6-8 Estructura del circuito de la primera forma de Cauer  
 (a) cuando  $s=\infty$  no es un polo de  $Y_{RC}(s)$  y  
 b) cuando  $s=\infty$  es un polo de  $Y_{RC}(s)$ .

Para ver el efecto de eliminar  $R_0$  de  $Z_{RC}(s)$  como se indica en la (6-45) y en la Fig. 6-7 (b), consideremos una gráfica típica de  $Z_{RC}(\sigma)$  versus  $\sigma$  cuando  $Z_{RC}(\infty) \neq 0$ , como se muestra en la Fig. 6-9. Restar una constante  $R_o = Z_{RC}(\infty)$  de  $Z_{RC}(s)$  es equivalente a elevar el eje horizontal hacia arriba en una altura de  $R_o$ , como lo indica la línea punteada del eje horizontal en

la Fig. 6-9. Observe que las ubicaciones de los polos permanecen sin cambios, los polos y los ceros aún se entrelazan entre sí a pesar de que las posiciones cero se han cambiado y, lo más importante de todo, se crea un nuevo cero en  $s=\infty$ . Esto significa que la función de impedancia DP restante tiene un cero en  $s=\infty$ ; su función de admitancia DP asociada tiene un polo en  $s=\infty$ .



Legend:  $x$  = pole, and  $0$  = zero of  $Z_{RC}(s)$ .

$\blacksquare$  = pole, and  $\square$  = zero of the remainder DP impedance function,  $Z_{RC}^r(s) \triangleq Z_{RC}(s) - Z_{RC}(\infty)$ .

Fig. 6-9 Una gráfica típica de  $Z_{RC}(\sigma)$  versus  $\sigma$ .

**Ejemplo 6-2** Realice la siguiente función de impedancia DP de puerto-1 RC

$$Z(s) = \frac{s^2 + 4s + 3}{s^3 + 6s^2 + 8s} = \frac{(s+1)(s+3)}{s(s+2)(s+4)} \quad (6-47)$$

por la primera forma de Cauer.

**Solución:** debido a que la función de impedancia dada tiene un cero en  $s=\infty$ , su función de admitancia

$$Y(s) = \frac{s^3 + 6s^2 + 8s}{s^2 + 4s + 3} \quad (6-48)$$

tiene un polo en  $s=\infty$ . El residuo de este polo está dado por

$$\xi_0 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{s} Y(s) \Big|_{s=\infty} = 1$$

removiendo este polo de  $Y(s)$ , escribimos la (6-48) como

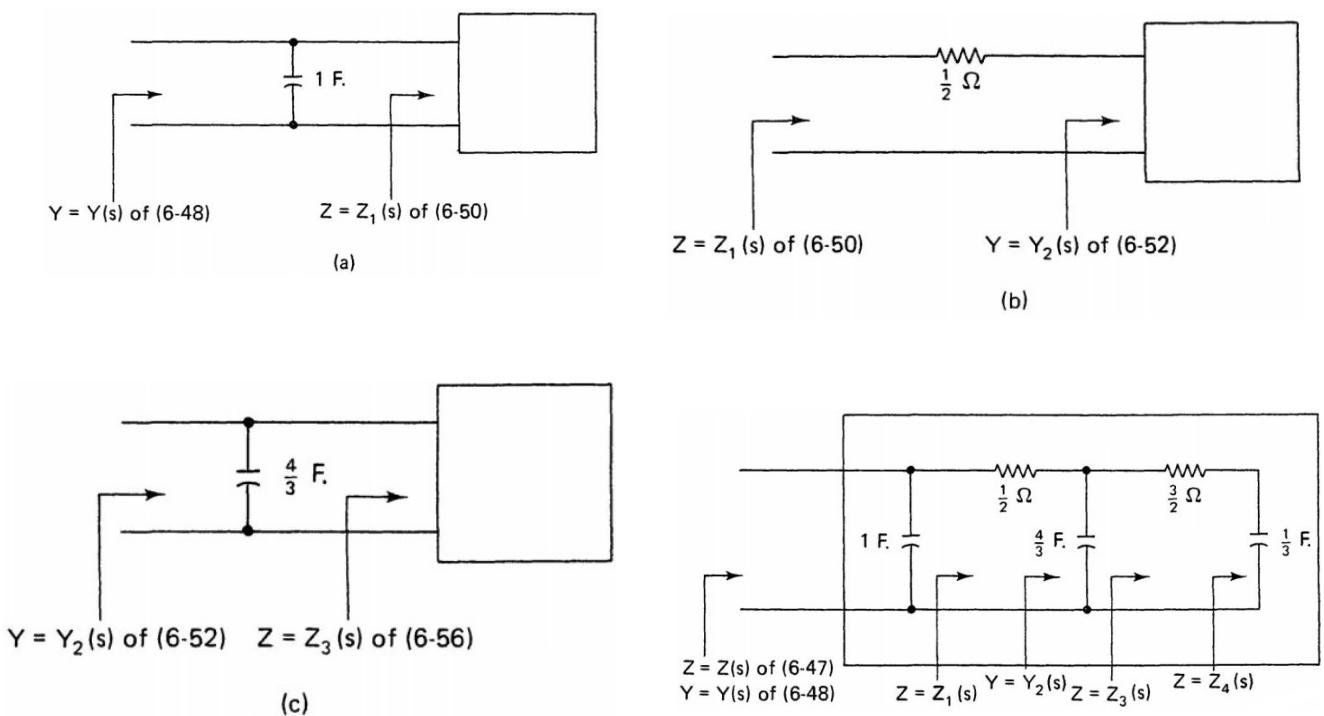
$$Y(s) = \xi_0 s + Y_1(s) = s + Y_1(s) \quad (6-49)$$

donde  $Y_1(s)$  es la función restante dada por

$$Y_1(s) = Y(s) - s = \frac{2s^2 + 5s}{s^2 + 4s + 3}$$

a interpretación del circuito de este paso se muestra en la Fig. 6-10 (a). Como  $Y_1(\infty)$  es finito, invertimos  $Y_1(s)$  para obtener

$$Z_1(s) = \frac{s^2 + 4s + 3}{2s^2 + 5s} \quad (6-50)$$



**Fig. 6-10** Cauer's first-form realization of the RC DP impedance function of (6-47).

Ahora procedemos a eliminar  $Z_1(\infty)=1/2$  de  $Z_1(s)$  como

$$\begin{aligned} Z_2(s) &= Z_1(s) - Z_1(\infty) = Z_1(s) - \frac{1}{2} \\ &= \frac{3/2s+3}{2s^2+5s} \end{aligned} \quad (6-51)$$

Este paso se ilustra en la Fig. 6-10 (b). Claramente,  $Z_2(\infty)=0$ . Por lo tanto, consideramos

$$Y_2(s) = \frac{2s^2+5s}{(3/2)s+3} \quad (6-52)$$

$Y_2(s)$  tiene un polo en  $s=\infty$ . Extraer este polo requiere que encontremos el residuo  $\xi_2$  de  $Y_2(s)$  en el polo  $s=\infty$ , y

$$\xi_2 = \frac{1}{s} Y_2(s) \Big|_{s=\infty} = \frac{4}{3} \quad (6-53)$$

Por tanto, podemos escribir

$$Y_2(s) = \frac{4}{3}s + Y_3(s) \quad (6-54)$$

donde

$$Y_3(s) = Y_2(s) - \frac{4}{3}s = \frac{2s}{3s+6} \quad (6-55)$$

Este paso se muestra en la Fig. 6-10 (c). Como  $Y_3(\infty)$  es finito, consideramos

$$Z_3(s) = \frac{3s+6}{2s} \quad (6-56)$$

Extrayendo una resistencia en serie de  $Z_3(\infty)=3/2\Omega$  de  $Z_3(s)$ , escribimos

$$Z_3(s) = \frac{3}{2} + Z_4(s) \quad (6-57)$$

donde el resto funciona

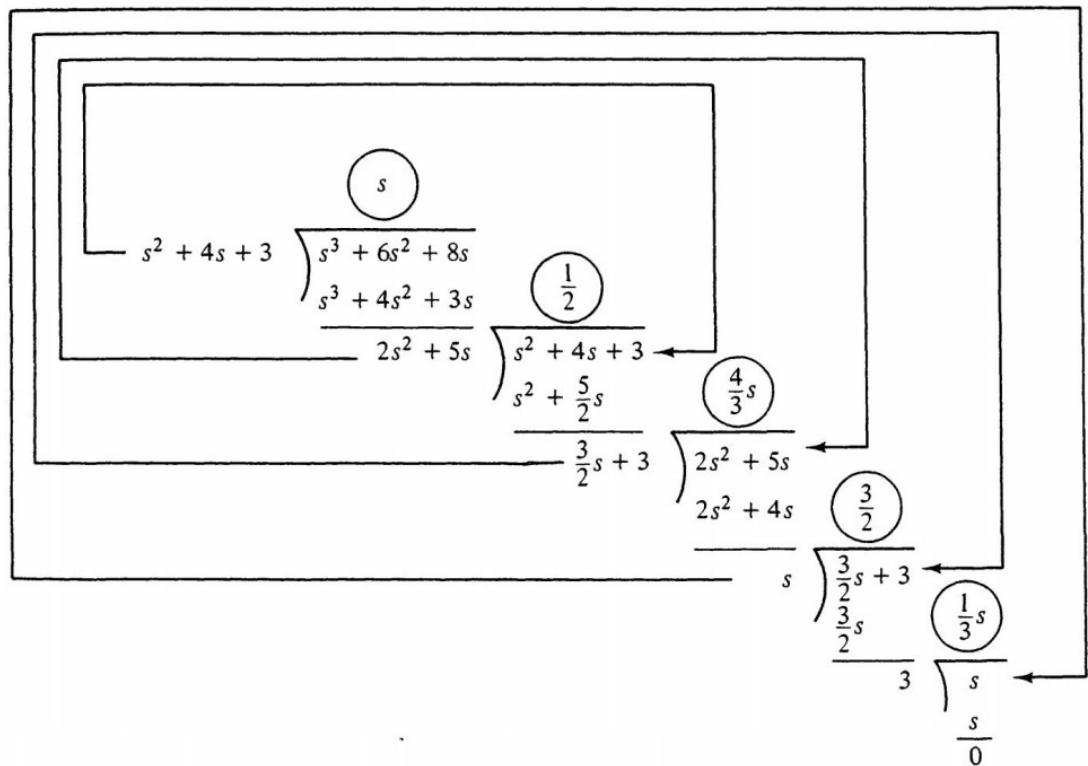
$$Z_4(s) = Z_3(s) - \frac{3}{2} = \frac{3}{s} = \frac{1}{(1/3)s} \quad (6-58)$$

es solo un capacitor de  $1/3$  F. El proceso completo de esta realización se resume en la Fig. 6-10 (d).

Tenga en cuenta que con la ayuda de (6-58), (6-56), (6-52) y (6-50), podemos escribir  $Y(s)$  de (6-48) como

$$\begin{aligned} Y(s) &= s + Y_1(s) = s + \frac{1}{Z_1(s)} \\ &= s + \frac{1}{\frac{1}{2} + Z_2(s)} = s + \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{Y_2(s)}} \\ &= s + \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{\frac{4}{3}s + Y_3(s)}} = s + \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{\frac{4}{3}s + \frac{1}{Z_3(s)}}} \\ &= s + \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{\frac{4}{3}s + \frac{1}{\frac{3}{2} + Z_4(s)}}} \\ &= s + \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{\frac{4}{3}s + \frac{1}{\frac{3}{2} + \frac{1}{\frac{1}{3}s}}}} \end{aligned} \quad (6-59)$$

Observe que (6-59) tiene la forma de una expansión de fracción continua. Por tanto, podemos derivar (6-59) mediante el proceso de dividir e invertir alrededor del punto  $s=\infty$ . Esto requiere que eliminemos el término de mayor potencia en cada división. Por ejemplo, los cocientes de la expansión de la fracción continua en  $s=\infty$  de  $Y(s)$  de la (6-48) mediante el proceso de división e inversión están dados por las cantidades rodeadas por un círculo en lo siguiente:



Por lo tanto, obtenemos la expansión de fracción continua de  $Y(s)$  , Como se muestra en (6-59).

### 6-4-2. Segunda forma de Cauer

Si ahora examinamos alternativamente  $Y_{RC}(s)$  y  $Z_{RC}(s)$  en el punto  $s=0$  en lugar de en  $s=\infty$ , obtendríamos la segunda forma de Cauer. En este caso, consideraremos la función de impedancia DP  $Z_{RC}(s)$ . Si  $s=0$  es un polo de  $Z_{RC}(s)$ , quitamos el polo en forma de condensador en serie. Esto es equivalente a expresar  $Z_{RC}(s)$  como

$$Z_{RC}(s) = \frac{k_o}{s} + Z_1(s) \quad (6-60a)$$

donde

$$k_o = s Z_{RC}(s)|_{s=0} \quad (6-60b)$$

es el residuo de  $Z_{RC}(s)$  en el polo  $s=0$  y  $Z_1(s)$  es la función de impedancia restante. Como en el caso de la primera forma de Cauer,  $Z_1(s)$  satisface todas las propiedades de una función de impedancia RC DP. Además,  $Z_1(0)$  es finito:  $s=0$  no es un polo de  $Z_1(s)$ . Debido a que

$Z_{RC}(s)$  se expresa como una suma de dos términos, como en (6-60), podemos realizar  $Z_{RC}(s)$  conectando un capacitor (en serie) en serie con un puerto-1 RC caracterizado por la función de impedancia DP de  $Z_1(s)$ , como se muestra en la Fig. 6-11 (a). Por lo tanto, el problema de realizar  $Z_{RC}(s)$  se reduce a realizar una función de impedancia RC DP  $Z_1(s)$  más simple. Para realizar  $Z_1(s)$ , consideramos el caso en el que  $s=0$  no es un polo de  $Z_{RC}(s)$ . En este caso, obtengamos primero  $Y_{RC}(s)$  invirtiendo  $Z_{RC}(s)$ . Por la condición 2b o la propiedad YRC8 de las funciones de admitancia RC DP, podemos eliminar  $Y_{RC}(0)$  en la forma de una resistencia en derivación y aún dejar una función de resto PR que también es una función de admitancia RC DP. Esto significa que escribimos  $Y_{RC}(s)$  como

$$Y_{RC}(s) = g_0 + \hat{Y}_1(s) \quad (6-61a)$$

donde

$$g_0 = Y_{RC}(0) \quad (6-61b)$$

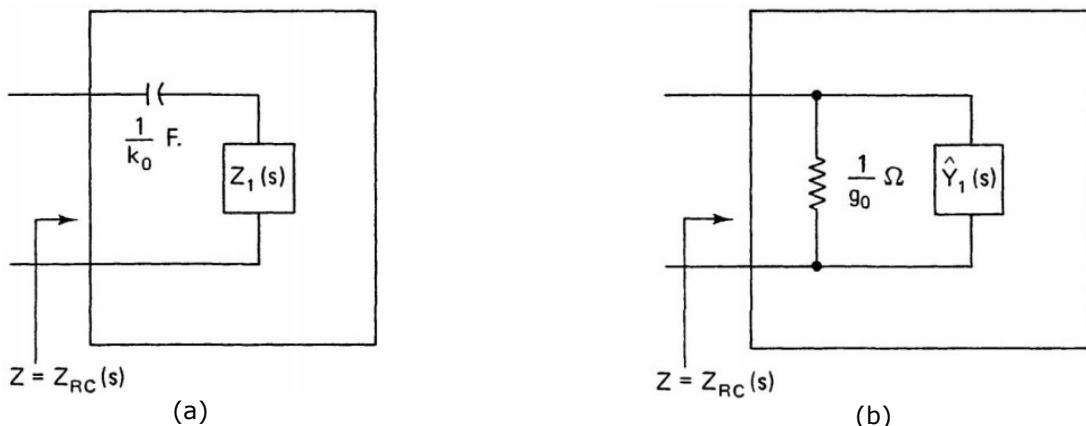


Fig. 6-11 Procedimiento básico de realización de la segunda forma de Cauer (a) cuando  $s=0$  es un polo de  $Z_{RC}(s)$  y (b) cuando  $s=0$  no es un polo de  $Z_{RC}(s)$ .

y  $\hat{Y}_1(s)$  es la función de admitancia RC DP restante. En vista de (6-61), podemos realizar  $Y_{RC}(s)$  conectando una resistencia (derivación) en paralelo con  $\hat{Y}_1(s)$ . Este paso se ilustra en

la figura 6-11 (b). Tenga en cuenta que (6-61) implica que

$$\hat{Y}_1(0)=0 \quad (6-62)$$

Por tanto,  $s=0$  es un polo de la función de impedancia RC DP correspondiente  $\hat{Z}_1(s)$ . Esto significa que podemos repetir el proceso de quitar los condensadores en serie y las resistencias en derivación hasta que se complete el circuito de realización, como se muestra en la Fig. 6-12.

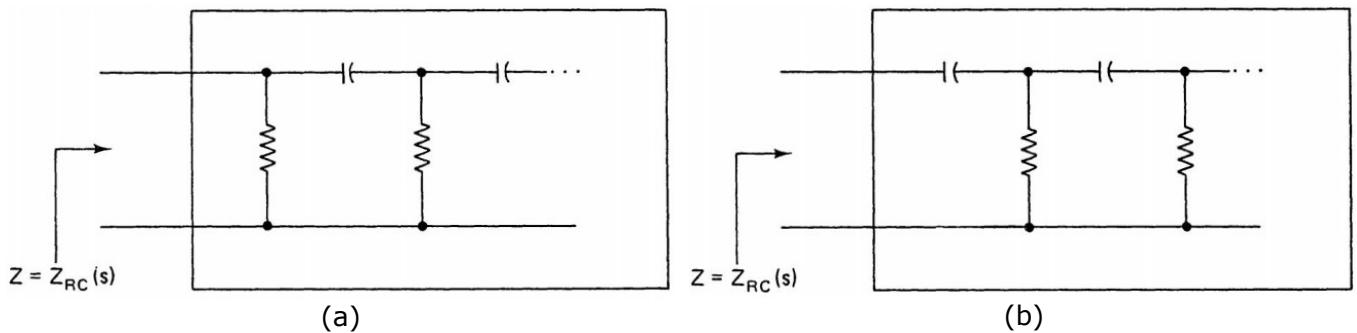


Fig.6-12 Estructura del circuito de la segunda forma de Cauer

(a) cuando  $s=0$  no es un polo de  $Z_{RC}(s)$ , y

(b) cuando  $s=0$  es un polo de  $Z_{RC}(s)$ .

**Ejemplo 6-3** Realice la función de impedancia RC DP

$$Z(s) = \frac{3+4s+s^2}{8s+6s^2+s^3} \quad (6-63)$$

por la segunda forma de Cauer.

**Solución:** debido a que  $Z(s)$  tiene un polo en  $s=0$ , eliminamos este polo encontrando primero su residuo  $\xi_0$  como

$$\xi_0 = sZ(s)|_{s=0} = \frac{3}{8}$$

y luego escribe  $Z(s)$  como

$$Z(s) = \frac{3}{8s} + Z_1(s) \quad (6-64)$$

donde

$$Z_1(s) = Z(s) - \frac{3}{8s} = \frac{(7/4)+(5/8)}{8+6s+s^2} \quad (6-65)$$

es la función restante. Tenga en cuenta que  $Z_1(s)$  es PR y satisface todas las condiciones de una función de impedancia RC DP. El paso de (6-64) se muestra en la figura 6-13 (a).

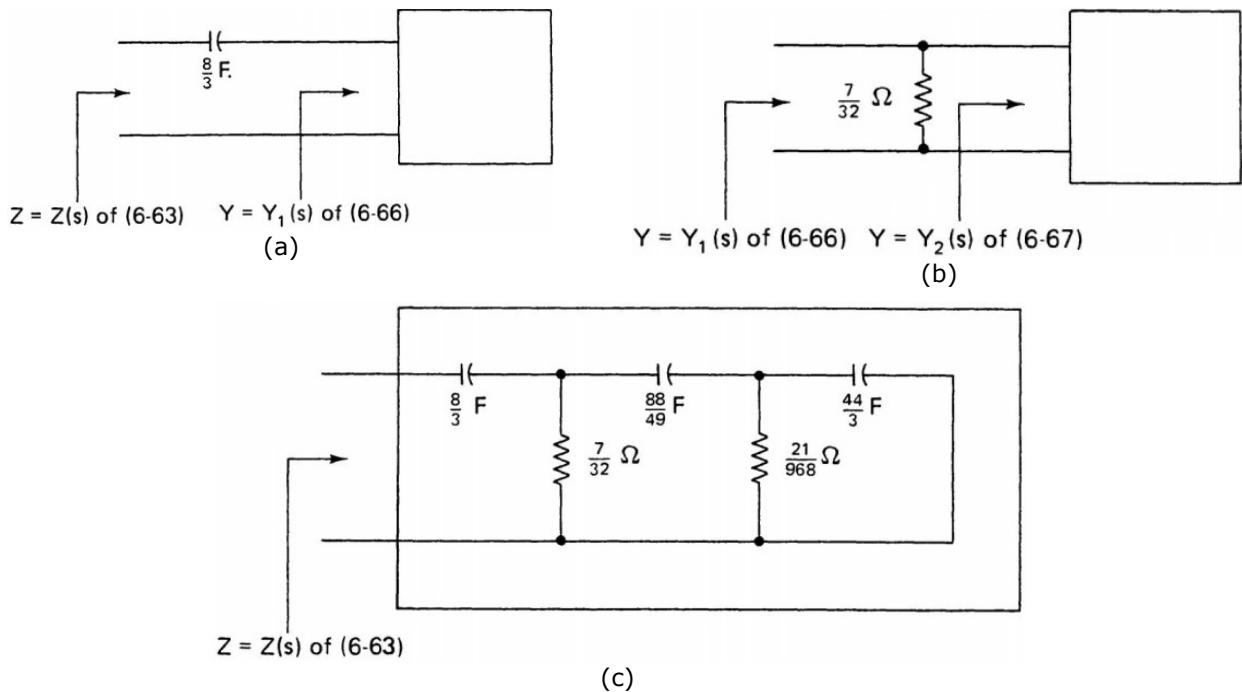


Fig. 6-13 Realización de segunda forma de Cauer de la función de impedancia RC DP de (6-63).

Como  $Z_1(0)$  es finito, consideramos

$$Y_1(s) = \frac{8+6s+s^2}{(7/4)+(5/8)s} \quad (6-66)$$

Eliminando la constante  $Y_1(0)$  de  $Y_1(s)$  en forma de resistencia en derivación, obtenemos la función restante  $Y_2(s)$  como

$$\begin{aligned} Y_2(s) &= Y_1(s) - Y_1(0) = Y_1(s) - \frac{32}{7} \\ &= \frac{(22/7)s + s^2}{(7/4) + (5/8)s} \end{aligned} \quad (6-67)$$

Este paso se ilustra en la Fig. 6-13 (b). Repitiendo el procedimiento anterior, expresamos

$$Z_2(s) = \frac{(7/4)+(5/8)s}{(22/7)s+s^2}$$

como

$$Z_2(s) = \frac{49}{88s} + Z_3(s) \quad (6-68)$$

donde  $49/88$  es el residuo de  $Z_2(s)$  en el polo  $s=0$  y

$$Z_3(s) = Z_2(s) - \frac{49}{88s} = \frac{3/44}{(22/7) + s} \quad (6-69)$$

Esto da

$$Y_3(s) = \frac{(22/7) + s}{3/44} = Y_3(0) + Y_4(s) = \frac{968}{21} + Y_4(s) \quad (6-70)$$

donde

$$Y_4(s) = Y_3(s) - \frac{968}{21} = \frac{44s}{3}$$

o

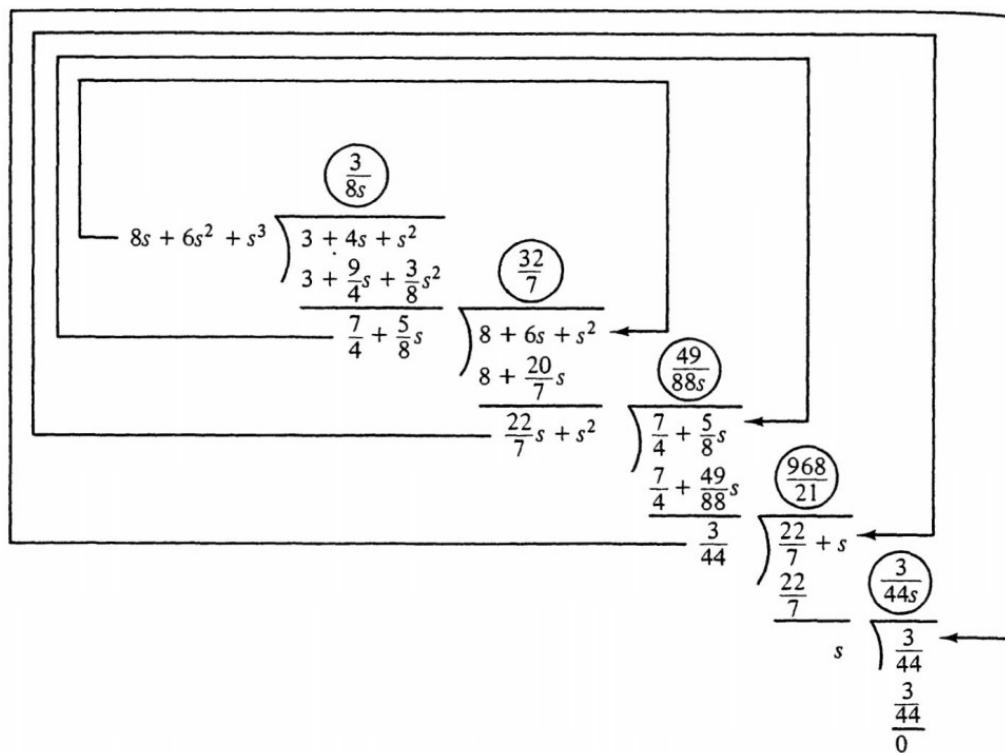
$$Z_4(s) = \frac{1}{(44/3)s} \quad (6-71)$$

En la Fig. 6-13 (c) se muestra una realización de circuito de (6-63) mediante la segunda forma de Cauer, como se desarrolla aquí.

Tenga en cuenta que sustituyendo (6-71) en (6-70), luego en (6-68), luego en (6-67) y finalmente en (6-64), obtenemos

$$Z(s) = \frac{3}{8s} + \frac{1}{\frac{32}{7} + \frac{1}{\frac{49}{88s} + \frac{1}{\frac{968}{21} + \frac{1}{\frac{3}{44s}}}}} \quad (6-72)$$

También podemos obtener (6-72) mediante un método de división larga con los polinomios del divisor y del dividendo dispuestos en potencias ascendentes de  $s$  como



Tenga en cuenta que (6-72) es la expansión fraccionaria continua de  $Z(s)$  de (6-63) en el punto  $s=0$ .

Como en el caso de LC, la realización de funciones RC DP no requiere que usemos un método en particular durante todo el proceso. Podemos cambiar de una forma de realización a otra forma de realización en cualquier etapa y con la frecuencia que deseemos. En otras palabras, podemos realizar una función de impedancia o admitancia RC DP mediante una combinación de las formas de Foster y Cauer.

**Ejemplo 6-4** Realice la función de impedancia RC DP

$$Z(s) = \frac{(s+1)(s+3)(s+5)}{s(s+2)(s+4)(s+6)} \quad (6-73)$$

por el siguiente procedimiento:

1. Utilice la primera forma de Cauer para extraer dos condensadores.
2. Utilice la segunda forma de Cauer para extraer un condensador.
3. La función de resto se realiza mediante la segunda forma de Foster.

**Solución:** la primera forma de Cauer requiere que examinemos la función de admisión

$$Y(s) = \frac{s(s+2)(s+4)(s+6)}{(s+1)(s+3)(s+5)} \quad (6-74)$$

en el punto  $s=\infty$ . Como  $Y(\infty)=\infty$ , realizamos una expansión parcial continua de la fracción de  $Y(s)$  en  $s=\infty$  como

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{s^4 + 12s^3 + 44s^2 + 48s}{s^3 + 9s^2 + 23s + 15} \\ &= s + \frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{1}{\frac{3}{2}s + Y_1(s)}} \end{aligned} \quad (6-75)$$

donde

$$Y_1(s) = \frac{3s^2 + (21/2)s}{2s^2 + 12s + 15} \quad (6-76)$$

Este paso se implementa en la Fig. 6-14 (a). A continuación, usamos la segunda forma de Cauer para

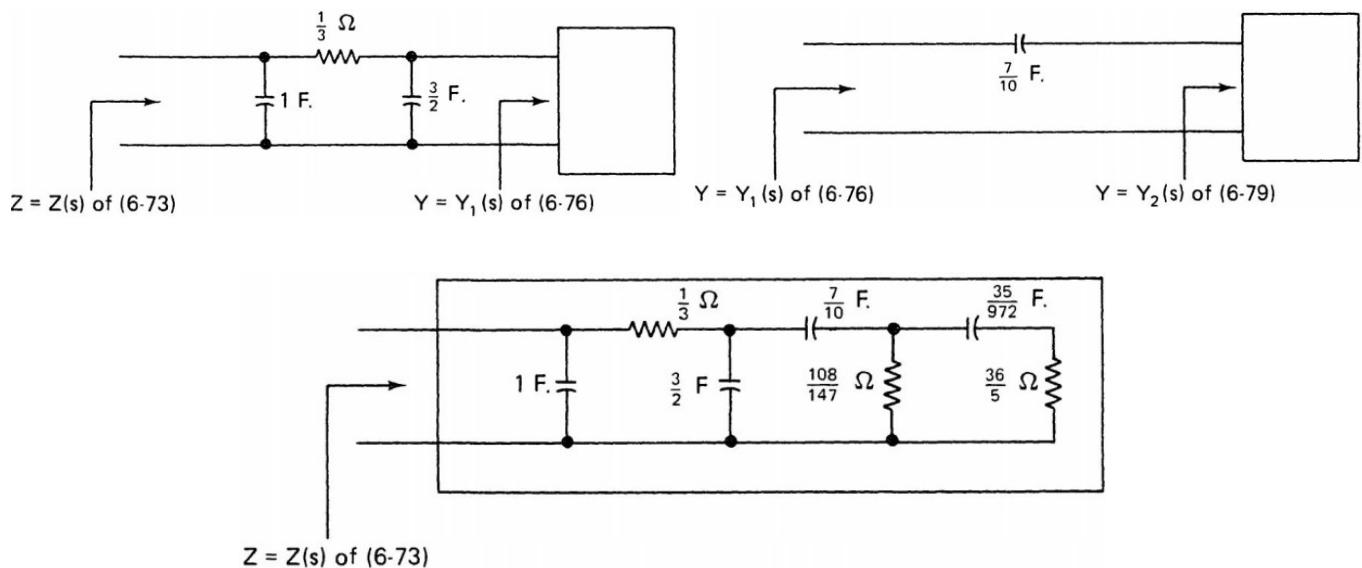


Fig. 6-14 Realización de un circuito de la función de impedancia RC DP de (6-73).

realizar parcialmente  $Y_1(s)$ . Esto requiere que examinemos

$$Z_1(s) = \frac{10}{7s} + \frac{1}{Y_2(s)} \quad (6-77)$$

en el punto  $s=0$ . Debido a que  $s=0$  es un polo de  $Z_1(s)$ , realizamos una expansión fraccionaria continua parcial de  $Z_1(s)$  en  $s=0$  como

$$Z_1(s) = \frac{10}{7s} + \frac{1}{Y_2(s)} \quad (6-78)$$

donde

$$Y_2(s) = \frac{3s + (21/2)}{2s + (54/7)} \quad (6-79)$$

Este paso se ilustra en la Fig. 6-14 (b). Según las instrucciones del problema, debemos realizar  $Y_2(s)$  mediante la segunda forma de Foster. Para hacer eso, realizamos una expansión de fracción parcial de

$$\frac{Y_2(s)}{s} = \frac{3s + (21/2)}{s[2s + (54/7)]} \quad (6-80)$$

y obtener

$$\frac{Y_2(s)}{s} = \frac{147/108}{s} + \frac{5/36}{s + (27/7)}$$

o

$$Y_2(s) = \frac{147}{108} + \frac{1}{\frac{36}{5} + \frac{972}{35s}} \quad (6-81)$$

En la Fig. 6-14 (c) se muestra una realización del circuito de (6-73) según lo requiera el problema, a través de (6-75), (6-78) y (6-81).

## 6-5 Observaciones finales.

En este capítulo, hemos presentado las propiedades básicas de las funciones RC DP. Estas propiedades se resumen en la Tabla 6-1. Los formatos generales de las funciones de impedancia y admitancia de RC DP son diferentes, como lo indican (6-4) y (6-20); por lo tanto, las propiedades básicas de las funciones de impedancia y admitancia de RC DP también son diferentes. Observe que el conjuntos de las filas 2, 3 y 6 de  $Z_{RC}(s)$  {  $Y_{RC}(s)$  } en la tabla 6-1 forman las condiciones de realizabilidad de las funciones de impedancia {admitancia} RC DP. Se pueden formar otras condiciones de realizabilidad suficientes por las filas 1 y 6 o por la fila 5 de la Tabla 6-1.

También hemos presentado cuatro métodos para realizar funciones RC DP. La primera forma de Foster se ocupa de las funciones de impedancia DP; La segunda forma de Foster se ocupa de las funciones de admitancia. Sin embargo, cualquiera de las dos formas de Cauer se puede aplicar tanto a las funciones de impedancia como a las de admitancia.

Para resumir los procedimientos de realización, las formas de Foster implican una *expansión de fracción parcial* y las formas de Cauer implican una *expansión de fracción continua*.

Tabla 6-1 Funciones DP RC de propiedades.

	$Z_{RC}(s)$	$Y_{RC}(s)$
1.	$Z_{RC}(s)=R_\infty + \frac{1}{C_0 s} + \sum \frac{1}{C_i s + \frac{1}{R_i}}$ $= k_\infty + \frac{k_0}{s} + \sum \frac{k_i}{s + \sigma_i}$	$Y_{RC}(s)=C_\infty s + \frac{1}{R_0} + \sum \frac{1}{R_i + \frac{1}{C_i s}}$ $= k_\infty s + k_0 + \sum \frac{k_i s}{s + \sigma_i}$
2.	Todos los polos y ceros son simple, negativos, y reales	Todos los polos y ceros son simples, negativos y reales.
3.	Los polos y el cero se alternan. La frecuencia crítica más cercana al origen es un polo y la más cercana al infinito es un cero.	Los polos y ceros se alternan. La frecuencia crítica más cercana al origen es cero y la más cercana al infinito es un polo.
4.	Si $Z_{RC}(s)=A(s)/B(s)$ , entonces el grado de $A(s) \leq$ grado de $B(s)$ . Menos si $s=\infty$ es cero e igual si $s=\infty$ o no es cero.	Si $Y_{RC}(s)=A(s)/B(s)$ , entonces el grado de $A(s) \geq$ grado de $B(s)$ . Mayor si $s=\infty$ es un polo y igual si $s=\infty$ si no es un polo
5.	$Z_{RC}(s) = \frac{(s + \sigma_2)(s + \sigma_4) \dots}{(s + \sigma_1)(s + \sigma_3) \dots}$ $0 \leq \sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3 < \sigma_4 \dots$	$Y_{RC}(s) = \frac{(s + \sigma_1)(s + \sigma_3) \dots}{(s + \sigma_2)(s + \sigma_4) \dots}$ $0 \leq \sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3 < \sigma_4 \dots$
6.	Todos los residuos son positivos y reales.	El residuo en el polo infinito es positivo y real. Los residuos en polos finitos son negativos y reales.
7.	$Z_{RC}(s)$ no puede tener un polo en $s=\infty$ . Si $Z_{RC}(\infty) \neq 0$ , entonces $Z_{RC}(\infty)$ es la constante más grande que se puede extraer mientras que el resto $[Z_{RC}(s) - Z_{RC}(\infty)]$ sigue siendo una función de impedancia RC DP.	$Y_{RC}(s)$ no puede tener un polo en $s=\infty$ . Si $Y_{RC}(\infty) \neq 0$ , entonces $Y_{RC}(0)$ es la constante más grande que se puede extraer mientras que el resto $[Y_{RC}(s) - Y_{RC}(\infty)]$ sigue siendo una función de admitancia RC DP.
8.	$Z_{RC}(\sigma)$ disminuye monótonamente excepto en los polos.	$Y_{RC}(\sigma)$ aumenta monótonamente excepto en los polos.

La primera forma de Cauer utiliza una expansión de fracción continua en el punto  $s=\infty$ . Si  $Y_{RC}(\infty)=\infty$ , entonces la primera forma de Cauer funciona con  $Y_{RC}(s)$ . Si  $Y_{RC}(\infty)\neq\infty$ , entonces la primera forma de Cauer funciona con  $Z_{RC}(s)=1/Y_{RC}(s)$ . La segunda forma de Cauer requiere una expansión de fracción continua en el punto  $s=0$ . Si  $Z_{RC}(0)=\infty$ , entonces la segunda forma de Cauer funciona con  $Z_{RC}(s)$ . Si  $Z_{RC}(0)\neq\infty$ , entonces la segunda forma de Cauer funciona con  $Y_{RC}(s)=1/Z_{RC}(s)$ .

La estructura del circuito de las formas de Foster y Cauer se resume en la Fig. 6-15. Tenga en cuenta que la primera forma de Cauer consta de resistencias en serie y condensadores de derivación que producen ceros de transmisión en  $s=\infty$  y que la segunda forma de Cauer contiene condensadores en serie y resistencias de derivación que crean ceros de transmisión en  $s=0$ .

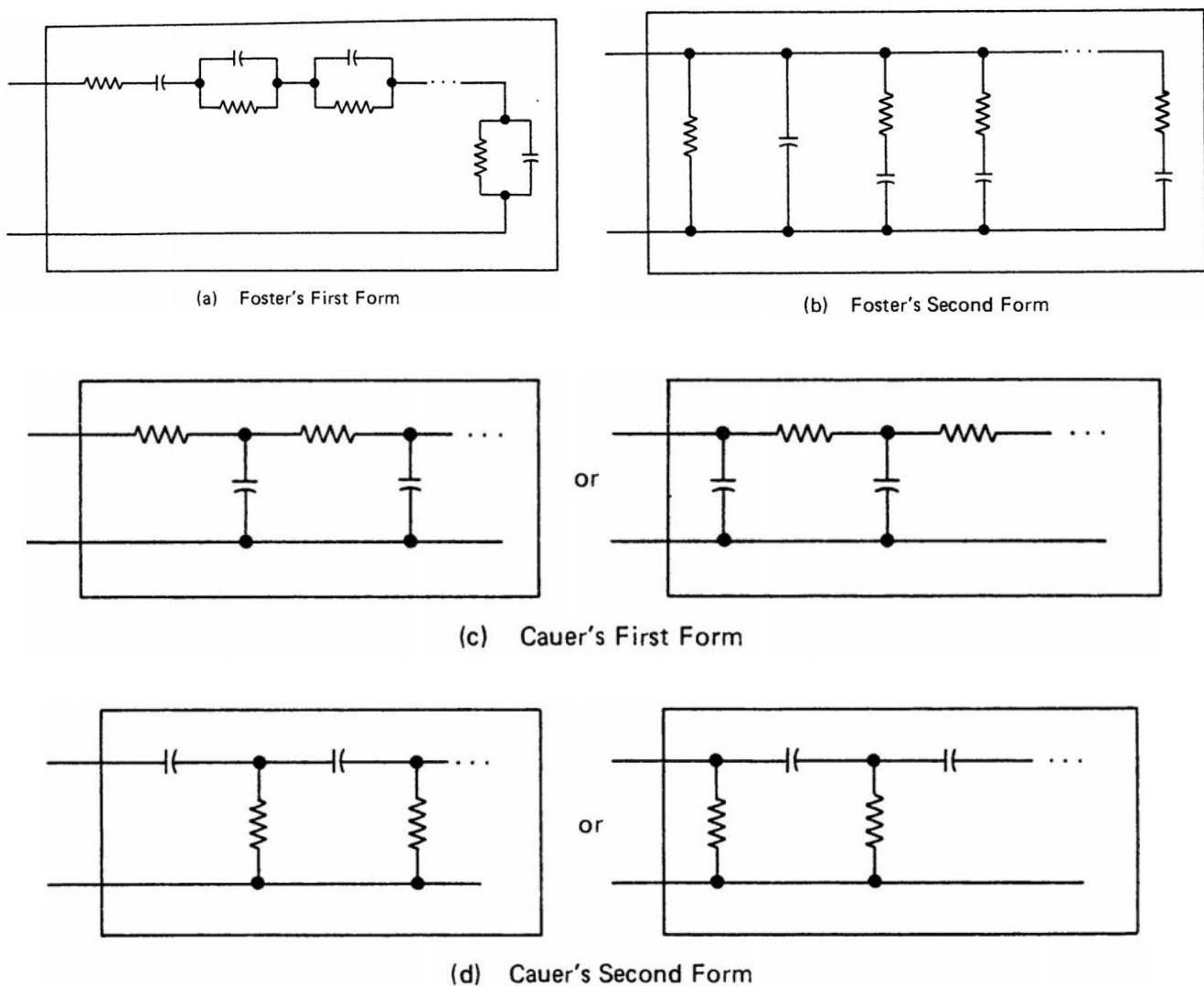


Fig. 6-15 Estructuras de circuito básico de las formas de Foster y Cauer.

Para concluir este capítulo, nos gustaría señalar que el RC DP Los métodos de realización de funciones son idénticos a los de las realizaciones de funciones LC DP. La única diferencia es que el primer caso usa resistencias y el último caso usa inductores.

### **Referencias y lecturas adicionales**

- [1] Weinberg, L. Network Analysis and Synthesis. Huntington, N.Y.: R. E. Krieger, 1975.
- [2] Humphreys, D. S. The Analysis, Design, and Synthesis of Electrical Filters. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1970.
- [3] Peikari, B. Fundamentals of Network Analysis and Synthesis. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1974.
- [4] Budak, A. Passive and Active Network Analysis and Synthesis. Boston, MA.: Houghton Mifflin, 1974.

## Problemas

6-1. Determine cuáles de las siguientes  $Z(s)$  se pueden realizar como funciones DP RC de impedancia:

$$(a) Z(s) = \frac{s^2 + 7s + 12}{s^2 + 3s + 2}$$

$$(b) Z(s) = \frac{s^2 + 5s}{s^2 + 3s + 2}$$

$$(c) Z(s) = \frac{s+5}{s^2 + 3s + 2}$$

$$(d) Z(s) = \frac{s+1.5}{s^2 + 2s + 1}$$

$$(e) Z(s) = \frac{s^2 + 3s + 2}{s+1.5}$$

$$(f) Z(s) = \frac{s^2 + 7s + 12}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1}$$

$$(g) Z(s) = \frac{s^2 + 4s + 3.75}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1}$$

$$(h) Z(s) = \frac{s^3 + 8s^2 + 17s + 10}{s^3 + 11.5s^2 + 39s + 36}$$

$$(i) Z(s) = \frac{s^2 + 3s + 2}{s^3 + 6s^2 + 8.75s + 3}$$

$$(j) Z(s) = \frac{s^3 + 6s^2 + 8.75s + 3}{s^2 + 3s + 2}$$

6-2. Determine cuáles de las siguientes  $Y(s)$  son realizables como funciones DP RC de admitancia:

$$(a) Y(s) = \frac{s^2 + 7s + 12}{s^2 + 3s + 2}$$

$$(b) Y(s) = \frac{s^2 + 5s}{s^2 + 3s + 2}$$

$$(c) Y(s) = \frac{s^2 + 3s + 2}{s + 5}$$

$$(d) Y(s) = \frac{s^2 + 3s + 1}{s + 1.5}$$

$$(e) Y(s) = \frac{s + 1.5}{s^2 + 2s + 1}$$

$$(f) Y(s) = \frac{s^2 + 7s + 12}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1}$$

$$(g) Y(s) = \frac{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}{s^2 + 4s + 3.75}$$

$$(h) Y(s) = \frac{s^3 + 8s^2 + 17s + 10}{s^3 + 11.5s^2 + 39s + 36}$$

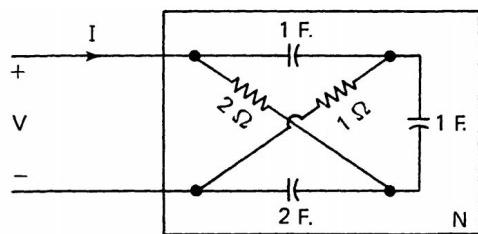
$$(i) Y(s) = \frac{s^2 + 3s + 2}{s^3 + 6s^2 + 8.75s + 3}$$

$$(j) Y(s) = \frac{s^3 + 6s^2 + 8.75s + 3}{s^2 + 3s + 2}$$

6-3. Considere la red N de un puerto que se muestra en la Fig. P6-3.

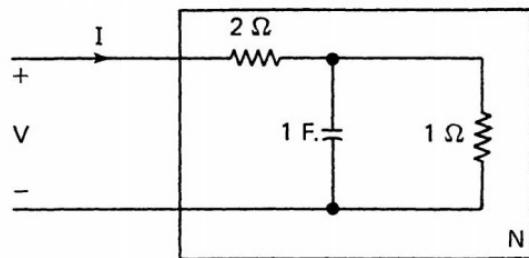
(a) Demuestre que la función DP de impedancia de N satisface todas las propiedades de una función DP RC de impedancia.

(b) Muestre que la función DP de admitancia de N satisface todas las propiedades de una función DP RC de admitancia.



**Fig. P6-3**

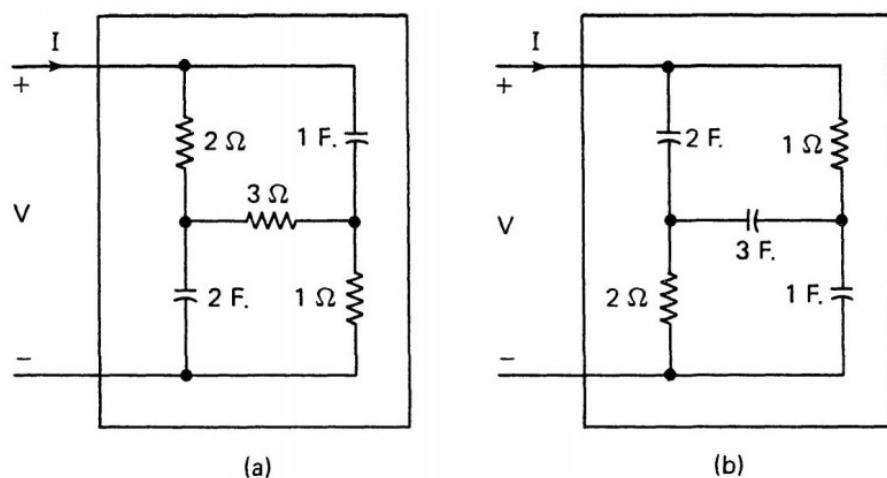
6-4. Considere el televisor de red de puerto-1 que se muestra en la figura P6-4.

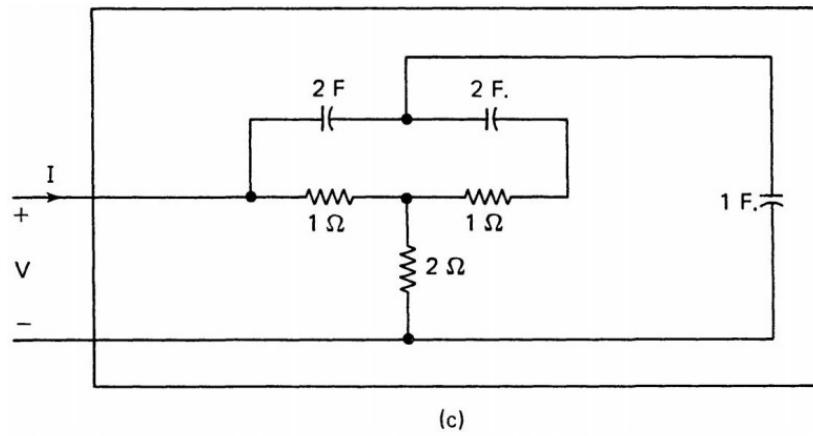


**Fig. P6-4**

- Encuentre la función de impedancia DP  $Z(s)$  de N.
- Demuestre que  $Z(s)$  satisface todas las propiedades de una función DP de impedancia.
- Demuestre que la función DP de admitancia  $Y(s)$  de N satisface todos los propiedades de una función de admitancia RC DP.
- Realice  $Y(s)$  o  $Z(s)$  mediante las dos formas de Foster.
- Realice  $Y(s)$  o  $Z(s)$  mediante las dos formas de Cauer.

6-5. Repita el problema 6-4 para las redes de un puerto que se muestran en la Fig. P6-5.




**Fig. P6-5**

6-6. Para cada  $Z(s)$  dado a continuación, encuentre el rango de tal que  $Z(s)$  sea realizable como una función DP RC de impedancia:

(a)  $Z(s) = \frac{s + a}{s^2 + 3s + 2}$

(b)  $Z(s) = \frac{s^2 + 4s + a}{s^2 + 3s + 2}$

(c)  $Z(s) = \frac{s^2 + as + 3}{s^2 + 3s + 2}$

(d)  $Z(s) = \frac{s^2 + 5s + 6}{s^2 + as + 2}$

(e)  $Z(s) = \frac{s^2 + 5s + 6}{s^2 + 3s + a}$

(f)  $Z(s) = \frac{s^2 + 3s + a}{s^3 + 5s^2 + 6s}$

6-7. Para cada  $Y(s)$  dado a continuación, encuentre el rango de tal que  $Y(s)$  sea realizable como una función DP RC de admitancia:

(a)  $Y(s) = \frac{s^2 + 5s + a}{s^2 + 7s + 10}$

(d)  $Y(s) = \frac{s^2 + 10s + 16}{s^2 + 12s + a}$

(b)  $Y(s) = \frac{s^2 + 5s + a}{s^2 + 7s + 10}$

(e)  $Y(s) = \frac{s^3 + 7.5s^2 + as + 5}{s^2 + 5s + 4}$

(c)  $Y(s) = \frac{s^2 + 5s + a}{s^2 + 7s + 10}$

(f)  $Y(s) = \frac{s^2 + as^2 + 13.5s + 5}{s^2 + 5s + 4}$

6-8. Realice las siguientes funciones DP RC de admisión de mediante las dos formas de Foster y las dos formas de Cauer:

(a)  $Y(s) = \frac{(s+1)(s+3)}{s+2}$

(d)  $Y(s) = \frac{s(s+4)(s+6)}{(s+1)(s+5)}$

(b)  $Y(s) = \frac{s(s+2)}{(s+1)(s+3)}$

(e)  $Y(s) = \frac{(s+1)(s+5)(s+10)}{(s+2)(s+6)(s+12)}$

(c)  $Y(s) = \frac{(s+1)(s+5)}{(s+4)(s+6)}$

6-9. Para cada función DP RC de admitancia del problema 6-8, definamos  $\hat{Z}(s) \triangleq Y(s)/s$ . Demuestre que  $\hat{Z}(s)$  satisface todas las propiedades de una función DP RC de impedancia. Además, considere  $\hat{Z}(s)$  como una función DP RC de impedancia mediante las dos formas de Foster y las dos formas de Cauer.

6-10. Realice la función de impedancia DP

$$Z(s) = \frac{(s+2)(s+4)}{(s+1)(s+3)(s+5)}$$

mediante el uso de los siguientes procedimientos:

- (a) Comience con la primera forma de Cauer (para dos capacitores) y complete la realización con la segunda forma de Cauer.
- (b) Comience con la segunda forma de Cauer (para dos capacitores) y complete la realización con la primera forma de Cauer.
- (c) Comience con la primera forma de Cauer (para un capacitor); luego cambie a la segunda forma de Cauer (para un capacitor) y complete la realización con la segunda forma de Foster.

6-11. (a) Realice la función de impedancia RC DP

$$Z(s) = \frac{(s+2)}{(s+1)(s+5)}$$

por la primera forma de Cauer.

- (b) Verifique que la red de 1 puerto obtenida en (a) tenga una función DP de impedancia dada por  $Z(s)$ .
- (c) Realice  $Z(s)$  por la segunda forma de Cauer.
- (d) Verifique que la red de puerto-1 obtenida en (c) tenga una función DP de impedancia dada por  $Z(s)$ .

6-12. Encuentre una realización de circuito RLC para cada una de las siguientes funciones DP de impedancia:

(a)  $Z(s) = \frac{(s^2 + 4)(s^2 + 6)}{s(s^2 + 5)} + \frac{s + 3}{(s + 1)(s + 5)}$

(b)  $Z(s) = \frac{s + 2}{(s + 1)(s + 4)} + \frac{s(s^2 + 2)}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)}$

(c)  $Z(s) = \frac{s(s^2 + 4)}{(s^2 + 3)(s^2 + 6)} + \frac{(s + 2)(s + 5)}{s(s + 4)}$

(d)  $Z(s) = \frac{(s + 2)(s + 4)}{s(s + 3)} + \frac{(s^2 + 3)(s^2 + 6)}{s(s^2 + 4)}$

(e)  $Z(s) = \frac{s(s^2 + 3)(s^2 + 6)}{(s^2 + 1)(s^2 + 5)} + \frac{(s + 3)(s + 6)}{(s + 1)(s + 5)}$

6-13. Encuentre una realización de circuito RLC para cada una de las siguientes funciones DP de admitancia:

$$(a) Y(s) = \frac{(s^2 + 1)(s^2 + 5)}{s(s^2 + 3)} + \frac{(s + 1)(s + 5)}{(s + 3)}$$

$$(b) Y(s) = \frac{s(s^2 + 5)}{(s^2 + 4)(s^2 + 6)} + \frac{(s + 1)(s + 4)}{s + 2}$$

$$(c) Y(s) = \frac{s(s^2 + 4)}{(s^2 + 3)(s^2 + 6)} + \frac{s(s + 4)}{(s + 2)(s + 5)}$$

$$(d) Y(s) = \frac{s(s + 3)}{(s + 2)(s + 4)} + \frac{(s^2 + 3)(s^2 + 6)}{s(s^2 + 4)}$$

$$(e) Y(s) = \frac{(s + 1)(s + 3)}{(s + 2)(s + 4)} + \frac{(s^2 + 1)(s^2 + 3)}{s(s^2 + 2)(s^2 + 4)}$$

$$(f) Y(s) = \frac{3s^4 + 9s^3 + 24s^2 + 28s}{(s + 1)(s + 2)(s^2 + 4)}$$

6-14. Encuentre las condiciones bajo las cuales el producto de dos funciones DP RC de impedancia {admitancia} es una función DP RC de impedancia {admitancia}.

6-15. Hay un teorema que dice: Sea  $A(s)$  un polinomio arbitrario de grado  $n_A$  y  $n_A$  otro polinomio arbitrario de grado  $n_B$  que solo tiene raíces reales negativas distintas. Entonces  $F(s) = A(s)/B(s)$  se puede escribir como

$$\begin{aligned} F(s) = \frac{A(s)}{B(s)} &= Z_{RC}^{(1)}(s) - Z_{RC}^{(2)}(s) && \text{si } n_A \leq n_B \\ &= Y_{RC}^{(1)}(s) - Y_{RC}^{(2)}(s) && \text{si } n_A \leq n_B + 1 \end{aligned}$$

donde  $Z_{RC}^{(1)}$  y  $Z_{RC}^{(2)}$  son funciones DP RC de impedancia y  $Y_{RC}^{(1)}$  y  $Y_{RC}^{(2)}$  son funciones DP RC de admitancia.

Por ejemplo, la función de impedancia

$$Z(s) = \frac{4s+1}{s^2+5s+4}$$

se puede expresar como

$$Z(s) = \frac{5}{s+4} - \frac{1}{s+1}$$

Por lo tanto

$$Z_{RC}^{(1)}(s) = \frac{5}{s+4} \quad \text{y} \quad Z(s) = \frac{5}{s+4} - \frac{1}{s+1}$$

## 7. Realización pasiva de funciones de transferencia.

A lo largo de los años, los ingenieros han ideado muchas técnicas para realizar varios tipos de funciones de transferencia solo con elementos pasivos. Consideramos algunas de estas técnicas, en particular las técnicas que reducen el problema de realizar una función de transferencia al de realizar una función DP. Estas técnicas son simples y, sin embargo, se ha demostrado que son muy útiles y se pueden aplicar a una clase muy amplia de problemas prácticos.

En este capítulo, consideraremos tres estructuras básicas de circuito. Son los

- circuitos de escalera (ladder),
- los circuitos de celosía(lattice) y
- los circuitos de Darlington.

En la sec. 7-1, discutimos las propiedades básicas y los métodos de realización de los circuitos de escalera RC y LC. Demostramos que los circuitos en escalera RC {LC} se pueden realizar sólo aquellas funciones de transferencia con polos simples y con todos los polos y ceros en el eje real negativo {imaginario} del plano-s.<sup>60</sup> Las redes de celosía se examinan en la sección 7-2 junto con todas las funciones de transferencia anteriormente vistas. Finalmente, en la Sec. 7-3, consideramos los circuitos de Darlington. Aunque los procedimientos de realización son más complicados que las dos estructuras de circuito anteriores, los circuitos Darlington se pueden utilizar para realizar una clase mucho mayor de funciones de transferencia.

Antes de continuar, conviene señalar que, como es común a todas las técnicas de síntesis pasiva, utilizando únicamente elementos pasivos, una función de transferencia puede ser realizada como un múltiplo constante de si misma. Por ejemplo, si la función de transferencia deseada es  $H(s)$ , entonces un circuito con una función de transferencia  $\hat{H}(s)=\alpha H(s)$ , donde  $\alpha$  es una constante distinta de cero, es una realización de la función de transferencia deseada.<sup>61</sup>

### 7-1 Redes de escalera (Ladder)

En esta sección, consideraremos las redes de escalera RC y LC. Una red de escalera típica tiene la estructura que se muestra en la Fig. 7-1.

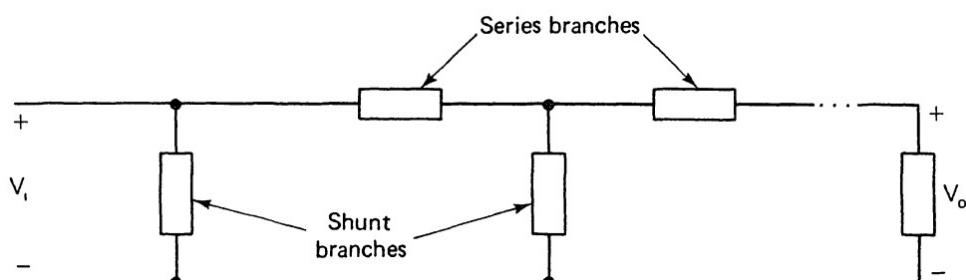


Fig. 7-1 Estructura de circuitos Ladder.

Un concepto importante asociado con las redes en escalera son los *ceros de transmisión*. Un cero de transmisión es una frecuencia compleja  $s_k$  tal que  $H(s_k)=0$ , donde  $H(s)$  es la función de transferencia de la red. En las redes de escalera, hay dos fuentes de ceros de transmisión; estos son frecuencias complejas donde

1. La función de impedancia de una rama en serie es infinita y
2. La función de impedancia de una rama en derivación(shunt) es cero.

En el primer caso, una rama en serie se convierte en un circuito abierto. Por lo tanto, no pasará

<sup>60</sup> Recuerde que el eje real negativo {el imaginario} del plano-s incluye el origen  $s=0$  y el punto en el infinito  $s=\infty$ .

<sup>61</sup> A menos que se indique explícitamente lo contrario, todas las funciones de transferencia de este libro son funciones de transferencia de relación de voltaje.

ninguna señal hacia la salida. En el segundo caso, una derivación se convierte en un cortocircuito. Por lo tanto, toda la corriente fluirá a través de esa rama de derivación de cortocircuito, sin dejar flujo de corriente hacia la salida. En ambos casos, no llegará corriente al extremo de salida. Por lo tanto, la salida (de estado estable) será cero si la entrada está en las frecuencias de ceros de transmisión.<sup>62</sup>

### 7-1-1. Redes de escalera RC

Se dice que una red en escalera es una escalera RC si solo contiene resistencias y condensadores. Debido a que los polos y ceros de una función DP de impedancia RC están en el eje real negativo del plano-s, los ceros de transmisión de una red de escalera RC (que son los **polos de las funciones de impedancia RC de las ramas en serie** y los **ceros de las funciones de impedancia RC de las ramas de derivación**) se limitará al eje real negativo del plano-s. Además, si cada rama de una red de escalera RC contiene solo un elemento (ya sea una resistencia o un capacitor), entonces **los ceros de transmisión pueden ocurrir solo en dos puntos**:  $s=0$  y  $s=\infty$ . Esto se debe a que cada capacitor en serie puede producir un cero de transmisión en  $s=0$ , y cada condensador de derivación puede producir un cero de transmisión en  $s=\infty$ . Recuerde que la primera forma de Cauer consta de condensadores en derivación y resistencias en serie. Por tanto, la primera forma de realización de Cauer de las funciones DP RC produce ceros de transmisión en  $s=\infty$ . Por otro lado, la segunda forma de Cauer contiene resistencias en derivación y condensadores en serie, produciendo así ceros de transmisión en  $s=0$ .

Otra propiedad importante asociada con las redes de escalera RC es que los polos de las funciones de transferencia también están restringidos al eje real negativo del plano-s. Para ver esto, consideremos el dispositivo RC de dos puerto de la Fig. 7-2. Suponga que el dispositivo de dos puerto se caracteriza por una representación de impedancia

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{21} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (7-1)$$

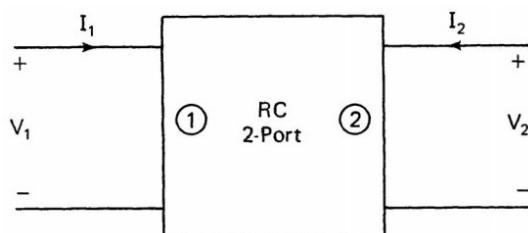


Fig. 7-2 An RC 2-port.

Entonces, la función de transferencia de relación de voltaje  $H(s)$  viene dada por

$$H(s) = \frac{V_2}{V_1} \Big|_{I_2=0} = \frac{z_{21}}{z_{11}} \quad (7-2)$$

Sea

$$z_{11}(s) = \frac{n_{11}(s)}{d_{11}(s)} \quad (7-3a)$$

y

$$z_{21}(s) = \frac{n_{21}(s)}{d_{21}(s)} \quad (7-3b)$$

62 Consulte la referencia [1] para obtener más detalles sobre los ceros de transmisión.

donde  $n_{11}(s)$ ,  $d_{11}(s)$ ,  $n_{21}(s)$  y  $d_{21}(s)$  son polinomios de  $s$ . Entonces (7-2) se convierte en

$$H(s) = \frac{n_{21}(s)}{d_{21}(s)} \frac{d_{11}(s)}{n_{11}(s)} \quad (7-4)$$

Una condición para que un dispositivo de dos puertos sea pasivo es que  $z_{21}(s)$  no puede tener ningún polo que no esté contenido tanto en  $z_{11}(s)$  como en  $z_{22}(s)$ . Como el dispositivo RC de dos puertos de la Fig. 7-2 es pasivo,  $d_{11}(s)$  contiene todos los factores de  $d_{21}(s)$ . Con esto en mente, (7-4) dice que los polos de  $H(s)$  son en realidad los ceros de  $z_{11}(s)$ . Debido a que  $z_{11}(s)$  es la función DP de impedancia que mira hacia el dispositivo RC de dos puertos desde el puerto ①, los ceros de  $z_{11}(s)$  son simples, reales y negativos. Por tanto, los polos de  $H(s)$  también son simples, reales y negativos. En resumen, tenemos el siguiente teorema:

**TEOREMA 7-1** Los ceros de transmisión y los polos de las funciones de transferencia de las redes de escalera RC son reales y negativos, y los polos son simples. Además, si cada rama de una red de escalera RC contiene un condensador o una resistencia, entonces los ceros de transmisión del circuito pueden ocurrir solo en los puntos  $s=0$  y  $s=\infty$ . En este caso, la función de transferencia viene dada por

$$H(s) = \frac{ks^m}{s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_0} = \frac{ks^m}{B(s)} \quad (7-5)$$

donde  $0 \leq m \leq n$  y  $B(s)$  es un polinomio de enésimo grado con raíces reales negativas simples.<sup>63</sup>

Observe que cuando  $s \rightarrow 0$ , si  $m \neq 0$ , entonces (7-5) da

$$\lim_{s \rightarrow 0} H(s) \approx \lim_{s \rightarrow 0} \frac{k}{b_0} s^m \quad (7-6a)$$

Es decir,  $H(s)$  llega a cero a una tasa de  $s^m$  como  $s \rightarrow 0$ . Por otro lado, como  $s \rightarrow \infty$ , si  $n \neq m$ , entonces (7-5) da

$$\lim_{s \rightarrow \infty} H(s) \approx \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{ks^m}{s^n} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{k}{s^{(n-m)}} \quad (7-6b)$$

Esto indica que  $H(s)$  llega a cero a razón de  $1/s^{(n-m)}$  como  $s \rightarrow \infty$ . Por tanto, la función de transferencia de (7-5) tiene  $m$  ceros de transmisión en  $s=0$  y  $(n-m)$  ceros de transmisión en  $s=\infty$ .

En esta sección, consideramos métodos de realización para tres clases de funciones de transferencia RC, los tres casos posibles de (7-5), de la siguiente manera:

**Caso 1.**  $m=0$  : todos los ceros de transmisión están en  $s=\infty$ .

**Caso 2.**  $m=n$  : todos los ceros de transmisión están en  $s=0$ .

**Caso 3.**  $0 < m < n$  : los  $m$  ceros de transmisión están en  $s=0$ , y los  $(n-m)$  ceros de transmisión están en  $s=\infty$ .

<sup>63</sup> Por raíces reales negativas, queremos incluir también el origen. Es decir,  $B(s)$  puede tener una raíz simple en  $s=0$ .

Todos estos métodos se basan en el supuesto de que  $z_{11}(s)$  y  $z_{21}(s)$  de la representación de impedancia de un dispositivo de dos puertos del circuito de escalera RC resultante tienen denominadores idénticos. Es decir,<sup>64</sup>

$$d_{11}(s) = d_{21}(s) \quad (7-7)$$

Sustituyendo (7-7) en (7-4), obtenemos

$$H(s) = \frac{n_{21}(s)}{n_{11}(s)} \quad (7-8)$$

Tenga en cuenta que (7-8) dice que el denominador de  $H(s)$  es el numerador de la función DP de impedancia RC  $z_{11}(s)$ . Comparando (7-5) y (7-8), obtenemos

$$n_{11}(s) = B(s) \quad (7-9a)$$

y

$$n_{21}(s) = ks^m \quad (7-9b)$$

Es decir, para realizar la función de transferencia de (7-5), necesitamos realizar una función DP de impedancia RC elegida apropiadamente  $z_{11}(s)$  que satisfaga (7-9a) con un método apropiado para producir los ceros de transmisión prescritos como se indica por (7-5) y (7-9b).

La función DP  $z_{11}(s)$  se elige para satisfacer (7-9) y las propiedades de las funciones RC de impedancia dadas en el Capítulo 6.<sup>65</sup> Esto se logra simplemente eligiendo  $z_{11}(s)$  Para que tenga las siguientes propiedades:

**RC1.** El numerador de  $z_{11}(s)$  viene dado por  $B(s)$ ; los ceros de  $z_{11}(s)$  son los polos de  $H(s)$ .

**RC2.** Los polos de  $z_{11}(s)$  son simples, reales, negativos y se alternan con las raíces dadas de  $B(s)$  tales que la frecuencia crítica de  $z_{11}(s)$  más cercana al origen sea un polo y la más cercana a  $s=\infty$  sea un cero.

64 Todos los métodos de realización presentados en este capítulo producen circuitos que satisfacen la condición de (7-7). Tenga en cuenta que (7-7) significa que no hay polos privados en el dispositivo RC de dos puertos. (Consulte la Referencia [3] para obtener detalles con respecto a los polos privados).

En la Fig. 7-3 se muestran ejemplos en los que pueden existir polos privados. En la Fig. 7-3 (a), si no hay cancelación de polos entre  $Z_A$  { $Z_b$ } y  $N_1$ , entonces los polos de  $Z_A$  { $Z_b$ } aparecerán como polos de  $z_{11}(s)$  { $z_{22}(s)$ } pero no como polos de  $z_{21}(s)$ . De la misma manera, los polos de  $Y_C$  { $Y_D$ } aparecerán como polos de  $y_{11}(s)$  { $y_{22}(s)$ } pero no como polos de  $y_{12}(s)$  siempre que no haya polo cancelación entre  $Y_C$  { $Y_D$ } y  $N_2$  en la Fig. 7-3 (b).

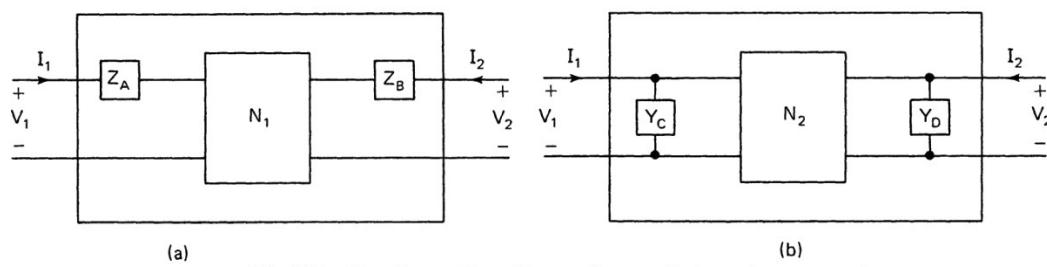


Fig. 7-3 Circuit configurations where private poles may exist.

65 Para que  $z_{11}(s)$  satisfaga todas las propiedades de una función de impedancia RC DP,  $B(s)$  no puede tener una raíz en  $s=0$ . En la sección 7-1-3, presentaremos una técnica dual para superar esto dificultad.

**RC3.** El grado del polinomio denominador de  $z_{11}(s)$  se establece en  $n$ .<sup>66</sup>

Suponiendo que se ha elegido una función DP de impedancia RC adecuada de  $z_{11}(s)$ , el siguiente paso es realizar este  $z_{11}(s)$  con un procedimiento adecuado para producir los requisitos de cero de transmisión prescritos.

**CASO 1:** El primer caso es cuando todos los ceros de transmisión de la función de transferencia RC están en  $s=\infty$ . En este caso, la función de transferencia viene dada por (7-5) con  $m=0$  y se repite aquí como

$$H(s) = \frac{k}{s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_0} \triangleq \frac{k}{B(s)} \quad (7-10)$$

donde  $B(s)$  tiene raíces reales negativas simples. Recuerde que la primera forma de realización de Cauer de las funciones DP de impedancia RC produce ceros de transmisión en  $s=\infty$ . Por lo tanto, la realización de la función de transferencia de (7-10) se logra al realizar el  $s=\infty$  elegido por la primera forma de Cauer, que implica una expansión de fracción continua de  $z_{11}(s)$  en  $s=\infty$ .

### Ejemplo 7-1 Sintetizar la función de transferencia

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{k}{(s+2)(s+4)} = \frac{k}{s^2 + 6s + 8} \quad (7-11)$$

**Solución:** De (7-2), sabemos que

$$H(s) = \frac{z_{21}(s)}{z_{11}(s)} = \frac{k}{(s+2)(s+4)} \quad (7-12)$$

Basado en (7-12), hay muchas opciones de  $z_{11}(s)$ . Las restricciones son que los ceros de  $z_{11}(s)$  están en  $s=-2$  y  $s=-4$ , y que  $z_{11}(s)$  satisface todas las propiedades de una función DP RC de impedancia con un polinomio denominador de segundo orden. Una elección simple es dejar

$$z_{11}(s) = \frac{(s+2)(s+4)}{(s+1)(s+3)} \quad (7-13)$$

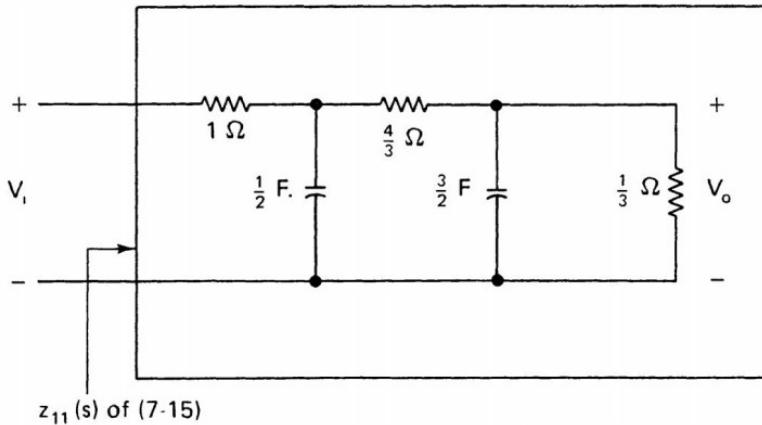
Claramente,  $z_{11}(s)$  de (7-13) satisface todos los requisitos especificados por las condiciones RC1, RC2 y RC3. De (7-12) y (7-13), identificamos

$$z_{21}(s) = \frac{k}{(s+1)(s+3)} \quad (7-14)$$

Para realizar la función de transferencia de (7-11), es necesario realizar la función DP de impedancia de (7-13) y asegurarse de que los ceros de transmisión del circuito de escalera RC resultante estén todos en  $s=\infty$ , según lo dictado por (7-11). Esto se puede hacer en un paso utilizando la primera forma de Cauer para realizar  $z_{11}(s)$  de (7-13). Observando que la expansión fraccionaria continua de  $z_{11}(s)$  en  $s=\infty$  viene dada por

<sup>66</sup> Recuerde que una de las propiedades de una función de impedancia RC DP es que su denominador o grado de polinomio es igual o uno mayor que el grado de su polinomio numerador. Para elegir que el grado del denominador de  $z_{11}(s)$  sea  $(n+1)$  en lugar de  $n$ , necesitamos  $(n+1)$  en lugar de  $n$  elementos dinámicos en el circuito de realización resultante. Dado que esta complejidad adicional no produce ningún retorno aparente, no tenemos ninguna razón para complicar nuestro problema. Por lo tanto, simplemente establecemos el grado del denominador de  $z_{11}(s)$  en  $n$ . Además, en el caso de que todos los ceros de transmisión estén en  $s=\infty$ , la condición RC3 asegura que el primer elemento en la primera forma de realización de  $z_{11}(s)$  de Cauer siempre será una resistencia en serie y, por lo tanto, nunca puede ocurrir un condensador de derivación redundante.

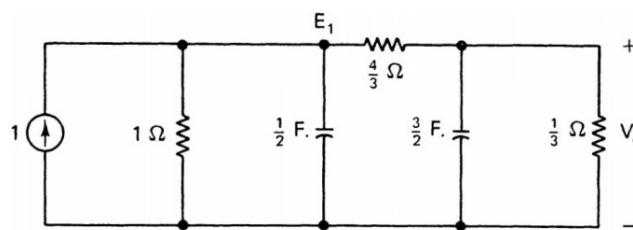
$$\begin{aligned}
 z_{11}(s) &= \frac{s^2 + 6s + 8}{s^2 + 4s + 3} \\
 &= 1 + \frac{1}{\frac{1}{2}s + \frac{1}{4}} + \frac{1}{\frac{3}{2}s + \frac{1}{3}}
 \end{aligned} \tag{7-15}$$

**Fig. 7-4** A circuit realization of  $H(s)$  of (7-12).

En la Fig. 7-4 se da una realización del circuito de  $z_{11}(s)$  a través de (7-15), donde el voltaje de salida se toma a través del último elemento en el proceso de realización.<sup>67</sup> Los ceros de transmisión del circuito en la Fig. 7-4 están todos en  $s=\infty$ , donde las impedancias de la derivación son cero. Por tanto, el circuito de la Fig. 7-4 realiza la  $z_{11}(s)$  de la ecuación (7-13), la  $z_{21}(s)$  de la ecuación (7-14) y la función de transferencia de la ecuación (7-11), simultáneamente. Para ver que este es el caso, basta con mostrar que cuando  $V_i=1$ ,  $V_o$  está dado por

$$V_o = \frac{k}{(s+2)(s+4)} = \frac{k}{s^2 + 6s + 8} = H(s) \tag{7-16}$$

Cuando  $V_i=1$ ,<sup>68</sup> podemos volver a dibujar el circuito de la Fig. 7-4 como se muestra en la Fig. 7-5.

**Fig. 7-5** An equivalent circuit of Fig. 7-4 when  $V_i = 1$ .

Las ecuaciones nodales son

<sup>67</sup> Si una función de transferencia se realiza mediante cualquiera de las técnicas de estructura de circuito en escalera, entonces el voltaje de salida siempre se encuentra en el último elemento del proceso de realización. Esto se aplica a las Secciones 7-1-1 y 7-1-2.

<sup>68</sup> Observe que, en el contexto presente,  $V_i=1$  es una expresión en el dominio de la frecuencia (transformada de Laplace). En el dominio del tiempo, esto equivale a dejar que  $v_i(t)$  sea una función de impulso unitario.

$$\begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{2}s + \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} + 3 + \frac{3}{2}s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ V_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7-17)$$

La regla de Cramer dice que

$$V_o = \frac{\det \begin{bmatrix} \frac{7}{4} + \frac{1}{2}s & 1 \\ -\frac{3}{4} & 0 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} \frac{7}{4} + \frac{1}{2}s & -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{15}{4} + \frac{3}{2}s \end{bmatrix}} = \frac{\frac{3}{4}}{\left(\frac{7}{4} + \frac{1}{2}s\right)\left(\frac{15}{4} + \frac{3}{2}s\right) - \frac{9}{16}} \quad (7-18)$$

$$= \frac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{4}s^2 + \frac{18}{4}s + \frac{24}{4}} = \frac{1}{s^2 + 6s + 8} = \frac{1}{(s+2)(s+4)} \quad \blacksquare$$

**CASO 2:** El segundo caso que discutimos en la realización de la escalera RC de la función de transferencia de relación de voltaje es cuando todos los ceros de transmisión de la función de transferencia están en  $s=0$ . En este caso, las funciones de transferencia son de la forma

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i} \triangleq \frac{ks^n}{s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_0} \triangleq \frac{ks^n}{B(s)} \quad (7-19)$$

donde las raíces de  $B(s)$  son simples, negativas y reales. Debido a que la segunda forma de Cauer produce redes formadas por ramas resistivas en derivación y ramas capacitivas en serie que producen ceros de transmisión solo en el punto  $s=0$ , usamos la segunda forma de Cauer para realizar el  $z_{11}(s)$  elegido y la función de transferencia de (7-19) simultáneamente.

### Ejemplo 7-2

Realice

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{ks^2}{(s+2)(s+4)} \quad (7-20)$$

**Solución:** como en el caso del Ejemplo 7-1, una elección simple de  $z_{11}(s)$  para satisfacer las condiciones RC1, RC2 y RC3 es

$$z_{11}(s) = \frac{(s+2)(s+4)}{(s+1)(s+3)} \quad (7-21)$$

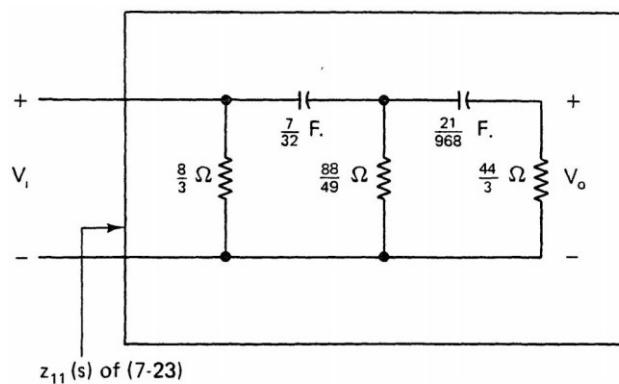
Por tanto, podemos identificar

$$z_{21}(s) = \frac{ks^2}{(s+1)(s+3)} \quad (7-22)$$

Para realizar  $z_{11}(s)$  de la (7-21) y  $z_{21}(s)$  de la (7-22) simultáneamente para dar lugar a la función de transferencia prescrita de (7-20), donde todos los ceros de transmisión están en  $s=0$ , usamos Segunda forma de Cauer para realizar  $z_{11}(s)$ , esto implica una expansión de fracción continua de  $z_{11}(s)$  en  $s=0$ :

$$\begin{aligned}
 z_{11}(s) &= \frac{8+6s+s^2}{3+4s+s^2} \\
 &= \frac{1}{\frac{3}{8} + \frac{1}{\frac{32}{7s} + \frac{1}{\frac{49}{88} + \frac{1}{\frac{968}{21s} + \frac{1}{\frac{3}{44}}}}}}
 \end{aligned} \tag{7-23}$$

En la Fig. 7-6 se da una realización de circuito de la función de transferencia de (7-20), que también es la realización de la segunda forma de Cauer de los  $z_{11}(s)$  de (7-21).

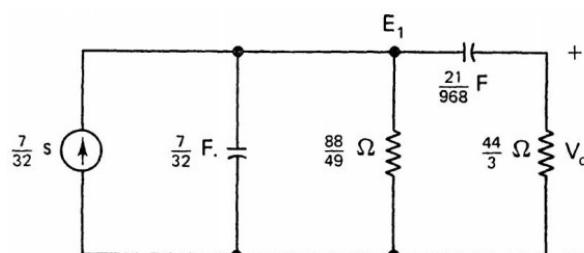


**Fig. 7-6** A circuit realization of  $H(s)$  of (7-20).

Para ver que el circuito de la Fig. 7-6 realiza la función de transferencia de (7-20), dejamos  $V_i=1$  y calculamos  $V_o$ . Nuestra conclusión será válida si

$$V_o = H(s) = \frac{ks^2}{s^2 + 6s + 8}$$

Con  $V_i=1$ , redibujamos el circuito de la Fig. 7-6 como en la Fig. 7-7.



**Fig. 7-7** An equivalent circuit of Fig. 7-6 when  $V_i = 1$ .

La ecuación nodal está dada por

$$\begin{bmatrix} \frac{7s}{32} + \frac{21s}{968} + \frac{49}{88} & -\frac{21s}{968} \\ -\frac{21s}{968} & \frac{21s}{968} + \frac{3}{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ V_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{32}s \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por la regla de Cramer, obtenemos

$$\begin{aligned}
 V_o &= \frac{\frac{21s}{968} \frac{7s}{32}}{\left(\frac{931s}{3972} + \frac{49}{88}\right)\left(\frac{21s}{968} + \frac{3}{44}\right) - \left(\frac{21s}{968}\right)^2} \\
 &= \frac{\frac{147}{968 \times 32} s^2}{\frac{17787}{3748096} s^2 + \frac{4851}{170368} s + \frac{147}{3872}} \\
 &= \frac{17787 s^2}{17787 s^2 + 106722 s + 142296} \\
 &= \frac{s^2}{s^2 + 6s + 8}
 \end{aligned}$$

Por tanto, la función de transferencia del circuito de la Fig. 7-6 viene dada por

$$H(s) = \frac{s^2}{s^2 + 6s + 8} = \frac{s^2}{(s+2)(s+4)}$$

**CASO 3:** El último caso que consideramos en esta sección es cuando los ceros de transmisión ocurren tanto en  $s=0$  como en  $s=\infty$ . En este caso, la función DP de impedancia RC elegida  $z_{11}(s)$  se expande parcialmente en una expansión de fracción continua en  $s=0$ , y parcialmente en  $s=\infty$  para producir los ceros de transmisión prescritos. Podemos comenzar con cualquier forma de expansión. La primera expansión se detiene cuando se obtienen los ceros de transmisión requeridos. La función restante se expande luego en otra forma de Cauer. Para ver cómo funciona esto, consideremos el Ejemplo 7-3.

**Ejemplo 7-3** Realice la función de transferencia de relación de voltaje

$$H(s) \triangleq \frac{V_o}{V_i} = \frac{ks}{(s+2)(s+4)} \quad (7-24)$$

**Solución:** La función de transferencia de (7-24) tiene un cero de transmisión en  $s=\infty$  y otro cero de transmisión en  $s=0$ . Para comenzar el procedimiento de realización, elija  $z_{11}(s)$  como

$$z_{11}(s) = \frac{(s+2)(s+4)}{(s+1)(s+3)} \quad (7-25)$$

y por lo tanto,

$$z_{21}(s) = \frac{ks}{(s+1)(s+3)} \quad (7-26)$$

Observamos aquí que  $z_{11}(s)$  de (7-25) es la misma función que las de los Ejemplos 7-1 y 7-2, pero que  $z_{21}(s)$  es diferente. Por tanto, ninguna de las dos formas de Cauer realizará la (7-24). Como se propone, utilizamos una combinación de estas dos formas. Primero expandamos  $z_{11}(s)$  de (7-25) en  $s=\infty$  para extraer el cero de transmisión en  $s=\infty$ . Debido a que solo hay un cero de transmisión en  $s=\infty$ , detenemos esta expansión de fracción continua en  $s=\infty$  tan pronto como hayamos extraído un condensador de derivación. Esto implica escribir  $z_{11}(s)$  como

$$z_{11}(s) = \frac{s^2 + 6s + 8}{s^2 + 4s + 3} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{2}s + \frac{(3/2)s+3}{2s+5}} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{2}s + y_R(s)} \quad (7-27)$$

Este proceso se ilustra en la Fig. 7-8 (a). La función de admitancia del resto

$$y_R(s) \triangleq \frac{(3/2)s+3}{2s+5} = \frac{3+(3/2)s}{5+2s} \quad (7-28)$$

Luego se expande por la segunda forma de Cauer:

$$y_R(s) = \frac{3}{5} + \frac{1}{\frac{50}{3s} + \frac{1}{\frac{3}{20}}} \quad (7-29)$$

Por lo tanto, una realización de circuito de  $z_{11}(s)$  de (7-25) y  $z_{21}(s)$  de (7-26), simultáneamente, para producir  $H(s)$  de (7-24) a través de (7-27) a (7-29) se muestra en la Fig. 7-8 (b).

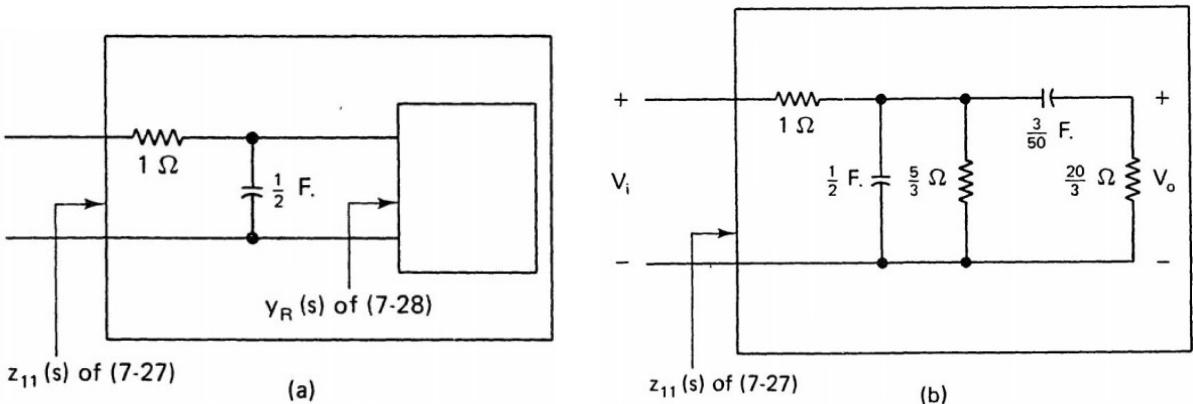


Fig. 7-8 Realización de un circuito de  $H(s)$  de (7-24).  
(a) Un paso intermedio, (b) Realización final del circuito.

Si no detenemos la expansión de primera forma de Cauer de  $z_{11}(s)$  de (7-25) tan pronto como hayamos extraído el número requerido de capacitores y en su lugar nos detenemos justo antes de que se extraiga el siguiente capacitor de derivación, entonces  $z_{11}(s)$  está escrito como

$$z_{11}(s) = \frac{s^2 + 6s + 8}{s^2 + 4s + 3} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{2}s + \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{3}}{\frac{3}{2}s + 3}} \quad (7-30)$$

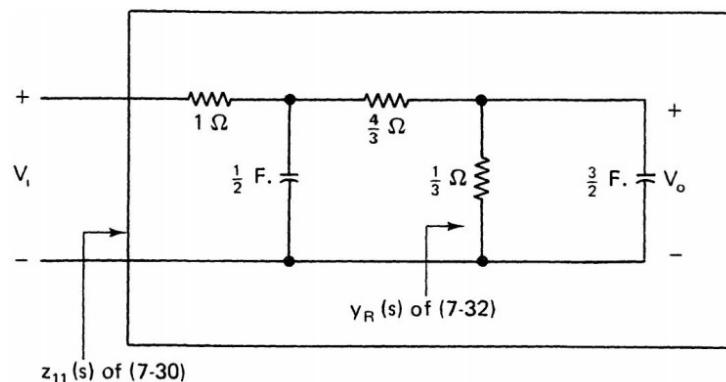
donde la función de admitancia restante

$$y_R(s) \triangleq \frac{3}{2}s + 3 \quad (7-31)$$

Luego se expande en  $s=0$  :

$$y_R(s) = 3 + \frac{1}{2/3s} \quad (7-32)$$

En la Fig. 7-9 se muestra una implementación de circuito de este procedimiento.

**Fig. 7-9 Not a circuit realization of (7-24).**

Un análisis simple del circuito de la Fig. 7-9 muestra que la función de transferencia del circuito está dada por

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{1}{s^2 + 6s + 8}$$

que no es la función de transferencia deseada de (7-24). Por lo tanto, es obligatorio **detener el primer proceso de realización tan pronto como se haya extraído el número requerido de condensadores.**

Otra realización de la función de transferencia de (7-24) se logra expandiendo  $z_{11}(s)$  de (7-25) en  $s=0$  primero. La expansión se detiene tan pronto como se extrae un condensador en serie; se produce un cero de transmisión en  $s=0$ . La función restante se expande luego en  $s=\infty$ . Para implementar este procedimiento, expandimos  $z_{11}(s)$  :

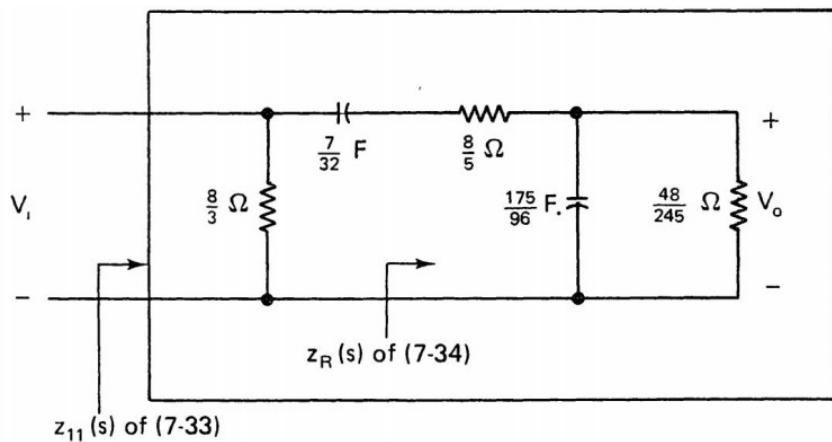
$$z_{11}(s) = \frac{s^2 + 6s + 8}{s^2 + 4s + 3} = \frac{1}{\frac{3}{8} + \frac{1}{s + \frac{22}{7}}} = \frac{1}{\frac{32}{7s} + \frac{5}{8s} + \frac{7}{4}} \quad (7-33)$$

y la función de impedancia remanente  $z_R$  se escribe como

$$z_R(s) = \frac{s + (22/7)}{\frac{5}{8}s + \frac{7}{4}} = \frac{8}{5} + \frac{1}{\frac{175}{96}s + \frac{1}{48}} \quad (7-34)$$

La Fig. 7-10 da una realización de circuito de (7-25) y (7-26) simultáneamente para producir  $H(s)$  de (7-24) a través de (7-33) y (7-34).

Un análisis simple da como resultado que la función de transferencia del circuito de la Fig. 7-10 está dada por

**Fig. 7-10** A circuit realization of (7-24).

$$H(s) = \frac{(12/35)s}{s^2 + 6s + 8}$$

Por tanto, la Fig. 7-10 presenta de hecho una realización de circuito de (7-24).

De los Ejemplos 7-1 a 7-3, observamos que aunque los  $z_{11}(s)$  elegidos son los mismos, diferentes métodos de realización de DP producirán  $z_{11}(s)$  diferentes y, en consecuencia,  $H(s)$  diferentes. Observamos también que, dados los dos parámetros de la matriz de impedancia,  $z_{21}(s)$  y  $z_{11}(s)$  de un dispositivo de dos puertos RC, los procedimientos presentados en esta sección se pueden utilizar para realizar el dispositivo de dos puertos prescrito.

### 7-1-2. Redes de escalera LC

Siguiendo el patrón de razonamiento presentado en la sección anterior para el caso de las redes de escalera RC, tenemos el siguiente teorema para las redes de escalera LC:

**TEOREMA 7-2** Los ceros de transmisión y los polos de las funciones de transferencia de las redes de escalera LC están todos en el eje imaginario del plano-s, y los polos son simples. Además, si cada rama de la red de escalera LC contiene solo un elemento (ya sea un inductor o un capacitor), entonces los ceros de transmisión están restringidos a los puntos  $s=0$  y  $s=\infty$ . En este caso, la función de transferencia tiene la forma de

$$H(s) \triangleq \frac{ks^m}{s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_0} \triangleq \frac{ks^m}{B(s)} \quad (7-35)$$

donde  $B(s)$  es un polinomio de enésimo grado con raíces simples en el eje imaginario<sup>69</sup> y  $0 \leq m \leq n$ . Sin embargo, en este caso,  $m$  y  $n$  son números enteros pares, lo que implica que la función de transferencia  $H(s)$  de (7-35) es una función racional par [es decir, tanto el numerador como el denominador de  $H(s)$  son pares polinomios]<sup>70</sup>.

Para ver que  $H(s)$  es una función incluso racional, consideremos la circuito de puerto-2 LC que se muestra en la Fig. 7-11. Suponga que el dispositivo LC de dos puertos tiene una representación de impedancia

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (7-36)$$

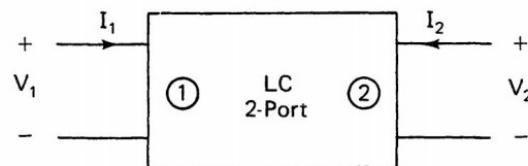


Fig. 7-11 An LC 2-port.

donde  $z_{12}(s) = z_{21}(s)$ <sup>71</sup>. Entonces se puede demostrar que todos los parámetros-z, a saber,  $z_{11}(s)$ ,  $z_{12}(s) = z_{21}(s)$  y  $z_{22}(s)$  son funciones racionales impares.<sup>72</sup> Porque la función de transferencia

$$H(s) = \left. \frac{V_o}{V_i} \right|_{I_2} = \frac{z_{21}}{z_{11}} \quad (7-37)$$

es una razón de dos funciones racionales impares,  $H(s)$  es una función racional par.

69 Recuerde que el eje imaginario incluye los puntos  $s=0$  y  $s=\infty$ .

70 Lo que realmente se requiere es que  $H(s)$  sea una función par y racional. Esto implica que tanto  $m$  y  $n$  son números enteros pares o ambos son números enteros impares. Debido a que solo tiene raíces puramente imaginarias,  $B(s)$  es un polinomio par o impar. Entonces, si  $m$  es impar, entonces  $B(s)$  es un polinomio impar y la cancelación del término  $s$  tanto del numerador  $ks^m$  como del denominador  $B(s)$  de  $H(s)$  reducirá  $H(s)$  a  $H(s) = ks^{m-1}/B_R(S)$ , donde  $B_R(s) \triangleq B(s)/s$  es un polinomio par y  $(m-1)$  es un número entero par. Por tanto, en esta sección, tratamos el caso en el que  $m$  es un número entero par y  $B(s)$  es un polinomio par.

71 Esto se debe a que el dispositivo LC de dos puertos, como el dispositivo RC de dos puertos en la sección anterior, es recíproco.

72 Ver Sec. 7-3 para obtener más detalles.

Como en el caso de los circuitos de escalera RC, la realización de la función LC de transferencia de (7-35) se logra realizando una función DP LC de impedancia adecuadamente elegida,  $z_{11}(s)$ , con una forma de Cauer apropiada o una combinación de las dos formas de Cauer. Específicamente, la función de impedancia elegida

$$z_{11}(s) = \frac{B(s)}{D(s)} \quad (7-38)$$

debe cumplir las siguientes dos condiciones:

**LC1.** Las raíces de  $D(s)$  son simples, puramente imaginarias y alternan con las raíces de  $B(s)$  de manera que  $z_{11}(s)$  satisface todas las propiedades de una función DP LC de impedancia como se indica en el Capítulo 5.

**LC2.**  $D(s)$  es un polinomio impar con grado  $n_D = n - 1$ . Esto asegura que las formas de Cauer apropiadas o su combinación funcionarán con la función de impedancia de  $z_{11}(s)$ .<sup>73</sup>

En este punto, dividimos (7-35) en tres casos.

**CASO 1:**  $m=0$ . En este caso, todos los ceros de transmisión están en  $s=\infty$ . La primera forma de Cauer se utiliza para realizar  $z_{11}(s)$ . La razón es que la estructura de la primera forma de Cauer involucra inductancias en serie y capacitancias en derivación, las cuales dan lugar a ceros de transmisión en  $s=\infty$ . Por tanto, la primera forma de Cauer realizará automáticamente  $z_{11}(s)$  y el  $z_{21}(s)$  asociado, simultáneamente, para producir una función de transferencia de (7-35) con  $m=0$ .

**CASO 2:**  $m=n$ . En este caso, todos los ceros de transmisión están en  $s=0$ ; por tanto, debería utilizarse la segunda forma de Cauer. La segunda forma de Cauer contiene capacitancia en serie y ramas de inductancia en derivación que producen ceros de transmisión en  $s=0$ . Por lo tanto, la segunda forma de Cauer realizará  $z_{11}(s)$  y su  $z_{21}(s)$  asociada para producir una función de transferencia de (7-35) con  $m=n$ .

**CASO 3:**  $0 < m < n$ . En este caso, los ceros de transmisión ocurren tanto en  $s=0$  como en  $s=\infty$ . Necesitamos usar una combinación de las dos formas de Cauer para hacer la realización. Primero podemos usar la primera {segunda} forma de Cauer para extraer  $n-m$  elementos de  $z_{11}(s)$  y el resto de la función LC DP se realiza mediante la segunda {primera} forma de Cauer.

#### Ejemplo 7-4 Realice

73 TEsto es cierto por las siguientes dos razones:

1. La primera forma de Cauer trabaja con la función LC DP cuyo polinomio numerador es de un grado más alto que el de su polinomio denominador. Dado que  $D(s)$  es de grado  $n_D < n$ , la primera forma de Cauer funcionará con  $z_{11}(s)$  en lugar de  $1/z_{11}(s)$ .
2. La segunda forma de Cauer trabaja con la función LC DP cuyo denominador es un polinomio impar. Debido a que  $D(s)$  es un polinomio impar, la segunda forma de Cauer funcionará con la función de impedancia DP  $z_{11}(s)$ . Sin embargo, la razón principal para establecer el grado de  $D(s)$  en  $(n-1)$  no es realmente para garantizar que la realización funcione con  $z_{11}(s)$  sino para la economía. Si dejamos que  $n_D = n-1$ , entonces necesitamos  $(n-1)$  elementos para realizar  $z_{11}(s)$ . En el caso presente —  $n_D = n-1$  — sólo necesitamos  $n$  elementos para realizar  $z_{11}(s)$ .

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{k}{(s^2+1)(s^2+9)} \triangleq \frac{k}{B(s)} \quad (7-39)$$

**Solución:** elijamos

$$z_{11}(s) = \frac{(s^2+1)(s^2+9)}{s(s^2+4)} = \frac{s^4 + 10s^2 + 9}{s^3 + 4s} \quad (7-40)$$

Por (7-37), tenemos

$$z_{21}(s) = \frac{k}{s(s^2+4)} \quad (7-41)$$

Debido a que todos los ceros de transmisión están en  $s=\infty$ , usamos la primera forma de Cauer para realizar la realización. Matemáticamente hablando, esto implica una expansión de fracción parcial de  $z_{11}(s)$  en el punto  $s=\infty$ :

$$z_{11}(s) = s + \frac{1}{\frac{1}{6}s + \frac{1}{\frac{12}{5}s + \frac{1}{\frac{5}{18}s}}} \quad (7-42)$$

Se muestra una realización de circuito de  $z_{11}(s)$  de (7-40) y  $z_{21}(s)$  de (7-41), simultáneamente, para producir  $H(s)$  de (7-39) a través de (7-42) en la Fig. 7-12.

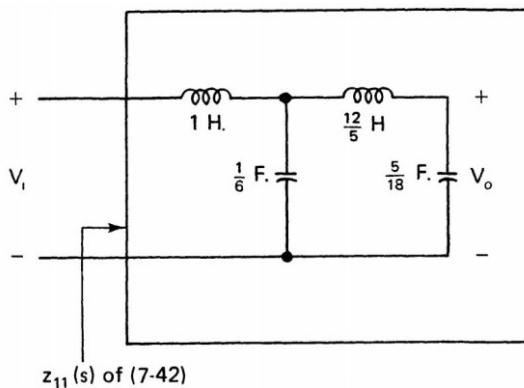


Fig. 7-12 A circuit realization of  $H(s)$  of (7-39).

Un análisis del circuito de la Fig. 7-12 muestra que la función de transferencia de la relación de voltaje está dada por

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{9}{(s^2+1)(s^2+3)}$$

Por tanto, la Fig. 7-12 es de hecho una realización de circuito de la función de transferencia de (7-39).

**Ejemplo 7-5** Realice la función de transferencia de relación de voltaje

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{ks^4}{(s^2+1)(s^2+9)} \quad (4-43)$$

**Solución:** elijamos

$$z_{11}(s) = \frac{(s^2+1)(s^2+9)}{s(s^2+4)} \quad (7-44)$$

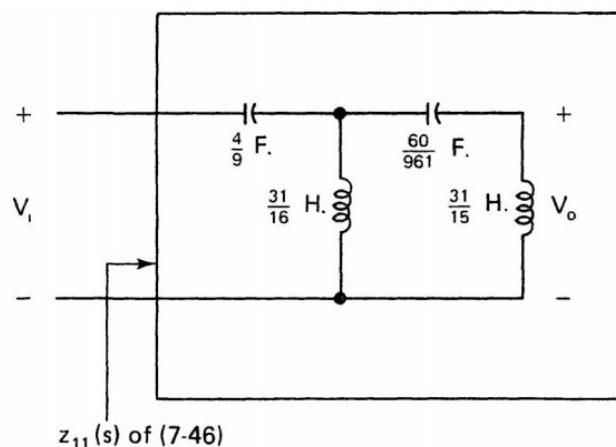
Este  $z_{11}(s)$  satisface todas las propiedades de las funciones DP de impedancia LC. Por (7-37),

$$z_{11}(s) = \frac{(s^2+1)(s^2+9)}{s(s^2+4)} \quad (4-45)$$

Debido a que todos los ceros de transmisión están en  $s=0$ , usamos la segunda forma de Cauer para realizar  $z_{11}(s)$ . Esto implica una expansión de fracción continua de  $z_{11}(s)$  en  $s=0$ :

$$\begin{aligned} z_{11}(s) &= \frac{s^4 + 10s^2 + 9}{s^3 + 4s} \\ &= \frac{9}{4s} + \frac{1}{\frac{16}{31s} + \frac{1}{\frac{961}{60s} + \frac{1}{\frac{15}{31s}}}} \end{aligned} \quad (7-46)$$

En la Fig. 7-13 se muestra una realización de circuito de la función de transferencia  $H(s)$  de (7-43), obtenida al realizar la función DP de impedancia LC  $z_{11}(s)$  de (7-46) con la segunda forma de Cauer.



**Fig. 7-13** A circuit realization of  $H(s)$  of (7-43).

**Ejemplo 7-6** Realice

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{ks^2}{(s^2+1)(s^2+9)} \quad (7-47)$$

**Solución:** una elección simple para  $z_{11}(s)$  viene dada por

$$z_{11}(s) = \frac{(s^2+1)(s^2+9)}{s(s^2+4)} \quad (7-48)$$

En este caso, tenemos

$$z_{21}(s) = \frac{ks}{s^2+4} \quad (7-49)$$

La función de transferencia de (7-47) tiene dos ceros de transmisión en  $s=0$  y otros dos ceros de transmisión en  $s=\infty$ . Para realizar estos ceros de transmisión y  $z_{11}(s)$  simultáneamente, podemos usar la primera forma de Cauer para extraer dos elementos de  $z_{11}(s)$  produciendo dos ceros de transmisión en  $s=\infty$ , y la función restante se realiza mediante la segunda forma de Cauer produciendo otra dos ceros de transmisión en  $s=0$ . Esto implica la siguiente expansión de  $z_{11}(s)$ :

$$\begin{aligned} z_{11}(s) &= \frac{s^4 + 10s^2 + 9}{s^3 + 4s} \\ &= s + \frac{1}{\frac{1}{6}s + \frac{(5/2)s}{6s^2 + 9}} \triangleq s + \frac{1}{\frac{1}{6}s + y_R(s)} \end{aligned} \quad (7-50)$$

Donde la función de admitancia restante  $y_R(s)$  se expande mediante la segunda forma de Cauer:

$$\begin{aligned} z_R(s) &= \frac{1}{y_R(s)} = \frac{6s^2 + 9}{(5/2)s} = \frac{9 + 6s^2}{(5/2)s} \\ &= \frac{18}{5s} + \frac{1}{(5/12)s} \end{aligned} \quad (7-51)$$

En la Fig. 7-14 (a) se muestra una implementación de circuito de este procedimiento.

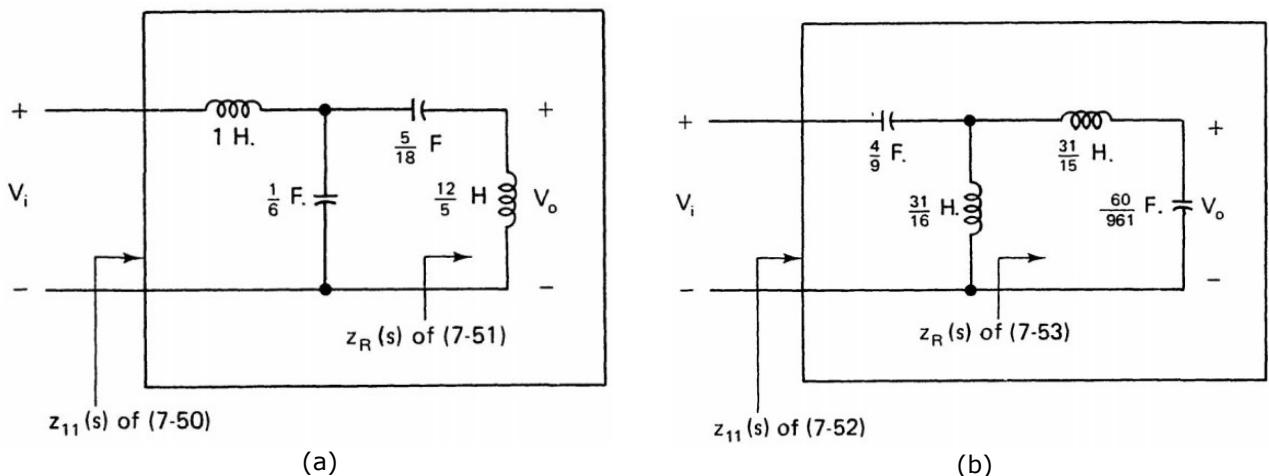


Fig. 7-14 Realizaciones de dos circuitos de  $H(s)$  de (7-47).

Por otro lado, podemos realizarlo usando primero la segunda forma de Cauer para extraer dos elementos de  $z_{11}(s)$  para producir dos ceros de transmisión en  $s=0$  y luego realizar el resto mediante la

primera forma de Cauer. Esto implica la expansión de  $z_{11}(s)$

$$\begin{aligned} z_{11}(s) &= \frac{9+10s^2+s^4}{4s+s^3} \\ &= \frac{9}{4s} + \frac{1}{\frac{16}{31}s + \frac{(15/31)s}{s^2+(31/4)}} \triangleq \frac{9}{4}s + \frac{1}{\frac{16}{31}s + y_R(s)} \end{aligned} \quad (7-52)$$

donde el resto funciona

$$y_R(s) = \frac{1}{(15/31)s} = \frac{s^2+(31/4)}{(15/31)s} \quad (7-53)$$

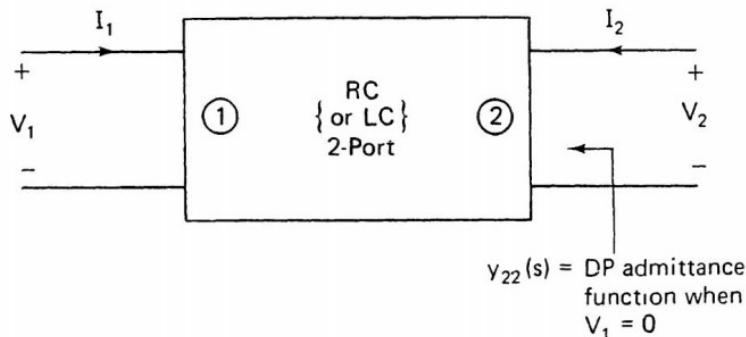
se expande en  $s=\infty$  :

$$y_R(s) = \frac{31}{15}s + \frac{1}{(60/961)s} \quad (7-54)$$

En la Fig. 7-14 (b) se muestra una realización de circuito de (7-47) a través de (7-52) y (7-54).

### 7-1-3. Consideraciones alternativas

En las dos secciones anteriores, consideramos la realización de funciones de transferencia de redes de escalera RC y LC a través de las representaciones de impedancia de dispositivos de dos puertos. En esta sección, examinamos el problema de la realización de la función de transferencia a través de la representación de admitancia.



**Fig. 7-15** An RC {LC} 2-port.

Suponga que el dispositivo RC {LC} de dos puertos que se muestra en la Fig. 7-15 tiene una representación de admitancia

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad (7-55)$$

donde  $y_{12}=y_{21}$ . Entonces, la función de transferencia de la relación de voltaje viene dada por la segunda ecuación de (7-55), con  $I_2=0$  como<sup>74</sup>

$$H(s) = \left. \frac{V_2}{V_1} \right|_{I_2=0} = -\frac{y_{21}(s)}{y_{22}(s)} \quad (7-56)$$

Observe que (7-56) es similar a la de (7-2), con  $y_{22}$  y  $-y_{21}$  reemplazando  $z_{11}$  y  $z_{21}$ ,

<sup>74</sup> Usando las relaciones entre la impedancia y las representaciones de admitancia de un puerto 2 recíproco (ver Referencia [1]), se puede demostrar que  $-(y_{21}/y_{22})=(z_{21}/z_{11})$ .

respectivamente. Por lo tanto, la realización de una función de transferencia dada que satisfaga los requisitos de estructura de circuito en escalera RC {LC} del Teorema 7-1 {Teorema 7-2} puede obtenerse mediante una realización adecuada de una función RC {LC} DP de admitancia elegida apropiadamente  $y_{22}(s)$ .

Sea la función de transferencia prescrita por

$$H(s) = \frac{ks^m}{B(s)} \quad (7-57)$$

donde  $B(s)$  es un polinomio de *enésimo* grado con raíces de eje {imaginario} reales simples y negativas. Entonces  $y_{22}(s)$  viene dado por

$$y_{22}(s) = \frac{B(s)}{D(s)} \quad (7-58)$$

donde  $D(s)$  se elige de manera que  $y_{22}(s)$  satisfaga todas las condiciones de una función de admisión RC {LC} DP como se presenta en el Capítulo 6 {Capítulo 5}. Por simplicidad y economía, escojamos  $n_D$ , el grado del polinomio  $D(s)$  para ser<sup>75</sup>

$$n_D = n - 1 \quad (7-59)$$

Sustituyendo (7-57) y (7-58) en (7-56), obtenemos

$$y_{21}(s) = -\frac{ks^m}{D(s)} \quad (7-60)$$

Para realizar  $H(s)$  de (7-57), necesitamos realizar  $y_{22}(s)$  de (7-58) y  $y_{21}(s)$  de (7-60), simultáneamente, para encontrar el cero de transmisión. requisitos de  $H(s)$ .

Esto significa que:

1. Si  $m=0$ , el caso en el que todos los ceros de transmisión están en  $s=\infty$ , usamos Primera forma de Cauer para realizar  $y_{22}(s)$ .
2. Si  $m=n$ , el caso en el que todos los ceros de transmisión están en  $s=0$ , usamos Segunda forma de Cauer para realizar  $y_{22}(s)$ .
3. Si  $0 < m < n$ , nos damos cuenta de  $m$  ceros de transmisión en  $s=0$  por la segunda forma de Cauer y  $(n-m)$  ceros de transmisión en  $s=\infty$  por la primera forma de Cauer.

**Ejemplo 7-7** Realice la función de transferencia de relación de voltaje

$$H(s) = \frac{k}{(s+2)(s+4)} \quad (7-61)$$

**Solución:** elijamos  $y_{22}(s)$  para que sea

$$y_{22}(s) = \frac{(s+2)(s+4)}{(s+3)} \quad (7-62)$$

Claramente,  $y_{22}(s)$  satisface todas las propiedades de una función DP de admitancia RC y

$$y_{21}(s) = -\frac{k}{s+3} \quad (7-63)$$

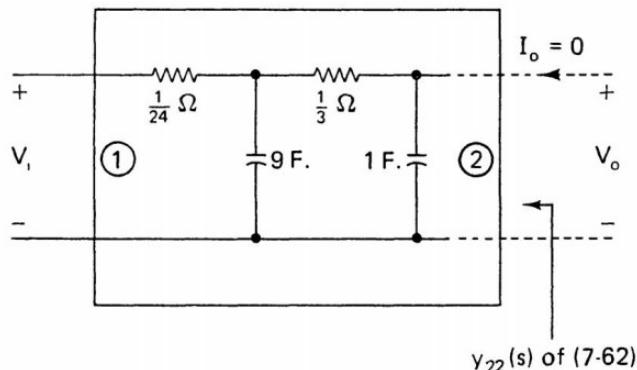
75 Observe que (7-59) y RC3 de la Sección 7-1-1 son diferentes porque las funciones de impedancia y admitancia de RC DP tienen propiedades diferentes. Por el contrario, (7-59) y LC2 son idénticos, porque las funciones de impedancia y admitancia de LC DP tienen propiedades idénticas.

Debido a que todos los ceros de transmisión de la función de transferencia están ubicados en  $s=\infty$ , usamos la primera forma de Cauer para realizar  $y_{22}(s)$ . Esto implica una expansión de fracción continua de  $y_{22}(s)$  en  $s=\infty$ :

$$\begin{aligned} y_{22}(s) &= \frac{s^2+6s+8}{s+3} \\ &= s + \frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{1}{9s + \frac{1}{1/24}}} \end{aligned} \quad (7-64)$$

La Fig. 7-16 contiene una realización de primera forma de Cauer de  $y_{22}(s)$  de (7-64). Siendo la salida el voltaje a través del puerto ② y la entrada a través del puerto ①, la Fig. 7-16 también proporciona una realización del circuito de la función de transferencia de (7-61). De hecho, un análisis simple del circuito de la figura 7-16 produce la función de transferencia de relación de voltaje

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{8}{(s+2)(s+4)}$$



**Fig. 7-16** A circuit realization of  $H(s)$  of (7-61).

**Ejemplo 7-8** Realice

$$H(s) = \frac{ks}{(s+2)(s+4)} \quad (7-65)$$

**Solución:** Sea

$$y_{22}(s) = \frac{(s+2)(s+4)}{(s+3)} \quad (7-66)$$

Por (7-60),

$$y_{21}(s) = \frac{ks}{s+3}$$

Debido a que hay un cero de transmisión en  $s=\infty$  y otro cero de transmisión en  $s=0$ , usamos una combinación de las formas de Cauer para realizar  $y_{22}(s)$ . Primero usamos la primera forma de Cauer para realizar una transmisión cero en  $s=\infty$ . Esto implica una expansión parcial continua en fracción de  $y_{22}(s)$  en  $s=\infty$ :

$$y_{22}(s) = s + \frac{3s+8}{s+3} \triangleq s + y_R(s) \quad (7-67)$$

Tenga en cuenta que tan pronto como hayamos extraído la cantidad necesaria de condensadores para proporcionar los ceros de transmisión requeridos, debemos detener el proceso. La función de admitancia

restante  $Y_R(s)$  es para ser realizada por la segunda forma de Cauer.

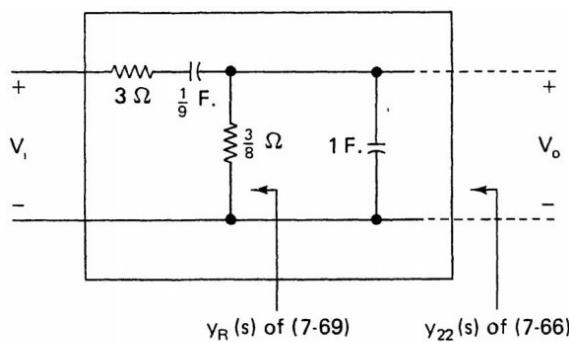
Porque

$$z_R(0) = \frac{1}{y_R(0)} \neq \infty \quad (7-68)$$

realizamos una expansión de fracción continua en  $s=0$  en  $y_R(s)$  :

$$y_R(s) = \frac{8+3s}{3+s} = \frac{8}{3} + \frac{1}{\frac{9}{s} + \frac{1}{1/3}} \quad (7-69)$$

En la Fig. 7-17 se muestra una realización de circuito de  $y_{22}(s)$  de (7-66) a través de (7-67) y (7-69).



**Fig. 7-17** A circuit realization of (7-65).

Con el etiquetado habitual de los voltajes de entrada y salida, la Fig. 7-17 proporciona una realización del circuito de  $H(s)$  de (7-65). De hecho, la función de transferencia de la relación de voltaje del circuito de la Fig. 7-17 viene dada por

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{(1/3)s}{(s+2)(s+4)}$$

**Ejemplo 7-9** Sea

$$H(s) = \frac{ks^2}{(s^2+2)(s^2+4)} \quad (7-70)$$

**Solución:** Sea

$$y_{22}(s) = \frac{(s^2+2)(s^2+4)}{s(s^2+3)} \quad (7-71)$$

Luego

$$y_{21}(s) = -\frac{ks}{s^2+3} \quad (7-72)$$

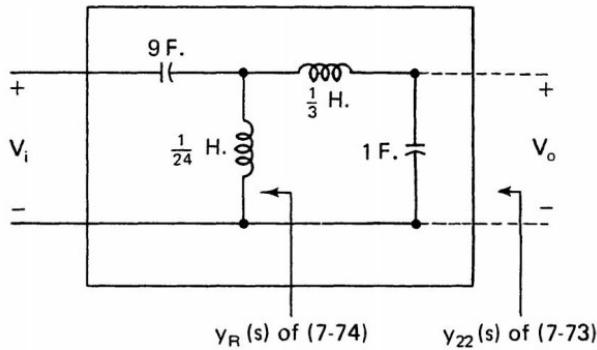
Debido a que hay dos ceros de transmisión en  $s=0$  y dos en  $s=\infty$ , necesitamos usar una combinación de las formas de Cauer. Primero usamos la primera forma de Cauer para realizar los dos ceros de transmisión en  $s=\infty$ . Esto implica una expansión parcial continua en fracción de  $y_{22}(s)$  en  $s=\infty$  :

$$y_{22}(s) = s + \frac{1}{\frac{1}{3}s + \frac{1}{3s^2 + 8}} \triangleq s + \frac{1}{\frac{1}{3}s + \frac{1}{y_R(s)}} \quad (7-73)$$

Para producir los dos ceros de transmisión restantes en  $s=0$ , nos damos cuenta de  $y_R(s)$  por la segunda forma de Cauer:

$$y_R(s) = \frac{8+3s^2}{(1/3)s} = \frac{24}{s} + \frac{1}{(1/9)s} \quad (7-74)$$

Una realización del circuito de  $H(s)$  de la (7-70) basada en la realización de  $y_{22}(s)$  por una combinación de las formas de Cauer, como es indicado por la (7-73) y la (7-74), se muestra en la Fig. 7-18.



**Fig. 7-18** A circuit realization of  $H(s)$  of (7-70).

**Ejemplo 7-10** Realice

$$H(s) = \frac{ks^4}{(s^2+2)(s^2+4)} \quad (7-75)$$

**Solución:** Sea

$$y_{22}(s) = \frac{(s^2+2)(s^2+4)}{s(s^2+3)} \quad (7-76)$$

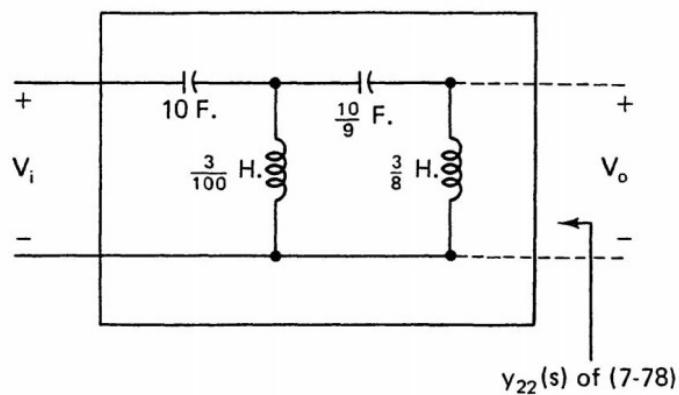
luego

$$y_{21}(s) = \frac{ks^3}{s^2+3} \quad (7-77)$$

Debido a que todos los ceros de transmisión están en  $s=0$ , nos damos cuenta de  $y_{22}(s)$  por la segunda forma de Cauer:

$$\begin{aligned} y_{22}(s) &= \frac{8 + 6s^2 + s^4}{3s + s^3} \\ &= \frac{8}{3s} + \frac{1}{\frac{9}{10s} + \frac{1}{\frac{100}{3s} + \frac{1}{\frac{1}{10s}}}} \end{aligned} \quad (7-78)$$

En la Fig. 7-19 se muestra una realización de circuito de  $H(s)$  de (7-75) basada en (7-78).



**Fig. 7-19** A circuit realization of  $H(s)$  of (7-75).

## 7-2 Redes Celosía (Lattice)

Una red de celosía tiene una estructura de interconexión como se muestra en la Fig. 7-20 (a). Si no hay restricción en los elementos contenidos por sus  $z_i$ , donde  $i=1,2,3$  y  $4$ , entonces se puede usar una estructura de celosía para realizar casi todas las funciones de transferencia. En esta sección, consideramos una clase especial de redes de celosía, como se muestra en la Fig. 7-20 (b), donde

$$z_a = z_1 = z_4 \quad y \quad z_b = z_2 = z_3 \quad (7-79)$$

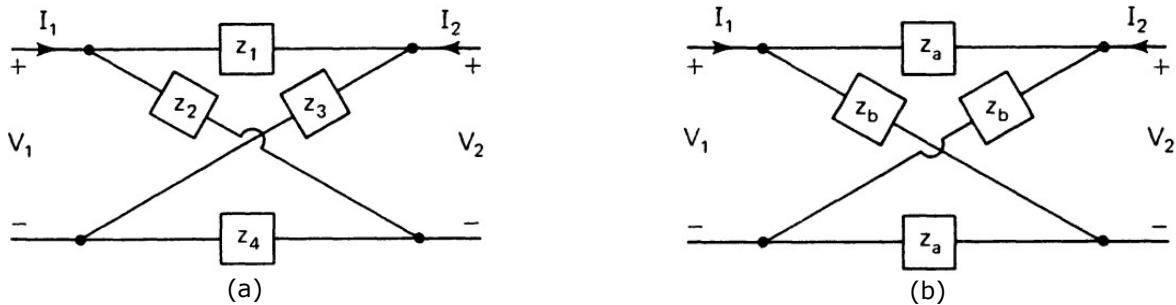


Fig. 7-20 (a) Una red celosía general (b) Una red celosía simétrica.

La estructura del circuito de la Fig. 7-20 (b) se conoce como red de celosía simétrica.

Un análisis simple de la red de celosía simétrica produce una representación de impedancia de los dispositivos de dos puertos

$$V_1 = \frac{z_a + z_b}{2} I_1 + \frac{z_b - z_a}{2} I_2 \quad (7-80)$$

y

$$V_2 = \frac{z_b - z_a}{2} I_1 + \frac{z_a + z_b}{2} I_2 \quad (7-81)$$

Si se usa una celosía simétrica para sintetizar una función de transferencia de relación de voltaje, entonces

$$H(s) = \frac{V_2}{V_1} \Big|_{I_2=0} = \frac{z_b - z_a}{z_b + z_a} \quad (7-82)$$

La ecuación (7-82) indica una forma de realizar funciones de transferencia pasa todos.

Una red de paso todos se caracteriza por una función de transferencia de la forma

$$H(s) = \frac{p(-s)}{p(s)} \quad (7-83)$$

Donde  $p(s)$  es un polinomio de Hurwitz. Escribiendo

$$p(s) = m(s) + n(s) \quad (7-84)$$

donde  $m(s)$  y  $n(s)$  son las partes pares e impares de  $p(s)$ , respectivamente, (7-83) se convierte en

$$H(s) = \frac{m(s) - n(s)}{m(s) + n(s)} = \frac{\frac{m(s)}{n(s)} - 1}{\frac{m(s)}{n(s)} + 1} \quad (7-85a)$$

$$= \frac{1 - \frac{n(s)}{m(s)}}{1 + \frac{n(s)}{m(s)}} \quad (7-85b)$$

Como  $p(s)$  es Hurwitz, el teorema 4-4 dice que tanto  $m(s)/n(s)$  como  $n(s)/m(s)$  pueden realizarse como una función de impedancia LC DP. Comparando (7-85a) {(7-85b)} con (7-82), podemos concluir que siempre es posible realizar una función de transferencia de relación de voltaje de paso total mediante una red de celosía simétrica de la figura 7-20 (b) con  $z_b = m(s)/n(s)$  { $z_a = n(s)/m(s)$ } siendo una función de impedancia de 1 puerto LC y  $z_a$  { $z_b$ } simplemente siendo una resistencia de  $1\Omega$ . Por lo tanto, el problema de realizar una función de transferencia de paso total ahora se reduce al problema de realizar una función LC DP de impedancia.

**Ejemplo 7-11** Realice

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{s^2 - s + 1}{s^2 + s + 1} \quad (7-86)$$

**Solución:**  $H(s)$  de (7-86) se pueden escribir como

$$H(s) = \frac{\frac{s^2 + 1}{s} - 1}{\frac{s^2 + 1}{s} + 1} \quad (7-87)$$

Una comparación de los términos en (7-82) y (7-87) produce

$$z_b = \frac{s^2 + 1}{s} = s + \frac{1}{s} \quad (7-88a)$$

y

$$z_a = 1 \quad (7-88b)$$

Una realización de circuito de la función de transferencia de (7-86) ahora se reduce a la realización de la función de impedancia LC DP de  $z_b(s)$  de (7-88a). El resultado final se muestra en la Fig. 7-21 (a).

Otra realización de (7-86) es posible si escribimos  $H(s)$  como

$$H(s) = \frac{1 - \frac{s}{s^2 + 1}}{1 + \frac{s}{s^2 + 1}} \quad (7-89)$$

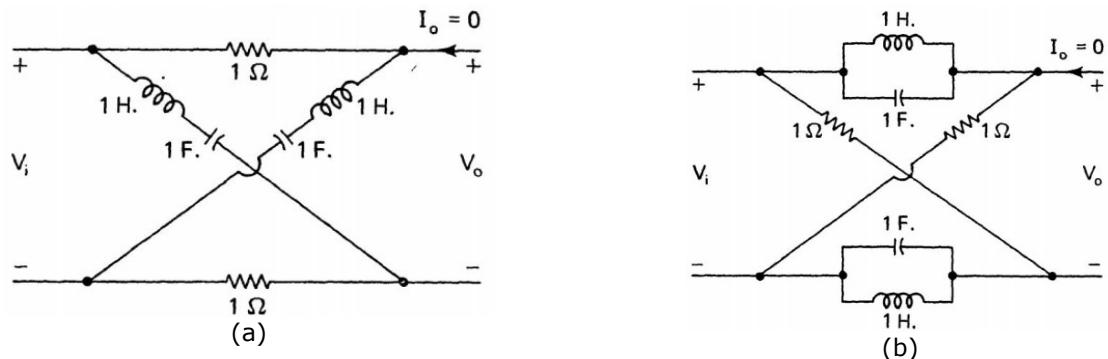


Fig. 7-21 Realizaciones de dos circuitos de la función de paso total de (7-86).

Comparando (7-89) con (7-82), obtenemos

$$z_a = \frac{s}{s^2 + 1} = \frac{1}{s + \frac{1}{s}} \quad \text{y} \quad z_b = 1 \quad (7-90)$$

En la Fig. 7-21 (b) se muestra una implementación de circuito de (7-90).

### 7-3 Métodos de Darlington

Darlington resolvió el problema general de realizar una función de transferencia por medio de una red de dos puertos sin pérdidas terminada en resistencias.<sup>76</sup> Todos los circuitos en las formas que se muestran en la Fig. 7-22 se denominan **redes de Darlington**.

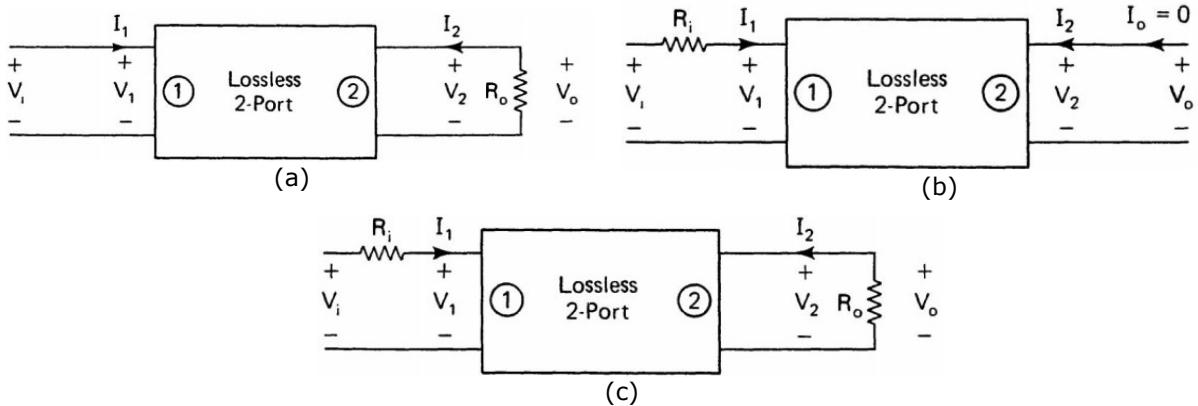


Fig. 7-22 Estructuras del circuito Darlington (a) dispositivo de dos puertos sin pérdidas terminados por una resistencia de carga, (b) dispositivo de dos puertos sin pérdidas terminados por una resistencia de fuente, (c) dispositivo de dos puertos sin pérdidas terminados por una resistencia de fuente y una resistencia de carga.

En esta sección no discutimos el método de síntesis de Darlington per se, pero sí discutimos algunos procedimientos de Darlington simplificados para una clase de funciones restringidas pero una clase frecuentemente encontrada de funciones de transferencia. Antes de proceder a presentar los casos especiales de los métodos de síntesis de Darlington, consideraremos algunas propiedades importantes de los parámetros-z y los parámetros-y de los cuadripolos de dos puertos sin pérdidas, y de las funciones de transferencia de relación de voltaje resultantes.

Sea la red sin pérdidas de dos puertos de la Fig. 7-22 se representen mediante una representación de impedancia

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (7-91a)$$

O una representación de admitancia.

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad (7-91b)$$

donde  $z_{12}=z_{21}$  e  $y_{12}=y_{21}$  (bilateral). Debido a que  $z_{11}$  o  $z_{22}$  {  $y_{11}$  o  $y_{22}$  } son funciones DP de impedancia {admitancia} de dispositivos LC de un puerto, son funciones racionales impares con polos y ceros simples y alternos en el eje imaginario del plano-s. El cuadripolo de la red de dos puertos sin pérdidas es pasiva. Por lo tanto, la matriz de residuos de la red de dos puerto en el polo  $p_j$ , dada por  $\xi^j$  como

$$\xi^j = \begin{bmatrix} \xi_{11}^j & \xi_{12}^j \\ \xi_{21}^j & \xi_{22}^j \end{bmatrix} \quad (7-92)$$

está semidefinida real y positiva, donde

$$\xi_{ik}^j = \text{residuo de } z_{ik}[y_{ik}] \text{ en el polo } p_j \quad i,k=1,2$$

76 Véanse las referencias [4] y [5].

y un polo del dispositivo de dos puertos es un polo de cualquiera de los cuatro parámetros-z {parámetros-y}. Si  $p_j$  es un polo de  $z_{12}\{y_{12}\}$  pero no de  $z_{11}$  o  $z_{22}$  { $y_{11}$  o  $y_{22}$ }, entonces  $\xi_{11}^j$  o  $\xi_{22}^j$  es cero, y  $\xi_j$  de (7-92) no es una matriz semidefinida positiva. Por tanto, concluimos que todos los polos de  $z_{12}\{y_{12}\}$  son polos de  $z_{11}$  y de  $z_{22}$  { $y_{11}$  y de  $y_{22}$ } .<sup>77</sup> Esto significa que una expansión en fracciones parciales de  $z_{12}\{y_{12}\}$  tendrá la misma forma que la de  $z_{11}$  o  $z_{22}$  { $y_{11}$  o  $y_{22}$ } :

$$z_{12}\{y_{12}\} = \frac{\xi_{12}^{(0)}}{s} + \xi_{12}^{(\infty)} s + \sum_{i=1}^n \frac{\xi_{12}^{(i)} s}{s^2 + \omega_i^2} \quad (7-93)$$

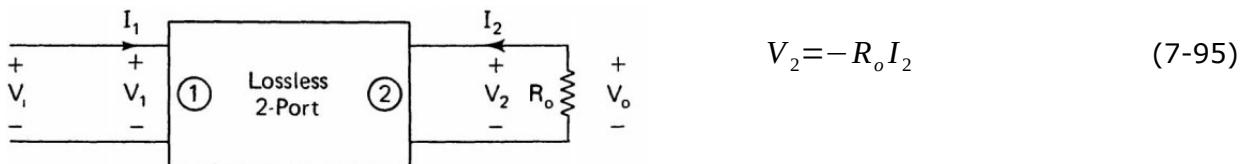
Por lo tanto,  $z_{12}\{y_{12}\}$ , al igual que  $z_{11}$  o  $z_{22}$  { $y_{11}$  o  $y_{22}$ }, es una función racional impar; es decir,

$$z_{12}(s) = \frac{m(s)}{n(s)} \quad \text{o} \quad \frac{n(s)}{m(s)} \quad (7-94a)$$

$$\left\{ y_{12}(s) = \frac{m(s)}{n(s)} \quad \text{o} \quad \frac{n(s)}{m(s)} \right\} \quad (7-94b)$$

donde  $m(s)$  y  $n(s)$  son, respectivamente, un polinomio par e impar.

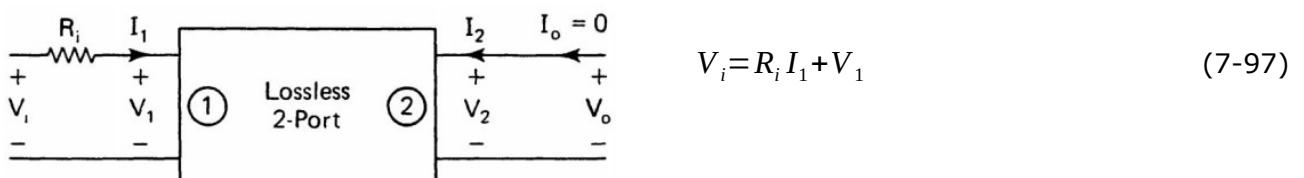
A continuación, consideraremos las funciones de transferencia de la Fig. 7-22. Para la Fig. 7-22 (a), la representación de admitancia de la red de dos puertos sin pérdidas y la ecuación



Dan

$$H(s) \triangleq \frac{V_o}{V_i} = \frac{-y_{12}}{\frac{1}{R_o} + y_{22}} \quad (7-96)$$

Para la Fig. 7-22 (b), con  $I_2 = 0$ , la representación de impedancia del dispositivo sin pérdidas de dos puertos y la ecuación



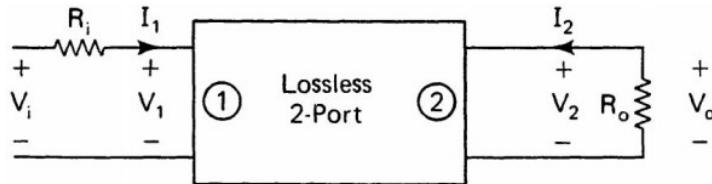
nos lleva a

$$H(s) \triangleq \frac{V_o}{V_i} = \frac{z_{12}}{R_i + z_{11}} \quad (7-98)$$

<sup>77</sup> Tenga en cuenta que no todos los polos de  $z_{11}$  o  $z_{22}$  { $y_{11}$  o  $y_{22}$ } son polos de  $z_{12}\{y_{12}\}$ .

Finalmente, para la Fig. 7-22 (c), tenemos

$$H(s) \triangleq \frac{V_o}{V_i} = \frac{-y_{12}}{\frac{1}{R_o} + y_{22}} \cdot \frac{1}{R_i \left[ y_{11} - \frac{y_{12}^2}{\frac{1}{R_o} + y_{22}} \right] + 1} \quad (7-99)$$



Dada una función de transferencia  $H(s)$ , supongamos que podemos encontrar un polinomio apropiado  $P(s)$  tal que

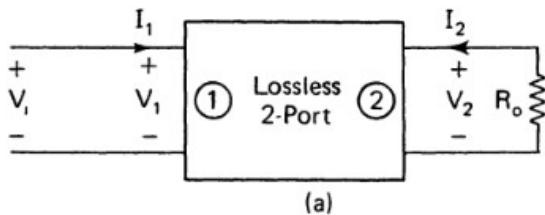
$$H(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{A(s)/P(s)}{B(s)/P(s)} = \frac{C(s)}{k+D(s)} \quad (7-100)$$

donde  $k$  es una constante y  $C(s)$  y  $D(s)$  son funciones racionales impares. Si se usa la Fig. 7-22 (a), podemos identificar  $y_{12}$  e  $y_{22}$  fácilmente comparando (7-96) y (7-100). En este caso, el problema se reduce a la realización de  $y_{12}$  y  $y_{22}$  simultáneamente. Los métodos para la realización simultánea de  $y_{12}$  y  $y_{22}$  se han discutido en la Sección 7-1-3. Si se usa la Fig. 7-22 (b), podemos identificar  $z_{12}$  y  $z_{11}$  comparando (7-98) y (7-100). Nuevamente, la realización de (7-100) se reduce a la realización simultánea de  $z_{11}(s)$  y  $z_{12}(s)$ , que se ha presentado en la Sección 7-1-2. Este proceso de identificación funciona muy bien para las Figs. 7-22 (a) y (b). Sin embargo, para la Fig. 7-22 (c), la situación es bastante diferente, como se puede ver al comparar (7-99) y (7-100). Por lo tanto, discutiremos por separado los casos de terminación única de las Figs. 7-22 (a) y (b) y el caso de doble terminación de la Fig. 7-22 (c).

### 7-3-1. Redes sin perdidas con simple terminación

Por conveniencia, dejamos que  $R_o$  de la Fig. 7-22 (a) y  $R_i$  de la Fig. 7-22 (b) sean  $1\Omega$ . Si necesitamos un valor diferente para  $R_o$  o  $R_i$  podemos realizar una escala de impedancia (discutida en Capítulo 8) en la red resultante.<sup>78</sup> Bajo esta conveniente simplificación, (7-96) y (7-98) son similares entre sí, con  $z_{12}$  y  $z_{11}$  correspondientes a  $-y_{12}$  e  $y_{22}$ . Primero discutimos el caso de la Fig. 7-22 (a) y (7-96) en detalle y luego se delinean el procedimiento de síntesis para el caso de la Fig. 7-22 (b) y (7-98).

Con  $R_o=1\Omega$ , (7-96) se convierte en



$$H(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{-y_{12}}{1 + y_{22}} \quad (7-101)$$

Como  $y_{12}$  y  $y_{22}$  son funciones racionales impares que tienen el mismo denominador, escribamos

$$y_{12}(s) = \frac{n_{12}(s)}{d_{22}(s)} \quad y \quad y_{22}(s) = \frac{n_{22}(s)}{d_{22}(s)} \quad (7-102)$$

Donde  $n_{12}(s)$  y  $n_{22}(s)$  son polinomios impares si  $d_{22}(s)$  es un polinomio par, y donde  $n_{12}(s)$  y  $n_{22}(s)$  son polinomios pares si  $d_{22}(s)$  es un polinomio impar. Sustituyendo (7-102) en (7-101), obtenemos

$$H(s) \triangleq \frac{A(s)}{B(s)} = -\frac{n_{12}(s)}{n_{22}(s) + d_{22}(s)} \quad (7-103)$$

De (7-103), observamos que  $A(s)$  es el numerador de  $y_{12}$  y, por tanto, es un polinomio par o impar. Además,  $B(s)$  es la suma de los polinomios del numerador y del denominador de una función DP de admitancia LC  $y_{22}(s)$ . Según el Teorema 4-4,  $B(s)$  es Hurwitz. Esto significa que los circuitos de las Figs. 7-22 (a) y (b) solo pueden realizar una función de transferencia que tiene un polinomio de numerador par o impar y un polinomio de denominador de Hurwitz, como

$$H(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{M_1(s)}{M_2(s) + N_2(s)} \quad (7-104)$$

o

$$H(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{N_1(s)}{M_2(s) + N_2(s)} \quad (7-105)$$

donde  $M_1(s)$  y  $M_2(s)$  son polinomios pares,  $N_1(s)$  y  $N_2(s)$  son polinomios impares, y  $B(s) = M_2(s) + N_2(s)$  es un polinomio de Hurwitz.

Considere primero el caso de (7-104). Podemos escribir  $H(s)$  como

$$H(s) = \frac{M_1(s)/N_2(s)}{[M_2(s)/N_2(s)] + 1} \quad (7-106)$$

Una identificación de (7-106) y (7-101) da

<sup>78</sup> Tenga en cuenta que las funciones de transferencia de la relación de voltaje de la red con escala de impedancia y la red original son idénticas.

$$y_{12}(s) = -\frac{M_1(s)}{N_2(s)} \quad (7-107)$$

y

$$y_{22}(s) = \frac{M_2(s)}{N_2(s)} \quad (7-108)$$

De manera similar, si  $H(s)$  viene dado por (7-105), entonces  $H(s)$  se puede escribir como:

$$H(s) = \frac{\frac{N_1(s)}{M_2(s)}}{1 + \frac{N_2(s)}{M_2(s)}} \quad (7-109)$$

Comparando (7-109) y (7-101), obtenemos

$$y_{12}(s) = -\frac{N_1(s)}{M_2(s)} \quad (7-110)$$

y

$$y_{22}(s) = \frac{N_2(s)}{M_2(s)} \quad (7-111)$$

Por lo tanto, el problema de realizar una función de transferencia de relación de voltaje se reduce a una realización simultánea de  $y_{22}(s)$  y  $y_{12}(s)$ .<sup>79</sup> Si  $A(s)$  está dado por

$$A(s) = ks^m \quad (7-112)$$

Luego el problema de realización de  $y_{12}(s)$  y  $y_{22}(s)$  simultáneamente es resuelta en las Secciones 7-1-2 y 7-1-3.

---

<sup>79</sup> Por (7-56), el problema de la realización simultánea de  $y_{12}(s)$  y  $y_{22}(s)$  es equivalente al problema de realizar la función de transferencia de relación de voltaje  $F(s)$  de un puerto de dos puertos sin pérdidas (solo), donde  $F(s)$  viene dado por

$$F(s) = -\frac{y_{12}(s)}{y_{22}(s)} = \frac{M_1(s)}{M_2(s)}$$

para el caso de (7-104), y

$$F(s) = -\frac{y_{12}(s)}{y_{22}(s)} = \frac{N_1(s)}{N_2(s)}$$

para el caso de (7-105). Tenga en cuenta que los requisitos de cero de transmisión de  $F(s)$  y  $H(s)$  son idénticos. Esto también tiene sentido físicamente, porque las realizaciones del circuito de  $H(s)$  y  $F(s)$  difieren solo en una resistencia.

**Ejemplo 7-12** Realice

$$H(s) \triangleq \frac{V_o}{V_i} = \frac{1}{s^2 + s + 1} \quad (7-113)$$

por un dispositivo sin pérdidas de dos puertos terminado por una resistencia de carga de  $1\Omega$ .

**Solución:** Debido a que el numerador de  $H(s)$  de (7-113) es un polinomio par,  $H(s)$  tiene la forma de (7-104). Por (7-106), escribimos  $H(s)$  como

$$H(s) = \frac{1}{s + (s^2 + 1)} = \frac{1/s}{1 + [(s^2 + 1)/s]} \quad (7-114)$$

Identificando los términos correspondientes entre (7-101) y (7-114), obtenemos

$$y_{12} = -\frac{1}{s} \quad y \quad y_{22} = \frac{s^2 + 1}{s} \quad (7-115)$$

Todos los ceros de transmisión de  $H(s)$  están en  $s=\infty$ ; por lo tanto, usamos la primera forma de Cauer para realizar  $y_{22}$ . Esto implica una expansión de fracción continua de  $y_{22}(s)$  en  $s=\infty$ :

$$y_{22}(s) = \frac{s^2 + 1}{s} = s + \frac{1}{s} \quad (7-116)$$

En la Fig. 7-23 se muestra una realización de circuito de (7-113) mediante  $y_{22}(s)$  de (7-116). Para ver que la Fig. 7-23 da la función de transferencia de relación de voltaje de (7-113), usamos la ecuación del divisor de voltaje para obtener

$$V_o = \frac{1/(s+1)}{[1/(s+1)]+s} V_i$$

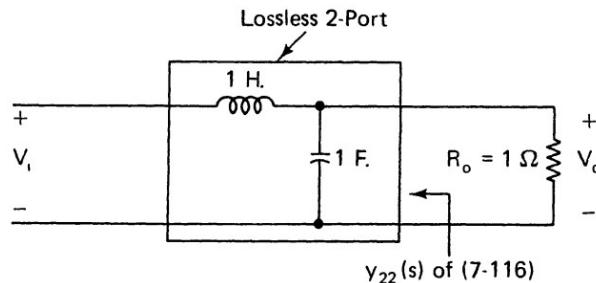


Fig. 7-23 Un circuito realización de  $H(s)$  de (7-113)

Por lo tanto,

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

que es la función deseada de (7-113). Observe que cuando todos los ceros de transmisión están en  $s=\infty$ , la primera forma de Cauer debe usarse para realizar  $y_{22}(s)$ .

**Ejemplo 7-13** Realizar

$$H(s) \triangleq \frac{V_o}{V_i} = \frac{s^2}{s^2 + 3s + 1} \quad (7-117)$$

por un dispositivo sin pérdidas de dos puertos terminado por una resistencia de carga de  $1\Omega$ .

**Solución:** como en el caso del Ejemplo 7-12, este problema se reduce a la realización simultánea de

$$y_{12}(s) = -\frac{s^2}{3s} = -\frac{s}{3} \quad y \quad y_{22}(s) = \frac{1+s^2}{3s} \quad (7-118)$$

Todos los ceros de transmisión de (7-117) están en  $s=0$ ; por lo tanto, la segunda forma de Cauer se usa para realizar  $y_{22}$  de (7-118). La Fig. 7-24 da una realización de circuito de (7-117), donde  $y_{22}(s)$  se expande en  $s=0$ :

$$Y_{22}(s) = \frac{1}{3s} + \frac{1}{3/s} \quad (7-119)$$

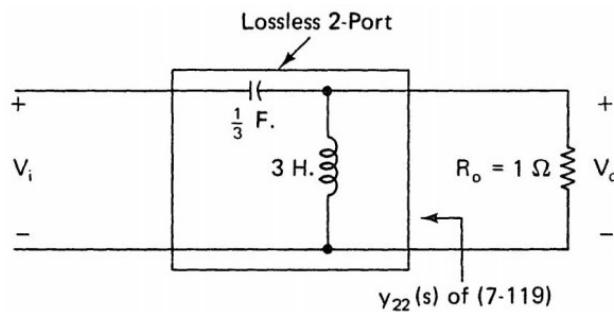


Fig. 7-24 Una realización de circuitos de  $H(s)$  de (7-117)

Para ver que el circuito de la Fig. 7-24 realiza la función de transferencia deseada, la ecuación del divisor de voltaje da

$$V_o = \frac{\frac{1}{3s}}{\frac{1}{3s} + \frac{1}{3} + \frac{1}{s}} V_i = \frac{3s^2}{3s^2 + 3(3s+1)} V_i$$

Por lo tanto

$$H(s) = \frac{s^2}{s^2 + 3s + 1}$$

**Ejemplo 7-14** Realice

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{s}{s^3 + s^2 + 3s + 1} \quad (7-120)$$

por un dispositivo de dos puertos sin pérdidas terminado por una resistencia de carga de  $1\Omega$ .

**Solución:** En este caso, el numerador de  $H(s)$  es un polinomio impar. Por (7-109) a (7-111),  $H(s)$  se puede escribir como

$$H(s) = \frac{s}{(s^2 + 1) + (s^3 + 3s)} = \frac{\frac{s}{s^2 + 1}}{1 + \frac{s^3 + 3s}{s^2 + 1}} \quad (7-121)$$

Identificar los términos correspondientes entre (7-121) y (7-101) conduce a

$$y_{12} = \frac{s}{s^2 + 1} \quad y \quad y_{22} = \frac{s^3 + 3s}{s^2 + 1} \quad (7-122)$$

Nuestro problema ahora se reduce a una realización simultánea de  $y_{12}$  e  $y_{22}$ . Debido a que hay un cero de transmisión en  $s=0$  y dos ceros de transmisión en  $s=\infty$ , tenemos que usar una combinación de la primera y la segunda forma de Cauer.

En general, es preferible realizar primero el cero de transmisión único antes de abordar los ceros de transmisión múltiple. Por lo tanto, comprendamos primero el cero de transmisión único en  $s=0$ . Esto requiere que realicemos una expansión de fracción continua parcial en  $s=0$  en  $y_{22}(s)$  hasta que se extraiga un capacitor:

$$y_{22}(s) = \frac{s^3 + 3s}{s^2 + 1} = \frac{1}{(1/3s) + z_R(s)} \quad (7-123)$$

donde la función de impedancia restante  $z_R(s)$  debe realizarse mediante la primera forma de Cauer para producir los ceros de transmisión en  $s=\infty$ :

La realización de un circuito de la función de transferencia de (7-120), mediante la implementación de la realización de  $y_{22}(s)$  como se indica en (7-123) y (7-124), está dada por la Fig. 7-25.

$$z_R(s) \triangleq \frac{(2/3)s^2}{s^3 + 3s} = \frac{(2/3)s}{s^2 + 3} = \frac{1}{\frac{3}{2}s + \frac{1}{\frac{2}{9}s}} \quad (7-124)$$

La realización de un circuito de la función de transferencia de (7-120), mediante la implementación de la realización de  $y_{22}(s)$  como se indica en (7-123) y (7-124), está dada por la Fig. 7-25.

Para ver que el circuito de la Fig. 7-25 realiza la función de transferencia de (7-120), dejamos  $V_i=1$  y realizamos un análisis nodal en el circuito. Esto da

$$\begin{bmatrix} \frac{9}{2s} + \frac{3}{2}s + 3s & -3s \\ -3s & 1+3s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ V_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{2s} \\ 0 \end{bmatrix}$$

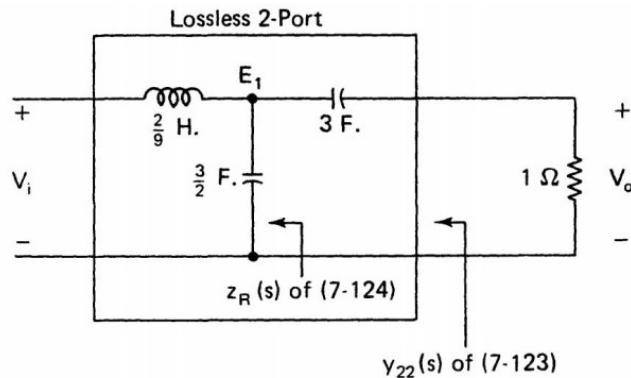


Fig. 7-25 A circuit realization of (7-120).

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
 V_o &= \frac{\frac{27}{2}}{\left(\frac{9}{2}s + \frac{9}{2s}\right)(1+3s) - 9s^2} \\
 &= \frac{\frac{27}{2}}{\frac{9}{2}s^2 + \frac{9}{2}s + \frac{27}{2} + \frac{9}{2s}} = \frac{3s}{s^3 + s^2 + 3s + 1} \triangleq \hat{H}(s)
 \end{aligned} \tag{7-125}$$

A causa de que  $V_i=1$ , la función de transferencia  $\hat{H}(s)$  del circuito viene dada por (7-125). Una comparación de (7-125) y (7-120) muestra que  $\hat{H}(s)$  es un múltiplo constante de  $H(s)$  de (7-120); por lo tanto, el circuito de la Fig. 7-25 realiza  $H(s)$  de (7-120).

Consideremos ahora brevemente el caso de la Fig. 7-22 (b) y (7-98), que se reproduce aquí por conveniencia con  $R_i=1\Omega$ :

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{z_{12}(s)}{1+z_{11}(s)} \tag{7-126}$$

Suponga que la función de transferencia está dada por

$$H(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{M_1(s)}{M_2(s) + N_2(s)} \tag{7-127}$$

o

$$H(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{N_1(s)}{M_2(s) + N_2(s)} \tag{7-128}$$

donde  $M_1(s)$  y  $M_2(s)$  son polinomios pares,  $N_1(s)$  y  $N_2(s)$  son polinomios impares, y  $B(s) = M_2(s) + N_2(s)$  es un polinomio de Hurwitz. Si la función de transferencia de relación de voltaje dada tiene la forma de (7-127), entonces el problema de realizar (7-127) se reduce al problema de realizar

$$Z_{11}(s) = \frac{M_2(s)}{N_2(s)} \quad y \quad Z_{12}(s) = \frac{M_1(s)}{N_2(s)} \tag{7-129}$$

simultáneamente. De manera similar, la realización de  $H(s)$  de (7-128) se reduce a la realización simultánea de

$$Z_{11}(s) = \frac{N_2(s)}{M_2(s)} \quad y \quad Z_{12}(s) = \frac{N_1(s)}{M_2(s)} \quad (7-130)$$

Los procedimientos de realización son los mismos que los discutidos en la Sección 7-1-2.

**Ejemplo 7-15** Realice

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{1}{s^2 + s + 1} \quad (7-131)$$

mediante un circuito como el de la Fig. 7-22 (b).

**Solución:** debido a que el numerador es un polinomio par, se aplica la (7-127) y la (7-129). Por tanto, escribimos  $H(s)$  como

$$H(s) = \frac{1}{s + (s^2 + 1)} = \frac{1/s}{1 + \frac{s^2 + 1}{s}} \quad (7-132)$$

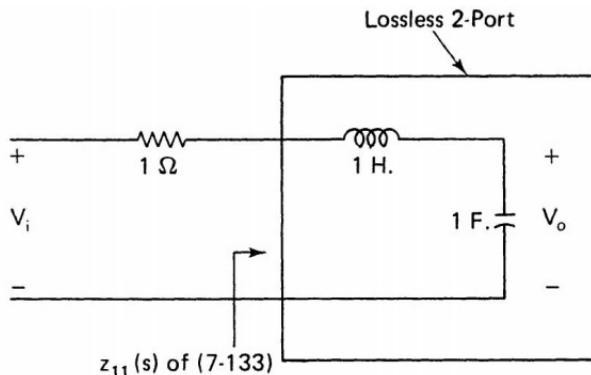
Al identificar términos entre (7-126) y (7-132), obtenemos

$$z_{11}(s) = \frac{s^2 + 1}{s} \quad y \quad z_{21}(s) = \frac{1}{s} \quad (7-133)$$

Debido a que todos los ceros de transmisión están en  $s = \infty$ , usamos la primera forma de Cauer para realizar  $z_{11}(s)$ . Esto significa que  $z_{11}(s)$  se expande en  $s = \infty$ :

$$z_{11}(s) = s + \frac{1}{s} \quad (7-134)$$

En consecuencia, en la Fig. 7-26 se muestra una realización de circuito de la función de transferencia  $H(s)$  de (7-131).



**Fig. 7-26** A circuit realization of  $H(s)$  of (7-131).

**Ejemplo 7-16** Realice

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{s^2}{s^3 + s^2 + 3s + 1} \quad (7-135)$$

por un dispositivo de dos puertos sin pérdidas terminado por una resistencia de fuente de  $1\Omega$ .

**Solución:** debido a que el numerador de  $H(s)$  es un polinomio par, escribimos  $H(s)$  como

$$H(s) = \frac{s^2}{(s^3 + 3s) + (s^2 + 1)} = \frac{\frac{s^2}{s^3 + 3s}}{1 + \frac{s^2 + 1}{s^3 + 3s}} \quad (7-136)$$

Al identificar términos entre (7-126) y (7-136), obtenemos

$$z_{11}(s) = \frac{s^2 + 1}{s^3 + 3s} \quad (7-137)$$

Observe que hay dos ceros de transmisión en  $s=0$  y un solo cero de transmisión en  $s=\infty$ . En general, es preferible realizar primero el cero de transmisión simple. Por lo tanto, usamos la primera forma de Cauer para extraer un elemento de  $z_{11}(s)$  para producir el cero de transmisión único en  $s=\infty$  primero como

$$z_{11}(s) = \frac{s^2 + 1}{s^3 + 3s} = \frac{1}{s + \frac{1}{z_R(s)}} \quad (7-138)$$

donde el resto de la función de impedancia

$$Z_R(s) = \frac{s^2 + 1}{2s}$$

es expandido por la segunda forma de Cauer como

$$Z_R(s) = \frac{s^2 + 1}{2s} = \frac{1}{2s} + \frac{1}{2/s} \quad (7-139)$$

La realización del circuito resultante de  $H(s)$  de (7-135) se muestra en la Fig. 7-27.

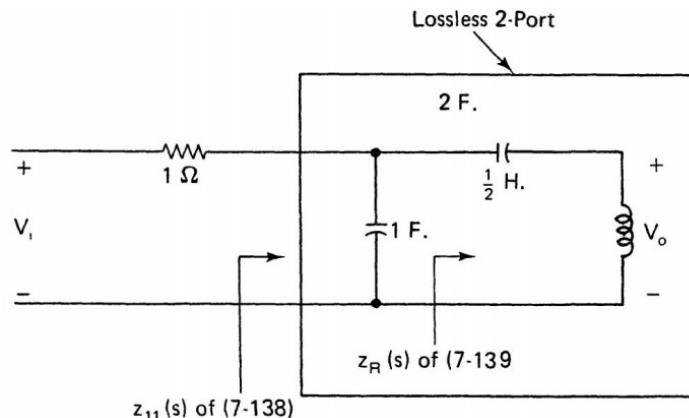


Fig. 7-27 A circuit realization of  $H(s)$  of (7-135).

**Ejemplo 7-17** Realice

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{s^3}{s^3 + s^2 + 3s + 1} \quad (7-140)$$

mediante un circuito como el de la Fig. 7-22 (b).

**Solución:** debido a que  $H(s)$  tiene la forma de (7-128), se aplica (7-130). Por tanto, escribimos  $H(s)$  como

$$H(s) = \frac{s^3}{(s^2 + 1) + (s^3 + 3s)} = \frac{\frac{s^3}{s^2 + 1}}{1 + \frac{s^3 + 3s}{s^2 + 1}} \quad (7-141)$$

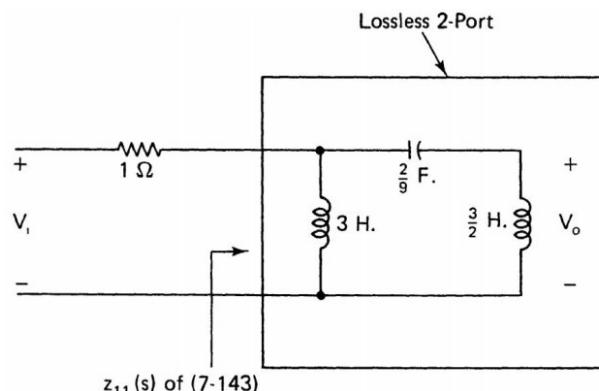
Al identificar los términos entre (7-126) y (7-141), obtenemos

$$z_{11}(s) = \frac{s^3 + 3s}{s^2 + 1}$$

Debido a que todos los ceros de transmisión están en  $s=0$ , usamos la segunda forma de Cauer para realizar  $z_{11}(s)$ . Al expandir  $z_{11}(s)$  en  $s=0$ , obtenemos

$$z_{11}(s) = \frac{1}{\frac{1}{3s} + \frac{1}{\frac{9}{2s} + \frac{1}{\frac{2}{3s}}}} \quad (7-142)$$

La realización del circuito resultante de (7-140) se muestra en la Fig. 7-28.



**Fig. 7-28** A circuit realization of  $H(s)$  of (7-140).

### 7-3-2. Redes de dispositivos de dos puertos sin perdida en ambos extremos.

En esta sección, analizamos el caso de la Fig. 7-22(c), que se vuelve a dibujar aquí como Fig. 7-29 como referencia. Debido a que (7-99) y (7-100) no dan lugar a identificaciones simples de los parámetros-z o los parámetros-y de los dispositivos de dos puertos sin pérdidas, nos embarcamos en un curso completamente diferente.

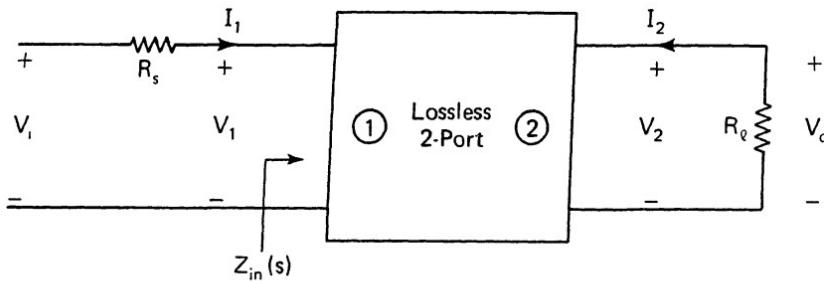


Fig. 7-29 A Darlington circuit structure.

Para reducir el problema de realizar una función de transferencia al de realizar una función DP de impedancia  $Z_{in}(s)$  de la Fig. 7-29, necesitamos introducir dos coeficientes: el coeficiente de transmisión y el coeficiente de reflexión. El coeficiente de transmisión se define como la relación entre la potencia de salida  $P_o$  que se disipa en  $R_l$  y la potencia máxima disponible  $P_a$  de la fuente con resistencia de fuente  $R_s$ . Claramente,

$$P_o(j\omega) = \frac{|V_o(j\omega)|^2}{R_l} \quad (7-143)$$

y

$$P_a(j\omega) = \frac{|V_i(j\omega)|^2}{4R_s} \quad (7-144)$$

Por lo tanto, los coeficientes de transmisión está dado por.

$$|\tau(j\omega)|^2 = \frac{P_o(j\omega)}{P_a(j\omega)} = \frac{4R_s}{R_l} \frac{|V_o(j\omega)|^2}{|V_i(j\omega)|^2} = \frac{4R_s}{R_l} |H(j\omega)|^2 \quad (7-145)$$

Donde  $H(s)$  es la función de transferencia de relación de voltaje

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} \quad (7-146)$$

Debido a que la potencia enviada para  $R_l$  desde la fuente debe ser menor o igual a la potencia máxima disponible de la fuente, tenemos

$$|\tau(j\omega)|^2 \leq 1 \quad (7-147)$$

El coeficiente de reflexión se define simplemente como el complemento del coeficiente de transmisión como

$$|\rho(j\omega)|^2 + |\tau(j\omega)|^2 = 1 \quad (7-148)$$

En el estado de senoidal estacionario, la potencia  $P_i$  alimenta al puerto ① del dispositivo de dos puertos sin pérdidas y es igual a la potencia  $P_o$  que alimenta la carga, donde

$$P_i = \text{Real}[Z_{\text{in}}(j\omega)]|I_1(j\omega)|^2 \quad (7-149)$$

Al igualar (7-143) y (7-149), obtenemos

$$\text{Real}[Z_{\text{in}}(j\omega)]|I_1(j\omega)|^2 = \frac{|V_o(j\omega)|^2}{R_l}$$

o

$$R_l \text{Real}[Z_{\text{in}}(j\omega)] = \frac{|V_o(j\omega)|^2}{|I_1(j\omega)|^2} \quad (7-150)$$

De la Fig. 7-29, tenemos

$$\frac{V_i}{I_1} = R_s + Z_{\text{in}}(s) \quad (7-151)$$

Combinando (7-150) y (7-151) juntos, obtenemos

$$\begin{aligned} |H(j\omega)|^2 &= \frac{|V_o(j\omega)|^2}{|V_i(j\omega)|^2} = \frac{|V_o(j\omega)|^2}{|I_1(j\omega)|^2} \frac{|I_1(j\omega)|^2}{|V_i(j\omega)|^2} \\ &= \frac{R_l \text{Real}[Z_{\text{in}}(j\omega)]}{|R_s + Z_{\text{in}}(j\omega)|^2} \end{aligned} \quad (7-152)$$

Sustituyendo (7-152) en (7-145) y la expresión resultante en (7-148), obtenemos

$$\begin{aligned} \rho(j\omega)\rho(-j\omega) &= 1 - \tau(j\omega)\tau(-j\omega) \\ &= 1 - \frac{4R_s}{R_l}|H(j\omega)|^2 \end{aligned} \quad (7-153)$$

$$= 1 - \frac{4R_s}{R_l} \frac{R_l \text{Real}[Z_{\text{in}}(j\omega)]}{|R_s + Z_{\text{in}}(j\omega)|^2} \quad (7-153)$$

Escribiendo  $Z_{\text{in}}(j\omega)$  como

$$Z_{\text{in}}(j\omega) = R(\omega) + jX(\omega) \quad (7-155)$$

la (7-154) quedaría

$$\begin{aligned} \rho(j\omega)\rho(-j\omega) &= 1 - \frac{4R_s R(\omega)}{|R_s + R(\omega) + jX(\omega)|^2} \\ &= 1 - \frac{4R_s R(\omega)}{[R_s + R(\omega)]^2 + [X(\omega)]^2} \\ &= \frac{[R_s - R(\omega)]^2 + [X(\omega)]^2}{[R_s + R(\omega)]^2 + [X(\omega)]^2} \\ &= \frac{|Z_{\text{in}}(j\omega) - R_s|^2}{|Z_{\text{in}}(j\omega) + R_s|^2} \end{aligned} \quad (7-156)$$

La ecuación (7-156) implica que

$$\rho(s) = \pm \frac{Z_{\text{in}}(s) - R_s}{Z_{\text{in}}(s) + R_s} \quad (7-157)$$

o que

$$Z_{in}(s) = R_s \frac{1 \pm \rho(s)}{1 \mp \rho(s)} \quad (7-158)$$

Mediante el coeficiente de transmisión de (7-145) y el coeficiente de reflexión de (7-153), hemos reducido el problema de realizar una función de transferencia de relación de voltaje de (7-146) al de realizar una función DP de impedancia  $Z_{in}(j\omega)$  de (7-158), teniendo en cuenta las ubicaciones de los ceros de transmisión de  $H(s)$ . Observemos aquí que  $Z_{in}(j\omega)$  contiene sólo un resistor  $R_l$  y que los elementos restantes son condensadores e inductores, como se muestra en la Fig. 7-29.

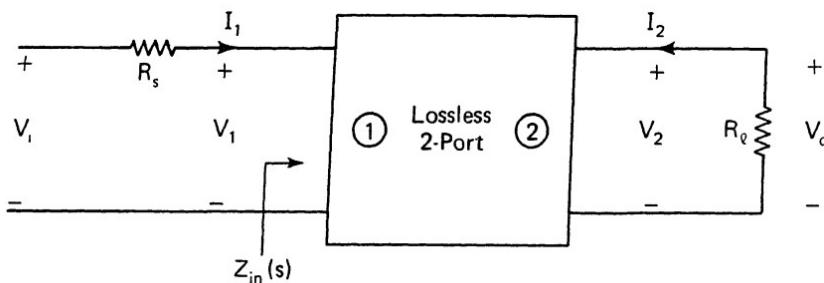


Fig. 7-29 A Darlington circuit structure.

Basado en el desarrollo anterior, consideremos ahora un procedimiento paso a paso para realizar funciones de transferencia de la forma<sup>80</sup>

$$H(s) = \frac{k s^m}{B(s)} \quad (7-159)$$

por la estructura del circuito de Darlington de la Fig. 7-29, donde  $B(s)$  es un polinomio de Hurwitz de enésimo grado o de Hurwitz modificado y  $0 \leq m \leq n$ . Para simplificar el álgebra, dejamos  $R_s = 1\Omega$

**PASO 1.** Encuentre  $\rho(s)$ . De (7-153), tenemos

$$\rho(s)\rho(-s) = 1 - \frac{4}{R_l} H(s)H(-s) \quad (7-160)$$

Encontrar  $\rho(s)$  es el paso más crucial en este procedimiento de realización. Para empezar, es posible que (7-160) no tenga una solución. Sea<sup>81</sup>

$$F(s) \triangleq \rho(s)\rho(-s) \quad (7-161)$$

y

$$G(s) \triangleq 1 - \frac{4}{R_l} H(s)H(-s) \quad (7-162)$$

representan, respectivamente, los lados izquierdo y derecho de (7-160). Claramente, se requiere

80 La razón por la que restringimos el numerador de  $H(s)$  para que sea  $ks^m$  es porque no tenemos suficientes herramientas para considerar el caso general cuando  $A(s)$  es un polinomio de grado numérico con  $0 \leq m \leq n$ . En el Capítulo 8, vemos que las funciones de transferencia de muchas familias importantes de filtros tienen la forma (7-159).

81 La razón por la que restringimos el numerador de  $H(s)$  para que sea  $ks^m$  es porque no tenemos suficientes herramientas para considerar el caso general cuando  $A(s)$  es un polinomio de  $m$ -ésimo grado con  $0 \leq m \leq n$ . En el Capítulo 8, vemos que las funciones de transferencia de muchas familias importantes de filtros tienen la forma de (7-159).

que tanto los polos como los ceros de  $F(s)$  ocurran con simetría cuadrantal. Basado en (7-162), los polos de  $G(s)$  también ocurrirán con simetría cuadrantal pero no necesariamente con los ceros. Esto se debe a que el numerador de  $G(s)$  es solo un polinomio par, no necesariamente un polinomio con imagen especular, uno que se puede escribir como  $\rho(s)\rho(-s)$ . Si los ceros de  $G(s)$  no ocurren con simetría cuadrantal, entonces no podemos encontrar  $F(s)$  de (7-160), y el procedimiento que estamos describiendo no producirá una realización de circuito para  $H(s)$ .

Supongamos ahora que los ceros de  $G(s)$  ocurren con simetría cuadrantal.<sup>82</sup> En este caso, hay más de un  $\rho(s)$  que satisfacen (7-160). Elijamos la  $\rho(s)$  de fase mínima para que sea la solución de (7-160).<sup>83</sup> Para hacerlo de otra manera, es posible que necesitemos inductancias y/o capacitancias negativas para realizar la función DP de impedancia resultante  $Z_{in}(s)$ .

**PASO 2.** Encuentra  $Z_{in}(s)$ . Una vez que se determina  $\rho(s)$ , (7-158) da

$$Z_{in}(s)=\frac{1+\rho(s)}{1-\rho(s)} \quad \text{o} \quad Z_{in}(s)=\frac{1-\rho(s)}{1+\rho(s)} \quad (7-163)$$

De (7-163), hay dos opciones para  $Z_{in}(s)$ . Debido a que una opción es la inversa de la otra, podemos esperar que una  $Z_{in}(s)$  dé  $R_l$  y que la otra opción de  $Z_{in}(s)$  dé  $1/R_l$  como resistencia de carga de terminación. Si hay un valor deseado para  $R_l$  (por ejemplo,  $R_l$  es igual a la impedancia de entrada de la siguiente etapa en el diseño general del circuito), entonces solo una opción de  $Z_{in}(s)$  dará la solución deseada. Si  $R_l=1\Omega$  (o si el valor de  $R_l$  no es importante), entonces cualquier elección de  $Z_{in}(s)$  de (7-163) es igualmente válida. Para determinar el valor de la resistencia de terminación para una elección dada de  $Z_{in}(s)$ , tenemos

$$\hat{R}_l = Z_{in}(0) \quad \text{cuando } m=0 \quad \text{en (7-159)} \quad (7-164)$$

$$\hat{R}_l = Z_{in}(\infty) \quad \text{cuando } m=n \quad \text{en (7-159)} \quad (7-165)$$

Donde  $\hat{R}_l$  es igual a  $R_l$  o igual a  $1/R_l$ . Esto se debe a que cuando  $m=0$  en (7-159), la función de transferencia es del tipo de pasa bajo y todos los ceros de transmisión están en  $s=\infty$ . Por tanto, se utiliza la primera forma de Cauer. Esto significa que  $Z_{in}(s)$  contendrá inductores en serie y condensadores en derivación que terminen con  $\hat{R}_l$ . En  $s=0$ , los inductores en serie se convertirán en cortocircuitos y los condensadores en derivación se convertirán en circuitos abiertos; por lo tanto,  $Z_{in}(0)$  contiene solo el valor de la resistencia de terminación. Esto se ilustra en la Fig. 7-30 (a). De manera similar, cuando  $m=n$ , la función de transferencia es del tipo de paso alto y todos los ceros de transmisión están en  $s=0$ . Por lo tanto, se usa la segunda forma de Cauer. Esto involucra capacitores en serie e inductores en derivación que terminan con  $\hat{R}_l$ . En  $s=\infty$ , los capacitores en serie se convierten en cortocircuitos y los inductores en derivación se vuelven circuitos abiertos. Por tanto,  $Z_{in}(\infty)=\hat{R}_l$ , como se muestra en la Fig. 7-30 (b). Finalmente, para el caso  $0 < m < n$  en (7-159), la función de transferencia es un tipo de paso de banda. Existe un método de limitación para determinar  $\hat{R}_l$  a partir de una elección dada de  $Z_{in}(s)$ . Sin embargo, el proceso es complicado e implica muchos cálculos. En este caso, es mejor hacer la realización con cualquiera de las dos posibles  $Z_{in}(s)$  y averiguar el valor de  $\hat{R}_l=R_l$  entonces el diseño es el deseado; si no, entonces la otra elección de  $Z_{in}(s)$  de (7-163) producirá

82 Los ceros de  $G(s)$  satisfarán los requisitos de simetría cuadrantal si no ocurren en el eje imaginario del plano-s, con la posible excepción en el origen. Además, si  $B(s)$  es un polinomio de Hurwitz, entonces (7-160) tendrá una solución de fase mínima  $\rho(s)$ .

83 Si los ceros de  $G(s)$  satisfacen los requisitos de simetría cuadrantal, entonces hay una y solo una función de fase mínima que satisface (7-160). Recuerde que tanto los polos como los ceros de una función de fase mínima no están en el plano-s RH.

el circuito deseado.

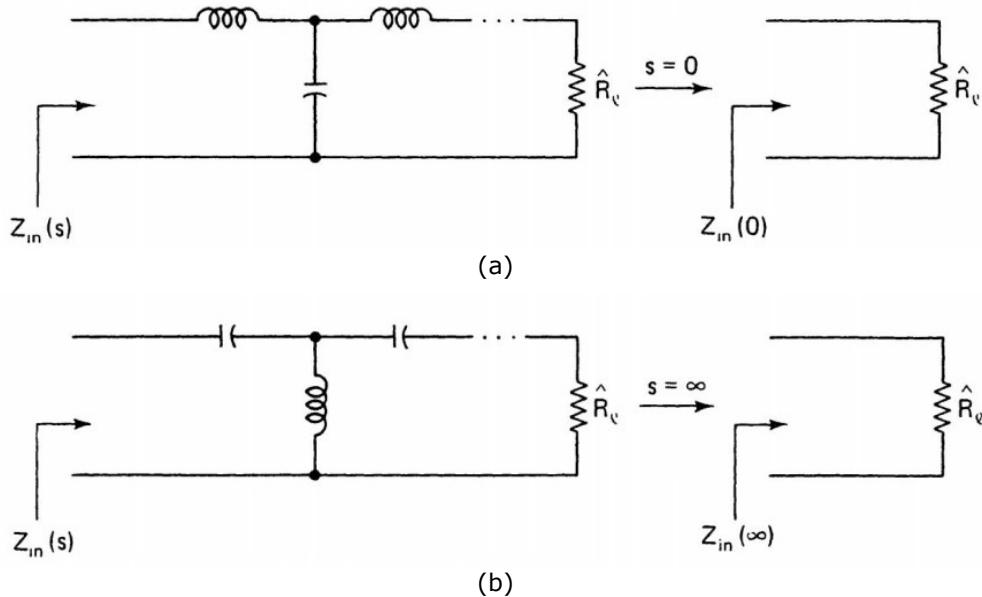


Fig. 7-30 Determinación del valor de resistencia de carga (a) cuando  $m=0$  en (7-159), y (b) cuando  $m=n$  en (4-159).

**Paso 3.** Realización de  $Z_{in}(s)$ . Para realizar  $H(s)$  de (7-159), tenemos que realizar  $Z_{in}(s)$  mediante un método adecuado para satisfacer los requisitos de cero de transmisión. Como en la Sec. 7-1, consideramos tres casos posibles de (7-159).

**CASO 1.** Si  $m=0$ , usamos la primera forma de Cauer.

**CASO 2.** Si  $m=n$ , usamos la segunda forma de Cauer.

**CASO 3.** Si  $0 < m < n$ , podemos usar la primera forma de Cauer para extraer  $(n-m)$  elementos dinámicos - condensadores e inductores - primero y el resto se realiza mediante la segunda forma de Cauer, o podemos usar la segunda forma de Cauer primero para extraer  $m$  elementos dinámicos y el resto se realiza mediante la primera forma de Cauer.

Un punto a tener en cuenta aquí es que si usamos el procedimiento de dividir e invertir para encontrar la expansión de fracción continua necesaria de  $Z_{in}(s)$ , encontraremos la eliminación de dos términos (de mayor o menor potencia) en cada paso de división. Esta eliminación simultánea de dos términos continuará hasta justo antes de que se extraiga el último elemento dinámico.

#### Ejemplo 7-18

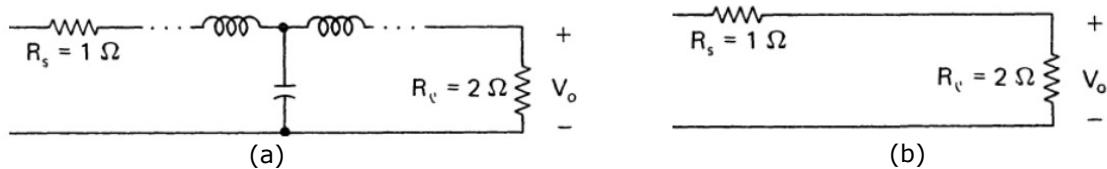
Realice

$$H(s) = \frac{k}{(s^2+1)(s+1)} \quad (7-166)$$

por la estructura del circuito de Darlington de la Fig. 7-29 con  $R_s=1\Omega$  y  $R_l=2\Omega$ .

**Solución:** debido a que la función de transferencia de (7-166) es del tipo de pasa bajo (todos los ceros de transmisión están en  $s=\infty$ ), el circuito de Darlington resultante tiene la forma de la Fig. 7-31 (a). En  $s=0$ , el circuito de la Fig. 7-31 (a) se reduce al circuito de la Fig. 7-31 (b). Por lo tanto, tenemos

$$H(0) = \frac{R_l}{R_s + R_l} \quad (7-167)$$

Fig. 7-31 Un circuito para determinar el valor de  $k$  en (7-166)

Igualando (7-167) con (7-166) en  $s=0$ , obtenemos

$$k = \frac{R_l}{R_s + R_l} = \frac{2}{3} \quad (7-168)$$

El primer paso en el procedimiento de realización es encontrar  $\rho(s)$ . De (7-160), tenemos que

$$\begin{aligned} \rho(s)\rho(-s) &= 1 - \frac{4}{R_l} H(s)H(-s) \\ &= 1 - \frac{4}{2} \frac{2/3}{(s^2+1)(s+1)} \frac{2/3}{(s^2+1)(-s+1)} \\ &= \frac{-s^6 - s^4 + s^2 + (1/9)}{(s^2+1)(s^2+1)(s+1)(-s+1)} \\ &= \frac{(s+0.83)(-s+0.83)(s^2+1.59)(s^2+0.10)}{(s^2+1)(s^2+1)(s+1)(-s+1)} \end{aligned} \quad (7-169)$$

Debido a que los ceros de la expresión del lado derecho de (7-169) no ocurren con simetría cuadrantal, no podemos obtener  $\rho(s)$  de (7-169); por lo tanto, el procedimiento descrito en esta sección no puede producir una realización de circuito para  $H(s)$  de (7-166).

**Ejemplo 7-19** Realice

$$H(s) = \frac{k}{s^2 + 3s + 3} \quad (7-170)$$

por un dispositivo sin pérdidas de dos puertos terminado con  $R_s = 1 \Omega$  y

(a)  $R_l = 1 \Omega$ .

(b)  $R_l = 2 \Omega$

**Solución:** como en el Ejemplo 7-18, en  $s=0$ , tenemos

$$H(0) = \frac{k}{3} = \frac{R_l}{R_l + R_s} \quad (7-171)$$

Para el caso (a), cuando  $R_l = 1 \Omega$ , (7-171) produce

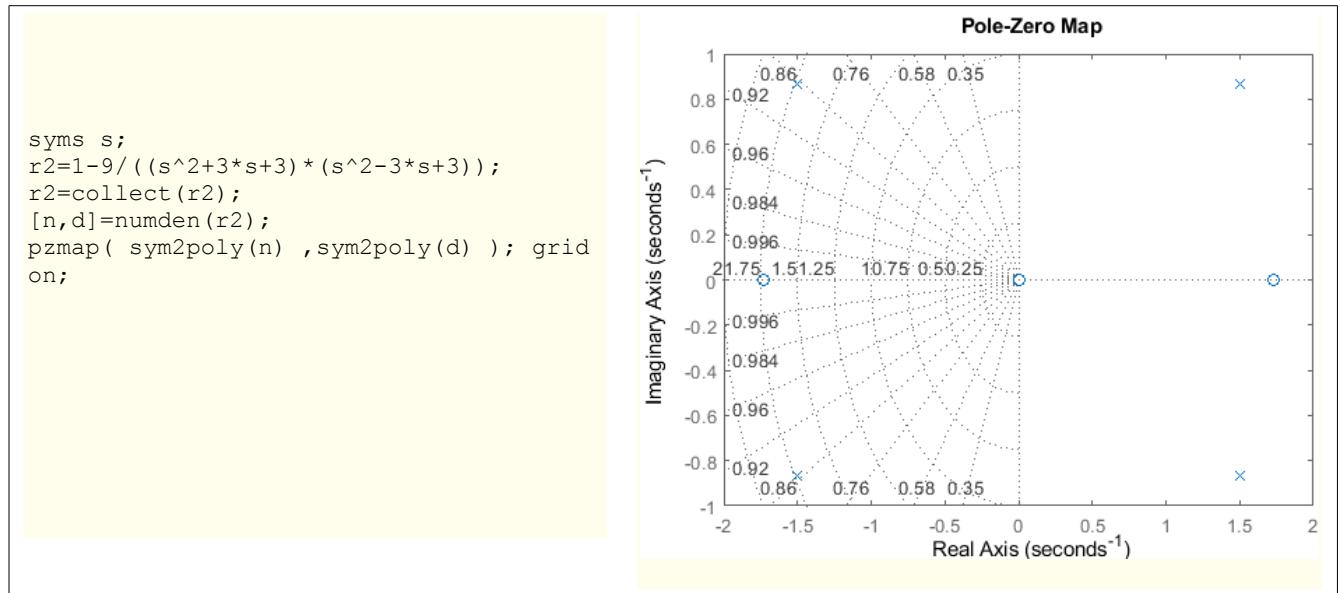
$$k = \frac{3}{2} \quad (7-172)$$

De (7-160), tenemos

$$\begin{aligned}
\rho(s)\rho(-s) &= 1 - 4 \frac{3/2}{s^2 + 3s + 3} \frac{3/2}{s^2 - 3s + 3} \\
&= 1 - \frac{9}{(s^2 + 3s + 3)(s^2 - 3s + 3)} \\
&= \frac{s^4 - 3s^2}{(s^2 + 3s + 3)(s^2 - 3s + 3)} \\
&= \frac{s(s + \sqrt{3})(-s)(-s + \sqrt{3})}{(s^2 + 3s + 3)(s^2 - 3s + 3)}
\end{aligned} \tag{7-173}$$

Según (7-173),  $\rho(s)$  puede ser uno de los siguientes:

$$\begin{array}{ll}
\rho_1(s) = \frac{s(s + \sqrt{3})}{s^2 + 3s + 3} & \rho_2(s) = \frac{s(s + \sqrt{3})}{s^2 - 3s + 3} \\
\rho_3(s) = \frac{s(-s + \sqrt{3})}{s^2 + 3s + 3} & \rho_4(s) = \frac{s(-s + \sqrt{3})}{s^2 - 3s + 3} \\
\rho_5(s) = \frac{-s(-s + \sqrt{3})}{s^2 + 3s + 3} & \rho_6(s) = \frac{-s(-s + \sqrt{3})}{s^2 - 3s + 3} \\
\rho_7(s) = \frac{-s(s + \sqrt{3})}{s^2 + 3s + 3} & \text{y} \quad \rho_8(s) = \frac{-s(s + \sqrt{3})}{s^2 - 3s + 3}
\end{array} \tag{7-174}$$



Observe que entre las ocho posibles soluciones de (7-173), como se indica en (7-174), solo  $\rho_1(s)$  es una solución de fase mínima. Elijamos la solución de (7-173) para que sea

$$\rho(s) = \frac{s(s + \sqrt{3})}{s^2 + 3s + 3} \tag{7-175}$$

Entonces las dos posibles funciones DP de impedancia vienen dadas por (7-163) como

$$z_{\overline{\text{in1}}}(s) = \frac{1 + \rho(s)}{1 - \rho(s)} = \frac{2s^2 + (3 + \sqrt{3})s + 3}{(3 - \sqrt{3})s + 3} \tag{7-176a}$$

y

$$Z_{in2}(s) = \frac{1-\rho(s)}{1+\rho(s)} = \frac{(3-\sqrt{3})s+3}{2s^2+(3+\sqrt{3})s+3} \quad (7-176b)$$

Debido a que  $R_l=1\Omega$ , tanto  $Z_{in1}(s)$  como  $Z_{in2}(s)$  producirán realizaciones de circuito de  $H(s)$  con una terminación de resistencia de carga adecuada. Primero trabajemos con  $Z_{in1}(s)$ . Todos los ceros de transmisión de  $H(s)$  están en  $s=\infty$ ; por lo tanto, nos damos cuenta de  $Z_{in1}(s)$  por la primera forma de Cauer. Esto implica una expansión de fracción continua de  $Z_{in1}(s)$  en  $s=\infty$ :

$$\begin{array}{r} 1.577s \\ 1.268s + 3 \overline{2s^2 + 4.732s + 3} \\ \underline{2s^2 + 4.732s} \qquad \qquad 0.423s \\ \hline 3)1.268s + 3 \\ \underline{1.268s} \qquad \qquad 1 \\ \hline 3)3 \\ \underline{3} \\ \hline 0 \end{array}$$

o

$$Z_{in1}(s) = 1.577s + \frac{1}{0.423s + 1} \quad (7-177)$$

En la Fig. 7-32 (a) se da una realización de circuito de  $H(s)$  de (7-170) basada en la realización en primera forma de  $Z_{in1}(s)$  de (7-177) de Cauer.

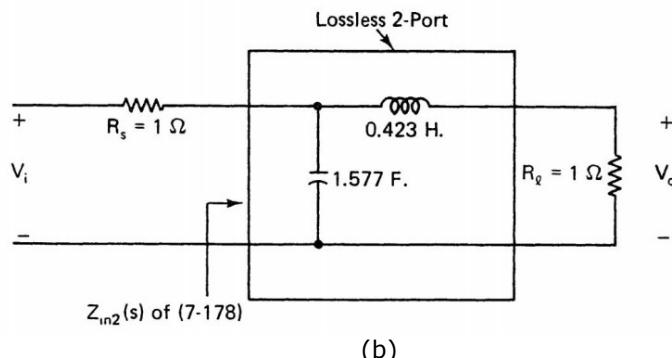
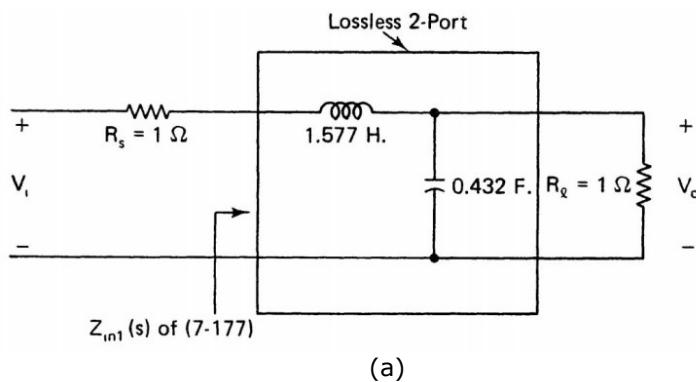


Figura 7-32 Dos realizaciones del circuito Darlington de  $H(s)$  de (7-170) con  $R_s=1\Omega$  y  $R_l=1\Omega$ .

A continuación, consideraremos  $Z_{in2}(s)$ . Como  $Z_{in2}(s)$  es el inverso de  $Z_{in1}(s)$ , obtenemos

$$Z_{in2}(s) = \frac{1}{1.577s + \frac{1}{0.423s + \frac{1}{1}}} \quad (7-178)$$

En la Fig. 7-32 (b) se muestra una realización de circuito de  $H(s)$  de (7-170) a través de  $Z_{in2}(s)$  de (7-178).

Si la resistencia de carga deseada es  $R_l=2\Omega$ , entonces (7-171) cede

$$k = \frac{3R_l}{R_s + R_l} = 2 \quad (7-179)$$

en este caso, (7-160) se convierte en

$$\begin{aligned} \rho(s)\rho(-s) &= 1 - \frac{4}{2} \frac{2}{s^2+3s+3} \frac{2}{s^2-3s+3} \\ &= \frac{s^4-3s^2+1}{(s^2+3s+3)(s^2-3s+3)} \\ &= \frac{(s^2+\sqrt{5}s+1)(s^2-\sqrt{5}s+1)}{(s^2+3s+3)(s^2-3s+3)} \end{aligned} \quad (7-180)$$

La solución de fase mínima de (7-180) está dada por

$$\rho(s) = \frac{s^2+\sqrt{5}s+1}{s^2+3s+3} \quad (7-181)$$

Por (7-163), obtenemos

$$z_{in1}(s) = \frac{1+\rho(s)}{1-\rho(s)} = \frac{2s^2+(3+\sqrt{5})s+4}{(3-\sqrt{5})s+2} \quad (7-182a)$$

$$z_{in2}(s) = \frac{1-\rho(s)}{1+\rho(s)} = \frac{(3-\sqrt{5})s+2}{2s^2+(3+\sqrt{5})s+4} \quad (7-182b)$$

Debido a que  $R_l=2\Omega$ , solo una de las dos funciones DP de impedancia en (7-182) será válida. Y debido a que todos los ceros de transmisión de  $H(s)$  están en  $s=\infty$  o, sabemos que la función DP de impedancia adecuada  $Z_{in}(s)$  en  $s=0$  es igual a  $R_l$ . En  $s=0$ , encontramos

$$Z_{in1}(0)=2 \quad y \quad Z_{in2}(0)=\frac{1}{2} \quad (7-183)$$

Por tanto, la elección adecuada es

$$\begin{aligned} Z_{in}(s) &= Z_{in1}(s) = \frac{2s^2+(3+\sqrt{5})s+4}{(3-\sqrt{5})s+2} \\ &= 2.618s + \frac{1}{0.191s + \frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (7-184)$$

En la Fig. 7-33 se muestra una realización de circuito de  $H(s)$  de (7-170) por un circuito de

Darlington con  $R_s=1\Omega$  y  $R_l=2\Omega$  a través de (7-184). Un análisis del circuito de la Fig. 7-33 produce

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{2}{s^2 + 3s + 3}$$

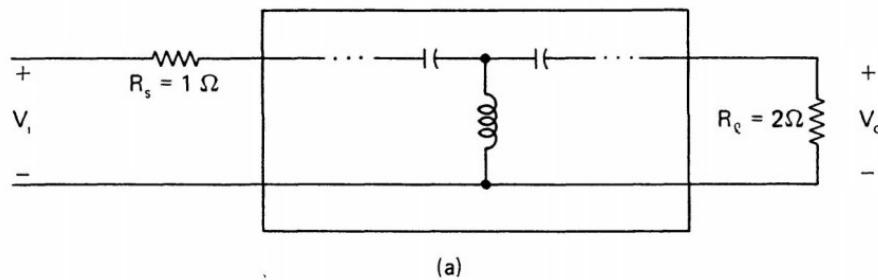
**Ejemplo 7-20** Realice

$$H(s) = \frac{ks^2}{s^2 + 3s + 3} \quad (7-185)$$

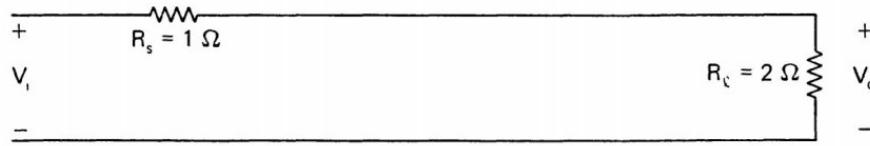
por un circuito de Darlington con  $R_s=1\Omega$  y  $R_l=2\Omega$ .

**Solución:** Para simplificar los cálculos, primero averigüemos el valor de k en (7-185). Debido a que la función de transferencia es del tipo de paso alto (todos los ceros de transmisión están en  $s=0$ ), el circuito de Darlington resultante tendrá la forma que se muestra en la Fig. 7-34 (a). En  $s=\infty$ , el circuito de la Fig. 7-34 (a) se reduce al de la Fig. 7-34 (b). Por tanto, en  $s=\infty$ , tenemos

$$H(\infty) = k = \frac{R_l}{R_s + R_l} = \frac{2}{3} \quad (7-186)$$



(a)



(b)

**Fig. 7-34** A circuit to determine the value of k of (7-185).

De (7-160), tenemos

$$\begin{aligned} \rho(s)\rho(-s) &= 1 - \frac{4}{2} \frac{(2/3)s^2}{(s^2 + 3s + 3)} \frac{(2/3)s^2}{(s^2 - 3s + 3)} \\ &= \frac{(1/9)s^4 - 3s^2 + 9}{(s^2 + 3s + 3)(s^2 - 3s + 3)} \\ &= \frac{[(1/3)s^2 + \sqrt{5}s + 3][(1/3)s^2 - \sqrt{5}s + 3]}{(s^2 + 3s + 3)(s^2 - 3s + 3)} \end{aligned}$$

Por eso,

$$\rho(s) = \frac{(1/3)s^2 + \sqrt{5}s + 3}{s^2 + 3s + 3} \quad (7-187)$$

Los dos posibles  $Z_{in}(s)$  están dados por (7-163) como

$$Z_{in1}(s) = \frac{1+\rho(s)}{1-\rho(s)} = \frac{(4/3)s^2 + (3+\sqrt{5})s + 6}{(2/3)s^2 + (3-\sqrt{5})s} \quad (7-188a)$$

$$Z_{in2}(s) = \frac{1-\rho(s)}{1+\rho(s)} = \frac{(2/3)s^2 + (3-\sqrt{5})s}{(4/3)s^2 + (3+\sqrt{5})s + 6} \quad (7-188b)$$

Debido a que todos los ceros de transmisión están en  $s=0$ , tenemos

$$Z_{in}(\infty) = R_l \quad (7-189)$$

De (7-188), tenemos

$$Z_{in1}(\infty) = 2 \quad y \quad Z_{in2}(\infty) = \frac{1}{2} \quad (7-190)$$

Por lo tanto, para tener una resistencia de carga de  $2\Omega$ , elegimos

$$Z_{in}(s) = Z_{in1}(s) \quad (7-191)$$

Para producir los ceros de transmisión en  $s=0$ , realizamos  $Z_{in}(s)$  por la segunda forma de Cauer:

$$\begin{aligned} Z_{in}(s) &= \frac{6 + (3 + \sqrt{5})s + (4/3)s^2}{(3 - \sqrt{5})s + (2/3)s^2} \\ &= \frac{7.845}{s} + \frac{1}{\frac{0.573}{s} + \frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (7-192)$$

En la Fig. 7-35 se muestra una realización de circuito de  $H(s)$  de (7-185) a través de  $Z_{in}(s)$  de (7-192).

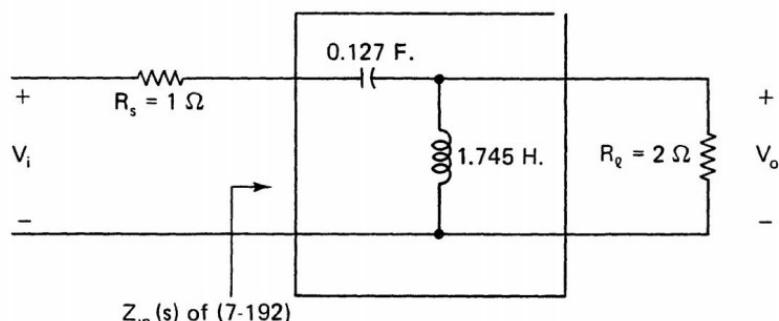


Fig. 7-35 A Darlington circuit realization of  $H(s)$  of (7-185).

## 7-4 Observaciones finales

En este capítulo, hemos presentado varios métodos para realizar funciones de transferencia que cumplen con ciertos criterios. En esta sección, resumimos los principales resultados del Capítulo 7.

### I. Realización de escalera RC

Criterios de realizabilidad:  $H(s) = k s^m / B(s)$  donde  $B(s)$  es un polinomio de enésimo grado con raíces reales negativas simples.

Métodos de realización: Elija  $z_{11}(s)$  para satisfacer las condiciones RC1, RC2 y RC3 como se indica en la Sección 7-1-1. Si  $m=0$ , use la primera forma de Cauer para realizar  $z_{11}(s)$ . Si  $m=n$ , use la segunda forma de Cauer para realizar  $z_{11}(s)$ . Si  $0 < m < n$ , entonces podemos: (1) usar la primera forma de Cauer para extraer el  $m-n$  condensador (la primera forma de Cauer debe detenerse tan pronto como se extraiga el  $(m-n)$ -ésimo condensador), y el resto es realizado por la segunda forma de Cauer; o (2) utilice la segunda forma de Cauer para extraer los  $m$  condensadores (la segunda forma de Cauer debe terminarse tan pronto como se extraiga el  $m$ -ésimo condensador), y el resto lo realiza la primera forma de Cauer. También podemos trabajar con  $y_{22}(s)$  en lugar de  $z_{11}(s)$ .

Principio de realización: Los ceros de transmisión de  $H(s)$  se obtienen mediante los métodos utilizados en la realización de  $z_{11}(s)$ , y los polos de  $H(s)$  se realizan mediante la realización de la función de impedancia RC DP  $z_{11}(s)$ .

### II. Realización de escalera LC

Criterios de realizabilidad:  $H(s) = k s^m / B(s)$ , donde  $B(s)$  es un polinomio de enésimo grado con raíces simples en el eje imaginario. Además,  $H(s)$  debe ser una función racional par.

Métodos de realización: Elija  $z_{11}(s)$  para satisfacer las condiciones LC1 y LC2 como se indica en la Sección 7-1-2. Si  $m=0$ , usamos la primera forma de Cauer para realizar  $z_{11}(s)$ . Si  $m=n$ , la segunda forma de Cauer se usa para realizar  $z_{11}(s)$ . Si  $0 < m < n$ , podemos usar: **(a)** la primera forma de Cauer para extraer los  $n-m$  elementos de  $z_{11}(s)$  y el resto se realiza mediante la segunda forma de Cauer; o **(b)** la segunda forma de Cauer para extraer los  $m$  elementos de  $z_{11}(s)$  y el resto se realiza mediante la primera forma de Cauer. También podemos trabajar con  $y_{22}(s)$  en lugar de  $z_{11}(s)$ .

Principio de realización: Los ceros de transmisión de  $H(s)$  se obtienen mediante los métodos utilizados en la realización de  $z_{11}(s)$ , y los polos de  $H(s)$  se realizan mediante la realización de  $z_{11}(s)$  apropiados.

### III. Estructura de circuito de celosía para funciones pasa todos.

Criterios de realizabilidad: La función de transferencia viene dada por  $H(s)=p(-s)p(s)$  donde  $p(s)$  es un polinomio de Hurwitz.

Método de realización: La estructura del circuito se muestra en la Fig. 7-20 (b), donde  $z_a$  representa las ramas en serie y  $z_b$  representa las ramas en derivación cruzada. Sea  $p(s)=m(s)+n(s)$ , donde  $m(s)$  y  $n(s)$  son, respectivamente, las partes pares e impares de  $p(s)$ .

1. Escriba  $H(s)$  como

$$H(s)=\frac{m-n}{m+n}=\frac{(n/m)-1}{(n/m)+1}$$

Tenga en cuenta que  $z_b=m/n$  como un dispositivo LC de un puerto y  $z_a=1\Omega$ .

2. Escriba  $H(s)$  como

$$H(s)=\frac{m-n}{m+n}=\frac{1-(n/m)}{1+(n/m)}$$

Tenga en cuenta que  $z_a=n/m$  como un dispositivo LC de un puerto y  $z_b=1\Omega$ .

### IV. Dispositivos sin pérdidas de dos puertos con simple terminación.

Criterios de realizabilidad: La función de transferencia  $H(s)$  debe tener la forma de  $H(s)=M_1/(M_2+N_2)$  o  $H(s)=N_1(M_2+N_2)$ , donde  $M_i$  y  $N_i$  denotan polinomios pares e impares, respectivamente,  $i=1,2$ . Además,  $M_2+N_2$  es un polinomio de Hurwitz.  $M_1$  y  $N_1$  tiene la forma de  $ks^m$ . Suponiendo que  $M_2+N_2$  es un polinomio de  $n$ -ésimo grado, entonces  $0 \leq m \leq n$ .

Métodos de realización: Los dos circuitos implicados se muestran en las Figs. 7-22 (a) y (b). Las ecuaciones que describen estos circuitos son

$$\text{Fig. 7-22(a): } H(s)=-\frac{y_{12}}{1+y_{22}}$$

$$\text{Fig. 7-22(b): } H(s)=\frac{z_{12}}{1+z_{11}}$$

Si  $H(s)=M_1/(M_2+N_2)$ , entonces escriba  $H(s)$  como

$$H(s)=\frac{M_1/N_2}{1+(M_2/N_2)}$$

Sea  $y_{22}$  { $z_{11}$ } siendo  $M_2/N_2$ , y sea  $-y_{12}$  { $z_{12}$ } siendo  $M_1/N_2$ . Entonces  $H(s)$  se realiza mediante la realización simultánea de  $y_{22}$  y  $-y_{12}$  { $z_{12}$  y  $z_{22}$ } como se analiza en la Sección 7-1-3 [Sección 7-1-2]. Si  $H(s)=N_1/(M_2+N_2)$ , entonces escriba  $H(s)$  como

$$H(s)=\frac{N_1/M_2}{1+(N_2/M_2)}$$

Sea  $y_{22} \{ z_{11} \}$  siendo  $N_2/M_2$  y, sea  $-y_{12} \{ z_{12} \}$  siendo  $N_1/M_2$ . Entonces  $H(s)$  se realiza mediante la realización simultánea de  $-y_{12}$  y  $y_{22} \{ z_{12} \text{ y } z_{22} \}$ .

**Principio de realización:** El numerador de  $H(s)$  se realiza mediante los métodos utilizados para realizar  $y_{22}(s) \{ z_{11}(s) \}$ . El denominador de  $H(s)$  se realiza al realizar la construcción  $y_{22}(s) \{ z_{11}(s) \}$ .

## V. Dispositivos sin pérdidas de dos puertos con doble terminación<sup>84</sup>

**Criterios de realización:**  $H(s)=k s^m / B(s)$  donde  $B(s)$  es un polinomio de Hurwitz de enésimo grado derecho o de Hurwitz modificado.

**Métodos de realización:** La configuración básica del circuito se muestra en la Fig. 7-29. Los procedimientos involucrados son:

**PASO 1.** Encuentre la solución de fase mínima  $\rho(s)$  de

$$\rho(s)\rho(-s)=1-\frac{4R_s}{R_l}H(s)H(-s)$$

**PASO 2.** Formule

$$Z_{\text{in}}=\frac{1\pm\rho(s)}{1\mp\rho(s)}$$

y elija el  $Z_{\text{in}}(s)$  con la resistencia de carga de terminación deseada.

**PASO 3.** Realice  $Z_{\text{in}}(s)$ . Si  $m=0$ , use la primera forma de Cauer. Si  $m=n$ , use la segunda forma de Cauer. Si  $0 < m < n$ , use una combinación de las dos formas de Cauer.

**Principio de realización:** Los ceros de transmisión de  $H(s)$  se obtienen mediante los métodos utilizados en la realización de  $Z_{\text{in}}(s)$ . Los polos de  $H(s)$  se realizan al realizar los  $Z_{\text{in}}(s)$  construidos.

---

<sup>84</sup> Las consideraciones de sensibilidad para los circuitos en IV y V se pueden encontrar en la Referencia [8].

### **Referencias y lecturas adicionales**

- [1] Desoer, C. A., and Kuh , E. S. Basic Circuit Theory. New York: McGraw-Hill, 1969.
- [2] Weinberg, L. Network Analysis and Synthesis. Huntington, N.Y.: R. E. Krieger, 1975.
- [3] Humphreys, D. S. The Analysis, Design, and Synthesis of Electrical Filters. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1970.
- [4] Darlington, S. "Synthesis of Reactance 4-Poles." J. Math. Phys. 18 (1939): 257-353.
- [5] Hazony, D. "Two Extensions of the Darlington Synthesis Procedure." IEEE Trans. Circuit Theory CT-8 (1961): 284-88.
- [6] Heinlein, W. E., and Holmes , W. H. Active Filters for Integrated Circuits: Fundamentals and Design Methods. London: Prentice-Hall, 1974.
- [7] Balabanian, N. Network Synthesis. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1958.
- [8] Weyten, L. "Lower Bounds on the Summed Absolute and Squared Voltage Transfer Sensitivities in RLC Networks." IEEE Trans. Circuits and Systems CAS-25 (1978): 70-73.

## Problemas

7-1. (a) Para el circuito que se muestra en la Fig. P7-1, encuentre la función de transferencia entre  $V_o$  y  $V_i$

(b) Encuentre los ceros de transmisión del circuito mediante la función de transferencia obtenida en (a) y por inspección.

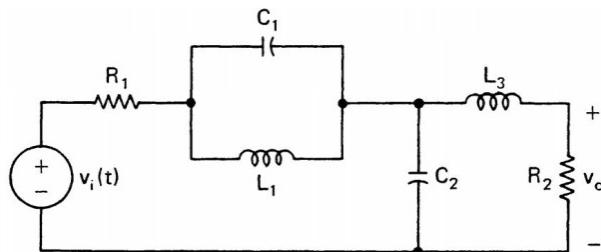


Fig. P7-1

7-2. Considere un circuito  $N$  con entrada  $v_i(t)$  y salida  $v_o(t)$ .

(i) Si  $v_i(t) = A \cos 2t$ , o si  $v_i(t) = B \cos 4t$ , entonces la salida de estado estable  $v_o(t) = 0$  para todos  $A$  y  $B$ .

(ii) La respuesta al impulso del circuito tiene la forma de

$$v_o(t) = a_1 e^{-t} \cos(t + \phi_1) + a_2 e^{-2t} \cos(5t + \phi_2)$$

Encuentre la función de transferencia del circuito.

7-3. Sintetice cada una de las siguientes funciones de transferencia mediante dos redes de escalera RC [ $z_{11}(s)$  y  $y_{22}(s)$ ]:

$$(a) H(s) = \frac{k}{(s+2)}$$

$$(b) H(s) = \frac{ks}{(s+2)}$$

$$(c) H(s) = \frac{k}{(s+1)(s+4)}$$

$$(d) H(s) = \frac{ks}{(s+1)(s+4)}$$

$$(e) H(s) = \frac{ks^2}{(s+1)(s+4)}$$

$$(f) H(s) = \frac{k}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$$(g) H(s) = \frac{ks}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$$(h) H(s) = \frac{ks^2}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$$(i) H(s) = \frac{ks^3}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$$(j) H(s) = \frac{ks}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)}$$

7-4. (a) Realice la función de transferencia

$$H(s) = \frac{3.5}{s^2 + 8s + 7}$$

por una red de escalera RC.

(b) Verifique su resultado.

7-5. (a) Realice la función de transferencia

$$H_1(s) = \frac{5}{s^2 + 7s + 10}$$

o un circuito de escalera RC  $N$ , como se muestra en la Fig. P7-5 (a).

(b) Si dos circuitos idénticos de  $N$  están conectados en cascada, como se muestra en la Fig. P7-5 (b), encuentre la función de transferencia general  $H(s)$ .

(c) ¿  $H(s) = H_1(s)H_1(s)$  ? Da tus razones.

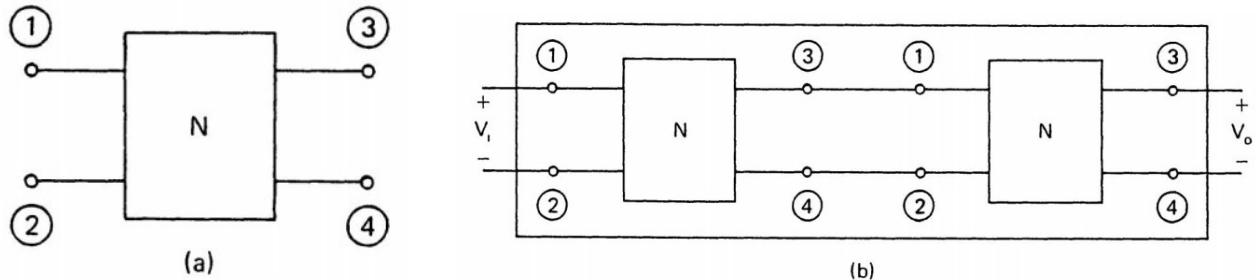


Fig. P7-5

7-6. Realice cada una de las siguientes funciones de transferencia mediante dos redes de escalera LC [a través de  $z_{11}(s)$  y  $y_{22}(s)$ ]:

$$(a) H(s) = \frac{k}{s^2 + 2}$$

$$(e) H(s) = \frac{ks^4}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)}$$

$$(b) H(s) = \frac{ks^2}{s^2 + 2}$$

$$(f) H(s) = \frac{k}{(s^2 + 2)(s^2 + 5)(s^2 + 6)}$$

$$(c) H(s) = \frac{k}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)}$$

$$(g) H(s) = \frac{ks^2}{(s^2 + 2)(s^2 + 5)(s^2 + 6)}$$

$$(d) H(s) = \frac{ks^1}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)}$$

$$(h) H(s) = \frac{ks^6}{(s^2 + 2)(s^2 + 5)(s^2 + 6)}$$

7-7. Muestre que la representación de un dispositivo de dos puertos de admitancia de la Fig. 7-20 viene dada por (7-80) y (7-81).

7-8. Sea

$$p(s) = p_0 + p_1 s + p_2 s^2 + \dots + p_n s^n$$

ser un polinomio de Hurwitz. Demuestre que la función de magnitud de

$$H(s) = \frac{p(-s)}{p(s)}$$

es independiente de la frecuencia  $\omega$ .

7-9. Realice cada una de las siguientes funciones de transferencia de paso total de dos maneras (a través de  $z_a$  y  $z_b$ ):

$$(a) H(s) = \frac{s^2 - \sqrt{2}s + 1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$$

$$(b) H(s) = \frac{s^2 - 3s + 3}{s^2 + 3s + 3}$$

$$(c) H(s) = \frac{-s^3 + 2s^2 - 2s + 1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}$$

$$(d) H(s) = \frac{-s^3 + 6s^2 - 15s + 15}{s^3 + 6s^2 + 15s + 15}$$

$$(e) H(s) = \frac{(s^2 - 0.77s + 1)(s^2 - 1.85s + 1)}{(s^2 + 0.77s + 1)(s^2 + 1.85s + 1)}$$

$$(f) H(s) = \frac{s^4 - 10s^3 + 43s^2 - 105s + 105}{s^4 + 10s^3 + 43s^2 + 105s + 105}$$

7-10. Muestre que la función de fase de una función de transferencia de paso total  $H(s) = p(-s)/p(s)$  está dada por el doble de la función de fase de  $p(s)$  más una constante.

7-11. Considere la función de transferencia

$$H(s) = \frac{-s^3 + s^2 - s + (3/8)}{s^3 + s^2 + s + (3/8)}$$

- (a) Dibuje el diagrama de polo cero de  $H(s)$ , es decir, ubique los polos y ceros de  $H(s)$  en el plano-s. [Sugerencia:  $(s+0.5)$  es un factor de  $(s+0.5)$ .]
- (b) Encuentre  $|H(j\omega)|$  para todos  $\omega$ .
- (c) Dibuje aproximadamente  $\phi(\omega) = -\angle H(j\omega)$  para todo  $\omega$ .
- (d) Realice  $H(s)$  mediante dos redes de celosía distintas.

7-12. Realice cada una de las siguientes funciones de transferencia mediante un dispositivo de dos puertos sin pérdidas terminado en un solo extremo por una resistencia de carga, como se muestra en la Fig. P7-12:

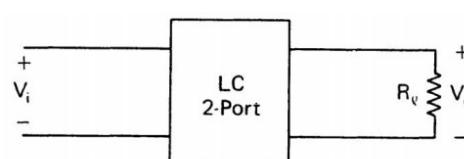


Fig. P7-12

(a)  $H(s) = \frac{k}{s^2 + 3s + 3}$

(b)  $H(s) = \frac{ks}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$

(c)  $H(s) = \frac{ks^2}{s^2 + 4s + 4}$

(d)  $H(s) = \frac{k}{s^3 + 6s^2 + 15s + 15}$

(e)  $H(s) = \frac{ks}{s^3 + 6s^2 + 15s + 15}$

(f)  $H(s) = \frac{ks^2}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}$

(g)  $H(s) = \frac{ks^3}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}$

(h)  $H(s) = \frac{ks^2}{(s^2 + 0.77s + 1)(s^2 + 1.85s + 1)}$

(i)  $H(s) = \frac{ks^3}{(s + 0.77s + 1)(s^2 + 1.85s + 1)}$

(j)  $H(s) = \frac{k}{s^4 + 10s^3 + 43s^2 + 105s + 105}$

(k)  $H(s) = \frac{k}{(s + 1)^3}$

(l)  $H(s) = \frac{ks}{(s + 1)^3}$

(m)  $H(s) = \frac{ks^3}{(s + 1)^4}$

(n)  $H(s) = \frac{ks^4}{(s + 1)^4}$

7-13. Realice cada una de las funciones de transferencia del problema 7-12 mediante un puerto de dos puertos sin pérdidas terminado en un solo extremo por una resistencia de fuente, como se muestra en la Fig. P7-13.

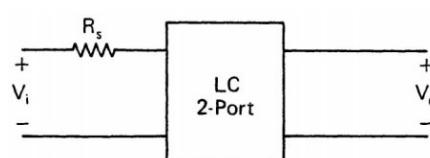


Fig. P7-13

7-14. Realice cada una de las siguientes funciones de transferencia mediante un dispositivo sin pérdidas de dos puertos terminado en ambos extremos con  $R_s = R_o = 1\Omega$ , como se muestra en la Fig. P7-14:

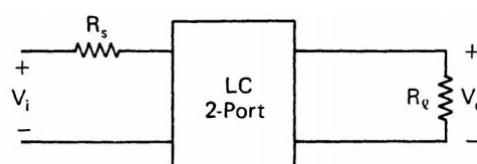


Fig. P7-14

(a)  $H(s) = \frac{k}{s^2 + 3s + 3}$

(b)  $H(s) = \frac{k}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$

(c)  $H(s) = \frac{ks}{s^2 + 3s + 3}$

(d)  $H(s) = \frac{k}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$

(e)  $H(s) = \frac{ks^2}{s^2 + 3s + 1}$

(f)  $H(s) = \frac{k}{s^2 + 3s + 3}$

(g)  $H(s) = \frac{k}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}$

(h)  $H(s) = \frac{k}{s^3 + 6s^2 + 15s + 15}$

(i)  $H(s) = \frac{ks^3}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}$

(j)  $H(s) = \frac{ks^3}{s^3 + 6s^2 + 15s + 15}$

7-15. Realizar la función de transferencia

$$H(s) = \frac{k}{s^2 + 3s + 1}$$

por un dispositivo de dos puertos sin pérdidas terminado en ambos extremos con  $R_s = 1\Omega$  y:

(a)  $R_l = 1\Omega$

(b)  $R_l = 2\Omega$

(c)  $R_l = 4\Omega$

(d)  $R_l = 0.5\Omega$

(e)  $R_l = 0.25\Omega$

7-16. Realice cada una de las siguientes funciones de transferencia con un dispositivo sin pérdidas de dos puertos terminado en ambos extremos por  $R_s = 1\Omega$  y  $R_l = 2\Omega$  :

(a)  $H(s) = \frac{k}{(s+1)^2}$

(d)  $H(s) = \frac{ks^3}{(s+1)^3}$

(b)  $H(s) = \frac{ks^2}{s^2 + 3s + 3}$

(e)  $H(s) = \frac{ks^2}{s^2 + 3s + 3}$

(c)  $H(s) = \frac{k}{(s+1)^2}$

7-17. Realice cada una de las siguientes funciones de transferencia con un dispositivo sin pérdidas de dos puertos terminado en ambos extremos por  $R_s = 1\Omega$  y  $R_l = 0.25\Omega$  :

(a)  $H(s) = \frac{k}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$

(d)  $H(s) = \frac{k}{s^3 + 4s^2 + 6s + 3}$

(b)  $H(s) = \frac{ks^2}{(s+1)^2}$

(e)  $H(s) = \frac{k}{(s+1)^4}$

(c)  $H(s) = \frac{ks^3}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}$

7-18. Escribe un programa de computadora:

- (a) para determinar si una función de transferencia  $H(s)$  es realizable por una red RC o LC en escalera;
- (b) realizar  $H(s)$  si la respuesta para (a) es afirmativa.

7-19. Escriba un programa de computadora para realizar una función de transferencia de paso total  $H(s)=p(-s)/p(s)$  .

7-20. Escribe un programa de computadora:

- (a) para determinar si una función de transferencia  $H(s)$  es realizable como un puerto doble sin pérdidas terminado en ambos extremos por resistencias  $R_s$  y  $R_l$ , donde  $R_s$  toma el valor de 0 o  $1\Omega$  y  $0 \leq R_l \leq \infty$  ;
- (b) realizar  $H(s)$  mediante una configuración de Darlington si la respuesta para (a) es afirmativa.

## 8. Aproximación del Filtro

En el Capítulo 7, presentamos técnicas para realizar **funciones de transferencia**. En este capítulo, examinamos varios aspectos de las funciones de transferencia y procedemos a derivar las funciones de transferencia de algunas **familias de filtros comunes**.

Al diseñar un filtro, el ingeniero debe cumplir con los requisitos de procesamiento de señales con una implementación de hardware factible. A menudo, una simple prescripción de las especificaciones de un filtro para satisfacer los requisitos de procesamiento de señales conduce a una realización imposible del hardware. Como ejemplo, consideremos un receptor de radio o televisión. A la estación transmisora se le asigna una banda de frecuencias denominada canal en la que debe transmitir su señal. Idealmente, el receptor debería aceptar y procesar cualquier señal en el canal asignado y excluir completamente las señales en todas las demás frecuencias. Por lo tanto, las especificaciones más simples sobre la magnitud de la función de transferencia del receptor son<sup>85</sup>

$$\begin{aligned} |H(j\omega)|^2 &= A \quad \text{para } \omega_1 \leq \omega \leq \omega_2 \\ &= 0 \quad \text{de otro modo} \end{aligned} \quad (8-1)$$

donde  $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$  es el canal de la señal que se va a recibir. Sin embargo, ningún circuito lineal concentrado puede producir tal función de transferencia *exactamente*.<sup>86</sup> Las razones pueden darse en dos partes, y son: (1) cualquier filtro lineal, concentrado e invariante en el tiempo que contenga R, L, C y elementos activos tienen una función de transferencia que es una función racional de frecuencia; y (2) una función racional no puede tener un valor constante en ninguna banda de frecuencias a menos que sea constante en todas partes. Debido a que ninguna función de transferencia de circuitos factibles puede cumplir exactamente con las especificaciones de (8-1), la única alternativa es aproximar (8-1) mediante una función de transferencia realizable.

Afortunadamente, en la práctica, no se requiere que los filtros cumplan perfectamente con los requisitos extremadamente estrictos como los de (8-1). Siempre hay espacio para las tolerancias, sin importar cuán pequeñas sean las tolerancias. Por ejemplo, en el caso del receptor de radio o televisión mencionado anteriormente, la recepción puede considerarse satisfactoria siempre que la respuesta del filtro esté dentro de  $\pm 5\%$  de  $A$  en la banda de paso y por debajo del 1% de

$A$  o 40 dB de atenuación para frecuencias superiores a  $1/10$  del ancho de banda lejos de los bordes de la banda, a saber,  $\omega_1$  y  $\omega_2$ . Es decir

$$0.95A \leq |H(j\omega)|^2 \leq 1.05A \quad \text{para } \omega_1 \leq \omega \leq \omega_2 \quad (8-2a)$$

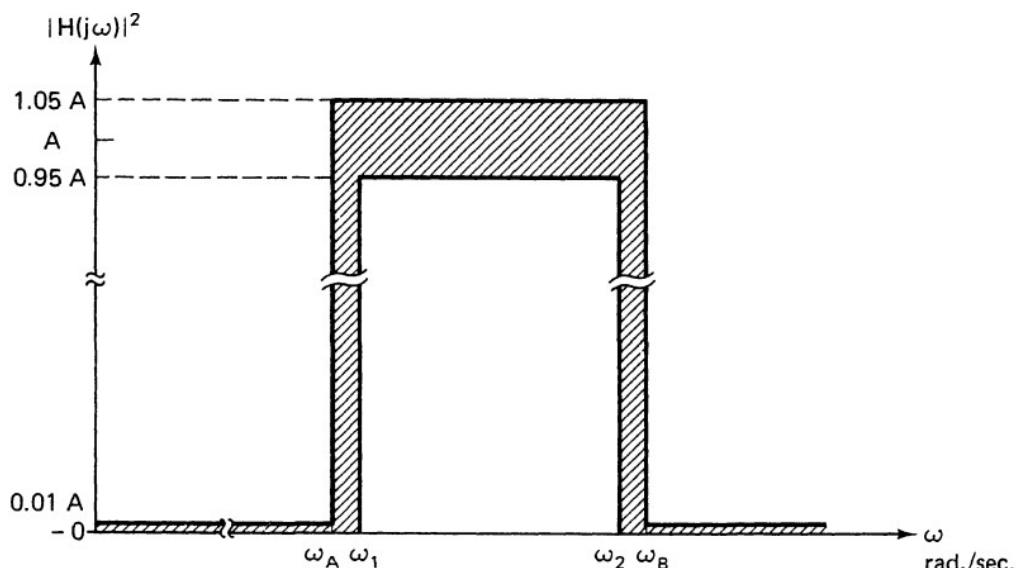
$$\begin{aligned} |H(j\omega)|^2 &< 0.01A \quad \text{para } \omega < \omega_1 - \frac{\omega_2 - \omega_1}{10} \triangleq \omega_A \\ \text{y} \quad &\text{para } \omega < \omega_2 - \frac{\omega_2 - \omega_1}{10} \triangleq \omega_B \end{aligned} \quad (8-2b)$$

$$\begin{aligned} 0 \leq |H(j\omega)|^2 &\leq 1.05A \quad \text{para } \omega_A < \omega < \omega_1 \\ \text{y} \quad &\text{para } \omega_2 < \omega < \omega_B \end{aligned} \quad (8-2c)$$

Observe que (8-2a) es una especificación de la magnitud de la banda de paso, (8-2b) especifica la magnitud de la banda de supresión y (8-2c) se refiere a la banda de transición. Gráficamente,  $|H(j\omega)|^2$  debe estar dentro del área sombreada de la Fig. 8-1.

85 Debido a que  $|H(j\omega)|^2$  es una función par, debemos considerar solo para  $\omega \geq 0$ .

86 Tenga en cuenta que el filtro, especificado por (8-1), no es causal y, por lo tanto, no se puede lograr físicamente.



**Fig. 8-1** Specifications of a typical magnitude filter

La implementación de un circuito de hardware para cumplir con las especificaciones de filtro como las prescritas en la (8-2) normalmente se logra mediante el siguiente procedimiento de dos pasos:

**PASO 1.** *Etapa de diseño:* Encontrar una función de transferencia estable y realizable cuyas características de frecuencia satisfagan todas las especificaciones del filtro.

**PASO 2.** *Etapa de realización:* Realizar la función de transferencia obtenida en el Paso 1 con un circuito factible.

En este capítulo, tratamos ampliamente los problemas asociados con la etapa de diseño. En este capítulo se discuten varios aspectos de la etapa de realización, así como en el Capítulo 7 (realización pasiva), el Capítulo 10 (realización activa) y los Capítulos 12 y 13 (realización digital).

Para las especificaciones de (8-2), el primer paso también es un problema de aproximación: encontrar una función de transferencia estable y realizable para aproximar las características ideales de (8-1) dentro de los niveles de tolerancia especificados por (8-2). Hay muchos teoremas, como el teorema de aproximación de Weierstrass, y algoritmos constructivos para aproximar una función por otras funciones. Estos resultados se pueden aplicar a nuestros problemas de diseño de filtros. Sin embargo, esto requiere algunas herramientas matemáticas que no son fáciles de adquirir. Para el problema de ingeniería muy común de encontrar un filtro cuya función de magnitud se requiera para satisfacer las especificaciones en varias bandas de frecuencia, existen algunas técnicas de diseño bien establecidas que son muy fáciles de aplicar. Estas técnicas se basan en algunas formas funcionales estándar que **proporcionan las funciones básicas de filtrado**. Todo lo que se requiere es una selección (o determinación) adecuada de los coeficientes para el problema específico en cuestión. Discutiremos algunos de estos tipos de filtros estándar.

La mayoría de estos tipos de filtros estándar comienzan como aproximaciones al filtro de paso bajo ideal normalizado. El filtro de paso bajo ideal **normalizado** tiene una ganancia de uno en la banda de frecuencias de cero a 1 rad./seg. y una ganancia de cero para todas las frecuencias por encima de 1 rad./seg. El cambio de fase a través del filtro  $\phi(\omega) = -\angle H(j\omega)$  es lineal, con una pendiente de 1 en la banda de paso. Para frecuencias superiores a 1 rad./seg., el cambio de fase no es importante, porque de todos modos no pasa ninguna señal a través del filtro. Por lo tanto, el filtro de **paso bajo ideal normalizado** se caracteriza por

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= e^{-j\omega} \quad \text{para } 0 \leq \omega \leq 1 \\ &= 0 \quad \text{para } \omega > 1 \end{aligned} \quad (8-3)$$

La magnitud y las características de fase de (8-3) se muestran en la Fig. 8-2.

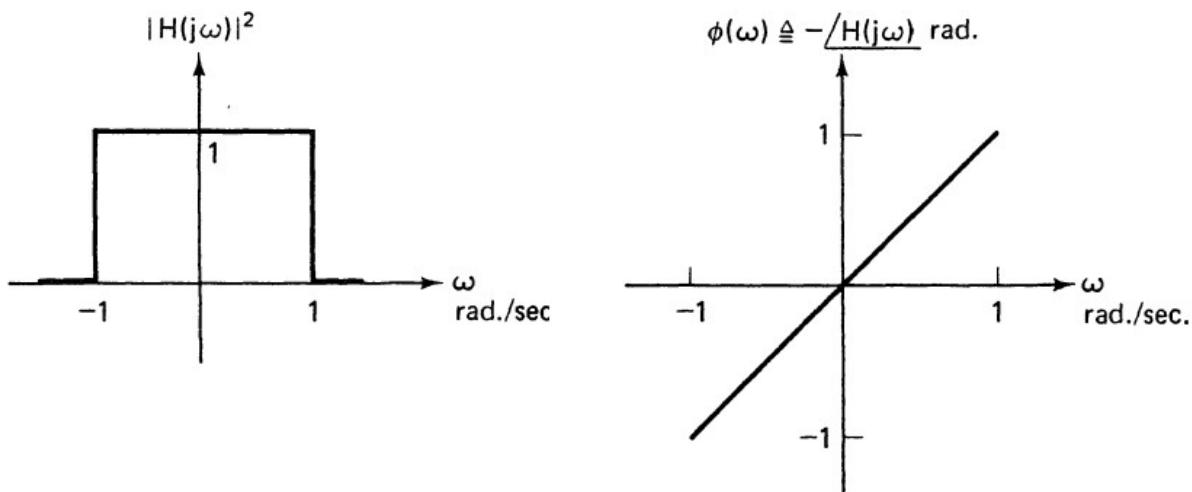


Fig. 8-2 Características de frecuencia de los filtros normalizados ideales  
(a) Función de magnitud (b) Función de fase

Una vez que se obtiene una aproximación apropiada del filtro de paso bajo ideal normalizado, entonces, mediante transformaciones de frecuencia adecuadas, este prototipo básico de paso bajo se puede convertir en filtros de paso alto, paso de banda, de parada de banda y otros filtros selectivos de frecuencia más complicados con múltiples bandas de paso y parada, así como otros filtros de paso bajo.<sup>87</sup>

Debido a que el filtrado es un problema de ingeniería importante, se ha encontrado que algunas aproximaciones de filtros de (8-3) son consistentemente satisfactorias y se han tabulado sus características. Algunos de estos tipos de filtros comunes son:<sup>88</sup>

1. El **filtro Butterworth**, que se caracteriza por una función de magnitud monótonamente decreciente de  $\omega$  para  $\omega > 0$ .
2. El **filtro de Chebyshev**, que se caracteriza por una función de magnitud de riple a través de la banda de paso y una función de magnitud montónicamente decreciente en la banda de supresión.
3. El **filtro Chebyshev inverso**, que se caracteriza por una función de magnitud decreciente monótona en la banda de paso y una función de magnitud de riple en la banda de supresión.
4. El **filtro elíptico** (también conocido como filtro Cauer o filtro Chebyshev doble), que se caracteriza por una función de magnitud con riple igual tanto en la banda de paso como en la banda de supresión.
5. El **filtro de Bessel** (también conocido como filtro de retardo de grupo máximo plano), que es una aproximación en serie de Taylor a las características de fase lineal cerca de  $s=0$ .

En este capítulo, entramos en algunos detalles sobre los filtros **Butterworth, Chebyshev y Bessel**.

Recuerde que en la Sección 3-2-1, la transformada de Hilbert establece que una función de red de fase mínima está completamente especificada por su función de magnitud o su función de fase. Esto

<sup>87</sup> No existen transformaciones de frecuencia (en forma de función racional) para convertir la función de transferencia de un filtro de paso bajo a la de un filtro de paso total.

<sup>88</sup> Las descripciones aquí son aplicables solo a los tipos de filtros de paso bajo.

significa que una función de transferencia no puede aproximarse tanto a la magnitud como a las características de fase del filtro de paso bajo ideal normalizado. Los filtros Butterworth, Chebyshev, Chebyshev inverso y elípticos se aproximan a la función de magnitud, y el filtro Bessel se aproxima a las características de fase del filtro de paso bajo ideal normalizado.

Antes de proceder a discutir las diversas familias de filtros de magnitud, consideremos algunas **propiedades básicas de las funciones de magnitud**. La función de magnitud al cuadrado de una función de transferencia  $H(s)$  viene dada por<sup>89</sup>

$$|H(s)|^2 = H(s)\overline{H(s)} \quad (8-4)$$

Porque los coeficientes de  $H(s)$  son reales

$$\overline{H(j\omega)} = H(\overline{j\omega}) = H(-j\omega) \quad (8-5)$$

Así,  $|H(j\omega)|^2$  puede ser calculado por

$$|H(j\omega)|^2 = H(s)H(-s)|_{s=j\omega} \quad (8-6)$$

Una función de transferencia  $H(s)$  siempre se puede escribir en forma factorizada en términos de sus polos y ceros como

$$H(s) = \frac{K(s-z_1)(s-z_2)\dots}{(s-p_1)(s-p_2)\dots} \quad (8-7)$$

por lo tanto,  $H(s) \cdot H(-s)$  se puede escribir como un producto de grupos de factores como

$$(s-z_1)(-s-z_1) = z_1^2 - s^2 \quad (8-8)$$

Cuando  $s=j\omega$ , el lado derecho de (8-8) se convierte en  $(z_1^2 + \omega^2)$ . Por lo tanto, la magnitud al cuadrado de una función de transferencia  $H(s)$  siempre se puede escribir en la forma

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{K^2(\omega^2 + z_1^2)(\omega^2 + z_2^2)\dots}{(\omega^2 + p_1^2)(\omega^2 + p_2^2)\dots} \quad (8-9)$$

Si todos los polos y ceros de  $H(s)$  son reales, entonces (8-9) implica que  $|H(s)|^2$  es positivo y real y es una función de  $\omega^2$ . Consideremos ahora el caso en el que algunos o todos los polos y ceros de  $H(s)$  son complejos. Debido a que los polos y ceros complejos de cualquier función de transferencia deben ocurrir en pares conjugados<sup>90</sup>, supongamos que  $z_2 = \bar{z}_1$ . Entonces los factores que involucran a  $z_1$  y  $z_2$  se pueden agrupar como

$$(\omega^2 + z_1^2)(\omega^2 + z_2^2) = \omega^4 + \omega^2(z_1^2 + z_2^2) + z_1^2 z_2^2 \quad (8-10)$$

Si escribimos

$$z_1 = a_1 + jb_1 \quad (8-11a)$$

donde  $a_1$  y  $b_1$  son números reales, entonces

$$z_2 = a_1 - jb_1 \quad (8-11b)$$

$$z_1^2 = a_1^2 + 2ja_1b_1 - b_1^2 \quad (8-11c)$$

$$z_2^2 = a_1^2 - 2ja_1b_1 - b_1^2 \quad (8-11d)$$

Sustituyendo (8-11) en (8-10), obtenemos

<sup>89</sup> Para evitar raíces cuadradas, generalmente trabajamos con el cuadrado de la función de magnitud.

<sup>90</sup> Este es el caso cuando todos los coeficientes de una función de transferencia son reales. Como los coeficientes de una función de transferencia son sumas y productos de los valores de los parámetros de los elementos del circuito y los valores de los parámetros de los elementos siempre son reales, los coeficientes de una función de transferencia de cualquier filtro pasivo o activo siempre son reales. Por lo tanto, sus polos y ceros complejos siempre ocurren en pares conjugados.

$$\begin{aligned}(\omega^2 + z_1^2)(\omega^2 + z_2^2) &= \omega^4 + 2(a_1^2 - b_1^2)\omega^2 + (a_1^2 + b_1^2)^2 \\&= (\omega^2 - b_1^2)^2 + a_1^2(2\omega^2 + 2b_1^2 + a_1^2) \quad (8-12) \\&\geq 0 \text{ for all } \omega\end{aligned}$$

En consecuencia,  $(\omega^2 + z_1^2)(\omega^2 + z_2^2)$  con  $z_2 = \bar{z}_1$  es un polinomio de  $\omega^2$  con coeficientes reales, y este polinomio es mayor que cero para todo  $\omega$  real<sup>91</sup>. Al reunir todos los factores, tenemos:

**TEOREMA 8-1** Tanto el numerador como el denominador polinomios de la función de magnitud al cuadrado de una función de transferencia son polinomios de  $\omega^2$  con coeficientes reales, y estos polinomios son mayores que cero para todo  $\omega$  real.

Los requisitos establecidos en el Teorema 8-1 deben cumplirse con cualquier función de transferencia. En el proceso de aproximar la función de magnitud de un filtro de paso bajo ideal normalizado, debemos estar seguros de que la función de magnitud resultante satisface los requisitos establecidos en el teorema 8-1, o de lo contrario la función de transferencia aproximada será inútil porque no será realizable.

---

91 Aquí, realmente queremos decir que el polinomio es mayor que cero para todo  $\omega$  excepto posiblemente en un número finito de puntos donde el polinomio es igual a cero. Esta es la interpretación a continuación.

## 8-1 La aproximación de Butterworth

Una aproximación que se utiliza con frecuencia al filtro de paso bajo ideal normalizado es el conjunto de funciones de Butterworth. La función de Butterworth de enésimo orden está dada por

$$B_n(\omega) = \frac{1}{1 + \omega^{2n}} \quad n=1,2,\dots \quad (8-13)$$

Para cada valor de  $n$ , la función de Butterworth  $B_n(\omega)$  tiene las propiedades previamente derivadas de una función de magnitud al cuadrado como se indica en el Teorema 8-1: Tanto su numerador como su denominador son polinomios de  $\omega^2$  con coeficientes reales, y  $B_n(\omega) > 0$  para todo  $\omega$ . Por tanto, una función de Butterworth puede ser la función de magnitud de una función de transferencia realizable.

Un filtro Butterworth de paso bajo normalizado de enésimo orden tiene una función de magnitud dada por

$$|H(j\omega)|^2 = B_n(\omega) = \frac{1}{1 + \omega^{2n}} \quad (8-14)$$

Una ilustración gráfica de (8-14) es mostrada en la Fig. 8-3.

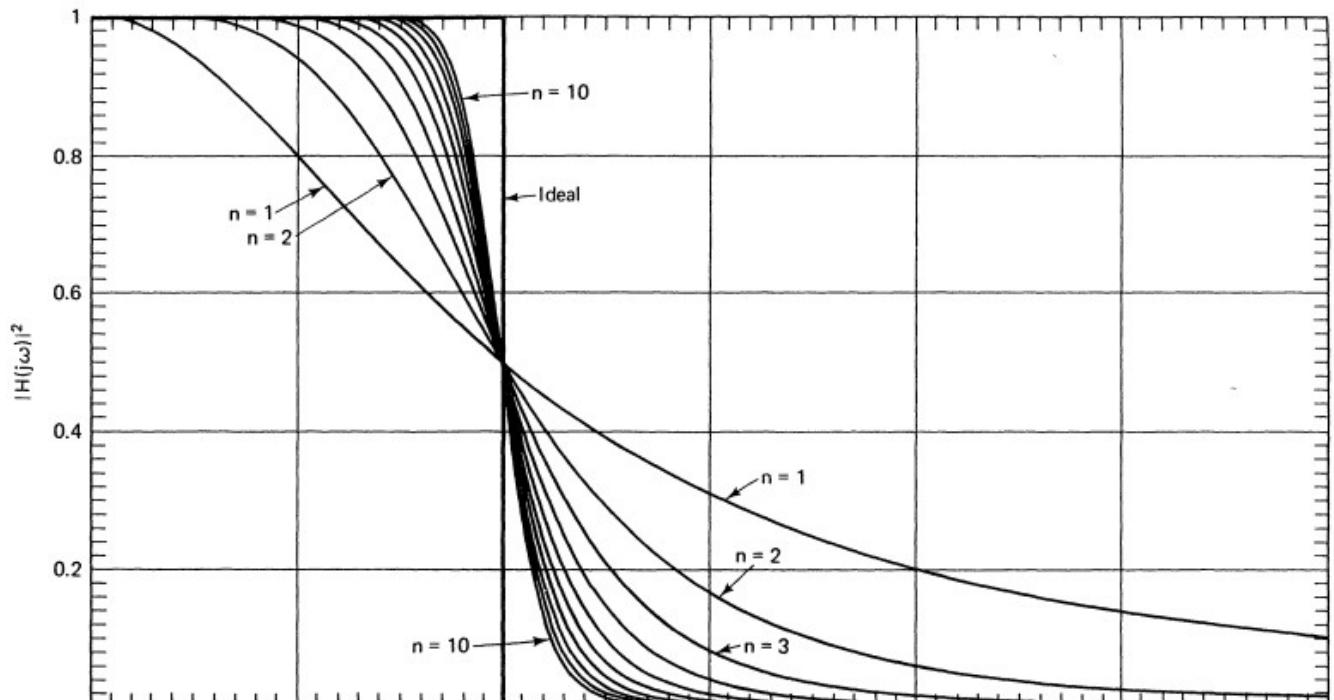


Fig. 8.3

Observe que cuando  $n \rightarrow \infty$ , la función de magnitud de Butterworth se aproxima a las características de magnitud ideal de la Fig. 8-2 (a). A medida que aumenta el orden  $n$  del filtro de Butterworth, la función de magnitud está más cerca de la unidad en la banda de paso, la banda de transición es más estrecha y la función de magnitud está más cerca de cero en la banda de supresión.

Por tanto,  $n$  es un parámetro elegido para satisfacer un conjunto de especificaciones prescritas de banda de paso y banda de parada. La Fig. 8-4 es otro gráfico de (8-14) con la escala vertical dada en dB, donde

$$|H(j\omega)| \text{dB} \triangleq -10 \log |H(j\omega)|^2 \quad (8-15)$$

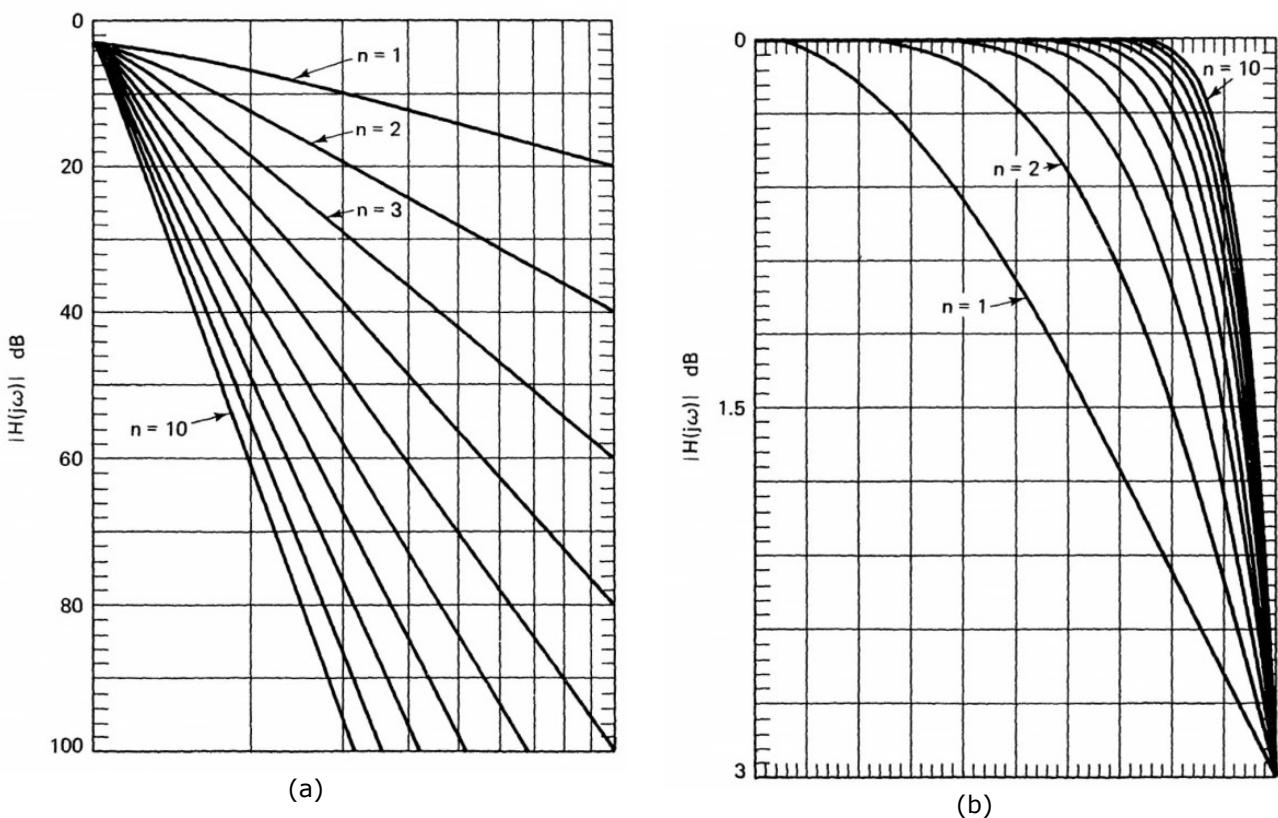


Fig 8.2

Las características de fase.

$$\Phi(\omega) \triangleq -\angle H(j\omega) \quad (8-16)$$

En la Fig. 8-5 se muestra un filtro Butterworth de paso bajo normalizado de enésimo orden. Tenga en cuenta que para  $\omega$  muy pequeño, la función de fase se comporta casi linealmente, especialmente para valores bajos de  $n$ .

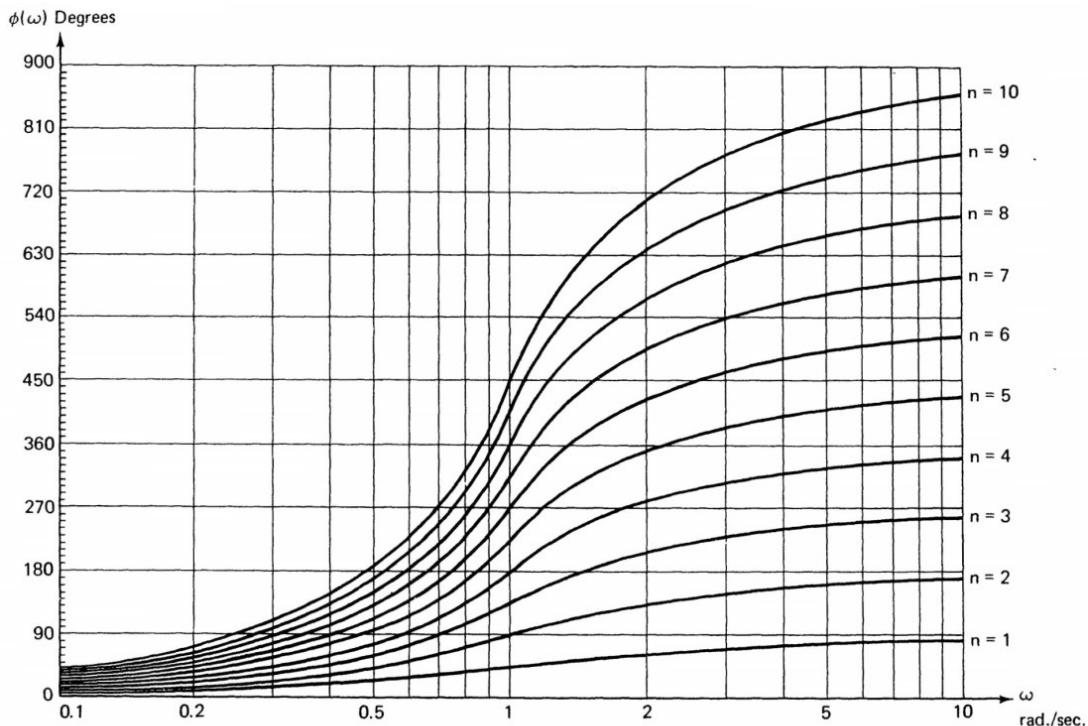


Fig. 8-5 Phase characteristics of Butterworth filters.

### 8-1-1. Propiedades básicas.

Según (8-14) y la Fig. 8-3, el filtro Butterworth de paso bajo normalizado tiene las siguientes propiedades básicas:

**PROPIEDAD DE BUTTERWORTH 1:** Para cada  $n$ , tenemos.

$$|H(j0)|^2=1, |H(j1)|^2=0.5, \text{ y } |H(j\infty)|^2=0 \quad (8-17)$$

Esto implica que la de ganancia (el valor de magnitud en  $\omega=0$ ) es 1 y la frecuencia de corte 3 dB es de 1 rad./seg.<sup>92</sup>

**PROPIEDAD DE BUTTERWORTH 2:** Las funciones de magnitud de los filtros Butterworth son monótonamente decrecientes para  $\omega \geq 0$ . Por lo tanto,  $|H(j\omega)|$  tiene su valor máximo en  $\omega=0$ .

**PROPIEDAD DE BUTTERWORTH 3:** Las primeras derivadas  $(2n-1)$  de un filtro Butterworth pasa bajos de enésimo orden son cero en  $\omega=0$ . Por esta razón, los filtros Butterworth también se denominan filtros de magnitud máxima plana.

**PROPIEDAD DE BUTTERWORTH 4:** La caída de alta frecuencia de un filtro Butterworth de orden  $n$  es de  $20n \text{ dB/década}$ , como se ilustra en la Fig. 8-6.

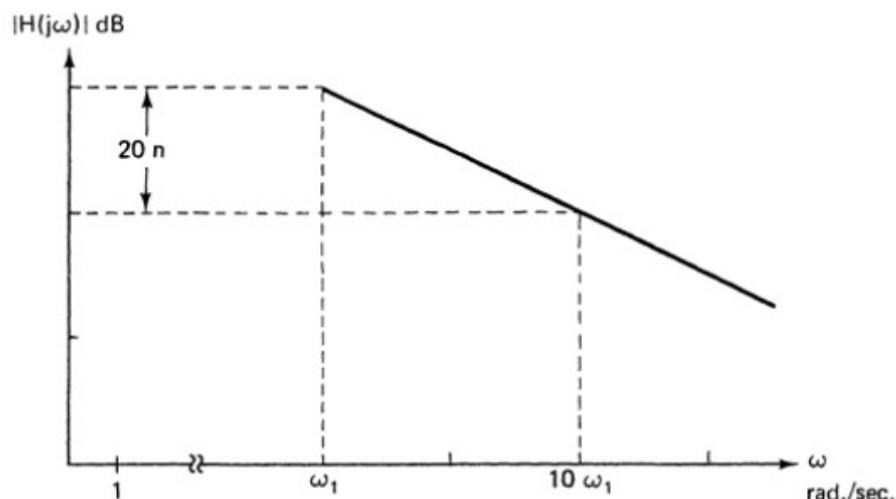


Fig. 8-6 High-frequency roll off of an  $n$ th-order Butterworth filter.

La propiedad 1 es obvia en (8-14). Para ver que la propiedad 2 es verdadera, diferenciamos (8-14) para obtener

$$\frac{d}{d\omega}|H(j\omega)|^2 = \frac{-2n\omega^{2n-1}}{(1+\omega^{2n})^2} \quad (8-18)$$

Observe que

$$\frac{d}{d\omega}|H(j\omega)|^2 = 2|H(j\omega)| \frac{d}{d\omega}|H(j\omega)| \quad (8-19)$$

<sup>92</sup> La frecuencia de corte  $\omega_c$  es la frecuencia en la que la función de magnitud al cuadrado es igual a 0.5. Esto implica que  $\omega_c$  se puede calcular a partir de la siguiente ecuación:  $|H(j\omega_c)|^2 = 1/2$ . En términos de dB,  $\omega_c$  es el punto en el que la función de atenuación está en:  $-10 \log|H(j\omega)|^2 = -10 \log(1/2) \approx 3 \text{ dB}$ .

sustituyendo (8-14) y (8-18) en (8-19), tenemos

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{d\omega}|H(j\omega)| &= \frac{1}{2|H(j\omega)|} \frac{d}{d\omega}|H(j\omega)|^2 \\
 &= -\frac{1}{2\left[\frac{1}{1+\omega^{2n}}\right]^{1/2}} \frac{2n\omega^{2n-1}}{(1+\omega^{2n})^2} \\
 &= -\frac{n\omega^{2n-1}}{[1+\omega^{2n}]^{3/2}}
 \end{aligned} \tag{8-20}$$

Debido a que la derivada de la función de magnitud es negativa para todo  $\omega>0$ ,  $|H(j\omega)|$  es una función decreciente de  $\omega$  para  $\omega\geq 0$ . La propiedad 3 se puede mostrar realizando el binomio, o de manera equivalente, la expansión de la serie de Taylor<sup>93</sup> de  $|H(j\omega)|^2$  en  $\omega$  cerca de cero:

$$|H(j\omega)|^2 = 1 - \omega^{2n} + \omega^{4n} - \dots \tag{8-21}$$

Desde (8-21), obtenemos

$$\left[ \frac{d^k}{d\omega^k} |H(j\omega)|^2 \right]_{\omega=0} = 0 \tag{8-22}$$

para  $k=1,2,\dots,2n-1$ . Finalmente, para la Propiedad 4,  $\omega \gg 1$ , luego podemos aproximar

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+\omega^{2n}} \approx \frac{1}{\omega^{2n}} \tag{8-23}$$

En términos de dB, (8-23) da

$$\begin{aligned}
 -10 \log |H(j\omega)|^2 &\approx -10 \log \frac{1}{\omega^{2n}} \\
 &= 10 \log \omega^{2n} = 20n \log \omega \text{ dB}
 \end{aligned} \tag{8-24}$$

---

93 La expansión de la serie de Taylor de  $f(x)$  en  $x=0$  está dada por  $f(x)=f(0)+f'(0)x+(1/2)f''(0)x^2+\dots$ . Si  $f(x)=1/(1+x)$ , entonces la expansión toma la forma,  $1/(1+x)=1-x+x^2-x^3+\dots$ . Al tomar la expansión de Taylor de (8-14), dejamos  $x=\omega^{2n}$ .

### 8-1-2. Función de transferencia.

En el Capítulo 3, presentamos un método para construir la función de fase mínima de una función de magnitud dada. Por conveniencia, reproducimos el procedimiento de construcción aquí:

**PASO 0.** Dada la función de magnitud de un filtro de Butterworth de enésimo orden, formemos

$$\begin{aligned} h(s) \triangleq H(s)H(-s) &= H(j\omega)^2 \Big|_{\omega=s/j} \\ &= \frac{1}{1+\omega^{2n}} \Big|_{\omega=s/j} = \frac{1}{1+(-1)^n s^{2n}} \end{aligned} \quad (8-25)$$

**PASO 1.** Factoriza  $h(s)$  en polinomios de primer y segundo orden. De (8-25), observamos que  $h(s)$  no tiene ceros finitos, y los polos de  $h(s)$  ocurren con simetría cuadrantal. Por tanto, el numerador de  $H(s)$  es 1.

**PASO 2.** Asigne los factores asociados con los polos del plano-s LH de  $h(s)$  a  $H(s)$ . Multiplica estos factores para formar el denominador de  $H(s)$ .

**Ejemplo 8-1** Encuentre la función de transferencia del filtro Butterworth de paso bajo normalizado de tercer orden.

**Solución:** Seguimos los pasos de construcción descritos anteriormente con  $n=3$ .

**Paso 0.** la forma:

$$H(s)H(-s) = |H(j\omega)|^2 \Big|_{\omega=s/j} = \frac{1}{1-s^6}$$

**Paso 1.** El factor  $H(s)H(-s)$  como.

$$\begin{aligned} H(s)H(-s) &= \frac{1}{1-s^6} \\ &= \frac{1}{(s+1)(s^2+s+1)(-s+1)(s^2-s+1)} \end{aligned} \quad (8-26)$$

En este proceso de factorización, puede valer la pena aprovechar las propiedades de las ubicaciones de los polos de  $H(s)H(-s)$ .

**Paso 2.** Asigne los factores del plano-s LH  $(s+1)$  y  $(s^2+s+1)$  a  $H(s)$  como

$$H(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+s+1)}$$

Multiplique el conjunto de factores para formar

$$H(s) = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1} \quad (8-27)$$

la cual es la función de transferencia del filtro pasa bajos Butterworth de tercer orden normalizado.

En el corazón de este proceso es la factorización de  $H(s)H(-s)$ . Observe que los polos de  $H(s)H(-s)$  son las soluciones de la ecuación

$$(-1)^n s^{2n} + 1 = 0 \quad (8-28)$$

Consideremos primero el caso cuando  $n$  es par. Entonces (8-28) se reduce a

$$s^{2n} + 1 = 0$$

o

$$s^{2n} = -1 = e^{j(2k-1)\pi} \quad (8-29)$$

donde  $k$  es un número entero. Por tanto, los polos  $\hat{s}_k$  de  $H(s)H(-s)$  son

$$\begin{aligned} \hat{s}_k &= \cos \frac{2k-1}{2n}\pi + j \sin \frac{2k-1}{2n}\pi \\ &= \cos \hat{\theta}_k + j \sin \hat{\theta}_k \quad k=1,2,\dots,2n \end{aligned} \quad (8-30)$$

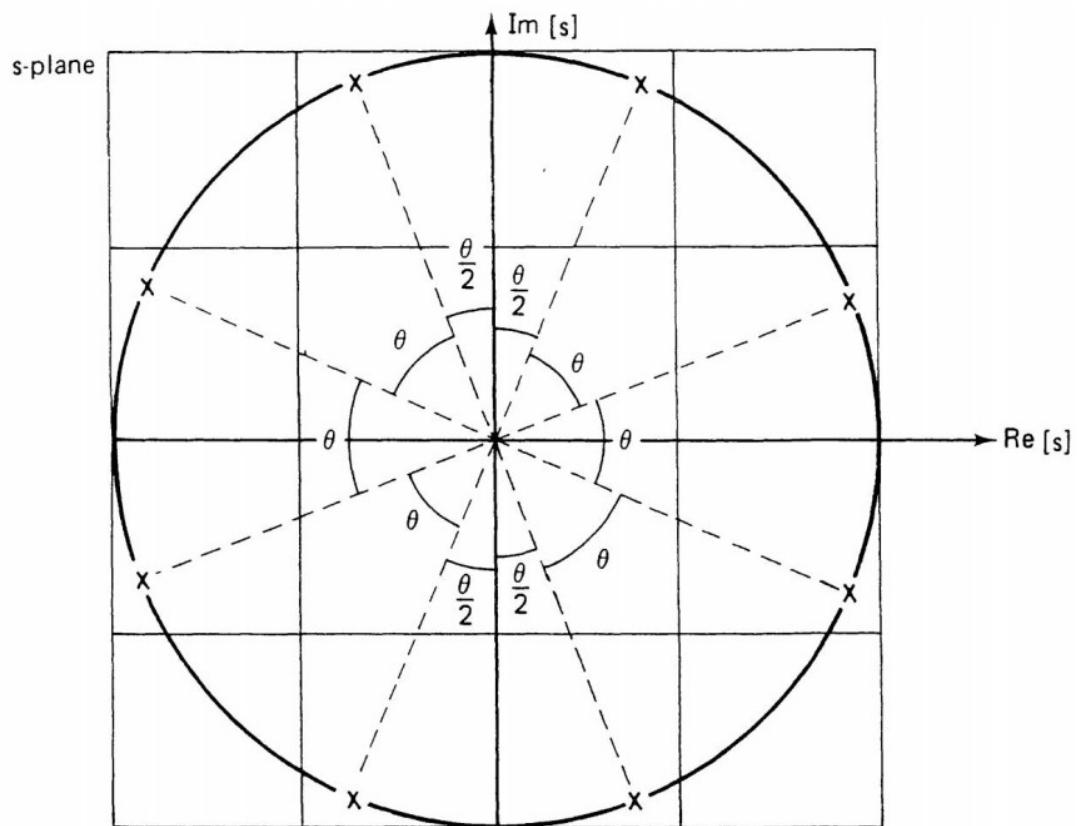
donde

$$\hat{\theta}_k = \frac{(2k-1)\pi}{2n} \quad y \quad k=1,2,\dots,2n \quad (8-31)$$

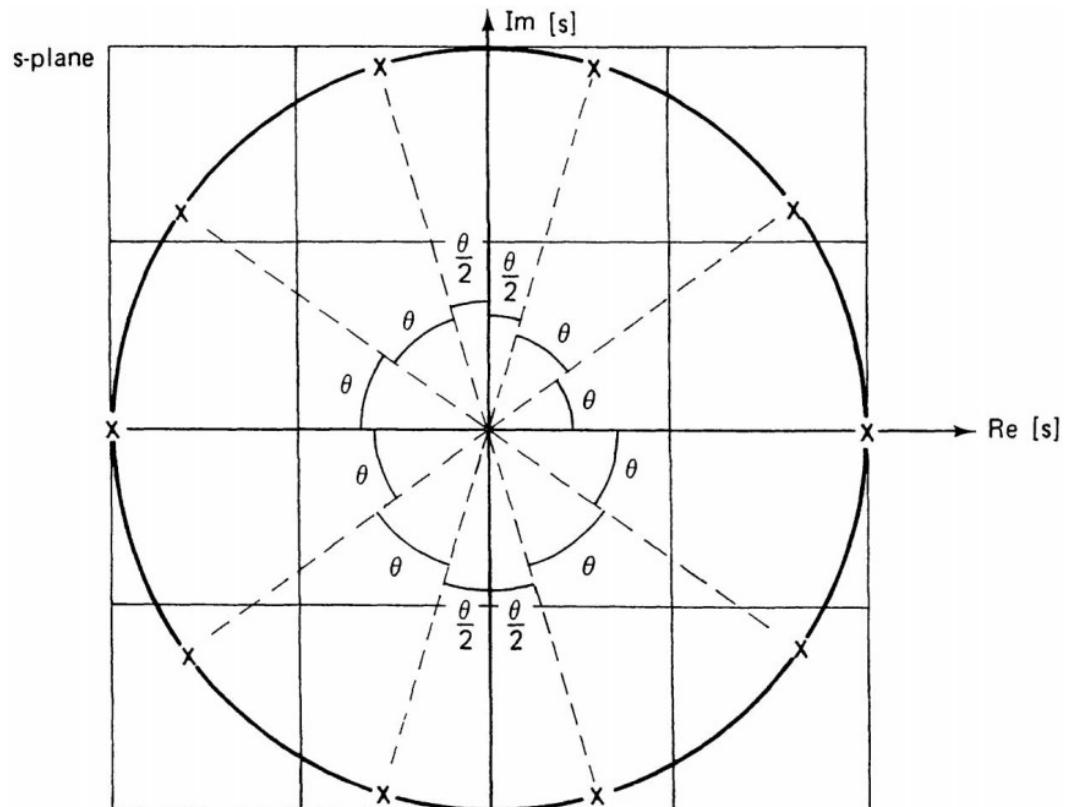
Estas ubicaciones de los polos se muestran en las Figs. 8-7(a) y 8-7(6) para los casos  $n=4$  y  $n=5$ , respectivamente. Tenga en cuenta que  $\hat{s}_k$ , ocurre en la misma ubicación de polo que la de  $\hat{s}_{k'}$  donde

$$k' \triangleq 2mn+k \quad (8-32)$$

y  $m$  es un entero. Porque  $\hat{\theta}_k$  comienza desde el real positivo y va en sentido antihorario, el etiquetado de los polos comienzan en el primer cuadrante o en el plano-s RH, como se ilustra en la Fig. 8-8.

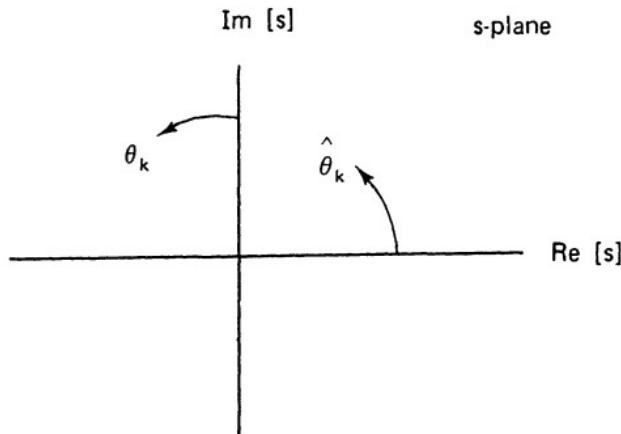


(a)  $n = \text{par}$  . Sin polo en el eje real. En este caso  $n=4$  ,  $\theta=45^\circ$



(b)  $n = \text{impar}$  . Tal como un polo en  $s=-1$  . En este caso  $n=5$  ,  $\theta=36^\circ$

Fig. 8-7 Ubicaciones de los polos de un filtro Butterworth de paso bajo de orden  $n$ ,  
 (a)  $n=4$  . (b)  $n=5$  .

Fig.8-8 Ilustraciones de los barridos de  $\theta_k$  y  $\hat{\theta}_k$ 

Sin embargo, estamos mas interesados en la los polos del plano-s LH. En consecuencia para extraer solamente los polos del plano-s LH, definimos.

$$s_k \triangleq \hat{s}_{k+(n/2)} \quad (8-33a)$$

y

$$\theta_k \triangleq \hat{\theta}_{k+(n/2)} - \frac{\pi}{2} \quad (8-33b)$$

Si ahora sustituimos  $k=1,2,\dots$  en (8-33), encontramos que  $\theta_k$  inicia la medición del ángulo desde el eje imaginario positivo del plano-s y va en sentido antihorario, como se muestra en la Fig 8-8 . De esta forma,  $\theta_k$  barre los primero  $n$  polos del plano-s LH. En términos de  $\theta_k$  , los polos del plano-s de LH de  $H(s)H(-s)$  están dados por

$$\begin{aligned} s_k &\triangleq \hat{s}_{k+(n/2)} = \cos \hat{\theta}_{k+(n/2)} + j \sin \hat{\theta}_{k+(n/2)} \\ &= \cos\left(\theta_k + \frac{\pi}{2}\right) + j \sin\left(\theta_k + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -\sin \theta_k + j \cos \theta_k \end{aligned} \quad (8-34)$$

Donde

$$\theta_k = \frac{2k-1}{2n} \pi \quad (8-35)$$

y  $k=1,2,\dots,n$  . Observe que los polos del plano-s RH  $s_k^{RH}$  están dados por.

$$s_k^{RH} = \sin \theta_k + j \cos \theta_k \quad (8-36)$$

Donde  $\theta_k$  esta dada por la (8-35) y  $k=1,2,\dots,n$  . De una forma similar, podemos mostrar que los polos del plano-s LH de  $H(s)H(-s)$  están también dados por (8-34) y (8-35) donde  $n$  es un entero impar en (8.28). Por lo tanto,

$$H(s) = \prod_{k=1}^n \frac{1}{s - s_k} = \prod_{k=1}^n \frac{1}{s - \sigma_k - j \omega_k} \quad (8-37a)$$

donde

$$s_k = \sigma_k + j \omega_k \quad (8-37b)$$

$$\sigma_k = -\sin \theta_k \quad (8-37c)$$

$$\omega_k = \cos \theta_k \quad (8-37d)$$

$$\theta_k = \frac{2k-1}{2n} \pi \quad (8-37e)$$

y  $k=1,2,\dots,n$ . Observe que

$$|s_k|^2 = \sigma_k^2 + \omega_k^2 = \sin^2 \theta_k + \cos^2 \theta_k = 1 \quad (8-38)$$

Aunque, los polos de  $H(s)$  están sobre un círculo unitario.<sup>94</sup> Si  $s_k$  es un polo real, luego

$$\theta_k = \frac{\pi}{2} \quad y \quad s_k = -1 \quad (8-39)$$

En vista de (8-37e), (8-39) puede ocurrir solamente cuando  $n$  es un entero impar. De otro modo, si  $s_k$  es un polo complejo, entonces  $\bar{s}_k$  (el conjugado complejo de  $s_k$ ) es también un polo complejo, y el producto  $(s-s_k)$  y  $(s-\bar{s}_k)$  dan

$$\begin{aligned} (s-s_k)(s-\bar{s}_k) &= (s-\sigma_k-j\omega_k)(s-\sigma_k+j\omega_k) \\ &= s^2 - 2\sigma_k s + \sigma_k^2 + \omega_k^2 \\ &= s^2 + (2\sin \theta_k)s + 1 \end{aligned} \quad (8-40)$$

con la (8-39) y la (8-40), podemos escribir (8-37a) como

$$H(s) = \prod_{k=1}^{n/2} \frac{1}{s^2 + (2\sin \theta_k)s + 1} \quad (8-41a)$$

donde  $n$  es par, y

$$H(s) = \frac{1}{(s+1)} \prod_{k=1}^{n/2} \frac{1}{s^2 + (2\sin \theta_k)s + 1} \quad (8-41b)$$

donde  $n$  es impar, donde  $\theta_k$  está dado por (8-37e). Por ejemplo, la función de transferencia del filtro de Butterworth pasa-bajos normalizado de segundo orden es dado por.

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + (2\sin \frac{\pi}{4})s + 1} = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1} \quad (8-42a)$$

Y la función de transferencia de tercer orden esta dada por

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{1}{(s+1)} \frac{1}{s^2 + (2\sin \frac{\pi}{6})s + 1} \\ &= \frac{1}{(s+1)(s^2 + s + 1)} \end{aligned} \quad (8-42b)$$

En vista de (8-38) (que las magnitudes de los polos de Butterworth son uno) y (8-37e) (que los ángulos de fase de los polos están uniformemente espaciados), podemos ubicar los polos de un enésimo orden del filtro de Butterworth de pasa-bajos normalizado gráficamente de la siguiente manera:

1. Construye un círculo unitario en el plano-s.
2. Sea  $\theta_k \triangleq \pi/n$ . Con los ángulos medidos en sentido del reloj desde el eje imaginario positivo, dibuja las líneas radiales de los ángulos  $\theta/2, 3\theta/2, 5\theta/2, \dots, [(2n-1)/2]\theta$
3. Las intersecciones de estas líneas radiales y el círculo unitario dan las ubicaciones de los polos de  $H(s)$ . Consulte la Fig. 8-7 para ver ejemplos cuando  $n=4$  y cuando  $n=5$ . Cuando  $n$  es un número entero impar, el punto  $s=-1$  es un polo de  $H(s)$ .

<sup>94</sup> Un círculo unitario es un círculo con un radio de uno y con el origen como centro.

Cuando la frecuencia de un filtro de paso bajo se escala de modo que la frecuencia de corte esté en  $\omega_c$  rad./seg. en lugar de a 1 rad./seg., los polos se mueven a lo largo de las líneas radiales hasta los puntos correspondientes en un círculo de radio  $\omega_c$ . Por lo tanto, el diagrama de polo cero sigue siendo el mismo en la escala de frecuencia (que se discutirá más adelante) excepto por un cambio de escala.

### 8-1-3. Realización del circuito.

Como es indicado por (8-41), la función de transferencia de un filtro de Butterworth pasa bajos de enésimo orden tiene las siguiente dos importantes propiedades:

1. El polinomio denominador es un polinomio de Hurwitz.
2. Todos los ceros de transmisión están en  $s=\infty$ .

Por lo tanto, los circuitos Darlington de Sec. 7-3 se pueden usar para realizar los filtros Butterworth. En esta sección, concretamos con el caso de mayor utilidad donde el dispositivo sin perdidas de dos puertos está terminado en ambos extremos con resistores de  $R_s=1\Omega$  y  $R_l$  como se discutió en la Sección 7-3-2. En particular, mientras todos los ceros de transmisión están en  $s=\infty$ , el  $Z_{in}(s)$  asociado es realizado por la primera forma de Cauer - los inductores en serie y los capacitores en paralelo para el dispositivo sin perdida de dos puertos. Por lo tanto, las estructuras del circuito de los filtros de Butterworth pasivos de razón de voltajes son mostradas en Fig. 8-9, donde la Fig. 8-9(a) es para el caso  $R_l > R_s = 1\Omega$ , Fig. 8-9(b) es para el caso  $R_l \leq R_s = 1\Omega$ , y la Fig. 8-9(c) se aplica solamente a el caso de cuando  $R_l = R_s = 1\Omega$ <sup>95</sup>

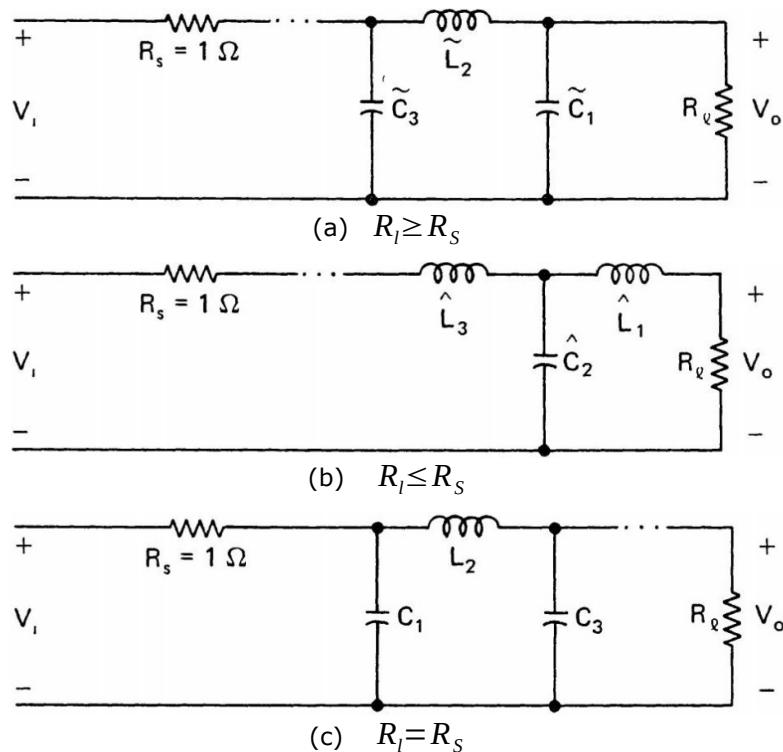


Fig. 8-9 Estructuras de circuitos de filtros Butterworth pasa bajo.

Con la elección de los coeficientes de reflexión de fase mínima y la elección de un  $Z_{in}(s)$  asociado, los valores de los elementos del circuito  $\tilde{C}_1, \tilde{L}_2, \tilde{C}_3, \tilde{L}_4, \dots, \{\hat{L}_1, \hat{C}_2, \hat{L}_3, \hat{C}_4, \dots\}$  son dados por el siguiente conjunto de fórmulas recursivas:

$$\tilde{C}_{2m-1} \tilde{L}_{2m} \{\hat{L}_{2m-1} \hat{C}_{2m}\} = \frac{\alpha_{4m-3} \alpha_{4m-1}}{1 - \lambda \beta_{4m-2} + \lambda^2} \quad (8-43a)$$

<sup>95</sup> Tenga en cuenta que, para simplificar, dejamos que  $R_s = 1\Omega$ . Se puede usar un mecanismo de escala de impedancia para escalar  $R_s$  a cualquier valor deseado.

$$\tilde{C}_{2m+1} \tilde{L}_{2m} \{ \hat{L}_{2m+1} \hat{C}_{2m} \} = \frac{\alpha_{4m-1} \alpha_{4m+1}}{1 - \lambda \beta_{4m} + \lambda^2} \quad (8-43b)$$

donde

$$\lambda = \left( \frac{R_l - 1}{R_l + 1} \right)^{1/n} \text{ para Fig. 8-9(a)} \quad (8-44a)$$

$$\lambda = \left( \frac{1 - R_l}{1 + R_l} \right)^{1/n} \text{ para Fig. 8-9(b)} \quad (8-44b)$$

$$\alpha_i = 2 \sin \frac{\pi i}{2n} \quad (8-44c)$$

y

$$\beta_i = 2 \cos \frac{\pi i}{2n} \quad (8-44d)$$

con

$$\tilde{C}_1 = \frac{\alpha_1}{R_l(1 - \lambda)} \text{ para Fig. 8-9(a)} \quad (8-45a)$$

$$\hat{L}_1 = \frac{\alpha_1 R_l}{1 - \lambda} \text{ para Fig. 8-9(b)} \quad (8-45b)$$

y

$$m = \begin{cases} 1, 2, \dots, \frac{n-1}{2} & \text{cuando } n \text{ es impar} \\ 1, 2, \dots, \frac{n}{2} & \text{cuando } n \text{ es par} \end{cases} \quad (8-45c)$$

Para iniciar el proceso recursivo de (8-43) para  $m=1, 2, \dots$ , calculamos  $\tilde{C}_1$  para la Fig. 8-9(a) {  $\hat{L}_1$  para la Fig. 8-9(b) } a partir de (8-45). Con  $m=1$ , (8-43a) da  $\tilde{L}_2 \{ \hat{C}_2 \}$  y a su vez (8-43b) da  $\tilde{C}_3 \{ \hat{L}_3 \}$ . Repitiendo (8-43a) y (8-43b) con  $m=2$  da  $\tilde{L}_4$  y  $\tilde{C}_5 \{ \hat{C}_4 \text{ y } \hat{L}_5 \}$ . Este procedimiento puede repetirse hasta que se encuentren todos los valores necesarios de los elementos del circuito.

En el caso de que  $R_l = R_s$ , cualquiera de los circuitos de las Figs. 8-9(a) y (b) es aplicable. En este caso, el circuito resultante tendrá algunas propiedades simétricas que nos permitirán escribir la estructura del circuito del filtro Butterworth de paso bajo de izquierda a derecha, como se muestra en la Fig. 8-9(c), donde los valores de los elementos del circuito son dados por

$$C_m = 2 \sin \left[ \frac{(2m-1)\pi}{2n} \right] \text{ cuando } m \text{ es impar} \quad (8-46a)$$

y

$$L_m = 2 \sin \left[ \frac{(2m-1)\pi}{2n} \right] \text{ cuando } m \text{ es par} \quad (8-46b)$$

donde  $m=1, 2, \dots, n$ . Observe que (8-46) se puede derivar de (8-43) a (8-45) cuando  $R_l = 1\Omega$ . Por conveniencia, la tabla 8-1 da los valores de los elementos del circuito en la Fig. 8-9(c) cuando

$R_s=1\Omega$  para  $n=1,2,\dots,9$ .

TABLE 8-1 Element Values for the Circuit in Fig. 8-9(c)

$n$	$C_1$	$L_2$	$C_3$	$L_4$	$C_5$	$L_6$	$C_7$	$L_8$	$C_9$
1	2.0000								
2	1.4142	1.4142							
3	1.0000	2.0000	1.0000						
4	0.7654	1.8478	1.8478	0.7654					
5	0.6180	1.6180	2.0000	1.6180	0.6180				
6	0.5176	1.4142	1.9319	1.9319	1.4142	0.5176			
7	0.4450	1.2470	1.8019	2.0000	1.8019	1.2470	0.4450		
8	0.3902	1.1111	1.6629	1.9616	1.9616	1.6629	1.1111	0.3902	
9	0.3473	1.0000	1.5321	1.8794	2.0000	1.8794	1.5321	1.0000	0.3473

## 8-1-4. Ejemplos

**Ejemplo 8-2** Suponga que vamos a construir un filtro de paso bajo normalizado para cumplir con:

(i) la especificación de la banda de paso:

$$|H(j0.5)|^2 > 0.9 \quad (8-47a)$$

(ii) la especificación de la banda suprimida:

$$|H(j2)|^2 < 0.01 \quad (8-47b)$$

Encuentre el diseño Butterworth más simple con  $R_s=R_i=1\Omega$ .

**Solución:** Primero, determinemos el orden  $n$  del filtro Butterworth requerido para cumplir con las especificaciones de (8-47). Recuerde que la función de magnitud de un filtro Butterworth de paso bajo normalizado de enésimo orden está dada por

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+\omega^{2n}} \quad (8-48)$$

Por lo tanto, (8-47a) implica que<sup>96</sup>

$$\frac{1}{1+(0.5)^{2n}} > 0.9$$

o

$$n \geq 2 \quad (8-49a)$$

De manera similar, (8-47b) implica que

$$\frac{1}{1+2^{(2n)}} < 0.01$$

o

$$n \geq 4 \quad (8-49b)$$

Para satisfacer ambas condiciones de (8-47), se necesita un filtro Butterworth de cuarto orden. Por (8-34), los polos del plano-s LH del filtro Butterworth normalizado de cuarto orden están ubicados en

<sup>96</sup> Podemos calcular los valores propios de  $n$  para satisfacer (8-47), o podemos utilizar la gráfica de la Fig. 8-3 para determinar  $n$ .

$$s_1 = -\sin \frac{\pi}{8} + j \cos \frac{\pi}{8} = -0.3827 + j 0.9239 \quad (8-50a)$$

$$s_2 = -\sin \frac{3\pi}{8} + j \cos \frac{3\pi}{8} = -0.9239 + j 0.3827 \quad (8-50b)$$

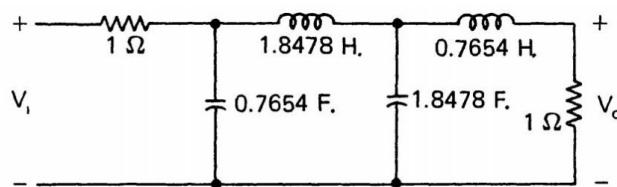
$$s_3 = -\sin \frac{5\pi}{8} + j \cos \frac{5\pi}{8} = -0.9239 - j 0.3827 \quad (8-50c)$$

$$s_4 = -\sin \frac{7\pi}{8} + j \cos \frac{7\pi}{8} = -0.3827 - j 0.9239 \quad (8-50d)$$

Por lo tanto, la función de transferencia del filtro deseado está dada por

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{1}{(s-s_1)(s-s_2)(s-s_3)(s-s_4)} \\ &= \frac{1}{[(s-s_1)(s-s_4)][(s-s_2)(s-s_3)]} \\ &= \frac{1}{(s^2+0.7654s+1)(s^2+1.8478s+1)} \\ &= \frac{1}{s^4+2.6131s^3+3.4142s^2+2.6131s+1} \end{aligned} \quad (8-51)$$

Por lo tanto, la función de transferencia del filtro deseado está dada por



**Fig. 8-10** A circuit realization of the desired filter in Example 8-2.

A partir de la tabla 8-1 y la Fig. 8-9(c), en la Fig. 8-10 se muestra una realización del circuito del filtro deseado que satisface todos los requisitos de procesamiento de señales de (8-47).

**Resolución Matlab – Ejemplo 8-2**

```

clear all; clc;
syms w 'real'
syms n 'integer'

%% datos del problema
Rl=1;
Rs=1;
atPaso=sym('0.9');
wPaso=sym('1/2');
atRechazo=sym('0.01');
wRechazo=sym('2');

%% función de transferencia propuesta
H2(w) = 1/(1+w^(2*n));

%% determinando el orden requerido
n1=vpasolve(H2(wPaso)==atPaso,n);
n1=ceil(n1);

n2=vpasolve(H2(wRechazo)==atRechazo,n);
n2=ceil(n2);

n=n2;
if n1>n
    n=n1;
end

%% determinando la H(s) según el orden
syms s K;
syms K 'real';
syms k 'integer';

H(s)=symprod(K/(s^2 + 2*sin((2*k-1)/(2*n)*pi)*s + 1), k,
1, n/2);
[B,A]=numden(vpa(collect(vpa(H(s),3)),3));
N=sym2poly(collect(B));
M=sym2poly(collect(A));
RN=roots(N);
RM=roots(M);

% verificando la simetría cuadrantal
zplane(RN,RM);

%% darlington

% ganancia según Rs y Rl
K1=solve(H(0)==Rl/(Rl+Rs),K);
H(s)=subs(H(s),K,K1(2))

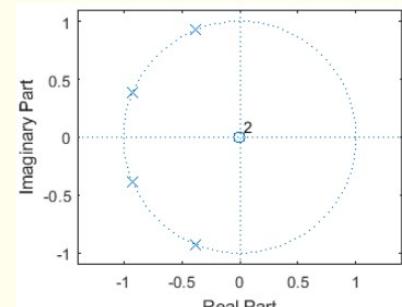
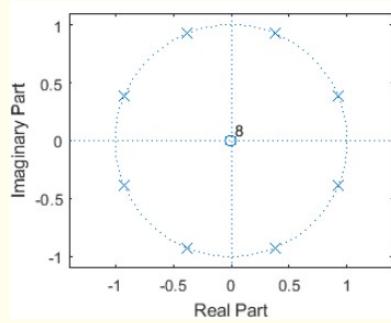
% modulo al cuadrado del coeficiente de reflexión
rho2(s) = 1 - 4*H(s)*H(-s)

[B,A]=numden(collect(rho2(s)));
N=sym2poly(collect(B));
M=sym2poly(collect(A));
RN=roots(N);
RM=roots(M);

% verificando la simetría cuadrantal visualmente
zplane(RN,RM);

% coeficiente de reflexión
rho(s)=collect(prod((s-RN(1:n))./(s-RM(1:n))));
[n,d]=numden(rho(s));
dp=sym2poly(d);
rho(s)=vpa(collect(n/dp(1))/collect(d/dp(1)),4)

```



```
% posibles soluciones de la impedancia de entrada
Zin1(s)=(1-rho(s))/(1+rho(s));
Zin2(s)=(1+rho(s))/(1-rho(s));

% realización por cauer 1.
FLC(s)=Zin1(s);

vpa(collect(Zin1(s)),3)

clear k m;
m=1;
k=[];
while FLC(s) ~= Inf
    FLC(s)=1/FLC(s);
    [n,d]=numden(collect(FLC(s)));
    np=sym2poly(n);
    dp=sym2poly(d);
    [r,p,k1]=residue(np,dp);
    if length(r)>0
        FLC(s)=sum( r(1:end)./(s-p(1:end)));
        k(m)=k1(1);
        m=m+1;
    else
        k(m)=k1(1);
        k(m+1)=k1(2);
        break;
    end
end

display(k)
```

Forma alternativa aplicando

$$C_m = 2 \sin \left[ \frac{(2m-1)\pi}{2n} \right] \text{ cuando } m \text{ es impar} \quad (8-46a)$$

y

$$L_m = 2 \sin \left[ \frac{(2m-1)\pi}{2n} \right] \text{ cuando } m \text{ es par} \quad (8-46b)$$

```

clear all; clc;
syms w 'real'
syms n 'integer'

%% datos del problema
Rl=1;
Rs=1;
atPaso=sym('0.9');
wPaso=sym('1/2');
atRechazo=sym('0.01');
wRechazo=sym('2');

%% función de transferencia propuesta
H2(w) = 1/(1+w^(2*n));

%% determinando el orden requerido
n1=vpasolve(H2(wPaso)==atPaso,n);
n1=ceil(n1);

n2=vpasolve(H2(wRechazo)==atRechazo,n);
n2=ceil(n2);

n=n2;
if n1>n
    n=n1;
end

%% determinando la H(s) según el orden
syms s K;
syms K 'real';
syms k 'integer';

% función de transferencia en forma simbólica
H_simb(s)=symprod(K/(s^2 + 2*sin((2*k-1)/(2*n)*pi)*s +
1), k, 1, n/2)

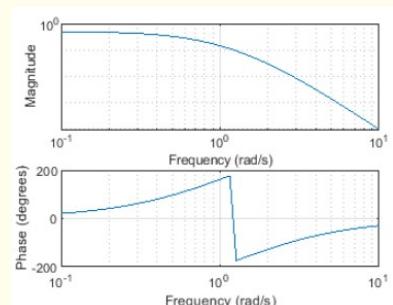
% función de transferencia numérica
% con el comando poly reconstruyo el denominador a
% partir de las raíces
roots=2*sin((2*[1:4]-1)/(2*4)*pi);
dp=poly(roots);
H(s)=K/poly2sym(dp,s);
var = vpa(H(s),3) %coeficientes aproximados

% mostrando respuesta en magnitud y fase - extraído del
% taan (pag 451)
w = logspace(-1,1);
freqs([1],dp,w)

%% imprimiendo coeficientes para la realización - según
% ecuaciones 8-46a y 8-46b
vpa(roots,3)

```

$$\begin{aligned}
H_{\text{simb}}(s) &= \\
&\frac{K^2}{(s^2 + \sqrt{2} + 2s + 1)(s^2 + \sqrt{2} - 2s + 1)} \\
\text{var} &= \\
&\frac{K}{s^4 - 5.23s^3 + 9.66s^2 - 7.39s + 2.0}
\end{aligned}$$



$$\text{ans} = (0.765 \quad 1.85 \quad 1.85 \quad 0.765)$$

**Ejemplo 8-3** Suponga que se desea un filtro de paso bajo normalizado máximamente plano con una atenuación de banda de paso inferior a  $0.5 \text{ dB}$  para  $0 \leq \omega \leq 0.5 \text{ rad./seg.}$  y con una atenuación de banda suprimida de al menos  $20 \text{ dB}$  hacia abajo para  $\omega \geq 4 \text{ rad./seg.}$ . Encuentre los circuitos de filtro deseados cuando

$$(a) R_l = 2 R_s$$

$$(b) R_l = 0.5 R_s$$

**Solución:** Primero, determinemos el orden  $n$  del filtro Butterworth requerido para cumplir con las especificaciones. Las especificaciones de la banda de paso y de la banda de parada implican que

$$-10 \log \frac{1}{1 + (0.5)^{2n}} < 0.5 \quad (8-52a)$$

y

$$-10 \log \frac{1}{1 + 4^{2n}} > 20 \quad (8-52b)$$

Después de alguna manipulación algebraica de (8-52) o consultando las gráficas de la Fig. 8-4, encontramos que  $n \geq 2$  satisfará (8-52). Por lo tanto, se desea un filtro de valor de Butterworth de segundo orden. Esto significa que la función de transferencia deseada viene dada por

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1} \quad (8-53)$$

Para el caso (a), cuando  $R_l = 2 R_s$ , usamos la estructura de circuito de la Fig. 8-9(a), donde  $R_s = 1\Omega$  y  $R_l = 2\Omega$ . Los valores de los elementos de  $\tilde{C}_1$  y  $\tilde{L}_2$  están dados por (8-43) hasta (8-45) como

$$\lambda = \left( \frac{2-1}{2+1} \right)^{1/2} = 0.58 \quad (8-54)$$

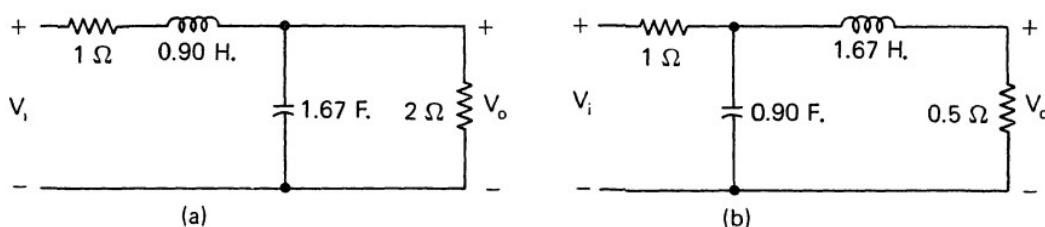
$$\tilde{C}_1 = \frac{\alpha_1}{R_l(1-\lambda)} = \frac{2 \sin \frac{\pi}{4}}{2(1-0.58)} = 1.67 \text{ F.} \quad (8-55a)$$

$$\begin{aligned} \tilde{C}_1 \tilde{L}_2 &= \frac{\alpha_1 \alpha_3}{1 - \lambda \beta_2 + \lambda^2} \\ &= \frac{4 \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{3\pi}{4}}{1 - 0.58(2 \cos \frac{\pi}{2}) + (0.58)^2} = 1.5 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\tilde{L}_2 = \frac{1.5}{\tilde{C}_1} = 0.90 \text{ H.} \quad (8-55b)$$

El circuito de filtro deseado se muestra en la Fig. 8-11(a).



**Fig. 8-11** Two circuit realizations of the desired filter of Example 8-3.

Cuando  $R_l = 0.5 R_s \Omega$ , usamos la estructura de circuito de la Fig. 8-9(b), donde  $R_s = 1\Omega$  y

$R_l=0.5\Omega$ . En este caso, los valores de los elementos de  $\hat{L}_2$  y  $\hat{C}_2$  pueden obtenerse mediante

$$\lambda = \left( \frac{0.5}{1.5} \right)^{1/2} = 0.58 \quad (8-56)$$

$$\hat{L}_1 = \frac{\alpha_1 R_l}{1 - \lambda} = 1.67 \text{ H.} \quad (8-57a)$$

$$\hat{C}_2 = \frac{1.5}{\hat{L}_1} = 0.90 \text{ F.} \quad (8-57b)$$

El diseño del circuito resultante se muestra en la Fig. 8-11(b).<sup>97</sup>

Ambos circuitos en la figura 8-11 son realizaciones de (8-53) y por lo tanto satisfacen las especificaciones prescritas de (8-52).

---

97 Observe que los circuitos de las Figs. 8-11(a) y (b) son duales entre sí.

## 8-2 La aproximación de Chebyshev

Un filtro que usa todos sus grados de libertad para hacer que su respuesta de magnitud sea plana en el origen, como un filtro Butterworth, puede no ser el mejor filtro. En muchas situaciones, es más importante tener una buena aproximación uniforme en toda la banda de paso. Un filtro que tiene esta propiedad de aproximación uniforme es el filtro de Chebyshev. La respuesta de magnitud del filtro Chebyshev oscila entre dos valores en la banda de paso, como se muestra en la Fig. 8-12. El número de ondas en la banda de paso depende del orden  $n$  del filtro. La amplitud de la ondulación es un parámetro libre.

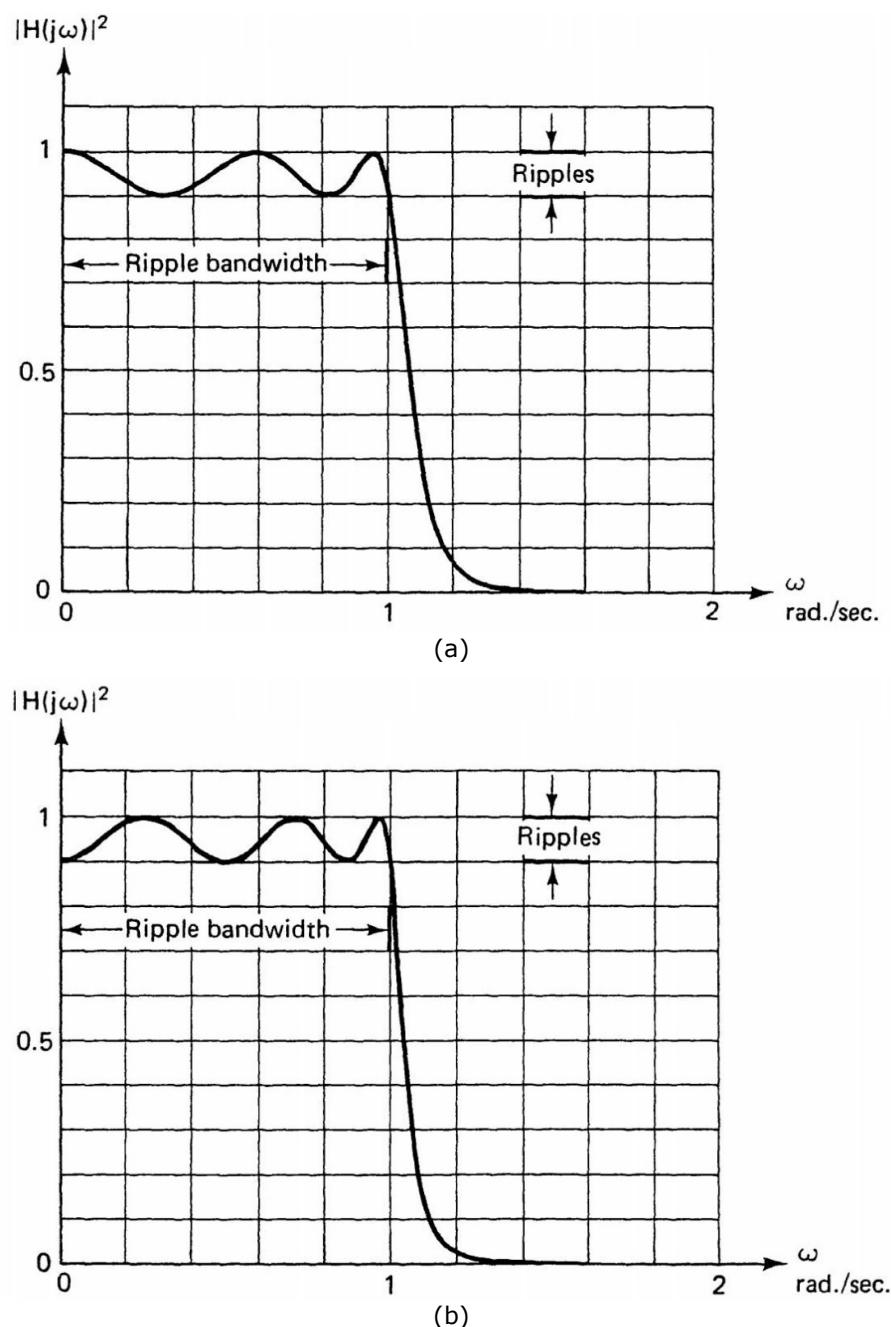


Fig. 8-12 Características de magnitud de los filtros Chebyshev, (a)  $n=5$  . (b)  $n=6$  .

### 8-2-1. Polinomios de Chebyshev

En las próximas secciones se mostrará que los filtros de Chebyshev se definen a través de los polinomios de Chebyshev. En esta sección, estudiamos algunas propiedades básicas de los polinomios de Chebyshev.

El polinomio de Chebyshev de enésimo orden está dado por

$$T_n(\omega) \triangleq \cos(n \cos^{-1} \omega) \quad (8-58)$$

Para ver que  $T_n(\omega)$  es un polinomio de  $\omega$ , definimos una variable intermedia

$$x \triangleq \cos^{-1} \omega \quad (8-59)$$

Luego

$$T_n(\omega) = \cos nx \quad (8-60)$$

Con la ayuda de algunas identidades trigonométricas, (8-59) y (8-60) dan

$$T_0(\omega) = \cos 0 = 1 \quad (8-61a)$$

$$T_1(\omega) = \cos x = \cos(\cos^{-1} \omega) = \omega \quad (8-61b)$$

$$T_2(\omega) = \cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 = 2\omega^2 - 1 \quad (8-61c)$$

$$T_3(\omega) = \cos 3x = -3 \cos x + 4 \cos^3 x = -3\omega + 4\omega^3 \quad (8-61d)$$

$$T_4(\omega) = \cos 4x = 8 \cos^2 x - 4 \cos^4 x = 1 - 8\omega^2 + 8\omega^4 \quad (8-61e)$$

La relación trigonométrica recursiva

$$\cos[(n+1)x] = 2 \cos nx \cdot \cos x - \cos[(n-1)x] \quad (8-62)$$

se puede utilizar para establecer la fórmula recursiva del polinomio de Chebyshev

$$T_{n+1}(\omega) = 2\omega T_n(\omega) - T_{n-1}(\omega) \quad n=1,2,\dots \quad (8-63)$$

Con  $T_0(\omega) = 1$  y  $T_1(\omega) = \omega$ , se pueden formar polinomios de Chebyshev de orden superior usando (8-63) repetidamente.

En vista de (8-58) y (8-63), un polinomio de Chebyshev de  $n$ -ésimo orden tiene las siguientes propiedades:

1. Para todos los valores de  $n$ , tenemos

$$0 \leq |T_n(\omega)| \leq 1 \quad \text{para } 0 \leq \omega \leq 1 \quad (8-64)$$

y

$$|T_n(\omega)| > 1 \quad \text{para } |\omega| \geq 1 \quad (8-65)$$

2.  $T_n(\omega)$  es monótonamente creciente para  $\omega \geq 1$  y para todo  $n$ .
3.  $T_n(\omega)$  es un polinomio impar {par} de  $\omega$  si  $n$  es un entero impar {par}.
- 4.

$$|T_n(0)| = 0 \quad \text{cuando } n \text{ es impar} \quad (8-66a)$$

y

$$|T_n(0)|=1 \text{ cuando } n \text{ es par} \quad (8-66a)$$

Para  $|\omega| \leq 1$ ,  $\cos^{-1}\omega$  es un ángulo real. Por lo tanto,  $T_n(\omega)$  es el coseno de un ángulo real. Esto significa que  $T_n(\omega)$  oscila entre  $-1$  y  $1$  para  $|\omega| \leq 1$ . Para  $|\omega| > 1$ ,  $\cos^{-1}\omega$  es imaginario, y  $\cos(n \cos^{-1}\omega)$  es una función de coseno hiperbólico de un ángulo real. Como el coseno hiperbólico varía entre  $1$  y  $\infty$ ,  $1 < |T_n(\omega)| < \infty$  para  $|\omega| > 1$ . Por lo tanto, la propiedad 1 es verdadera.

Usando el hecho de que tanto  $\cosh(\cdot)$  como  $\cosh^{-1}(\cdot)$  son funciones monótonamente crecientes de sus argumentos, podemos mostrar que se cumple la propiedad 2. Las propiedades 3 y 4 son verdaderas en vista de (8-63), con (8-61) como ejemplos. Como ilustraciones, las gráficas de  $T_n(\omega)$  respecto a  $\omega$  para  $n=1,2,3$  y  $4$  se muestran en la Fig. 8-13.

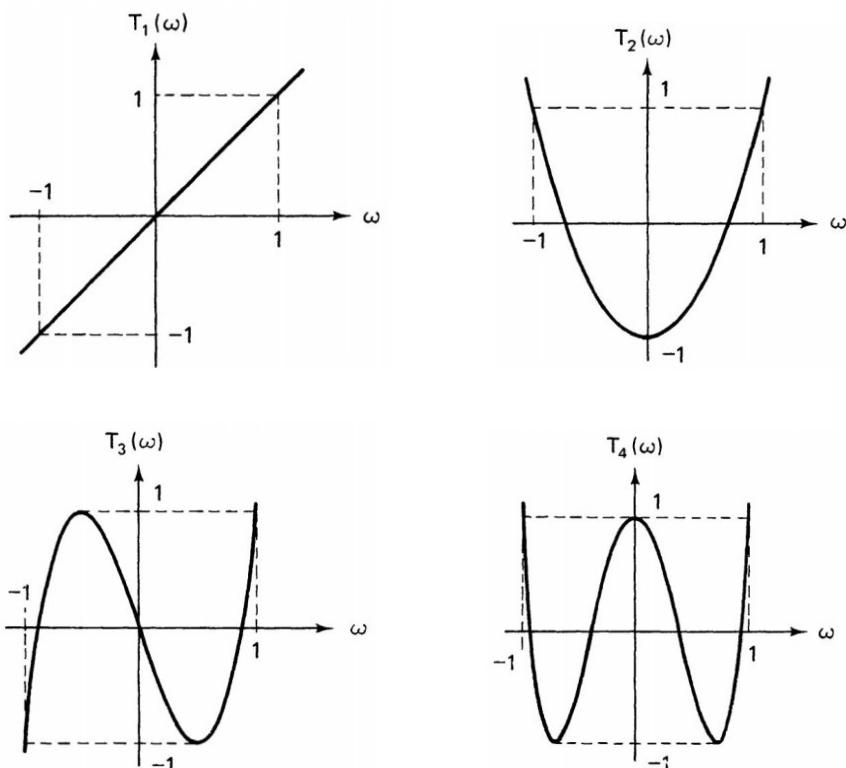


Fig. 8-13 Polinomios de Chebyshev.

## 8-2-2. Filtros Chebyshev

A diferencia de las funciones de Butterworth, los polinomios de Chebyshev no poseen todas las propiedades de una función de magnitud como se establece en el Teorema 8-1. Sin embargo, se pueden utilizar para construir funciones de transferencia que se aproximen a las características de magnitud de los filtros de paso bajo ideales normalizados. Para un filtro de paso bajo, la función de magnitud debe llegar a cero cuando  $\omega \rightarrow \infty$ . Por lo tanto, los polinomios de Chebyshev deberían ser parte de los polinomios del denominador de la función de magnitud del filtro. Una función de magnitud cuadrática adecuada del filtro es

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 T_n(\omega)} \quad (8-67)$$

donde  $\epsilon$  es un parámetro libre que establece la amplitud de rizado que se muestra en la Fig. 8-12. Al usar el cuadrado de  $\epsilon T_n(\omega)$ , tanto el numerador como el denominador de  $|H(j\omega)|^2$  son polinomios de  $\omega^2$  y tienen valores positivos. Por lo tanto, (8-67) satisface todas las condiciones para una función de magnitud como se establece en el teorema 8-1. Esto significa que se puede extraer una función de transferencia válida de (8-67). De aquí en adelante, llamamos a un filtro que tiene una función de magnitud al cuadrado dada por (8-67) un filtro de Chebyshev de paso bajo normalizado (en resumen, filtro de Chebyshev) de orden  $n$ .

Basado en (8-67) y las propiedades de los polinomios de Chebyshev, un filtro Chebyshev de paso bajo normalizado de orden  $n$  tiene las siguientes propiedades básicas:

**PROPIEDAD 1 DE CHEBYSHEV.** Para  $|\omega| \leq 1$ ,  $|H(j\omega)|^2$  oscila entre  $1/(1+\epsilon^2)$  y 1. Hay en total  $n$  puntos críticos en  $0 \leq \omega \leq 1$ , donde  $|H(j\omega)|^2$  alcanza su valor máximo de 1 o su valor mínimo de  $1/(1+\epsilon^2)$ . Esta es la razón por la que los filtros Chebyshev también se denominan filtros *equiripple*. Como ilustraciones, la Fig. 8-14 contiene gráficos de  $|H(j\omega)|^2$  de (8-67) frente a  $\omega$  para  $0 \leq \omega \leq 1$ . Tenga en cuenta que el ancho de banda de ondulación en el caso normalizado es 1 rad./seg. Si  $1/(1+\epsilon^2) > 0.5$ , que suele ser el caso, la frecuencia de corte  $\omega_c$  de 3dB de un filtro Chebyshev de paso bajo normalizado es mayor que 1 rad./seg.

**PROPIEDAD 2 DE CHEBYSHEV.** Para  $\omega \geq 1$ ,  $|H(j\omega)|^2$  decrece monótonamente hacia cero. La atenuación de las frecuencias altas es de 20n dB/década.

**PROPIEDAD 3 DE CHEBYSHEV.** La función de magnitud al cuadrado de un filtro Chebyshev de enésimo orden satisface

$$|H(j1)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2} \quad (8-68)$$

$$|H(j0)|^2 = 1 \quad \text{si } n \text{ es impar} \quad (8-69a)$$

y

$$|H(j0)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2} \quad \text{si } n \text{ es par} \quad (8-69b)$$

Dado un conjunto de especificaciones de banda de paso y banda de parada, se puede determinar el parámetro de rizado  $\epsilon$  y el orden del filtro de Chebyshev  $n$ . Normalmente, en lugar de  $\epsilon$ , se da la máxima atenuación de rizado de banda de paso  $A_{max}$  dB, donde

$$\begin{aligned} A_{max} dB &\triangleq -10 \log \frac{1}{1 + \epsilon^2} \\ &= 10 \log(1 + \epsilon^2) \end{aligned} \quad (8-70)$$

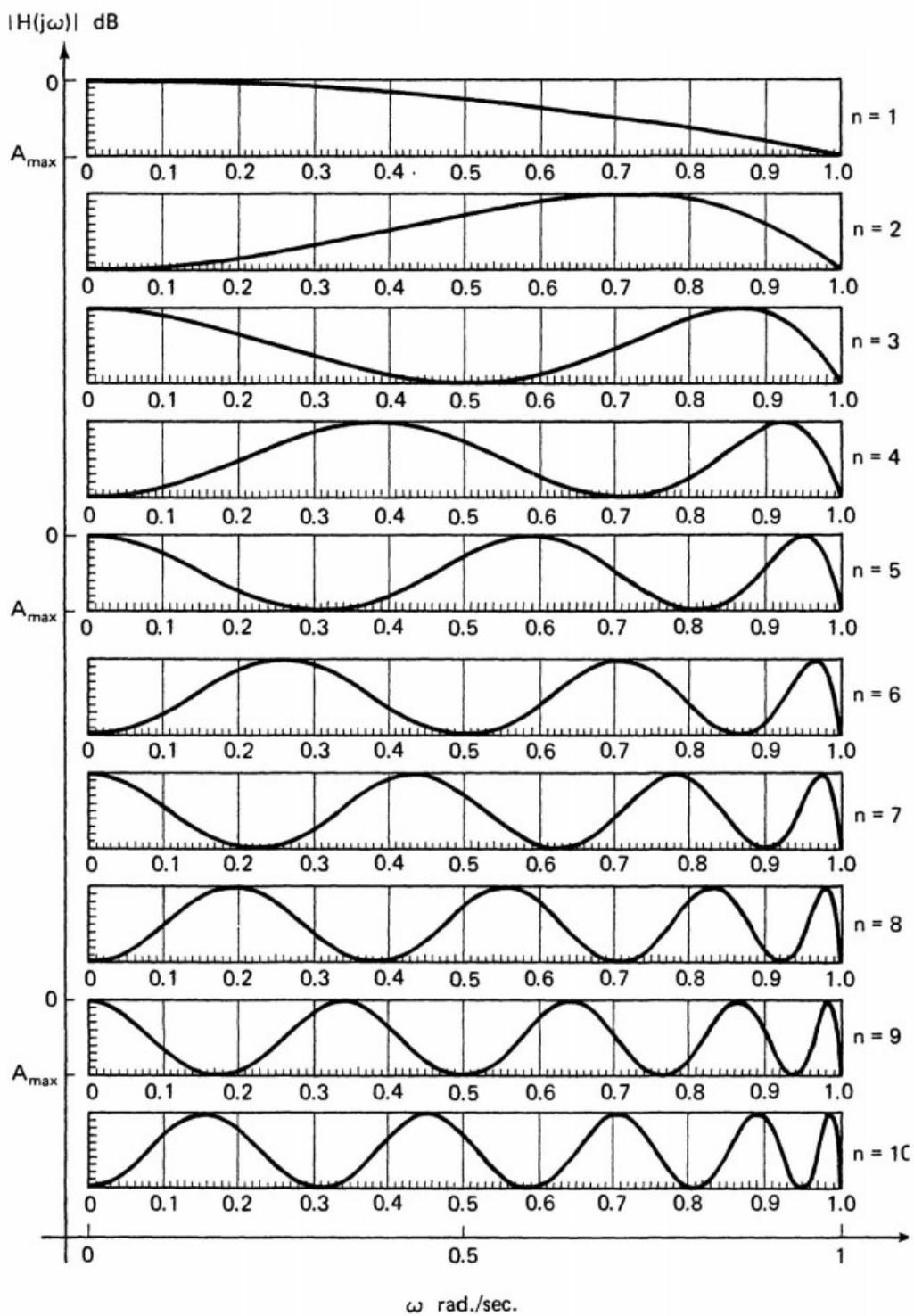


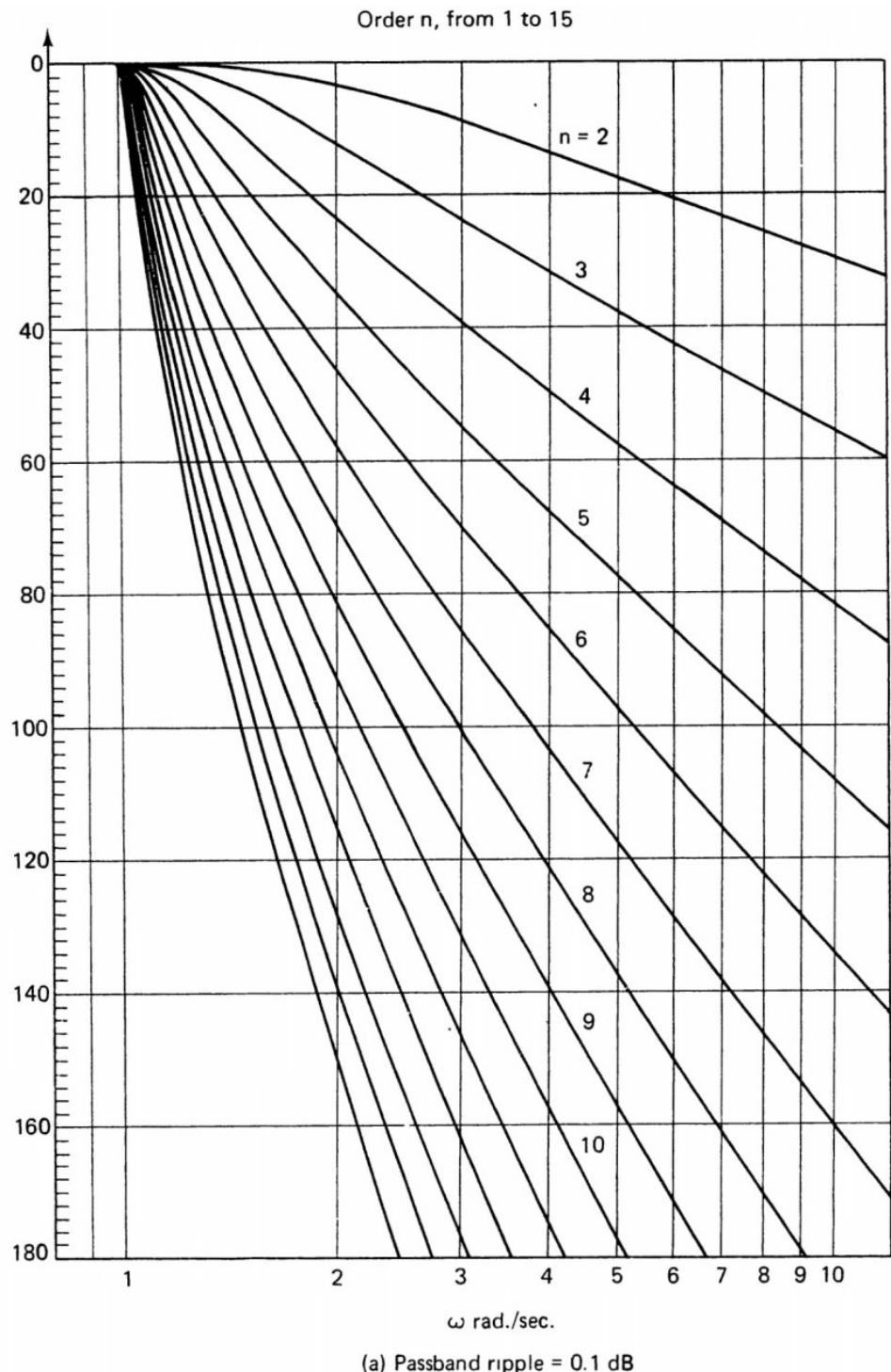
Fig. 8-14 Rizados del pasa-banda Chebyshev.

Por lo tanto, el parámetro de rizado  $\epsilon$  se determina como

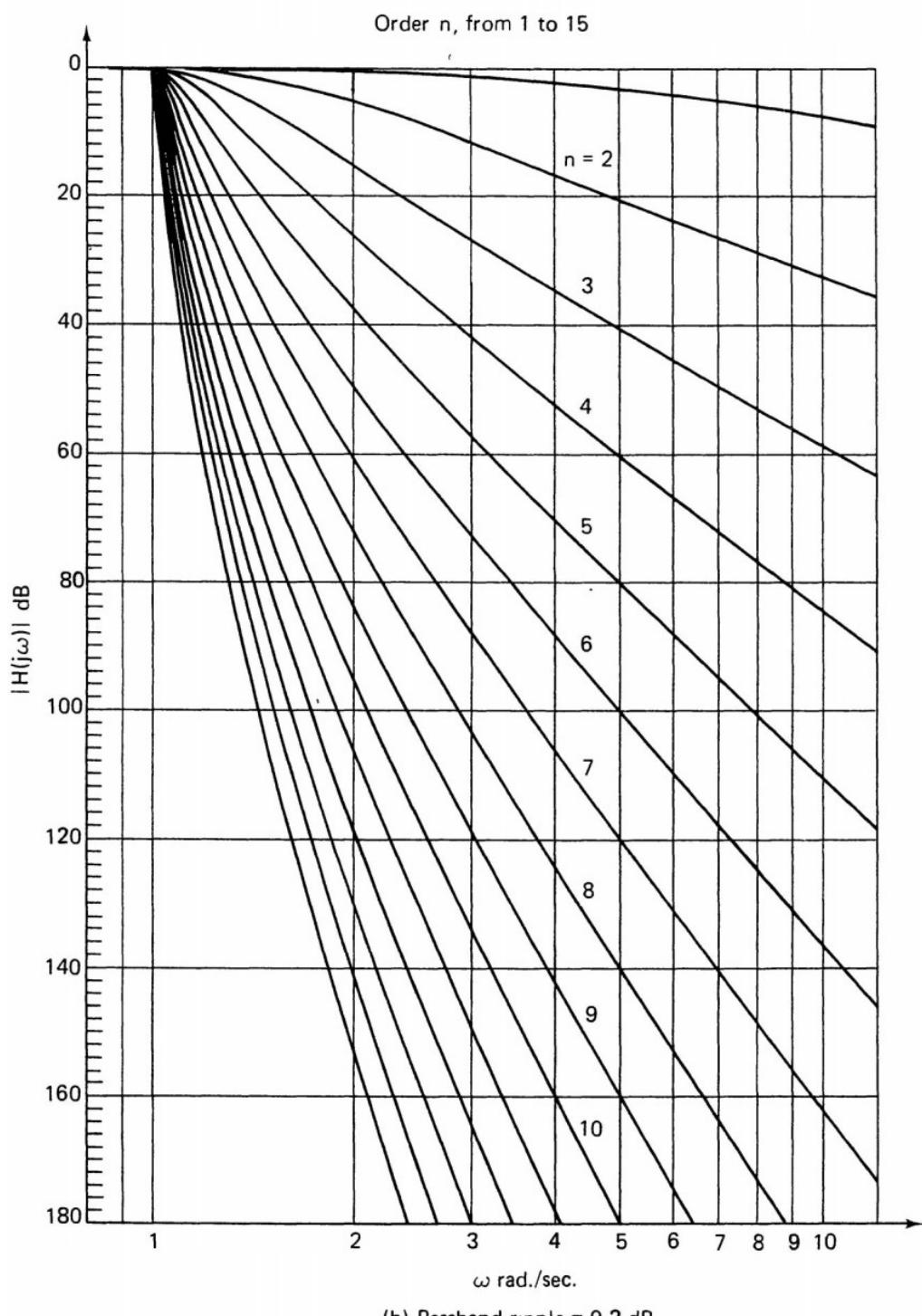
$$\epsilon = \sqrt{10^{(A_{max}/10)} - 1} \quad (8-71)$$

El orden  $n$  de un filtro Chebyshev está determinado por otros criterios, como la tasa de caída de dB en frecuencias altas, las frecuencias de corte deseadas, el costo (número de componentes permitidos) y otros factores.

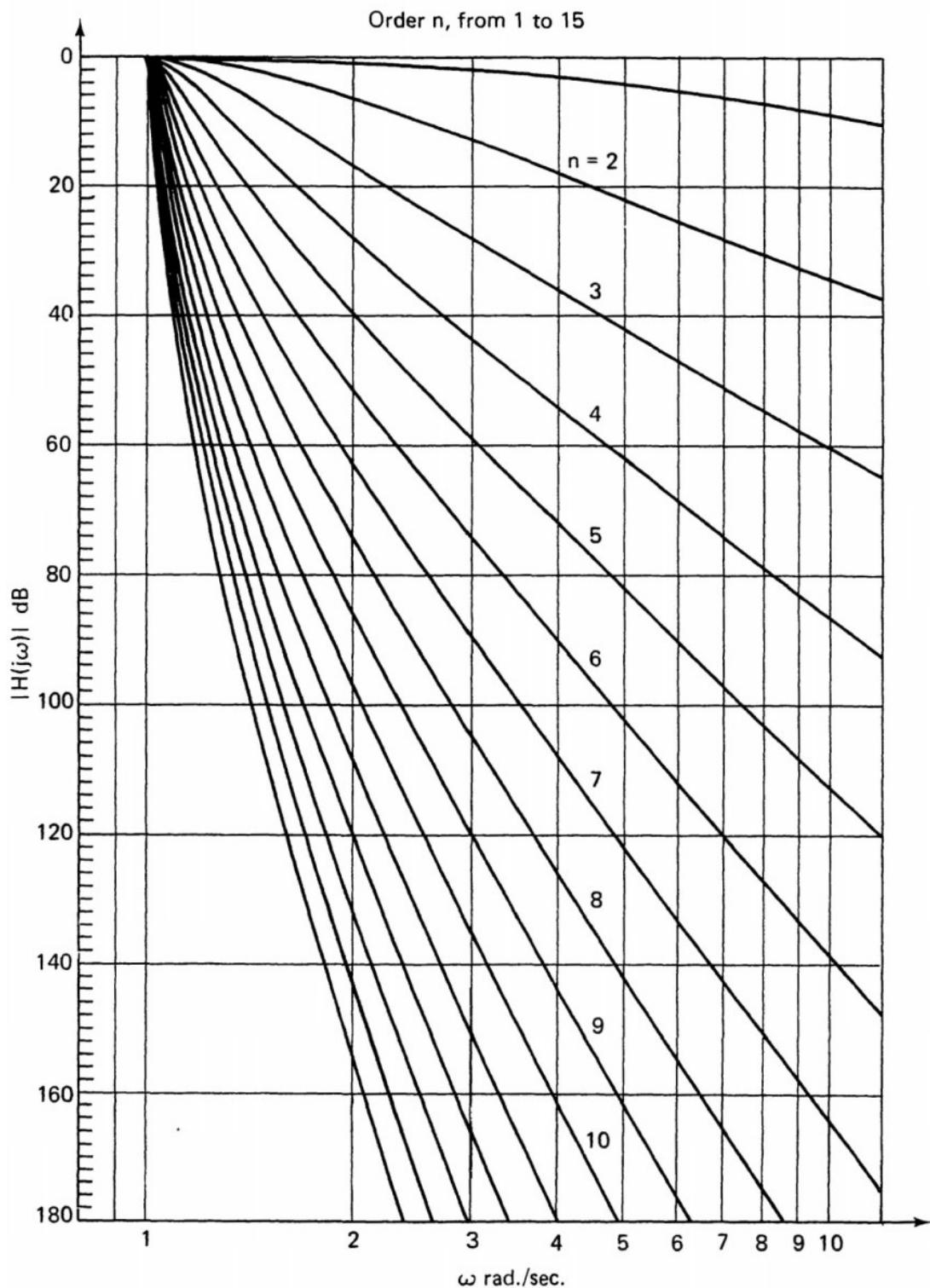
Como ayuda para el diseño, la Fig. 8-15 contiene gráficos de las funciones de magnitud de los filtros de Chebyshev para varios valores de especificaciones de rizado de banda de paso.



**Fig. 8-15** Attenuation characteristics of Chebyshev filters.

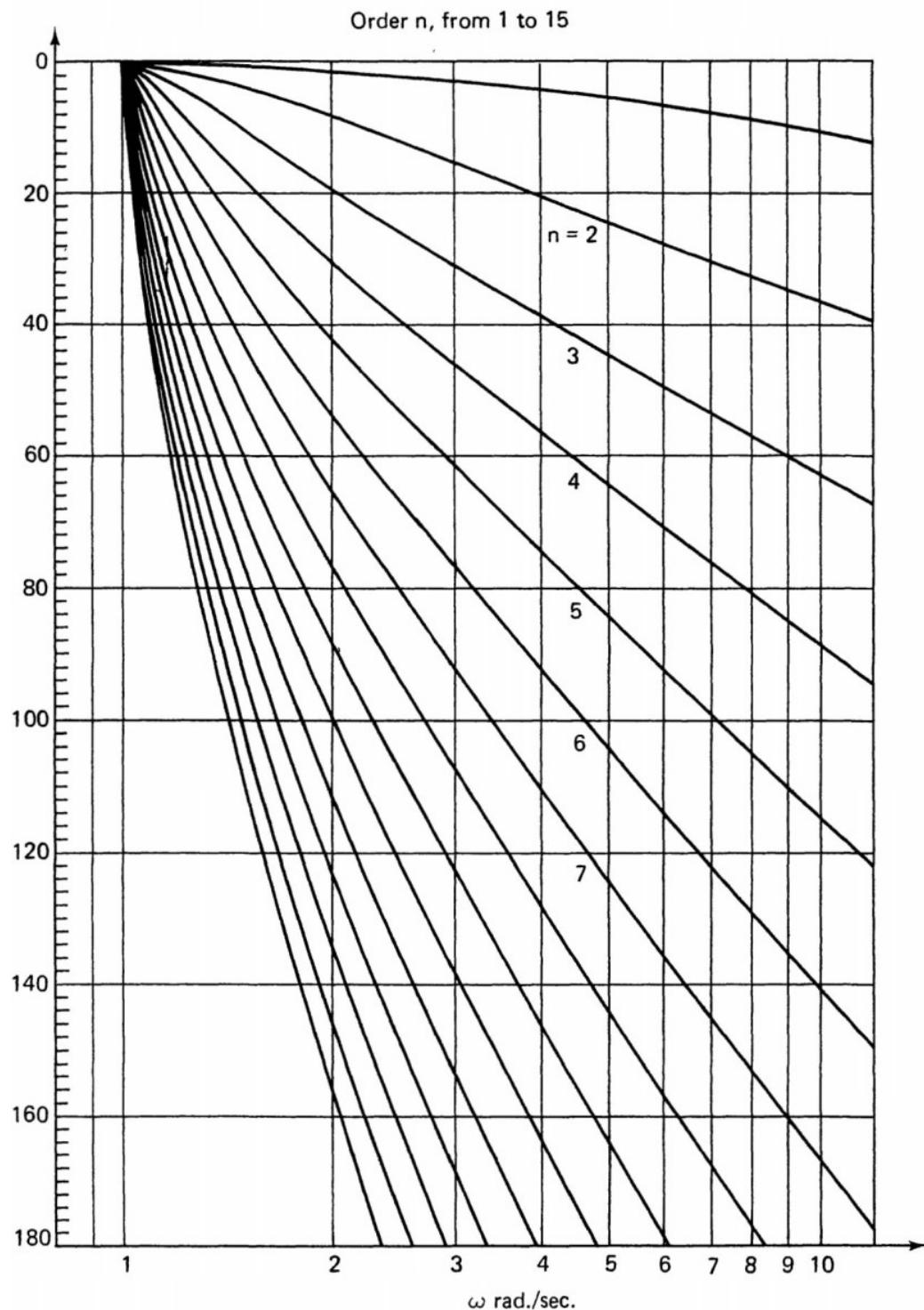


**Fig. 8-15 (continued)**

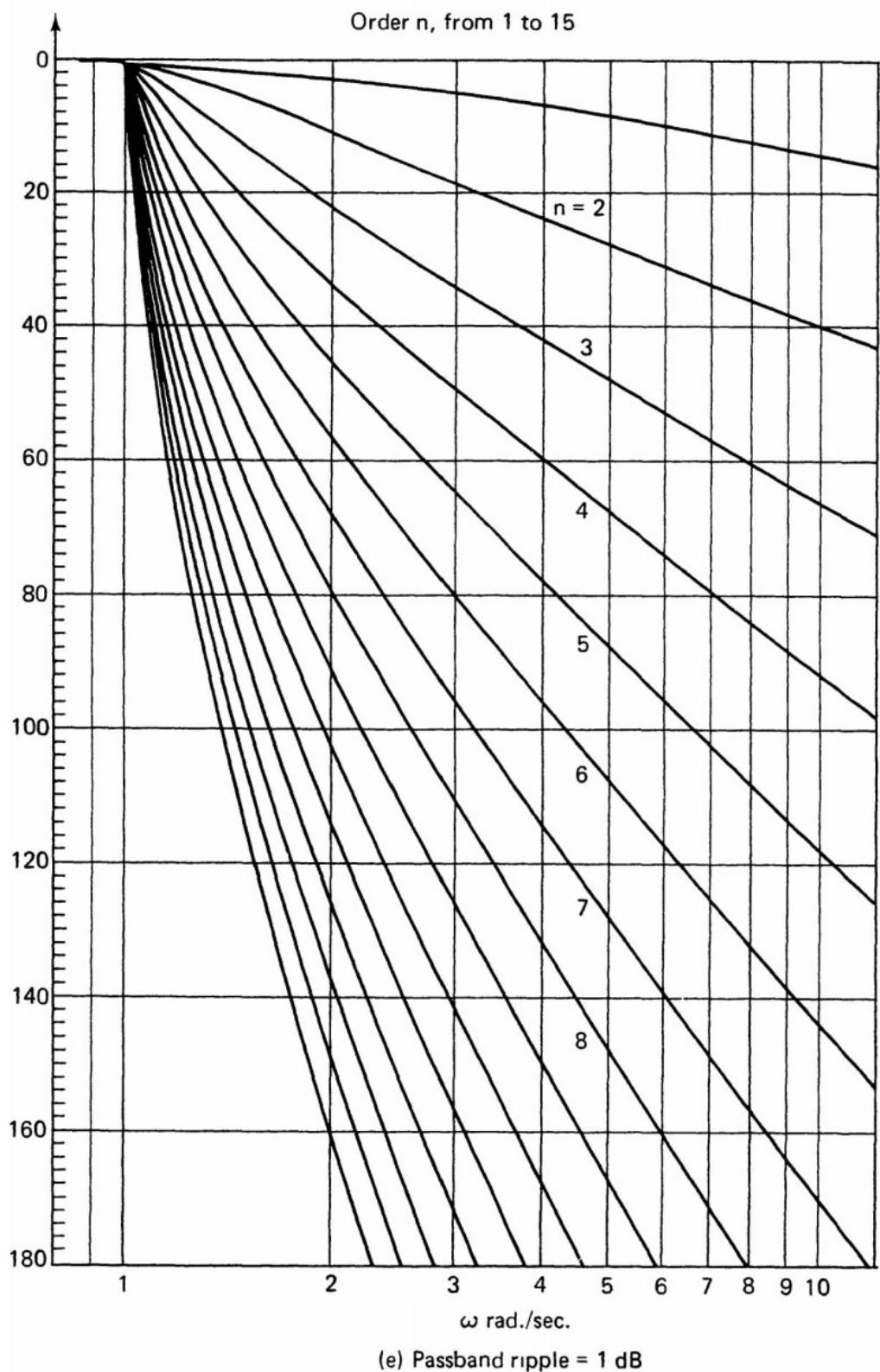


(c) Passband ripple = 0.3 dB

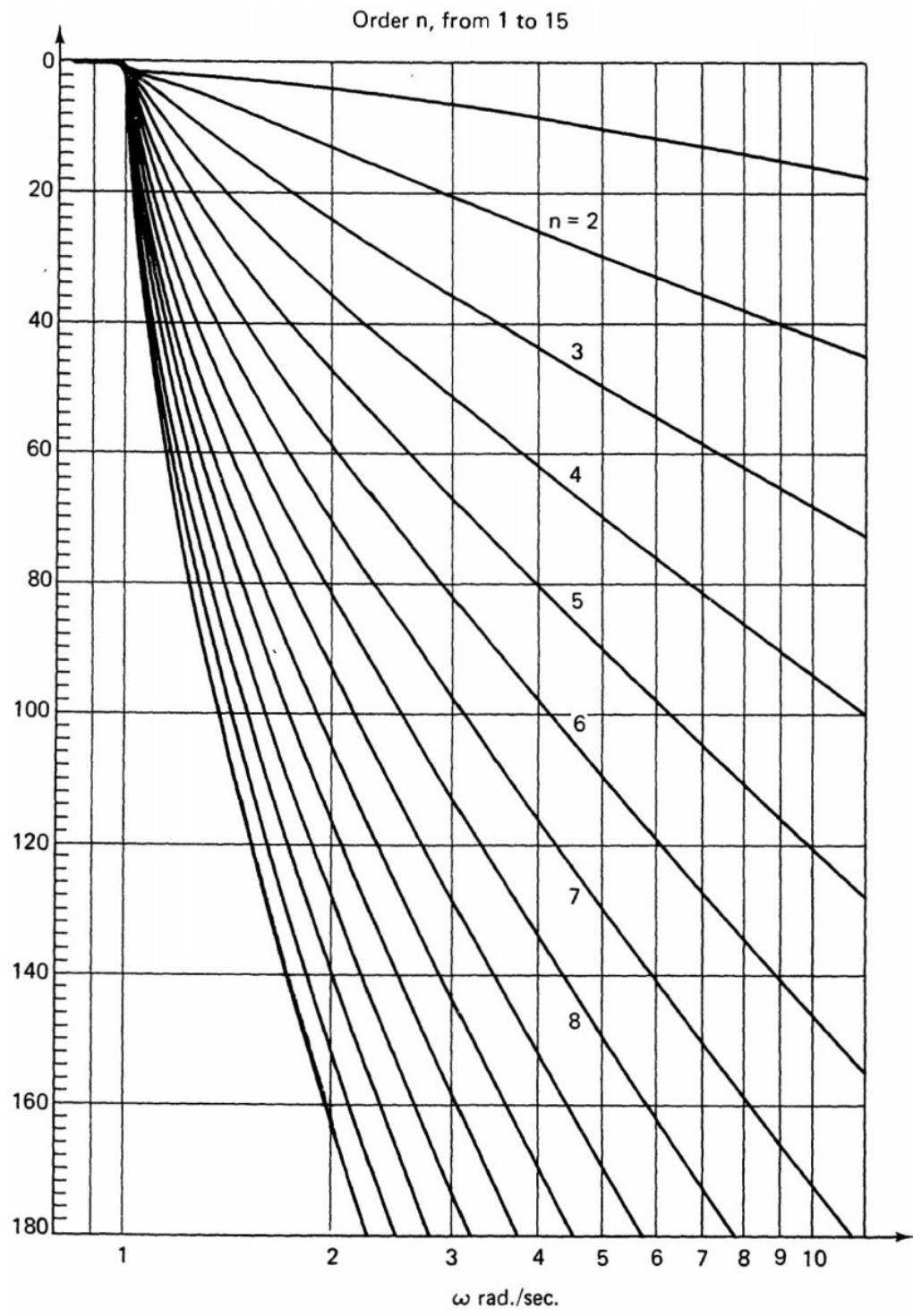
**Fig. 8-15 (continued)**



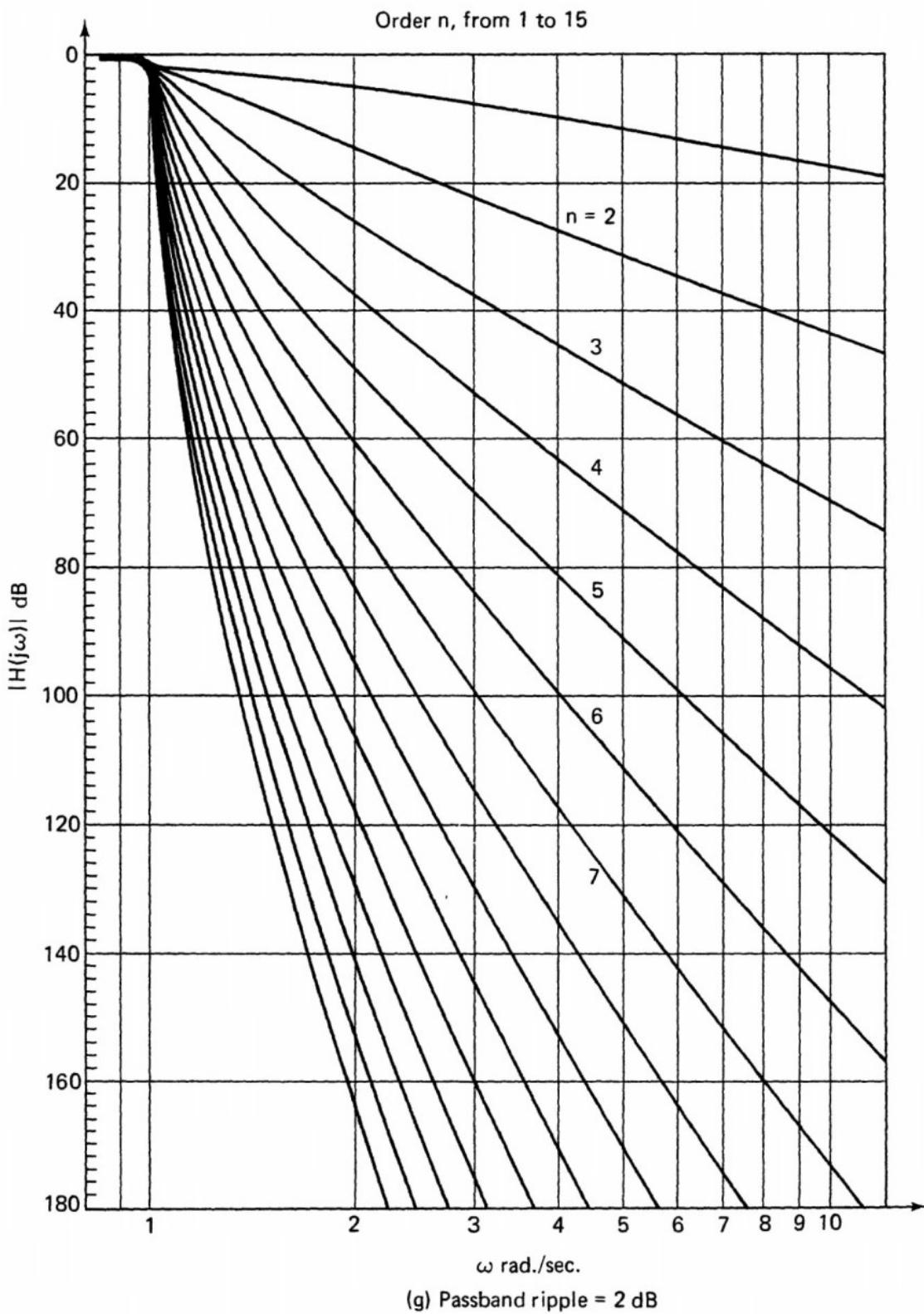
**Fig. 8-15 (continued)**



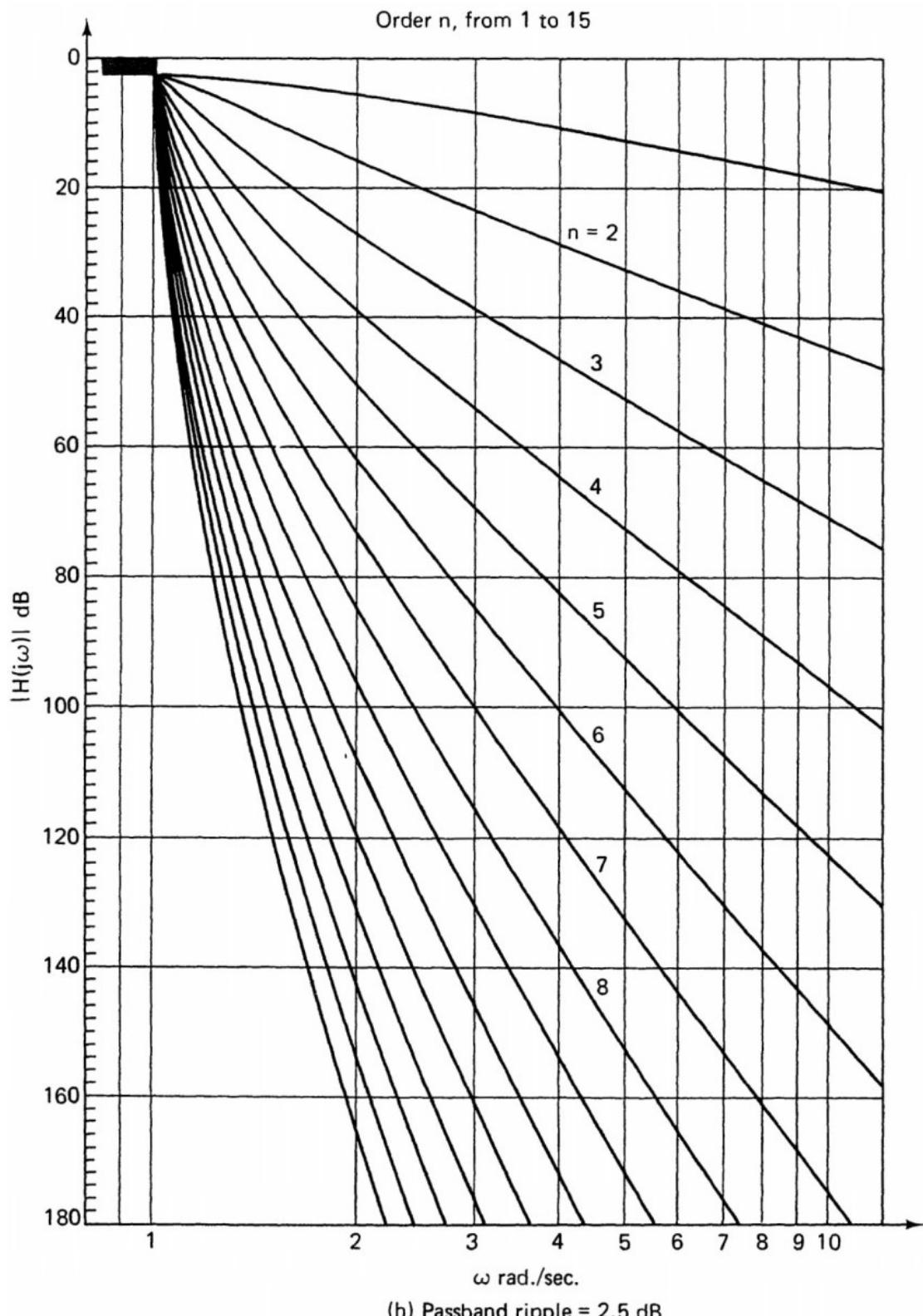
**Fig. 8-15 (continued)**



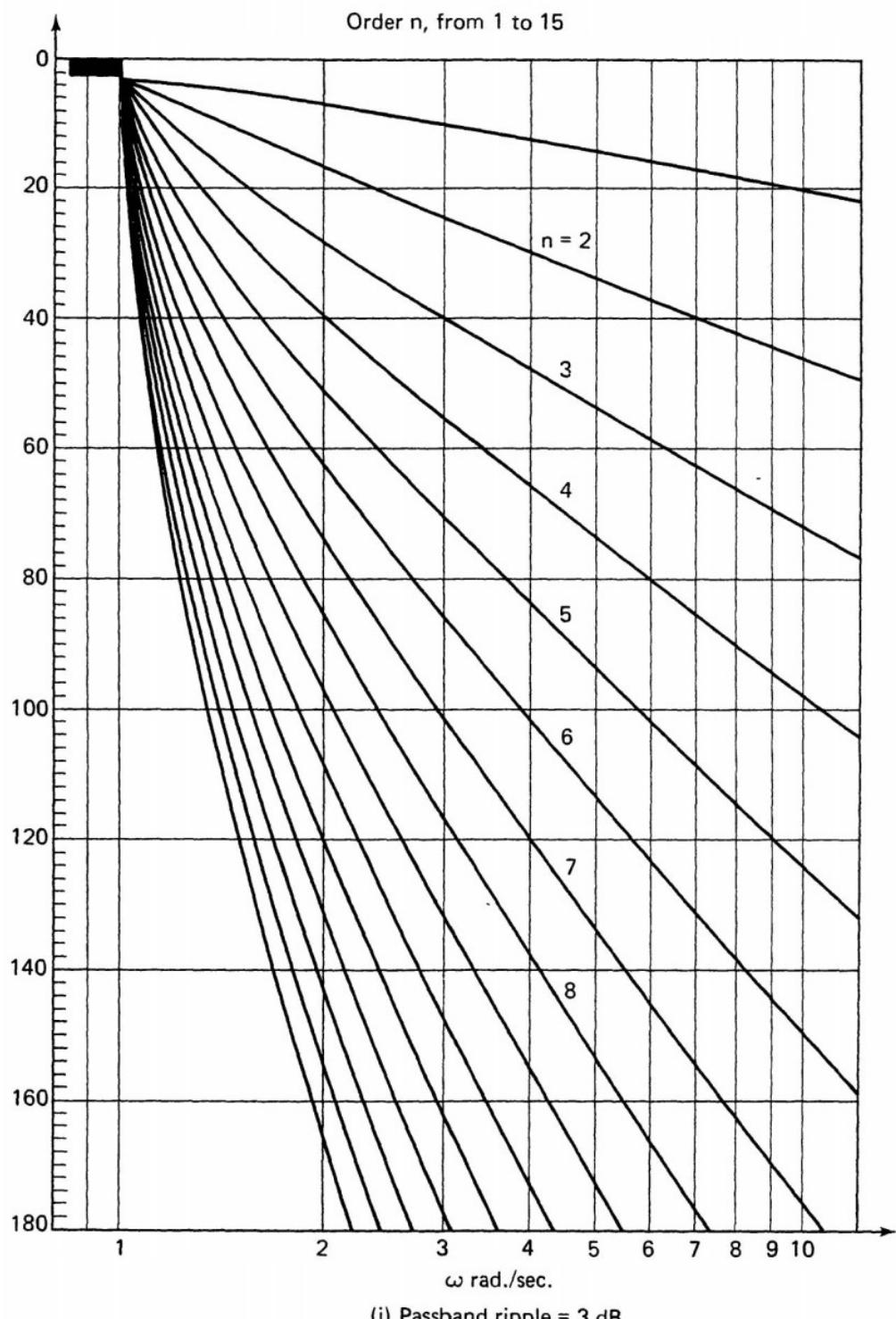
**Fig. 8-15 (continued)**



**Fig. 8-15 (continued)**



**Fig. 8-15 (continued)**



**Fig. 8-15 (continued)**

**Ejemplo 8-4** Suponga que vamos a diseñar un filtro de paso bajo de rizado equivalente normalizado para cumplir con las siguientes especificaciones:

- (i) La atenuación de rizado de banda de paso máxima es de  $1 dB$ .
- (ii) La frecuencia de corte  $\omega_c \leq 1.2 rad./seg$ .
- (iii) La atenuación de la banda suprimida es de al menos  $40 dB$  para  $\omega \geq 4 rad./seg$ .

Encuentre la función de magnitud deseada.

**Solución:** Por (8-71), tenemos

$$\epsilon = \sqrt{10^{0.1} - 1} = 0.5088 \quad (8-72)$$

Para determinar el orden del filtro de Chebyshev necesario para satisfacer las especificaciones prescritas, podemos usar (8-67) con  $\epsilon$  dado por (8-72), o podemos usar las gráficas de la Fig. 8-15(e). Siguiendo el último curso, encontramos que la condición (ii) implica que  $n \geq 2$ , mientras que la condición (iii) requiere que  $n \geq 3$ . Por lo tanto, el filtro de Chebyshev de tercer orden con  $\epsilon$  dado en (8-72) satisfará todas las especificaciones del filtro.

De (8-61), tenemos

$$T_3(\omega) = -3\omega + 4\omega^3 \quad 8-73$$

Sustituyendo (8-72) y (8-73) en (8-67), obtenemos la función cuadrada de magnitud deseada

$$\begin{aligned} |H(j\omega)|^2 &= \frac{1}{1 + \epsilon^2 T_3^2(\omega)} \\ &= \frac{1}{1 + 0.2589(-3\omega + 4\omega^3)^2} \\ &= \frac{1}{4.14\omega^6 - 6.21\omega^4 + 2.33\omega^2 + 1} \end{aligned} \quad (8-74)$$

**Resolución Matlab – Ejemplo 8-4**

```

syms w 'real'
syms n k 'integer'

%% datos del problema 232
Rl=1;
Rs=1;
Ap=sym('1');           %banda de paso
wc=sym('1.2');
As=sym('40');          %banda suprimida
ws=sym('4');            % w>=4

%% calcular la constante de ripple C(1)=1
%10*log10( H_j1) = 10* log10( 1 / (1+e^2) = -Ap ;
e=sqrt( 10^(Ap/10)-1 )

%% calcular el orden en la banda suprimida
%H2(jw)=1 / (1+( e * Cn(w))^2 )
%Cn(w)=cos (n*acos(w)); en la banda de paso
%Cn(w)=cosh (n*acosh(w)); en la banda suprimida
n1= acosh(( sqrt( 10^(3/10) -1 )/e)/(acosh(wc) )
n1=ceil(n1)
n2= acosh(( sqrt(10^(As/10) -1 )/e) / (acosh(ws) );
n2=ceil(n2)
n=max(n1,n2)

%calcular los polos y ceros
%bk(k)=(asinh( ((-1)^k)/e ) )/n
bk(k)=(asinh( 1/e ) )/n

theta(k)= (2*k-1)/(2*n)*pi ;
sk(k)=sinh( bk(k) )*sin(theta(k))+
j*cosh( bk(k) )*cos(theta(k))
r=[];
for m=1:2*n
    r(m)=sk(m);
end
syms s;

H(s)=1/collect( prod(s-r) )

[b, a]=numden(H(s));
B=sym2poly(collect(b));
A=sym2poly(collect(a));
A=A/B(1); B=B/B(1)/abs(A(end)); A=A/abs(A(end));
H(s)=poly2sym(B)/poly2sym(A)

plot(real(r), imag(r), '*'), hold on,
plot( sinh( bk([0:0.1:2*pi]) ).*sin([0:0.1:2*pi])+
j*cosh( bk([0:0.1:2*pi]) ).*cos([0:0.1:2*pi]),'-' ),
hold off; xlim([-1.5,1.5])

```

$$e = 0.5088$$

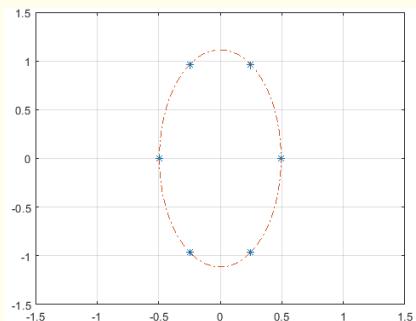
$$n_1 = 2.0790$$

$$n_2 = 3$$

$$n = 3$$

$$H(s) = \frac{1}{s^6 + 1.5000s^4 + 0.5625s^2 - 0.2414}$$

$$H(s) = \frac{4.1422}{4.1422s^6 + 6.2132s^4 + 2.3299s^2 - 1}$$



### 8-2-3. Función de transferencia

Al igual que en el caso de un filtro Butterworth, un filtro Chebyshev tiene una función de transferencia de todos los polos: el numerador es una constante y, por lo tanto, no hay ceros finitos. Los polos del filtro Chebyshev se encuentran en una elipse en lugar de un círculo como en el caso de los filtros Butterworth. El eje mayor de la elipse se encuentra a lo largo del eje imaginario del plano-s, y el eje menor se encuentra a lo largo del eje real. Es obvio que cuanto más estrecha es la elipse, más cerca están los polos al eje imaginario y, por lo tanto, cada polo individual tendrá un impacto más fuerte, lo que significa que las ondas serán más pronunciadas. Por lo tanto, la magnitud de el rizado prescrita tendrá un fuerte efecto en las ubicaciones de los polos de la función de transferencia resultante en el sentido de que cuanto más grandes sean las ondas, más "delgada" se volverá la elipse.

Para ubicar los polos de una función de transferencia de Chebyshev de orden  $n$ , primero debemos realizar un trabajo analítico. Sustituyendo (8-58) en (8-67), la función de magnitud de un filtro Chebyshev de paso bajo normalizado de enésimo orden está dada por

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 T_n^2(\omega)} = \frac{1}{1 + \epsilon^2 \cos^2(n \cos^{-1} \omega)} \quad (8-75)$$

Definamos una variable compleja

$$\xi = \alpha + j\beta \triangleq \cos^{-1} \frac{s}{j} \quad (8-76)$$

donde  $s = \sigma + j\omega$ . Invirtiendo la relación de (8-76), tenemos

$$\frac{1}{j}[\sigma + j\omega] = \cos[\alpha + j\beta]$$

o

$$s = \sigma + j\omega = j \cos \alpha \cosh \beta + \sin \alpha \sinh \beta \quad (8-77)$$

Igualando las partes real e imaginaria de (8-77), obtenemos

$$\omega = \cos \alpha \cosh \beta \quad (8-78a)$$

$$\sigma = \sin \alpha \sinh \beta \quad (8-78b)$$

Sustituyendo (8-76) en (8-75), tenemos

$$\begin{aligned} h(s) &\triangleq H(s)H(-s) = |H(j\omega)|^2 \Big|_{\omega=s/j} \\ &= \frac{1}{1 + \epsilon^2 \cos^2[n \cos^{-1}(s/j)]} = \frac{1}{1 + \epsilon^2 \cos^2[n \xi]} \end{aligned} \quad (8-79)$$

Por lo tanto, los polos de  $h(s)$  son las soluciones de la ecuación

$$1 + \epsilon^2 \cos^2 n \xi = 0$$

o

$$(1 + j \epsilon \cos n \xi)(1 - j \epsilon \cos n \xi) = 0 \quad (8-80)$$

Las soluciones de (8-80) son las soluciones de la ecuación

$$1 \pm j \epsilon \cos n \xi = 0 \quad (8-81)$$

Resolver (8-81) es equivalente a resolver

$$\begin{aligned}\cos n \xi &= \cos[n\alpha + jn\beta] \\ &= \cos n\alpha \cosh n\beta - j \sin n\alpha \sinh n\beta = \pm \frac{j}{\epsilon}\end{aligned}\quad (8-82)$$

Igualando las partes real e imaginaria de (8-82) se obtiene

$$\cos n\alpha \cosh n\beta = 0 \quad (8-83a)$$

$$\sin n\alpha \sinh n\beta = \pm \frac{1}{\epsilon} \quad (8-83b)$$

que conduce a las soluciones

$$\alpha_k = \pm \frac{2k-1}{2n}\pi \quad (8-84a)$$

$$\beta_k = \pm \frac{1}{n} \sinh^{-1} \frac{1}{\epsilon} \quad (8-84b)$$

donde  $k$  es un entero positivo. Por lo tanto, por (8-78), los polos de una función de transferencia de Chebyshev de enésimo orden están en  $s_k = \sigma_k + j\omega_k$ , donde<sup>98</sup>

$$\begin{aligned}\sigma_k &= -\sinh \left[ \frac{1}{n} \sinh^{-1} \frac{1}{\epsilon} \right] \sin \frac{2k-1}{2n}\pi \\ \omega_k &= \cosh \left[ \frac{1}{n} \sinh^{-1} \frac{1}{\epsilon} \right] \cos \frac{2k-1}{2n}\pi\end{aligned}\quad (8-85a)$$

y  $k=1,2,\dots,n$ . Usando la identidad  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ , (8-85) da

$$\frac{\sigma_k^2}{\sinh^2 \left[ \frac{1}{n} \sinh^{-1} \frac{1}{\epsilon} \right]} + \frac{\omega_k^2}{\cosh^2 \left[ \frac{1}{n} \sinh^{-1} \frac{1}{\epsilon} \right]} = 1 \quad (8-86)$$

De (8-86), concluimos que todos los polos  $s_k = \sigma_k + j\omega_k$  están en una elipse en el plano-s con

$$\text{eje menor} = a \triangleq \sinh \left[ \frac{1}{n} \sinh^{-1} \frac{1}{\epsilon} \right] \quad (8-87a)$$

y

$$\text{eje menor} = b \triangleq \cosh \left[ \frac{1}{n} \sinh^{-1} \frac{1}{\epsilon} \right] \quad (8-87b)$$

Por lo tanto, los polos de un filtro Chebyshev de paso bajo normalizado se pueden determinar una vez que se conocen  $\epsilon$  y  $n$ . La Fig. 8-16 muestra esta elipse con los vértices vertical y horizontal dados por  $b$  y  $a$ , respectivamente, donde  $b$  y  $a$  también se pueden escribir como

$$b = \frac{1}{2} \left\{ \left[ \sqrt{\frac{1}{\epsilon^2} + 1 + \frac{1}{\epsilon}} \right]^{1/n} + \left[ \sqrt{1 + \frac{1}{\epsilon^2} + \frac{1}{\epsilon}} \right]^{-1/n} \right\} \quad (8-88a)$$

$$a = \frac{1}{2} \left\{ \left[ \sqrt{\frac{1}{\epsilon^2} + 1 + \frac{1}{\epsilon}} \right]^{1/n} - \left[ \sqrt{1 + \frac{1}{\epsilon^2} + \frac{1}{\epsilon}} \right]^{-1/n} \right\} \quad (8-88b)$$

Los polos de la elipse pueden relacionarse geométricamente con los polos de dos círculos de Butterworth con radios  $a$  y  $b$ . La posición vertical del polo de un filtro Chebyshev de orden  $n$  es igual a la posición vertical de los polos correspondientes de un filtro Butterworth de orden  $n$  en el círculo más grande (con radio  $b$ ), y la posición del polo horizontal de Chebyshev es la posición horizontal del mismo polo de Butterworth en el círculo más pequeño (con radio  $a$ ). Vea la Fig. 8-16 para las líneas de construcción. En vista de las relaciones entre las ubicaciones de los

<sup>98</sup> Estos son los polos del plano-s LH de  $h(s) = H(s)H(-s)$ .

polos Butterworth y Chebyshev, un filtro Chebyshev de enésimo orden tendrá un polo real negativo en  $s = -a$  cuando  $n$  es un número entero impar.

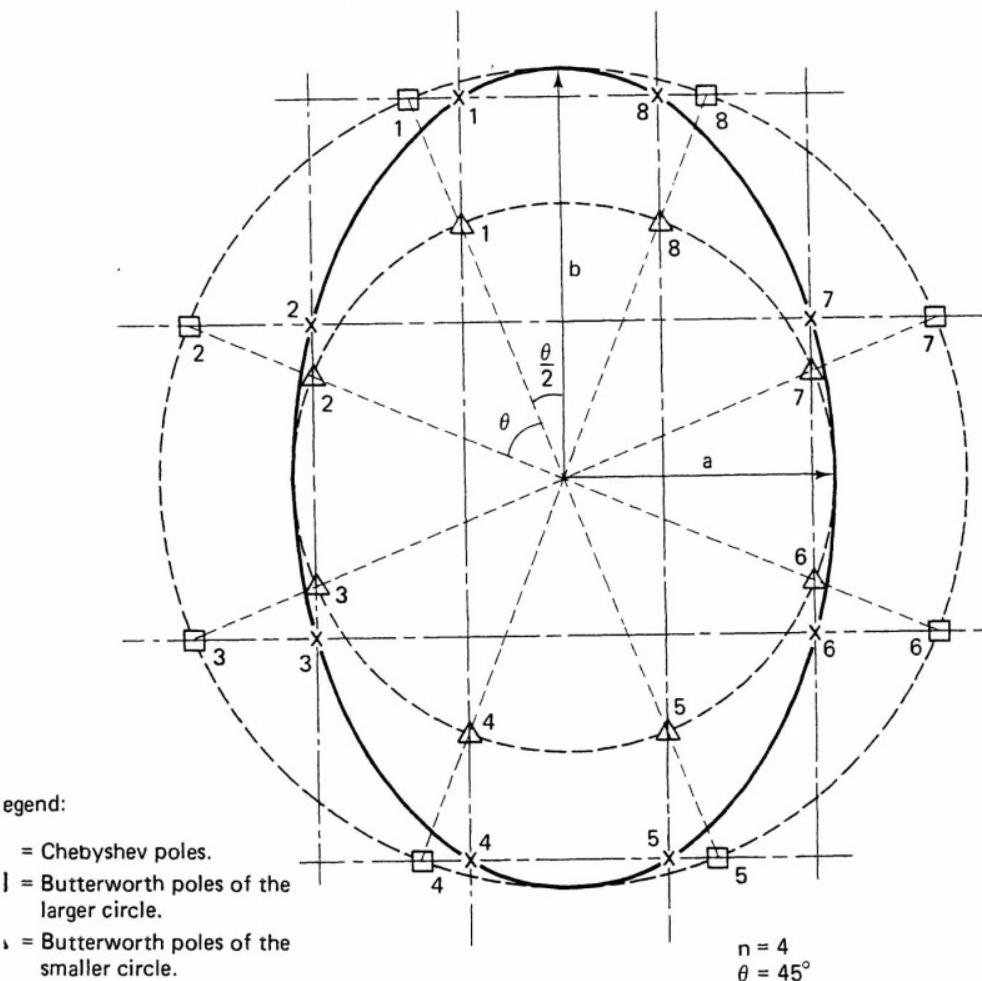


Fig. 8-16 Graphical construction of Chebyshev poles.

Para encontrar la función de transferencia  $H(s)$  de un filtro de paso bajo de Chebyshev normalizado a partir de la función de magnitud al cuadrado dada de (8-67), usamos nuevamente los siguientes tres pasos:

**PASO 0.** Forma  $H(s)H(-s)=1/[1+\epsilon^2 T^2(s/j)]$  .

**PASO 1.** Encuentre los polos de  $H(s)H(-s)$  . Esto se puede hacer gráficamente, construyendo una figura similar a la de la Fig. 8-16 para un conjunto de valores dados de  $n$  y  $\epsilon$ , o analíticamente como se indica en (8-85).

**PASO 2.** Los factores asociados con los polos del plano  $s$  de LH se asignan a  $H(s)$  . Por lo tanto, la función de transferencia viene dada por

$$H(s) = \prod_{\substack{\text{LH } s-\text{plane} \\ \text{poles}}} \frac{1}{(s - s_k)} \quad (8-89)$$

donde  $s_k$  para  $k=1,2,\dots,n$  están definidos por (8-85).

**Ejemplo 8-5** Encuentre la función de transferencia del filtro Chebyshev de tercer orden con rizados de banda de paso de 1 dB.

**Solución:** Como  $A_{max} = 1 \text{ dB}$ , (8-71) da

$$\epsilon = 0.5088 \quad (8-90)$$

De las tablas matemáticas, encontramos que

$$\sinh^{-1} \frac{1}{\epsilon} = \sinh^{-1} 1.9652 = 1.4280$$

A causa de que  $n = 3$ ,

$$\frac{1}{n} \sinh^{-1} \frac{1}{\epsilon} = \frac{1.4280}{3} = 0.4760 \quad (8-91)$$

Nuevamente, de las tablas matemáticas, encontramos que

$$\sinh \left[ \frac{1}{n} \sinh^{-1} \frac{1}{\epsilon} \right] = 0.4942 \quad (8-92a)$$

$$\cosh \left[ \frac{1}{n} \sinh^{-1} \frac{1}{\epsilon} \right] = 1.1154 \quad (8-92b)$$

Usando (8-85), tenemos

$$\sigma_1 = -0.4942 \sin \frac{\pi}{6} = -0.2471 \quad (8-93a)$$

$$\omega_1 = 1.1154 \cos \frac{\pi}{6} = 0.9660 \quad (8-93b)$$

$$\sigma_2 = -0.4942 \sin \frac{\pi}{2} = -0.4942 \quad (8-94a)$$

$$\omega_2 = 1.1154 \cos \frac{\pi}{2} = 0 \quad (8-94b)$$

$$\sigma_3 = -0.4942 \sin \frac{5\pi}{6} = -0.2471 \quad (8-95a)$$

$$\omega_3 = 1.1154 \cos \frac{5\pi}{6} = -0.9660 \quad (8-95b)$$

Esto significa que las ubicaciones de los polos están en

$$s_1 = \sigma_1 + j\omega_1 = -0.2471 + j0.9960 \quad (8-96a)$$

$$s_2 = \sigma_2 + j\omega_2 = -0.4942 \quad (8-96b)$$

$$s_3 = \sigma_3 + j\omega_3 = -0.2471 - j0.9960 \quad (8-96c)$$

Por lo tanto, la función de transferencia deseada viene dada por

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{k}{(s-s_1)(s-s_2)(s-s_3)} \\ &= \frac{k}{(s+0.4942)[(s+0.2471)^2+(0.9669)^2]} \quad (8-97) \\ &= \frac{k}{s^3 + 0.9883s^2 + 1.2384s + 0.4913} \end{aligned}$$

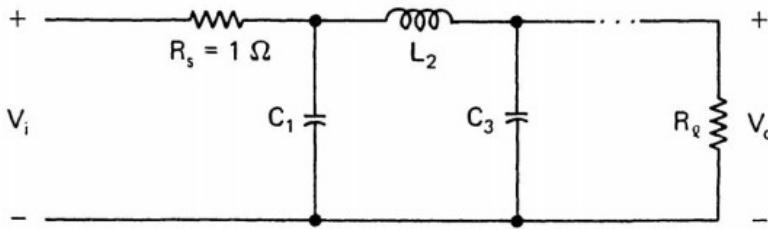
### 8-2-4. Realización de circuitos

De (8-89), un filtro Chebyshev de paso bajo de orden  $n$  se caracteriza por una función de transferencia de todos los polos con un polinomio denominador de Hurwitz. Esto implica que los procedimientos de síntesis de Darlington (simplificados) en la Sección 7-3 pueden usarse para realizar filtros Chebyshev. En particular, debido a que todos los ceros de transmisión están en  $s=\infty$ , la primera forma de Cauer se usa para realizar los dispositivos sin pérdidas de dos puertos. En la Fig. 8-17 se muestra una estructura de circuito típica para realizar una función de transferencia de relación de voltaje de un filtro Chebyshev. Al definir

$$a = \frac{4R_t}{(R_t + 1)^2} \quad \text{when } n \text{ is odd} \quad (8-98a)$$

y

$$a = \frac{4R_t}{(R_t + 1)^2}[1 + \epsilon^2] \leq 1 \quad \text{when } n \text{ is even} \quad (8-98b)$$



**Fig. 8-17** Circuit structure of low-pass Chebyshev filters.

donde  $R_t$  es arbitrario, excepto cuando  $n$  es par,  $R_t$  tiene que satisfacer la restricción de desigualdad de (8-986), y dejando

$$\alpha_i = 2 \sin \frac{\pi i}{2n} \quad (8-99a)$$

$$\beta_i = 2 \cos \frac{\pi i}{2n} \quad (8-99b)$$

$$\gamma = \left[ \frac{1}{\epsilon} + \sqrt{\frac{1}{\epsilon^2} + 1} \right]^{1/n} \quad (8-99c)$$

$$\delta = \left[ \sqrt{\frac{1-a}{\epsilon^2}} + \sqrt{\frac{1-a}{\epsilon^2} + 1} \right]^{1/n} \quad (8-99d)$$

$$x = \gamma - \frac{1}{\gamma} \quad (8-99e)$$

y

$$y = \delta - \frac{1}{\delta} \quad (8-99f)$$

los valores de los elementos de la Fig. 8-17 se pueden encontrar mediante una relación recursiva

$$C_{2m-1}L_{2m} = \frac{4\alpha_{4m-3}\alpha_{4m-1}}{b_{2m-1}(x, y)} \quad (8-100a)$$

$$C_{2m+1}L_{2m} = \frac{4\alpha_{4m-1}\alpha_{4m+1}}{b_{2m}(x, y)} \quad (8-100b)$$

con

$$C_1 = \frac{2\alpha_1}{x-y} \quad (8-100c)$$

donde la función  $b_i(x, y)$  está definida por

$$b_i(x, y) \triangleq x^2 - \beta_{2i}xy + y^2 + \alpha_{2i}^2 \quad (8-100d)$$

y

$$\begin{aligned} m &= 1, 2, \dots, \frac{n-1}{2} && \text{cuando } n \text{ es impar} \\ &= 1, 2, \dots, \frac{n}{2} && \text{cuando } n \text{ es par} \end{aligned} \quad (8-100e)$$

Dados los parámetros  $n$  y  $\epsilon$  de un filtro Chebyshev, podemos calcular todas las variables dependientes en (8-99). Por (8-100c), encontramos  $C_1$ . Con  $C_1$  conocido y  $m=1$ , podemos usar (8-100a) para encontrar  $L_2$  y luego (8-100b) para encontrar  $C_3$ . Luego establezca

$m=2$  y repita el proceso de (8-100a) y (8-100b). Este proceso se puede repetir a medida que se incrementa  $m$ . Por conveniencia, las tablas 8-2 y 8-3 dan valores para los elementos del circuito de la figura 8-17. La Tabla 8-2 es para el caso en que  $A_{max}=0,1 dB$ , y la Tabla 8-3 es para el caso en que  $A_{max}=1 dB$ .

**TABLE 8-2** Values of Circuit Elements in Chebyshev Filters  
when  $A_{max} = 0.1$  dB

<b><i>n</i></b>	<b><i>R<sub>t</sub></i></b>	<b><i>C<sub>1</sub></i></b>	<b><i>L<sub>2</sub></i></b>	<b><i>C<sub>3</sub></i></b>	<b><i>L<sub>4</sub></i></b>	<b><i>C<sub>5</sub></i></b>	<b><i>L<sub>6</sub></i></b>	<b><i>C<sub>7</sub></i></b>	<b><i>L<sub>8</sub></i></b>	<b><i>C<sub>9</sub></i></b>
1	1.0	0.3052								
2	0.5	1.5715	0.2880							
3	1.0	1.0316	1.1474	1.0316						
4	0.5	2.3545	0.7973	2.6600	0.3626					
5	1.0	1.1468	1.3712	1.9750	1.3712	1.1468				
6	0.5	2.5561	0.8962	3.3962	0.8761	2.8071	0.3785			
7	1.0	1.1812	1.4228	2.0967	1.5734	2.0967	1.4228	1.1812		
8	0.5	2.6324	0.9285	3.5762	0.9619	3.5095	0.8950	2.8547	0.3843	
9	1.0	1.1957	1.4426	2.1346	1.6167	2.2054	1.6167	2.1346	1.4426	1.1957

**TABLE 8-3** Values of Circuit Elements in Chebyshev Filters  
when  $A_{max} = 1$  dB

<b><i>n</i></b>	<b><i>R<sub>t</sub></i></b>	<b><i>C<sub>1</sub></i></b>	<b><i>L<sub>2</sub></i></b>	<b><i>C<sub>3</sub></i></b>	<b><i>L<sub>4</sub></i></b>	<b><i>C<sub>5</sub></i></b>	<b><i>L<sub>6</sub></i></b>	<b><i>C<sub>7</sub></i></b>	<b><i>L<sub>8</sub></i></b>	<b><i>C<sub>9</sub></i></b>
1	1.00	1.0177								
2	0.25	3.7779	0.3001							
3	1.00	2.0236	0.9941	2.0236						
4	0.25	4.5699	0.5428	5.3680	0.3406					
5	1.00	2.1349	1.0911	3.0009	1.0911	2.1349				
6	0.25	4.7366	0.5716	6.0240	0.5764	5.5353	0.3486			
7	1.00	2.1666	1.1115	3.0936	1.1735	3.0936	1.1115	2.1666		
8	0.25	4.7966	0.5803	6.1592	0.6005	6.1501	0.5836	5.5869	0.3515	
9	1.00	2.1797	1.1192	3.1214	1.1897	3.1746	1.1897	3.1214	1.1192	2.1797

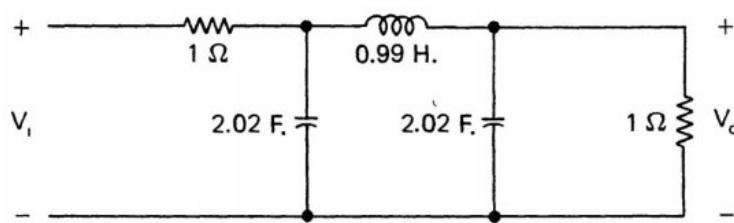
### 8-2-5. Ejemplos

**Ejemplo 8-6** Diseñe y realice un filtro Chebyshev para cumplir con las especificaciones del ejemplo 8-4.

**Solución:** del Ejemplo 8-4, concluimos que se necesita un filtro Chebyshev de tercer orden con una altura de rizado de banda de paso de 1 dB para cumplir con las especificaciones prescritas. De la tabla 8-3, se da una realización de circuito en la Fig. 8-18. De hecho, el análisis del circuito de la Fig. 8-18 produce la función de transferencia

$$\hat{H}(s) = \frac{0.245}{s^3 + 0.99s^2 + 1.24s + 0.49}$$

que es un múltiplo constante de la función de transferencia obtenida en el ejemplo 8-4.



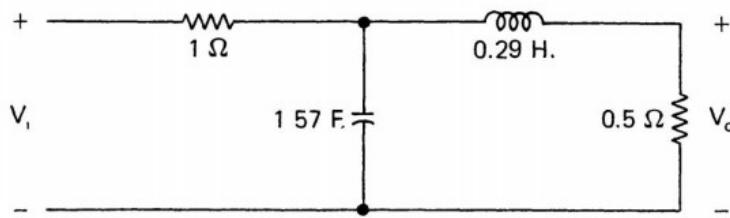
**Fig. 8-18** A realization of the desired filter circuit of Example 8-6.

**Ejemplo 8-7** Suponga que vamos a diseñar un filtro de pasa bajo equiondulado con las siguientes especificaciones:

- (i) La ondulación de la banda de paso es de 0.1 dB, y el ancho de banda de la ondulación es de 1 rad./seg.
- (ii) Para  $\omega \geq 6 \text{ rad./seg.}$ , la función de magnitud es al menos 20 dB inferior.

Encuentre un circuito de filtro deseado.

**Solución:** primero encontraremos el orden del filtro Chebyshev necesario para cumplir con las especificaciones prescritas. Al revisar las gráficas de diseño de la Fig. 8-15(a), encontramos que el filtro Chebyshev de segundo orden satisfará todas las especificaciones. A partir de la Fig. 8-17 y la tabla 8-2, se muestra un circuito deseado en la Fig. 8-19.



**Fig. 8-19** A realization of the desired filter circuit of Example 8-7.

### 8-2-6. Filtros elípticos

Los filtros Butterworth y Chebyshev tienen funciones de transferencia que tienen la forma de una constante dividida por un polinomio. Es decir, todos los ceros de transmisión ocurren en  $s=\infty$ . En algunos casos, esto no es ideal; hay algunos casos en los que uno desea tener algunos ceros de transmisión finitos. En 1931, Cauer demostró que se podía obtener una aproximación mucho mejor a las características ideales de magnitud de paso bajo si se usaba un filtro con ceros de transmisión de frecuencia finita. Descubrió que mediante una selección adecuada de los polos y los ceros, se podía diseñar un filtro con ondas iguales tanto en la banda de paso como en la de parada. Debido a que las ubicaciones cero están relacionadas con las funciones elípticas de la teoría de campos clásica, estos filtros a menudo se denominan filtros elípticos. Otro nombre comúnmente utilizado es filtros de Cauer debido al trabajo original de Cauer.

El punto de partida para el diseño de filtros elípticos es similar a la forma de los filtros Chebyshev. La función de magnitud de un filtro elíptico está dada por

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 R_n^2(\omega)} \quad (8-101)$$

donde la función racional  $R_n(\omega)$  tiene la forma de<sup>99</sup>

$$R_n(\omega) = \frac{\omega(\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - \omega^2) \dots (\omega_k^2 - \omega^2)}{(1 - \omega_1^2 \omega^2)(1 - \omega_2^2 \omega^2) \dots (1 - \omega_k^2 \omega^2)} \quad (8-102a)$$

cuando  $n$  es impar y  $k = (n-1)/2$ ; y

$$R_n(\omega) = \frac{(\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - \omega^2) \dots (\omega_k^2 - \omega^2)}{(1 - \omega_1^2 \omega^2)(1 - \omega_2^2 \omega^2) \dots (1 - \omega_k^2 \omega^2)} \quad (8-102b)$$

cuando  $n$  es par y  $k = n/2$ , donde

$$0 < \omega_i < 1 \text{ para } i = 1, 2, \dots, k \quad (8-102c)$$

Los  $2k$  pares conjugados de frecuencias críticas

$$s = \pm j\omega_i \text{ y } s = \pm j\frac{1}{\omega_i} \text{ para } i = 1, 2, \dots, k \quad (8-103)$$

tienen las siguientes dos propiedades:

$$|H(j\omega_i)|^2 = 1 \quad (8-104a)$$

y

$$\left| H\left(j\frac{1}{\omega_i}\right) \right|^2 = 0 \quad (8-104b)$$

En vista de (8-102c) y (8-104b), los ceros de transmisión de los filtros elípticos normalizados están a frecuencias superiores a 1 rad./seg. o en la banda de parada.

Los parámetros de diseño en filtros elípticos son las frecuencias críticas  $\omega_i$  donde  $i = 1, 2, \dots, k$ , y  $\epsilon$ . Estos parámetros se eligen para satisfacer las especificaciones de magnitud

$$A_1 \leq |H(j\omega)|^2 \leq 1 \text{ para } |\omega| \leq \omega_{c1} \quad (8-105a)$$

y

---

<sup>99</sup> Observe que los polos y ceros de  $R_n(s)$  son simétricos con respecto a la frecuencia de corte  $\omega=1$  rad./seg.

$$|H(j\omega)|^2 \leq A_2 \quad \text{para} \quad |\omega| \geq \omega_{c2} \quad (8-105b)$$

como se ilustra en la figura 8-20(a), donde  $\omega_{c1}$  es el borde de la ondulación de la banda de paso,  $\omega_{c2}$  es el borde de la ondulación de la banda suprimida y

$$A_1 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 \Delta^2} \quad (8-106a)$$

$$A_2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 \Delta^2} \quad (8-106b)$$

Comparando (8-101) y (8-105a), debemos tener

$$A_1 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 \Delta^2} \quad (8-107)$$

donde  $\Delta$  es el valor máximo de  $|R_n(\omega)|$  para  $|\omega| \leq \omega_{c1}$ . De (8-102), tenemos

$$R_n\left(\frac{1}{\omega}\right) = \frac{1}{R_n(\omega)} \quad (8-108)$$

Esto implica que el valor mínimo de  $|R_n(\omega)|$  para  $|\omega| \geq \omega_{c2}$  es  $1/\Delta$ . Por lo tanto, (8-105b) requiere que

$$A_2 = \frac{1}{1 + (\epsilon^2 / \Delta^2)} \quad (8-109)$$

Las derivaciones de los parámetros de diseño  $\omega_i$ ,  $i=1,2,\dots,k$  y  $\epsilon$  para satisfacer las especificaciones prescritas de (8-107) y (8-109) son complicadas y no se tratarán aquí.<sup>100</sup> Un ejemplo de un filtro elíptico de quinto orden que satisface las condiciones de (8-105) con  $A_1=0.9$ ,  $A_2=0.1$ ,  $\omega_{c1}=0.940 \text{ rad./seg.}$  y  $\omega_{c2}=1.064 \text{ rad./seg}$  se muestra en la Fig. 8-20(b).

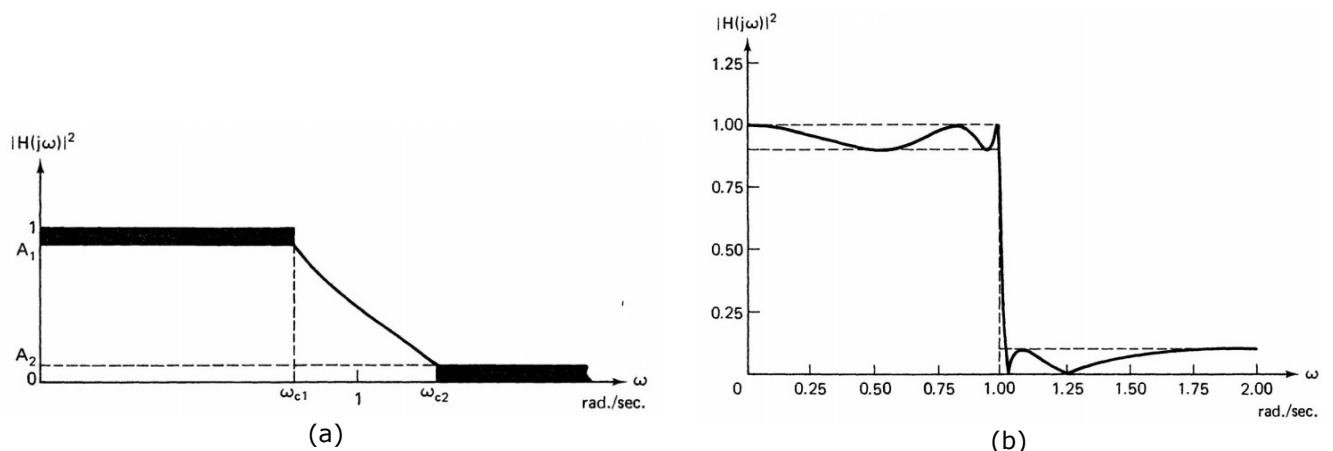


Fig. 8-20 Características de magnitud de filtros elípticos, (a) Aproximación a las características ideales, (b) Ejemplo de una elíptica de filtro de quinto orden

<sup>100</sup> Consulte las referencias [1], [2], [9] y [10] para obtener más detalles.

### 8-3 La aproximación de Bessel

Los filtros Butterworth, Chebyshev y elíptico se aproximan a la magnitud del filtro de paso bajo ideal. En otras situaciones de ingeniería, es más importante aproximar la función de cambio de fase especificada en la Fig. 8-2(b). La forma más fácil de relacionar las especificaciones de retardo de fase lineal o de grupo constante del filtro ideal con los polinomios en una función de transferencia es escribir primero la función de transferencia en forma polar. Es decir,

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= R(\omega) + jX(\omega) = |H(j\omega)|e^{j\angle H(j\omega)} \\ &= e^{-\alpha(\omega)-j\phi(\omega)} \end{aligned} \quad 8-110$$

donde

$$-\alpha(\omega) \triangleq \ln |H(j\omega)| \quad 8-111$$

y

$$\phi(\omega) = -\tan^{-1} \frac{X(\omega)}{R(\omega)} = -\angle H(j\omega) \quad 8-112$$

Tenga en cuenta que no es fácil trabajar con la función arcotangente de  $\phi(\omega)$  en (8-112). Afortunadamente, la función de retardo de grupo  $\tau(\omega)$  dada por

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{d\phi(\omega)}{d\omega} = -\frac{d}{d\omega} \tan^{-1} \frac{X(\omega)}{R(\omega)} \\ &= -\frac{1}{1 + \frac{X^2(\omega)}{R^2(\omega)}} \left[ \frac{X(\omega) \frac{dR(\omega)}{d\omega} - R(\omega) \frac{dX(\omega)}{d\omega}}{R^2(\omega)} \right] \\ &= \frac{X(\omega)R'(\omega) - R(\omega)X'(\omega)}{|H(j\omega)|^2} \end{aligned} \quad 8-113$$

es una función racional y se presta más a la manipulación, donde la prima indica la derivada con respecto a  $\omega$ . Si se desea tener un filtro de fase lineal, entonces se desea tener una función de retardo de grupo igual a una constante.

Recuerda que  $R(\omega)$  es una función par,  $X(\omega)$  es una función impar y la derivada de una función par es impar y viceversa. Además, sabemos que el producto de dos funciones pares es par, al igual que el producto de dos funciones impares. Por tanto,  $\tau(\omega)$  es una función par. Además, esta función de retardo de grupo  $\tau(\omega)$  es una relación de dos polinomios en  $\omega^2$ . En consecuencia, el problema de encontrar un  $\tau(\omega)$  que se aproxime a una constante no es muy diferente al de encontrar un  $|H(\omega)|^2$  que se aproxime a una constante sobre la banda de paso. La principal diferencia es que el comportamiento de  $\tau(\omega)$  o  $\phi(\omega)$  fuera de la banda de paso no es importante. Antes de pasar a los aspectos técnicos de los filtros de procesamiento de fase, debe señalarse que no todos los filtros de fase están diseñados para tener una fase lineal. Por ejemplo, la mayoría de los circuitos de compensación de fase de adelanto, atraso de fase y no lineal no están diseñados para tener características de fase lineal.

### 8-3-1. Función de transferencia

Un enfoque sencillo para calcular el polinomio de un filtro de paso bajo de retardo máximo plano es asumir primero una función de transferencia general con todos sus polos

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{a_0}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_{n-1} s^{n-1} + s^n} \\ &= \frac{a_0}{M_2(s) + N_2(s)} \end{aligned} \quad (8-114)$$

donde

$$M_2(s) = a_0 + a_2 s^2 + \dots \quad (8-115a)$$

y

$$N_2(s) = a_1 + a_3 s^3 + \dots \quad (8-115b)$$

son las partes pares e impares del denominador de  $H(s)$ . Entonces  $H(s)$  se puede escribir como

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{a_0}{M_2^2(s) + N_2^2(s)} = \frac{a_0 [M_2(s) - N_2(s)]}{M_2^2(s) + N_2^2(s)} \\ &= \frac{a_0 M_2(s)}{M_2^2(s) - N_2^2(s)} + \frac{-a_0 N_2(s)}{M_2^2(s) - N_2^2(s)} \\ &= M(s) + N(s) \end{aligned} \quad (8-116)$$

donde

$$M(s) \triangleq \frac{a_0 M_2(s)}{M_2^2(s) - N_2^2(s)} \quad (8-117a)$$

y

$$N(s) \triangleq \frac{-a_0 N_2(s)}{M_2^2(s) - N_2^2(s)} \quad (8-117b)$$

son, respectivamente, las partes par e impar de  $H(s)$ . Por eso,

$$R(s) \triangleq \operatorname{Re}[H(s)] = \frac{a_0 M_2(s)}{M_2^2(s) - N_2^2(s)} \quad (8-118a)$$

$$\begin{aligned} X(s) \triangleq \operatorname{Im}[H(s)] &= -\frac{a_0 N_2(s)}{j[M_2^2(s) - N_2^2(s)]} \\ &= j \frac{a_0 N_2(s)}{M_2^2(s) - N_2^2(s)} \end{aligned} \quad (8-118b)$$

y

$$|H(s)|^2 \triangleq \frac{a_0^2}{M_2^2(s) - N_2^2(s)} \quad (8-118c)$$

Al sustituir (8-118) en (8-113), la ecuación resultante se puede simplificar y reformular a

$$\tau\left(\frac{s}{j}\right) = \frac{M_2(s)N'_2(s) - N_2(s)M'_2(s)}{M_2^2(s) - N_2^2(s)} \quad (8-119)$$

donde el primo denota derivadas con respecto a  $s$ . Con (8-115), (8-119) se puede escribir como:

$$\tau\left(\frac{s}{j}\right) = \frac{a_0 a_1 + (3a_0 a_3 - a_1 a_2)s^2 + (5a_0 a_5 - 3a_1 a_4 + a_2 a_3)s^4 + \dots}{a_0^2 + (2a_0 a_2 - a_1^2)s^2 + (2a_0 a_4 - 2a_1 a_3 + a_2^2)s^4 + \dots} \quad (8-120)$$

Consideremos ahora el caso específico cuando  $n=3$  en (8-114); (8-120) toma la forma

$$\tau\left(\frac{s}{j}\right) = \frac{a_0 a_1 + (3a_0 - a_1 a_2)s^2 + a_2 s^4}{a_0^2 + (2a_0 a_2 - a_1^2)s^2 + (-2a_1 + a_2^2)s^4 - s^6} \quad (8-121)$$

Suponga que se desea diseñar un filtro de retardo de grupo unitario —  $\tau(0)=1$ . En este caso, (8-111) requiere que  $a_0=a_1$  porque

$$\tau(0) = \frac{a_0 a_1}{a_0^2} = \frac{a_1}{a_0} \quad (8-122)$$

Por lo tanto, ahora se realiza una aproximación de Taylor óptima del retardo unitario constante forzando a que se anulen tantas derivadas como sea posible de la función de error

$$\begin{aligned} e\left(\frac{s}{j}\right) &= \tau\left(\frac{s}{j}\right) - \tau(0) = \tau\left(\frac{s}{j}\right) - 1 \\ &= \frac{(3a_1 - 3a_1 a_2 + a_1^2)s^2 + (a_2 + 2a_1 - a_2^2)s^4 + s^6}{a_1^2 + (2a_1 a_2 - a_1^2)s^2 + (-2a_1 + a_2^2)s^4 - s^6} \end{aligned} \quad (8-123)$$

en  $s=0$ . Alternativamente, podemos forzar la función de error para que tenga tantos ceros como sea posible en  $s=0$ . Esto es equivalente a tener todos los coeficientes del numerador, excepto el asociado con el término de mayor grado de  $e(s/j)$ , sean ceros. La última propuesta da lugar a un conjunto de ecuaciones simultáneas

$$3 - 3a_2 + a_1 = 0 \quad (8-124a)$$

$$a_2 + 2a_1 - a_2^2 = 0 \quad (8-124b)$$

Note que (8-124) es un sistema de ecuaciones no lineales que involucran  $a_1$  y  $a_2$  como incógnitas. La solución de (8-124) da  $a_2=6$  y  $a_1=a_0=15$ . Por tanto, la función de transferencia deseada es:

$$H(s) = \frac{a_0}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + s^3} = \frac{15}{15 + 15s + 6s^2 + s^3} \quad (8-125)$$

Este método es óptimo. Sin embargo, cuando el orden del filtro es alto, es muy difícil obtener un conjunto de soluciones para un sistema de ecuaciones simultáneas no lineales, como (8-124), que invariamente surgen en este método.

El método mencionado anteriormente es complicado, pero ilustra el procedimiento básico. Muy a menudo, en la vida real, no existen métodos cortos y fáciles para reemplazar los procedimientos, a menudo torpes y lentos. Afortunadamente, en este caso, se ha desarrollado una forma más sencilla. Al relacionar el denominador de una función de transferencia de todos los polos con una cierta clase de polinomios de Bessel, resulta un filtro de retardo de grupo máximamente plano. Este tipo de filtro se llama filtro de Bessel. Para ser más precisos, un filtro de Bessel de paso bajo de orden n se caracteriza por una función de transferencia

$$H(s) = \frac{k}{\hat{B}_n(s)} \quad (8-126)$$

donde  $B_n(s)$  es el polinomio de Bessel de grado  $n$  y  $k \triangleq \hat{B}_n(0)$ . Conociendo los polinomios de Bessel para  $n=1$  y  $n=2$  como

$$\hat{B}_1(s) = s + 1 \quad (8-127a)$$

y

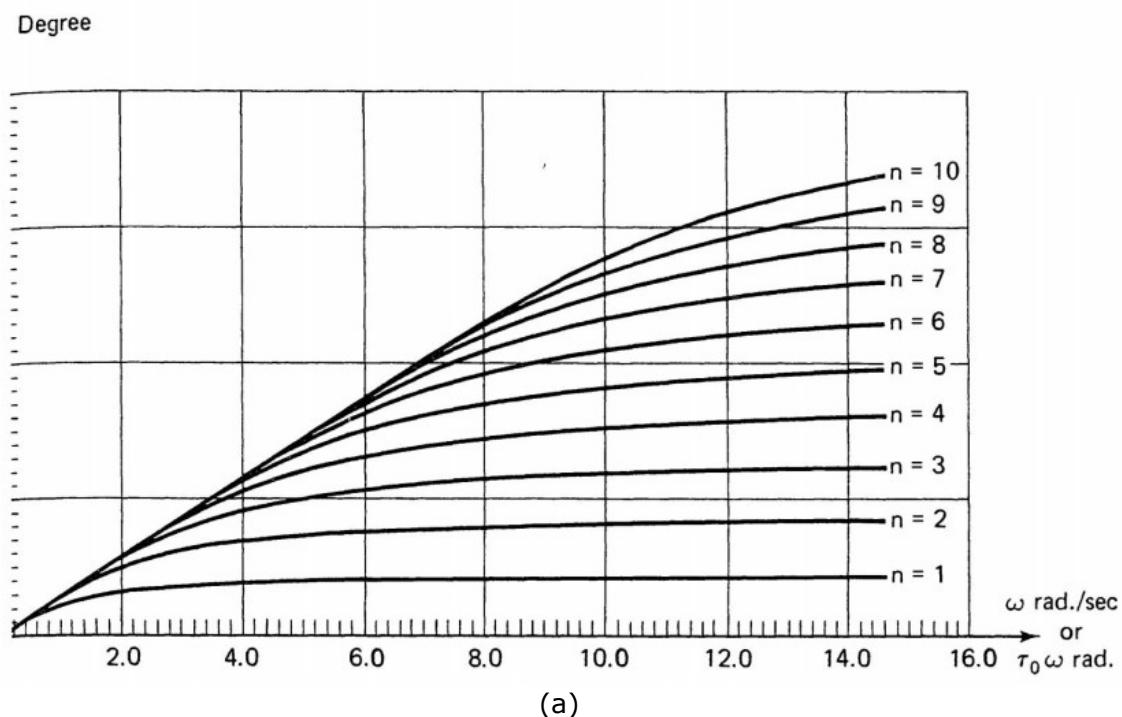
$$\hat{B}_2(s) = s^2 + 3s + 3 \quad (8-127b)$$

un polinomio de Bessel de orden  $n$ , se puede encontrar a partir de la fórmula recursiva

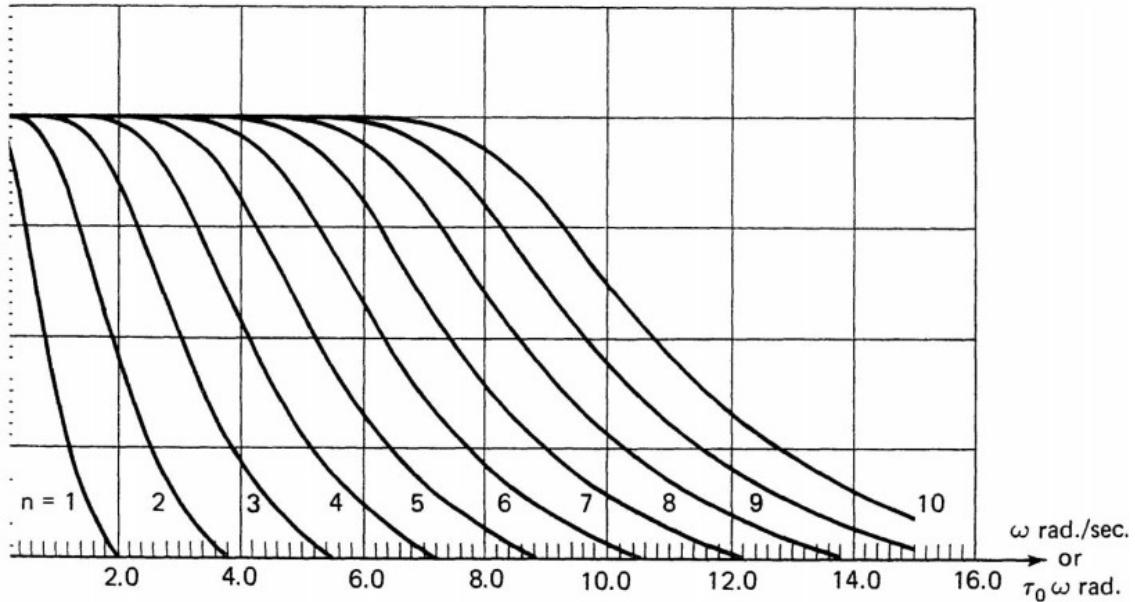
$$\hat{B}_n(s) = (2n-1)\hat{B}_{n-1}(s) + s^2\hat{B}_{n-2}(s) \quad (8-128)$$

Por ejemplo,

$$\begin{aligned} \hat{B}_3(s) &= (6-1)\hat{B}_2(s) + s^2\hat{B}_1(s) \\ &= 5(s^2 + 3s + 3) + s^2(s+1) \\ &= s^3 + 6s^2 + 15s + 15 \end{aligned} \quad (8-129)$$



ec. or  $\frac{\tau(\omega)}{\tau_0}$



(b)

Fig. 8-21 (a) Características de fase de los filtros Bessel, (b) Retardo de grupo  
Características de los filtros Bessel.

Sustituyendo (8-129) en (8-126), obtenemos la función de transferencia de (8-125). La Fig. 8-21 muestra las características de retardo de fase y de grupo de los filtros Bessel de paso bajo de orden  $n$  desde  $n=1$  hasta  $n=10$ . Observe que entre  $\omega=0$  y  $\omega=1$  rad./seg., todos los filtros Bessel de orden  $n \geq 2$  se aproxima muy bien a la característica de fase lineal de la Fig. 8-2(b).

Tenga en cuenta que los filtros de Bessel de (8-126) solo producirán un retraso de grupo de unidad

$$\tau(0)=1 \quad (8-130)$$

Si se desea tener

$$\tau(0)=\tau_0 \neq 1 \quad (8-131)$$

entonces tenemos que realizar una transformación

$$s \mapsto \tau_0 s \quad (8-132a)$$

o

$$\omega \mapsto \tau_0 \omega \quad (8-132b)$$

donde " $\mapsto$ " significa reemplazar  $s$  por  $\tau_0 s$  o  $\omega$  por  $\tau_0 \omega$ . En esencia, (8-132) es escalar el eje horizontal de los diagramas de fase del filtro de Bessel en  $1/\tau_0$  mientras la escala vertical permanece sin cambios. Por lo tanto, una pendiente de 1 o

$$\frac{\Delta \phi(\omega)}{\Delta \omega} = 1 \quad (8-133)$$

se convierte en una pendiente de

$$\frac{\Delta \phi(\omega)}{\Delta \omega / \tau_0} = \tau_0 \quad (8-134)$$

Por esta razón, también rotulamos el eje horizontal de la Fig. 8-21 como  $\tau_0 \omega$  rad. Además de  $\omega$  rad./seg. . Por lo tanto, la función de transferencia de un filtro de paso bajo de fase lineal con retardo de grupo  $\tau_0$  viene dada por

$$H(s) = \frac{k}{\hat{B}_n(\tau_0 s)} \quad (8-135)$$

donde

$$k = \hat{B}_n(0) \quad (8-136)$$

Esta forma de  $H(s)$  asegura que el filtro resultante tendrá una función de magnitud de tipo paso bajo. El grado del denominador utilizado en (8-135) depende de las especificaciones y otras consideraciones. Cuanto mayor sea el valor de  $n$ , mejor se aproximarán el filtro resultante a un retardo de grupo unitario constante  $\tau_0$  en una banda de frecuencia mayor, como se ilustra en la Fig. 8-21(b).

**Ejemplo 8-8** Encuentre la función de transferencia de un filtro de retardo de grupo plano máximo de paso bajo de segundo orden con  $\tau(0)=3$ .

**Solución:** Resolvemos este problema de dos maneras. El primer método emplea la técnica de equilibrio de coeficientes y el segundo método utiliza los polinomios de Bessel y la técnica de escalado de frecuencia de (8-132).

Suponga que la función de transferencia  $H(s)$  tiene la forma

$$H(s) = \frac{k}{s^2 + b_1 s + b_0} \quad (8-137)$$

Por (8-119), la función de retardo de grupo viene dada por

$$\tau\left(\frac{s}{j}\right) = \frac{(s^2 + b_0)b_1 - b_1 s(2s)}{(s^2 + b_0)^2 - b_1^2 s^2} \quad (8-138)$$

Definir

$$\begin{aligned} e(s) &\triangleq \tau\left(\frac{s}{j}\right) - \tau(0) = \tau\left(\frac{s}{j}\right) - 3 \\ &= \frac{-3s^4 + (3b_1^2 - b_1 - 6b_0)s^2 + b_0(b_1 - 3b_0)}{(s^2 + b_0)^2 - b_1^2 s^2} \end{aligned} \quad (8-139)$$

Por lo tanto, debemos establecer

$$3b_1^2 - b_1 - 6b_0 = 0 \quad (8-140a)$$

y

$$b_1 - 3b_0 = 0 \quad (8-140b)$$

Resolviendo (8-140), obtenemos

$$b_1=1 \quad y \quad b_0=\frac{1}{3} \quad (8-141)$$

Sustituyendo (8-141) en (8-137), obtenemos la función de transferencia deseada  $H(s)$  como

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{k}{s^2+s+(1/3)} \\ &= \frac{1}{3s^2+3s+1} \end{aligned} \quad (8-142)$$

Otra forma de resolver este problema es a través de (8-135), donde la función de transferencia deseada viene dada por

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{k}{\hat{B}_2(3s)} = \frac{k}{(3s)^2+3(3s)+3} \\ &= \frac{k}{9s^2+9s+3} = \frac{1}{3s^2+3s+1} \end{aligned}$$

### 8-3-2. Diseño y Realización

El único parámetro de diseño de los filtros Bessel es del orden  $n$ . El valor de  $n$  se elige para satisfacer las especificaciones prescritas sobre los requisitos de fase, así como los requisitos de magnitud.

**Ejemplo 8-9** Encuentre el filtro Bessel de orden más bajo para cumplir con las siguientes especificaciones:

- (i)  $\tau(0)=1 \text{ sec.}$
- (ii)  $\tau(\omega)$  tiene menos del 1% de error para  $\omega \leq 2 \text{ rad./seg.}$
- (iii)  $|H(j\omega)|^2 \leq 0.5$  para  $\omega > 2 \text{ rad./sec.}$

**Solución:** De la Fig. 8-21(b), encontramos que  $n=5$  satisface las condiciones (i) y (ii).

Para considerar la condición (iii), hemos trazado las características de magnitud de los filtros de Bessel en la Fig. 8-22. A partir de la figura 8-22, determinamos que  $n \geq 8$  satisface la condición (iii). Por lo tanto, un filtro Bessel de octavo orden cumplirá con todos los requisitos prescritos.

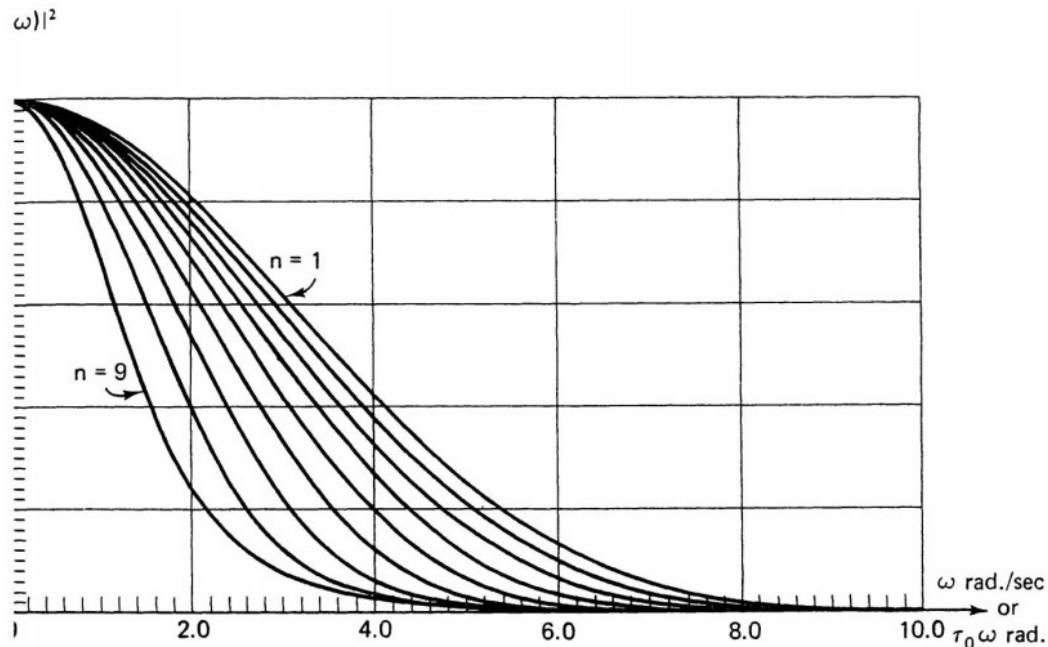


Fig. 8-22 Magnitude characteristics of Bessel filters.

**Ejemplo 8-10** Encuentre el filtro Bessel de orden más bajo para cumplir con las siguientes especificaciones:

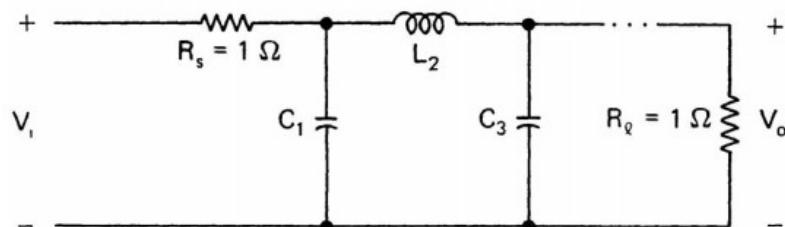
- (i)  $\tau(0)=2 \text{ sec.}$
- (ii)  $\tau(\omega)$  tiene menos del 1 % de error para  $\omega < 2 \text{ rad./seg.}$
- (iii)  $|H(j\omega)|^2 \leq 0.2$  para  $\omega \geq 2 \text{ rad./sec.}$

**Solución:** En vista de la condición (i), las condiciones (ii) y (iii) son equivalentes a:

- (a)  $\tau(\omega)$  tiene menos del 1 % de error para  $\tau_o \omega \leq 4 \text{ rad.}$
- (b)  $|H(j\omega)|^2 \leq 0.2$  para  $\tau_o \omega \geq 4 \text{ rad.}$

De la Fig. 8-21(b), la condición (a) se cumple cuando  $n \geq 7$ , y la condición (b) requiere que  $n \geq 5$ , como se muestra en la figura 8-22. Por lo tanto, se necesita un filtro de Bessel de séptimo orden.

Los filtros de Bessel, tal como se presentan en esta sección, son filtros de paso bajo con todos los ceros de transmisión en  $s=\infty$ . Por lo tanto, se puede usar un procedimiento de síntesis de Darlington simplificado con la primera forma de Cauer, como se analiza en la sección 7-3, para realizar las funciones de transferencia resultantes. En este caso, la estructura básica del circuito viene dada por la figura 8-23. Para el caso de retardo de grupo unitario en  $\omega=0$  —cuando las funciones de transferencia están dadas por (8-126)— los valores de los elementos de circuito están dados por la Tabla 8-4.



**Fig. 8-23** A basic circuit structure for low-pass Bessel filters.

**TABLE 8-4** Values of Circuit Elements in Bessel Filters

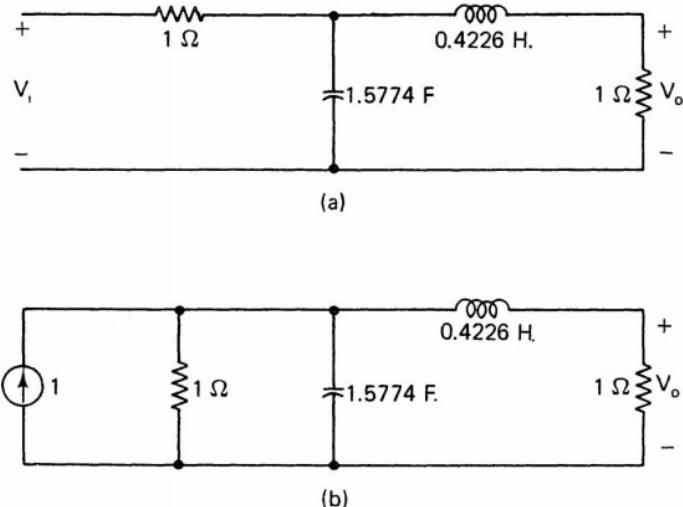
<i>n</i>	<i>C</i> <sub>1</sub>	<i>L</i> <sub>2</sub>	<i>C</i> <sub>3</sub>	<i>L</i> <sub>4</sub>	<i>C</i> <sub>5</sub>	<i>L</i> <sub>6</sub>	<i>C</i> <sub>7</sub>	<i>L</i> <sub>8</sub>	<i>C</i> <sub>9</sub>
1	2.0000								
2	1.5774	0.4226							
3	1.2550	0.5528	0.1922						
4	1.0598	0.5116	0.3181	0.1104					
5	0.9303	0.4577	0.3312	0.2090	0.0718				
6	0.8377	0.4116	0.3158	0.2364	0.1480	0.0505			
7	0.7677	0.3744	0.2944	0.2378	0.1778	0.1104	0.0375		
8	0.7125	0.3446	0.2735	0.2297	0.1867	0.1387	0.0855	0.0289	
9	0.6678	0.3203	0.2547	0.2184	0.1859	0.1506	0.1111	0.0682	0.0230

**Ejemplo 8-11** Suponga que vamos a construir un filtro de Bessel de segundo orden con un retardo de grupo unitario en  $s=0$ . Encuentre un diseño de circuito y verifique el resultado.

**Solución:** De (8-126) y (8-127), la función de transferencia de un filtro de Bessel de segundo orden está dada por

$$H(s) = \frac{k}{s^2 + 3s + 3} \quad (8-143)$$

A partir de la Fig. 8-23 y la Tabla 8-4, se muestra una realización del circuito de (8-143) en la Fig. 8-24(a).



**Fig. 8-24** (a) A circuit realization of a second-order Bessel filter, and (b) its equivalent circuit.

Para ver que el circuito de la Fig. 8-24(a) es una realización de (8-143), hacemos  $V_i=1$  y volvemos a dibujar el circuito resultante como se muestra en la figura 8-24(b). Un análisis nodal produce

$$V_o = \frac{1/LC}{s^2 + s\left(\frac{1}{L} + \frac{1}{C}\right) + \frac{2}{LC}} \quad (8-144a)$$

donde

$$L=0.4226 \quad y \quad C=1.5774 \quad (8-144b)$$

Sustituyendo (8-144b) en (8-144a), obtenemos

$$V_o = \frac{1.5}{s^2 + 3s + 3}$$

Por lo tanto, la función de transferencia viene dada por

$$\hat{H}(s) = \frac{1.5}{s^2 + 3s + 3} \quad (8-145)$$

Los filtros de Bessel se aproximan al retardo de grupo constante con una propiedad máximamente plana. Esto es paralelo a los filtros Butterworth que se aproximan a la función de magnitud constante con una propiedad máximamente plana. También es posible aproximar una función de retardo de grupo constante con propiedad de ondulación igual (análogo a un filtro de Chebyshev que se aproxima a una función de transferencia de magnitud constante). Sin embargo, no discutiremos este tipo de filtro de fase aquí.

### 8-3-3. Filtros de transición

Aunque el filtro de Bessel proporciona un cambio de fase que es mucho más lineal que el del filtro de Butterworth o el de Chebyshev, la respuesta de magnitud del filtro de Bessel no tiene un corte muy agudo.<sup>18</sup> Una clase de filtros hace un compromiso entre las características de corte de Butterworth y la característica de cambio de fase de Bessel. Este compromiso se logra colocando los polos del filtro entre los de Butterworth y los de Bessel.

Como ejemplo, considere el filtro Butterworth de segundo orden con polos en  $-(1/\sqrt{2}) \pm j(1/\sqrt{2})$  como se indica en (8-42a). El filtro de Bessel de segundo orden tiene polos en  $-(3/2) \pm j(\sqrt{3}/2)$  (véase el ejemplo 8-11). El filtro Butterworth está normalizado para tener una magnitud de polo de uno. Antes de hacer el compromiso, primero normalizamos el filtro Bessel para que la magnitud del polo como la del filtro Butterworth sea 1. Esto requiere normalizar la frecuencia por un factor de  $\sqrt{3}$ . (Estudiaremos el escalado de frecuencia más adelante). La función de transferencia del filtro de Bessel normalizado de segundo orden resultante está dada por

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{3}s + 1} = \frac{1}{\left(s + \frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2}\right)\left(s + \frac{\sqrt{3}}{2} - j\frac{1}{2}\right)} \quad (8-146)$$

El filtro de transición tiene polos entre

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \pm j\frac{1}{\sqrt{2}} \quad [\text{del filtro de Butterworth (8-42a)}]$$

y

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} \pm j\frac{1}{2} \quad [\text{del filtro de Bessel (8-146)}]$$

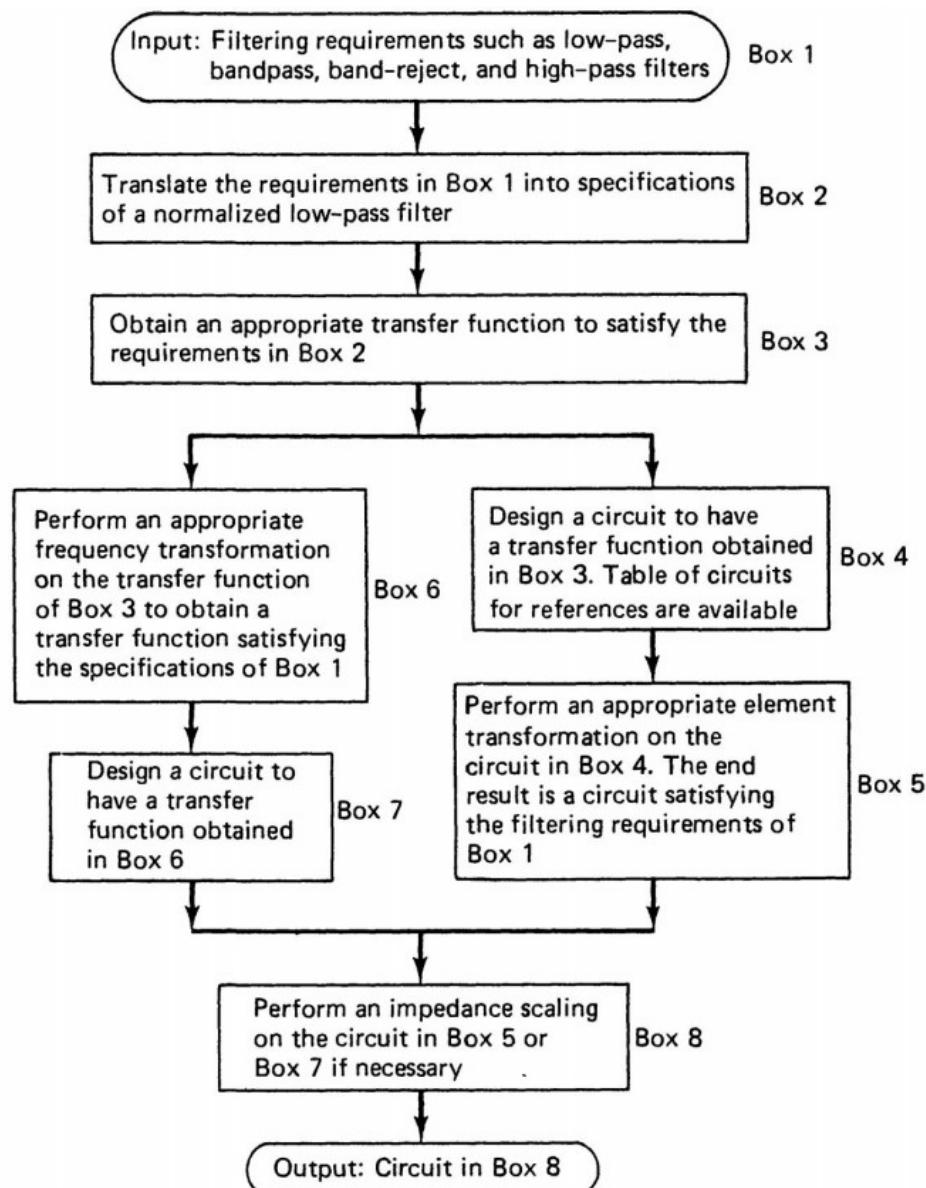
Un filtro con las ubicaciones de los polos a mitad de camino entre los polos de Butterworth y los polos de Bessel tiene una función de transferencia

$$\begin{aligned} H_T(s) &= \frac{1}{\left(s + \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{4} + j\frac{1 + \sqrt{2}}{4}\right)\left(s + \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{4} - j\frac{1 + \sqrt{2}}{4}\right)} \\ &= \frac{1}{s^2 + 1.5731s + 0.9830} \end{aligned} \quad (8-147)$$

Los filtros de transición con una función de transferencia como la de (8-147) suelen ser mejores como filtros para ráfagas de tonos (en sistemas de telecomunicaciones), porque una buena respuesta de fase significa poco sobreimpulso. Por otro lado, la selección de ráfagas de tonos requiere características de magnitud de frecuencia bastante buenas.

## 8-4 Transformaciones básicas de frecuencia y de red

Aunque la mayor parte de nuestra discusión hasta ahora se ha centrado en las estructuras de paso bajo normalizadas, esto no significa que sean el tipo de filtro más común. De hecho, las razones por las que nuestras discusiones han sido tan restringidas son: (1) los filtros de paso bajo normalizados son, como mucho, los más fáciles de realizar; y (2) la mayoría de los requisitos de filtrado de paso de banda, rechazo de banda y paso alto, así como otros de paso bajo, se satisfacen fácilmente mediante una transformación adecuada de la estructura de paso bajo normalizada. La figura 8-25 muestra dos procedimientos para diseñar otros filtros además del prototipo de paso bajo normalizado.



**Fig. 8-25** Two filter design procedures.

### 8-4-1. Transformación de paso bajo a paso bajo

Este proceso a veces se denomina escalado de frecuencia o desnormalización de frecuencia. Todas las funciones de transferencia de filtro analizadas hasta ahora son filtros de paso bajo con una frecuencia de corte de 1 rad./seg. El material cubierto en este capítulo hasta ahora sería inútil si no hubiera formas simples de convertir la frecuencia de corte de paso bajo normalizada de 1 a otras frecuencias de paso bajo. Afortunadamente, esto se puede lograr fácilmente. Suponga que se desea que la frecuencia de corte esté en  $\omega_c$  rad./seg. . Todo lo que tenemos que hacer es reemplazar cada  $\omega$  en la función de transferencia de paso bajo normalizada con  $\omega/\omega_c$  . La función de transferencia de paso bajo resultante tendrá una frecuencia de corte en  $\omega_c$  . Por ejemplo, un filtro de enésimo orden Butterworth de paso bajo con ancho de banda unitario (frecuencia de corte = 1) tiene una función de transferencia cuyo cuadrado de magnitud es

$$|H_N(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+\omega^{2n}} \quad (8-148)$$

Un filtro Butterworth de paso bajo de orden n con ancho de banda  $\omega_c$  viene dado por

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+(\omega/\omega_c)^{2n}} \quad (8-149)$$

Para ver que (8-149) define un filtro con una frecuencia de corte en  $\omega_c$  , simplemente calculamos el punto 3dB  $\omega_{3dB}$  , es el punto en el que se cumple la siguiente ecuación:

$$-10 \log \frac{|H(j\omega_{3dB})|^2}{|H(j\omega_{Ref})|^2} = 3 \quad (8-150)$$

donde

$$\begin{aligned} \omega_{Ref} &= 0 \text{ para filtros pasa bajos} \\ &= \infty \text{ Para filtros pasa altos} \\ &= 0 \text{ o } \infty \text{ para filtros rechaza-banda} \\ &= \text{la frecuencia central para filtros pasa bandas} \end{aligned} \quad (8-151)$$

Después de algunas manipulaciones algebraicas, encontramos que

$$\omega_{3dB} = \omega_c \quad (8-152)$$

Por lo tanto, la frecuencia de corte o el punto de 3dB está en  $\omega_c$  .

Con la transformación de frecuencia

$$s \mapsto \frac{s}{\omega_c} \quad (8-153a)$$

o

$$\omega \mapsto \frac{\omega}{\omega_c} \quad (8-153b)$$

un capacitor con  $C$  Faradios en un circuito de ancho de banda unitario que tiene una impedancia de  $1/sC$  se transforma en una rama de circuito de ancho de banda  $\omega_c$  que tiene una impedancia de

$$\frac{1}{(s/\omega_c)C} = \frac{1}{s(C/\omega_c)} \quad (8-154a)$$

que es un condensador con  $C/\omega_c$  Faradios. Un inductor con  $L$  Henries en un circuito de ancho de banda unitario tiene una impedancia de  $sL$ , y su contraparte en un circuito de ancho de banda  $\omega_c$  tiene una impedancia de

$$(s/\omega_c)L = s(L/\omega_c) \quad (8-154b)$$

y por lo tanto es un inductor con  $L/\omega_c$  Henries. Los resistores y todos los elementos resistivos permanecen sin cambios bajo la transformación de frecuencia de (8-153).<sup>101</sup>

Como en el caso de (8-132), (8-153) simplemente representa un cambio en la escala de frecuencia; si  $x$  es un punto de frecuencia en la escala normalizada, entonces  $\omega_c x$  es el punto de frecuencia después de la transformación de frecuencia de, o el cambio de escala indicado por, (8-153).

**Ejemplo 8-12** Suponga que vamos a tener un filtro de ondulación equivalente para satisfacer las siguientes especificaciones:

- (a) El ancho de banda de rizado es de 1K rad./seg.
- (b) La atenuación máxima del rizado de banda de paso es de 0.1 dB
- (c) La atenuación mínima de la banda suprimida es de 40 dB para  $\omega \geq 6 K$  rad./seg. .
  - (i) Encuentre la función de transferencia deseada.
  - (ii) Encuentre una realización de circuito del filtro deseado.

**Solución:** como se indica en la Fig. 8-25, traduzcamos primero las especificaciones al caso de paso bajo normalizado de la siguiente manera:

- (a') El ancho de banda de ondulación es de 1 rad./seg. (Esto implica que más adelante se necesita una escala de frecuencia de  $\omega \mapsto \omega/1K$  o  $s \mapsto s/1K$ )
- (b') La atenuación máxima del rizado de banda de paso es de 0.1 dB .
- (c') La atenuación mínima de la banda suprimida es de 40 dB para  $\omega \geq 6 rad./seg.$ .

De la Fig. 8-15(a), encontramos que  $n \geq 3$  satisfará las condiciones (a'), (b') y (c'). Para encontrar la función de transferencia normalizada, usamos (8-71) y (8-85) para calcular el parámetro de ondulación  $\epsilon$  y las ubicaciones de los tres polos:

$$\begin{aligned}\epsilon &= \sqrt{10^{0.01} - 1} = 0.1526 \\ s_1 &= -0.4847 + j1.2062 \\ s_2 &= -0.9694 \\ s_3 &= -0.4847 - j1.2062\end{aligned}$$

Por lo tanto,

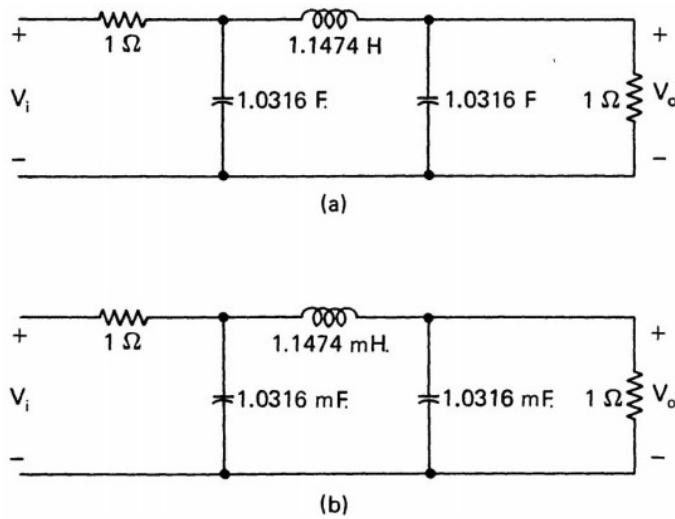
$$H_N(s) = \frac{1.6381}{s^3 + 1.9388s^2 + 2.6295s + 1.6381} \quad (8-155)$$

Por (8-153), la función de transferencia deseada viene dada por

101 La clase de elementos resistivos incluye giradores, los cuatro tipos de fuentes controladas y amplificadores operacionales. Estos elementos permanecen sin cambios bajo todo tipo de transformaciones de frecuencia.

$$\begin{aligned}
 H(s) &= H_N \left( \frac{s}{10^3} \right) \\
 &= \frac{1.6381 \times 10^9}{s^3 + (1.9388 \times 10^3 s^2) + (2.6295 \times 10^6 s) + (1.6381 \times 10^9)} \quad (8-156)
 \end{aligned}$$

A partir de la Fig. 8-17 y la tabla 8-2, en la Fig. 8-26(a) se muestra una realización del circuito del diseño normalizado de (8-155). Al aplicar la transformación de elementos de (8-154), en la Fig. 8-26(b) se muestra un circuito que implementa la función de transferencia deseada de (8-156). Observe que la función de transferencia de relación de voltaje del circuito de la Fig. 8-26(b) satisface todas las especificaciones prescritas de las condiciones (a), (b) y (c).



**Fig. 8-26** Circuit realizations of (a) the normalized transfer function of (8-155), and (b) the desired transfer function of (8-156).

**Resolución Matlab – Problema 8-12**

```

clear all; clc;

syms w 'real'
syms n k 'integer'

%% datos del problema 232
Rl=1;
Rs=1;
Ap=sym('0.1');
As=sym('40');           %banda suprimida
ws=sym('6');

%% calcular la constante de ripple C(1)=1
%10*log10( H_j1) = 10* log10( 1 / (1+e^2) = -Ap ;
e=sqrt( 10^(Ap/10)-1 )

%% calcular el orden en la banda suprimida
%H2(jw)=1 / (1+ ( e * Cn(w) )^2 )
%Cn(w)=cos (n*acos(w)); en la banda de paso
%Cn(w)=cosh (n*acosh(w)); en la banda suprimida
n= acosh(( sqrt( 10^(As/10) -1 )/e) / (acosh(ws)) ;
n=ceil(n)

bk(k)=(asinh( 1/e ) )/n

theta(k)= (2*k-1)/(2*n)*pi ;
sk(k)=sinh( bk(k) )*sin(theta(k))+
j*cosh( bk(k) )*cos(theta(k))

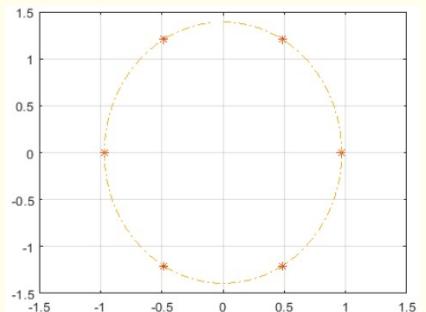
r=[];
for m=1:2*n
    r(m)=sk(m);
end
syms s;

H(s)=1/collect( prod(s-r(4:6)) )

plot(real(r), imag(r), '*'), hold on, plot(real(r),
imag(r), '*'), hold on,
plot( sinh( bk([0:0.1:2*pi]) ).*sin([0:0.1:2*pi])+
j*cosh( bk([0:0.1:2*pi]) ).*cos([0:0.1:2*pi]),'-.'),
hold off; xlim([-1.5,1.5]); grid on;

```

$$H(s) = \frac{1}{s^3 + 1.9388s^2 + 2.6296s + 1.6381}$$



**Resolución Matlab – Problema 8-12 (alternativa)**

```

clear all; clc;

%% datos de entrada
wc=1e3; % rad/s

%banda de rizado
Adb=0.1 % db

%de la banda suprimida
Adbs=40 % db
ws=6e3; % rad/s

wsN=ws/wc % la frecuencia normalizada

%% calcula de la amplitud del rizado
e=sqrt(10^(Adb/10)-1)

%%calcula el orden del polinomio y el polinomio de
chebyshev
syms w 'real'
n=0;
[T]=Chebyshev(0,w,n);
H2(w)=sym('1')*1/(1+e^2*T^2);

% iterando hasta conseguir un orden que cumpla la
% atenuación dada en la banda de supresión
while double(-10*log10(H2(wsN)))<Adbs
    n=n+1;
    [T]=Chebyshev(0,w,n);
    H2(w)=1/(1+e^2*T^2);
end
fprintf("Orden del filtro: %d",n)
T(w)=collect(T)

%% calcula la función de transferencia
syms s
H2(s)=subs(H2(w),w, s/j);
H2(s)=simplify(H2(s), 'Step',100);

% normalizando la función
[B,A]=numden(H2(s));
A=collect(A)/B(1);
B=1; H2(s)=B/A;
vpa(H2(s),4)

% armo la función de transferencia
r=roots(sym2poly(A))
plot(real(r), imag(r), 'kx'); grid on;

pa=sym2poly(A);
pb=B;
H(s)=1/prod(s-r(1:3));
k=vpa(sqrt(H2(0))/H(0) ,5);
H(s)=k*H(s);

% H(s) normalizada
[B,A]=numden(H(s));
A=vpa(collect(A)/B(1),4);
B=1; H(s)=B/A;
vpa(H(s),5)

%desnormalizo la H(s)
vpa(H(s/wc), 5)

%%polinomio de chebyshev
function [T]=Chebyshev(T,w,n)

```

Adb = 0.1000  
 Adbs = 40  
 wsN = 6  
 e = 0.1526  
 Orden del filtro: 3

$T(w) =$   
 $4w^3 - 3w$

ans =  
 $-1/(0.3727s^6 + 0.559s^4 + 0.2096s^2 - 1.0)$

$r = 6 \times 1 \text{ complex}$   
 $-0.9694 + 0.0000i$   
 $-0.4847 + 1.2062i$   
 $-0.4847 - 1.2062i$   
 $0.4847 + 1.2062i$   
 $0.4847 - 1.2062i$   
 $0.9694 + 0.0000i$

ans =  
 $1/(0.61048s^3 + 1.1836s^2 + 1.6053s + 1.0)$

ans =  
 $1/(6.1048e-10s^3 + 1.1836e-6s^2 + 0.0016053s + 1.0)$

```
if n==0
    T=1;
elseif n==1
    T=w;
else
    T=2*w*Chebyshev(T,w,n-1)-Chebyshev(T,w,n-2);
end
end
```

**Ejemplo 8-13** Suponga que vamos a diseñar un filtro de retardo de grupo máximamente plano para cumplir con las siguientes especificaciones:

$$(a) \tau(0)=100\mu sec.=10^{-4} sec.$$

$$(b) \tau(\omega) \text{ tiene menos del } 3\% \text{ de error para } |\omega|<20 K \text{ rad./sec.}$$

(i) Encuentre la función de transferencia deseada.

(ii) Encuentre una realización de circuito del filtro deseado.

**Solución:** En términos de  $\tau_0\omega$ , la condición (b) se convierte en:

$$(b') \tau(\omega) \text{ tiene menos del } 3\% \text{ de error para } |\tau_0\omega|<2 \text{ rad.}$$

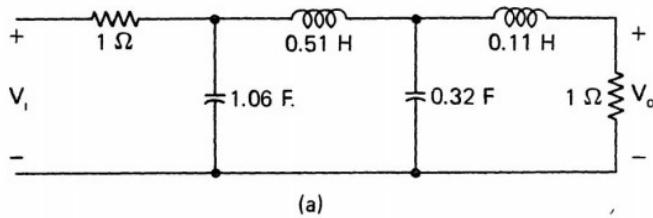
De la Fig. 8-21(b), encontramos que  $n=4$  satisfará la condición (b'). La función de transferencia del filtro de Bessel normalizado está dada por (8-128) como

$$H_N(s)=\frac{105}{s^4+10s^3+45s^2+105s+105} \quad (8-157)$$

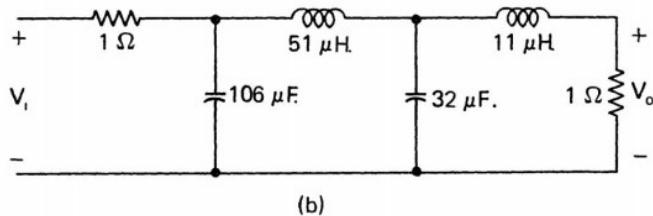
Para obtener la función de transferencia deseada, podemos usar (8-135) con  $\tau_0=10^{-4}$  o (8-153) con  $\omega_c=10^4$ .<sup>102</sup> La función de transferencia deseada resultante está dada por

$$\begin{aligned} H(s) &= H_N\left(\frac{s}{10^4}\right) \\ &= \frac{105 \times 10^6}{s^4 + 10^5 s^3 + (45 \times 10^8 s^2) + (105 \times 10^{12} s) + (105 \times 10^{16})} \end{aligned} \quad (8-158)$$

A partir de la Fig. 8-23 y la tabla 8-4, en la Fig. 8-27(a) se muestra una realización del circuito del diseño normalizado de (8-157). Mediante la transformación de elementos de (8-154), obtenemos el circuito de filtro deseado en la Fig. 8-27(b).



(a)



(b)

**Fig. 8-27** Circuit realizations of (a) the normalized transfer function of (8-157), and (b) the desired transfer function of (8-158).

<sup>102</sup>Observe que al convertir la condición (b) a (b'), en realidad hemos realizado una escala de frecuencia de  $\omega \rightarrow 10K\omega$ .

### 8-4-2. Transformación de paso bajo a paso banda

La transformación de frecuencia, que toma una estructura de paso bajo normalizada (con una sola banda de paso centrada en  $\omega=0$ ) en un filtro de paso de banda (con dos bandas de paso centradas en  $\omega_0$  y  $-\omega_0$ , cada una con un ancho de banda de  $B$ ), ciertamente no es lineal, como en el caso de paso bajo a paso bajo. Considere la transformación explícita

$$s \mapsto \frac{s^2 + \omega_0^2}{Bs} \quad (8-159)$$

donde  $\omega_0$  es la frecuencia central deseada y  $B$  es el ancho de banda del filtro pasabanda.<sup>103</sup>

La transformación de frecuencia de (8-159) tiene las siguientes características importantes:

1. El punto  $\omega=0$  es mapeado a las frecuencias centrales  $\omega_0$  y  $-\omega_0$ . En general, un punto  $x$  es mapeado a dos puntos  $\omega_x$  y  $-\omega_x$ , excepto cuando  $x=\infty$ . El punto en el infinito es mapeado al origen.
2. El eje imaginario positivo {negativo} es mapeado a los intervalos de  $(\omega_0, \infty)$  y  $(-\infty, -\omega_0)$  $\{(0, \omega_0)\}$  y  $(-\omega_0, 0)\}$ .
3. Sean  $\pm\omega_x$  y  $\pm\omega_{-x}$  son las imágenes de  $x$  y  $-x$  bajo la transformación de (8-159); luego

$$\omega_0^2 = \omega_x \omega_{-x} \quad (8-160)$$

Debido a (8-160), las características de atenuación de paso de banda (y la fase) resultantes no mostrarán una simetría aritmética sino una simetría geométrica sobre  $\omega_0$ .<sup>104</sup> Si hacemos  $x=1$  en (8-160), entonces  $\omega_1$  y  $\omega_{-1}$  son los bordes de la banda de paso del filtro de paso de banda resultante. Por lo tanto, tenemos

$$B = \omega_1 - \omega_{-1} \quad (8-161a)$$

y

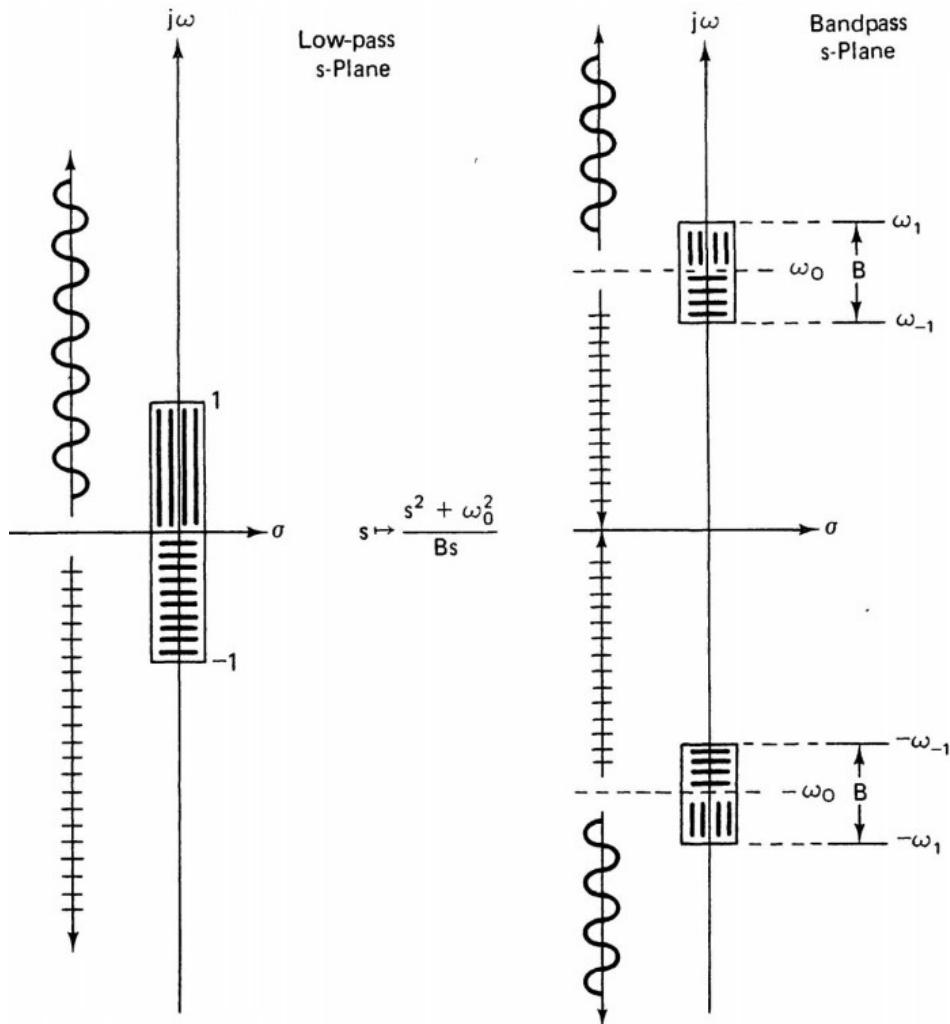
$$\omega_0^2 = \omega_1 \omega_{-1} \quad (8-161b)$$

En la Fig. 8-28 se muestra una ilustración de las características básicas de (8-159).

103 El ancho de banda de un filtro de paso de banda viene dado por la diferencia entre las dos frecuencias de corte (positivas) de 3 dB como  $B \triangleq |\omega_{c1} - \omega_{c2}|$  donde  $\omega_{c1}$  y  $\omega_{c2}$  son las soluciones de  $\omega_c$  para la siguiente ecuación

$$-10 \log \frac{|H(j\omega_c)|^2}{|H(j\omega_0)|^2} = 3$$

104 Para obtener detalles sobre el diseño de filtros de paso de banda aritméticamente simétricos, consulte la referencia [14].



**Fig. 8-28** Basic characteristics of low-pass to bandpass frequency transformation.

Con la transformación de paso bajo a paso de banda de (8-159), podemos obtener la función de transferencia de paso de banda  $H(s)$  del prototipo de paso bajo normalizado  $H_N(s)$  reemplazando cada  $s$  en  $H_N(s)$  con  $(s^2 + \omega_0^2)/Bs$ . Para obtener un circuito de filtro de paso de banda deseado, podemos realizar la función de transferencia resultante  $H(s)$  mediante varias técnicas de realización o simplemente empleando una transformación de red. El último enfoque se implementa reemplazando cada elemento en el circuito de paso bajo normalizado por un conjunto apropiado de elementos en el circuito de paso de banda deseado. Para determinar los reemplazos de un inductor de paso bajo de  $L$  Henries, observamos que la función de impedancia  $sL$  se asigna mediante (8-159) a una función de impedancia de

$$\left(\frac{s^2 + \omega_0^2}{Bs}\right)L = \frac{L}{B}s + \frac{1}{(B/\omega_0^2 L)s} \quad (8-162)$$

Esto, en efecto, dice que un inductor de paso bajo de  $L$  Henries se transforma en una conexión en serie de un inductor y un capacitor, donde el inductor de paso de banda y el capacitor tienen valores de

$$\frac{L}{B} \text{ Henries y } \frac{B}{\omega_0^2 L} \text{ Faradios} \quad (8-163)$$

respectivamente. De manera similar, una admitancia capacitiva de paso bajo  $sC$  se asigna a una

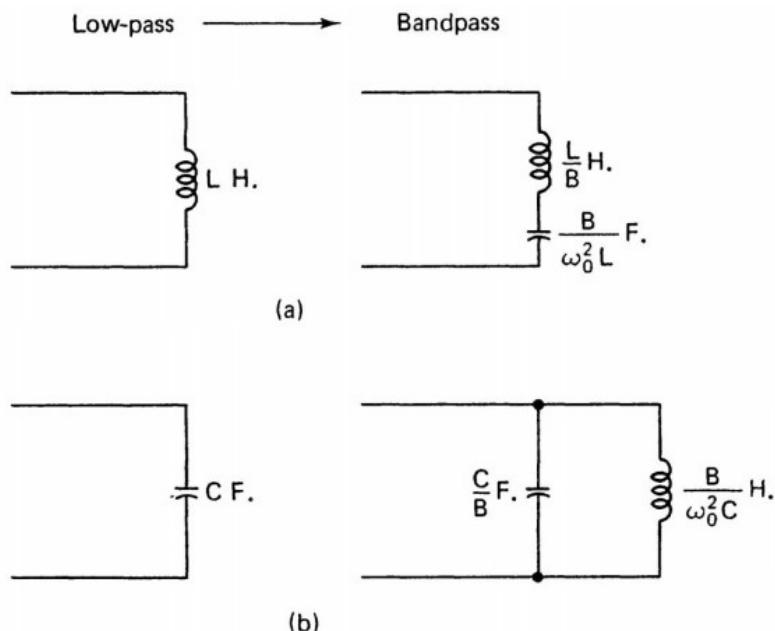
función de admitancia de

$$\left( \frac{s^2 + \omega_0^2}{Bs} \right) C = \frac{C}{B} s + \frac{1}{(B/\omega_0^2 C)s} \quad (8-164)$$

Por lo tanto, un capacitor de paso bajo de  $C$  Farads se reemplaza por una conexión en paralelo de un capacitor y un inductor con

$$\frac{C}{B} \text{ Faradios y } \frac{B}{\omega_0^2 C} \text{ Henries} \quad (8-165)$$

respectivamente. La Fig. 8-29 ilustra la transformación de elementos que convierte un circuito de filtro de paso bajo en un circuito de filtro de banda. Bajo la transformación de (8-159), los resistores y todos los elementos resistivos permanecen sin cambios.



**Fig. 8-29** Low-pass to bandpass element transformation.

**Ejemplo 8-14** Suponga que vamos a diseñar un filtro de paso de banda para cumplir con las siguientes especificaciones:

- (a) La frecuencia central de la banda de paso está en  $\omega_0 = 100 \text{ Krad./seg.}$ .
- (b) El ancho de banda de 3 dB es de  $20 \text{ Krad./seg.}$ .
- (c) La atenuación máxima permitida en la banda de paso de  $\omega_0 = 100 \text{ Krad./seg.}$  a  $\omega_1 = 102.5 \text{ Krad./seg.}$  es  $0.05 \text{ dB}$ .
- (d) La atenuación mínima requerida en la banda suprimida es de  $10 \text{ dB}$  para  $\omega \geq \omega_2 = 120 \text{ Krad./seg.}$ .
- (e) Se requiere una función de magnitud monótonamente decreciente para  $\omega \geq \omega_0$ .

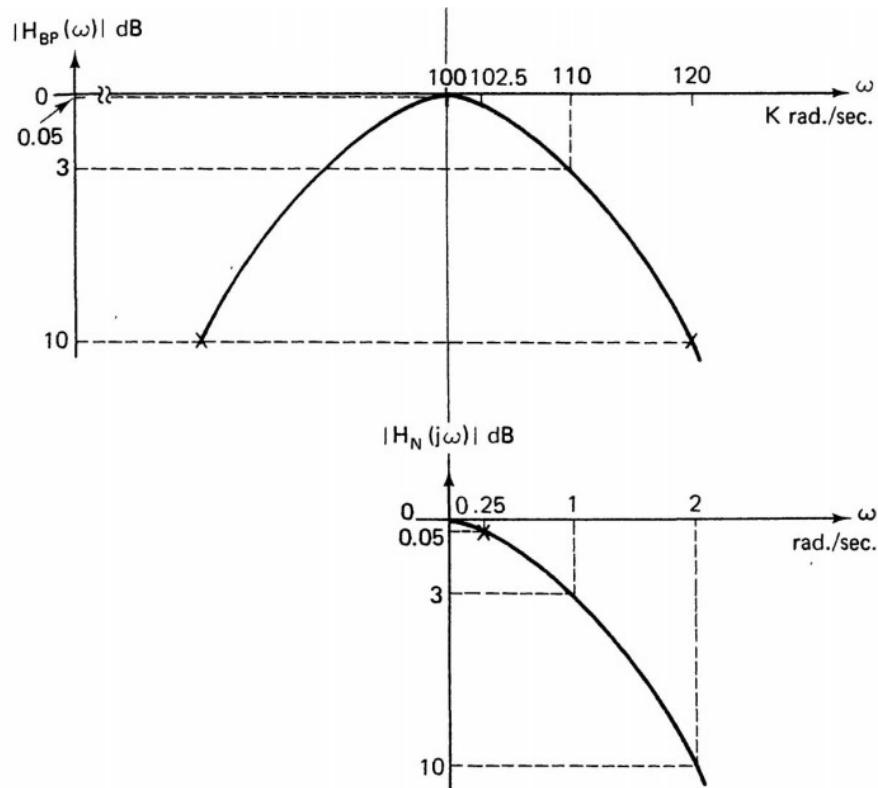
1. Encuentre la función de transferencia del filtro deseado.
2. Encuentre una realización de circuito del filtro deseado.

**Solución:** Primero, encontraremos la función de transferencia deseada. La condición (e) exige un filtro Butterworth. El orden del filtro estará determinado por las condiciones (a) a través de (d), como se ilustra en la Fig. 8-30(a). En general, es mucho más fácil determinar el orden  $n$  del filtro Butterworth en el dominio del prototipo de paso bajo normalizado. Para hacer esto, necesitamos traducir las condiciones (a) a

(d) al lenguaje de un filtro de paso bajo normalizado. La información contenida en las condiciones (a) y (b) es para la transformación de frecuencia del prototipo de paso bajo normalizado al filtro de banda deseado. Estas condiciones no son necesarias para la determinación de  $n$ . Las condiciones (c) y (d) corresponden a:

(c') La atenuación máxima permitida en la banda de paso de  $\omega=0$  a  $\omega=0.25 \text{ rad./seg.}$  es de  $0.05 \text{ dB}$ .

(d') La atenuación mínima requerida en la banda suprimida es de  $10 \text{ dB}$  para  $\omega \geq 2 \text{ rad./sec.}$



**Fig. 8-30** Specifications of Example 8-14. (a) Bandpass specifications.  
(b) Normalized low-pass specifications.

Las condiciones (c') y (d') se ilustran en la Fig. 8-30(b). Estas condiciones implican que  $n$  debe elegirse para satisfacer

$$-10 \log \left| \frac{1}{1+(0.25)^{2n}} \right| \leq 0.05 \quad (8-166a)$$

y

$$-10 \log \left| \frac{1}{1+2^{2n}} \right| > 10 \quad (8-166b)$$

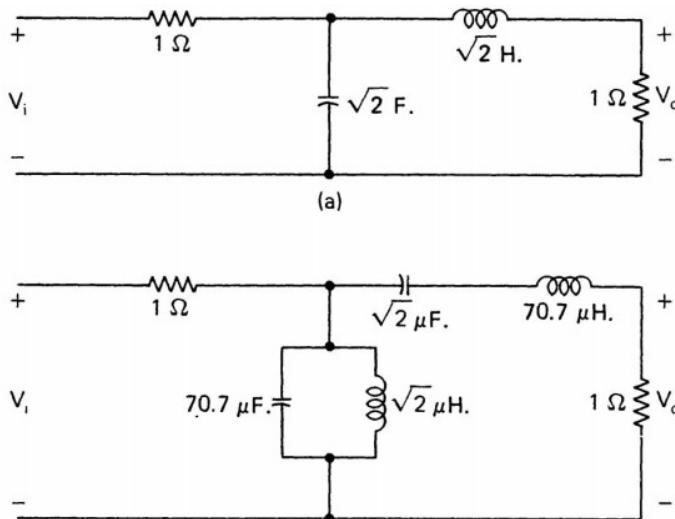
Después de un poco de aritmética simple, encontramos que  $n \geq 2$  satisfará ambas condiciones en (8-166). En consecuencia, la función de transferencia deseada del filtro de paso bajo normalizado viene dada por

$$H_N(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1} \quad (8-167)$$

Con  $\omega_0 = 100 \text{ Krad./seg.}$  y un ancho de banda de 3 dB de  $20 \text{ Krad./seg.}$ , la función de transferencia del filtro de banda deseado viene dada por

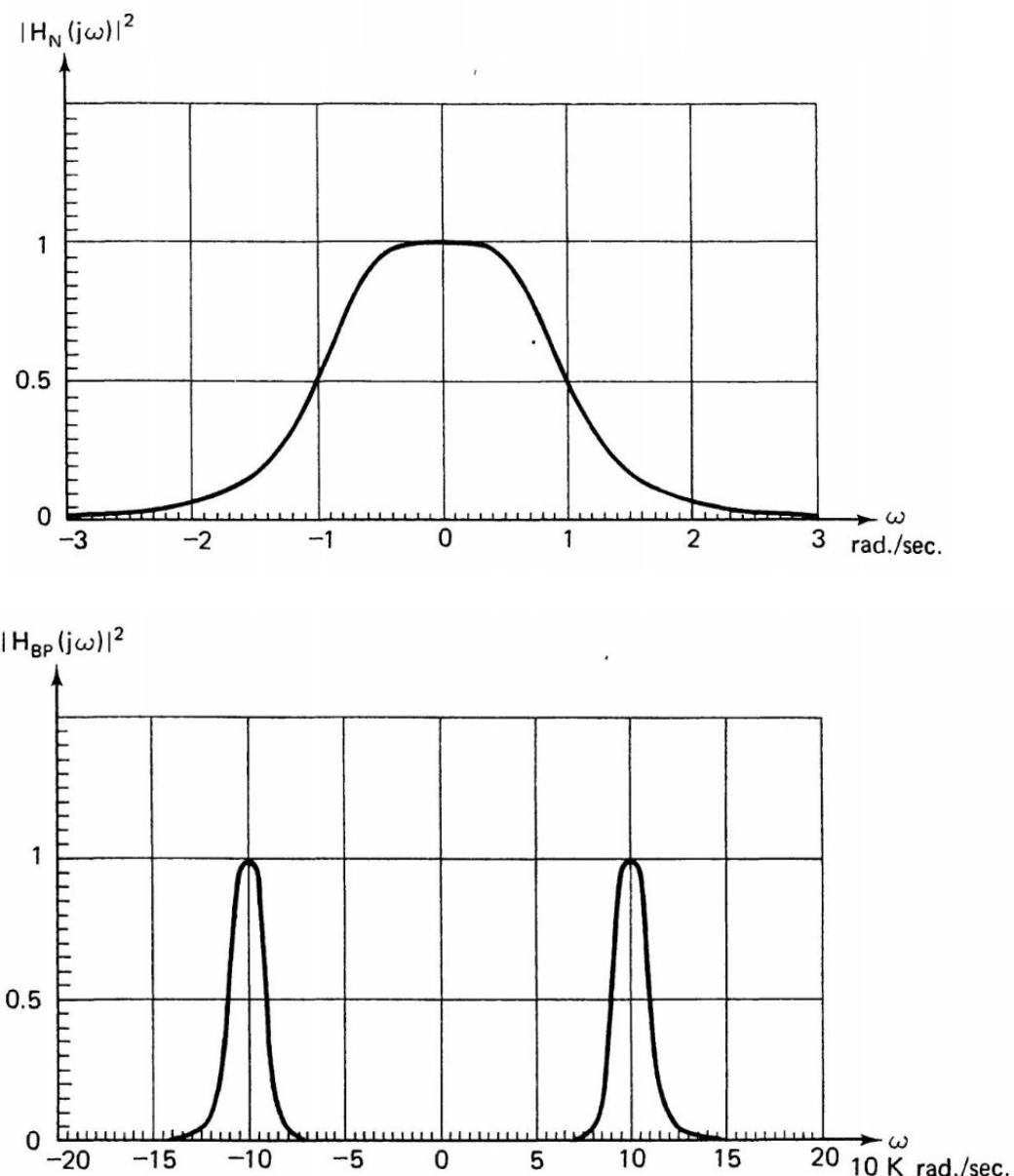
$$\begin{aligned}
 H_{BP}(s) &= H_N \left( \frac{s^2 + 10^{10}}{2 \times 10^4 s} \right) \\
 &= \frac{1}{\left( \frac{s^2 + 10^{10}}{2 \times 10^4 s} \right)^2 + \sqrt{2} \left( \frac{s^2 + 10^{10}}{2 \times 10^4 s} \right) + 1} \\
 &= \frac{4 \times 10^8 s^2}{(s^2 + 10^{10})^2 + \sqrt{2}(s^2 + 10^{10})(2 \times 10^4 s) + (4 \times 10^8 s^2)} \\
 &= \frac{4 \times 10^8 s^2}{s^4 + (2\sqrt{2} \times 10^4 s^3) + (2.04 \times 10^{10} s^2) + (2\sqrt{2} \times 10^{14} s) + 10^{20}}
 \end{aligned} \tag{8-168}$$

Para realizar el filtro deseado de (8-168), primero realizamos el filtro de paso bajo normalizado de (8-167) como se muestra en la Fig. 8-31(a). Se aplica una transformación de elementos a la Fig. 8-31(a) para obtener la Fig. 8-31(b). Observe que un filtro de paso bajo de segundo orden se convierte en un filtro de paso de banda de cuarto orden bajo la Transformación de paso bajo a paso de banda.



**Fig. 8-31** Circuit realizations of (a) the normalized transfer function of (8-167), and (b) the desired transfer function of (8-168).

Las características de magnitud de la función de transferencia de paso bajo normalizada de (8-167) y la función de transferencia de paso de banda deseada de (8-168) se muestran en la Fig 8-32. Tenga en cuenta que en las características de paso de banda, la pendiente creciente para  $0 \leq \omega \leq 100 \text{ Krad./seg}$  es algo más empinada que la pendiente decreciente para  $\omega \geq 100 \text{ Krad./seg}$ . Esto es típico para los diseños de filtros de paso de banda obtenidos por (8-159). [Recuerde que (8-159) da diseños de filtro geométricamente simétricos pero no aritméticamente simétricos.] Por lo tanto, si las especificaciones dadas son aritméticamente simétricas con respecto a la frecuencia central  $\omega_0$ , entonces trabajar con la banda de frecuencia para  $\omega \geq \omega_0$  asegurará que el diseño del filtro resultante satisfará todos los requisitos prescritos.



**Fig. 8-32** Magnitude characteristics of (a) the normalized second-order low-pass Butterworth filter, and (b) the corresponding fourth-order bandpass Butterworth filter.

**Resolución Matlab – Problema 8-14**

```

clear all; clc;

%% datos
w0=100E3 %Krad/seg
BW=20E3 %Krad/seg

w1=102.5E3 %krad/seg
A1 = 0.05 %db
w2 =120E3 %Krad/seg
A2 = 10 %db

%% la frecuencia de corte pasa-bajo
% tomo la mitad del ancho de banda
% normalizada seria 1rad/s
wc_pb=BW/2;

% frecuencia para un pasa bandas
w1_pb=abs(w0-w1);
w2_pb=abs(w0-w2);

% normalizando frecuencias
w1_pbN=w1_pb/wc_pb;
w2_pbN=w2_pb/wc_pb;
fprintf('W_1N=% .2f',w1_pbN);
fprintf('W_2N=% .2f',w2_pbN);

%% calculo de n

% función de butterworth
syms w n 'real';
H2(w)=1/(1+w^(2*n));

% el cálculo del n en la banda de paso
[n1]=vpasolve(-10*log(H2(w1_pbN))==A1,n);
n1=ceil(n1)

% el cálculo del n en la banda de rechazo
[n2]=vpasolve(-10*log(H2(w2_pbN))==A2,n);
n2=ceil(n2)

nb=n1;
if nb<n2
    nb=n2;
end

% función de transferencia, filtro pasa bajo
syms s 'real';
syms k 'integer';
theta(k)=((2*k-1)/(2*nb))*pi;
H_pb(s,k)=1/(s^2 + 2*sin(theta(k))*s + 1);

H(s)=prod(H_pb(s,sym(1:nb/2)));

if mod(nb,2)~=0
    H(s)=H(s)/(s+1);
end

% transformación a pasa banda
s_pa = (s^2 + sym(w0)^2)/(sym(BW)*s);
H_pa(s)=H(s_pa);

% respuesta en frecuencia
[B,A]=numden(H_pa(s));
b=sym2poly(collect(B));
a=sym2poly(collect(A));

% respuesta en frecuencia escala logarítmica

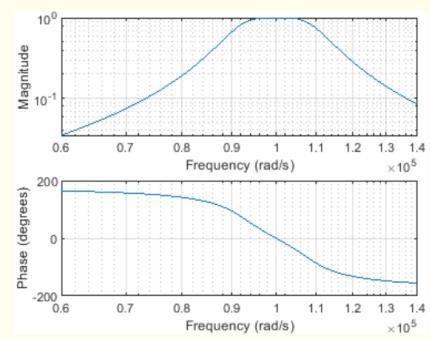
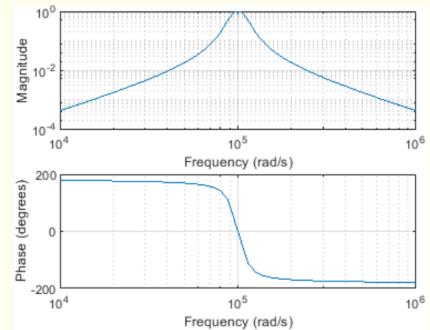
```

```
% de 10^4 a 10^6
w=logspace(4, 6);
freqs(b, a, w);

% respuesta en frecuencia escala lineal
w=linspace(w0-BW*2,w0+BW*2);
freqs(b, a, w);

%% implementación del PB normalizado
% imprimir los valores de las capacitancia.
% con cauer 1- y con el grado del denominador
% menor que el del denominador - primer elemento
% un capacitor en derivación.
r=2*sin(theta([1:nb]));

%% se aplica la transformación de elementos
% C_pb -> C_pa//L_pa
C1=(r(1)/BW);
L1=BW/(w0^2*r(1));
% L_pb -> L_pa+C_pa
L2=(r(2)/BW);
C2=BW/(w0^2*r(2));
```



### 8-4-3. Transformación de paso bajo a rechazo de banda

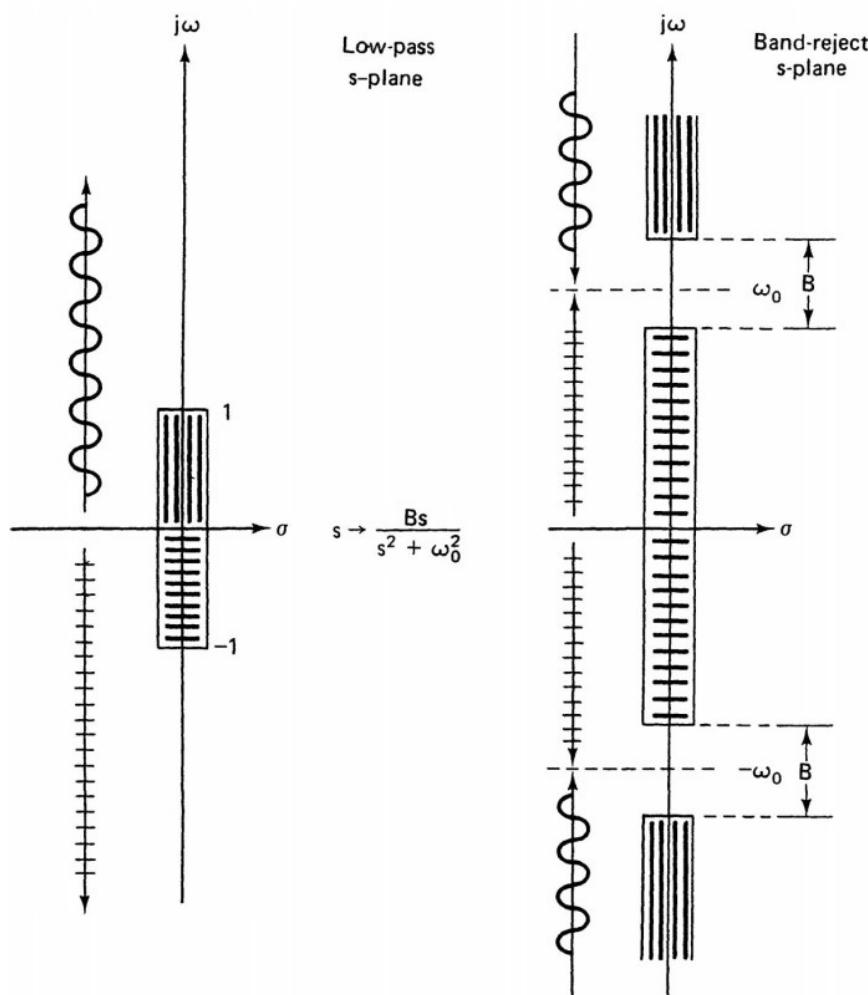
Como en el caso de los filtros de paso de banda, a menudo es conveniente comenzar con un prototipo de paso bajo normalizado y emplear la transformación de frecuencia y/o elemento para llegar al modelo final de rechazo de banda. En estos casos, el

$$s \mapsto \frac{Bs}{s^2 + \omega_0^2} \quad (8-169a)$$

o

$$\omega \mapsto \frac{B\omega}{-\omega^2 + \omega_0^2} \quad (8-169b)$$

donde  $\omega_0$  es la frecuencia central de la banda de rechazo y  $B$  es el ancho de banda de rechazo. Las propiedades básicas de tal transformación se muestran en la Fig. 8-33.



**Fig. 8-33** Basic properties of low-pass to band-reject frequency transformation.

En cuanto a los elementos de la red, es claro que una capacitancia de paso bajo C Farads se transforma en una conexión en serie de un inductor y un capacitor con valores

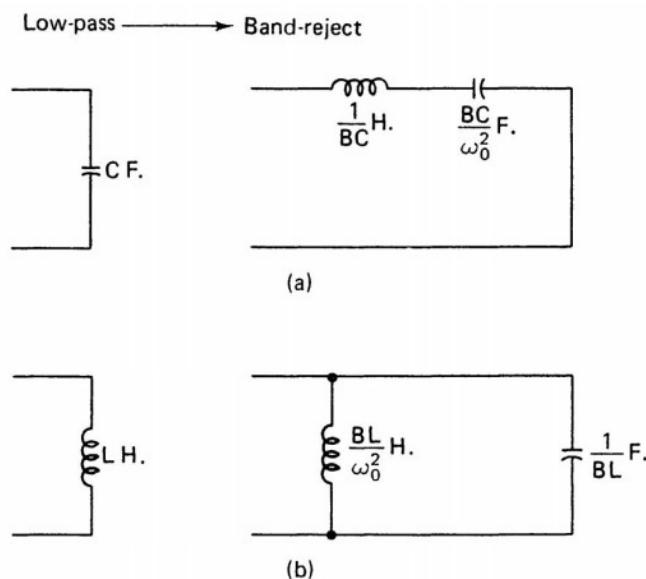
$$\frac{1}{BC} \text{ Henries and } \frac{BC}{\omega_0^2} \text{ Farads} \quad (8-170)$$

como se muestra en la Fig. 8-34(a). De manera similar, la inductancia de paso bajo de L Henries se

reemplaza por una conexión en paralelo de un inductor y un capacitor con valores

$$\frac{BL}{\omega_0^2} \text{ Henries and } \frac{1}{BL} \text{ Farads} \quad (8-171)$$

como se ilustra en la Fig. 8-34(6). De nuevo, los resistores y todos los elementos resistivos permanecen sin cambios.



**Fig. 8-34** Low-pass to band-reject element transformation.

**Ejemplo 8-15** Suponga que vamos a diseñar un filtro de rechazo de banda Butterworth para cumplir con las siguientes especificaciones:

- (a) La frecuencia central está en 1 Krad./seg.
- (b) El ancho de banda de rechazo de 3 dB es de 100 rad./seg.
- (c) La atenuación mínima requerida en la banda suprimida es de 40 dB para  $B=10^2$
- (d) La atenuación máxima permitida en la banda de paso de alta frecuencia es de 0.1 dB para  $\omega > 1.2 \text{ Krad./seg.}$

1. Busque la función de transferencia deseada.

2. Encuentre el circuito de filtro deseado.

**Solución:** Con  $\omega_0 = 10^3$  y  $B = 10^2$ , las especificaciones de rechazo de banda dadas se convierten en las del paso bajo normalizado de la siguiente manera:

- (c') La atenuación mínima es de 40 dB para

$$\omega \geq \frac{100(1010)}{(1010)^2 - (1000)^2} = 5.02$$

o

$$\omega \geq \frac{100(1010)}{(1010)^2 - (1000)^2} = 5.02 \quad (8-172)$$

- (d') La atenuación máxima es de 0.1 dB para

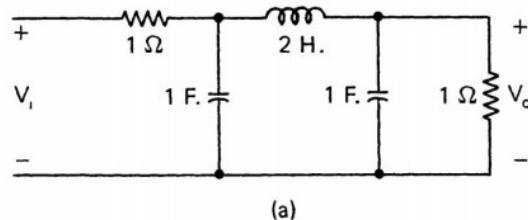
$$\omega < \frac{B(1.2K)}{(1.2K)^2 - \omega_o^2} = \frac{100(1200)}{(1200)^2 - (1000)^2} = 0.27 \quad (8-173)$$

De la figura 8-4, la condición (c') implica que  $n \geq 3$ , y la condición (d') requiere que  $n \geq 2$ . Por lo tanto, un filtro Butterworth de paso bajo normalizado de tercer orden puede servir como prototipo. La función de transferencia normalizada está dada por (8-42b) como

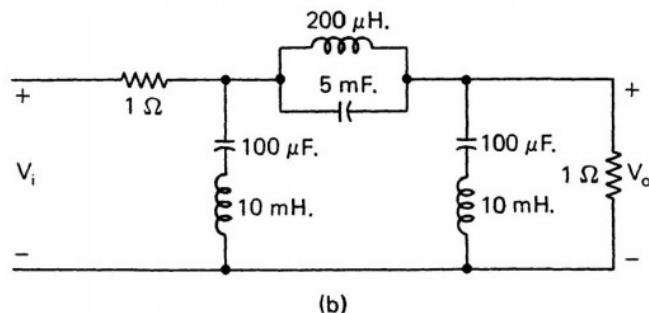
$$H_N(s) = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1} \quad (8-174)$$

Por (8-169), la función de transferencia deseada es

$$\begin{aligned} H(s) &= H_N\left(\frac{100s}{s^2 + 10^6}\right) \\ &= \frac{1}{\left(\frac{100s}{s^2 + 10^6}\right)^3 + 2\left(\frac{100s}{s^2 + 10^6}\right)^2 + 2\left(\frac{100s}{s^2 + 10^6}\right) + 1} \\ &= \frac{s^6 + (3 \times 10^6 s^4) + (3 \times 10^{12} s^2) + 10^{18}}{s^6 + 200s^5 + (3.02 \times 10^6 s^4) + (4.01 \times 10^8 s^3) + (3.02 \times 10^{12} s^2) + (2 \times 10^{14} s) + 10^{18}} \end{aligned} \quad (8-175)$$



(a)



(b)

**Fig. 8-35** Circuit realizations of the (a) third-order normalized low-pass Butterworth filter, and (b) sixth-order band-reject filter in Example 8-15.

La tabla 8-1 y la Fig. 8-9(c) dan una realización del circuito de (8-174) y se muestra en la Fig. 8-35(a). Mediante la transformación de elementos de (8-170) y (8-171), obtenemos el circuito de filtro deseado en la Fig. 8-35(b).

#### 8-4-4. Transformación de paso bajo a paso alto

Debido a que las características del filtro de paso bajo son solo el recíproco de las características del filtro de paso alto, la transformación de frecuencia de una función de transferencia de paso bajo normalizada a una función de transferencia de paso alto con una frecuencia de corte en  $\omega_c$  está dada por

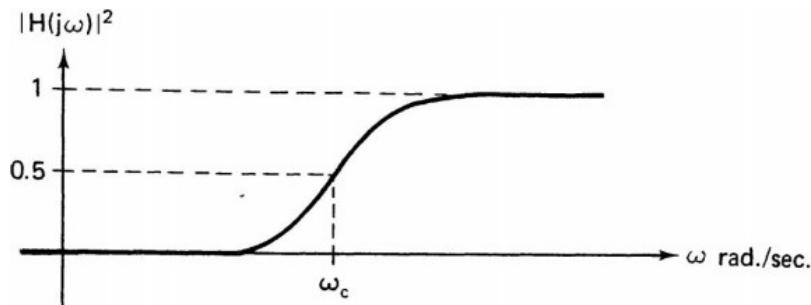
$$s \mapsto \frac{\omega_c}{s} \quad (8-176a)$$

o

$$\omega \mapsto \frac{\omega_c}{\omega} \quad (8-176b)$$

Suponga que vamos a diseñar un filtro de paso alto de segundo orden máximamente plano con una frecuencia de corte en  $\omega_c$ , como se muestra en la Fig. 8-36. Luego comenzamos con el prototipo de filtro de paso bajo Butterworth normalizado:

$$H_N(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1} \quad (8-177)$$



**Fig. 8-36** Magnitude characteristics of a high-pass filter.

Usando (8-176), obtenemos nuestra función de transferencia deseada

$$H_{HP}(s) = \frac{1}{\left(\frac{\omega_c}{s}\right)^2 + \sqrt{2}\left(\frac{\omega_c}{s}\right) + 1} = \frac{s^2}{s^2 + \sqrt{2}\omega_c s + \omega_c^2} \quad (8-178)$$

En términos de elementos de red, una capacitancia de paso bajo normalizada de C Farads se transforma en una inductancia de paso alto de  $1/L\omega_c$  Henries. De manera similar, una inductancia de paso bajo normalizada de L Henries se transforma en una capacitancia de paso alto de  $1/L\omega_c$  Farads. Una vez más, las resistencias y todos los elementos resitivos permanecen sin cambios.

### 8-4-4-1. Filtros Chebyshev inversos.

En esta subsección, usamos la transformación de frecuencia de paso bajo a paso alto para convertir un filtro Chebyshev en un filtro Chebyshev inverso.

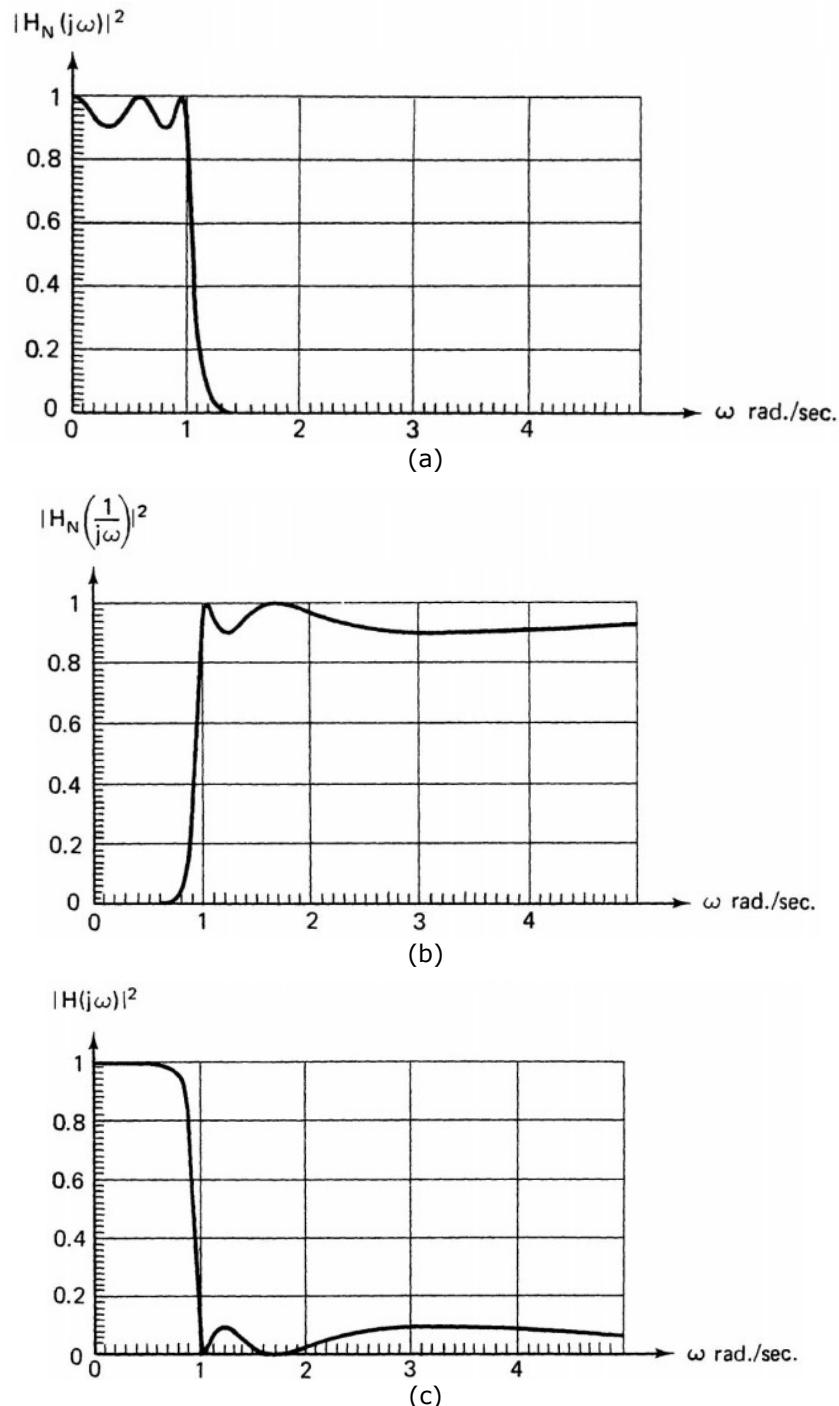


Fig. 8-37 Derivación pictórica del filtro Chebyshev inverso de paso bajo de quinto orden a partir del filtro Chebyshev de quinto orden.

Sea  $|H_N(j\omega)|^2$  la función de magnitud de un filtro Chebyshev de paso bajo de orden  $n$  con un 1 rad./seg. ancho de banda de ondulación. En la Fig. 8-37(a) se muestra un caso de quinto orden. Por (8-176), la función de magnitud del filtro Chebyshev de paso alto de orden  $n$  con una banda ondulada que se extiende desde 1 rad./seg. . Hasta el infinito está dado por

$$|H_{HP}(j\omega)|^2 \triangleq \left| H_N\left(\frac{1}{j\omega}\right) \right|^2 = \left| H_N\left(j\frac{1}{\omega}\right) \right|^2 \quad (8-179)$$

La Fig. 8-37(b) muestra  $|H_{HP}(j\omega)|^2$  con respecto a  $\omega$  para el caso cuando  $n=5$ . Si ahora restamos la función de magnitud de paso alto de (8-179) de 1, la función de magnitud resultante es

$$\begin{aligned} |H(j\omega)|^2 &= 1 - |H_{HP}(j\omega)|^2 \\ &= 1 - \left| H_N\left(j\frac{1}{\omega}\right) \right|^2 \end{aligned} \quad (8-180)$$

La Fig. 8-37(c) ilustra el comportamiento de  $|H(j\omega)|^2$  de (8-180) para el caso cuando  $n=5$ . Observe que la función de magnitud resultante es un filtro de paso bajo con una banda de paso decreciente monótonamente y una banda de parada equiondular, donde la ondulación comienza desde 1 rad./seg. y se extiende hasta el infinito. Este tipo de filtro se llama filtro Chebyshev inverso. La función de transferencia de un filtro Chebyshev inverso se puede obtener de (8-180), donde  $H_N(s)$  representa la función de transferencia de un filtro Chebyshev de paso bajo normalizado.

### 8-4-5. Escalado de impedancia

Hasta ahora, en todas las transformaciones de frecuencia, los valores de las resistencias permanecen sin cambios. Como se muestra en las Figs. 8-9, 8-17 y 8-23, los circuitos prototipo de paso bajo normalizados utilizan resistencias fuente de  $1\Omega$ . Claramente, en la vida real, las resistencias de

$1\Omega$  no son ideales para trabajar con ellas. Por lo tanto, necesitamos algún mecanismo para cambiar los valores de los elementos del circuito sin cambiar las funciones de transferencia del circuito diseñado.

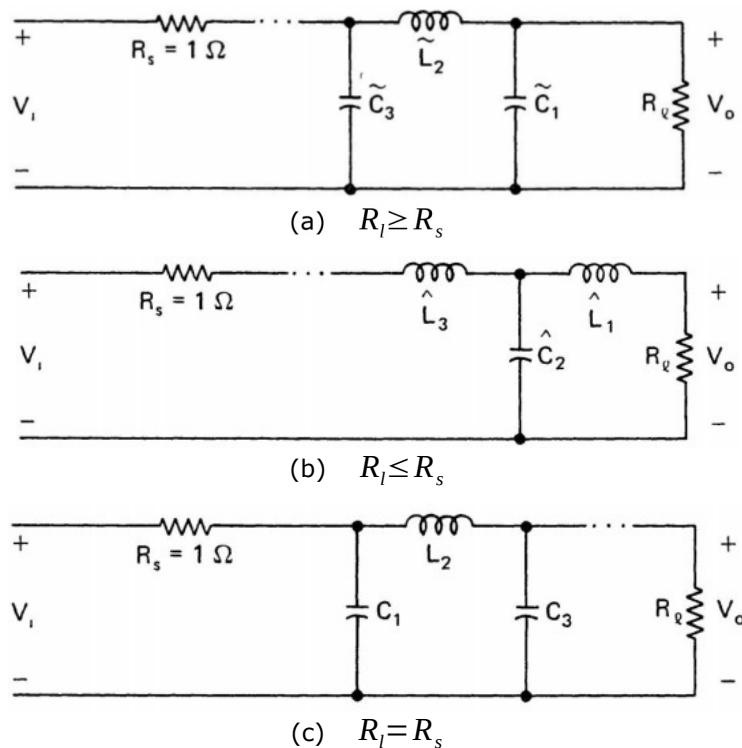


Fig. 8-9 Estructuras de circuitos de filtros Butterworth de paso bajo.

El escalado de impedancia no afectará de ninguna manera la función de transferencia.<sup>105</sup> Su objetivo esencial es aumentar o disminuir los niveles de impedancia de todos los elementos de un circuito en un valor particular para igualar otras partes del circuito o hacer que los tamaños de los componentes sean más grandes, práctico para su realización. Por ejemplo, en las Figs. 8-9, 8-17 y 8-23, si es más fácil trabajar con resistencias  $A\Omega$ , entonces podemos elevar todos los valores de impedancia de los elementos en los circuitos por A. Por ejemplo,

1. Una resistencia de  $R\Omega$  ahora se eleva a  $AR\Omega$ .
2. Ahora se supone que un inductor de  $L$  Henries que tiene un valor de impedancia de  $sL$  tiene un valor de impedancia correspondiente  $AL$ , que es un inductor de  $AL$  Henries.
3. Un capacitor de  $C$  Faradios que tiene una impedancia de  $1/sC$  ahora se eleva para tener un valor de impedancia de  $A/sC=1/[s(C/A)]$ , que es un capacitor de  $C/A$  Farads.
4. Una FDNR con  $D F^2$  que tiene una impedancia de  $1/s^2D$  ahora se eleva al valor correspondiente de  $A/s^2D=1/[s^2(D/A)]$ , que es una FDNR de  $D/A F^2$ .
5. VCVS e ICIS, así como los amplificadores operacionales ideales, permanecen sin cambios.<sup>106</sup>

105 Esto es cierto solo para las funciones de transferencia de relación de voltaje y relación de corriente. Recuerde que en este libro solo consideraremos funciones de transferencia de relación de voltaje.

106 Observe que VCVS y los amplificadores operacionales ideales permanecen sin cambios bajo todos los tipos de transformaciones de frecuencia y escalas de impedancia. Utilizamos este hecho con frecuencia en el Capítulo 10.

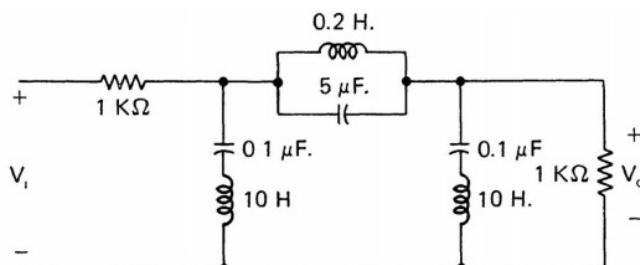
**TABLE 8-5** Frequency and Element Transformations

From Normalized Low-pass Filter to:	Frequency Transformations	$R \Omega$	$L \text{ H.}$	$C \text{ F.}$
A low-pass filter with cutoff frequency $\omega_c$	$s \longleftrightarrow \frac{s}{\omega_c}$	$R \Omega$	$\frac{L}{\omega_c} \text{ H.}$	$\frac{C}{\omega_c} \text{ F.}$
A bandpass filter with center frequency $\omega_0$ and bandwidth B	$s \longleftrightarrow \frac{s^2 + \omega_0^2}{Bs}$	$R \Omega$	$\frac{L}{B} \text{ H.}$ $\frac{B}{\omega_0^2 L} \text{ F.}$	$\frac{C}{B} \text{ F.}$ $\frac{B}{\omega_0^2 C} \text{ H.}$
A band-reject filter with center frequency $\omega_0$ and rejection bandwidth B	$s \longleftrightarrow \frac{Bs}{s^2 + \omega_0^2}$	$R \Omega$	$\frac{1}{BL} \text{ F.}$ $\frac{BL}{\omega_0^2} \text{ H.}$	$\frac{1}{BC} \text{ H.}$ $\frac{BC}{\omega_0^2} \text{ F.}$
A high-pass filter with cutoff frequency $\omega_c$	$s \longleftrightarrow \frac{\omega_c}{s}$	$R \Omega$	$\frac{1}{L\omega_c} \text{ F.}$	$\frac{1}{C\omega_c} \text{ H.}$
Impedance scaling by A	No change	$AR \Omega$	$AL \text{ H.}$	$\frac{C}{A} \text{ F.}$

La tabla 8-5 resume todas las transformaciones de frecuencia y de elementos discutidas en la sec. 8-4.

**Ejemplo 8-16** Encuentre un circuito de filtro con  $R_s = 1 \text{ k}\Omega$  para satisfacer todas las condiciones del Ejemplo 8-15.

**Solución:** El circuito de la Fig. 8-35(b) satisface todas las especificaciones del Ejemplo 8-15 con  $R_s = 1 \text{ k}\Omega$ . Por lo tanto, solo necesitamos escalar el nivel de impedancia de cada elemento de la Fig. 8-35(b) 1K. El circuito resultante se muestra en la Fig. 8-38.

**Fig. 8-38** Solution to Example 8-16.

### 8-4-6. Ejemplos

**Ejemplo 8-17** Suponga que necesitamos un filtro de paso bajo para satisfacer las siguientes condiciones:

- (a) La frecuencia de corte de 3 dB está en 20 K rad./seg.
- (b) La magnitud de la banda de paso está dentro de 0.1 dB de su valor máximo para  $\omega \leq 0.5 \text{ rad./seg.}$
- (c) La atenuación de la banda suprimida es superior a 40 dB para  $\omega \geq 50 \text{ K rad./seg.}$
- (d) Se requiere una función de magnitud monótonamente decreciente.

Encuentre una realización de circuito apropiada con la resistencia fuente  $R_s$  siendo  $10 \text{ K}\Omega$ .

**Solución:** La condición (d) requiere una fibra Butterworth. En términos de filtros de paso bajo normalizados, la frecuencia de corte se establece automáticamente en 1 y las condiciones (b) y (c) se convierten en:

- (b') La magnitud de la banda de paso está dentro de 0.1 dB de su valor máximo para  $\omega \leq 0.5 \text{ rad./seg.}$
- (c') La atenuación de la banda suprimida es superior a 40 dB para  $\omega \geq 2.5 \text{ rad./seg.}$

En términos del prototipo normalizado, estas condiciones están representadas por

$$-10 \log |H(j\omega)|^2 \leq 0.1 \quad \text{para } \omega \leq 0.5 \quad (8-181)$$

$$-10 \log |H(j\omega)|^2 > 40 \quad \text{para } \omega \geq 2.5 \quad (8-182)$$

Debido a la propiedad monótonamente decreciente de los filtros Butterworth, (8-181) requiere que

$$-\log \left| \frac{1}{1+(0.5)^{2n}} \right| \leq 0.01$$

Esto significa que  $n \geq 3$  cumplirá la condición (b'). Para la condición (c'), (8-182) implica que

$$-\log \left| \frac{1}{1+(2.5)^{2n}} \right| > 40$$

Esto significa que  $n \geq 6$  cumplirá la condición (c'). Por tanto, necesitamos un filtro Butterworth de orden 6. De la tabla 8-1, obtenemos el circuito de la Fig. 8-39(a). La función de magnitud de la Fig. 8-39(b) está dada por

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+\omega^{12}} \quad (8-183)$$

siendo la frecuencia de corte 1 rad./seg. . Usando la transformación de elementos para llevar la frecuencia de corte a 1 rad./seg. , obtenemos el circuito de la Fig. 8-39(b), que tiene una función de magnitud dada por

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left( \frac{\omega}{2 \times 10^4} \right)^{12}} \quad (8-184)$$

Finalmente, la escala de impedancia de todos los elementos de la Fig. 8-39(b) por un factor de  $10^4$  eleva  $R_s$  al valor deseado de  $10 \text{ K}\Omega$  . El circuito resultante se muestra en la Fig. 8-39(c). Puede demostrarse que la función de magnitud de la Fig. 8-39(c) está dada por (8-184). Claramente, el circuito

de la Fig. 8-39(c) es un resultado deseado.

**Ejemplo 8-18** Suponga que necesitamos un filtro de paso bajo para satisfacer las condiciones (a), (b) y (c) del Ejemplo 8-17. Encuentre una realización de Chebyshev con la resistencia fuente  $R_s$  igual a  $1 \text{ K}\Omega$ .

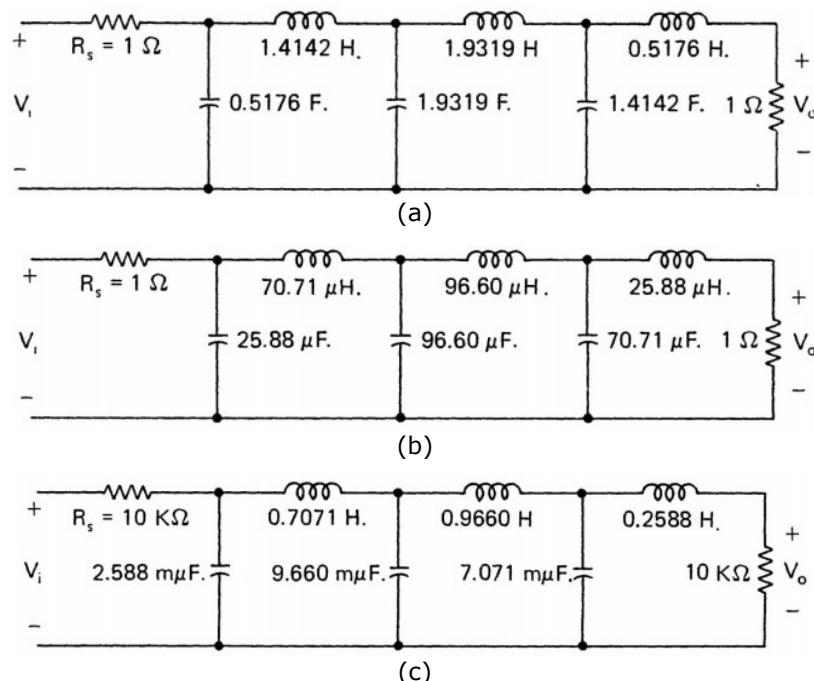


Fig. 8-39 Soluciones al ejemplo 8-17.

**Solución:** en términos del filtro Chebyshev normalizado, la condición (b) simplemente significa ondas de  $0.1 \text{ dB}$  dentro de la banda de paso. Por tanto,  $A_{max} = 0.1 \text{ dB}$ , y por (8-71),  $\epsilon = 0.1526$ . Debido a que la magnitud de un filtro de Chebyshev disminuye monótonamente en la banda de exclusión, la condición (c) requiere un número entero  $n$  tal que

$$-10 \log \left| \frac{1}{1 + (0.1526)^2 T_n^2(2.5)} \right| > 40 \quad (8-185)$$

donde  $T_n(\omega)$  es el polinomio de Chebyshev de orden  $n$ . El cálculo de (8-185) en general es engorroso. Afortunadamente, las tablas y gráficas como las de la Fig. 8-15 están disponibles en la literatura. Para el caso de ondulación de  $0.1 \text{ dB}$ , la Fig. 8-15(a) dice que  $n=5$  satisfará (8-185). Por lo tanto, las especificaciones solicitan un filtro Chebyshev de quinto orden. De la tabla 8-2, obtenemos el circuito normalizado que se muestra en la Fig. 8-40(a). Para mover la frecuencia de corte a 20 Krad./seg., realizamos una transformación de elementos en la Fig. 8-40(a) para obtener la Fig. 8-40(b). Finalmente, se lleva a cabo una escala de impedancia en la Fig. 8-40(b) para obtener el producto final de la Fig. 8-40(c). El circuito de la Fig. 8-40(c) satisface todas las especificaciones de filtrado. Tenga en cuenta que un filtro Chebyshev de quinto orden puede hacer el trabajo de un filtro Butterworth de sexto orden, como se muestra en los ejemplos 8-17 y 8-18.

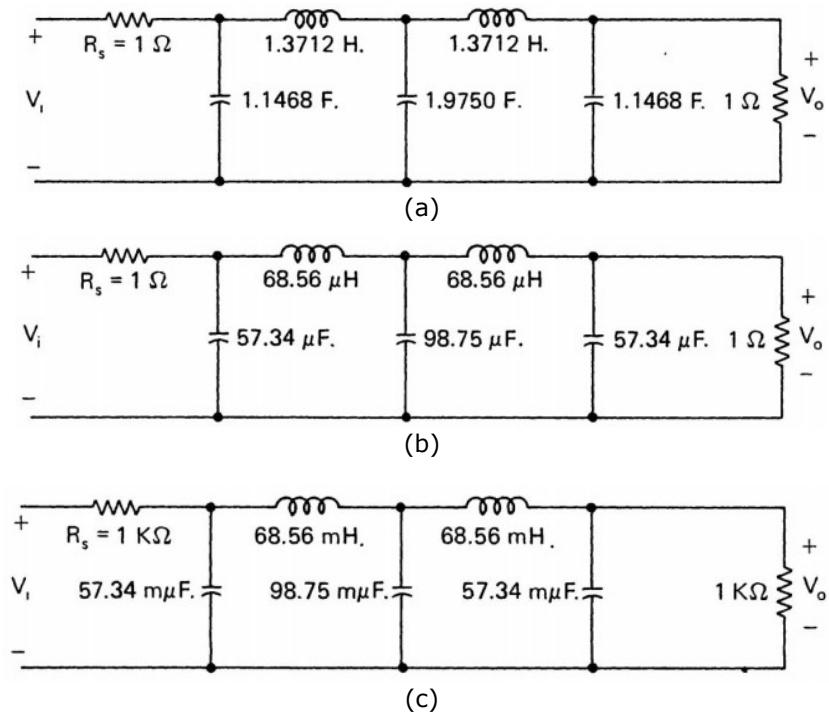


Fig. 8-39 Soluciones al Ejemplo 8-18.

## 8-5 Filtros paso todos

Como se muestra en la Fig. 8-2, una de las características de frecuencia ideales es tener una fase lineal o una función de retardo de grupo constante en la banda de paso. Cuando diseñamos un filtro de magnitud, introducimos distorsiones de retardo de grupo cerca de los bordes de la banda. Para eliminar estas distorsiones, se necesitan ecualizadores de retardo. Los ecualizadores de retardo más comunes son los filtros de paso total.

Como la función de transferencia de paso total viene dada por

$$H(s) = \frac{p(-s)}{p(s)} \quad (8-186)$$

donde  $p(s)$  es un polinomio de Hurwitz. En vista de (8-186), una función de transferencia de paso total tiene las siguientes propiedades:

1. Para todos los  $\omega$ , tenemos

$$|H(j\omega)|^2 = 1 \quad (8-187)$$

Por esta razón, (8-186) se denomina función de transferencia de paso total.

2. Si  $s_k$  es un polo de  $H(s)$ , entonces  $-s_k$  es un cero de  $H(s)$ . A causa de que todos los polos de  $H(s)$  están en el plano  $s$  de la izquierda, todos los ceros de  $H(s)$  están en el plano  $s$  de la derecha. Por lo tanto, las funciones de transferencia de paso total no son funciones de fase mínima.

3. El ángulo de fase  $\phi(\omega) \triangleq -\angle H(j\omega)$  de una función de paso total viene dado por

$$\phi(\omega) = 2\angle p(j\omega) \quad (8-188)$$

4. Excepto en los puntos de discontinuidad,  $\phi(\omega)$  es una función monótonamente creciente de  $\omega$ .

Considere una función de transferencia de paso total de primer orden

$$H_1(s) = \frac{-s+a}{s+a} \quad (8-189)$$

donde  $a$  es un número real positivo. Las funciones de retardo de fase y de grupo están dadas respectivamente por

$$H_1(s) = \frac{-s+a}{s+a} \quad (8-190a)$$

y

$$\tau(\omega) = \frac{2/a}{1+(\omega/a)^2} \quad (8-190b)$$

Observe que (8-190) implica que

$$\phi(0) = 0 \quad (8-191a)$$

y

$$\phi(\infty) = \pi \quad (8-191b)$$

Como  $\tau(\omega)$  es la derivada de  $\phi(\omega)$ , podemos escribir

$$\phi(\omega) = \int_0^{\omega} \tau(\omega') d\omega' \quad (8-192)$$

Por tanto, el área bajo la curva  $\tau(\omega)$  de (8-190b) para  $0 < \omega < \infty$  viene dada por

$$\phi(\infty) - \phi(0) = \pi \quad (8-193)$$

De manera similar, el área bajo la curva  $\tau(\omega)$  con respecto a  $\omega$  para  $0 < \omega < \infty$  es  $n\pi$ , donde  $n$  es el grado de  $p(s)$  en (8-186). Si se especifica una determinada función de retardo de grupo  $\tau(\omega)$  desde 0 hasta una frecuencia deseada  $\omega_D$  rad./seg., podemos calcular el área

$$\int_0^{\omega_D} \tau(\omega) d\omega$$

y determine aproximadamente el grado mínimo de  $n$  requerido para la función de transferencia de paso total deseada en la sec. 7-2.

## Referencias y lecturas adicionales

- [1] Guillemin, E. A. *Synthesis of Passive Networks*. New York: Wiley, 1957.
- [2] Weinberg, L. *Network Analysis and Synthesis*. Huntington, N.Y.: R. E. Krieger, 1975.
- [3] Humphreys, D. S. *The Analysis, Design, and Synthesis of Electrical Filters*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1970.
- [4] Christian, E., and Eisenmann , E. *Filter Design Tables and Graphs*. New York: Wiley, 1966.
- [5] Zverev, A. I. *Handbook of Filter Design*. New York: Wiley, 1967.
- [6] Oppenheim, A. V., and Schafer , R. W. *Digital Signal Processing*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1975.
- [7] Rabiner, L. R., and Gold , B. *Theory and Application of Digital Signal Processing*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1975.
- [8] Kawakami, K. "Nomographs for Butterworth and Chebyshev Filters." *IEEE Trans. Circuit Theory* CT-10 (1963): 288-89.
- [9] Johnson, D. E. *Introduction to Filter Theory*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1976.
- [10] Daniels, R. W. *Approximation Methods for Electronic Filter Design*. New York: McGraw-Hill, 1974.
- [11] Krall, H. L., and Frink , O. "A New Class of Orthogonal Polynomials: The Bessel Polynomials." *Trans. Amer. Math. Soc.* 65 (1949): 100-15.
- [12] Thomson, W. E. "Delay Network Having Maximally Flat Frequency Characteristics." *Proc. IEE* 96 (pt. 3, 1946): 487-90.
- [13] Storch, L. "Synthesis of Constant-Time Delay Ladder Network Using Bessel Polynomials," *Proc. IRE* 42 (1954): 1666-75.
- [14] Szentirmai, G. "The Design of Arithmetically Symmetrical Band Pass Filter." *IEEE Trans. Circuit Theory* CT-10 (1963): 367-75.

## Apéndice del capítulo 8

En este Apéndice,<sup>107</sup> presentaremos tablas de valores de los filtros Butterworth y Chebyshev. Cada tabla contiene tres partes. La parte (a) proporciona las ubicaciones de los polos de un filtro de paso bajo normalizado de orden  $n$ .<sup>108</sup> La parte (b) produce el polinomio del denominador de la función de transferencia correspondiente como un todo, mientras que la parte (c) presenta el polinomio del denominador en forma factorizada.

TABLE A8-1 Normalized Low-Pass Butterworth Filters

(a) Pole Locations		$p_{1, n}$	$p_{2, n-1}$	$p_{3, n-2}$	$p_{4, n-3}$	$\dots$	$p_5$		
Order $n$									
1	-1.00000000								
2	-0.70710678	$\pm j0.70710678$							
3	-0.50000000	$\pm j0.86602540$	-1.00000000						
4	-0.38268343	$\pm j0.92387953$	-0.92387953	$\pm j0.38268343$					
5	-0.30901699	$\pm j0.95105652$	-0.80901699	$\pm j0.58778525$	-1.00000000				
6	-0.25881905	$\pm j0.96592583$	-0.70710678	$\pm j0.70710678$	-0.96592583	$\pm j0.25881905$			
7	-0.22252093	$\pm j0.97492791$	-0.62348980	$\pm j0.78183148$	-0.90096887	$\pm j0.43388374$	-1.00000000		
8	-0.19509032	$\pm j0.98078528$	-0.55557023	$\pm j0.83146961$	-0.83146961	$\pm j0.55557023$	-0.98078528	$\pm j0.19509032$	
9	-0.17364818	$\pm j0.98480775$	-0.50000000	$\pm j0.86602540$	-0.76604444	$\pm j0.64278761$	-0.93969262	$\pm j0.34202014$	-1.00000000
(b) Denominator Polynomials $B(s) = s^n + b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \dots + b_0$									
Order $n$	$b_0$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	$b_5$	$b_6$	$b_7$	$b_8$
1	1.00000000								
2	1.00000000	1.41421356							
3	1.00000000	2.00000000	2.00000000						
4	1.00000000	2.61312593	3.41421356	2.61312593					
5	1.00000000	3.23606798	5.23606798	5.23606798	3.23606798				
6	1.00000000	3.86370331	7.46410162	9.14162017	7.46410162	3.86370331			
7	1.00000000	4.4935921	10.09783468	14.59179389	14.59179389	10.09783468	4.4935921		
8	1.00000000	5.12583090	13.13707118	21.84615097	25.68835593	21.84615097	13.13707118	5.12583090	
9	1.00000000	5.75877048	16.58171874	31.16343748	41.98638573	41.98638573	31.16343748	16.58171874	5.75877048
(c) Denominator Polynomial Factors $B(s) = B_1(s) B_2(s) B_3(s) B_4(s) B_5(s)$									
Order $n$	$B(s)$								
1	$(s + 1)$								
2	$(s^2 + 1.41421356s + 1)$								
3	$(s^2 + s + 1) (s + 1)$								
4	$(s^2 + 0.76536686s + 1) (s^2 + 1.84775907s + 1)$								
5	$(s^2 + 0.61803399s + 1) (s^2 + 1.61803399s + 1) (s + 1)$								
6	$(s^2 + 0.51763809s + 1) (s^2 + 1.41421356s + 1) (s^2 + 1.93185165s + 1)$								
7	$(s^2 + 0.44504187s + 1) (s^2 + 1.24697960s + 1) (s^2 + 1.80193774s + 1) (s + 1)$								
8	$(s^2 + 0.39018064s + 1) (s^2 + 1.11114047s + 1) (s^2 + 1.66293922s + 1) (s^2 + 1.96157056s + 1)$								
9	$(s^2 + 0.34729636s + 1) (s^2 + s + 1) (s^2 + 1.53208889s + 1) (s^2 + 1.87938524s + 1) (s + 1)$								

107 Algunas tablas de este Apéndice son cortesía de L. Weinberg, Network Analysis and Synthesis, R. E. Krieger Publishing Co., 1975.

108 Recuerde que un filtro Butterworth de paso bajo normalizado tiene una frecuencia de corte de 3 dB a 1 rad./seg. mientras que un filtro Chebyshev de paso bajo normalizado tiene un ancho de banda de ondulación de banda de paso de 1 rad./seg.

TABLE A8-2 Normalized Low-Pass Chebyshev Filters with 0.1 dB Passband Ripples

(a) Pole Locations		$p_{1,n}$	$p_{2,n-1}$	$p_{3,n-2}$	$p_{4,n-3}$	$p_5$				
1	-6.55220322									
2	-1.18617812 $\pm j1.38094842$									
3	-0.48470285 $\pm j1.20615528$	-0.96940571								
4	-0.26415637 $\pm j1.12260981$	-0.63772988 $\pm j0.46500021$								
5	-0.16653368 $\pm j1.08037201$	-0.43599085 $\pm j0.66770662$	-0.53891432							
6	-0.11469337 $\pm j1.05651891$	-0.31334811 $\pm j0.77342552$	-0.42804148 $\pm j0.28309339$							
7	-0.08384097 $\pm j1.04183333$	-0.23491716 $\pm j0.83548546$	-0.33946514 $\pm j0.46365945$	-0.37677788						
8	-0.06398012 $\pm j1.03218136$	-0.18219998 $\pm j0.87504111$	-0.27268154 $\pm j0.58468377$	-0.32164981 $\pm j0.20531364$						
9	-0.05043805 $\pm j1.02550963$	-0.14523059 $\pm j0.90181804$	-0.22250617 $\pm j0.66935388$	-0.27294423 $\pm j0.35615576$	-0.29046118					
(b) Denominator Polynomials		$B(s) = s^n + b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \dots + b_0$								
Order n		$b_0$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	$b_5$	$b_6$	$b_7$	$b_8$
1	6.55220322									
2	3.31403708	2.37235625								
3	1.63805080	2.62949486	1.93881142							
4	0.82850927	2.02550052	2.62679762	1.80377250						
5	0.40951270	1.43555791	2.39695895	2.77070415	1.74396339					
6	0.20712732	0.90176006	2.04784060	2.77905025	2.96575608	1.71216592				
7	0.10237818	0.56178554	1.48293374	2.70514436	3.16924598	3.18350446	1.69322441			
8	0.05178183	0.32643144	1.06662645	2.15924064	3.41845152	3.56476973	3.41291899	1.68102289		
9	0.02559454	0.19176027	0.69421123	1.73411961	2.93387298	4.19161066	3.96384487	3.64896144	1.67269928	
(c) Denominator Polynomial Factors		$B(s) = B_1(s) B_2(s) B_3(s) B_4(s) B_5(s)$								
Order n		$B(s)$								
1	( $s + 6.55220322$ )									
2	( $s^2 + 2.37235625s + 3.31403708$ )									
3	( $s^3 + 0.96940571s + 1.68974743$ ) ( $s + 0.96940571$ )									
4	( $s^4 + 0.52831273s + 1.33003138$ ) ( $s^2 + 1.27545977s + 0.62292460$ )									
5	( $s^5 + 0.33306737s + 1.19493715$ ) ( $s^2 + 0.87198169s + 0.63592015$ ) ( $s + 0.53891432$ )									
6	( $s^6 + 0.22938674s + 1.12938678$ ) ( $s^2 + 0.62669622s + 0.69637408$ ) ( $s^2 + 0.85608296s + 0.26336138$ )									
7	( $s^7 + 0.16768193s + 1.09244600$ ) ( $s^2 + 0.46983433s + 0.75322204$ ) ( $s^2 + 0.67893028s + 0.33021667$ ) ( $s + 0.37677788$ )									
8	( $s^8 + 0.12796025s + 1.06949182$ ) ( $s^2 + 0.36439996s + 0.79889377$ ) ( $s^2 + 0.54536308s + 0.41621034$ ) ( $s^2 + 0.64329961s + 0.14561229$ )									
9	( $s^9 + 0.10087611s + 1.05421401$ ) ( $s^2 + 0.29046118s + 0.83436770$ ) ( $s^2 + 0.44501235s + 0.49754361$ ) ( $s^2 + 0.54588846s + 0.20134548$ ) ( $s + 0.29046118$ )									

TABLE A8-3 Normalized Low-Pass Chebyshev Filters with 0.2 dB Passband Ripples

(a) Pole Locations		$p_{1,n}$	$p_{2,n-1}$	$p_{3,n-2}$	$p_{4,n-3}$	$p_5$				
1	-4.60636099									
2	-0.96354254 $\pm j1.19516285$									
3	-0.40731707 $\pm j1.11701458$	-0.81463413								
4	-0.22481072 $\pm j1.07150422$	-0.54274109 $\pm j0.44383158$								
5	-0.14258371 $\pm j1.04741496$	-0.37328900 $\pm j0.64733805$	-0.46141058							
6	-0.09852431 $\pm j1.03354455$	-0.26917343 $\pm j0.75660712$	-0.36769774 $\pm j0.27693743$							
7	-0.07216630 $\pm j1.02491707$	-0.20220548 $\pm j0.82191968$	-0.29219539 $\pm j0.45613101$	-0.32431242						
8	-0.05514327 $\pm j1.01921190$	-0.15703476 $\pm j0.86404612$	-0.23501912 $\pm j0.57733716$	-0.27722396 $\pm j0.20273385$						
9	-0.04351082 $\pm j1.01525261$	-0.12528442 $\pm j0.89279816$	-0.19194687 $\pm j0.66265908$	-0.23545769 $\pm j0.35259353$	-0.25056884					
(b) Denominator Polynomials		$B(s) = s^n + b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \dots + b_0$								
Order n		$b_0$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	$b_5$	$b_6$	$b_7$	$b_8$
1	4.60636099									
2	2.35682846	1.92708508								
3	1.15159025	2.07725754	1.62926827							
4	0.58920712	1.52213870	2.17827157	1.53510363						
5	0.28789756	1.08234729	1.86493313	2.36475740	1.49315599					
6	0.14730178	0.66110783	1.60289922	2.20817385	2.58161304	1.47079097				
7	0.07197439	0.41573867	1.11759023	2.17449134	2.55386738	2.81207554	1.45744677			
8	0.03682544	0.23654244	0.81273392	1.65937609	2.80404721	2.90162138	3.04957189	1.44884222		
9	0.01799360	0.14052449	0.51438217	1.35164765	2.28779160	3.49411391	3.25091261	3.29107898	1.44296846	
(c) Denominator Polynomial Factors		$B(s) = B_1(s) B_2(s) B_3(s) B_4(s) B_5(s)$								
Order n		$B(s)$								
1	( $s + 4.60636099$ )									
2	( $s^2 + 1.92708508s + 2.35682846$ )									
3	( $s^3 + 0.81463413s + 1.41362877$ ) ( $s + 0.81463413$ )									
4	( $s^4 + 0.44962144s + 1.19866114$ ) ( $s^2 + 1.08548218s + 0.49155436$ )									
5	( $s^5 + 0.28516742s + 1.11740822$ ) ( $s^2 + 0.74657799s + 0.55839122$ ) ( $s + 0.46141058$ )									
6	( $s^6 + 0.19704863s + 1.07792137$ ) ( $s^2 + 0.53834686s + 0.64490867$ ) ( $s^2 + 0.73539548s + 0.21189597$ )									
7	( $s^7 + 0.14433260s + 1.05566298$ ) ( $s^2 + 0.40441097s + 0.71643901$ ) ( $s^2 + 0.58439078s + 0.29343364$ ) ( $s + 0.32431242$ )									
8	( $s^8 + 0.11028655s + 1.04183367$ ) ( $s^2 + 0.31406951s + 0.77123562$ ) ( $s^2 + 0.47003824s + 0.38855219$ ) ( $s^2 + 0.55444791s + 0.11795414$ )									
9	( $s^9 + 0.08702165s + 1.03263106$ ) ( $s^2 + 0.25056884s + 0.81278475$ ) ( $s^2 + 0.38389374s + 0.47596066$ ) ( $s^2 + 0.47091539s + 0.17976252$ ) ( $s + 0.25056884$ )									

TABLE A8-4 Normalized Low-Pass Chebyshev Filters with 0.3 dB Passband Ripples

(a) Pole Locations		$p_{1,n}$	$p_{2,n-1}$	$p_{3,n-2}$	$p_{4,n-3}$	$p_5$				
Order $n$										
1		-3.73928318								
2		-0.84715549 $\pm j$ 1.10348195								
3		-0.36463866 $\pm j$ 1.07186009	-0.72927732							
4		-0.20259811 $\pm j$ 1.04536452	-0.48911510 $\pm j$ 0.43300416							
5		-0.12889998 $\pm j$ 1.03048045	-0.33746452 $\pm j$ 0.63687195	-0.41712909						
6		-0.08922267 $\pm j$ 1.02170971	-0.24376086 $\pm j$ 0.74794342	-0.33298353 $\pm j$ 0.27376629						
7		-0.06542149 $\pm j$ 1.01618962	-0.18330693 $\pm j$ 0.81492080	-0.26488619 $\pm j$ 0.45224693	-0.29400149					
8		-0.05002353 $\pm j$ 1.01251401	-0.14245497 $\pm j$ 0.85836793	-0.21319892 $\pm j$ 0.57354311	-0.25148528 $\pm j$ 0.20140156					
9		-0.03948957 $\pm j$ 1.00995189	-0.11370569 $\pm j$ 0.88813679	-0.17420723 $\pm j$ 0.65919928	-0.21369680 $\pm j$ 0.35075261	-0.22741138				
(b) Denominator Polynomials	$B(s) = s^n + b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \dots + b_0$	$b_0$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	$b_5$	$b_6$	$b_7$	$b_8$
Order $n$										
1		3.73928318								
2		1.93534485	1.69431098							
3		0.93482080	1.81369083	1.45855465						
4		0.48383621	1.28205748	1.95693432	1.38342641					
5		0.23370520	0.91976859	1.60098707	2.16105841	1.34985808				
6		0.12095905	0.54930774	1.39260036	1.91754434	2.38702424	1.33193411			
7		0.05842630	0.34948247	0.94285544	1.91929792	2.23477563	2.62282530	1.32123072		
8		0.03023976	0.19528137	0.69512887	1.41506833	2.50498130	2.55297778	2.86372563	1.31432540	
9		0.01460657	0.11745564	0.42993878	1.17175288	1.96663611	3.15157757	2.87202098	3.10753913	1.30960997
(c) Denominator Polynomial Factors	$B(s) = B_1(s) B_2(s) B_3(s) B_4(s) B_5(s)$	$B(s)$								
Order $n$										
1		$(s + 3.73928318)$								
2		$(s^2 + 1.69431098s + 1.93534485)$								
3		$(s^2 + 0.72927732s + 1.28184542)$	$(s + 0.72927732)$							
4		$(s^2 + 0.40519622s + 1.13383296)$	$(s^2 + 0.98723020s + 0.42672618)$							
5		$(s^2 + 0.25779995s + 1.07850517)$	$(s^2 + 0.67492904s + 0.51948818)$	$(s + 0.41712909)$						
6		$(s^2 + 0.17844533s + 1.05185142)$	$(s^2 + 0.48752172s + 0.61883871)$	$(s^2 + 0.66596706s + 0.18582601)$						
7		$(s^2 + 0.13084297s + 1.03692131)$	$(s^2 + 0.36661387s + 0.69769735)$	$(s^2 + 0.52977239s + 0.27469198)$	$(s + 0.29400149)$					
8		$(s^2 + 0.10004706s + 1.02768697)$	$(s^2 + 0.28490993s + 0.75708892)$	$(s^2 + 0.42639785s + 0.37440548)$	$(s^2 + 0.50297056s + 0.10380743)$					
9		$(s^2 + 0.07897914s + 1.02156225)$	$(s^2 + 0.22741138s + 0.80171594)$	$(s^2 + 0.34841445s + 0.46489185)$	$(s^2 + 0.42739360s + 0.16869372)$	$(s + 0.22741138)$				

TABLE A8-5 Normalized Low-Pass Chebyshev Filters with 0.5 dB Passband Ripples

(a) Pole Locations		$p_{1,n}$	$p_{2,n-1}$	$p_{3,n-2}$	$p_{4,n-3}$	$p_5$				
Order $n$										
1		-2.86277516								
2		-0.71281226 $\pm j$ 1.00404249								
3		-0.31322824 $\pm j$ 1.02192749	-0.62645649							
4		-0.17535307 $\pm j$ 1.01625289	-0.42333976 $\pm j$ 0.42094573							
5		-0.11196292 $\pm j$ 1.01155737	-0.29312273 $\pm j$ 0.62517684	-0.36231962						
6		-0.07765008 $\pm j$ 1.00846085	-0.21214395 $\pm j$ 0.73824458	-0.28979403 $\pm j$ 0.27021627						
7		-0.05700319 $\pm j$ 1.00640854	-0.15971939 $\pm j$ 0.80707698	-0.23080120 $\pm j$ 0.44789394	-0.25617001					
8		-0.04362008 $\pm j$ 1.00500207	-0.12421947 $\pm j$ 0.85199961	-0.18590757 $\pm j$ 0.56928794	-0.21929293 $\pm j$ 0.19990734					
9		-0.03445272 $\pm j$ 1.00400397	-0.09920264 $\pm j$ 0.88290628	-0.15198727 $\pm j$ 0.65531705	-0.18643998 $\pm j$ 0.34868692	-0.19840529				
(b) Denominator Polynomials	$B(s) = s^n + b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \dots + b_0$	$b_0$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	$b_5$	$b_6$	$b_7$	$b_8$
Order $n$										
1		2.86277516								
2		1.51620263	1.24562451							
3		0.71569379	1.53489546	1.25291297						
4		0.37905066	1.02545528	1.71686621	1.19738566					
5		0.17892345	0.75251811	1.30957474	1.93736749	1.17249093				
6		0.09476266	0.43236692	1.17186133	1.58976350	2.17184462	1.15917611			
7		0.04473086	0.28207223	0.75565110	1.64790293	1.86940791	2.41265096	1.15121758		
8		0.02369067	0.15254444	0.57356040	1.14858937	2.18401538	2.14921726	2.65674981	1.14608011	
9		0.01118272	0.09411978	0.34081930	0.98361988	1.61138805	2.78149904	2.42932969	2.90273369	1.14257051
(c) Denominator Polynomial Factors	$B(s) = B_1(s) B_2(s) B_3(s) B_4(s) B_5(s)$	$B(s)$								
Order $n$										
1		$(s + 2.86277516)$								
2		$(s^2 + 1.42562451s + 1.51620263)$								
3		$(s^2 + 0.62645649s + 1.14244773)$	$(s + 0.62645649)$							
4		$(s^2 + 0.35070614s + 1.06351864)$	$(s^2 + 0.84667952s + 0.35641186)$							
5		$(s^2 + 0.22392584s + 1.03578401)$	$(s^2 + 0.58624547s + 0.47676701)$	$(s + 0.36231962)$						
6		$(s^2 + 0.15530015s + 1.02302281)$	$(s^2 + 0.42428790s + 0.59001011)$	$(s^2 + 0.57958805s + 0.15699741)$						
7		$(s^2 + 0.11400638s + 1.01610751)$	$(s^2 + 0.31943878s + 0.67688354)$	$(s^2 + 0.46160241s + 0.25387817)$	$(s + 0.25617001)$					
8		$(s^2 + 0.08724015s + 1.01193187)$	$(s^2 + 0.24843894s + 0.74133382)$	$(s^2 + 0.37181515s + 0.35865039)$	$(s^2 + 0.43858587s + 0.08805234)$					
9		$(s^2 + 0.06890543s + 1.00921097)$	$(s^2 + 0.19840529s + 0.78936466)$	$(s^2 + 0.30397454s + 0.45254057)$	$(s^2 + 0.37287997s + 0.15634244)$	$(s + 0.19840529)$				

TABLE A8-6 Normalized Low-Pass Chebyshev Filters with 1.0 dB Passband Ripples

(a) Pole Locations		$p_{1,n}$	$p_{2,n-1}$	$p_{3,n-2}$	$p_{4,n-3}$	$p_5$				
1		-1.96522673								
2		-0.54886716 $\pm j0.89512857$								
3		-0.24708530 $\pm j0.96599867$	-0.49417060							
4		-0.13953600 $\pm j0.98337916$	-0.33686969 $\pm j0.40732899$							
5		-0.08945836 $\pm j0.99010711$	-0.23420503 $\pm j0.61191985$	-0.28949334						
6		-0.06218102 $\pm j0.99341120$	-0.16988172 $\pm j0.72722747$	-0.23206274 $\pm j0.26618373$						
7		-0.04570898 $\pm j0.99528396$	-0.12807372 $\pm j0.79815576$	-0.18507189 $\pm j0.44294303$	-0.20541430					
8		-0.03500823 $\pm j0.99645128$	-0.09969501 $\pm j0.84475061$	-0.14920413 $\pm j0.56444431$	-0.17599827 $\pm j0.19820648$					
9		-0.02766745 $\pm j0.99722967$	-0.07966524 $\pm j0.87694906$	-0.12205422 $\pm j0.65089544$	-0.14972167 $\pm j0.34633423$	-0.15933047				
(b) Denominator Polynomials $B(s) = s^n + b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \dots + b_0$		$b_0$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$				
Order n		$b_0$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$				
1		1.96522673								
2		1.10251033	1.09773433							
3		0.49130668	1.23840917	0.98834121						
4		0.27562758	0.74261937	1.45392476	0.95281138					
5		0.12282667	0.58053415	0.97439607	1.68881598	0.93682013				
6		0.06890690	0.30708064	0.93934553	1.20214039	1.93082492	0.92825096			
7		0.03070667	0.21367139	0.54861981	1.35754480	1.42879431	2.17607847	0.92312347		
8		0.01722672	0.10734473	0.44782572	0.84682432	1.83690238	1.65515567	2.42302642	0.91981131	
9		0.00767667	0.07060479	0.24418637	0.78631094	1.20160717	2.37811881	1.88147976	2.67094683	0.91754763
(c) Denominator Polynomial Factors $B(s) = B_1(s) B_2(s) B_3(s) B_4(s) B_5(s)$		$B(s)$								
Order n		$B(s)$								
1		$(s + 1.96522673)$								
2		$(s^2 + 1.09773433s + 1.10251033)$								
3		$(s^2 + 0.49417060s + 0.99420459)$	$(s + 0.49417060)$							
4		$(s^2 + 0.27907199s + 0.98650488)$	$(s^2 + 0.67373939s + 0.27939809)$							
5		$(s^2 + 0.17891672s + 0.98831489)$	$(s^2 + 0.46841007s + 0.42929790)$	$(s + 0.28949334)$						
6		$(s^2 + 0.12436205s + 0.99073230)$	$(s^2 + 0.33976343s + 0.55771960)$	$(s^2 + 0.46412548s + 0.12470689)$						
7		$(s^3 + 0.09141796s + 0.99267947)$	$(s^3 + 0.25614744s + 0.65345550)$	$(s^3 + 0.37014377s + 0.23045013)$	$(s + 0.20541430)$					
8		$(s^3 + 0.07001647s + 0.99414074)$	$(s^3 + 0.19939003s + 0.72354268)$	$(s^3 + 0.29840826s + 0.34085925)$	$(s^3 + 0.35199655s + 0.07026120)$					
9		$(s^3 + 0.05533489s + 0.99523251)$	$(s^3 + 0.15933047s + 0.77538620)$	$(s^3 + 0.24410845s + 0.43856211)$	$(s^3 + 0.29944334s + 0.14236398)$	$(s + 0.15933047)$				

TABLE A8-7 Normalized Low-Pass Chebyshev Filters with 1.5 dB Passband Ripples

(a) Pole Locations		$p_{1,n}$	$p_{2,n-1}$	$p_{3,n-2}$	$p_{4,n-3}$	$p_5$				
1		-1.55692704								
2		-0.46108873 $\pm j0.84415805$								
3		-0.21005618 $\pm j0.93934594$	-0.42011237							
4		-0.11913070 $\pm j0.96761105$	-0.28760695 $\pm j0.40079762$							
5		-0.07652815 $\pm j0.97978702$	-0.20035330 $\pm j0.60554168$	-0.24765030						
6		-0.05325112 $\pm j0.98615853$	-0.14548476 $\pm j0.72191815$	-0.19873588 $\pm j0.26424038$						
7		-0.03917029 $\pm j0.98991746$	-0.10975272 $\pm j0.79385217$	-0.15859728 $\pm j0.44055472$	-0.17602970					
8		-0.03001306 $\pm j0.99232369$	-0.08546998 $\pm j0.84125141$	-0.12791486 $\pm j0.56210622$	-0.15088586 $\pm j0.19738545$					
9		-0.02372663 $\pm j0.99395816$	-0.06831811 $\pm j0.87407213$	-0.10466942 $\pm j0.64876011$	-0.12839605 $\pm j0.34519804$	-0.13663622				
(b) Denominator Polynomials $B(s) = s^n + b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \dots + b_0$		$b_0$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$				
Order n		$b_0$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$				
1		1.55692704								
2		0.92520563	0.92217745							
3		0.38923176	1.10298881	0.84022474						
4		0.23130141	0.60470214	1.33087103	0.81347530					
5		0.09730794	0.50419031	0.80441337	1.57113155	0.80141319				
6		0.05782535	0.24758513	0.83401695	1.00055677	1.81596761	0.79494354			
7		0.02432698	0.18365019	0.44733249	1.22429494	1.19561450	2.06289611	0.79107030		
8		0.01445634	0.08613897	0.39173725	0.69590812	1.67617801	1.39030856	2.31091937	0.78856753	
9		0.00608175	0.06034495	0.19776813	0.69725472	0.99316759	2.19012821	1.58489077	2.55957170	0.78685666
(c) Denominator Polynomial Factors $B(s) = B_1(s) B_2(s) B_3(s) B_4(s) B_5(s)$		$B(s)$								
Order n		$B(s)$								
1		$(s + 1.55692704)$								
2		$(s^2 + 0.92217745s + 0.92520563)$								
3		$(s^2 + 0.42011237s + 0.92649440)$	$(s + 0.42011237)$							
4		$(s^2 + 0.23826140s + 0.95046327)$	$(s^2 + 0.57521390s + 0.24335649)$							
5		$(s^2 + 0.15305630s + 0.96583917)$	$(s^2 + 0.40070660s + 0.40682217)$	$(s + 0.24765030)$						
6		$(s^2 + 0.10650224s + 0.97534434)$	$(s^2 + 0.29096953s + 0.54233163)$	$(s^2 + 0.39747177s + 0.10931893)$						
7		$(s^2 + 0.07834059s + 0.98147089)$	$(s^2 + 0.21950545s + 0.64224692)$	$(s^2 + 0.3119456s + 0.21924156)$	$(s + 0.17602970)$					
8		$(s^2 + 0.06002613s + 0.98560709)$	$(s^2 + 0.17093995s + 0.71500904)$	$(s^2 + 0.25582972s + 0.33232561)$	$(s^2 + 0.30177173s + 0.06172756)$					
9		$(s^2 + 0.04745326s + 0.98851577)$	$(s^2 + 0.13663622s + 0.76866946)$	$(s^2 + 0.20933884s + 0.43184537)$	$(s^2 + 0.25679210s + 0.13564724)$	$(s + 0.13663622)$				

TABLE A8-8 Normalized Low-Pass Chebyshev Filters with 2.0 dB Passband Ripples

(a) Pole Locations		$p_{1, n}$	$p_{2, n-1}$	$p_{3, n-2}$	$p_{4, n-3}$	$p_5$			
1	-1.30756027								
2	-0.40190822 $\pm j0.81334508$								
3	-0.18445539 $\pm j0.92307712$	-0.36891079							
4	-0.10488725 $\pm j0.95795296$	-0.25322023 $\pm j0.39679711$							
5	-0.06746098 $\pm j0.97345572$	-0.17661514 $\pm j0.60162872$	-0.21830832						
6	-0.04697322 $\pm j0.98170517$	-0.12833321 $\pm j0.71865806$	-0.17530643 $\pm j0.26304711$						
7	-0.03456636 $\pm j0.98662052$	-0.09685278 $\pm j0.79120823$	-0.13995632 $\pm j0.43908744$	-0.15533980					
8	-0.02649238 $\pm j0.98978701$	-0.07544391 $\pm j0.83910091$	-0.11290980 $\pm j0.56066930$	-0.13318619 $\pm j0.19688088$					
9	-0.02094714 $\pm j0.99194711$	-0.06031490 $\pm j0.87230365$	-0.09240778 $\pm j0.64744750$	-0.11335493 $\pm j0.34449962$	-0.12062980				
(b) Denominator Polynomials $B(s) = s^n + b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \dots + b_0$		$b_0$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$			
Order $n$		$b_0$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$			
1	1.30756027								
2	0.82306043	0.80381643							
3	0.32689007	1.02219034	0.73782158						
4	0.20576511	0.51679810	1.25648193	0.71621496					
5	0.08172252	0.45934912	0.69347696	1.49954327	0.70646057				
6	0.05144128	0.21027056	0.77146177	0.86701492	1.74585875	0.70122571			
7	0.02043063	0.16612635	0.38263808	1.14459657	1.03954580	1.99366532	0.69809071		
8	0.01286032	0.07293732	0.35870428	0.59822139	1.57958072	1.21171208	2.24225293	0.69606455	
9	0.00510766	0.05437558	0.16844729	0.64446774	0.85686481	2.07674793	1.38374646	2.49128967	0.69467931
(c) Denominator Polynomial Factors $B(s) = B_1(s) B_2(s) B_3(s) B_4(s) B_5(s)$		$B(s)$							
Order $n$		$B(s)$							
1	$(s + 1.30756027)$								
2	$(s^2 + 0.80381643s + 0.82306043)$								
3	$(s^2 + 0.36891079s + 0.88609517)$	$(s + 0.36891079)$							
4	$(s^2 + 0.20977450s + 0.92867521)$	$(s^2 + 0.50644045s + 0.22156843)$							
5	$(s^2 + 0.13492196s + 0.95216702)$	$(s^2 + 0.35323028s + 0.39315003)$	$(s + 0.21830832)$						
6	$(s^2 + 0.09394643s + 0.96595153)$	$(s^2 + 0.25666642s + 0.53293883)$	$(s^2 + 0.35061285s + 0.09992612)$						
7	$(s^2 + 0.06913271s + 0.97461489)$	$(s^2 + 0.19370556s + 0.63539092)$	$(s^2 + 0.27991264s + 0.21238555)$	$(s + 0.15533980)$					
8	$(s^2 + 0.05298476s + 0.98038017)$	$(s^2 + 0.15088783s + 0.70978212)$	$(s^2 + 0.22581959s + 0.32709869)$	$(s^2 + 0.26637237s + 0.05650064)$					
9	$(s^2 + 0.04189429s + 0.98439786)$	$(s^2 + 0.12062980s + 0.76455155)$	$(s^2 + 0.18481557s + 0.42772746)$	$(s^2 + 0.22670986s + 0.13152933)$	$(s + 0.12062980)$				

TABLE A8-9 Normalized Low-Pass Chebyshev Filters with 2.5 dB Passband Ripples

(a) Pole Locations		$p_{1, n}$	$p_{2, n-1}$	$p_{3, n-2}$	$p_{4, n-3}$	$p_5$			
1	-1.13352794								
2	-0.35762543 $\pm j0.79239886$								
3	-0.16497445 $\pm j0.91194830$	-0.32994890							
4	-0.09398023 $\pm j0.95133155$	-0.22688835 $\pm j0.39405443$							
5	-0.06049691 $\pm j0.96911059$	-0.15838298 $\pm j0.59894329$	-0.19577212						
6	-0.04214350 $\pm j0.97864714$	-0.11513817 $\pm j0.71641943$	-0.15728167 $\pm j0.26222771$						
7	-0.03102091 $\pm j0.98435581$	-0.08691865 $\pm j0.78939207$	-0.12560108 $\pm j0.43807955$	-0.13940668					
8	-0.02377936 $\pm j0.98804414$	-0.06771789 $\pm j0.83762338$	-0.10134698 $\pm j0.55968205$	-0.11954692 $\pm j0.19653420$					
9	-0.01880433 $\pm j0.99056519$	-0.05414490 $\pm j0.87108841$	-0.08295480 $\pm j0.64654551$	-0.10175912 $\pm j0.34401968$	-0.10828979				
(b) Denominator Polynomials $B(s) = s^n + b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \dots + b_0$		$b_0$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$			
Order $n$		$b_0$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$			
1	1.13352794								
2	0.75579190	0.71525087							
3	0.28338199	0.96773256	0.65989780						
4	0.18894798	0.45355237	1.20591329	0.64173716					
5	0.07084550	0.42943786	0.61232280	1.45068134	0.63353190				
6	0.04723699	0.18372756	0.72942899	0.76830555	1.69790019	0.62912669			
7	0.01771137	0.15448499	0.33601918	1.09079637	0.92336716	1.94624358	0.62648795		
8	0.01180925	0.06359602	0.33663041	0.52716439	1.51416640	1.07808152	2.19517646	0.62478230	
9	0.00442784	0.05041856	0.14748366	0.60904415	0.75700988	1.99979301	1.23266106	2.44444850	0.62361607
(c) Denominator Polynomial Factors $B(s) = B_1(s) B_2(s) B_3(s) B_4(s) B_5(s)$		$B(s)$							
Order $n$		$B(s)$							
1	$(s + 1.13352794)$								
2	$(s^2 + 0.71525087s + 0.75579190)$								
3	$(s^2 + 0.32994890s + 0.85886628)$	$(s + 0.32994890)$							
4	$(s^2 + 0.18796046s + 0.91386400)$	$(s^2 + 0.45377670s + 0.20675722)$							
5	$(s^2 + 0.12099383s + 0.94283522)$	$(s^2 + 0.31676595s + 0.38381823)$	$(s + 0.19577212)$						
6	$(s^2 + 0.08428699s + 0.95952630)$	$(s^2 + 0.23027635s + 0.52651360)$	$(s^2 + 0.31456334s + 0.09350090)$						
7	$(s^2 + 0.06204181s + 0.96991866)$	$(s^2 + 0.17383729s + 0.63069469)$	$(s^2 + 0.25120216s + 0.20768932)$	$(s + 0.13940668)$					
8	$(s^2 + 0.04755872s + 0.97679669)$	$(s^2 + 0.13543578s + 0.70619864)$	$(s^2 + 0.20269397s + 0.32351521)$	$(s^2 + 0.23909383s + 0.05291716)$					
9	$(s^2 + 0.03760865s + 0.98157299)$	$(s^2 + 0.10828979s + 0.76172668)$	$(s^2 + 0.16590959s + 0.42490259)$	$(s^2 + 0.20351824s + 0.12870446)$	$(s + 0.10828979)$				

TABLE A8-10 Normalized Low-Pass Chebyshev Filters with 3 dB Passband Ripples

(a) Pole Locations		$p_{1,n}$	$p_{2,n-1}$	$p_{3,n-2}$	$p_{4,n-3}$	$p_5$
Order $n$						
1	-1.00237729					
2	-0.32244983 $\pm j0.77715757$					
3	-0.14931010 $\pm j0.90381443$	-0.29862021				
4	-0.08517040 $\pm j0.94648443$	-0.20561953 $\pm j0.39204669$				
5	-0.05485987 $\pm j0.96592748$	-0.14362501 $\pm j0.59697601$	-0.17753027			
6	-0.03822951 $\pm j0.97640602$	-0.10444497 $\pm j0.71477881$	-0.14267448 $\pm j0.26162720$			
7	-0.02814564 $\pm j0.98269568$	-0.07886234 $\pm j0.78806075$	-0.11395938 $\pm j0.43734072$	-0.12648537		
8	-0.02157816 $\pm j0.98676635$	-0.06144939 $\pm j0.83654012$	-0.09196552 $\pm j0.55895824$	-0.10848072 $\pm j0.19628003$		
9	-0.01706520 $\pm j0.98955191$	-0.04913728 $\pm j0.87019734$	-0.07528269 $\pm j0.64588414$	-0.09234789 $\pm j0.34366777$	-0.09827457	
(b) Denominator Polynomials $B(s) = s^n + b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \dots + b_0$		$b_0$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$
Order $n$		$b_0$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$
1		1.00237729				
2		0.70794778	0.64489965			
3		0.25059432	0.92834806	0.59724042		
4		0.17698695	0.40476795	1.16911757	0.58157986	
5		0.06264858	0.40796631	0.54893711	1.41502514	0.57450003
6		0.04424674	0.16342991	0.69909774	0.69060980	1.66284806
7		0.01566215	0.14615300	0.30001666	1.05184481	0.83144115
8		0.01106168	0.05648135	0.32076457	0.47189898	1.46669900
9		0.00391554	0.04759081	0.13138977	0.58350569	0.67893051
(c) Denominator Polynomial Factors $B(s) = B_1(s) B_2(s) B_3(s) B_4(s) B_5(s)$						
Order $n$	$B(s)$					
1	$(s + 1.00237729)$					
2	$(s^2 + 0.64489965s + 0.70794778)$					
3	$(s^2 + 0.29862021s + 0.83917403)$	$(s + 0.29862021)$				
4	$(s^2 + 0.17034080s + 0.90308678)$	$(s^2 + 0.41123906s + 0.19598000)$				
5	$(s^2 + 0.10971974s + 0.93602549)$	$(s^2 + 0.28725001s + 0.37700850)$	$(s + 0.17753027)$			
6	$(s^2 + 0.07645903s + 0.95483021)$	$(s^2 + 0.20888994s + 0.52181750)$	$(s^2 + 0.28534897s + 0.08880480)$			
7	$(s^2 + 0.05629129s + 0.96648298)$	$(s^2 + 0.15772468s + 0.62725902)$	$(s^2 + 0.22791876s + 0.20425365)$	$(s + 0.12648537)$		
8	$(s^2 + 0.04315631s + 0.97417345)$	$(s^2 + 0.12289879s + 0.70357540)$	$(s^2 + 0.18393103s + 0.32089197)$	$(s^2 + 0.21696145s + 0.05029392)$		
9	$(s^2 + 0.03413040s + 0.97950420)$	$(s^2 + 0.09827457s + 0.75965789)$	$(s^2 + 0.15056538s + 0.42283380)$	$(s^2 + 0.18469578s + 0.12663567)$	$(s + 0.09827457)$	

## Problemas

8-1. Determine cuál de los siguientes  $F(\omega)$  puede ser una función de magnitud al cuadrado de una función de transferencia.

$$(a) \quad F(\omega) = \frac{1}{\omega^4 + \omega^2 + 1}$$

$$(f) \quad F(\omega) = \frac{1}{\omega^4 + \omega^2 + 1}$$

$$(b) \quad F(\omega) = \frac{1}{\omega^4 + \omega^2 + 1}$$

$$(g) \quad F(\omega) = \frac{\omega^4 - \omega + 1}{\omega^4 + 20\omega^2 + 10}$$

$$(c) \quad F(\omega) = \frac{1 - \omega^4}{\omega^4 - 3\omega^2 + 2}$$

$$(h) \quad F(\omega) = \frac{100 - \omega^4}{\omega^4 + 20\omega^2 + 10}$$

$$(d) \quad F(\omega) = \frac{\omega^4 + 3\omega^2 + 2}{1 + \omega^4}$$

$$(i) \quad F(\omega) = \frac{1 - \omega^6}{\omega^6 + 2\omega^4 + 20\omega^2 + 10}$$

$$(e) \quad F(\omega) = \frac{1 + \omega^4}{\omega^4 + 20\omega^2 + 5\omega + 1}$$

$$(j) \quad F(\omega) = \frac{\omega^2 + \omega^6}{\omega^6 + 2\omega^4 + 20\omega^2 + 10}$$

8-2. (a) Encuentre la función de transferencia del filtro Butterworth de paso bajo normalizado de enésimo orden, donde  $n=1,2,3,\dots,9$ .

(b) Dibuje los patrones de polo cero del filtro Butterworth de paso bajo normalizado de  $n$ -ésimo orden, donde  $n=1,2,3,\dots,9$ .

8-3. (a) Encuentre el pedido mínimo de filtro Butterworth para cumplir con las siguientes especificaciones:

(i) La frecuencia de corte de 3 dB es de 1 rad./seg.

(ii) El requisito de banda de paso es

$$|H(j\omega)| \geq 0.99 \text{ para } 0 \leq \omega \leq 0.25 \text{ rad./seg.}$$

(iii) El requisito de la banda de supresión es

$$|H(j\omega)| \leq 0.001 \text{ para } \omega \geq 2 \text{ rad./seg.}$$

(b) Encuentre la función de transferencia del filtro deseado.

(c) Realice el filtro en (b) con  $R_s = 1\Omega$  y  $R_l = 1\Omega$ .

(d) Realice el filtro en (b) con  $R_s = 1\Omega$  y  $R_l = 3\Omega$ .

(e) Realice el filtro en (b) con  $R_s = 1\Omega$  y  $R_l = 0.5\Omega$ .

8-4. Repita el problema 8-3 reemplazando las especificaciones (ii) y (iii) por

(iia)  $|H(j\omega)|^2 \geq 0.99$  para  $0 \leq \omega \leq 0.25$  rad./seg.

(iiia)  $|H(j\omega)|^2 \leq 0.01$  para  $\omega \geq 2$  rad./seg.

8-5. Repita el problema 8-3 reemplazando las especificaciones (ii) y (iii) por

(iia)  $|H(j\omega)| \geq 0.9$  para  $0 \leq \omega \leq 0.5$  rad./seg.

(iiia)  $|H(j\omega)| \leq 0.1$  para  $\omega \geq 1.5$  rad./seg.

8-6. Suponga que se requiere un filtro de paso bajo normalizado máximamente plano para cumplir con las siguientes especificaciones:

- (i) La atenuación de la banda de paso es inferior a  $0.1 \text{ dB}$  para  $0.05 < \omega < 0.85 \text{ rad./seg.}$
- (ii) La atenuación de la banda suprimida es de al menos  $50 \text{ dB}$  para  $\omega > 1.2 \text{ rad./seg.}$ . Encuentre el pedido mínimo del filtro deseado.

8-7. (a) Encuentre el orden mínimo del filtro Butterworth de paso bajo normalizado para cumplir con los siguientes requisitos:

- (i) La atenuación de la banda de paso es inferior a  $0.01 \text{ dB}$  para  $0 \leq \omega \leq 0.3 \text{ rad./seg.}$  y es inferior a  $0.1 \text{ dB}$  para  $0.3 \leq \omega \leq 0.6 \text{ rad./seg.}$ .
- (ii) La atenuación de la banda suprimida es de al menos  $40 \text{ dB}$  para  $\omega \geq 2 \text{ rad./seg.}$  y  $60 \text{ dB}$  para  $\omega \geq 3 \text{ rad./seg.}$ .

(b) Encuentre una realización de circuito del filtro deseado.

8-8. Repita el problema 8-7 con los siguientes requisitos:

- (ia) La atenuación de la banda de paso es inferior a  $0.1 \text{ dB}$  para  $0 \leq \omega \leq 0.75 \text{ rad./seg.}$ .
- (iia) La atenuación de la banda suprimida es de al menos  $50 \text{ dB}$  para  $\omega \geq 2 \text{ rad./seg.}$ .

8-9. (a) Encuentre la función de transferencia del filtro Chebyshev de paso bajo de orden  $n$  con ancho de banda de ondulación de  $1 \text{ rad./seg.}$  y con  $\epsilon = 0.5$ , donde  $n = 1, 2, \dots, 9$ .

(b) Dibuje los patrones de polos y ceros de las funciones de transferencia obtenidas en (a).

8-10. (a) Encuentre la función de transferencia del filtro Chebyshev de paso bajo de orden  $n$  con  $1 \text{ rad./seg.}$  ancho de banda de ondulación y con  $A_{max} = 0.1 \text{ dB}$ , donde  $n = 1, 2, \dots, 9$ .

(b) Dibuje los patrones de polos y ceros de las funciones de transferencia obtenidas en (a).

8-11. Repita el problema 8-10 con  $A_{max} = 1 \text{ dB}$ .

8-12. Suponga que vamos a diseñar y realizar un filtro Chebyshev de paso bajo para cumplir con los siguientes requisitos:

- (i) El ancho de banda de ondulación es de  $1 \text{ rad./seg.}$
  - (ii) La ondulación de la banda de paso  $A_{max} = 0.1 \text{ dB}$ .
  - (iii) La atenuación de la banda suprimida es de al menos  $40 \text{ dB}$  para  $\omega \geq 2 \text{ rad./seg.}$ .
- (a) Encuentre el pedido mínimo del filtro deseado.
  - (b) Encuentre la función de transferencia del filtro deseado.
  - (c) Encuentre una realización de circuito del filtro deseado.

8-13. Repita el problema 8-12 reemplazando el requisito (ii) por uno de los siguientes:

- |                                  |                                  |
|----------------------------------|----------------------------------|
| (a) $A_{max} = 0.2 \text{ dB}$ . | (e) $A_{max} = 1.5 \text{ dB}$ . |
| (b) $A_{max} = 0.3 \text{ dB}$ . | (f) $A_{max} = 2 \text{ dB}$ .   |
| (c) $A_{max} = 0.5 \text{ dB}$ . | (g) $A_{max} = 2.5 \text{ dB}$ . |
| (d) $A_{max} = 1 \text{ dB}$ .   | (h) $A_{max} = 3 \text{ dB}$ .   |

8-14. (a) Encuentre el pedido mínimo de un filtro de ondulación equivalente para cumplir con los siguientes requisitos:

- (i) El requisito de la banda de paso es

$$|H(j\omega)|^2 \geq 0.955 \quad \text{para } 0 \leq \omega \leq 1 \text{ rad./sec.}$$

- (ii) El requisito de banda suprimida es

$$|H(j\omega)|^2 \geq 0.001 \quad \text{para } \omega \geq 3 \text{ rad./sec.}$$

- (b) Encuentre una realización del filtro deseado.

8-15. Repita el problema 8-14 con el requisito (i) reemplazado por

$$|H(j\omega)|^2 \geq 0.001 \quad \text{para } 0 \leq \omega \leq 1 \text{ rad./sec.}$$

8-16. (a) Encuentre el pedido mínimo de un filtro Chebyshev normalizado para cumplir con los siguientes requisitos:

- (i)  $A_{max} = 0.2 \text{ dB}$ .  
(ii) La atenuación de la banda de parada es al menos de  $60 \text{ dB}$  para  $\omega \geq 2.5 \text{ rad./sec.}$   
(b) Realice el filtro deseado.

8-17. Repita el problema 8-16 reemplazando el requisito (i) por uno de los siguientes:

- (a)  $A_{max} = 0.5 \text{ dB}$ .  
(b)  $A_{max} = 1.5 \text{ dB}$ .  
(c)  $A_{max} = 2.5 \text{ dB}$ .

8-18. Encuentre el pedido mínimo de un filtro Chebyshev normalizado para cumplir con los siguientes requisitos:

- (i)  $A_{max} = 0.1 \text{ dB}$ .  
(ii) La atenuación de la banda suprimida es de al menos  $60 \text{ dB}$  para  $\omega \geq 1.4 \text{ rad./sec.}$   
(iii) La frecuencia de 3dB  $\omega_c \leq 1.25 \text{ rad./sec.}$ .

8-19. Suponga que vamos a diseñar un filtro Chebyshev para cumplir con los siguientes requisitos:

- (i) La máxima ondulación de banda de paso  $A_{max} = 0.3$  dB.
- (ii) El ancho de banda de ondulación es de 1 rad./seg.
- (iii) La frecuencia de 3 dB para  $\omega_c \leq 1.2$  rad./seg.
- (iv) La atenuación de la banda suprimida es de al menos 40 dB para  $\omega \geq 2$  rad./seg.
- (a) Encuentre el pedido mínimo del filtro deseado.
- (b) Encuentre la función de magnitud del filtro deseado.
- (c) Realice el filtro deseado.

8-20. Repita el problema 8-19 reemplazando el requisito (i) por uno de los siguientes:

- (a)  $A_{max} = 0.5$  dB.
- (b)  $A_{max} = 1$  dB.
- (c)  $A_{max} = 2$  dB.

8-21. Suponga que vamos a diseñar un filtro de paso bajo para cumplir con los siguientes requisitos:

- (i) La atenuación de la banda de paso es inferior a 0.1 dB para  $0 \leq \omega \leq 0.25$  rad./seg. y menos de 1 dB para  $0.25 \leq \omega \leq 0.75$  rad./seg.
- (ii) La atenuación de la banda suprimida es de al menos 40 dB para  $\omega \geq 2$  rad./seg. .
- a) Encuentre el orden mínimo del filtro Butterworth de paso bajo normalizado para cumplir con los requisitos.
- (b) Encuentre el pedido mínimo del filtro Chebyshev de paso bajo normalizado para cumplir con los requisitos.

8-22. Sean  $p_1$  y  $p_2$  los polos de un filtro de retardo de grupo de todos los polos máximamente plano de segundo orden donde

$$p_1 = -\alpha + j\beta \quad y \quad p_2 = -\alpha - j\beta$$

- (a) Encuentre la función de retardo de grupo  $\tau(\omega)$  o  $\tau(s/j)$  en términos de  $\alpha$  y  $\beta$  .
- (b) Encuentre las condiciones en  $\alpha$  y  $\beta$  tal que  $\tau(\omega)$  es máximamente plano en  $\omega=0$  .
- (c) Junto con (b), encuentre  $\alpha$  y  $\beta$  tal que  $\tau(0)=1$  .
- (d) Encuentre la función de transferencia del filtro de retardo de grupo unitario máximamente plano de segundo orden [es decir,  $\tau(0)=1$  ]. Sugerencia: Utilice (c).
- (e) Encuentre la función de transferencia del filtro de Bessel de segundo orden.
- (f) Comente los resultados obtenidos en (d) y (e).
- (g) Junto con (b), encuentre  $\alpha$  y  $\beta$  en términos de la constante  $\tau_0 \triangleq \tau(0)$  .
- (h) Encuentre la función de transferencia del filtro de retardo de grupo de  $\tau_0$  unidades máximamente plano de segundo orden. Sugerencia: utilice (g).
- (i) Comparando los resultados de (e) y (h), diseñe un procedimiento para obtener la función de transferencia de un filtro de retardo de grupo de  $\tau_0$  unidades de n-ésimo orden máximamente plano basado en los polinomios de Bessel.

8-23. Encuentre la función de transferencia de un filtro de Bessel de paso bajo de orden  $n$  con retardo de grupo unitario en  $\omega=0$ , donde  $n=1,2,\dots,9$ .

8-24. Encuentre la función de transferencia de un filtro de Bessel de paso bajo de cuarto orden con

- (a)  $\tau(0)=2 \text{ seg.}$
- (b)  $\tau(0)=10^{-3} \text{ seg.}$
- (c)  $\tau(0)=10^{-6} \text{ seg.}$

8-25. (a) Encuentre el pedido mínimo de un filtro Bessel para cumplir con las siguientes especificaciones:

- (i)  $\tau(0)=1 \text{ sec.}$
- (ii)  $\tau(\omega)$  tiene menos del 2% de error para  $\omega \leq 2 \text{ rad./seg.}$
- (iii) La atenuación de la banda suprimida es de al menos 20 dB para  $\omega \geq 4 \text{ rad./seg.}$
- (b) Encuentre la función de transferencia del filtro deseado.
- (c) Encuentre una realización de circuito del filtro deseado.

8-26. (a) Encuentre el pedido mínimo de un filtro Bessel para cumplir con las siguientes especificaciones:

- (i)  $\tau(0)=2 \text{ seg.}$
- (ii)  $\tau(\omega)$  tiene menos del 1% de error para  $\omega \leq 2.5 \text{ rad./seg.}$
- (iii) La frecuencia de corte de 3 dB  $\omega_c \leq 1.5 \text{ rad./seg.}$
- (iv) La atenuación de la banda suprimida es de al menos 34 dB para  $\omega \geq 3 \text{ rad./seg.}$
- (b) Encuentre la función de transferencia del filtro deseado.

8-27. (a) Encuentre la función de transferencia de un filtro de Bessel de paso bajo de segundo orden con  $\tau(0)=10 \text{ msec.}$

(b) Realice el filtro en (a) con un dispositivo sin pérdidas de dos puertos terminado en ambos extremos por  $R_s=R_l=1\Omega$ .

8-28. (a) Encuentre la función de transferencia de un filtro de Bessel de paso bajo de tercer orden con  $\tau(0)=5 \text{ msec.}$

(b) Realice el filtro en (a) con dos puertos sin pérdidas terminados en ambos extremos por  $R_s=1\Omega$  y  $R_l=1.5\Omega$ .

8-29. (a) Encuentre la función de transferencia  $H_1(s)$  de un filtro Butterworth de paso bajo normalizado de segundo orden.

(b) Encuentre la función de transferencia  $H_2(s)$  de un filtro de Chebyshev de segundo orden. con un 1 rad./seg. ancho de banda de ondulación y con  $A_{max}=0.1 \text{ dB}$ .

(c) Encuentre la función de transferencia  $H_3(s)$  de un filtro de Bessel de paso bajo de segundo orden con un retardo de grupo unitario.

(d) Encuentre la función de transferencia  $H_4(s)$  de un filtro transicional de paso bajo de

segundo orden con los polos ubicados a medio camino entre los de  $H_2(s)$  y  $H_3(s)$ .

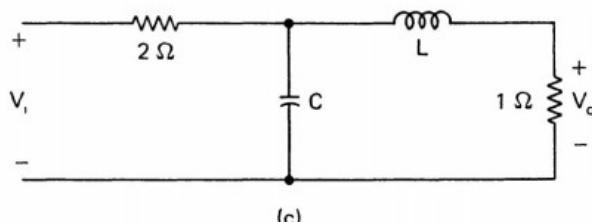
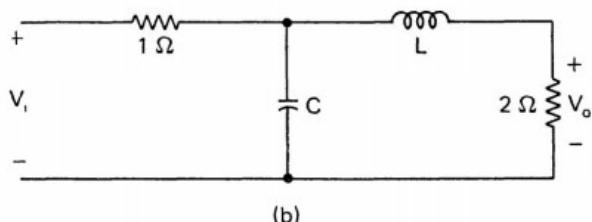
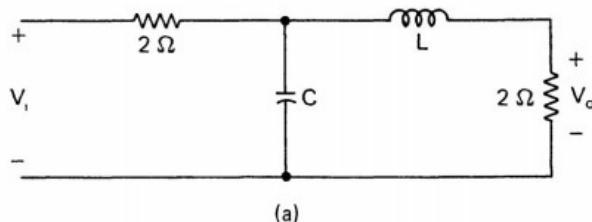
(e) Encuentre la función de transferencia  $H_5(s)$  de un filtro transicional de paso bajo de segundo orden con los polos ubicados a medio camino entre los de  $H_1(s)$  y  $H_3(s)$ .

(f) Considere el circuito que se muestra en la figura P8-29(a). Encuentre la función de transferencia  $H(s)=V_o/V_i$  en términos de L y C.

(g) Encuentre los valores de L y C para realizar  $H_1(s)$ ,  $H_2(s)$ ,  $H_3(s)$ ,  $H_4(s)$  y  $H_5(s)$ .

(h) Repita (f) y (g) para el circuito que se muestra en la figura P8-29(b).

(i) Repita (f) y (g) para el circuito que se muestra en la figura P8-29(c).



**Fig. P8-29**

8-30. (a) Encuentre la función de transferencia de un filtro Butterworth de paso bajo de segundo orden con una frecuencia de corte de 3 dB en  $\omega_c=10^6 \text{ rad./seg.}$

(b) Realice la función de transferencia en (a) con  $R_s=R_l=1\Omega$ .

(c) Realice la función de transferencia en (a) con  $R_s=R_l=10 K\Omega$

(d) Realice la función de transferencia en (a) con  $R_s=2R_l=10 K\Omega$

(e) Realice la función de transferencia en (a) con  $R_s=0.1R_l=5 K\Omega$

8-31. Repita el problema 8-30 para un filtro Butterworth de paso bajo de orden  $n$ , donde  $n=3,4,\dots,9$ .

- 8-32. (a) Encuentre la función de transferencia de un filtro Chebyshev de paso bajo de segundo orden con un ancho de banda de ondulación de  $\omega_r=10^5$  rad./seg. y con  $A_{max}=0.1$  dB.  
 (b) Realice la función de transferencia en (a) con un  $R_s$  adecuado y un  $R_l=10$  K $\Omega$ .

- 8-33. (a) Encuentre la función de transferencia de un filtro Chebyshev de paso bajo de tercer orden con un ancho de banda de ondulación  $\omega_r=10^6$  rad./seg. y  $A_{max}=1$  dB.  
 (b) Realice la función de transferencia en (a) con un  $R_s$  adecuado y un  $R_l=50$   $\Omega$ .

**8-34. Supongamos que necesitamos un filtro de paso bajo para cumplir con los siguientes requisitos:**

- (i) La atenuación de la banda de paso es inferior a 0.1 dB para  $\omega \leq 5$  K rad./seg. y es inferior a 0.5 dB para  $\omega \leq 20$  K rad./seg.
- (ii) La pérdida de la banda suprimida es de al menos 50 dB para  $\omega \geq 100$  K rad./seg.
- (iii) La frecuencia de corte  $\omega_c=30$  K rad./seg. de 3 dB

- (a) Encuentre mínimo orden requerido de un filtro Butterworth para cumplir con los requisitos.
- (b) Encuentre la función de transferencia del filtro Butterworth deseado.
- (c) Realice el filtro Butterworth deseado con  $R_s=R_l=75\Omega$ .
- (d) Encuentre mínimo orden de un filtro Chebyshev para cumplir con los requisitos.
- (e) Encuentre la función de transferencia del filtro Chebyshev deseado.
- (f) Realice el filtro Chebyshev deseado con  $R_s=50\Omega$ .

- 8-35. (a) Encuentre la función de transferencia de un filtro Bessel de paso bajo con  $\tau(0)=1$  seg. y una característica de fase lineal con menos del 5% de error para  $\omega \leq 3$  rad./seg.  
 (b) Encuentre el retardo de grupo  $\tau(0)$  si una transformación

$$s \mapsto \frac{s}{10K}$$

se realiza sobre la función de transferencia obtenida en (a).

- (c) Encuentre una realización de circuito de un filtro de Bessel de paso bajo con  $\tau(0)$  dado por (b) y una característica de fase lineal con menos del 5% de error para  $\omega \leq 30$  Krad./seg., y con  $R_s=R_l=50\Omega$ .

- 8-36. (a) Encuentre la función de transferencia del orden mínimo de un filtro de Bessel de paso bajo para cumplir con los siguientes requisitos:

- (i)  $\tau(0)=1\mu\text{seg}$  .
- (ii)  $\tau(\omega)$  tiene menos del 1% de error para  $\omega \leq 10^6$  rad./seg .
- (b) Realice el filtro deseado.

8-37. Supongamos que necesitamos un filtro de retardo de grupo máximamente plano para cumplir con las siguientes especificaciones:

- (i)  $\tau(0)=20\mu\text{seg}.$
- (ii)  $\tau(\omega)$  tiene menos del 5% de error para  $\omega \leq 10^5 \text{ rad./seg.}$
- (iii) La frecuencia de corte de  $3\text{dB}$   $\omega \leq 2 \times 10^5 \text{ rad./seg.}$

- (a) Encuentre el pedido mínimo del filtro deseado.
- (b) Encuentre la función de transferencia del filtro deseado.
- (c) Realice el filtro deseado con  $R_s=R_l=50\Omega$ .

8-38. (a) Encuentre la función de transferencia de un filtro de paso de banda con una frecuencia central  $\omega_0=10^5 \text{ rad./seg.}$  y un ancho de banda  $B=10^4 \text{ rad./seg.}$ , obtenido mediante una transformación de paso bajo a paso de banda a partir de un filtro Butterworth de paso bajo normalizado de segundo orden.

- (b) Dibuje las características de magnitud del filtro en (a).
- (c) Realice el filtro en (a) con  $R_s=R_l=10K\Omega$ .

8-39. Repita el problema 8-38 para un filtro Butterworth de paso bajo normalizado de tercer orden.

8-40. (a) Encuentre la función de transferencia de un filtro de paso de banda con una frecuencia central  $\omega_0=10^5 \text{ rad./seg.}$ , un ancho de banda de ripple de  $10^4 \text{ rad./seg.}$  y  $A_{max}=0.1\text{dB}$ , obtenida mediante una transformación de paso bajo a paso de banda de un filtro Chebyshev de paso bajo normalizado de segundo orden.

- (b) Dibuje la característica de magnitud del filtro en (a).
- (c) Realice el filtro en (a) con un  $R_s$  adecuado y  $R_l=1K\Omega$ .

8-41. Repita el problema 8-40 para un filtro Chebyshev de paso bajo normalizado de tercer orden con  $A_{max}=1 \text{ dB}$ .

8-42. Se debe realizar un filtro de paso de banda Chebyshev con las siguientes especificaciones:

- (i) La banda de ondulación viene dada por

$$41.4 \text{ rad./seg.} \leq \omega \leq 241.4 \text{ rad./seg.}$$

- (ii)  $A_{max} = 1 \text{ dB}$ .

- (iii) La pérdida es de al menos  $20 \text{ dB}$  para  $\omega \geq 500 \text{ rad./seg.}$  y para  $\omega < 20 \text{ rad./seg.}$

- (a) Encuentre la frecuencia central  $\omega_0$  y el ancho de banda  $B$ .

- (b) Encuentre las especificaciones del prototipo de filtro de paso bajo normalizado correspondientes a las especificaciones de filtro de paso de banda anteriores.

- (c) Encuentre el orden más bajo  $n$  para cumplir con las especificaciones en (b).

- (d) Encuentre una realización de circuito del prototipo de paso bajo deseado con  $R_s = 1\Omega$  y  $R_L = 1\Omega$  o  $0.25\Omega$ .

- (e) Encuentre una realización de circuito del filtro de paso de banda deseado con  $R_s = 1\Omega$  y  $R_L = 1\Omega$  o  $0.25\Omega$ .

- (f) Escale el nivel de impedancia del circuito en (e) tal que  $R_s = 600\Omega$ .

8-43. Supongamos que vamos a diseñar un filtro de paso de banda para cumplir con los siguientes requisitos:

- (i) La frecuencia central de la banda de paso está en  $\omega_0 = 1 \text{ M rad./seg.}$

- (ii) El ancho de banda de  $3 \text{ dB}$   $B = 100 \text{ K rad./seg.}$

- (iii) La atenuación de la banda de paso es inferior a  $0.1 \text{ dB}$  para  $0.95 \text{ M rad./seg.} \leq \omega \leq 1.05 \text{ M rad./seg.}$

- (iv) La atenuación de la banda suprimida es de al menos  $40 \text{ dB}$  para  $\omega \geq 1.25 \text{ M rad./seg.}$

- (a) Encuentre el pedido mínimo de un filtro de paso de banda Butterworth para cumplir con todos los requisitos anteriores.

- (b) Encuentre la función de transferencia del filtro Butterworth deseado.

- (c) Realice el filtro Butterworth deseado con  $B = 100 \text{ K rad./seg.}$

- (d) Encuentre el pedido mínimo de un filtro de paso de banda Chebyshev para cumplir con todos los requisitos anteriores.

- (e) Encuentre el pedido mínimo de un filtro Chebyshev para cumplir con los requisitos (i), (iii) y (iv).

- 8-44. Dadas las características de retardo de grupo de la Fig. P8-44, dibuje las características correspondientes cuando se produce una transformación de paso bajo a paso de banda de

$$s_{LP} \longrightarrow \frac{s_{BP}^2 + \omega_0^2}{Bs_{BP}}$$



Fig. P8-44

se aplica, donde  $s_{LP} = \sigma_{LP} + j\omega_{LP}$  y  $s_{BP} = \sigma_{BP} + j\omega_{BP}$  son, respectivamente, las frecuencias complejas asociadas con el filtro de paso bajo y el filtro de paso de banda resultante,  $\omega_0 = 10 \text{ K rad./seg.}$ , y

- (a)  $B = 0.05 \omega_0$
- (b)  $B = 0.5 \omega_0$

Consejo:

$$\tau_{BP}(\omega_{BP}) = \frac{d\phi_{BP}(\omega_{BP})}{d\omega_{BP}} = \frac{d\phi_{LP}(\omega_{LP})}{d\omega_{LP}} \Bigg|_{\omega_{LP} = (\omega_{BP}^2 - \omega_0^2)/B\omega_{BP}} \frac{d\omega_{LP}}{d\omega_{BP}}$$

- 8-45. (a) Encuentre la función de transferencia de un filtro de rechazo de banda con frecuencia central ( $\omega_0 = 10 \text{ K rad./seg.}$  y ancho de banda  $B = 4 \text{ K rad./seg.}$ , obtenido mediante una transformación de paso bajo a rechazo de banda de un filtro Butterworth de paso bajo normalizado de segundo orden.
- (b) Encuentre una realización de circuito del filtro deseado.
- (c) Verifique que el circuito obtenido en (b) realmente realizó la función de transferencia obtenida en (a).
- (d) Dibuje las características de magnitud del filtro deseado.

8-46. Supongamos que necesitamos un filtro de rechazo de banda o notch para cumplir con las siguientes especificaciones:

- (i) La frecuencia central de la banda de rechazo está en  $120\pi$  rad./seg. , y el ancho de banda de rechazo de 3 dB es  $20\pi$  rad./seg .
  - (ii) La pérdida mínima para  $118\pi \leq \omega \leq 122\pi$  rad./seg. es de 40 dB .
  - (iii) La degradación de la banda de paso es como máximo de 0.1 dB para  $\omega \geq 150\pi$  rad./seg. y para  $\omega \leq 40\pi$  rad./seg .
- (a) Encuentre el pedido mínimo de un **filtro Butterworth** para cumplir con todos los requisitos.
- (b) Encuentre la función de transferencia del filtro deseado.
- (c) Dibuje las características de magnitud del filtro deseado.
- (d) Realice el filtro deseado con  $R_s=R_l=75\Omega$  .

8-47. (a) Encuentre la función de transferencia de un filtro de rechazo de banda para cumplir con los siguientes requisitos:

- (i) Las bandas de paso son de 0 a 3400 Hz y de 4500 Hz a  $\infty$  , con ondulaciones de 0.1 dB .
  - (ii) La banda suprimida es de 3700 Hz a 4000 Hz , con una pérdida mínima de 30 dB .
- (b) Realice el filtro Chebyshev deseado.

8-48. (a) Encuentre la función de transferencia de un filtro de Bessel de paso alto de tercer orden con  $10\mu\text{seg}$ . Retraso de grupo.

- (b) Dibuje las características de retardo de grupo del filtro deseado.
- (c) Realice el filtro deseado con  $R_s=R_t=10K\Omega$  .

8-49. Supongamos que necesitamos un filtro de paso alto para cumplir con los siguientes requisitos:

- (i) La atenuación de la banda suprimida es de al menos 40 dB para  $|\omega| \leq 100\pi K$  rad./sec |
  - (ii) La pérdida de banda de paso es como máximo de 1 dB para  $\omega \geq 120\pi K$  rad./seg.
- (a) Encuentre el pedido mínimo de un filtro **Butterworth** para cumplir con los requisitos.
- (b) Encuentre una realización de circuito del filtro Butterworth deseado en (a) con  $R_s=R_e=50\Omega$  .
- (c) Encuentre el pedido mínimo de un filtro Chebyshev para cumplir con los requisitos.
- (d) Realice el filtro Chebyshev deseado obtenido en (c) con un  $R_s$  adecuado y  $R_l=50\Omega$  .

8-50. Escribe un programa de computadora:

- (a) para generar la función de transferencia,
- (b) para ubicar los polos, y
- (c) para producir una realización de circuito con valores  $R_s$  y  $R_l$  prescritos de un filtro Butterworth de paso bajo de orden  $n$  con la frecuencia de corte  $\omega_c$  rad./seg. de 3 dB .

8-51. Escribe un programa de computadora:

- (a) para generar la función de transferencia,
- (b) para ubicar los polos, y
- (c) para producir una realización de circuito con un par de valores  $R_s$  y  $R_l$  prescritos pero compatibles de un filtro Chebyshev de paso bajo de orden  $n$  con ancho de banda de ondulación  $\omega_r$  rad./seg. y de rizado  $A_{max}$  dB .

8-52. Escriba un programa de computadora para generar la función de transferencia y ubicar los polos de un filtro de Bessel de paso bajo de orden  $\tau_0$  con retardo de grupo en  $\omega=0$  .

8-53. Escriba un programa de computadora para implementar:

- (a) la transformación de paso bajo a paso bajo,
- (b) la transformación de paso bajo a paso de banda,
- (c) la transformación de paso bajo a rechazo de banda,
- (d) la transformación de paso bajo a paso alto, y
- (e) la escala de impedancia prescrita en la Sec. 8-4 generando las funciones de transferencia deseadas y las realizaciones de circuitos a partir de sus contrapartes de paso bajo normalizadas.

## 9. Sensibilidad

Todos los procedimientos de síntesis discutidos hasta ahora requieren el uso de elementos ideales. Los elementos físicos nunca son ideales. Por ejemplo, cada resistor físico "lineal" tiene un  $i-v$  curva que nunca es exactamente lineal. Deben permitirse tolerancias. Además, las características de un elemento físico dependen de factores ambientales como la temperatura ambiente, la intensidad de la luz, etc. Por lo tanto, es necesario estudiar el efecto de los elementos no ideales utilizados en la implementación del hardware sobre las cantidades de salida deseadas, como las funciones de transferencia, , frecuencias centrales, anchos de banda, ubicaciones de polos y cero, etc.

La sensibilidad es una medida del efecto sobre el rendimiento de las cantidades de salida<sup>109</sup> debido a variaciones de los parámetros del circuito, tales como valores de resistencia, valores de inductor, valores de condensador, valores  $\beta$  de un transistor, ganancia de bucle abierto finito de un amplificador operacional y no idealidad de un giratorio. Ciertas configuraciones de circuitos son extremadamente sensibles y pueden exhibir severas distorsiones de las respuestas de salida para pequeñas variaciones de parámetros. Otras estructuras de circuito (por ejemplo, circuitos en escalera) son extremadamente insensibles y las respuestas muy distorsionadas ocurrirán solo con errores de componentes grandes o cuando los elementos estén operando más allá de sus capacidades.

Básicamente, existen dos tipos de variaciones de parámetros de circuito. El primero y más frecuentemente considerado es el caso de la variación incremental, donde se supone que los cambios porcentuales en los valores de los parámetros son pequeños. El segundo tipo de variación se denomina gran variación de parámetros, donde los valores de los parámetros pueden cambiar drásticamente en comparación con sus valores nominales. El segundo caso es más difícil de trabajar, y en este capítulo consideramos solo el caso incremental.

---

<sup>109</sup> Algunas cantidades de salida son ubicaciones de polos y ceros, respuestas de fase y magnitud, funciones de transferencia, frecuencias centrales y anchos de banda, frecuencias de corte, frecuencias de polos y pares de polos.

## 9-1 Sensibilidades del Polo y del cero

Sea  $p(s)$  un polinomio de interés, donde  $p(s)$  puede ser el polinomio numerador o denominador de una función de transferencia, así como una función de magnitud, una función de fase, la parte real o la parte imaginaria de una función de transferencia, etc. Sea  $p(s)$  una raíz de  $p(s)$  con multiplicidad  $n$ . Entonces  $p(s)$  se puede escribir como

$$p(s) = (s - s_j)^n p_1(s) \quad (9-1)$$

donde  $p_1(s)$  representa los productos de los factores restantes. Un cambio incremental en los valores de los elementos de la red cambiará  $p(s)$  a un nuevo polinomio  $\hat{p}(s)$ , donde<sup>2</sup>

$$\hat{p}(s) \triangleq p(s) + \delta p(s) \quad (9-2)$$

y  $\delta p(s)$  representa el cambio de  $p(s)$  debido a los cambios en los valores de los parámetros del circuito. En consecuencia, la raíz  $s_j$  que nos interesa cambiará a una nueva posición  $\hat{s}_j$ . Denotemos el desplazamiento de la raíz de  $s_j$  por

$$\delta s_j \triangleq \hat{s}_j - s_j \quad (9-3)$$

### 9-1-1. Técnicas de computación

Para encontrar  $\delta s_j$  primero podemos calcular  $\hat{s}_j$  resolviendo la ecuación

$$\hat{p}(s) = 0 \quad (9-4)$$

y luego aplicar (9-3). Sin embargo, resolver (9-4) es en general una tarea muy difícil. En esta sección, presentamos otras técnicas para calcular  $\delta s_j$  aproximadamente.

Por (9-1), en la vecindad de  $s = s_j$ ,  $1/p(s)$  es aproximadamente igual a<sup>110</sup>

$$\frac{1}{p(s)} \approx \frac{L_n}{(s - s_j)^n} \quad (9-5)$$

donde

$$L_n = \left. \frac{(s - s_j)^n}{p(s)} \right|_{s=s_j} = \text{una constante} \quad (9-6)$$

se llama la constante de Laurent de  $p(s)$  en  $s_j$ .<sup>111</sup> Si todos los cambios en los parámetros del circuito son realmente pequeños, entonces  $\delta s_j$  el cambio en  $p(s)$  debería ser pequeño. Por lo tanto, es razonable esperar que  $s_j$ , el cambio en las raíces también será pequeño-  $\hat{s}_j$  estará en la vecindad de  $s_j$  donde (9-5) es válida Suponiendo que este es el caso, podemos evaluar (9-5) en  $s = \hat{s}_j$  como

$$\frac{1}{p(\hat{s}_j)} = \frac{L_n}{(\hat{s}_j - s_j)^n} = \frac{L_n}{(\delta s_j)^n} \quad (9-7)$$

Observe que (9-7) se puede reescribir como

$$\delta s_j \triangleq \hat{s}_j - s_j = [L_n p(\hat{s}_j)]^{1/n} \quad (9-8)$$

Como  $\hat{s}_j$  es raíz de  $p(s)$ , por (9-2), tenemos

<sup>110</sup> El lado derecho de (9-5) representa el término más significativo de una expansión en serie de Laurent de  $1/p(s)$ .

<sup>111</sup> Nótese que cuando  $s_j$  es una raíz simple de  $p(s)$ , la constante  $L_1$ , como se define en (9-6), también es el residuo de la función racional  $1/p(s)$  en el polo  $s = s_j$ .

$$\hat{p}(\hat{s}_j) = p(\hat{s}_j) + \delta p(\hat{s}_j) = 0$$

o

$$\hat{p}(\hat{s}_j) = p(\hat{s}_j) + \delta p(\hat{s}_j) = 0 \quad (9-9)$$

Una expansión en serie de Taylor de  $\delta p(\hat{s}_j)$  en  $s_j$  da

$$\begin{aligned} \delta p(\hat{s}_j) &= \delta p(s_j) + \frac{d\delta p(s)}{ds}\Big|_{s=s_j} \delta s_j + \dots \\ &\simeq \delta p(s_j) \end{aligned} \quad (9-10)$$

si  $\hat{s}_j$  es realmente pequeño. La ecuación (9-10) significa esencialmente que se ignoran todos los términos de variación de segundo orden. Sustituyendo (9-9) y (9-10) en (9-8), obtenemos

$$\delta s_j \triangleq \hat{s}_j - s_j \simeq [-L_n \delta p(s_j)]^{1/n} \quad (9-11)$$

Como resultado de pequeñas variaciones de parámetros, (9-11) implica que cada raíz de  $p(s)$  de multiplicidad  $n$  se convierte en  $n$  raíces simples situadas equidistantes y equiángulos entre sí en un círculo de radio  $|\delta s_j|$ , centrado en la raíz nominal  $s_j$ . Si  $n=1$ , entonces (9-11) simplemente da la dirección y la distancia de los cambios de raíz.

**Ejemplo 9-1** Considere el circuito de la figura 9-1. Si tanto C como L tienen una tolerancia del 10%, encuentre aproximadamente todas las posiciones posibles de los polos.

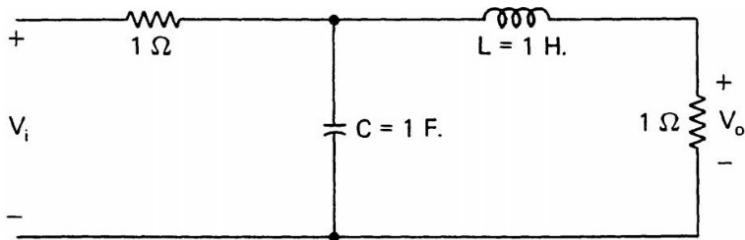


Fig. 9-1 Circuito para el ejemplo 9-1.

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{1}{s^2 LC + s(L + C) + 2} \quad (9-12)$$

**Solución:** La función de transferencia viene dada por Los polos del circuito son la solución de la ecuación

$$p(s) \triangleq s^2 LC + s(L + C) + 2 = 0 \quad (9-13)$$

Cuando  $L=1 \text{ Henry}$  y  $C=1 \text{ Farad}$ , las posiciones polares son

$$s_1 = -1 + j1 \quad y \quad s_2 = -1 - j1 \quad (9-14)$$

Como tanto L como C permiten un máximo de 10% de tolerancia, el polinomio resultante, después de variaciones de parámetros de  $\delta L$  y  $\delta C$ , está dado por

$$\hat{p}(s) = s^2(L + \delta L)(C + \delta C) + s(L + \delta L + C + \delta C) + 2 \quad (9-15)$$

Restando (9-13) de (9-15), obtenemos

$$\begin{aligned} \delta p(s) &= s^2(L\delta C + C\delta L + \delta L\delta C) + s(\delta L + \delta C) \\ &\simeq (\delta C + \delta L)s^2 + (\delta L + \delta C)s \\ &= (\delta C + \delta L)s(s + 1) \end{aligned} \quad (9-16)$$

Observe que hemos ignorado los términos variacionales de segundo orden en (9-16). La evaluación de  $\delta p(s)$  en las ubicaciones nominales de los polos conduce a

$$\begin{aligned}\delta p(s_1) &= (\delta C + \delta L)s_1(s_1 + 1) \\ &= -(\delta C + \delta L)(1 + j)\end{aligned}\quad (9-17a)$$

$$\begin{aligned}\delta p(s_2) &= (\delta C + \delta L)s_2(s_2 + 1) \\ &= -(\delta C + \delta L)(1 - j)\end{aligned}\quad (9-17b)$$

Para encontrar las posibles posiciones polares, necesitamos encontrar las constantes de Laurent de  $p(s)$  en  $s_1$  y  $s_2$ . Con  $n=1$ , (9-6) da

$$L_{s_1} \triangleq \frac{s - s_1}{p(s)} \Big|_{s=s_1} = \frac{1}{s - s_2} \Big|_{s=s_1} = \frac{1}{j2} \quad (9-18a)$$

$$L_{s_2} \triangleq \frac{s - s_2}{p(s)} \Big|_{s=s_2} = \frac{1}{s - s_1} \Big|_{s=s_2} = -\frac{1}{j2} \quad (9-18b)$$

Sustituyendo (9-17) y (9-18) en (9-11), obtenemos

$$\begin{aligned}\delta s_1 &= -L_{s_1} \delta p(s_1) \\ &= \frac{1+j}{j2}(\delta C + \delta L) = \frac{1-j}{2}(\delta C + \delta L)\end{aligned}\quad (9-19a)$$

$$\begin{aligned}\delta s_2 &= -L_{s_2} \delta p(s_2) \\ &= -\frac{1-j}{j2}(\delta C + \delta L) = \frac{1+j}{2}(\delta C + \delta L)\end{aligned}\quad (9-19b)$$

Por lo tanto, las ubicaciones de los polos después de las variaciones están en

$$s_1' = s_1 + \delta s_1 = s_1 + \left[ \frac{1-j}{2}(\delta C + \delta L) \right] \quad (9-20a)$$

$$s_2' = s_2 + \delta s_2 = s_2 + \left[ \frac{1+j}{2}(\delta C + \delta L) \right] \quad (9-20b)$$

donde las ubicaciones nominales de los polos  $s_1$  y  $s_2$  están dadas por (9-14). Para encontrar los límites aproximados de todas las posibles ubicaciones de los polos de (9-20), consideraremos cuatro casos.

- a.  $\delta L=0.1$  y  $\delta C=0.1$ . En este caso, (9-20) da

$$s_1^a = s_1 + 0.1 - j 0.1 = -0.9 + j 0.9 \quad (9-21a)$$

y

$$s_2^a = s_2 + 0.1 + j 0.1 = -0.9 - j 0.9 \quad (9-21b)$$

- b.  $\delta L=0.1$ , y  $\delta C=-0.1$ . En este caso, (9-17) dice que  $\delta p(s_1)=\delta p(s_2)=0$ . Por lo tanto,

$$s_1^b = s_1 = -1 + j 1 \quad y \quad s_2^b = s_2 = -1 - j 1 \quad (9-22)$$

- c.  $\delta L=-0.1$  y  $\delta C=-0.1$ . El resultado de este caso también está dado por (9-22).

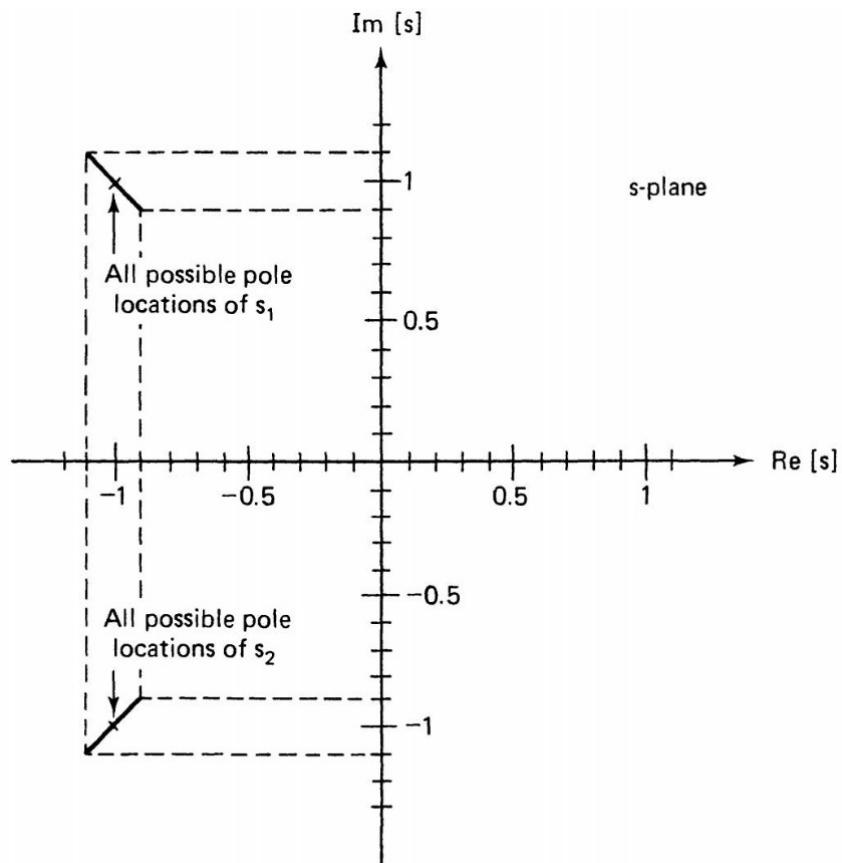
- d.  $\delta L=-0.1$  y  $\delta C=-0.1$ . En este caso, tenemos

$$s_1^d = s_1 - 0.1 + j 0.1 = -1.1 + j 1.1 \quad (9-23a)$$

y

$$s_2^d = s_1 - 0.1 - j 0.1 = -1.1 - j 1.1 \quad (9-23b)$$

Con base en (9-20), la Fig. 9-2 muestra aproximadamente todas las posibles ubicaciones de los polos del circuito de la Fig. 9-1, como se ilustra en (9-21) a (9-23).



**Fig. 9-2** Pole locations of the circuit in Fig. 9-1.

**Ejemplo 9-2** Para el circuito de la Fig. 9-3, donde  $k=2$ , encuentre los desplazamientos de los polos si  $C_1$  cambiara en un 2% a 1,02 faradios.

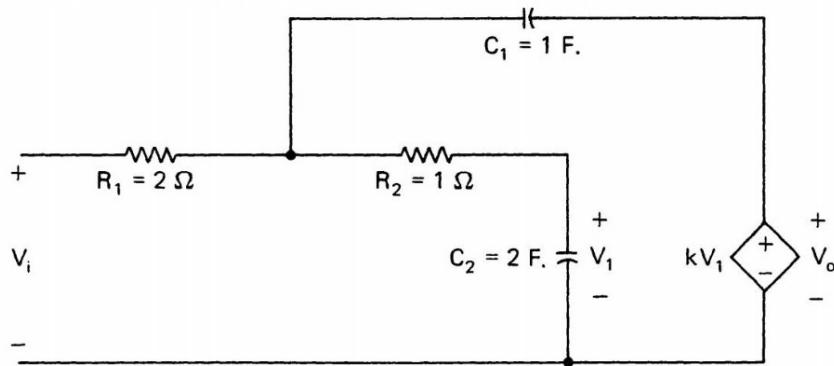


Fig. 9-3 Circuit for Examples 9-2 and 9-3.

**Solución:** La función de transferencia del circuito de la figura 9-3 está dada por

$$H(s) \triangleq \frac{V_o}{V_i} = \frac{k}{C_1 C_2 R_1 R_2 s^2 + (C_1 R_1 + C_2 R_2 + R_1 C_2 - k C_1 R_1)s + 1} \quad (9-24)$$

Con todos los parámetros del circuito excepto  $C_1$  en valores nominales, (9-24) se reduce a

$$H(s) = \frac{1}{2C_1 s^2 + (3 - C_1)s + 0.5}$$

El polinomio denominador  $p(s)$  viene dado por

$$p(s) \triangleq 2C_1 s^2 + (3 - C_1)s + 0.5 \quad (9-25)$$

Al valor nominal de  $C_1 = 1 \text{ Farad}$ , tenemos

$$p(s) = 2s^2 + 2s + 0.5 \quad (9-26)$$

y los polos están en

$$s_1 = s_2 = -0.5 \quad (9-27)$$

Es decir,  $s = -0.5$  es un polo con multiplicidad 2. Cuando  $C_1$  se convierte en 1,02 Faradios, el polinomio del denominador se convierte en

$$\hat{p}(s) = 2.04s^2 + 1.98s + 0.5 \quad (9-28)$$

Restando (9-26) de (9-28), obtenemos

$$\begin{aligned} \delta p(s) &= \hat{p}(s) - p(s) \\ &= 0.04s^2 - 0.02s \end{aligned} \quad (9-29)$$

De (9-6), la constante de Laurent viene dada por

$$L_2 = \left. \frac{(s + 0.5)^2}{p(s)} \right|_{s=-0.5} = 0.5 \quad (9-30)$$

Sustituyendo (9-29) y (9-30), las ubicaciones aproximadas de los nuevos polos en<sup>112</sup>

112 Por conveniencia, (9-31) en realidad representa dos ecuaciones con el primer subíndice tomando el signo superior y el segundo subíndice tomando el signo inferior. Por ejemplo, en este caso, (9-31) implica que  $\hat{s}_1 = -0.5 + j0.1$  y  $\hat{s}_2 = -0.5 - j0.1$ . Esta convención se utiliza a lo largo de este capítulo.

$$\begin{aligned}
 \hat{s}_{1,2} &= s_{1,2} + \delta s_{1,2} \\
 &= s_{1,2} + [-L_2 \delta p(s_{1,2})]^{1/2} \\
 &= -0.5 + [-0.5(0.02)]^{1/2} \\
 &= -0.5 \pm j0.1
 \end{aligned} \tag{9-31}$$

Las ubicaciones reales de los polos del circuito después de la variación de  $C_1$  pueden obtenerse resolviendo (9-28) y están dadas por

$$\begin{aligned}
 \tilde{s}_{1,2} &= \frac{-1.98 \pm \sqrt{(1.98)^2 - 4(2.04)(0.5)}}{2(2.04)} \\
 &= -0.49 \pm j0.10
 \end{aligned} \tag{9-32}$$

Comparando (9-31) y (9-32), vemos una excelente concordancia entre las ubicaciones aproximadas y exactas de los nuevos polos.

Como se ilustra en los ejemplos 9-1 y 9-2, observamos que las raíces de un polinomio cambiarán si los parámetros en el circuito cambian. Sea  $k$  un parámetro en el circuito sujeto a pequeñas variaciones, y  $p(s, k)$  un polinomio asociado con el circuito, donde escribimos el polinomio  $p$  como una función de  $k$  explícitamente para enfatizar que  $k$  es un parámetro variable. Entonces la sensibilidad *raíz de la raíz*  $s_j$  de  $p(s, k)$  con respecto a  $k$  se define como

$$\hat{S}_k^{s_j} \triangleq \frac{\delta s_j}{\delta k} \Big|_{k=k_0} \simeq k_0 \frac{\partial s_j}{\partial k} \Big|_{k=k_0} \tag{9-33a}$$

o

$$\delta s_j = \left[ \frac{\partial s_j}{\partial k} \Big|_{k=k_0} \right] \delta k = \hat{S}_k^{s_j} \frac{\delta k}{k_0} \tag{9-33b}$$

donde  $k_0$  es el valor del parámetro nominal. Por ejemplo, en el caso del Ejemplo 9-2,

$$\hat{S}_{C_1}^{s_1} = \frac{\delta s_1}{\delta C_1/C_1} = C_1 \frac{\delta s_1}{\delta C_1} = \frac{j0.1}{0.02} = j5 \tag{9-34a}$$

$$\hat{S}_{C_1}^{s_2} = C_1 \frac{\delta s_2}{\delta C_1} = \frac{-j0.1}{0.02} = -j5 \tag{9-34b}$$

Cuando  $p(s, k)$  es el polinomio denominador {o numerador} de una función de transferencia  $H(s)$ , entonces (9-33) define la sensibilidad del polo {o cero} de  $H(s)$ .

Observe que (9-33b) proporciona otra técnica para calcular los desplazamientos de raíz. Conceptualmente, la técnica de diferenciación de (9-33b) representa un método más simple que el utilizado en los ejemplos 9-1 y 9-2. El problema aquí es encontrar la relación funcional entre la raíz  $s_j$  y el parámetro  $k$  como se indica en (9-35). En un circuito grande, esta es una tarea muy difícil. Además, si se emplea una computadora digital para realizar el análisis de sensibilidad, entonces el término derivado de (9-33b) también presenta algunos problemas numéricos. Finalmente, si  $s_j$  es una raíz con multiplicidad múltiple, la técnica de diferenciación en (9-33b) puede implicar algunas dificultades matemáticas. Debido a que la ubicación de la raíz  $s_j$  de  $p(s, k)$  depende del valor de  $k$ , denotamos esta relación escribiendo  $s_j$  como una función de  $k$

$$s_j = s_j(k) \tag{9-35}$$

Sea  $k_0$  el valor nominal de  $k$ . Entonces la ubicación nominal de la raíz está en

$$s_{j0} \triangleq s_j(k_0) \quad (9-36)$$

Si  $k$  ahora se cambia a  $k_0 + \delta k$ , entonces la nueva ubicación raíz se cambia a .

$$s_j = s_j(k_0 + \delta k) \quad (9-37)$$

Una expansión en serie de Taylor de (9-37) produce

$$\hat{s}_j = s_j(k_0) + \left[ \frac{\partial s_j}{\partial k} \Big|_{k=k_0} \right] \delta k + \dots \quad (9-38)$$

Por lo tanto, la ubicación del polo se cambia por

$$\delta s_j = \hat{s}_j - s_j(k_0) = \left[ \frac{\partial s_j}{\partial k} \Big|_{k=k_0} \right] \delta k + \dots \quad (9-39)$$

Comparando (9-33) y (9-39), vemos que la función de sensibilidad definida en (9-33) contiene solo el efecto variación al de primer orden y puede obtenerse mediante una expansión en serie de Taylor truncada después del término de primer orden .

**Ejemplo 9-3** Calcule las sensibilidades de los polos con respecto al parámetro  $k$  de ganancia VCVS para el circuito de la Fig. 9-3, donde el valor nominal de  $k$  es 4.

**Solución:** La función de transferencia del circuito de la figura 9-3 está dada por

$$H(s) = \frac{k}{4s^2 + (8 - 2k)s + 1} \quad (9-40)$$

Por lo tanto, las ubicaciones de los polos como funciones de  $k$  son

$$s_{1,2} = \frac{-(8 - 2k) \pm \sqrt{(8 - 2k)^2 - 16}}{8} \quad (9-41)$$

Por (9-33), las sensibilidades de los polos están dadas por

$$\begin{aligned} \hat{S}_k^{s_{1,2}} &= 4 \frac{\partial s_{1,2}}{\partial k} \Big|_{k=4} \\ &= \frac{4}{8} \left[ 2 \pm \frac{1}{2} \frac{2(8 - 2k)(-2)}{\sqrt{(8 - 2k)^2 - 16}} \right] \Big|_{k=4} = 1 \end{aligned} \quad (9-42)$$

Observe que las ubicaciones nominales de los polos están dadas por (9-41) con  $k = 4$  como

$$s_{1,2} = \pm j0.5 \quad (9-43)$$

De (9-33b), obtenemos los desplazamientos de los polos.

$$\delta s_{1,2} = \hat{S}_k^{s_{1,2}} \frac{\delta k}{k_0} = \frac{\delta k}{4} \quad (9-44)$$

Esto significa que si  $k$  aumenta en cualquier cantidad, digamos en un 1% a 4.04, entonces las nuevas ubicaciones de los polos

$$\begin{aligned}\hat{s}_{1,2} &= s_{1,2} + \delta s_{1,2} \\ &= \pm j0.5 + \frac{0.04}{4} \\ &= 0.01 \pm j0.5\end{aligned}$$

estará en el plano s de la derecha y, por lo tanto, el circuito se vuelve inestable.

En general, un circuito contiene muchos elementos no ideales, cada uno de los cuales está especificado por un cierto nivel de tolerancia. Sea  $k \triangleq [k_1, k_2, \dots, k_m]$  un vector de parámetros del circuito sujeto a una pequeña variación y sea  $p(s, k)$  un polinomio asociado con el circuito. Dejar

$$s_j = s_j(\mathbf{k}) = s_j(k_1, k_2, \dots, k_m) \quad (9-45)$$

representa la relación funcional entre la ubicación raíz  $s_j$  y el vector de parámetros  $k$ . Sea  $k_0$  el valor nominal del vector de parámetros y

$$s_{j0} \triangleq s_j(\mathbf{k}_0) \quad (9-46)$$

sea la raíz nominal. Suponga que el vector de parámetros cambia de  $k_0$  a  $k_0 + \delta k$ ; entonces la nueva ubicación de la raíz está en

$$\hat{s}_j \triangleq s_j(\mathbf{k}_0 + \delta \mathbf{k}) \quad (9-47)$$

Si  $|\delta k|$  es pequeño,<sup>113</sup> entonces la nueva ubicación de la raíz está dada aproximadamente por la expansión de Taylor de (9-47), con los términos de primer orden solo como

$$\begin{aligned}\hat{s}_j &\simeq s_j(\mathbf{k}_0) + \left[ \frac{\partial s_j}{\partial k_1} \Big|_{\mathbf{k}=\mathbf{k}_0} \right] \delta k_1 + \left[ \frac{\partial s_j}{\partial k_2} \Big|_{\mathbf{k}=\mathbf{k}_0} \right] \delta k_2 \\ &\quad + \dots + \left[ \frac{\partial s_j}{\partial k_m} \Big|_{\mathbf{k}=\mathbf{k}_0} \right] \delta k_m\end{aligned} \quad (9-48)$$

Por lo tanto, el desplazamiento de la raíz es

$$\begin{aligned}\delta s_j &\triangleq \hat{s}_j - s_j(\mathbf{k}_0) \\ &= \left[ k_1 \frac{\partial s_j}{\partial k_1} \frac{\delta k_1}{k_1} + k_2 \frac{\partial s_j}{\partial k_2} \frac{\delta k_2}{k_2} + \dots + k_m \frac{\partial s_j}{\partial k_m} \frac{\delta k_m}{k_m} \right] \Big|_{\mathbf{k}=\mathbf{k}_0} \\ &= \hat{S}_{k_1}^{s_j} \frac{\delta k_1}{k_1} + \hat{S}_{k_2}^{s_j} \frac{\delta k_2}{k_2} + \dots + \hat{S}_{k_m}^{s_j} \frac{\delta k_m}{k_m} \\ &= \sum_{i=1}^m \hat{S}_{k_i}^{s_j} \frac{\delta k_i}{k_i}\end{aligned} \quad (9-49)$$

donde  $\hat{S}_{k_i}^{s_j}$  es la raíz de sensibilidad de  $s_j$  con respecto al parámetro  $k_i$  como se define en (9-33). Tenga en cuenta que (9-49) se evalúa en los valores de parámetros nominales.

---

<sup>113</sup> La magnitud de un vector  $x = [x_1, x_2, \dots, x_m]$  se denota por  $|x|$  y esta dada por  $|x| = \left[ \sum_{i=1}^m x_i^2 \right]^{1/2}$

**Ejemplo 9-4** Para el circuito de la Fig. 9-4, encuentre los desplazamientos de los polos debido a pequeñas variaciones de todos los valores de los elementos del circuito.

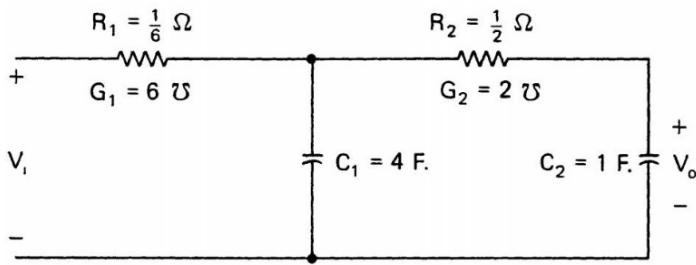


Fig. 9-4 Circuit for Examples 9-4 and 9-5.

**Solución:** La función de transferencia de relación de voltaje del circuito de la Fig. 9-4 viene dada por

$$H(s) = \frac{G_1 G_2}{C_1 C_2 s^2 + (C_1 G_2 + C_2 G_1 + C_2 G_2)s + G_1 G_2} \quad (9-50)$$

Sea  $p(s, k)$  el polinomio denominador de  $H(s)$ , donde  $k = [C_1, C_2, G_1, G_2]$  es el vector de parámetros. Luego

$$p(s, k) = C_1 C_2 s^2 + (C_1 G_2 + C_2 G_1 + C_2 G_2)s + G_1 G_2 \quad (9-51)$$

Por lo tanto, las ubicaciones de los polos están en

$$s_{1,2} = \frac{-(C_1 G_2 + C_2 G_1 + C_2 G_2) \pm \sqrt{(C_1 G_2 + C_2 G_1 + C_2 G_2)^2 - 4 C_1 C_2 G_1 G_2}}{2 C_1 C_2} \quad (9-52)$$

En los valores nominales, los polos son

$$s_1 = -2 + 1 = -1 \quad \text{and} \quad s_2 = -2 - 1 = -3 \quad (9-53)$$

Por (9-33), obtenemos los siguientes valores de sensibilidad

$$\hat{S}_{C_1}^{s_1} = \hat{S}_{C_2}^{s_1} = \frac{1}{2}, \quad \hat{S}_{G_1}^{s_1} = -\frac{3}{4}, \quad \text{and} \quad \hat{S}_{G_2}^{s_1} = -\frac{1}{4} \quad (9-54a)$$

$$\hat{S}_{C_1}^{s_2} = \hat{S}_{C_2}^{s_2} = \frac{3}{2}, \quad \hat{S}_{G_1}^{s_2} = -\frac{3}{4}, \quad \text{and} \quad \hat{S}_{G_2}^{s_2} = -\frac{9}{4} \quad (9-54b)$$

Con todos estos cálculos preliminares completados, los desplazamientos de los polos se pueden obtener mediante (9-49) como

$$\delta s_1 = \frac{1}{2} \frac{\delta C_1}{C_1} + \frac{1}{2} \frac{\delta C_2}{C_2} - \frac{3}{4} \frac{\delta G_1}{G_1} - \frac{1}{4} \frac{\delta G_2}{G_2} \quad (9-55a)$$

y

$$\delta s_2 = \frac{3}{2} \frac{\delta C_1}{C_1} + \frac{3}{2} \frac{\delta C_2}{C_2} - \frac{3}{4} \frac{\delta G_1}{G_1} - \frac{9}{4} \frac{\delta G_2}{G_2} \quad (9-55b)$$

Tenga en cuenta que si todas las capacitancias y conductancias cambian en el mismo porcentaje, entonces

$$\frac{\delta C_1}{C_1} = \frac{\delta C_2}{C_2} = \frac{\delta G_1}{G_1} = \frac{\delta G_2}{G_2} \quad (9-56)$$

y (9-55) implica que

$$\delta s_1 = \delta s_2 = 0 \quad (9-57)$$

### 9-1-2. Algunos resultados generales

Considere un circuito RLC activo que contenga posiblemente los cuatro tipos de fuentes controladas. Sea  $s_j$  una raíz {cero o polo} de un polinomio {el polinomio numerador o denominador de una función de transferencia} asociado con el circuito. Entonces  $s_j$  es una función de todos los parámetros del circuito y se denota por

$$s_j = s_j(R_i, L_i, C_i, \mu_i, \alpha_i, r_i, g_i) \quad (9-58)$$

donde  $R_i$ ,  $L_i$  y  $C_i$  denotan los elementos individuales R, L, C, y donde  $\mu_i$ ,  $\alpha_i$ ,  $r_i$  y  $g_i$  denotan respectivamente los coeficientes de cada VCVS, ICIS, ICVS y VCIS individuales.

Si elevamos el nivel de impedancia de cada elemento del circuito en la misma cantidad a, entonces la función de transferencia permanece sin cambios. En consecuencia, la ubicación raíz no cambiará. Esto significa que

$$s_j\left(aR_i, aL_i, \frac{C_i}{a}, \mu_i, \alpha_i, ar_i, \frac{g_i}{a}\right) = s_j(R_i, L_i, C_i, \mu_i, \alpha_i, r_i, g_i) \quad (9-59)$$

Derivando (9-59) con respecto a a, obtenemos

$$\begin{aligned} & \left( \sum_{\text{R}} R_i \frac{\partial s_j}{\partial R_i} + \sum_{\text{L}} L_i \frac{\partial s_j}{\partial L_i} - \sum_{\text{C}} \frac{C_i}{a^2} \frac{\partial s_j}{\partial C_i} + \sum_{\text{ICVS}} r_i \frac{\partial s_j}{\partial r_i} \right. \\ & \left. - \sum_{\text{VCIS}} \frac{g_i}{a^2} \frac{\partial s_j}{\partial g_i} \right) \Big|_{(aR_i, aL_i, C_i/a, \mu_i, \alpha_i, ar_i, g_i/a)} = 0 \end{aligned} \quad (9-60)$$

donde significa suma de todos los elementos de tipo 8. Haciendo  $a=1$ , y usando la notación de (9-33), (9-60) se convierte en

## 9-2 Sensibilidades de función de red

Como las funciones de red son razones de polinomios, los resultados obtenidos en la Sec. 9-1 se puede aplicar tanto al numerador como al denominador de una función de red. Con este comentario, no perderemos tiempo discutiendo las extensiones triviales de los resultados en la Sec. 9-1 para el caso de las funciones de red.

En esta sección, hacemos que  $F(s)$  denote la función de red de interés, donde  $F(s)$  puede ser una función de impedancia o admitancia DP, así como una función de transferencia de relación de voltaje. Sea  $k$  un parámetro de circuito sujeto a pequeñas variaciones. La función de sensibilidad  $S_F^k$  de la función de red  $F(s, k)$  debido a una variación incremental del parámetro  $k$  se define como

$$S_k^F \triangleq \frac{\delta F(s, k)}{F(s, k)} \simeq \frac{\partial F(s, k)}{\partial k} \frac{k}{F(s, k)} \quad (9-73)$$

Suponiendo que todos los cambios son pequeños, (9-73) dice que  $S_k^F$  es igual al cambio porcentual en  $F(s, k)$  dividido por el cambio porcentual en  $k$ . Por ejemplo, si  $S_k^F$  es 0,5, un cambio del 1 % en el parámetro  $k$  provocará un cambio del 0,5 % en  $F(s, k)$ . Por lo tanto, desde el punto de vista del diseño, es necesario mantener  $S_k^F$  lo más pequeño posible. Idealmente,  $S_k^F$  debería ser cero para cada parámetro de circuito  $k$ .

Con base en la definición de (9-73), podemos probar las siguientes identidades en funciones de sensibilidad:

$$\begin{aligned} S_x^{cx} &= 1, & S_x^{cx^n} &= n, & S_x^{y+c} &= \frac{y}{y+c} S_x^y, \\ S_x^{cy} &= S_x^y, & S_x^y &= S_z^y S_x^z, & S_x^{y^n} &= n S_x^y, \\ S_{1/x}^y &= -S_x^y, & S_x^{1/y} &= -S_x^y, & S_x^{yz} &= S_x^y - S_x^z \end{aligned} \quad (9-74)$$

donde  $c$  y  $n$  son constantes.

Como las funciones de red son funciones racionales,  $F(s, k)$  se puede escribir como

$$F(s, k) = \frac{G \prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)} \triangleq \frac{A(s, k)}{B(s, k)} = \frac{\sum_{i=0}^m a_i s^i}{\sum_{j=0}^n b_j s^j} \quad (9-75)$$

donde  $z_i$ ,  $p_j$ ,  $a_i$  y  $b_i$  son funciones del parámetro  $k$ , como  $C_1$  en el ejemplo 9-2. Tomando logaritmos de (9-75), tenemos

$$\ln F(s, k) = \ln G + \sum_{i=1}^m \ln (s - z_i) - \sum_{j=1}^n \ln (s - p_j) \quad (9-76)$$

Derivando ambos lados de (9-76) con respecto a  $k$  y luego multiplicando por  $k$ , obtenemos

$$S_k^F = S_k^G - \sum_{i=1}^m \frac{1}{s - z_i} \hat{S}_{z_i}^k + \sum_{j=1}^n \frac{1}{s - p_j} \hat{S}_{p_j}^k \quad (9-77)$$

La ecuación (9-77) dice que la contribución de la sensibilidad de un polo o cero a la sensibilidad general de la función de red es más significativa en la vecindad de ese polo o cero.

### 9-2-1. Algunos resultados generales

Consideré una red RLC activa que contenga posiblemente los cuatro tipos de fuentes controladas. Sea  $F(s)$  una función de red de interés. Entonces  $F(s)$  será una función de cada elemento de la red y, por lo tanto, se puede escribir como:

$$F(R_i, L_i, C_i, \mu_i, \alpha_i, r_i, g_i, s) \quad (9-78)$$

donde los símbolos  $R_i$ ,  $L_i$ ,  $C_i$ ,  $\mu_i$ ,  $\alpha_i$ ,  $r_i$  y  $g_i$  tienen el mismo significado que los del inciso 9-1-2. Si ahora escalamos el nivel de impedancia de la red en una cantidad  $a$ , entonces (9-78) da

$$F\left(aR_i, aL_i, \frac{C_i}{a}, \mu_i, \alpha_i, ar_i, \frac{g_i}{a}, s\right) = f(a)F(R_i, L_i, C_i, \mu_i, \alpha_i, r_i, g_i, s) \quad (9-79)$$

donde

$$\begin{aligned} f(a) &= \text{a si } F(s) \text{ es una función de impedancia DP} \\ &= 1/a \text{ if } F(s) \text{ es una función de admitancia DP} \\ &= 1 \text{ if } F(s) \text{ es una función de transferencia de relación de voltaje} \end{aligned} \quad (9-80)$$

Derivando (9-79) con respecto a  $a$ , obtenemos

$$\begin{aligned} &\left( \sum_{\mathfrak{R}} R_i \frac{\partial F}{\partial R_i} + \sum_{\mathfrak{L}} L_i \frac{\partial F}{\partial L_i} - \sum_{\mathfrak{C}} \frac{C_i}{a^2} \frac{\partial F}{\partial C_i} + \sum_{\text{VCVS}} r_i \frac{\partial F}{\partial r_i} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{\text{VCIS}} \frac{g_i}{a^2} \frac{\partial F}{\partial g_i} \right) \Big|_{(aR_i, aL_i, C_i/a, \mu_i, \alpha_i, ar_i, g_i/a, s)} \\ &= \frac{\partial f(a)}{\partial a} F(R_i, L_i, C_i, \mu_i, \alpha_i, r_i, g_i, s) \end{aligned} \quad (9-81)$$

Haciendo  $a = 1$ , dividiendo ambos lados de (9-81) por  $F$ , y usando (9-73), obtenemos

$$\sum_{\mathfrak{R}} S_{R_i}^F + \sum_{\mathfrak{L}} S_{L_i}^F - \sum_{\mathfrak{C}} S_{C_i}^F + \sum_{\text{VCVS}} S_{r_i}^F - \sum_{\text{VCIS}} S_{g_i}^F = \frac{\partial f(a)}{\partial a} \Big|_{a=1} \quad (9-82)$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(a)}{\partial a} \Big|_{a=1} &= 1 \text{ if } F \text{ is a DP impedance function} \\ &= -1 \text{ if } F \text{ is a DP admittance function} \\ &= 0 \text{ if } F \text{ is a voltage-ratio transfer function} \end{aligned} \quad (9-83)$$

Para un filtro activo RC con VCVS y amplificadores operacionales, (9-82) se reduce a

$$\sum_{\mathfrak{R}} S_{R_i}^F - \sum_{\mathfrak{C}} S_{C_i}^F = \frac{\partial f(a)}{\partial a} \Big|_{a=1} \quad (9-84)$$

Si además  $F(s)$  es una función de transferencia de relación de voltaje, entonces tenemos

$$\sum_{\mathfrak{R}} S_{R_i}^F = \sum_{\mathfrak{C}} S_{C_i}^F \quad (9-85)$$

La ecuación (9-85) dice que si todas las resistencias y todas las capacitancias cambian en el mismo valor porcentual absoluto pero con signos opuestos, entonces  $F$  no cambia. Esta es la razón por la que muchos filtros RC activos están construidos con materiales resistivos y capacitivos que tienen los mismos valores absolutos de coeficiente de temperatura pero con signos opuestos, lo que garantiza que las variaciones de temperatura no alteren el rendimiento del filtro.

A continuación, consideramos el efecto del escalado de frecuencia por un factor de escala  $a$ . Por el inciso 8-4-1, solo se ven afectados los inductores y capacitores. Por lo tanto tenemos

$$F(R_i, aL_i, aC_i, \mu_i, \alpha_i, r_i, g_i, s) = F(R_i, L_i, C_i, \mu_i, \alpha_i, r_i, g_i, as) \quad (9-86)$$

Derivando (9-86) con respecto a  $a$  lleva a

$$\left[ \sum_{\text{L}} L_i \frac{\partial F}{\partial L_i} + \sum_{\text{C}} C_i \frac{\partial F}{\partial C_i} \right] \Big|_{(R_i, aL_i, aC_i, \mu_i, \alpha_i, r_i, g_i, s)} = s \frac{\partial F}{\partial s} \Big|_{(R_i, L_i, C_i, \mu_i, \alpha_i, r_i, g_i, as)} \quad (9-87)$$

Haciendo  $a = 1$ , y dividiendo ambos lados de (9-87) por  $F$ , obtenemos

$$\sum_{\text{L}} S_{L_i}^F + \sum_{\text{C}} S_{C_i}^F = \frac{d[\ln F]}{d[\ln s]} \triangleq S_s^F \quad (9-88)$$

### 9-3 Sensibilidades de filtro de segundo orden

Para cerrar este capítulo, consideremos brevemente el caso de una sección de filtro de segundo orden, donde el polinomio denominador de una función de transferencia está dado por

$$B(s) = s^2 + b_1 s + b_0 \triangleq s^2 + \frac{\omega_0}{Q} s + \omega_0^2 \quad (9-98)$$

donde

$$\omega_0 \triangleq \sqrt{b_0} \quad (9-90)$$

se llama frecuencia polar y

$$Q \triangleq \frac{\sqrt{b_0}}{b_1} \quad (9-91)$$

se llama el par de polos de la sección de filtro de segundo orden. En el caso de un filtro de paso de banda,  $\omega_0$  es la frecuencia central donde la función de magnitud alcanza su punto máximo y Q es inversamente proporcional al ancho de banda del filtro. En secciones de filtro de segundo orden, particularmente en filtros activos, la (Q-sensibilidad y la  $\omega_0$ -sensibilidad, definidas respectivamente por

$$S_x^Q \triangleq \frac{\delta Q/Q}{\delta x/x} \simeq \frac{\partial[\ln Q]}{\partial[\ln x]} = \frac{x}{Q} \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (9-92)$$

y

$$S_x^{\omega_0} \triangleq \frac{\delta \omega_0/\omega_0}{\delta x/x} \simeq \frac{\partial[\ln \omega_0]}{\partial[\ln x]} = \frac{x}{\omega_0} \frac{\partial \omega_0}{\partial x} \quad (9-93)$$

donde  $x$  es un parámetro de circuito sujeto a una pequeña variación, son más importantes que la propia función de transferencia. Esto se debe a que  $\omega_0$  y  $Q$  juntos describen casi todas las propiedades cualitativas importantes de un filtro de segundo orden. Tenga en cuenta que (9-92) y (9-93) se evalúan en los valores de parámetros nominales.

**Ejemplo 9-5** Para el circuito de la Fig. 9-4, encuentre las sensibilidades  $\omega_0$  y  $Q$  con respecto a  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $R_1$  y  $R_2$ .

**Solución:** La función de transferencia del circuito de la figura 9-4 está dada por

$$H(s) = \frac{\frac{1}{C_1 C_2 R_1 R_2}}{s^2 + \left[ \frac{1}{C_2 R_2} + \frac{1}{C_1 R_1} + \frac{1}{C_1 R_2} \right] s + \frac{1}{C_1 C_2 R_1 R_2}} \quad (9-94)$$

Al identificar los términos correspondientes en (9-89) y (9-94), obtenemos

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{C_1 C_2 R_1 R_2}} = \sqrt{3} \quad (9-95)$$

y

$$Q = \frac{\frac{1}{\sqrt{C_1 C_2 R_1 R_2}}}{\frac{1}{C_2 R_2} + \frac{1}{C_1 R_1} + \frac{1}{C_1 R_2}} = \frac{\sqrt{C_1 C_2 R_1 R_2}}{C_1 R_1 + C_2 R_2 + C_2 R_1} = \frac{\sqrt{3}}{4} \quad (9-96)$$

Usando (9-93), encontramos

$$S_{C_1}^{\omega_0} = S_{C_2}^{\omega_0} = S_{R_1}^{\omega_0} = S_{R_2}^{\omega_0} = -\frac{1}{2} \quad (9-97)$$

$$S_{C_1}^Q = \frac{C_1}{Q} \left[ \frac{\sqrt{C_2 R_1 R_2}}{2\sqrt{C_1}(C_1 R_1 + C_2 R_2 + C_2 R_1)} - \frac{R_1 \sqrt{C_1 C_2 R_1 R_2}}{(C_1 R_1 + C_2 R_2 + C_2 R_1)^2} \right] = 0 \quad (9-98a)$$

$$S_{C_2}^Q = 0 \quad (9-98b)$$

$$S_{R_1}^Q = \frac{R_1}{Q} \left[ \frac{\sqrt{C_1 C_2 R_2}}{2\sqrt{R_1}(C_1 R_1 + C_2 R_2 + C_2 R_1)} - \frac{(C_1 + C_2) \sqrt{C_1 C_2 R_1 R_2}}{(C_1 R_1 + C_2 R_2 + C_2 R_1)^2} \right] = -\frac{1}{2} \quad (9-98c)$$

$$S_{R_2}^Q = \frac{1}{8} \quad (9-98d)$$

Observe que (9-98a) y (9-98b) implican que el par de polos del circuito de la Fig. 9-4 es independiente de los capacitores  $C_1$  y  $C_2$ .

De (9-89), las ubicaciones de los polos de una sección de filtro de segundo orden están en

$$\begin{aligned} s_{1,2} &= \frac{1}{2} \left[ -\frac{\omega_0}{Q} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2} \right] \\ &= -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2Q}\right)^2} \end{aligned} \quad (9-99)$$

Si  $Q > 0.5$ , los polos son complejos y (9-99) implica que para Q grande, las ubicaciones de los polos están cerca del eje imaginario. Esta observación tiene importantes consecuencias en términos prácticos. En los circuitos pasivos, el aumento de los valores de Q requiere que los elementos sean de mejor calidad: los inductores y los condensadores deben tener menos pérdidas. En circuitos activos, aumentar los valores de Q requiere más elementos activos en la realización para que la red resultante no sea demasiado sensible.

Recuerde que las secciones de segundo orden de un filtro Butterworth de n-ésimo orden tienen la forma de [ver (8-41)]:

$$B(s) = s^2 + (2 \sin \theta_k) s + 1 \quad (9-100a)$$

donde

$$\theta_k = \frac{(2k-1)\pi}{2n} \quad (9-100b)$$

Al identificar los términos correspondientes en (9-100) y (9-89), obtenemos

$$\omega_0 = 1 \quad (9-101a)$$

$$Q_k = \frac{1}{2 \sin \theta_k} \quad (9-101b)$$

donde  $Q_k$  es el par de polos de la sección de segundo orden. Para ser específicos, consideremos la primera sección de segundo orden, donde

$$Q_1 = \frac{1}{2 \sin \theta_1} = \frac{1}{2 \sin (\pi/2n)} \quad (9-102)$$

Para tener características de magnitud de corte nítidas, n es grande. Por lo tanto, por (9-102), Q es grande. En consecuencia, se requieren componentes de alta calidad para realizar la primera sección

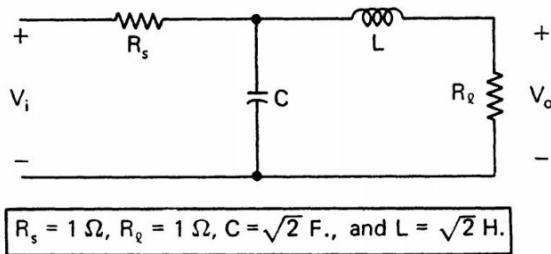
de segundo orden de un filtro Butterworth de alto orden. Las mismas implicaciones se aplican también a los filtros Chebyshev y Bessel. Discutimos las sensibilidades de  $\omega_0$  y Q con más detalle en el Capítulo 10.

### **Referencias y lecturas adicionales**

- [1] Kuh, E. S., and Rohrer, R. A. Theory of Linear Active Networks. San Francisco: Holden-Day, 1967.
- [2] Mitra, S. K. Analysis and Synthesis of Linear Active Networks. New York: John Wiley, 1968.
- [3] Tomovic, R., and Vukobratovic, M. General Sensitivity Theory. New York: American Elsevier, 1972.
- [4] Gorski-Popiel , J. "Classical Sensitivity-A Collection of Formulas." IEEE Trans. Circuit Theory CT-10 (1963): 300-302.
- [5] Blostein, M. L. "Some Bounds on Sensitivity in RLC Networks." Proc. 1st Allerton Conf. Circuit and System Theory (1963): 488-501.
- [6] Moschytz, G. S. Linear Integrated Networks: Fundamental. New York: Van Nostrand Reinhold, 1974.
- [7] Director, S. W., and Rohrer, R. A. "The Generalized Adjoint Network and Network Sensitivities." IEEE Trans. Circuit Theory CT-16 (1969):318-23.
- [8] Parker, S. R. "Sensitivity: Old Questions, Some New Answers." IEEE Trans. Circuit Theory CT-18 (1971): 27-35.
- [9] Branin, F. A., Jr., "Network Sensitivity and Noise Analysis Simplified." \* IEEE Trans. Circuit Theory CT-20 (1973): 285-88.

## Problemas

9-1. Considere el circuito que se muestra en la Fig. P9-1.



**Fig. P9-1**

Encuentre el cambio de ubicación de los polos debido a un cambio del 10% de:

- (a) El inductor  $L$ ,
- (b) El capacitor  $C$ ,
- (c) La resistencia  $R_s$
- (d) La resistencia  $R_o$ .
- (e) Si se permite que todos los elementos varíen simultáneamente dentro de  $\pm 10\%$  de sus valores nominales, encuentre las regiones que delimitan las ubicaciones de los polos perturbados.
- (f) Verifique (9-61) y (9-70) para cada uno de los dos polos del circuito.
- (g) Encuentre la función de transferencia  $H(s) = V_o/V_i$  del circuito.
- (h) Verifique (9-83) y (9-88) para  $H(s)$ .
- (i) Encuentre la frecuencia de polos y el par de polos del circuito.
- (j) Encuentre las sensibilidades de frecuencia de polos y pares de polos con respecto a  $L$  y  $C$ .

## 10. Filtros activos

Los filtros RC activos se utilizan ampliamente en la actualidad, particularmente en el área de sistemas telefónicos, sistemas de comunicación de datos, televisión, radio y sistemas de alta fidelidad. Se utilizan principalmente en aplicaciones de baja frecuencia donde los inductores no son adecuados debido a su tamaño voluminoso y baja calidad. Con los elementos activos actualmente disponibles, el rango de frecuencia útil de los filtros activos se puede empujar desde de hasta aproximadamente 100 KHz.

Cuando se introdujeron por primera vez los filtros activos, se utilizaron tubos de vacío como elementos activos. Entre los muchos inconvenientes asociados con los tubos de vacío, los altos requisitos de potencia y el costo hacen que esta clase de filtros activos sea extremadamente indeseable en comparación con los filtros LC pasivos. La llegada de los transistores eliminó el problema de la alta potencia. Sin embargo, la ganancia seguía siendo cara y los elementos activos se utilizaban con prudencia. A medida que los transistores se volvieron más económicos, los amplificadores de operación (dispositivos modulares que contienen transistores y resistencias) se convirtieron en los dispositivos activos dominantes. A principios de la década de 1960, los amplificadores operacionales aún eran muy caros. Los diseñadores de circuitos activos se vieron obligados a minimizar el número de componentes activos en su diseño. Hoy en día, los amplificadores operacionales cuestan muy poco y los precios siguen bajando. Como consecuencia, existe un uso cada vez más liberal de dispositivos activos en el diseño de circuitos. De hecho, la tendencia actual es utilizar más de un elemento activo en el diseño de un filtro activo a cambio de un mejor rendimiento funcional, como la sensibilidad, la estabilidad y las propiedades de ajuste fino.

Como en el caso del diseño de filtro pasivo, el diseño de filtro activo comienza con una aproximación de los requisitos de procesamiento de señal mediante una función de transferencia racional real.

$$H(s) = A(s)/B(s) = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0}{s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0} \quad (10-1)$$

Cuando  $m \leq n$ , (10-1) se puede expresar en forma de producto como

$$H(s) = H_1(s)H_2(s)\dots H_K(s) \quad (10-2)$$

donde  $K \leq n$  y, para cada  $j=1,2,\dots,K$ ,  $H_j(s)$  es la función de transferencia de una sección de segundo orden

$$H_j(s) = \frac{a_{j1}s + a_{j0}}{s + b_{j0}} \quad (10-3a)$$

o la función de transferencia de una sección de primer orden

$$H_j(s) = \frac{a_{j1}s + a_{j0}}{s + b_{j0}} \quad (10-3b)$$

La sección de filtro de segundo orden  $H_j(s)$  de (10-3a) generalmente se caracteriza por dos parámetros

$$Q_j \triangleq \frac{\sqrt{b_{j0}}}{b_{j1}} \quad \text{and} \quad \omega_0 \triangleq \sqrt{b_{j0}} \quad (10-4)$$

Donde  $\omega_0$  es la frecuencia de polos y  $Q_j$  es el par de polos Q de la j-ésima sección de filtro de segundo orden.

Básicamente, existen **dos enfoques** para el diseño de filtros activos: **el enfoque de realización directa**, que realiza la función de transferencia completa de (10-1) como un todo, y **el enfoque en cascada**, que realiza la función de transferencia completa de (10-1) al realizar varias secciones de filtro de primer y segundo orden de (10-3). En este capítulo, discutimos algunos métodos de

realización utilizando estos dos enfoques.

Antes de continuar, conviene señalar que los filtros activos discutidos en este capítulo son filtros activos RC. Son circuitos sin inductor que contienen resistencias, condensadores, amplificadores operacionales y sus productos derivados como VCVS, giradores, convertidores de impedancia generalizada, integradores y sumadores, como se describe en el Capítulo 2.

Para todos los circuitos activos RC con VCVS y/o amplificadores operacionales, el escalado de impedancia de un circuito con un factor de escala a implica:

1. Reemplazo de cada resistencia  $R\Omega$  por una resistencia  $\alpha R\Omega$
2. Reemplazo de cada capacitancia C Faradios (F.) por una capacitancia  $C/\alpha F$  .

Una escala de frecuencia con un factor de escala  $\beta$  implica reemplazar cada capacitancia CF. por una capacitancia  $C/\beta$  F. Tenga en cuenta que todos los amplificadores operacionales y VCVS permanecen sin cambios en las escalas de impedancia y frecuencia. Como se discutió en el Capítulo 8, las funciones de transferencia del circuito escalado de impedancia y el circuito original son idénticas, mientras que la función de transferencia del circuito escalado en frecuencia se puede obtener a partir de la del circuito original reemplazando cada  $s$  con  $s/\beta$  .

## 10-1 Enfoque de realización directa

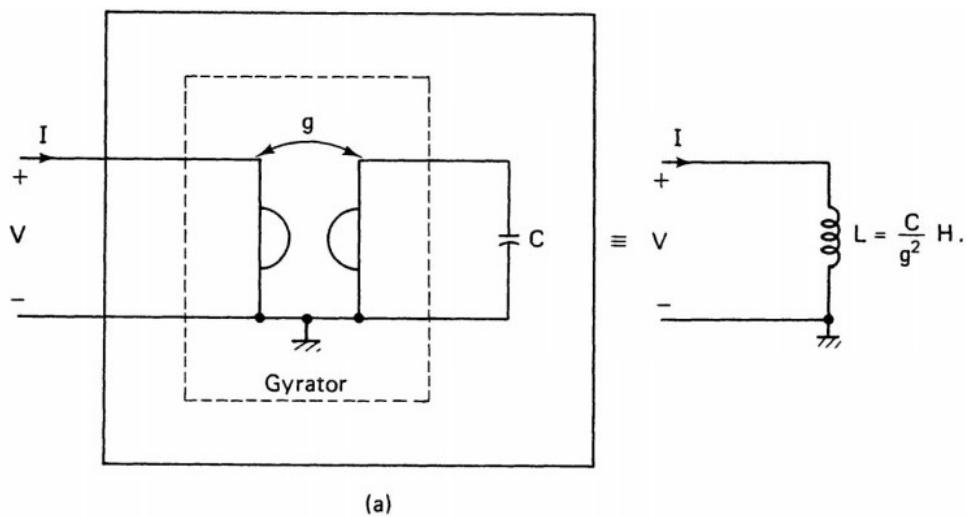
En el enfoque de realización directa, la función de transferencia de (10-1) se sintetiza como un todo en un paso. Hay muchas técnicas de síntesis que utilizan este enfoque. Discutiremos cuatro métodos representativos.

### 10-1-1. Realización directa a través de circuitos pasivos

En los capítulos 7 y 8, presentamos métodos para realizar funciones de transferencia con elementos RCL pasivos. Con la única excepción de la estructura de celosía en la Sec. 7-2, todas las realizaciones del circuito (incluidos los circuitos de Darlington) tienen una estructura de escalera. Se sabe que los circuitos en escalera tienen sensibilidades bajas; a menos que los errores de los componentes sean sustanciales, las distorsiones de salida son pequeñas. En esta subsección, presentamos dos métodos básicos para realizar filtros activos que preservan la propiedad de baja sensibilidad de los circuitos en escalera. Son el método de inductancia simulada y el método de escalado de frecuencia variable. Estos métodos se basan casi completamente en realizaciones pasivas. Ambos requieren que la función de transferencia en consideración se realice primero mediante un circuito RLC pasivo, como se discutió en los Capítulos 7 y 8.

#### 10-1-1-1. Métodos de inductancia simulada.

Para eliminar los inductores, el método de inductancia simulada simplemente reemplaza cada inductor en la realización del circuito pasivo por un inductor sintético como la combinación de girocapacitor de la Fig. 10-1 (a) o el circuito convertidor de impedancia generalizada con una terminación de resistencia como se muestra en la Fig. 10-1 (b).<sup>114</sup> El resultado es un circuito de filtro activo con una estructura de escalera, que conserva las sensibilidades estructurales bajas del circuito de escalera pasivo.



**Fig. 10-1** Two synthetic grounded inductors.

<sup>114</sup> Para inductores flotantes, consulte la figura 2-11.

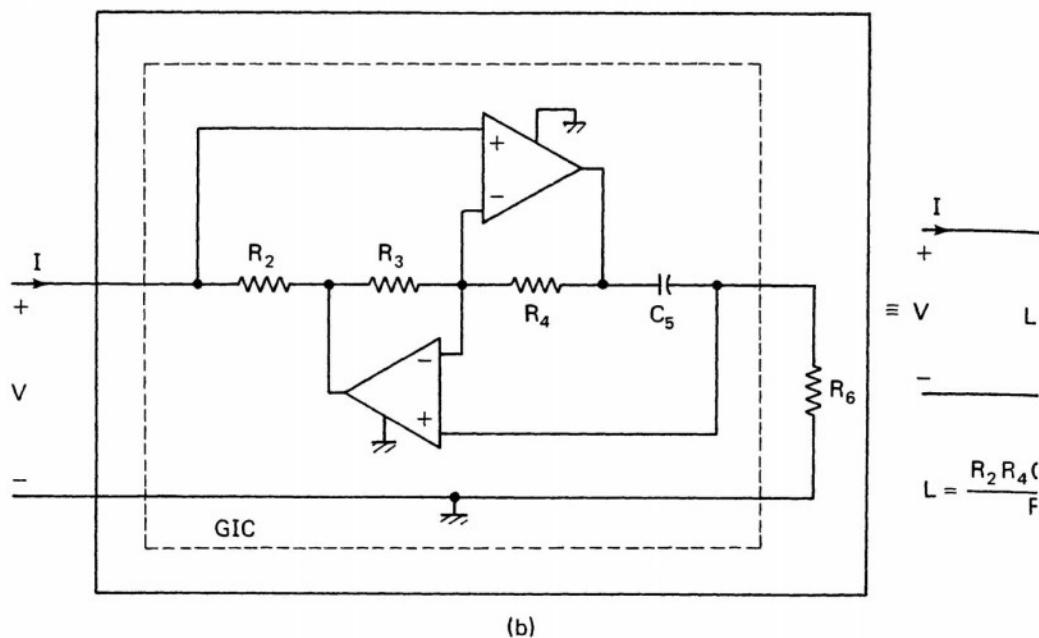


Fig. 10-1 (Continued)

En la práctica, el método de inductancia simulada es aplicable solo al circuito donde todos los inductores están conectados a tierra. La razón es que la tecnología actual puede proporcionarnos un inductor sintético conectado a tierra razonablemente bueno, pero la simulación del inductor flotante sigue siendo un problema. Todavía no tenemos un método práctico (que no sea del tipo papel y lápiz) para realizar un inductor flotante con buen comportamiento de estabilidad y sensibilidad, especialmente en aplicaciones de alta Q.

**Ejemplo 10-1** Encuentre una realización de circuito de escalera activa de un filtro Butterworth de paso alto de quinto orden con la frecuencia de corte en 1 K rad./seg. y con terminación en resistencias  $R_s=1K\Omega$  y  $R_l=4K\Omega$ .

**Solución:** Con  $R_s=1\Omega$  y  $R_l=4\Omega$ , una realización de circuito de un filtro Butterworth de paso bajo normalizado de quinto orden basado en la figura 8-9(a) y las ecuaciones recursivas de (8-43) a (8-45) es se muestra en la Fig. 10-2(a). La transformación de elemento de paso bajo a paso alto de la tabla 8-5 con  $\omega_c=1K\text{rad./sec}$ . . Convierta el circuito de la Fig. 10-2(a) al que se muestra en la Fig. 10-2(b). La Fig. 10-2(c) se obtiene realizando un escalado de impedancia con un factor de escala de 1 K en el circuito de la figura 10-2(b). Claramente, el circuito de la figura 10-2(c) es un filtro pasivo que satisface las especificaciones prescritas. Observe que los valores de inductancia en la Fig. 10-2(c) son grandes. Esto es típico en operaciones de baja frecuencia. Para eliminar estos grandes inductores, podemos usar los circuitos de la Fig. 10-1. Con  $g=10^{-3}\text{Mhos}$ , en la Fig. 10-2(d) se muestra un filtro activo RC deseado con giradores. En la figura 10-2(e) se muestra otro filtro activo RC deseado con GIC, donde todos los GIC están idéntico  $R_2=R_3=R_4=1K\Omega$ , y  $C_5=1\mu\text{F}$  los valores de resistencia de terminación de R6 se muestran explícitamente.

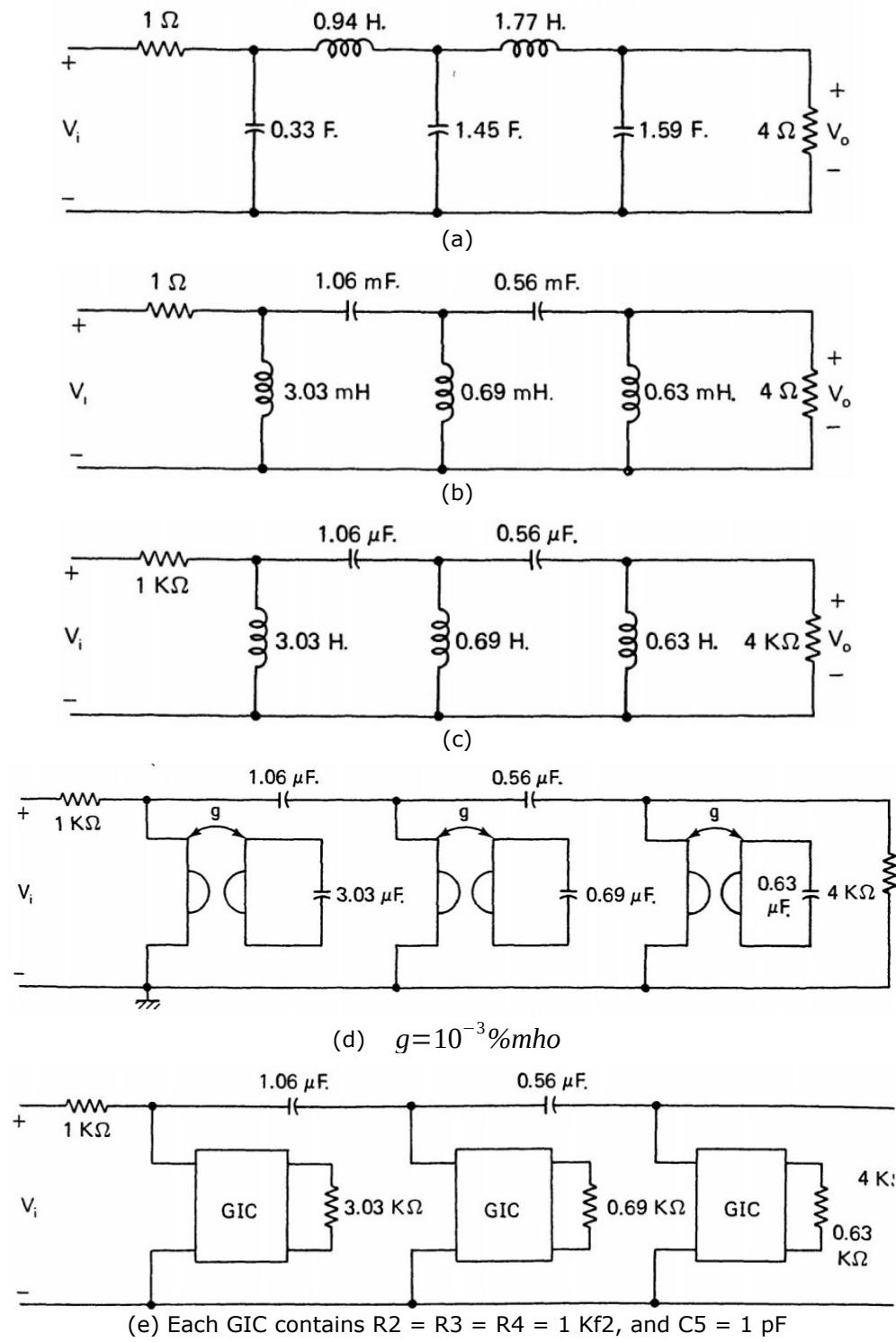


Fig. 10-2 Un procedimiento paso a paso para realizar un filtro activo Butterworth de paso alto de quinto orden.

### 10-1-1-2. Método de escalado de impedancia variable.

La idea básica detrás del método de escalado de impedancia variable es transformar un filtro RLC pasivo en un circuito de filtro activo que contiene resistencias, capacitores y resistencias negativas dependientes de la frecuencia (Frequency-dependent negative resistors, FDNR). La transformación se obtiene dividiendo la impedancia de cada elemento en la realización del circuito RLC pasivo de (10-1) por  $s$ . Los pasos involucrados en este método incluyen una realización pasiva de (10-1) y el reemplazo de los elementos del circuito en el pasivo realización según las reglas:

1. un inductor de  $L$  Henries se reemplaza por una resistencia de  $L \Omega$  ;
2. una resistencia de  $RQ$  se reemplaza por un capacitor con  $1/RF$  ; y
3. Se reemplaza un capacitor de  $CF$  por un FDNR de C Farad al cuadrado, o  $CF^{115}$ .

En la Figura 10-3 se muestra una realización de circuito de un FDNR a través de un GIC.<sup>116</sup>.

Debido a que una función de transferencia de relación de voltaje no tiene unidades, la escala de impedancia no afectará la función de transferencia de ninguna manera. Por tanto, el circuito activo resultante con FDNR y el circuito pasivo original tienen funciones de transferencia idénticas.

Tenga en cuenta que un FDNR como se muestra en la Fig. 10-3 es un componente conectado a tierra. Por lo tanto, este método es aplicable solo a aquellos circuitos pasivos en los que todos los capacitores están conectados a tierra.

**Ejemplo 10-2** Encuentre una realización de circuito de escalera activa de un filtro Butterworth de paso bajo de quinto orden con la frecuencia de corte en 1 K rad./seg.

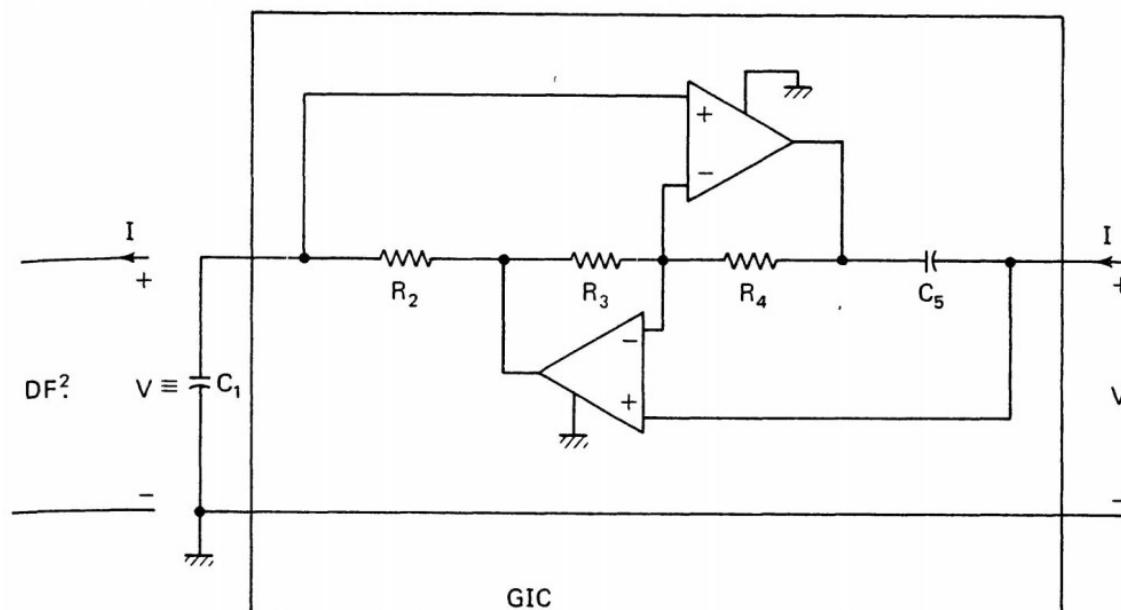


Fig. 10-3 Un FDNR con  $D=R_2R_4C_1C_5/R_3$

<sup>115</sup> Vea la subsección 2-2-2 para más detalles.

<sup>116</sup> Vea la subsección 2-2-2 para más detalles.

**Solución:** Una escala de frecuencia con  $\omega_c = 1 \text{ Krad./seg.}$  convierte el diseño normalizado de la figura 10-2(a) al circuito de filtro pasivo que se muestra en la Fig. 10-4(a). Debido a que los inductores no están conectados a tierra, no es posible la aplicación práctica del método de inductancia simulada. Una alternativa es utilizar el método de escalado de impedancia variable. El circuito de filtro de escalera activo resultante se muestra en la Fig. 10-4(b). Se utiliza una escala de impedancia para convertir los valores de los elementos de la Fig. 10-4(b) a números más razonables. La Fig. 10-4(c) muestra el resultado de un factor de escala de impedancia de 10<sup>6</sup> aplicado al circuito de la Fig. 10-4(b). Observe que las funciones de transferencia de todos los circuitos de la figura 10-4 son idénticas.

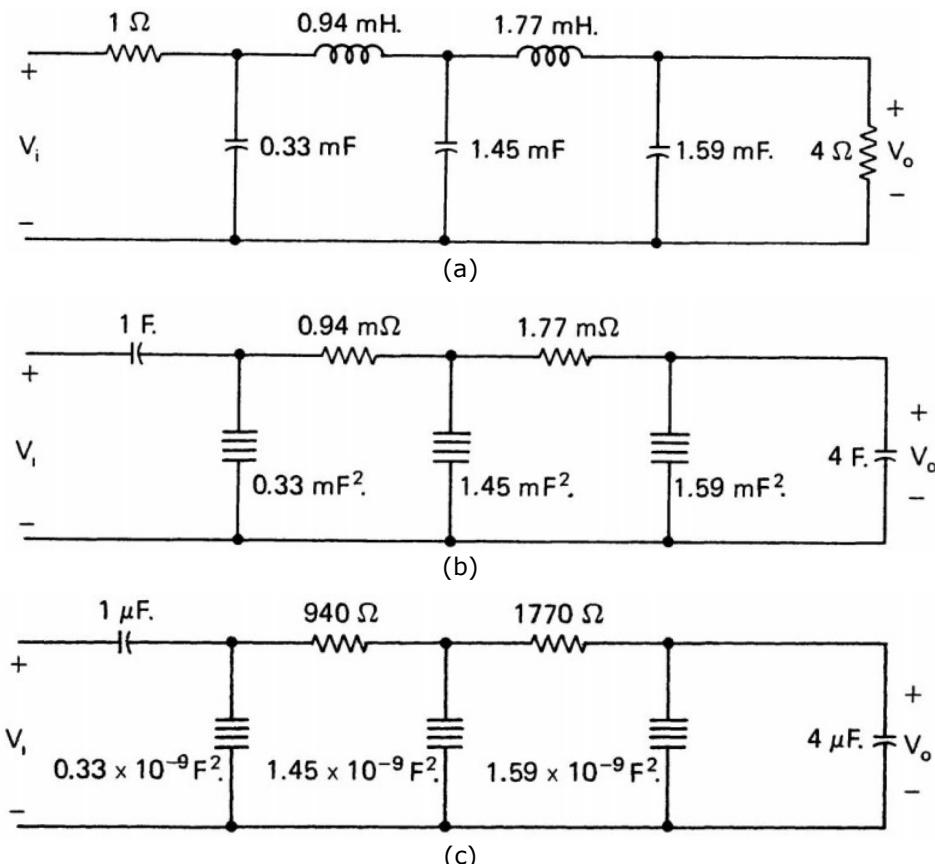


Fig. 10-4 Un procedimiento paso a paso para realizar un filtro activo Butterworth de paso bajo de quinto orden.

En muchas ocasiones, no es deseable tener una terminación de capacitor como la de la Figura 10-4(c). Para eliminar este inconveniente, consideremos el circuito de la Fig. 10-5(a), que es un dispositivo GIC de 2 puertos terminado por una impedancia  $Z_L$ . La función DP de impedancia está dada por

$$Z_{in} = \frac{Z_2 Z_4}{Z_3 Z_5} Z_L \quad (10-5)$$

Suponga que los elementos en el GIC son

$$Z_2 = R_2, \quad Z_3 = R_3, \quad Z_4 = \frac{1}{s C_4}, \quad \text{y} \quad Z_5 = R_5 \quad (10-6)$$

como se muestra en la Fig. 10-5(b); entonces (10-5) se convierte en

$$Z_{in} = \frac{k}{s} Z_L \quad (10-7a)$$

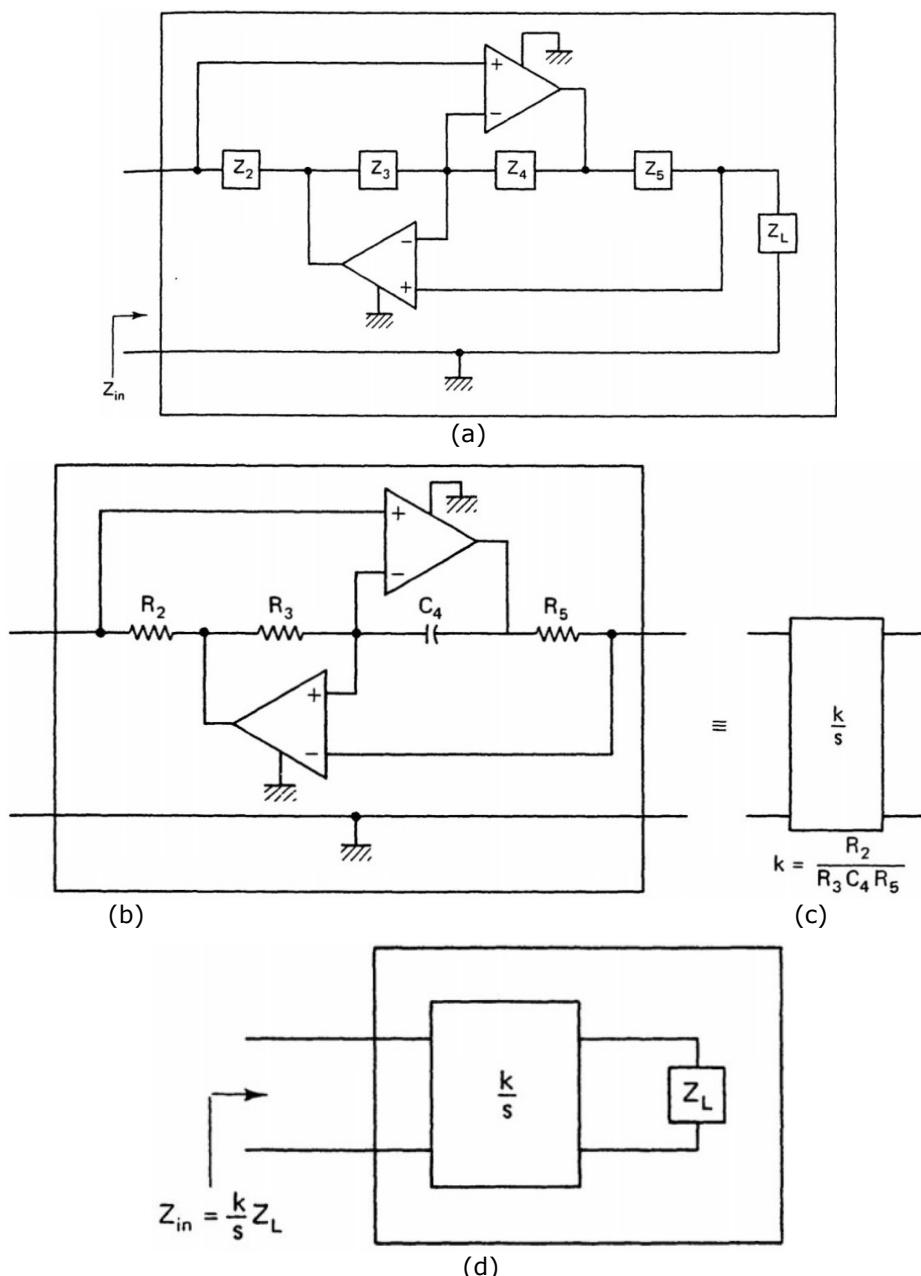
donde

$$k = \frac{R_2}{R_3 C_4 R_5} \quad (10-7b)$$

De (10-7), es claro que se puede realizar un capacitor terminando el GIC de dos puertos con una resistencia. Por tanto, el circuito de la Fig. 10-4(c) se convierte en el circuito de la Fig. 10-6,<sup>117</sup> con una terminación de resistencia, donde

$$\frac{R_2 R_L}{R_3 C_4 R_5} = \frac{1}{4 \times 10^{-6}}$$

El circuito GIC de dos puertos que se muestra en la Fig. 10-5(b) funciona como un dispositivo escalador de impedancia variable; convierte una resistencia en un condensador escalando la impedancia de la resistencia con una escala de impedancia de  $k/s$ . El símbolo de esta red de dos puertos con escala de impedancia se muestra en la Fig. 10-5(c), con su relación entrada-salida ilustrada en la Fig. 10-5(d).



<sup>117</sup> Técnicamente, el voltaje de salida en la Fig. 10-6 debe estar en el puerto de entrada del GIC. La razón por la que podemos etiquetar  $V_o$  a través de  $R_L$  es porque el voltaje a través del puerto de entrada y el puerto de salida de un GIC son iguales.

Fig. 10-5 Una red escaladora de impedancia versátil, (a) Un GIC de un dispositivo de dos puertos con una impedancia de terminación  $Z_L$ . (b) Un circuito para una red de escalado de impedancia  $k/s$ , (c) Símbolo para la red de escalado de impedancia  $k/s$ , (d) Función principal de una red de escalado de impedancia  $k/s$ .

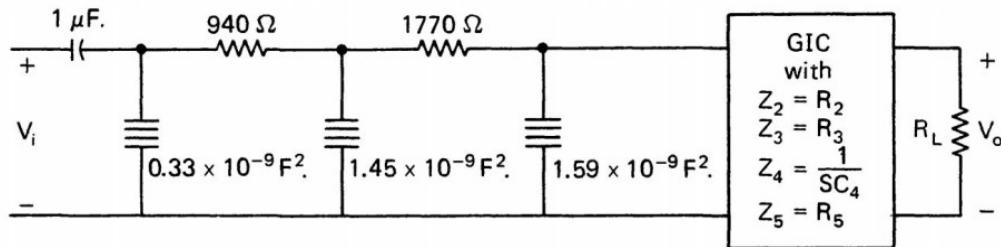


Fig. 10-6 Realización de un circuito activo de un filtro Butter-worth de paso bajo de quinto orden con una terminación de resistencia.

Otra red de escala de impedancia útil se muestra en la Fig. 10-7(a), donde el factor de escala es  $k s$ . Si terminamos el circuito de 2 puertos de la Fig. 10-7(a) con una impedancia  $Z_L$  como se ilustra en la Fig. 10-7(c), entonces la impedancia DP viene dada por

$$Z_{in} = s k Z_L \quad (10-8a)$$

donde

$$k = \frac{R_2 C_3 R_4}{R_5} \quad (10-8b)$$

Esta red recibe el símbolo que se muestra en la Fig. 10-7(b).<sup>118</sup>

Debido a los procedimientos de reemplazo en el lugar tanto del método de inductancia simulada como del método de escalado de impedancia variable, las configuraciones de circuito del filtro activo resultante y el filtro pasivo original son idénticas. Esto significa que si comenzamos con un circuito de escalera pasivo, terminaremos con un circuito de escalera activo, preservando así las propiedades de baja sensibilidad estructural de los diseños pasivos.

<sup>118</sup> Los circuitos de dispositivos de dos puertos mostrados en las Figs. 10-5 y 10-7 funcionan respectivamente como mutadores C-R y L-R—si cada dispositivo de dos puerto termina con una resistencia, entonces los dispositivos de un puerto resultantes en las Figs. 10-5 y 10-7 producen un capacitor y un inductor respectivamente.

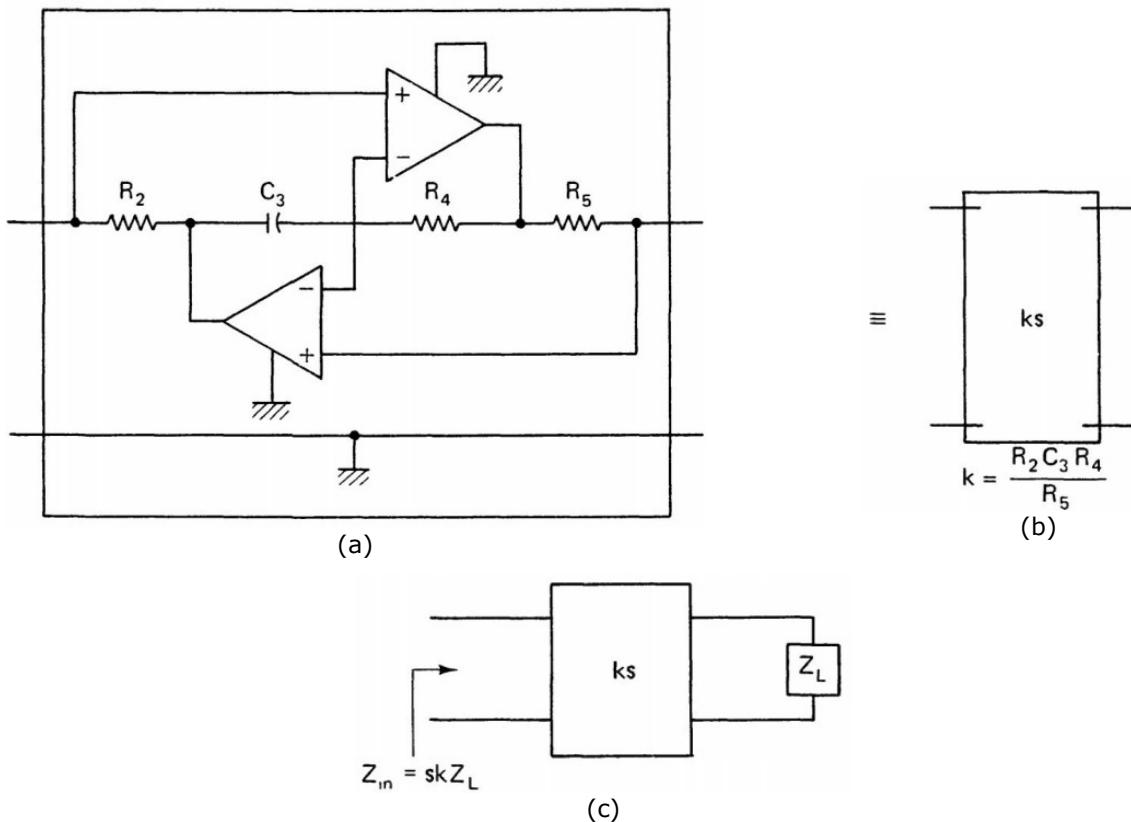
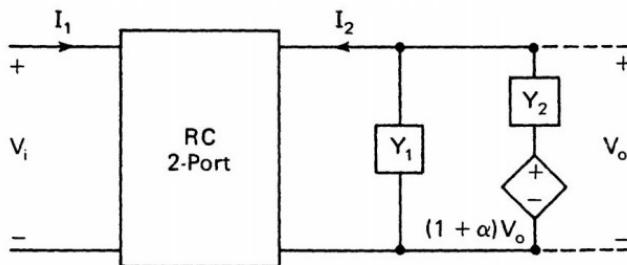


Fig. 10-7 Una red de escala de impedancia, (a) Una realización de circuito de una red de escala de impedancia con un factor de escala  $ks$  . (b) Símbolo para la red de escalado de impedancia  $ks$  , (c) La relación de entrada-salida de la red de escalado de impedancia  $ks$  .

### 10-1-2. Realización directa con redes RC de dos puertos—Método de Kuh

La mayoría de los métodos de realización directa comienzan con una estructura de circuito general que posee una función de transferencia versátil, que puede ajustarse a casi cualquier función de transferencia deseada. Las características de la rama o del puerto en la configuración del circuito son luego determinadas por la función de transferencia deseada. Por lo tanto, el problema de realizar una función de transferencia se reduce al de realizar funciones DP de dispositivos RC de un puerto y multipuertos RC. Debido a que no hemos discutido ningún método de realización para dispositivos RC de  $n$  puertos con  $n \geq 3$ , restringiremos nuestra atención a los casos de dispositivos de 1 y 2 puertos únicamente.<sup>119</sup>



**Fig. 10-8** Kuh's configuration for the direct realization of (10-1).

Considere la configuración del circuito que se muestra en la Figura 10-8, donde  $\alpha > 0$  y el dispositivo RC de dos puertos está representada por

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{21} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_i \\ V_o \end{bmatrix} \quad (10-9)$$

La función de transferencia de relación de tensión del circuito de la Figura 10-8 está dada por

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{-y_{21}}{(Y_1 - \alpha Y_2) + y_{22}} = \frac{-y_{21}}{(y_{22} + Y_1) - \alpha Y_2} \quad (10-10)$$

Para sintetizar una función de transferencia de relación de voltaje  $H(s)$  de (10-1), dividimos tanto el numerador  $A(s)$  como el denominador  $B(s)$  de (10-1) por un polinomio  $D(s)$  adecuadamente seleccionado que tienen raíces reales negativas simples (distintas de cero), ninguna de las cuales coincide con las raíces reales de  $B(s)$  como<sup>120</sup>

$$H(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{A(s)/D(s)}{B(s)/D(s)} \quad (10-11)$$

Tenga en cuenta que no hay cancelación de términos en el denominador de la expresión más a la derecha de (10-11). Suponga que  $A(s)$  está en la forma

$$A(s) = ks^m \quad (10-12)$$

donde  $0 \leq m \leq n$ , y  $n$  es el grado del polinomio  $B(s)$ . Identificando los términos correspondientes en (10-10) y (10-11), y usando (10-12), obtenemos

$$-y_{21} = \frac{ks^m}{D(s)} \quad (10-13a)$$

$$y_{22} + (Y_1 - \alpha Y_2) = \frac{B(s)}{D(s)} \quad (10-13b)$$

<sup>119</sup> Para aquellos interesados en los casos de dispositivos de 3 puertos, consulte las Referencias [13] y [14].

<sup>120</sup> Tenga en cuenta que  $B(s)$  puede tener raíces reales y/o complejas.

Para realizar simultáneamente  $y_{21}$  y  $y_{22}$  del dispositivo RC pasivo de dos puertos de la Fig. 10-8, debemos asegurarnos de que cada polo de  $y_{21}(s)$  sea también un polo de  $y_{22}(s)$ . Esta es la razón por la que se elige que  $D(s)$  no tenga ninguna raíz que coincida con las raíces reales de  $B(s)$ , para evitar la cancelación en la función racional

$$F_B(s) \triangleq \frac{B(s)}{D(s)} \quad (10-14)$$

Sea

$$D(s) = (s+s_1)(s+s_2)\dots(s+s_l) \quad (10-15)$$

donde

1.  $s_1, s_2, \dots, s_l$  son reales y  $0 < s_1 < s_2 < \dots < s_l$ ,
2.  $s_i$  no es raíz de  $B(s)$  para  $i=1, 2, \dots, l$ ; y
3. el entero  $l$  satisface la desigualdad  $l \geq n - 1$ .

Por economía y simplicidad, siempre elegiremos  $l$  para ser

$$l = n - 1 \quad (10-16)$$

Una expansión en fracción parcial de

$$\frac{B(s)}{sD(s)} = \frac{B(s)}{s(s+s_1)(s+s_2)\dots(s+s_l)} \quad (10-17)$$

dan

$$\frac{B(s)}{sD(s)} = \xi_\infty + \frac{\xi_0}{s} + \frac{\xi_1}{s+s_1} + \frac{\xi_2}{s+s_2} + \dots + \frac{\xi_l}{s+s_l} \quad (10-18)$$

Por lo tanto,

$$\frac{B(s)}{D(s)} = \xi_\infty s + \xi_0 + \frac{\xi_1 s}{s+s_1} + \frac{\xi_2 s}{s+s_2} + \dots + \frac{\xi_l s}{s+s_l} \quad (10-19)$$

En (10-18), las  $\xi_i s$  son los residuos de la función racional  $B(s)/[sD(s)]$  en los polos  $s = -s_i$ , donde  $i=0, 1, 2, \dots, l$  con  $s_0 = 0$ .<sup>121</sup> Estos residuos son reales porque los polos son reales y los coeficientes de la función racional  $B(s)/[sD(s)]$  son reales, pero no todos los  $\xi_i s$  son positivos, en general. Sea  $y_{22}(s)$  del dispositivo RC de 2 puertos de la Fig. 10-8 por

$$y_{22}(s) = k_\infty s + k_0 + \frac{k_1 s}{s+s_1} + \frac{k_2 s}{s+s_2} + \dots + \frac{k_l s}{s+s_l} \triangleq \frac{C(s)}{D(s)} \quad (10-20)$$

donde todos los  $k_i, i=Q, 1, 2, \dots, l$ , y  $\infty$  son números reales arbitrarios pero positivos. Entonces el denominador de  $y_{22}(s)$  es claramente  $D(s)$ , y  $y_{22}(s)$  es una función de admitancia RC DP. Sustituyendo (10-19) y (10-20) en (10-13b), obtenemos

<sup>121</sup> Debido a (10-16), tanto  $\xi_\infty$  como  $\xi_0$  son distintos de cero.

$$\begin{aligned}
\alpha Y_2 - Y_1 &= y_{22} - \frac{B(s)}{D(s)} \\
&= (k_\infty - \xi_\infty)s + (k_0 - \xi_0) + \frac{(k_1 - \xi_1)s}{s + s_1} \\
&\quad + \frac{(k_2 - \xi_2)s}{s + s_2} + \dots + \frac{(k_\ell - \xi_\ell)s}{s + s_\ell} \\
&\triangleq \beta_\infty s + \beta_0 + \frac{\beta_1 s}{s + s_1} + \frac{\beta_2 s}{s + s_2} + \dots + \frac{\beta_\ell s}{s + s_\ell}
\end{aligned} \tag{10-21}$$

donde

$$\beta_i \triangleq k_i - \xi_i \quad i=0,1,2,\dots,l, \text{ y } \infty \tag{10-22}$$

De (10-21), podemos asignar aquellos términos con  $\beta_i s$  positivos a  $\alpha Y_2$  y aquellos con  $\beta_i s$  negativos a  $Y_1$ .<sup>122</sup> Esto dará lugar a que  $Y_1$  e  $Y_2$  sean funciones de admitancia RC DP pasivas. Por lo tanto, todos los elementos de la figura 10-8 están determinados. En consecuencia, la realización de la función de transferencia de (10-1) bajo la restricción de (10-12) ahora se reduce a:

1. La realización simultánea de  $y_{21}$  e  $y_{22}$  de la red RC de 2 puertos, donde  $y_{21}(s)$  e  $y_{22}(s)$  están dadas por (10-13a) y (10-20), respectivamente. En (10-13a), si  $m=0$ , se debe usar la primera forma de Cauer; si  $m=n$ , se debe usar la segunda forma de Cauer; y si  $0 < m < n$ , se debe usar una combinación de la primera y la segunda forma de Cauer. Los procedimientos de realización aquí siguen los de los incisos 7-1-1 y 7-1-3.
2. Las realizaciones de dos funciones de admitancia RC DP. En estos casos, cualquiera de las dos formas de Foster parece ser más conveniente. Por supuesto, también se pueden utilizar las formas de Cauer.

Para obtener un circuito lo más simple posible, se acostumbra dejar

$$k_i = \xi_i \text{ siempre cuando } \xi_i > 0 \tag{10-23}$$

Por lo tanto, el fas correspondiente será cero. Si se adopta (10-23), entonces tenemos

$$\beta_i \geq 0 \quad i=0,1,2,\dots,l, \text{ y } \infty \tag{10-24}$$

Por lo tanto,  $Y_1 = 0$ , y todos los términos con  $\beta_i s$  distintos de cero se asignan a  $\alpha Y_2(s)$ .

---

<sup>122</sup> Claramente, podemos ignorar esos términos con cero  $\beta_i s$ .

**Ejemplo 10-3** Sea

$$H(s) = \frac{V_o}{V_t} = \frac{0.5}{s^2 + s + 1} \triangleq \frac{A(s)}{B(s)} \quad (10-25)$$

por la configuración de Kuh.

**Solución:** De (10-16), el polinomio elegido  $D(s)$  es un polinomio de primer grado. Elijamos

$$D(s) = s + 0.5 \quad (10-26)$$

Luego

$$-y_{21}(s) = \frac{A(s)}{D(s)} = \frac{0.5}{s + 0.5} \quad (10-27a)$$

y

$$\begin{aligned} y_{22} + Y_1 - \alpha Y_2 &= \frac{B(s)}{D(s)} = \frac{s^2 + s + 1}{s + 0.5} \\ &= s + 2 + \frac{-1.5s}{s + 0.5} \end{aligned} \quad (10-27b)$$

Sea<sup>123</sup>

$$y_{22}(s) = s + 2 + \frac{0.5s}{s + 0.5} \quad (10-28)$$

Luego

$$\alpha Y_2 - Y_1 = y_{22} - \left( s + 2 + \frac{-1.5s}{s + 0.5} \right) = \frac{2s}{s + 0.5} \quad (10-29)$$

Una solución simple de (10-29) viene dada por<sup>124</sup>

$$Y_1 = 0 \quad (10-30a)$$

$$\alpha = 1 \quad (10-30b)$$

$$Y_2 = \frac{2s}{s + 0.5} = \frac{1}{0.5 + (1/4s)} \quad (10-30c)$$

En este punto el problema de realizar (10-25) se reduce al problema de realizar la función de admitancia DP de  $Y_2(s)$  de (10-30c) y una realización simultánea de  $y_{21}(s)$  de (10-27a) y  $y_{22}(s)$  de (10-28). La Figura 10-9(a) muestra una realización de  $Y_2(s)$ . Como todos los ceros de transmisión de  $F(s) = -y_{21}(s)/y_{22}(s)$  están en  $s = \infty$ ,  $y_{22}(s)$  de (10-28) se realiza mediante la primera forma de Cauer. Esto requiere una expansión en fracción continua de  $y_{22}(s)$  en  $s = \infty$ :

$$\begin{aligned} y_{22}(s) &= s + 2 + \frac{0.5s}{s + 0.5} = \frac{s^2 + 3s + 1}{s + 0.5} \\ &= s + \frac{1}{0.4 + \frac{1}{25s + \frac{1}{0.1}}} \end{aligned} \quad (10-31)$$

123 Observe que diferentes elecciones de  $y_{22}(s)$  darán lugar a diferentes realizaciones de circuito de (10-25).

124 Observe que hay muchas soluciones para (10-29). Por ejemplo,  $Y_1 = 1$ ,  $\alpha = 1$  e  $Y_2(s) = 1 + 2s/(s + 0.5)$ , es otra solución.

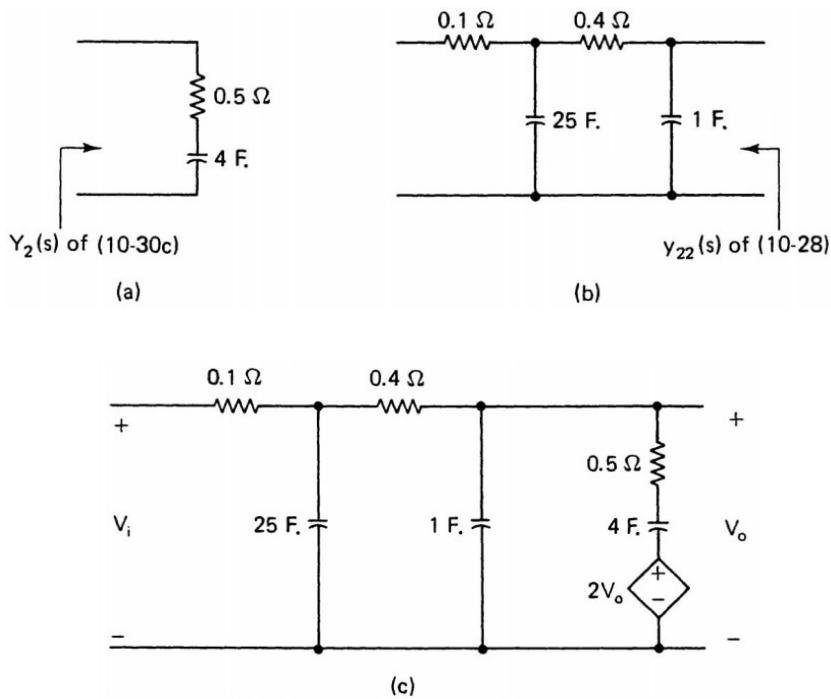


Fig. 10-9 Realización de un circuito de (10-25).

La Fig. 10-9(b) muestra una realización simultánea de  $y_{21}(s)$  (10-27a) y  $y_{22}(s)$  de (10-28). La realización de un circuito de (10-25) se muestra en la figura 10-9(c).

#### Ejemplo 10-4 Realice

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{s}{s^2 + s + 1} \triangleq \frac{A(s)}{B(s)} \quad (10-32)$$

por el método de Kuh.

**Solución:** Sea  $D(s) = s + 0.5$ .

Luego

$$-y_{21} = \frac{s}{s + 0.5} \quad (10-33a)$$

y

$$y_{22} + Y_1 - \alpha Y_2 = \frac{B(s)}{D(s)} = \frac{s^2 + s + 1}{s + 0.5} = s + 2 - \frac{1.5s}{s + 0.5} \quad (10-33b)$$

Como en el ejemplo 10-3, una descomposición simple de (10-33b) viene dada por

$$y_{22}(s) = s + 2 + \frac{0.5s}{s + 0.5} \quad (10-34a)$$

$$Y_1 = 0 \quad (10-34b)$$

$$\alpha = 1 \quad (10-34c)$$

$$Y_2 = \frac{1}{0.5 + \frac{1}{4s}} \quad (10-34d)$$

En este caso, hay ceros de transmisión tanto en  $s=0$  como en  $s=\infty$ . Por lo tanto, usamos una combinación de las formas de Cauer para realizar  $y_{21}(s)$  de (10-34a). Usando primero la primera forma de Cauer, obtenemos

$$y_{22}(s) = \frac{s^2 + 3s + 1}{s + 0.5} = s + y_R \quad (10-35a)$$

donde la función de admitancia restante

$$y_R(s) = \frac{1 + 2.5s}{0.5 + s} \quad (10-35b)$$

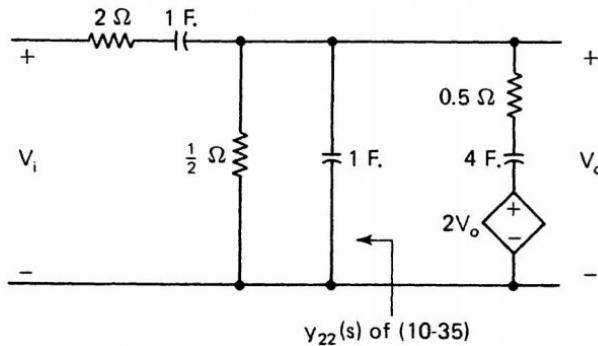


Fig. 10-10 Realización de un circuito de (10-32).

se realiza por la segunda forma de Cauer:

$$y_R(s) = 2 + \frac{1}{\frac{1}{s} + \frac{1}{0.5}} \quad (10-35c)$$

En la figura 10-10 se muestra una realización de circuito de (10-32) utilizando (10-35) y la figura 10-9(a).

De los ejemplos 10-3 y 10-4, observamos que incluso con la configuración del circuito fijada en la forma de la figura 10-8, hay muchas, de hecho, infinitas, realizaciones de circuito de la función de transferencia de (10-1), sujeto a la restricción de (10-12).

### 10-1-3. Realización directa con dispositivos RC de un puerto.

En esta sección, analizamos los métodos de realización directa de (10-1) con elementos activos y los dispositivos RC de un puerto RC. Todos estos métodos se basan en la propiedad de descomposición del Teorema 10-1, que lleva el nombre descomposición RC:-RC.

**TEOREMA 10-1** Sea  $F(s)=C(s)/D(s)$  una función racional con polos reales negativos simples. Sean  $n_C$  y  $n_D$  los grados de los polinomios  $C(s)$  y  $D(s)$ , respectivamente. Entonces  $F(s)$  se puede expresar como

$$1. \quad F(s) = \frac{C(s)}{D(s)} = Z_{RC}^{(i)}(s) - Z_{RC}^{(ii)}(s) \quad \text{si } n_C \leq n_D \quad (10-36)$$

$$2. \quad F(s) = \frac{C(s)}{D(s)} = Y_{RC}^{(1)}(s) - Y_{RC}^{(2)}(s) \quad \text{si } n_C \leq n_D + 1 \quad (10-37)$$

donde  $Z_{RC}^{(i)}$  y  $Z_{RC}^{(ii)}$  {  $Y_{RC}^{(1)}(s)$  y  $Y_{RC}^{(2)}(s)$  } son funciones DP RC de impedancia {admitancia}, realizables por elementos RC pasivos.

La descomposición del Teorema 10-1 se obtiene mediante un desarrollo en fracciones parciales de  $F(s)$ . Aquellos términos con coeficientes positivos se asignan a  $Z_{RC}^{(i)}(s)$  o  $Y_{RC}^{(1)}(s)$  y los restantes se asignan a  $Z_{RC}^{(ii)}(s)$  o  $Y_{RC}^{(2)}(s)$ .

**Ejemplo 10-5** Sea

$$Z(s) = \frac{s^2 - 2}{(s+1)(s+2)(s+3)} \quad (10-38)$$

Encuentre la descomposición RC:-RC de  $Z(s)$ .

**Solución:** La expansión en fracción parcial de  $Z(s)$  viene dada por

$$Z(s) = \frac{\zeta_1}{s+1} + \frac{\zeta_2}{s+2} + \frac{\zeta_3}{s+3} \quad (10-39)$$

donde

$$\zeta_i = \left. \frac{s^2 - 2}{(d/ds)[(s+1)(s+2)(s+3)]} \right|_{s=s_i} \quad (10-40)$$

es el residuo de  $Z(s)$  en el polo. Con  $s_1 = -1$ ,  $s_2 = -2$  y  $s_3 = -3$ ; obtenemos

$$Z(s) = \frac{-1/2}{s+1} + \frac{-2}{s+2} + \frac{7/2}{s+3} \quad (10-41)$$

Por lo tanto,

$$Z_{RC}^{(i)}(s) = \frac{7/2}{s+3} \quad (10-42a)$$

$$Z_{RC}^{(ii)}(s) = \frac{1/2}{s+1} + \frac{2}{s+2} \quad (10-42b)$$

**Ejemplo 10-6** Sea

$$Y(s) = \frac{s^2 - 2}{(s+1)(s+2)(s+3)} \quad (10-43)$$

Encuentre la descomposición RC:-RC de  $Y(s)$ .

**Solución:** La expansión en fracciones parciales de  $Y(s)/s$  da como resultado

$$\begin{aligned} \frac{Y(s)}{s} &= \frac{s^2 - 2}{s(s+1)(s+2)(s+3)} \\ &= \frac{-1/3}{s} + \frac{1/2}{s+1} + \frac{1}{s+2} + \frac{-7/6}{s+3} \end{aligned}$$

o

$$Y(s) = \frac{(1/2)s}{s+1} + \frac{s}{s+2} + -\frac{1}{3} + \frac{-(7/6)s}{s+3} \quad (10-44)$$

Por lo tanto,

$$Y_{RC}^{(1)}(s) = \frac{(1/2)s}{s+1} + \frac{s}{s+2} \quad (10-45a)$$

y

$$Y_{RC}^{(2)}(s) = \frac{1}{3} + \frac{(7/6)s}{s+3} \quad (10-45b)$$

Los procedimientos de realización que se discutirán en esta sección son casi idénticos entre sí. Cada uno comienza con una configuración de circuito que contiene dispositivos RC de un puerto, VCVS y/o amplificadores operacionales. La función de transferencia del circuito depende explícitamente de las funciones DP de admitancia de los dispositivos RC de un puerto. Además, tanto el numerador como el denominador de la función de transferencia del circuito se pueden expresar como una diferencia de dos (grupos de) funciones RC de admitancia.

Para realizar la función de transferencia prescrita  $H(s)$  de (10-1), escribimos

$$H(s) \quad (10-46)$$

donde  $D(s)$  es un polinomio arbitrario de grado y que tiene solo raíces reales negativas simples y donde

$$n_D \geq \max(m, n) - 1 \quad (10-47)$$

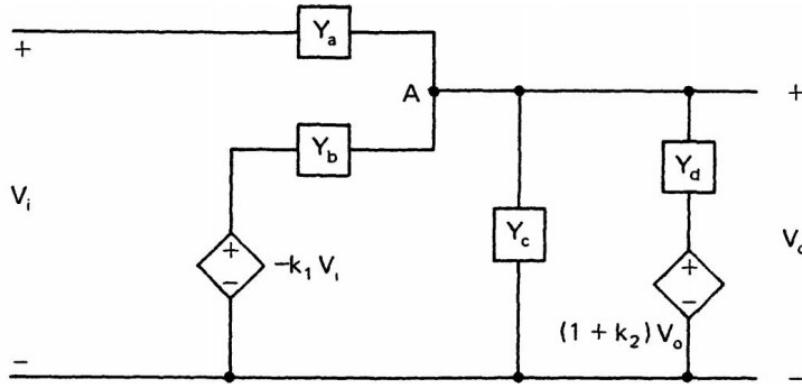
Recuerde que  $m$  y  $n$  son, respectivamente, los grados del polinomio numerador  $A(s)$  y el polinomio denominador  $B(s)$  en (10-1). En este caso, las raíces de  $D(s)$  no están restringidas siempre que sean simples, negativas y reales. En general, las raíces de  $D(s)$  se eligen para que coincidan con las raíces reales de  $A(s)$  y/o  $B(s)$  siempre que sea posible para simplificar la realización del circuito resultante. Por el teorema de descomposición RC:-RC, (10-46) se puede expresar como

$$H(s) = \frac{A(s)/D(s)}{B(s)/D(s)} = \frac{Y_{RC}^{(1)}(s) - Y_{RC}^{(2)}(s)}{Y_{RC}^{(3)}(s) - Y_{RC}^{(4)}(s)} \quad (10-48)$$

Al comparar los términos correspondientes entre la función de transferencia del circuito y la función de transferencia requerida de (10-48), se determinan las funciones DP de admitancia de los dispositivos RC de un puerto en cada configuración de circuito. Los problemas restantes son la realización de estos dispositivos de un puerto.

**10-1-3-1. Método Yanagisawa.**

Consideré la configuración del circuito dada en la Figura 10-11.



**Fig. 10-11** Yanagisawa's configuration.

Una ecuación de nodo en el nodo A da

$$Y_a(V_i - V_o) + Y_b(-k_1 V_i - V_o) - Y_c V_o + Y_d[(1 + k_2)V_o - V_o] = 0 \quad (10-49)$$

Después de algunas manipulaciones algebraicas simples, (10-49) produce la función de transferencia del circuito como

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{Y_a - k_1 Y_b}{Y_a + Y_b + Y_c - k_2 Y_d} \quad (10-50)$$

Identificando los términos correspondientes en (10-50) y (10-48), obtenemos las siguientes especificaciones sobre las ramas de admitancia en la Figura 10-11:

$$Y_a(s) = Y_{RC}^{(1)}(s) \quad (10-51a)$$

$$Y_a(s) = Y_{RC}^{(1)}(s) \quad (10-51b)$$

$$Y_c(s) = Y_{RC}^{(3)}(s) \quad (10-51c)$$

$$Y_d(s) = \frac{1}{k_2} \left[ Y_{RC}^{(1)}(s) + \frac{1}{k_1} Y_{RC}^{(2)}(s) + Y_{RC}^{(4)}(s) \right] \quad (10-51d)$$

[Tenga en cuenta que las ramas de admisión también se pueden identificar como:

$$Y_a(s) = Y_{RC}^{(2)}(s) \quad (10-51a')$$

$$Y_b(s) = \frac{1}{k_1} Y_{RC}^{(1)}(s) \quad (10-51b')$$

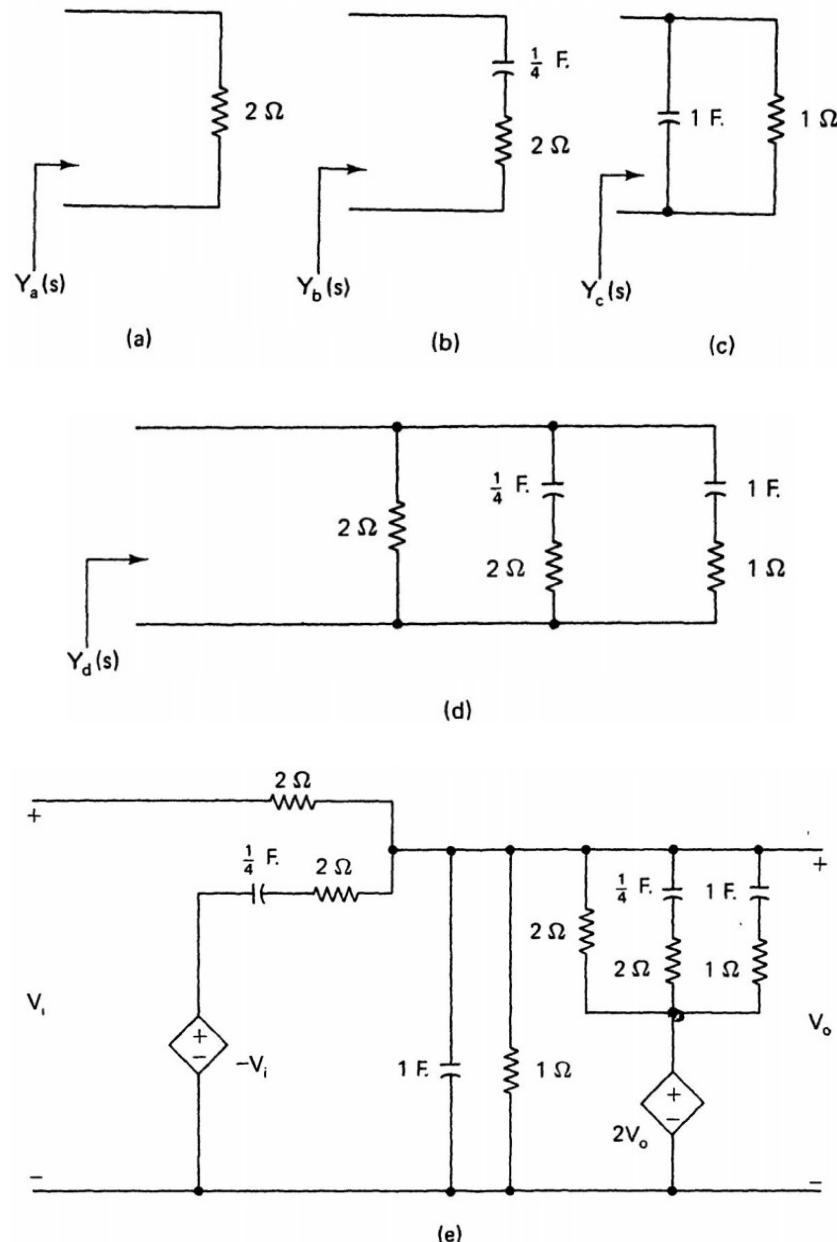
$$Y_c(s) = Y_{RC}^{(4)}(s) \quad (10-51c')$$

$$Y_d(s) = \frac{1}{k_2} \left[ Y_{RC}^{(2)}(s) + \frac{1}{k_1} Y_{RC}^{(1)}(s) + Y_{RC}^{(3)}(s) \right] \quad (10-51d')$$

De ahora en adelante, nos referiremos tanto a (10-51) como a (10-51') como (10-51).]

Por lo tanto, al realizar las funciones DP RC de admitancia de  $Y_a$ ,  $Y_b$ ,  $Y_c$ , como se especifica

en (10-51), el circuito de la Figura 10-11 realiza la función de transferencia general de (10-1).



**Fig. 10-12** A Yanagisawa realization of (10-52).

**Ejemplo 10-7** Realizar la función de transferencia de relación de voltaje

$$H(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s^2+s+1)} \triangleq \frac{A(s)}{B(s)} \quad (10-52)$$

por el método de Yanagisawa.

**Solución:** Por (10-47),  $D(s)$  es un polinomio de grado 2. Elijamos

$$D(s) = (s+1)(s+2) \quad (10-53)$$

Entonces tenemos

$$\begin{aligned} \frac{A(s)}{sD(s)} &= \frac{1}{s(s+2)} = \frac{1/2}{s} + \frac{-1/2}{s+2} \\ \frac{B(s)}{sD(s)} &= \frac{s^2+s+1}{s(s+1)} = 1 + \frac{1}{s(s+1)} = 1 + \frac{1}{s} + \frac{-1}{s+1} \\ \frac{A(s)}{D(s)} &= \frac{1}{2} - \frac{(1/2)s}{s+2} \end{aligned} \quad (10-54a)$$

y

$$\frac{B(s)}{D(s)} = s+1 - \frac{s}{s+1} \quad (10-52b)$$

Sustituyendo (10-54) en (10-52), obtenemos

$$H(s) = \frac{A(s)/D(s)}{B(s)/D(s)} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{(1/2)s}{s+2}}{s+1 - \frac{s}{s+1}} \quad (10-55)$$

Es decir,

$$\begin{aligned} Y_{RC}^{(1)}(s) &= \frac{1}{2} \\ Y_{RC}^{(2)}(s) &= \frac{(1/2)s}{s+2} \\ Y_{RC}^{(3)}(s) &= s+1 \\ Y_{RC}^{(4)}(s) &= \frac{s}{s+1} \end{aligned}$$

Por (10-51), las funciones de admitancia DP de los dispositivos RC de un puerto en la figura 10-11 son

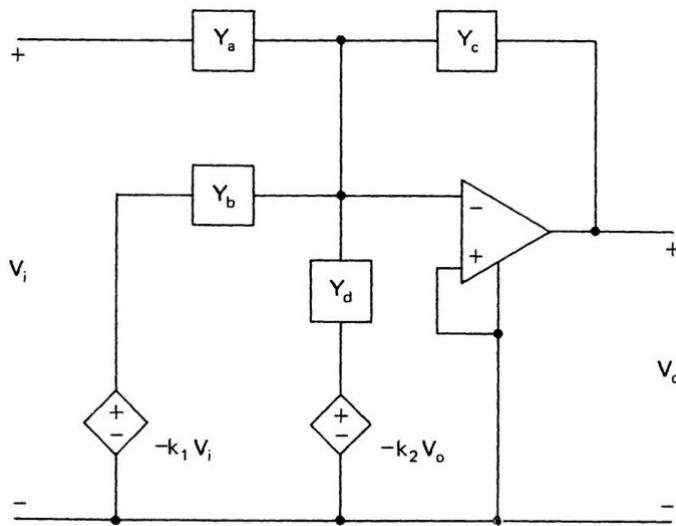
$$\begin{aligned} Y_a(s) &= \frac{1}{2} \\ Y_b(s) &= \frac{(1/2)s}{s+2} \\ Y_c(s) &= s+1 \\ Y_d(s) &= \frac{1}{2} + \frac{(1/2)s}{s+2} + \frac{s}{s+1} \end{aligned} \quad (10-56)$$

donde hemos establecido  $k_1 = k_2 = 1$ . Cada una de estas funciones de admitancia se realiza en las Figs. 10-12(a) a (d). Poniendo todo

**10-1-3-2. Método de Mathews-Seifert.**

Consideré la configuración del circuito Mathews-Seifert de la figura 10-13, donde  $k_1 \geq 0$  y  $k_2 \geq 0$ . La función de transferencia viene dada por

$$H(s) \triangleq \frac{V_o}{V_i} = \frac{Y_a - k_1 Y_b}{k_2 Y_d - Y_c} = \frac{k_1 Y_b - Y_a}{Y_c - k_2 Y_d} \quad (10-57)$$



**Fig. 10-13** Mathews–Seifert's circuit configuration.

En vista de las similitudes entre (10-50) y (10-57), los procedimientos de realización en el método de Mathews-Seifert son muy similares a los del método de Yanagisawa.

**Ejemplo 10-8** Realizar la función de transferencia de relación de voltaje

$$H(s) = \frac{s+1}{s(s+2)(s+3)} \triangleq \frac{A(s)}{B(s)} \quad (10-58)$$

por el método de Mathews-Seifert.

**Solución:** Elijamos

$$D(s) = (s+1)(s+2) \quad (10-59)$$

Entonces tenemos

$$\frac{A(s)}{D(s)} = \frac{1}{2} - \frac{(1/2)s}{s+2} \quad (10-60a)$$

$$\frac{B(s)}{D(s)} = s + \frac{2s}{s+1} \quad (10-60b)$$

y

$$H(s) = \frac{A(s)/D(s)}{B(s)/D(s)} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{(1/2)s}{s+2}}{s + \frac{2s}{s+1}} \quad (10-60c)$$

Identificando los términos correspondientes en (10-57) y (10-60c), obtenemos<sup>125</sup>

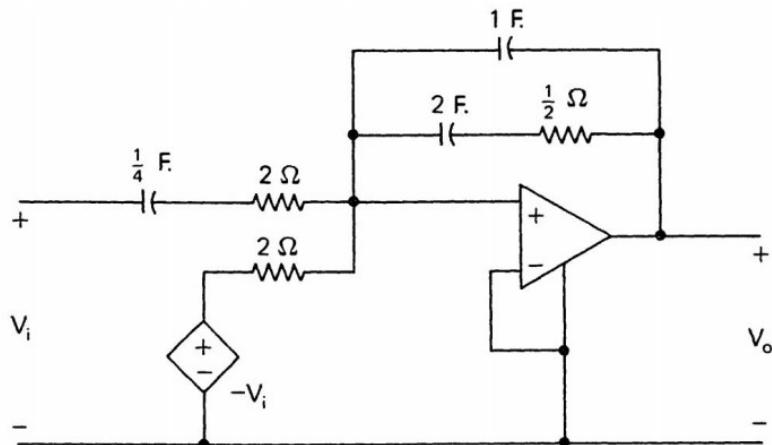
125 Aquí, usamos la expresión más a la derecha de (10-57). Al hacerlo, el circuito resultante tiene un elemento menos activo en este caso.

$$k_1 Y_b = \frac{1}{2}$$

$$Y_a = \frac{(1/2)s}{s + 2} \quad (10-61)$$

$$Y_c = s + \frac{2s}{s + 1}$$

$$k_2 Y_d = 0$$



**Fig. 10-14** A Mathews–Seifert realization of (10-58).

En la figura 10-14 se muestra un circuito de realización de Mathews–Seifert de (10-58) a través de (10-61) con  $k_1=0$  ,  $k_2=0$  e  $Y_d=0$  .

### 10-1-3-3. Método de Lovering.

Otro método de síntesis similar a la técnica de Yanagisawa utiliza la configuración del circuito de Lovering de la Figura 10-15, donde la función de transferencia del circuito viene dada por<sup>126</sup>

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{Y_b - Y_a}{Y_c - Y_d} = \frac{Y_a - Y_b}{Y_d - Y_c} \quad (10-62)$$

Al comparar (10-57) y (10-62), observamos que la función de transferencia del método de Lovering tiene la misma forma que la del método de Mathews-Seifert. En consecuencia, los procedimientos de realización del método de Lovering y del método de Mathews-Seifert son idénticos, excepto por algunas modificaciones simples en los símbolos. Ahora presentamos el método de Lovering en términos de un ejemplo ilustrativo.

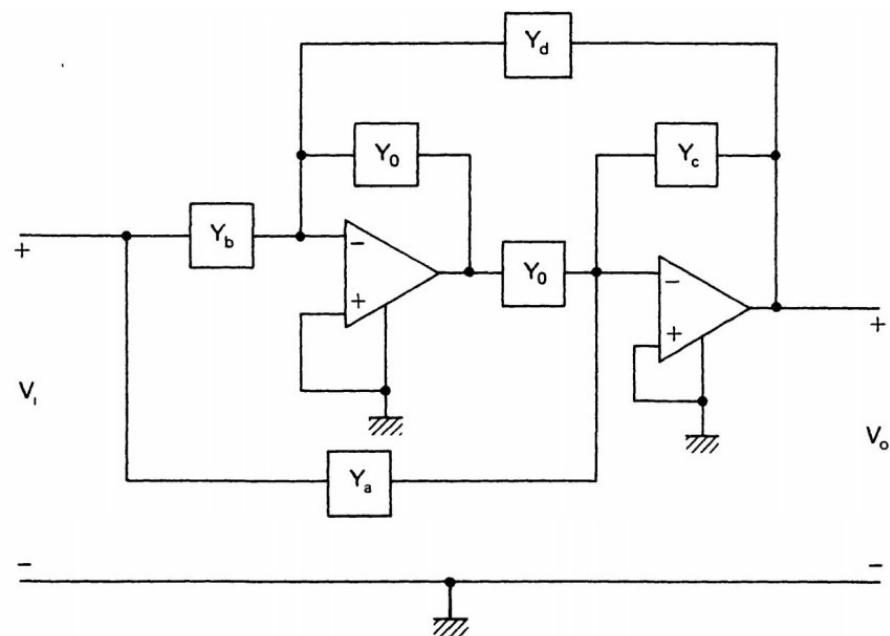


Fig. 10-15 Configuración de Lovering.

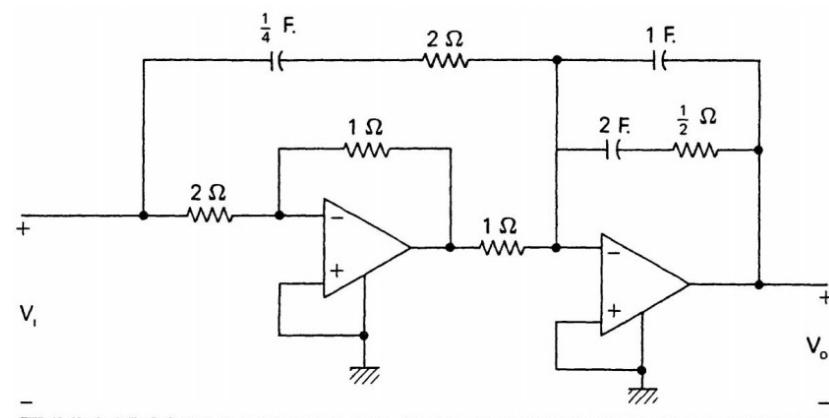


Fig. 10-16 Realización de A Lovering de (10-58).

126 Observe que  $F_0$  no aparece en la función de transferencia del circuito de (10-62). Esto significa que se puede asignar a  $Y$  cualquier valor finito distinto de cero.

**Ejemplo 10-9** Realice la función de transferencia de (10-58) por el método de Lovering.

**Solución:** Al elegir las mismas  $D(s)$  que en el ejemplo 10-8, obtenemos (10-60). Una comparación de (10-60c) y (10-62) da

$$\begin{aligned} Y_b &= \frac{1}{2} \\ Y_a &= \frac{(1/2)s}{s + 2} \\ Y_c &= s + \frac{2s}{s + 1} \\ Y_d &= 0 \end{aligned} \tag{10-63}$$

y

Sustituyendo las realizaciones de las funciones de admitancia RC DP de (10-63) en la figura 10-15, obtenemos una realización de Lovering de (10-58) como se muestra en la figura 10-16, donde se elige que  $Y_Q$  sea 1 .

**10-1-3-4. Método de Mitra.**

Considera la configuración del circuito de la Figura 10-17, donde todos los voltajes mostrados son voltajes de nodo a tierra. Las ecuaciones de nodo en los nodos A y B están dadas por

$$Y_b(V_1 - V_i) + Y_dV_1 + Y_f(V_1 - V_o) = 0 \quad (10-64)$$

$$Y_a(V_1 - V_i) + Y_cV_1 + Y_e(V_1 - V_o) = 0 \quad (10-65)$$

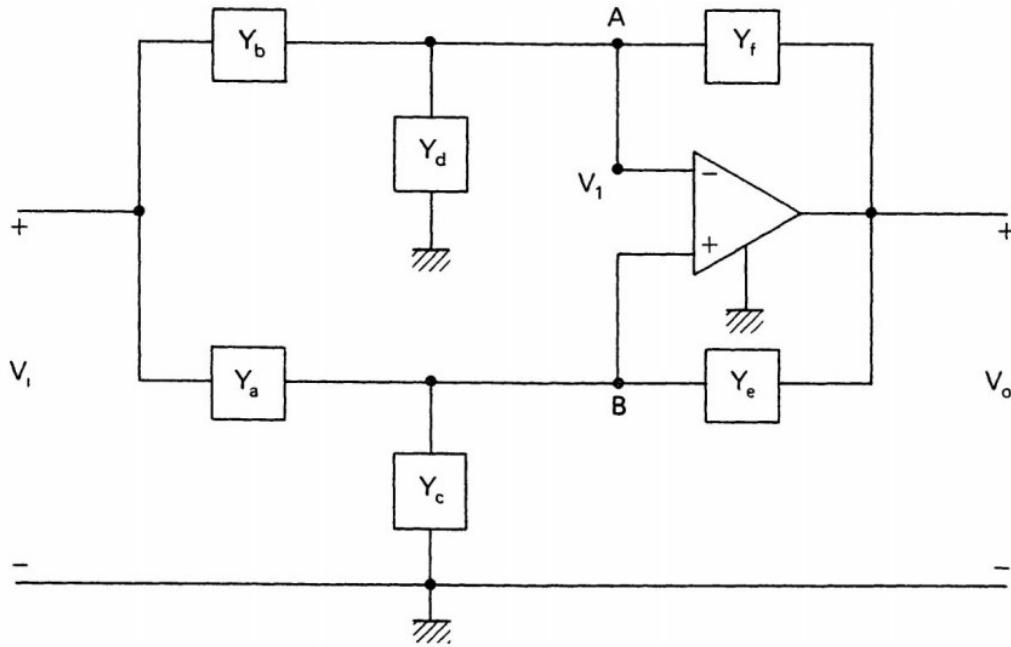


Fig. 10-17 Configuración de Mitra.

De (10-64) obtenemos

$$V_1 = \frac{Y_b V_i + Y_f V_o}{Y_b + Y_d + Y_f} \quad (10-66)$$

Con  $V_1$  dado por (10-66), (10-65) se convierte en

$$\begin{aligned} & [Y_a(Y_b + Y_d + Y_f) - Y_b(Y_a + Y_c + Y_e)]V_i \\ & = [Y_f(Y_a + Y_c + Y_e) - Y_e(Y_b + Y_d + Y_f)]V_o \end{aligned} \quad (10-67)$$

Por tanto, la función de transferencia del circuito de la Figura 10-17 está dada por

$$H(s) \triangleq \frac{V_o}{V_i} = \frac{Y_a(Y_b + Y_d + Y_f) - Y_b(Y_a + Y_c + Y_e)}{Y_f(Y_a + Y_c + Y_e) - Y_e(Y_b + Y_d + Y_f)} \quad (10-68)$$

En este método, se acostumbra elegir las distintas ramas de admisión tal que

$$Y_a + Y_c + Y_e = Y_b + Y_d + Y_f \quad (10-69)$$

Bajo la restricción de (10-69), (10-68) se puede simplificar a

$$H(s) \triangleq \frac{V_o}{V_i} = \frac{Y_a - Y_b}{Y_f - Y_e} = \frac{Y_b - Y_a}{Y_e - Y_f} \quad (10-70)$$

Tenga en cuenta que (10-70) tiene la misma forma que (10-50), (10-57) y (10-62). Por lo tanto, con algunas modificaciones debido a la restricción adicional de (10-69), los procedimientos descritos en los métodos de realización anteriores son aplicables aquí. En aras de la claridad, describimos los pasos del método de Mitra de la siguiente manera:

En aras de la claridad, describimos los pasos del método de Mitra de la siguiente manera:

0. Dado  $H(s)$  de (10-1).

1. Seleccione un polinomio apropiado  $D(s)$  de grado  $n_D$  donde  $n_D = \max(m, n) - 1$ , y  $D(s)$  tiene raíces reales negativas simples.

2. Descomponer las funciones racionales numerador y denominador de  $H(s)$  como

$$H(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{A(s)/D(s)}{B(s)/D(s)} = \frac{Y_{RC}^{(1)} - Y_{RC}^{(2)}}{Y_{RC}^{(3)} - Y_{RC}^{(4)}} \quad (10-71)$$

3. Identifique los términos correspondientes entre (10-70) y (10-71) como

$$Y_a = Y_{RC}^{(1)}, \quad Y_b = Y_{RC}^{(2)}, \quad Y_f = Y_{RC}^{(3)}, \quad \text{and} \quad Y_e = Y_{RC}^{(4)} \quad (10-72a)$$

o

$$Y_b = Y_{RC}^{(1)}, \quad Y_a = Y_{RC}^{(2)}, \quad Y_e = Y_{RC}^{(3)}, \quad \text{and} \quad Y_f = Y_{RC}^{(4)} \quad (10-72b)$$

4. Encuentra  $Y_c$  y  $Y_d$ . Con (10-72a), (10-69) da

$$\begin{aligned} Y_c - Y_d &= (Y_f - Y_e) - (Y_a - Y_b) \\ &= [Y_{RC}^{(3)} - Y_{RC}^{(4)}] - [Y_{RC}^{(1)} - Y_{RC}^{(2)}] \\ &= \frac{B(s)}{D(s)} - \frac{A(s)}{D(s)} = \frac{B(s) - A(s)}{D(s)} \end{aligned} \quad (10-73a)$$

De manera similar, si se adopta (10-72b), (10-69) produce

$$Y_c - Y_d = \frac{A(s) - B(s)}{D(s)} \quad (10-73b)$$

No importa qué alternativa de (10-72) se use, el teorema de descomposición RC: —RC se puede aplicar al lado derecho de (10-73) para dar

$$Y_c - Y_d = \pm \frac{A(s) - B(s)}{D(s)} = Y_{RC}^{(5)} - Y_{RC}^{(6)} \quad (10-74)$$

Por lo tanto, podemos identificar

$$Y_c = Y_{RC}^{(5)}(s) \quad \text{and} \quad Y_d = Y_{RC}^{(6)}(s) \quad (10-75)$$

Esto completa la especificación necesaria de la Fig. 10-17.

5. Realice  $Y_a$ ,  $Y_b$ ,  $Y_c$ ,  $Y_d$ ,  $Y_e$  e  $Y_f$  como se encontró en los Pasos 3 y 4 por elementos RC, como se discutió en el Capítulo 6.

6. Finalmente, sustituya en la Fig. 10-17 los dispositivos de un puertos RC correspondientes realizados en el paso 5. El circuito resultante es una realización de la función de transferencia de (10-1).

**Ejemplo 10-10** Realice la función de transferencia de (10-58) por el método de Mitra.

1. Elija  $D(s) = (s+1)(s+2)$ .

2. Obtenga

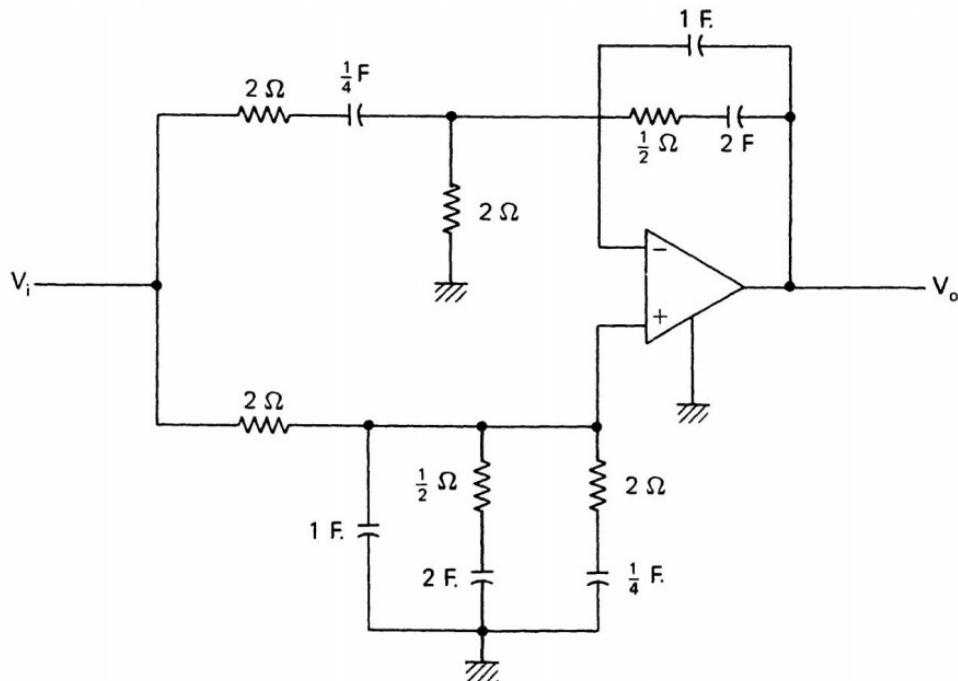
$$H(s) = \frac{\frac{1}{2} - \frac{(1/2)s}{s+2}}{s + \frac{2s}{s+1}}$$

3. Usando (10-72a), obtenemos

$$Y_a = \frac{1}{2}, \quad Y_b = \frac{(1/2)s}{s+2}, \quad Y_f = s + \frac{2s}{s+1}, \quad \text{and} \quad Y_e = 0 \quad (10-76)$$

4. Encuentre  $Y_c$  y  $Y_d$  como

$$\begin{aligned} Y_c - Y_d &= \frac{B(s) - A(s)}{D(s)} = \frac{s(s+2)(s+3) - (s+1)}{(s+1)(s+2)} \\ &= \frac{s^3 + 5s^2 + 5s - 1}{(s+1)(s+2)} \triangleq \frac{C(s)}{D(s)} \end{aligned}$$



**Fig. 10-18** A Mitra's circuit realization of (10-58).

Tenga en cuenta que

$$\begin{aligned} \frac{C(s)}{sD(s)} &= 1 + \frac{2s^2 + 3s - 1}{s(s+1)(s+2)} \\ &= 1 + \frac{-1/2}{s} + \frac{2}{s+1} + \frac{1/2}{s+2} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$Y_c - Y_d = s + \frac{2s}{s+1} + \frac{(1/2)s}{s+2} - \frac{1}{2}$$

o

$$Y_c = s + \frac{2s}{s+1} + \frac{(1/2)s}{s+2} \quad (10-77a)$$

$$Y_d = \frac{1}{2} \quad (10-77b)$$

**5. y 6.** El circuito de realización de Mitra resultante de (10-58) se muestra en la figura 10-18.

### 10-1-3-5. Algunos comentarios.

Los cuatro métodos presentados en la subsección 10-1-3 utilizan el mismo concepto, la técnica de descomposición RC:—RC del teorema 10-1. Estos métodos no requieren ninguna restricción en la realización de la función de transferencia, aparte de que sea una función racional real de  $s$ . Sin embargo, desde un punto de vista práctico, existe un inconveniente importante, que es la gran sensibilidad del polo con respecto a los parámetros de los elementos activos, a saber, VCVS y amplificadores operacionales. Esto surge porque la realización de polos complejos en la función de transferencia general de (10-1) se logra restando dos funciones racionales, como se puede ver en (10-50), (10-57), (10-62), y (10-70). Además, los cuatro métodos no son adecuados para circuitos Q altos (par de polos) o filtros de banda estrecha.

Otro inconveniente, básico para todos los filtros activos, es que una pequeña variación en el parámetro de un elemento activo, como los coeficientes de un VCVS, puede influir fácilmente en un circuito estable en el caso límite para que se vuelva inestable. Esto es particularmente cierto si la descomposición RC:—RC de la razón del denominador  $B(s)/D(s)$  da lugar a términos de coeficientes tanto positivos como negativos. Por lo tanto, siempre que sea posible, debemos elegir  $D(s)$  de modo que la expansión en fracciones parciales de  $B(s)/D(s)$  solo produzca residuos positivos.

### 10-1-4. Realización directa a través de la técnica de variable de estado

Considere el circuito de la figura 10-19, donde todos los voltajes indicados son voltajes de nodo a tierra y hemos supuesto que  $n$  es un número entero impar. Si  $n$  es un número entero par, entonces la resistencia  $R_n$  está conectada al nodo B en lugar del nodo A. Las ecuaciones que describen este circuito son:

$$\begin{aligned} V_k &= (-1)^k sCRV_{k+1} \\ &= (-1)^{n-k} (sCR)^{n-k} V_n \quad \text{for } k = 1, 2, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (10-78)$$

$$V_a = -R_a \left[ \frac{V_2}{R_2} + \frac{V_4}{R_4} + \dots + \frac{V_{n-1}}{R_{n-1}} \right] \quad (10-79)$$

$$sC_1 V_1 + \frac{V_a}{R_a} + \frac{V_i}{R_0} + \left[ \frac{V_1}{R_1} + \frac{V_3}{R_3} + \dots + \frac{V_n}{R_n} \right] = 0 \quad (10-80)$$

Sustituyendo (10-78) y (10-79) en (10-80), y con  $C_1 = RC$ , obtenemos

$$(sCR)^n V_n + \frac{(sCR)^{n-1}}{R_1} V_{n-1} + \frac{(sCR)^{n-2}}{R_2} V_{n-2} + \dots + \frac{(sCR)^{n-3}}{R_3} V_{n-3} + \frac{(sCR)^{n-4}}{R_4} V_{n-4} + \dots + \frac{V_n}{R_n} = -\frac{V_t}{R_0}$$

o

$$\frac{V_n}{V_t} = -\frac{G_0}{(sCR)^n + G_1(sCR)^{n-1} + G_2(sCR)^{n-2} + \dots + G_n} \quad (10-81)$$

donde

$$G_i = \frac{1}{R_i} \quad \text{for } i = 0, 1, 2, \dots, n$$

Tenga en cuenta que  $R_a$  no aparece en la función de transferencia del circuito de (10-81). Esto significa que  $R_a$  puede ser cualquier valor positivo finito distinto de cero. De (10-81), si tomamos  $V_n$  como nuestro voltaje de salida, entonces el circuito de la figura 10-19 es un filtro de paso bajo que se puede usar para realizar filtros de paso bajo de Butterworth, Chebyshev y Bessel. Las relaciones de transferencia entre  $V_k$ , para  $k=1,2,\dots,n$ , y  $V_t$  pueden obtenerse combinando (10-78) y (10-81). El resultado es:

$$H_k(s) \triangleq \frac{V_k}{V_t} = -\frac{(-1)^{n-k} G_0 (sCR)^{n-k}}{(sCR)^n + G_1(sCR)^{n-1} + G_2(sCR)^{n-2} + \dots + G_n} \quad (10-82)$$

Tenga en cuenta que (10-82) se derivó bajo el supuesto de que  $n$  es un número entero impar. Si  $n$  es par, entonces  $R_n$  está conectado al nodo B en lugar de al nodo A en la figura 10-19, y la función de transferencia resultante viene dada por

$$\frac{V_k}{V_t} = \frac{(-1)^{n-k} G_0 (sCR)^{n-k}}{(sCR)^n + G_1(sCR)^{n-1} + G_2(sCR)^{n-2} + \dots + G_n} \quad (10-83)$$

donde  $k=1,2,\dots,n$ . Excepto por el signo menos al frente, las funciones de transferencia de ambos casos son idénticas.

De (10-82) o (10-83), observamos que los polinomios del denominador son idénticos para  $k=1,2,\dots,n$ . Por lo tanto, para realizar la función de transferencia prescrita de (10-1), solo necesitamos agregar a la figura 10-19 un circuito de verano como el que se muestra en la figura 2-15.

Tenga en cuenta que la configuración del circuito de estado variable requiere al menos  $(n+1)$  amplificadores operacionales<sup>127</sup> además de una gran cantidad de resistencias. Esto es costoso. A cambio, el circuito proporciona un mecanismo de sintonización conveniente para ajustar los valores de resistencia  $R_1, R_2, \dots, R_n$  para adaptarse a los coeficientes de la función de transferencia prescrita.

<sup>127</sup> En la mayoría de las situaciones, se necesitan  $(n + 2)$  amplificadores operacionales para los  $n$  integradores, un circuito de inversión de signo y un circuito de verano. Si no hay un cero de transmisión finito distinto de cero (todos los ceros de transmisión están en  $s = \infty$  o en  $s = 0$  o ambos), entonces no hay necesidad del circuito de verano. Por otro lado, si la parte par del polinomio denominador  $B(s)$  de la función de transferencia prescrita de (10-1) es cero, entonces no se necesita el circuito de inversión de signo.

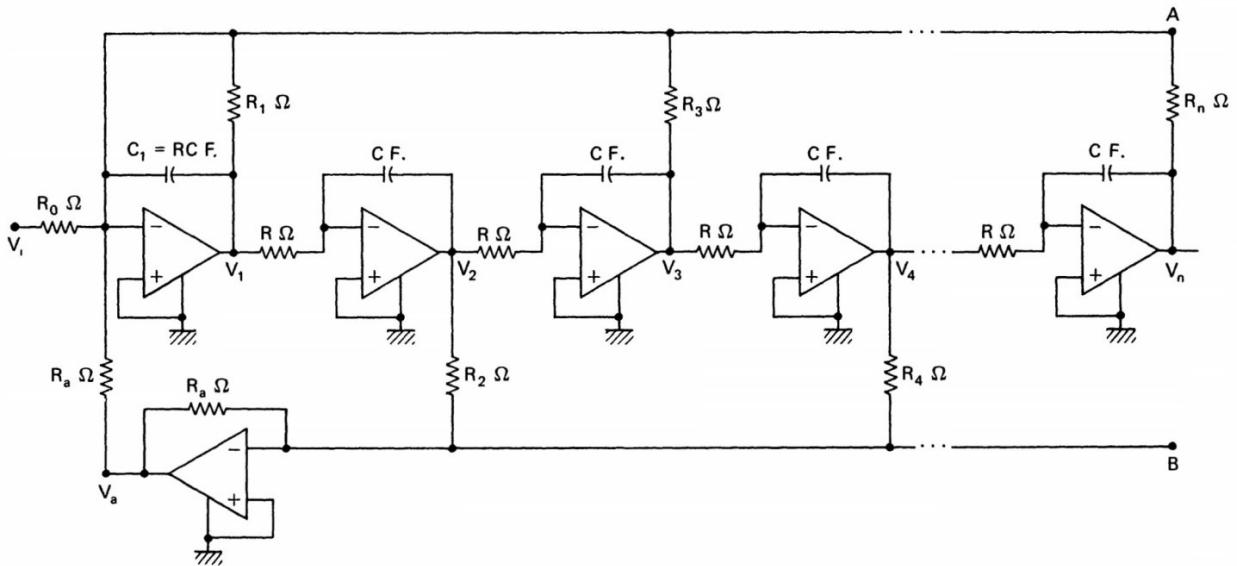


Fig. 10-19 A direct realization via state-variable technique.

**Ejemplo 10-11** Suponga que necesitamos un filtro de ondulación equivalente para cumplir con los siguientes requisitos:

1. El ancho de banda de ondulación es de 1 Krad./seg.
2. La atenuación máxima del rizado de banda de paso es de 0,1 dB.
3. La pérdida mínima de la banda suprimida es de 40 dB para  $\omega \geq 6 \text{ Krad./seg.}$

Encuentre una realización activa a través de la técnica de variable de estado.

**Solución:** Del ejemplo 8-12, la función de transferencia deseada viene dada por

$$H(s) = \frac{1.6381}{(s/10^3)^3 + 1.9388(s/10^3)^2 + 2.6296(s/10^3) + 1.6381} \quad (10-84)$$

Como  $n=3$  en este caso, (10-81) es aplicable aquí. Una comparación de (10-81) y (10-84) produce las siguientes ecuaciones de diseño: 15

$$\begin{aligned} C_1 &= RC = 10^{-3} \\ G_0 &= 1.6381 \text{ or } R_0 = 0.6105 \Omega \\ G_1 &= 1.9388 \text{ or } R_1 = 0.5158 \Omega \\ G_2 &= 2.6296 \text{ or } R_2 = 0.3803 \Omega \\ G_3 &= 1.6381 \text{ or } R_3 = 0.6105 \Omega \end{aligned} \quad (10-85a)$$

Para minimizar aproximadamente la dispersión de los valores de resistencia, elijamos

$$R_a = 0.5 \Omega, \quad R = 0.5 \Omega, \quad C = 2 \times 10^{-3} \text{ F}, \quad \text{and} \quad C_1 = 10^{-3} \text{ F.} \quad (10-85b)$$

El circuito resultante se muestra en la Fig. 10-20(a), donde el voltaje de salida se toma a través de V3. La Fig. 10-20(b) es una versión escalada de impedancia de la Fig. 10-20(a) con un factor de escala de 10 K. Observe que las funciones de transferencia de ambos circuitos en la Fig. 10-20 están dadas por (10-84).

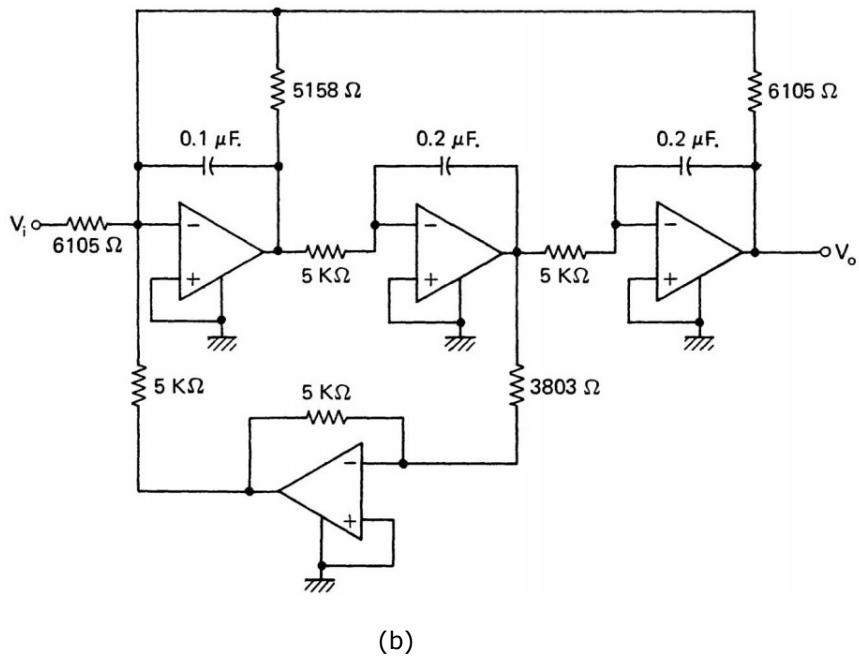
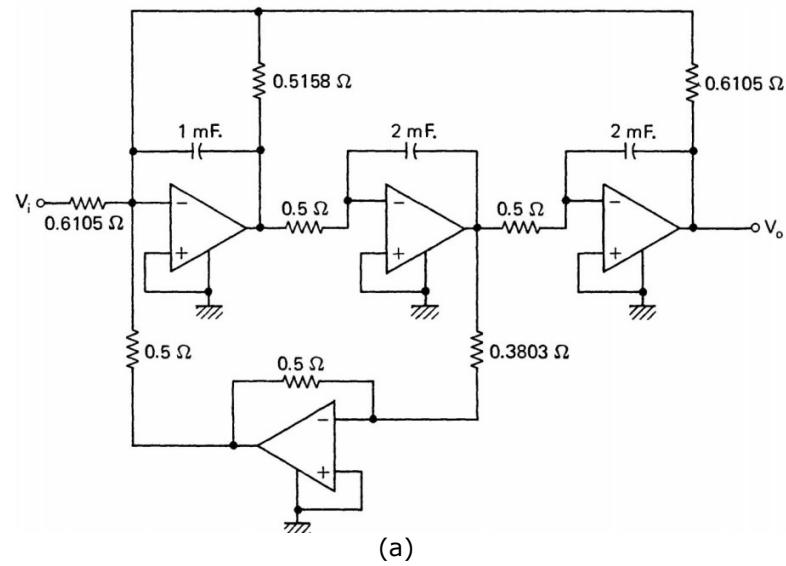


Fig. 10-20 Realizaciones de circuitos de estado variable para el ejemplo 10-11

## 10-2 Enfoque de realización de cascada

En el enfoque de realización en cascada, la función de transferencia de (10-1) se realiza conectando en cascada una secuencia de secciones de filtro de primer y segundo orden. La figura 10-21 muestra que el enfoque en cascada reduce el problema de realizar una función de transferencia general de (10-1) al de realizar una serie de secciones de filtro de segundo orden más quizás una sección de primer orden.

La realización en cascada es muy atractiva para los ajustes posteriores al diseño ya que cada sección está aislada de las demás. También es posible diseñar secciones de segundo orden con características controladas externamente. Esto permite la realización de una serie de funciones de transferencia con unos pocos bloques de construcción básicos de bajo orden. Además, la realización en cascada suele producir circuitos menos sensibles que los obtenidos por el enfoque directo.

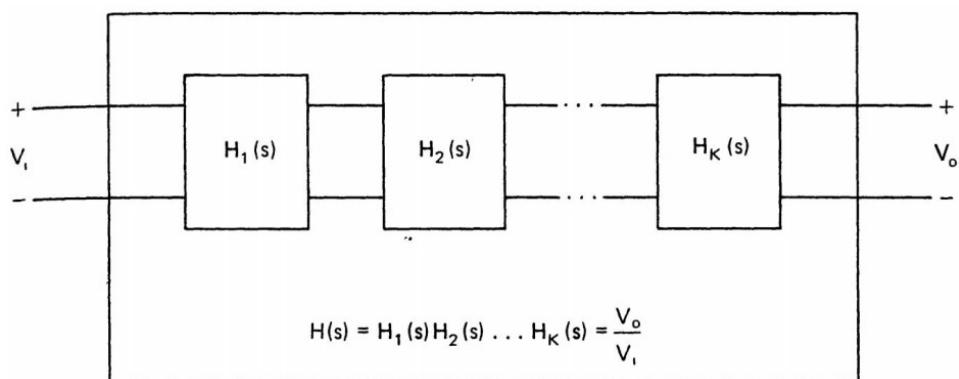


Fig. 10-21 Diagrama esquemático del método en cascada.

El enfoque en cascada simplifica enormemente el problema de realizar funciones de transferencia generales, porque solo hay un número finito de formas distintas para la función de transferencia de segundo orden. Una función de transferencia general de segundo orden viene dada por<sup>128</sup>

$$H(s) = \frac{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{s^2 + b_1 s + b_0} \quad (10-86a)$$

Como casos especiales tenemos:

1. filtros de paso bajo cuando  $a_2 = a_1 = 0$  .
2. filtros de paso de banda cuando  $a_2 = a_0 = 0$  .
3. filtros de paso alto cuando  $a_1 = a_0 = 0$  .
4. Filtros de muesca de paso bajo cuando  $a_1 = 0$  y  $a_2 \leq a_0/b_0$  .
5. filtros de muesca de paso alto cuando  $a_1 = 0$  y  $a_2 \geq a_0/b_0$
6. filtros de paso total cuando  $-(a_1/a_2) = b_1$  y  $a_0/a_2 = b_0$

<sup>128</sup> La función de transferencia de (10-86) se llama función de transferencia biquadrática, porque tanto su numerador como su denominador son polinomios cuadráticos. Específicamente, solo hay siete formas distintas de funciones de transferencia biquadráticas:

$$\begin{aligned} & \frac{a_0}{s^2 + b_1 s + b_0}, \quad \frac{a_1 s}{s^2 + b_1 s + b_0}, \quad \frac{a_2 s^2}{s^2 + b_1 s + b_0}, \quad \frac{a_1 s + a_0}{s^2 + b_1 s + b_0}, \\ & \frac{a_2 s^2 + a_0}{s^2 + b_1 s + b_0}, \quad \frac{a_2 s^2 + a_1 s}{s^2 + b_1 s + b_0}, \quad \text{and} \quad \frac{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{s^2 + b_1 s + b_0} \end{aligned} \quad (10-86b)$$

Casi todas las secciones de filtro de segundo orden utilizan VCVS finitos (que pueden realizarse mediante amplificadores operacionales) o amplificadores operacionales mismos. Los amplificadores se utilizan para generar los polos complejos necesarios (recuerde que los filtros RC sin dispositivos activos solo pueden tener polos reales negativos) y para proporcionar una baja impedancia de salida. En el caso de circuitos amplificadores múltiples, también se utilizan amplificadores operacionales para proporcionar una alta impedancia de entrada para cada sección de filtro.

Para que el enfoque en cascada funcione correctamente,<sup>129</sup> cada sección debe tener una impedancia de entrada alta (el valor de impedancia DP visto desde el puerto de entrada hacia la sección del filtro es grande) y/o una impedancia de salida baja (el valor de impedancia DP visto desde el puerto de salida hacia la sección del filtro es pequeño). Para cumplir con los requisitos de las conexiones en cascada adecuadas, el voltaje de salida de cada sección de filtro generalmente se toma como la salida de un VCVS o un amplificador operacional. Esto proporciona una impedancia de salida muy baja en la práctica y minimiza la mayoría de los problemas de carga cuando se conecta en cascada con secciones posteriores.

Existen básicamente tres técnicas para realizar (10-86). La primera técnica es el enfoque directo en el que se establece a priori una configuración de circuito general y sus características de rama individuales están determinadas por la función de transferencia prescrita. La segunda técnica tiene en cuenta el hecho de que solo hay siete formas distintas de funciones de transferencia biquadráticas. Se establece un circuito específico (con una configuración de circuito y todos sus tipos de elementos especificados) para cada forma distinta de función de transferencia biquadrática de (10-86). Los valores de los elementos se determinan luego por los coeficientes de la función de transferencia dada. La tercera técnica usa un circuito canónico (nuevamente con una configuración de circuito y todos sus tipos de elementos fijos pero no los valores de los elementos). Se realizan diferentes funciones de transferencia biquadráticas eligiendo diferentes conjuntos de valores de elementos. En esta sección, nos concentraremos en la segunda y tercera técnica.

Antes de proceder a discutir varios métodos de síntesis para la realización de las funciones de transferencia biquadráticas de relación de voltaje de (10-86), observamos que la frecuencia polar  $\omega_0$  y el par de polos Q están dados por

$$\omega_0 = \sqrt{b_0} \quad \text{and} \quad Q = \frac{\sqrt{b_0}}{b_1} \quad (10-87)$$

---

<sup>129</sup> Para que el enfoque en cascada funcione perfectamente, se requiere que cada sección de filtro tenga una impedancia de entrada infinita y/o una impedancia de salida cero.

## 10-2-1. Amplificador único Biquad<sup>130</sup>

En esta sección, presentamos dos métodos para realizar funciones de transferencia biquadráticas con elementos RC pasivos y un solo dispositivo activo. El primero consta de una familia de circuitos, cada uno de los cuales se ocupa de una función de transferencia biquadrática particular. El segundo método implica un circuito versátil que se puede utilizar para realizar una amplia variedad de funciones de transferencia biquadráticas.

### 10-2-1-1. Biquad de un solo amplificador: técnica personalizada.

En 1955, Sallen y Key publicaron una tabla de circuitos RC activos<sup>131</sup> (siendo un VCVS el único elemento activo en cada circuito) para realizar funciones de transferencia de relación de voltaje del tipo en (10-86) con la excepción de un filtro de muesca caracterizado por

$$H(s) = \frac{a_2 s^2 + a_0}{s^2 + b_1 s + b_0} \quad (10-88)$$

En 1966, Kerwin y Huelsman idearon un circuito de realización de (10-88) con un VCVS como único elemento activo en el circuito.<sup>20</sup> Ahora presentamos sus resultados en forma tabular, como se muestra en la Tabla 10-1.

En la práctica, las realizaciones de circuitos de la tabla 10-1 no son productos finales. Para uso práctico, necesitamos realizar escalas de frecuencia e impedancia en estos circuitos. Debido a que la ganancia o el coeficiente de un VCVS no tiene unidades, tanto la escala de frecuencia como la de impedancia no afectarán el coeficiente de un VCVS de ninguna manera. Por lo tanto, el escalado de frecuencia afectará solo a los condensadores, y el escalado de impedancia afectará tanto a los valores de resistencia como de condensador.

#### Ejemplo 10-12

Realice

$$H(s) = \frac{2 \times 10^8}{s^2 + (2 \times 10^3)s + 10^8} \quad (10-89)$$

a través de la Tabla 10-1.

**Solución:** La versión normalizada de (10-89) viene dada por

$$H_N(s) = \frac{2}{s^2 + 0.2s + 1} \quad (10-90)$$

donde se ha utilizado el factor de escala de frecuencia de  $10^4$ . Del caso A1 de la Tabla 10-1, las ecuaciones de diseño son

$$\begin{aligned} C_1 C_2 R_1 R_2 &= 1 \\ C_1 R_1 + C_2 R_2 + C_2 R_1 - k C_1 R_1 &= 0.2 \\ k &= 2 \end{aligned} \quad (10-91)$$

Con  $k=2$ , (10-91) se puede reescribir como

$$\begin{aligned} C_1 C_2 R_1 R_2 &= 1 \\ C_2 R_2 + C_2 R_1 - C_1 R_1 &= 0.2 \end{aligned} \quad (10-92)$$

Como hay dos ecuaciones y cuatro incógnitas, hay dos grados de libertad. Elijamos

$$C_1 = C_2 = 1 \text{ F.} \quad (10-93a)$$

130 Un biquad es un circuito que implementa una función de transferencia biquadrática de (10-86).

131 Ver Referencia [20].

Entonces (10-92) da

$$R_1=5\Omega \text{ y } R_2=0.2\Omega \quad (10-93b)$$

En la figura 10-22(a) se muestra una realización de circuito de  $H_N(s)$  de (10-90) a través de (10-93). Para realizar  $H(s)$  de (10-89), realizamos una escala de frecuencia en la Fig. 10-22(a) con un factor de escala de  $10^4$ . El resultado se muestra en la Fig. 10-22(b). Una versión escalada de impedancia de la Fig. 10-22(b) con un factor de escala de  $5K$  se muestra en la Fig. 10-22(c), donde el VCVS se reemplaza por su realización de amplificador operacional.

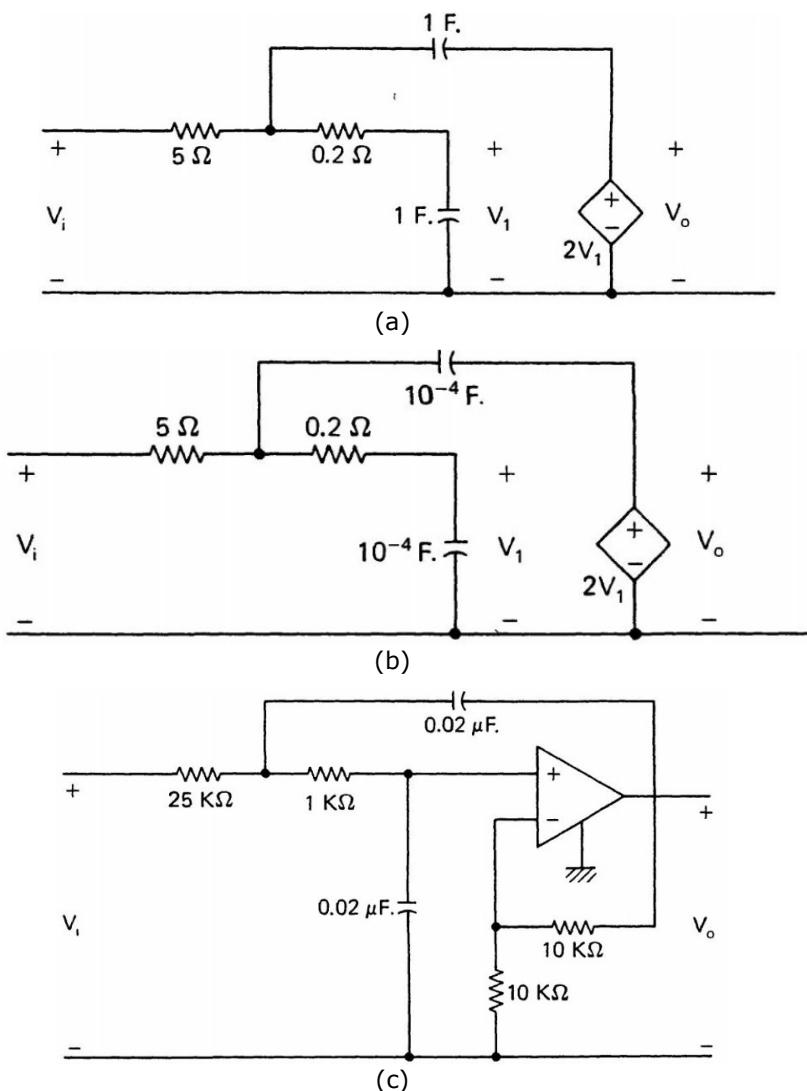


Figura 10-22 (a) Realización de un circuito de (10-90). (b) y  
(c) Realizaciones de circuito de (10-89).

Caso	Función de transferencia $H(s) \triangleq \pm V_o/V_i$	Realización de circuitos	Ecuaciones de diseño
A1	$\frac{G}{s^2 + bs + 1}$ (Low-pass)		$C_1 C_2 R_1 R_2 = 1$ $C_1 R_1 + C_2 R_2 + R_1 C_2 - k C_1 R_1 = b$ ..... $G = k$
A2	$\frac{Gs}{s^2 + bs + 1}$		$C_1 C_2 R_1 R_2 (1 + k) = 1$ $C_1 R_1 + C_2 R_2 + C_2 R_1 = b$ ..... $G = -k R_2 C_2$
			$\frac{C_1 C_2 R_1 R_2}{1 + k} = 1$ $\frac{C_1 R_1 + C_2 R_2 + C_2 R_1}{1 + k} = b$ ..... $G = -\frac{k}{R_2 C_2}$
A3	$\frac{Gs^2}{s^2 + bs + 1}$ (High-pass)		$C_1 C_2 R_1 R_2 = 1$ $C_1 R_1 + C_2 R_2 + C_2 R_1 - k C_2 R_2 = b$ ..... $G = k$
A4	$\frac{G(s+a)}{s^2 + bs + 1}$		$R_1 C_1 R_2 C_2 = 1$ $R_1 C_1 + R_1 C_2 = 1/a$ $R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2 - k R_2 C_2 = b$ ..... $G = k(R_1 C_1 + R_1 C_2)$
			$R_1 C_1 R_2 C_2 = 1$ $R_2 C_2 = 1/a$ $R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2 (1 - k) = b$ ..... $G = k R_2 C_2$
A5	$\frac{Gs(s+a)}{s^2 + bs + 1}$		$R_1 C_1 R_2 C_2 = 1$ $R_2 C_2 + R_1 C_2 = 1/a$ $R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2 - k R_1 C_1 = b$ ..... $G = k$

(b)			$R_1 C_1 R_2 C_2 = 1$ $R_1 C_1 = a$ $R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2 - kR_2 C_2 = b$ $\dots \dots \dots$ $G = k$
A6	$\frac{G(s^2 + 1)}{s^2 + bs + 1}$ (Band-reject)		$RC = 1$ $4(1 - k) = b$ $\dots \dots \dots$ $G = k$
A7	$\frac{G(s^2 + a)}{s^2 + bs + 1}$ (a)		
(b)	(Notch)		
A8	$\frac{G(s^2 + as + 1)}{s^2 + bs + 1}$ (a)		$R_1 C_1 R_2 C_2 = 1$ $R_1 C_1 + R_1 C_2 = a$ $R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2 - kR_2 C_2 = b$ $\dots \dots \dots$ $G = k$
(b)			$R_1 C_1 R_2 C_2 = 1$ $R_2 C_2 + R_1 C_2 = a$ $R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2 - kR_1 C_1 = b$ $\dots \dots \dots$ $G = k$

Ahora hacemos algunas observaciones y comentarios con respecto a la Tabla 10-1. Observe que la salida de cada circuito en la tabla 10-1 es a través de un VCVS, a través de la salida de un amplificador operacional.<sup>132</sup> Debido a que un amplificador operacional tiene una característica ideal de impedancia de salida cero (en la práctica, impedancia de salida muy baja en modo lineal normal operación), cada uno de estos circuitos se puede conectar en cascada con otros circuitos (incluidos algunos que se discutirán más adelante) sin la necesidad de un amplificador de aislamiento.

Las aplicaciones de todos los casos son simples y directas. Excepto en el caso A7, el proceso de realización del circuito implica solo encontrar un conjunto de valores de resistencia y capacitancia para satisfacer las ecuaciones de diseño. Para el caso A7, hay un procedimiento de diseño a seguir. Ilustraremos este procedimiento en el ejemplo 10-13.

---

<sup>132</sup> Recuerde que en el Capítulo 2, un VCVS con un coeficiente positivo o negativo puede realizarse mediante una interconexión de resistencias lineales y un amplificador operacional, como se muestra en la figura 2-5.

**Ejemplo 10-13** Realizar la función de transferencia

$$H(s) = \frac{G(s^2 + 10^8)}{s^2 + 2 \times 10^3 s + 4 \times 10^8} \quad (10-94)$$

a través de la Tabla 10-1.

**Solución:** antes de aplicar la tabla 10-1 a (10-94), escalamos la frecuencia  $H(s)$  hacia abajo por un factor de  $2 \times 10^4$ . Esto produce una función de transferencia "normalizada".

$$H_N(s) = \frac{G(s^2 + 0.25)}{s^2 + 0.1s + 1} \quad (10-95)$$

Tenga en cuenta que (10-95) se obtiene de (10-94) reemplazando cada  $s$  con  $(2 \times 10^4)s$ . Ahora aplicaremos el procedimiento de realización a (10-95) de la siguiente manera:

**PASO 0**  $a = 0.25$ ,  $\sqrt{a} = 0.5$ , y  $b = 0.1$ .

**PASO 1** Elegir  $C_1 = 2 \text{ F}$ . Por lo tanto  $\alpha = 2$ .

**PASO 2**  $C_3 = C_4 = 1 \text{ F}$ .

**PASO 3**  $\beta = \alpha\sqrt{a} = 1$

**PASO 4**  $R_3 = 1 \Omega$ ,  $R_1 = R_2 = 2 \Omega$ .

**PASO 5** Como  $a - 1 = -0.75 \leq 0$ , podemos elegir  $C_2 = 0$ .

**PASO 6** Con  $C_2 = 0$ , obtenemos

$$R_4 = \frac{4\sqrt{a}}{\alpha(1-a)} = \frac{4}{3}$$

**PASO 7** La ganancia del VCVS está dada por

$$k = 2 - \frac{b}{2\sqrt{a}} + \frac{2}{\alpha\sqrt{a}R_4} = 3.4$$

**PASO 8**  $G = k = 3.4$ .

Por lo tanto, un conjunto de valores de componentes para realizar (10-95) viene dado por

$$\begin{aligned} C_1 &= 2 \text{ F}, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = C_4 = 1 \text{ F}, \\ R_1 &= R_2 = 2 \Omega, \quad R_3 = 1 \Omega, \quad R_4 = \frac{4}{3} \Omega, \\ \text{and } k &= 3.4 \end{aligned} \quad (10-96a)$$

Para realizar (10-94), escalamos la frecuencia de los capacitores en (10-96a) hacia arriba en  $2 \times 10^4$  como

$$C_1 = 10^{-4} \text{ F}, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = C_4 = 0.5 \times 10^{-4} \text{ F}. \quad (10-96b)$$

Una realización del circuito de (10-94) a través de (10-96) se muestra en la figura 10-23, donde todas las resistencias y capacitores tienen una impedancia escalada de  $10 K$ .

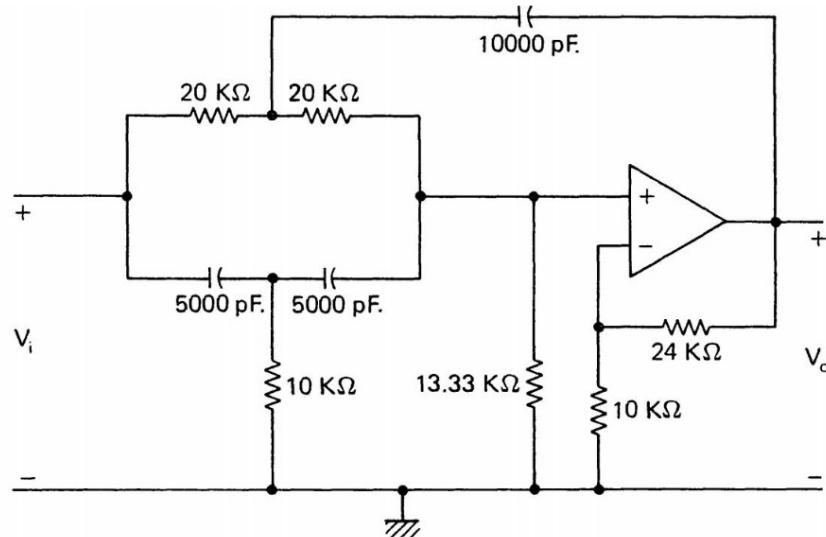


Fig. 10-23 Realización de un circuito de (10-24)

Se puede demostrar que el procedimiento de diseño de A7 produce la función de transferencia de cualquiera de sus dos configuraciones de circuito asociadas como

$$H(s) = \frac{G(s^2 + a)}{s^2 + b_1 s + b_0} \quad (10-97a)$$

donde

$$G = \frac{\alpha}{4C_2 + \alpha} \quad (10-97b)$$

$$a = \frac{\beta^2}{\alpha^2} \quad (10-97c)$$

$$b_1 = \frac{4}{4\alpha C_2 + \alpha^2} \left[ \alpha\beta \left( 1 - \frac{k}{2} \right) + \frac{\alpha}{R_4} + C_2 \beta \right] \quad (10-97d)$$

$$b_0 = \frac{1}{4\alpha C_2 + \alpha^2} \left[ \beta^2 + \frac{4\beta}{R_4} \right] \quad (10-97e)$$

con  $\alpha=2$ ,  $\beta=1$  y (10-96a), (10-97) da

$$G = 1$$

$$a = \frac{1}{4} = 0.25$$

$$b_1 = \frac{4}{0+4} [2(1 - 1.7) + 1.5] = 0.1$$

$$b_0 = \frac{1+3}{4} = 1$$

Es decir, los valores de los componentes de (10-96a) realizan la función de transferencia  $H_N(s)$  de (10-95). En consecuencia, el circuito de la figura 10-23 realiza la función de transferencia deseada de (10-94).

Con excepción de los casos A6 y A7, cada circuito contiene cinco variables,  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  y  $k$ . Sin embargo, solo hay tres o cuatro ecuaciones de diseño que restringen estas variables. Esto implica que hay muchas realizaciones que satisfacen la función de transferencia de relación de tensión. Como ilustración, consideremos el ejemplo 10-14.

**Ejemplo 10-14** Realizar la función de transferencia

$$H(s) = \frac{2(s^2 + 2s + 1)}{s^2 + s + 1} \quad (10-98)$$

a través de la Tabla 10-1.

**Solución:** Podemos usar el circuito (a) del caso A8, donde  $a=2$ ,  $b=1$  y  $G=2$ . En este caso, hay cuatro restricciones o ecuaciones de diseño, como se enumeran en (10-99):

$$R_1 C_1 R_2 C_2 = 1 \quad (10-99a)$$

$$R_2 C_2 + R_1 C_2 = a = 2 \quad (10-99b)$$

$$R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2 - k R_1 C_1 = b = 1 \quad (10-99c)$$

$$G = k = 2 \quad (10-99d)$$

Como hay cinco variables y cuatro restricciones, tenemos un grado de libertad. Podemos usar este grado de libertad para establecer el valor de una de las cinco variables, o podemos agregar una ecuación adicional a las restricciones de diseño de (10-99). Supongamos que elegimos la última opción y sumamos la ecuación

$$R_1 C_1 = 1 \quad (10-99e)$$

para formar un conjunto completo de ecuaciones de diseño. Observe que (10-99) es un conjunto de cinco ecuaciones no lineales en cinco variables y que, como tal, puede haber una y solo una solución, ninguna solución o muchas soluciones. En este caso, hay muchas soluciones. Por ejemplo:

$$R_1 = R_2 = 1 \Omega, \quad C_1 = C_2 = 1 F., \quad \text{and} \quad k = 2 \quad (10-100)$$

y

$$R_1 = R_2 = (1/2) \Omega, \quad C_1 = C_2 = 2 F., \quad \text{and} \quad k = 2 \quad (10-101)$$

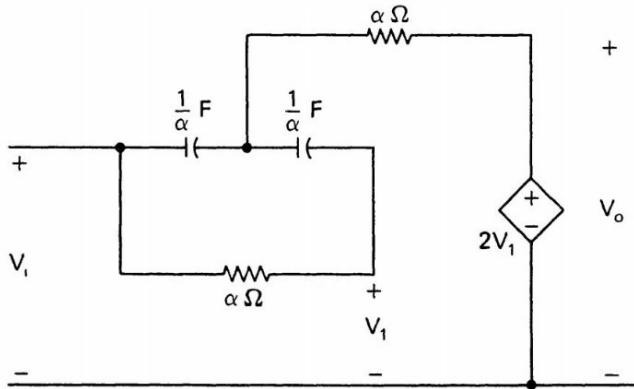


Fig. 10-24 A circuit realization of (10-98).

son soluciones a las ecuaciones de diseño de (10-99). De hecho, para cualquier valor positivo de  $a$ ,

$$R_1 = R_2 = \alpha, \quad C_1 = C_2 = 1/\alpha, \quad \text{and} \quad k = 2 \quad (10-102)$$

es una solución a las ecuaciones de diseño.<sup>133</sup> En la figura 10-24 se muestra una realización de circuito de (10-98), donde  $\alpha$  es cualquier número real positivo finito.

Todos los circuitos que aparecen en la tabla 10-1 tienen un inconveniente común. Para circuitos de

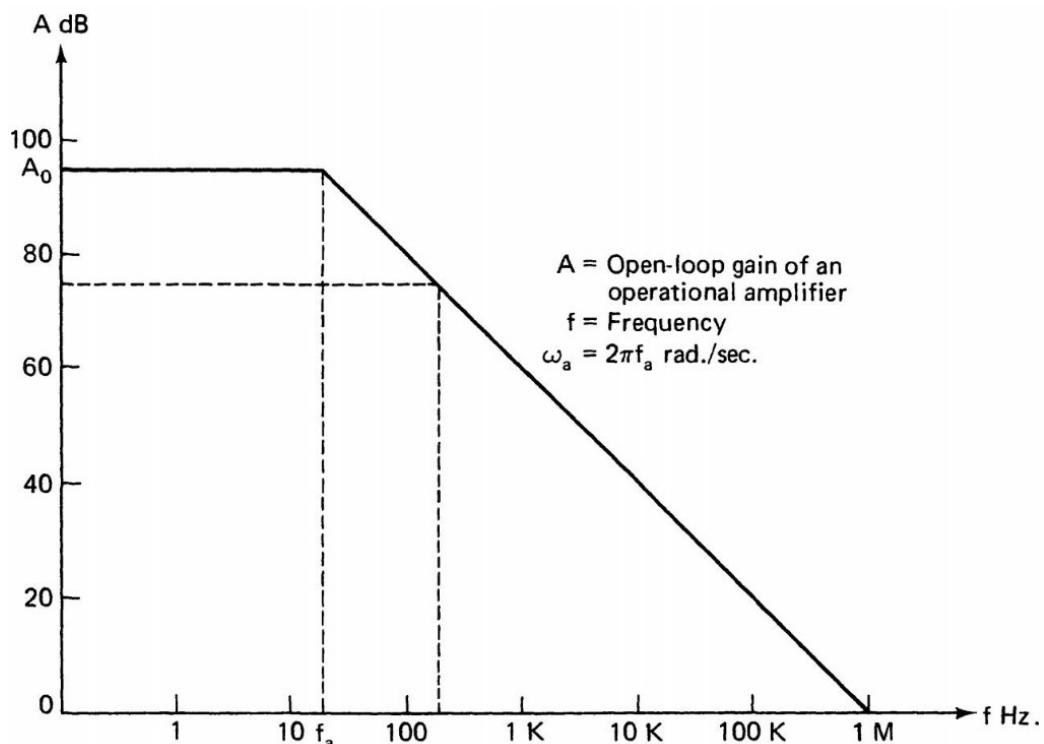
133 Tenga en cuenta que  $\alpha$  es en realidad un factor de escala de impedancia.

alta  $Q$  o de banda estrecha, la ganancia  $k$  del VCVS es muy grande (proporcional a  $Q^2$ ) o bien la sensibilidad de  $Q$  con respecto a  $k$ ,  $S_k^Q$  es grande (al menos proporcional a  $Q$ ). Ningún caso es deseable. Lo indeseable de este último caso es evidente. En el primer caso, cuando  $k$  es grande, la región de frecuencia práctica donde el circuito funcionará correctamente es pequeña.<sup>134</sup> Por ejemplo, cuando  $Q=16$ , la ganancia de un VCVS es del orden de 250. En este caso, la frecuencia útil El rango en el que el VCVS de la figura 2-5 funcionará correctamente es cuando la ganancia de lazo abierto es 5000 o superior. De acuerdo con la hoja de datos típica de un amplificador operacional que se muestra en la Fig. 10-25, el ancho de banda de frecuencia útil es de aproximadamente 200 Hz.<sup>135</sup>

Para ilustrar el inconveniente común establecido en el párrafo anterior, consideremos el caso A1 y la parte (a) del caso A2:

Para el caso A1, la función de transferencia del circuito viene dada por

$$H(s) = \frac{k}{s^2 C_1 C_2 R_1 R_2 + s(C_1 R_1 + C_2 R_2 + R_1 C_2 - k C_1 R_1) + 1} \quad (10-103)$$



**Fig. 10-25** A typical operation amplifier frequency characteristic.

Suponga que el filtro de paso bajo deseado tiene una función de transferencia

$$H(s) \triangleq \frac{V_o}{V_i} = \frac{G}{s^2 + (1/100)s + 1} \quad (10-104)$$

En este caso, tenemos  $b=0.01$  y  $Q=100$ . Las ecuaciones de diseño son

134 Si se realiza un VCVS con una ganancia de  $k$  usando un amplificador operacional, entonces el rango de frecuencia donde el VCVS funcionará correctamente es el ancho de banda de frecuencia donde la ganancia de bucle abierto del amplificador operacional es aproximadamente 20 veces  $k$  o más. en la seg. 10-3, consideramos el concepto de ancho de banda de frecuencia útil con más detalle.

135 Para amplificadores operacionales de banda ancha, el ancho de banda de frecuencia útil puede extenderse por un factor de 10 o más.

$$C_1 C_2 R_1 R_2 = 1 \quad (10-105a)$$

$$b = C_1 R_1 + C_2 R_2 + R_1 C_2 - k C_1 R_1 = \frac{1}{Q} = \frac{1}{100} \quad (10-105b)$$

Supongamos que

$$\begin{aligned} C_1 &= C_2 \triangleq C \\ R_1 &= R_2 \triangleq R \end{aligned} \quad (10-106)$$

entonces (10-105) da

$$CR = 1 \quad (10-107a)$$

y

$$k = 3 - \frac{1}{Q} = \frac{299}{100} \approx 3 \quad (10-107b)$$

Aquí la ganancia del VCVS es muy razonable. Sin embargo, de (10-103), obtenemos

$$Q = \frac{\sqrt{C_1 C_2 R_1 R_2}}{C_1 R_1 + C_2 R_2 + R_1 C_2 - k C_1 R_1} = \frac{1}{3 - k} \quad (10-108a)$$

y por lo tanto,

$$S_k^Q = \frac{k}{3 - k} = kQ \approx 300 \quad (10-108b)$$

Es decir, si  $k$  varía en un 1 %, entonces  $Q$  cambia en un 300 %. Claramente, este es un circuito indeseable cuando  $Q$  es alto.

Para el circuito (a) del caso A2, la función de transferencia del circuito está dada por

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{-s C_2 R_2 k}{s^2 C_1 C_2 R_1 R_2 (1 + k) + s(C_1 R_1 + C_2 R_2 + C_2 R_1) + 1} \quad (10-109)$$

Suponga que el filtro de paso de banda deseado se caracteriza por

$$H(s) = \frac{Gs}{s^2 + (1/100)s + 1} \quad (10-110)$$

Aquí, de nuevo, tenemos  $Q = 100$  y  $b = 0.01$ . Las ecuaciones de diseño son

$$\begin{aligned} C_1 C_2 R_1 R_2 (1 + k) &= 1 \\ b = C_1 R_1 + C_2 R_2 + C_2 R_1 &= \frac{1}{Q} = 0.01 \end{aligned} \quad (10-111)$$

Haciendo  $C \triangleq C_1 = C_2$  y  $R \triangleq R_1 = R_2$ , encontramos que

$$3CR = \frac{1}{Q} \quad (10-112a)$$

y

$$k = \frac{1}{(CR)^2} - 1 = 9Q^2 - 1 \approx 90000 \quad (10-112b)$$

En términos prácticos, (10-112b) dice que el rango de frecuencia útil, donde el modelo de circuito se

comporta de manera similar al circuito de la vida real, es de aproximadamente 10 Hz, que no es mucho para un filtro de paso de banda. En este caso, la sensibilidad de  $Q$  con respecto a  $k$  es muy pequeña. Se puede demostrar que

$$S_k^Q = -\frac{1}{2} \left( \frac{k}{1+k} \right) \approx -\frac{1}{2} \quad (10-113)$$

### 10-2-1-2. Biquad de amplificador único: técnica de circuito canónico.

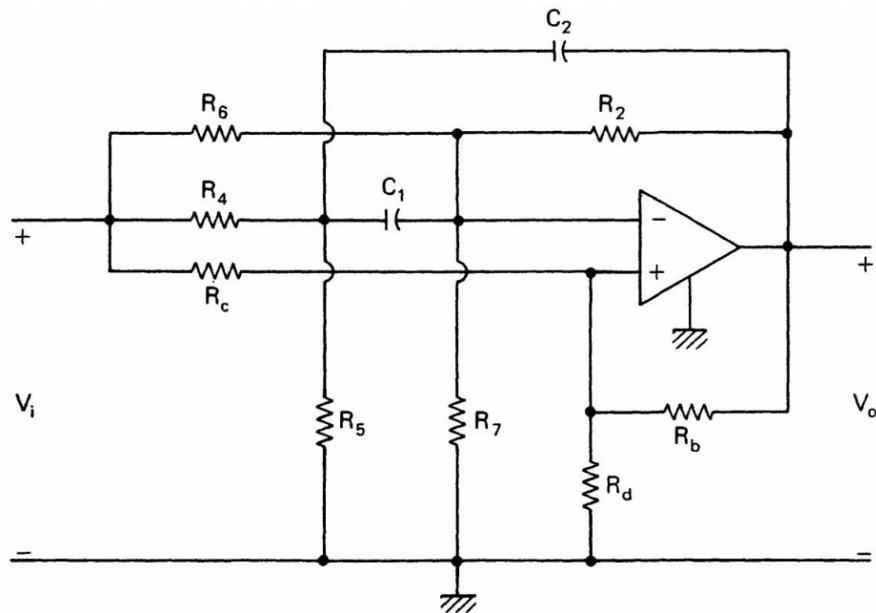
En esta subsección, consideramos un circuito versátil presentado por Friend. La configuración del circuito y sus tipos de elementos están todos especificados. El circuito produce diferentes formas de funciones de transferencia biquadráticas dependiendo de los valores de sus elementos.

Consideré el circuito de la Fig. 10-26. Con  $G_x = 1/R_x$  y

$$G_a \triangleq G_c + G_d \quad (10-114a)$$

$$G_1 \triangleq G_4 + G_5 \quad (10-114b)$$

$$G_3 \triangleq G_6 + G_7 \quad (10-114c)$$



**Fig. 10-26** Friend's circuit configuration.

la función de transferencia del circuito viene dada por

$$H(s) = \frac{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{s^2 + b_1 s + b_0} \quad (10-115)$$

donde

$$a_2 = \frac{G_c}{G_a} \quad (10-116a)$$

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{C_1 C_2 G_a} [C_1 G_c (G_1 + G_2 + G_3) + C_2 G_c (G_2 + G_3) \\ &\quad - C_1 G_4 (G_a + G_b) - (C_1 + C_2) G_6 (G_a + G_b)] \end{aligned} \quad (10-116b)$$

$$a_0 = \frac{1}{C_1 C_2 G_a} [G_1 G_c (G_2 + G_3) - G_1 G_6 (G_a + G_b)] \quad (10-116c)$$

$$b_1 = \frac{1}{C_1 C_2 G_a} [(C_1 + C_2)(G_a G_2 - G_b G_3) - C_1 G_1 G_b] \quad (10-116d)$$

$$b_0 = \frac{1}{C_1 C_2 G_a} [G_1 (G_a G_2 - G_b G_3)] \quad (10-116e)$$

Basándonos en (10-114) a (10-116), hagamos algunas observaciones sobre el circuito de la figura 10-26. Primero, el circuito de la figura 10-26 no puede realizar una función de transferencia biquadrática de paso bajo. La función de paso bajo requiere  $a_2 = a_1 = 0$ . De (10-116a),  $a_2 = 0$

implica que  $G_c=0$ . Con  $G_c=0$  y  $a_1=0$ , (10-116b) requiere que  $G_4=G_6=0$  o  $G_a+G_b=0$ . En cualquier caso, (10-116c) implica que  $a_0=0$ . Por lo tanto, la figura 10-26 no puede realizar una función de transferencia biquadrática de paso bajo. Resulta que esta es la única forma de función de transferencia biquadrática que la figura 10-26 no puede realizar.

Se puede extraer otra observación de (10-114a) y (10-116a). Juntas, estas dos ecuaciones implican que el circuito de la Fig. 10-26 puede realizar solo aquellas funciones de transferencia biquadráticas donde

$$0 \leq a_2 \leq 1 \quad (10-117)$$

Sin embargo, (10-117) no es una restricción seria, porque una función de transferencia generalmente se realiza solo hasta un multiplicador constante. Si la función de transferencia prescrita  $H_D(s)$  tiene  $a_2 > 1$ , podemos realizar  $\beta H_D(s)$  donde  $\beta$  es una constante tal que  $\beta a_2 < 1$ . Además, hay formas de aumentar el multiplicador  $\beta$ . Un ejemplo de ello se muestra más adelante en el ejemplo 10-16.

Dada una función de transferencia biquadrática de (10-115), (10-114) y (10-116) en realidad forman un conjunto de ecuaciones de diseño. El problema de la realización se traduce ahora en encontrar un conjunto de valores de elementos tales que se satisfagan (10-114) y (10-116). Debido a que hay ocho ecuaciones y 13 incógnitas, podemos resolver los valores de ocho elementos en términos de los cinco restantes. Después de algunas manipulaciones algebraicas, obtenemos

$$G_1 = \frac{C_2 G_a}{2G_b} \left[ -b_1 + \sqrt{b_1^2 + 4b_0 \left( 1 + \frac{C_1}{C_2} \right) \frac{G_b}{G_a}} \right] \quad (10-118a)$$

$$G_4 = \frac{G_1 G_a}{G_a + G_b} \left[ a_2 + a_0 \left( 1 + \frac{C_1}{C_2} \right) \frac{C_2^2}{G_1^2} - \frac{a_1 C_2}{G_1} \right] \quad (10-118b)$$

$$G_3 = \frac{C_1 C_2 G_a (a_0 - a_2 b_0)}{G_1 (G_a + G_b) (a_2 - \alpha)} \quad (10-118c)$$

$$G_2 = \frac{C_1 C_2 b_0}{G_1} + \frac{G_b G_3}{G_a} \quad (10-118d)$$

$$G_5 = G_1 - G_4 \quad (10-118e)$$

$$G_6 = \alpha G_3 \quad (10-118f)$$

$$G_7 = G_3 - G_6 \quad (10-118g)$$

$$G_c = a_2 G_a \quad (10-118h)$$

$$G_d = G_a - G_c \quad (10-118i)$$

donde las cantidades de entrada son los coeficientes de la función de transferencia prescrita ( $a_2$ ,  $a_1$ ,  $a_0$ ,  $b_1$ ,  $b_0$ ) y cinco parámetros de elementos ( $C_1$ ,  $C_2$ ,  $G_a$ ,  $G_b$ ,  $\alpha$ ). En muchos casos, los parámetros de los elementos deben elegirse con cuidado. Por ejemplo, el parámetro

$$\alpha \triangleq \frac{G_6}{G_6 + G_7} \quad (10-119a)$$

se elige para asegurar que  $G_3 > 0$ . Nótese que (10-119a) limita  $\alpha$  a

$$0 \leq \alpha \leq 1 \quad (10-119b)$$

En la mayoría de los casos de interés,  $\alpha$  se establece en 0 si  $(a_0 - a_2 b_0) \geq 0$  y en 1 si  $(a_0 - a_2 b_0) < 0$ . Recuerde de (10-117) que  $a_2 < 1$ .

Para que  $G_5 \geq 0$ , debemos asegurarnos de que  $G_4 \leq G_1$ . Si  $a_2$  está muy cerca de la unidad, (10-118b) muy a menudo produce un  $G_4$  mayor que  $G_1$ , particularmente cuando  $a_1 < 0$ . Una forma de remediar este problema es realizar una función de transferencia

$$\beta H(s) = \frac{\hat{a}_2 s^2 + \hat{a}_1 s + \hat{a}_0}{s^2 + b_1 s + b_0} \quad (10-120a)$$

donde

$$\hat{a}_2 = \beta a_2, \quad \hat{a}_1 = \beta a_1, \quad \hat{a}_0 = \beta a_0, \quad \text{and} \quad \beta < 1 \quad (10-120b)$$

Una nota final sobre la Fig. 10-26 es que en el caso de paso de banda donde  $a_2=a_0=0$ , (10-118b) requiere que  $a_1<0$  y (10-118c) produzcan  $G_3=0$ . Por lo tanto,  $G_6=G_7=0$ .

**Ejemplo 10-15** Sea

$$H(s) = \frac{-s}{s^2 + 2s + 3} \quad (10-121)$$

por el circuito de la figura 10-26.

**Solución:** Con  $a_2=0$ ,  $a_1=-1$ ,  $a_0=0$ ,  $b_1=2$  y  $b_{10}=3$ , (10-118) se reduce a:

$$\begin{aligned} G_1 &= \frac{C_2 G_a}{2G_b} \left[ -2 + \sqrt{4 + 12 \left( 1 + \frac{C_1}{C_2} \right) \frac{G_b}{G_a}} \right] \\ G_4 &= \frac{C_2 G_a}{G_a + G_b} \\ G_3 &= 0 \\ G_2 &= \frac{3C_1 C_2}{G_1} \\ G_5 &= G_1 - G_4 \\ G_6 &= G_7 = 0 \\ G_c &= 0 \\ G_d &= G_a \end{aligned} \quad (10-122)$$

De (10-122), podemos estar seguros de que todas las resistencias son pasivas si  $G_a \geq G_b$ . Elijamos

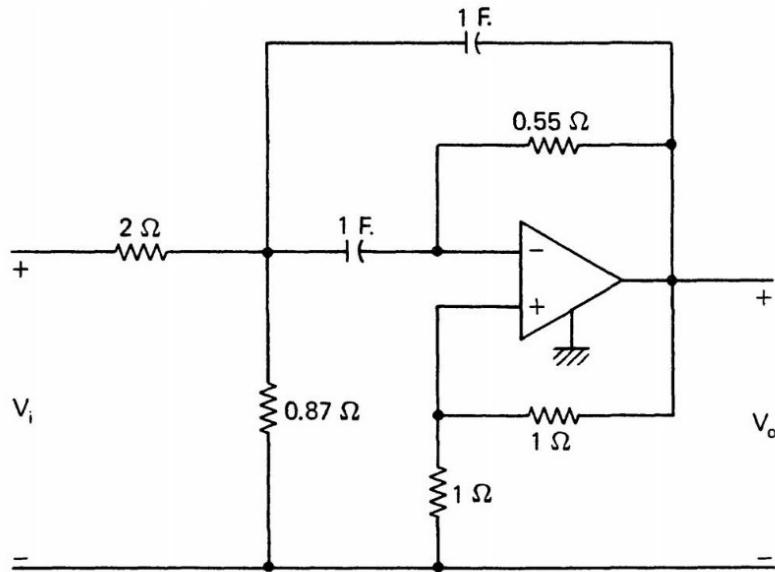
$$\begin{aligned} C_1 &= C_2 = 1 \text{ F.} \\ G_a &= G_b = 1 \text{ Mho} \end{aligned} \quad (10-123a)$$

Entonces (10-122) da

$$\begin{aligned} G_1 &= 1.65 = \frac{1}{0.61} \\ G_4 &= 0.5 = \frac{1}{2} \\ G_3 &= G_6 = G_7 = 0 \\ G_2 &= 1.82 = \frac{1}{0.55} \\ G_5 &= 1.15 = \frac{1}{0.87} \\ G_c &= 0 \\ G_d &= 1 \end{aligned} \quad (10-123b)$$

donde todas las conductancias están en Mhos. En la figura 10-27 se muestra una realización de circuito de

la función de paso de banda de (10-121) a través de (10-123).



**Fig. 10-27** A circuit realization of the bandpass transfer function of (10-121).

**Ejemplo 10-16** Realizar una función de transferencia de paso total

$$H(s) = \frac{s^2 - s + 1}{s^2 + s + 1} \quad (10-124)$$

por la configuración de un amigo.

**Solución:** En la práctica, el circuito de la figura 10-26 no funciona para los casos en que  $a_2=1$ . Más adelante veremos en este caso con  $a_2=1$  que (10-118b) da un  $G_4$  mayor que  $G_1$ . En lugar de realizar  $H(s)$  de (10-124), trabajemos con

$$H_\beta(s) \triangleq \beta H(s) = \frac{\beta s^2 - \beta s + \beta}{s^2 + s + 1} \quad (10-125)$$

Con  $a_2=a_0=\beta$ ,  $a_1=-\beta$ ,  $b_1=b_0=1$ , (10-118) se reduce a

$$G_1 = \frac{C_2 G_a}{2 G_b} \left[ -1 + \sqrt{1 + 4 \left( 1 + \frac{C_1}{C_2} \right) \frac{G_b}{G_a}} \right] \quad (10-126a)$$

$$G_4 = \frac{G_1 G_a}{G_a + G_b} \left[ \beta + \beta \left( 1 + \frac{C_1}{C_2} \right) \frac{C_2^2}{G_1^2} + \frac{\beta C_2}{G_1} \right] \quad (10-126b)$$

$$G_3 = G_6 = G_7 = 0 \quad (10-126c)$$

$$G_2 = \frac{C_1 C_2}{G_1} \quad (10-126d)$$

$$G_5 = G_1 - G_4 \quad (10-126e)$$

$$G_c = \beta G_a \quad (10-126f)$$

$$G_d = (1 - \beta) G_a \quad (10-126g)$$

Observe que si  $a_2=\beta=1$ , (10-126b) implica que  $G_4 > G_1$ . Por lo tanto, tenemos que bajar el valor del multiplicador constante  $\beta$  hasta que (10-126b) arroje un  $G_4$  más pequeño que  $G_1$ . Se puede demostrar que con  $G_b \ll G_a$ , la mayor  $\beta$  permisible viene dada por

$$\beta_{\max} = \frac{1}{1 + (1/Q^2)} \quad (10-127a)$$

donde  $Q$  es el par de polos de la función de transferencia dada y en este caso

$$Q = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{G_1}{G_2}} \quad (10-127b)$$

Como el valor Q de (10-124) es 1, tenemos  $\beta_{\max} = 0.5$ . Pongamos  $\beta = 0.5$ .

Es decir, en realidad estamos realizando

$$\hat{H}(s) \triangleq 0.5H(s) = \frac{0.5s^2 - 0.5s + 0.5}{s^2 + s + 1} \quad (10-128)$$

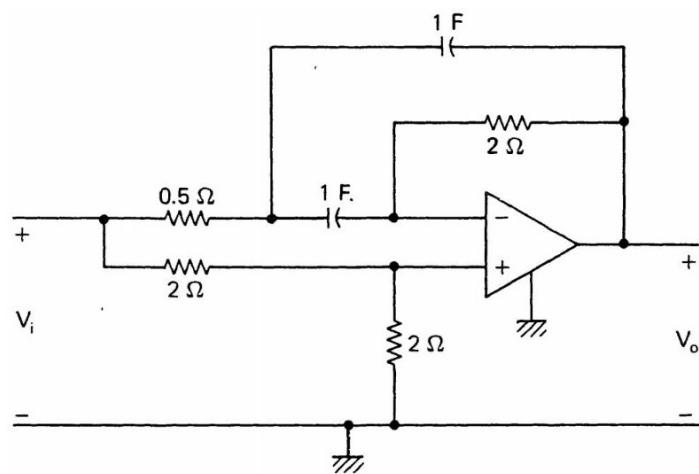
con  $\beta = 0.5$ ,

$$\begin{aligned} G_b &= 10^{-6} \\ G_a &= 1 \\ C_1 &= C_2 = 1 \text{ F.} \end{aligned} \quad (10-129a)$$

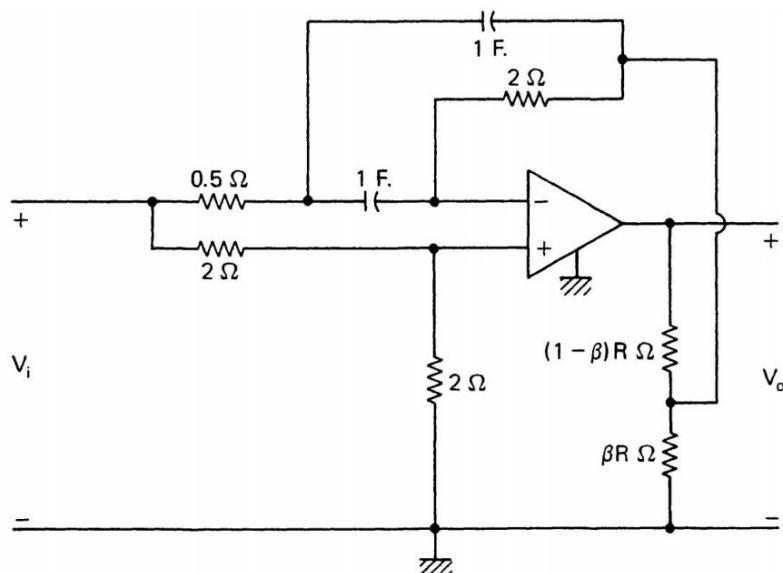
La ecuación (10-126) produce

$$\begin{aligned} G_1 &= 2 = \frac{1}{0.5} \\ G_4 &= 2 = \frac{1}{0.5} \\ G_3 &= G_6 = G_7 = 0 \\ G_2 &= \frac{1}{2} \\ G_5 &= 0 \\ G_c &= 0.5 = \frac{1}{2} \\ G_d &= 0.5 = \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (10-129b)$$

donde todas las conductancias están en Mhos. En la figura 10-28(a) se muestra una realización de circuito de la función de transferencia de paso total de (10-128) a través de (10-129), donde  $R_B$  se aproxima mediante un circuito abierto. Si se requiere el nivel de ganancia exacto de (10-124), entonces podemos amplificar ese voltaje de salida  $V_0$  pasándolo a través de un amplificador VCVS o usando la técnica de aumento de ganancia que se muestra en el circuito de la Fig. 10-28(b).



(a)



(b)

Figura 10-28 Realización de un circuito de la función de transferencia de paso total de (a) (10-125) y (b) (10-124), donde  $\beta=0.5$ .

## 10-2-2. Multiamplificador Biquad

En esta sección, presentamos dos biquads amplificadores múltiples. Los desarrollos básicos de estos dos circuitos son bastante diferentes. Sin embargo, sus versatilidades son casi las mismas. Al tomar voltajes de salida a través de diferentes nodos, estos biquads pueden proporcionar varias funciones de transferencia biquadráticas dentro de un circuito.

### 10-2-2-1. Multiamplificador Biquad—Técnica de variable de estado.

Considere el circuito que se muestra en la Fig. 10-29(a), donde todos los voltajes son voltajes de nodo a tierra. El circuito es básicamente una interconexión de tres bloques de construcción secundarios: un verano y dos circuitos integradores. De izquierda a derecha, el primer amplificador operacional se usa en un circuito de verano descrito por

$$V_1 = \frac{R_2(R+R_3)V_1 + R_1(R+R_3)V_2 - R(R_1+R_2)V_3}{R_3(R_1+R_2)} \quad (10-130)$$

Los amplificadores operacionales segundo y tercero se utilizan como integradores, donde

$$V_2 = -\frac{V_1}{sC_1R_8} \quad (10-131)$$

$$V_3 = -\frac{V_2}{sC_2R_9} \quad (10-132)$$

De (10-130) a (10-132) obtenemos

$$\frac{V_3}{V_i} = \frac{R_2(R+R_3)}{R_3(R_1+R_2)} \frac{1}{C_1C_2R_8R_9s^2 + \frac{R_1(R+R_3)}{(R_1+R_2)R_3}R_9C_2s + \frac{R}{R_3}} \quad (10-133a)$$

$$\frac{V_2}{V_i} = \frac{R_2(R+R_3)}{R_3(R_1+R_2)} \frac{-sC_2R_9}{C_1C_2R_8R_9s^2 + \frac{R_1(R+R_3)}{(R_1+R_2)R_3}R_9C_2s + \frac{R}{R_3}} \quad (10-133b)$$

$$\frac{V_1}{V_i} = \frac{R_2(R+R_3)}{R_3(R_1+R_2)} \frac{s^2C_1C_2R_8R_9}{C_1C_2R_8R_9s^2 + \frac{R_1(R+R_3)}{(R_1+R_2)R_3}R_9C_2s + \frac{R}{R_3}} \quad (10-133c)$$

Es decir, si el voltaje de salida se toma del extremo de salida del primer amplificador operacional, entonces el circuito se comporta como un filtro de paso alto; si la salida es del segundo amplificador operacional, tenemos un filtro de paso de banda; y finalmente, si la salida es del tercer amplificador operacional, entonces el circuito es un filtro de paso bajo. Para realizar una función de transferencia general del tipo,

$$H(s) = k \frac{s^2 + a_1s + a_0}{s^2 + b_1s + b_0} \quad (10-134)$$

necesitamos agregar un circuito de verano adicional a la figura 10-29(a), como se muestra en la Fig. 10-29(b). La salida de este verano adicional es una suma ponderada de  $V_1$ ,  $V_2$  y  $V_3$  y viene dada por

$$\begin{aligned} \frac{V_o}{V_i} &= \left[ \frac{R_5(R_6+R_7)}{(R_4+R_5)R_7} \right] \frac{V_1}{V_i} - \frac{R_6}{R_7} \frac{V_2}{V_i} + \left[ \frac{R_4(R_6+R_7)}{(R_4+R_5)R_7} \right] \frac{V_3}{V_i} \\ &= \left[ \frac{R_2R_5(R+R_3)(R_6+R_7)}{R_3R_7(R_1+R_2)(R_4+R_5)} \right] \frac{\frac{C_1C_2R_8R_9s^2}{(R_6+R_7)} + \frac{(R_4+R_5)R_6R_9C_2s}{R_5} + \frac{R_4}{R_5}}{\frac{C_1C_2R_8R_9s^2}{(R_6+R_7)} + \frac{R_1(R+R_3)}{R_3(R_1+R_2)}R_9C_2s + \frac{R}{R_3}} \end{aligned} \quad (10-135)$$

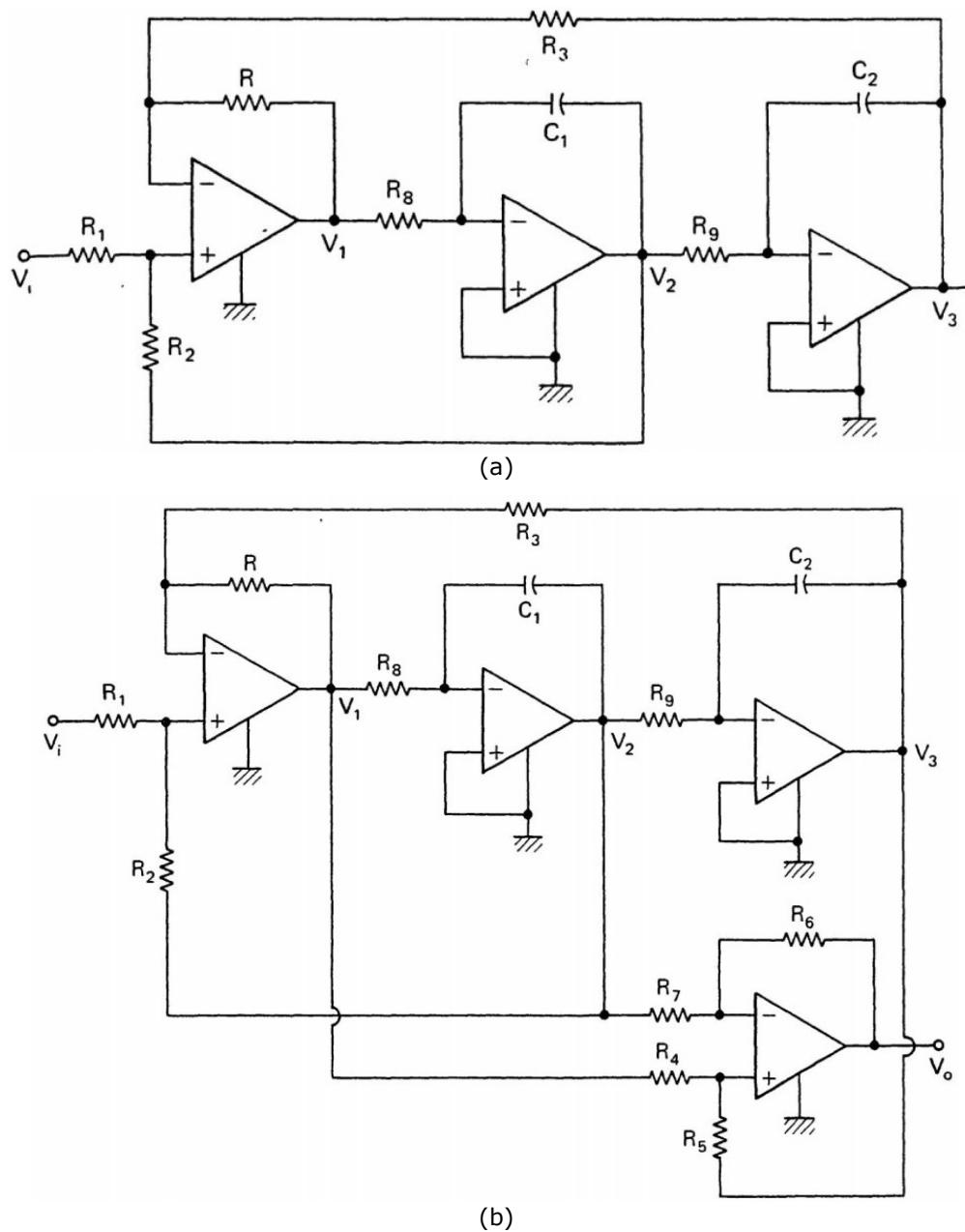


Fig. 10-29 (a) Un biquad básico de múltiples amplificadores, (b) Un biquad completo de múltiples amplificadores.

Al comparar (10-134) y (10-135), formamos un conjunto de ecuaciones de diseño de la siguiente manera:

$$\frac{R_6(R_4 + R_5)}{C_1 R_8 R_5 (R_6 + R_7)} = a_1 \quad (10-136a)$$

$$\frac{R_4}{C_1 R_8 C_2 R_9 R_5} = a_0 \quad (10-136b)$$

$$\frac{R_1(R + R_3)}{C_1 R_8 R_3 (R_1 + R_2)} = b_1 \quad (10-136c)$$

$$\frac{R}{C_1 R_8 C_2 R_9 R_3} = b_0 \quad (10-136d)$$

y

$$k = \frac{R_2 R_5 (R + R_3) (R_6 + R_7)}{R_3 R_7 (R_1 + R_2) (R_4 + R_5)} \quad (10-136e)$$

Debido a que solo hay cinco restricciones entre las 12 variables, hay siete grados de libertad. En situaciones prácticas, estos grados de libertad se utilizan para establecer ecuaciones de diseño adicionales correspondientes a propiedades deseables, como sensibilidades mínimas, dispersión mínima de valores de resistencias y capacitores, sumas mínimas de todas las resistencias y capacitancias utilizadas en el circuito, elecciones juiciosas de valores de capacitores para cumplir con los requisitos de disponibilidad de condensadores, coincidencia de impedancia de entrada y salida y seguimiento de temperatura. En general, incluso después de muchas restricciones adicionales (menos de siete), todavía hay muchas realizaciones de circuitos posibles.

**Ejemplo 10-17** Realice

$$H(s) \triangleq \frac{V_o}{V_i} = k \frac{s^2 + 2s + 3}{s^2 + 3s + 5} \quad (10-137)$$

por el circuito biquadrático de la figura 10-29, donde  $k$  es arbitrario.

**Solución:** Las ecuaciones de diseño son

$$\frac{R_6(R_4 + R_5)}{C_1 R_8 R_5 (R_6 + R_7)} = 2 \quad (10-138a)$$

$$\frac{R_4}{C_1 R_8 C_2 R_9 R_5} = 3 \quad (10-138b)$$

$$\frac{R_1(R + R_3)}{C_1 R_8 R_3 (R_1 + R_2)} = 3 \quad (10-138c)$$

Hay cuatro ecuaciones y 12 incógnitas. Obviamente, hay muchas soluciones. Un conjunto de soluciones viene dado por

$$C_1 = C_2 = 1 \text{ F.}$$

$$R_1 = R_2 = R_3 = R_5 = R_6 = R_7 = R_8 = R_9 = 1 \Omega \quad (10-139)$$

$$R_4 = 3 \Omega \text{ and } R = 5 \Omega$$

Con estos valores de circuito, (10-136e) da

$$k = \frac{3}{2} \quad (10-140)$$

Utilizando los valores de los elementos de (10-139), en la figura 10-30 se muestra una realización de circuito de (10-137).

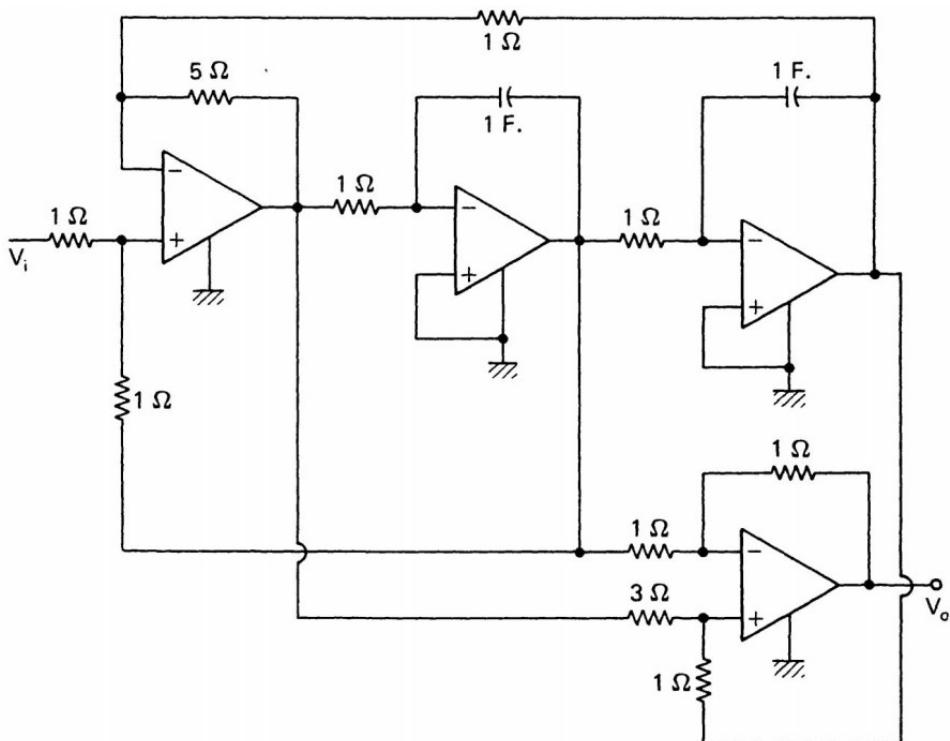


Fig. 10-30 Realización del circuito A de (10-137)

**Ejemplo 10-18** Realice las siguientes dos funciones de transferencia simultáneamente en un circuito

$$H_1(s) = \frac{6}{s^2 + 3s + 5} \quad (10-141a)$$

$$H_2(s) = -\frac{3s}{s^2 + 3s + 5} \quad (10-141b)$$

Solución: De (10-133a) y (10-133b), obtenemos las siguientes ecuaciones de diseño:

$$\frac{R_2(R + R_3)}{R_3(R_1 + R_2)(C_1 C_2 R_8 R_9)} = 6 \quad (10-142a)$$

$$\frac{R_1(R + R_3)}{(R_1 + R_2)R_3 C_1 R_8} = 3 \quad (10-142b)$$

$$\frac{R}{R_3 C_1 C_2 R_8 R_9} = 5 \quad (10-142c)$$

$$C_2 R_9 = 0.5 \quad (10-142d)$$

Dividiendo (10-142a) por (10-142b) da

$$\frac{R_2}{R_1 C_2 R_9} = \frac{6}{3}$$

o

$$\frac{R_2}{R_1} = 2C_2 R_9 = 1$$

Por lo tanto,

$$R_1 = R_2 \quad (10-143)$$

Sustituyendo (10-143) en (10-142b) y (10-142d) en (10-142c), obtenemos

$$\frac{R + R_3}{R_3 C_1 R_8} = 6 \quad (10-144a)$$

$$\frac{R}{R_3 C_1 R_8} = 5C_2 R_9 = 2.5 \quad (10-144b)$$

Combinando las dos ecuaciones en (10-144) se obtiene

$$\frac{1}{C_1 R_8} = 6 - 2.5 = 3.5 \quad (10-144c)$$

y

$$\frac{R}{R_3} = 2.5 C_1 R_8 = \frac{2.5}{3.5} = 0.71 \quad (10-144d)$$

Sea

$$C_1 = C_2 = 1 \text{ F.} \quad (10-145a)$$

Entonces (10-142d) y (10-144c) producen

$$R_9 = 0.5 \Omega \quad \text{y} \quad R_8 = \frac{1}{3.5} = 0.29 \Omega \quad (10-145b)$$

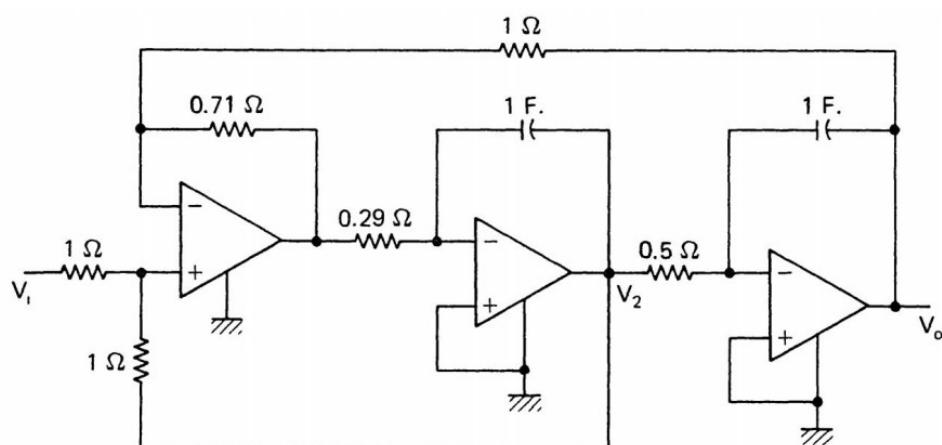
Además, si dejamos

$$R_2 = R_3 = 1 \Omega \quad (10-145c)$$

luego (10-143) y (10-144d) dan

$$R_1 = 1 \Omega \quad \text{y} \quad R = 0.71 \Omega \quad (10-145d)$$

Observe que los valores de los elementos de (10-145) satisfacen las ecuaciones de restricción de (10-142). La figura 10-31 muestra un circuito que implementa los valores de los elementos de (10-145). Obtenemos  $H_1(s)$  si tomamos  $V_3$  como nuestro voltaje de salida. Con  $V_2$  como salida, obtenemos  $H_2(s)$ .



**Fig. 10-31** A circuit realizing simultaneously the two transfer functions of (10-141).

Para el circuito bicuadrado de múltiples amplificadores de la figura 10-29, la frecuencia polar  $\omega_0$  y el par de polos  $Q$  se pueden encontrar a partir de (10-133):

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{R}{R_3} \frac{1}{C_1 C_2 R_8 R_9}} \quad (10-146)$$

$$\begin{aligned} Q &= \sqrt{\frac{R}{R_3} \frac{1}{C_1 C_2 R_8 R_9}} \frac{C_1 R_3 R_8 (R_1 + R_2)}{R_1 (R + R_3)} \\ &= \sqrt{\frac{R R_3 C_1 R_8}{C_2 R_9}} \frac{R_1 + R_2}{R_1 (R + R_3)} \end{aligned} \quad (10-147)$$

Por lo tanto, tenemos

$$\begin{aligned} S_{R_3}^{\omega_0} &= S_{R_8}^{\omega_0} = S_{R_9}^{\omega_0} = S_{C_1}^{\omega_0} = S_{C_2}^{\omega_0} = -\frac{1}{2}, \\ S_R^{\omega_0} &= \frac{1}{2}, \quad \text{and} \quad S_x^{\omega_0} = 0 \end{aligned} \quad (10-148)$$

donde  $x$  es cualquier variable distinta de  $R$ ,  $R_3$ ,  $R_8$ ,  $R_9$ ,  $C_1$  y  $C_2$ . Asimismo, encontramos que

$$\begin{aligned} S_{C_1}^Q &= \frac{1}{2}, S_{C_2}^Q = -\frac{1}{2}, S_{R_8}^Q = \frac{1}{2}, S_{R_9}^Q = -\frac{1}{2} \\ S_{R_2}^Q &= \frac{R_2}{R_1 + R_2} < 1, \quad S_{R_1}^Q = -S_{R_2}^Q \\ S_{R_3}^Q &= \frac{1}{2} \frac{R - R_3}{R + R_3} < \frac{1}{2}, \quad \text{and} \quad S_R^Q = -S_{R_3}^Q \end{aligned} \quad (10-149)$$

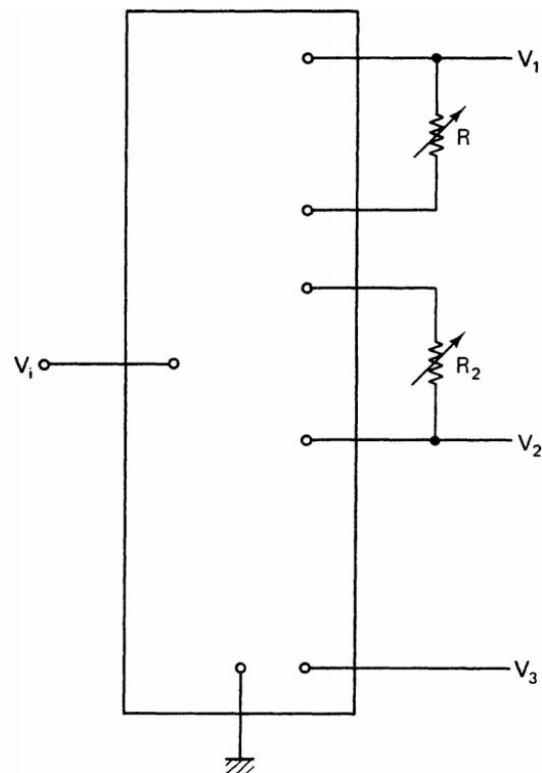
En general, los circuitos biquadráticos de múltiples amplificadores son menos sensibles que los biquadráticos de un solo amplificador. Además, el ajuste posterior y la sintonización<sup>136</sup> se pueden realizar fácilmente. Por ejemplo, para el circuito biquadrático de la Fig. 10-29, con todos los valores fijos excepto  $R_2$  y  $R$ , podemos usar  $R$  para ajustar el circuito para que opere a una nueva  $\omega_0$ . Entonces, con este valor recién encontrado de  $R$  fijo,  $R_2$  se puede ajustar para dar otro valor deseado de  $Q$ .

Comercialmente, esto es bastante deseable, porque podemos poner todos los elementos del circuito, excepto  $R$  y  $R_2$  en una caja cerrada o en un chip. Conectándonos a esta caja externamente con diferentes valores de  $R$  y  $R_2$  como se muestra en la Fig. 10-32, podemos realizar una sección de filtro de segundo orden con diferente  $\omega_0$  de frecuencia de polo y par de polos  $Q$ .<sup>137</sup> El principal inconveniente del amplificador múltiple biquadrado circuitos es que contienen muchos elementos, tanto pasivos como activos.

136 Debido a las tolerancias de los componentes del circuito, el circuito de hardware no siempre produce exactamente los valores de  $\omega_0$  y  $Q$  deseados. Por lo tanto, los ajustes en los componentes del circuito son necesarios para anular estas imprecisiones.

En algunas situaciones, también se necesitan ajustes posteriores para sintonizar el filtro para que funcione de manera eficiente para un valor de  $\omega_0$  o  $Q$  diferente al que se diseñó originalmente para el circuito.

137 Ver Referencias [25] y [26].



**Fig. 10-32** A basic universal multiple-amplifier biquad with two external resistors for  $\omega_0$  and  $Q$  adjustments.

### 10-2-2-2. Amplificador Múltiple Biquad—Circuito de Tow.

En la figura 10-33(a) se muestra otro biquad de amplificador múltiple versátil presentado por Tow. De izquierda a derecha, este circuito consta de un integrador "con fugas", un integrador y un VCVS inversor. Para analizar el circuito de la figura 10-33(a), aplicamos el principio de cortocircuito virtual y escribimos ecuaciones KCL en el nodo de entrada de cada amplificador operacional para obtener

$$\frac{V_t}{R_4} + \left( \frac{1}{R_1} + sC_1 \right) V_1 + \frac{V_3}{R_3} = 0 \quad (10-150)$$

$$V_2 = -\frac{V_1}{sC_2R_2} \quad (10-151)$$

$$V_3 = -\frac{R_6}{R_5} V_2 \quad (10-152)$$

Juntos, (10-151) y (10-152) producen

$$V_3 = \frac{R_6}{R_5} \frac{V_1}{sC_2R_2} \quad (10-153)$$

Sustituyendo (10-153) en (10-150), obtenemos

$$\frac{V_t}{R_4} = -\left( \frac{1}{R_1} + sC_1 + \frac{R_6}{R_3R_5sC_2R_2} \right) V_1 \quad (10-154)$$

Después de algunas manipulaciones algebraicas, llegamos a las siguientes funciones de transferencia:

$$\frac{V_1}{V_t} = -\frac{1}{R_4C_1} \frac{s}{s^2 + \left(\frac{1}{R_1C_1}\right)s + \left(\frac{1}{R_2R_3C_1C_2}\right)\frac{R_6}{R_5}} \quad (10-155a)$$

$$\frac{V_2}{V_t} = \frac{1}{R_2R_4C_1C_2} \frac{1}{s^2 + \left(\frac{1}{R_1C_1}\right)s + \left(\frac{1}{R_2R_3C_1C_2}\right)\frac{R_6}{R_5}} \quad (10-155b)$$

$$\frac{V_3}{V_t} = -\frac{R_6}{R_5} \left( \frac{1}{R_2R_4C_1C_2} \right) \frac{1}{s^2 + \left(\frac{1}{R_1C_1}\right)s + \left(\frac{1}{R_2R_3C_1C_2}\right)\frac{R_6}{R_5}} \quad (10-155c)$$

Ahora consideraremos varias secciones de filtros de segundo orden que pueden realizarse mediante la configuración básica del circuito de la Fig. 10-33(a).

**1. PASO BAJO.** Si la función de transferencia deseada es de tipo paso bajo, es decir,

$$H_{LP}(s) = \frac{a_0}{s^2 + b_1 s + b_0} \quad (10-156)$$

entonces podemos elegir  $V_2$  o  $V_3$  como nuestro voltaje de salida. Para ser específicos, elijamos  $V_2$  como nuestra salida. Al comparar (10-156) y (10-155b), el

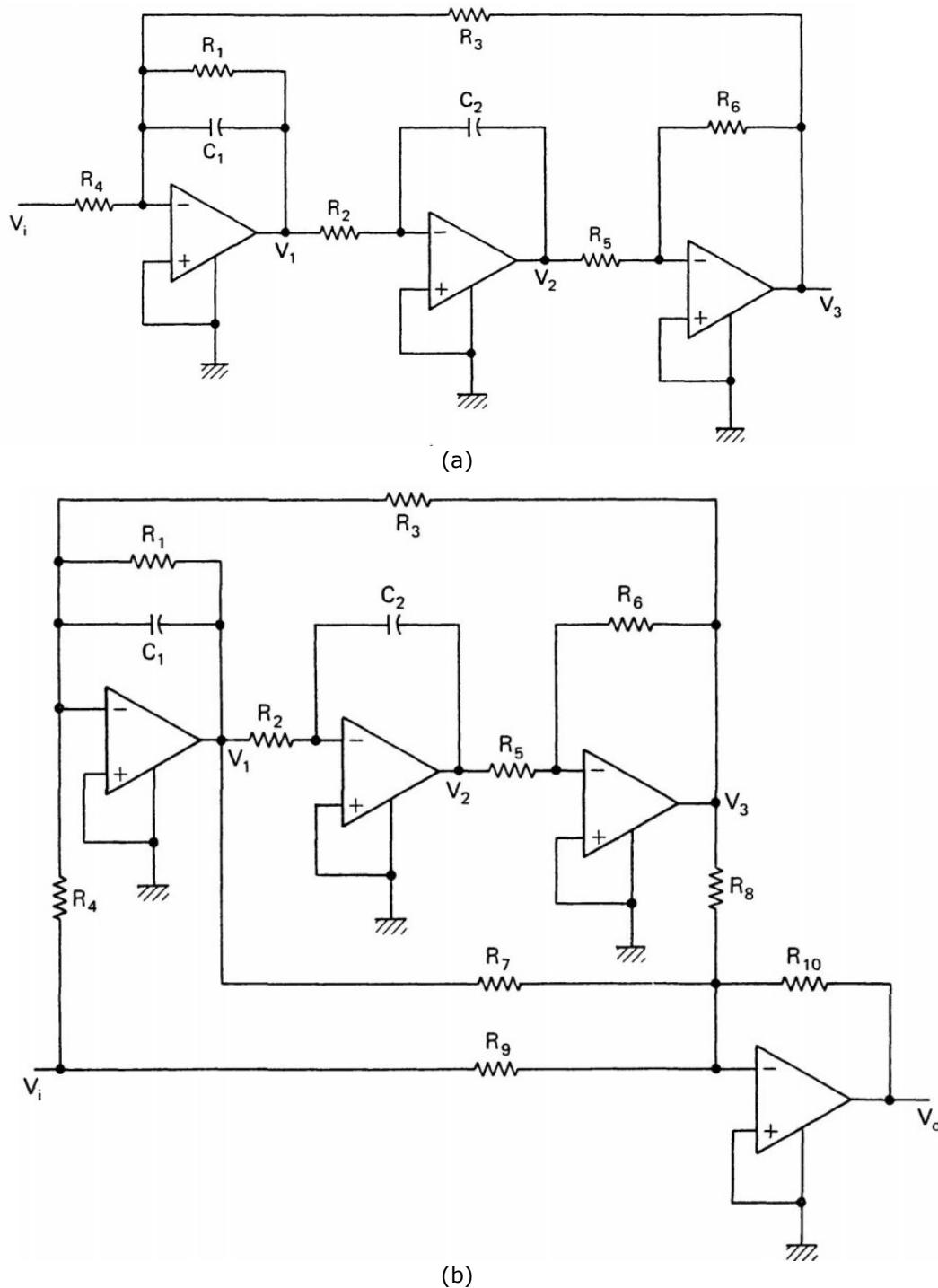


Fig. 10-33 Biquad de amplificadores múltiples de Tow, (a) Circuito básico, (b) Circuito completo.

las ecuaciones de diseño son

$$\begin{aligned}\frac{1}{R_1 C_1} &= b_1 \\ \frac{1}{R_2 R_3 C_1 C_2} \frac{R_6}{R_5} &= b_0 \\ \frac{1}{R_2 R_4 C_1 C_2} &= a_0\end{aligned}\quad (10-157)$$

Una solución de (10-157) viene dada por

$$\begin{aligned}R_1 &= \frac{1}{b_1 C_1}, \quad R_2 = \frac{k_1}{\sqrt{b_0} C_2}, \quad R_3 = \frac{1}{k_1 \sqrt{b_0} C_1}, \\ R_4 &= \frac{\sqrt{b_0}}{k_1 a_0 C_1}, \quad \text{and} \quad R_5 = R_6\end{aligned}\quad (10-158)$$

donde  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $R_5$  y  $k_1$  son números positivos arbitrarios.

**2. PASABANDA.** Si la función de transferencia deseada tiene la forma de

$$H_{BP}(s) = -\frac{a_1 s}{s^2 + b_1 s + b_0} \quad (10-159)$$

entonces podemos seleccionar  $V_1$  como la salida. Al comparar (10-159) y (10-155a), obtenemos las siguientes ecuaciones de diseño

$$\begin{aligned}\frac{1}{R_4 C_1} &= a_1 \\ \frac{1}{R_1 C_1} &= b_1 \\ \frac{1}{R_2 R_3 C_1 C_2} \frac{R_6}{R_5} &= b_0\end{aligned}\quad (10-160)$$

Una solución de (10-160) es

$$\begin{aligned}R_1 &= \frac{1}{b_1 C_1}, \quad R_2 = \frac{k_1}{\sqrt{b_0} C_2}, \quad R_3 = \frac{1}{k_1 \sqrt{b_0} C_1}, \\ R_4 &= \frac{1}{a_1 C_1}, \quad \text{and} \quad R_5 = R_6\end{aligned}\quad (10-161)$$

donde  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $R_5$  y  $k_1$  son números positivos arbitrarios.

Debido a que los capacitores discretos agrupados no están disponibles en todos los valores, nos gustaría dejar los valores de los capacitores como parámetros libres, como se hizo en (10-158) y (10-161). Observe que el amplificador operacional más a la derecha en la figura 10-33(a) se usa para realizar un VCVS. En nuestras soluciones en (10-158) y (10-161), establecemos  $R_5 = R_6$ . Por lo tanto, el VCVS funciona como un circuito de inversión de signo. En general,  $R_5 = R_6$  está entre  $1 K\Omega$  y  $20 K\Omega$ . Esto significa que en (10-158) y (10-161) el único parámetro libre es  $k_1$ . Muy a menudo,  $k_1$  se usa para minimizar la dispersión de valores de los resistores  $R_5$  a  $R_6$  en la Fig. 10-33(a).

**Ejemplo 10-19** Realice

$$H(s) = \frac{10^9}{s^2 + 10^4 s + 10^8} \quad (10-162)$$

por el circuito de la Fig. 10-33(a).

**Solución:** De (10-158), una solución a la ecuación de diseño de (10-157), donde  $b_1=10^4$ ,  $b_0=10^8$ ,  $a_0=10^9$  y  $C_1=C_2=0.1\mu F$ , es

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{1}{10^4 \times 10^{-7}} = 1 \text{ K}\Omega \\ R_2 &= \frac{k_1}{10^4 \times 10^{-7}} = k_1 \text{ K}\Omega \\ R_3 &= \frac{1}{k_1 \times 10^4 \times 10^{-7}} = \frac{1}{k_1} \text{ K}\Omega \\ R_4 &= \frac{10^4}{k_1 \times 10^9 \times 10^{-7}} = \frac{100}{k_1} \Omega \\ R_5 &= R_6 = 1 \text{ K}\Omega \end{aligned} \quad (10-163)$$

Sin recurrir a ninguna técnica de optimización, un buen valor de  $k_1$  con el fin de minimizar la dispersión de los valores de resistencia es  $k_1=1$ . Por lo tanto, obtenemos

$$\begin{aligned} R_1 &= R_2 = R_3 = R_5 = R_6 = 1 \text{ K}\Omega \\ R_1 &= 100 \Omega \end{aligned} \quad (10-164)$$

En la Fig. 10-34 se da una realización del circuito de (10-162) a través de (10-164).

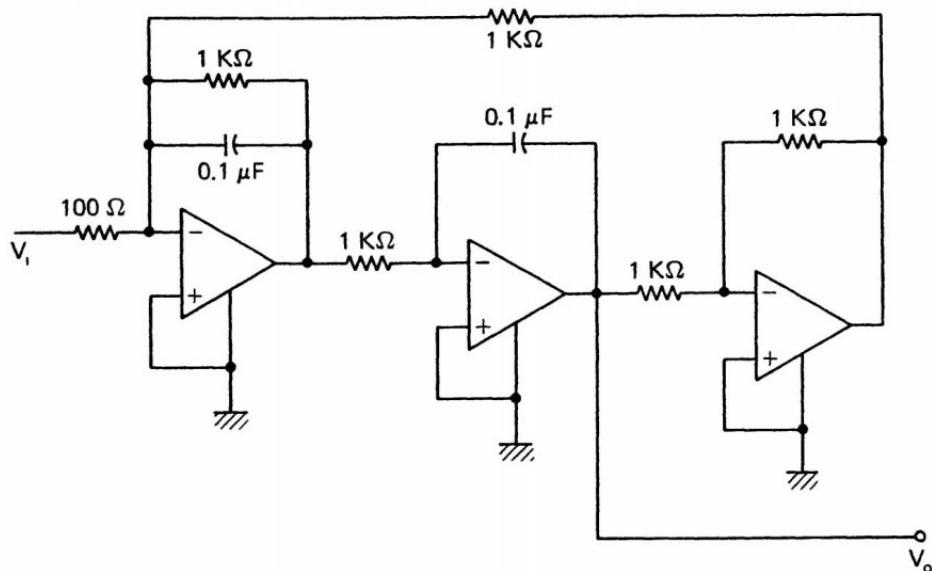


Fig. 10-34 A circuit realization of the low-pass filter of (10-162).

Como indica (10-155), la figura 10-33(a) sólo puede producir filtros de paso de banda y de paso bajo. Sin embargo, al agregar un circuito de verano adicional a la figura 10-33(a), como se muestra en la Fig. 10-33(b), podemos obtener filtros de paso alto y de paso total, así como filtros de muesca o de rechazo de banda. La función de transferencia que relaciona  $V_o$  y  $V_i$  de la Fig. 10-33(b) viene dada por

$$H(s) \triangleq -\frac{R_{10}}{R_9} \frac{s^2 + \frac{1}{R_1 C_1} \left[ 1 - \frac{R_1 R_9}{R_4 R_7} \right] s + \frac{1}{R_2 R_3 C_1 C_2} \left[ 1 - \frac{R_3 R_9}{R_4 R_8} \right] \frac{R_6}{R_5}}{s^2 + \left( \frac{1}{R_1 C_1} \right) s + \left( \frac{1}{R_2 R_3 C_1 C_2} \right) \frac{R_6}{R_5}} \quad (10-165)$$

Con base en (10-165), podemos usar el circuito de la Fig. 10-33(b) para realizar las formas restantes de funciones de transferencia biquadráticas.

**3. PASO ALTO.** Si la función de transferencia deseada es un filtro de paso alto,

$$H(s) = -\frac{a_2 s^2}{s^2 + b_1 s + b_0} \quad (10-166)$$

Luego, al comparar (10-165) y (10-166), obtenemos las siguientes ecuaciones de diseño:

$$\begin{aligned} \frac{R_{10}}{R_9} &= a_2, \quad \frac{R_1 R_9}{R_4 R_7} = 1, \quad \frac{R_3 R_9}{R_4 R_8} = 1, \\ \frac{1}{R_1 C_1} &= b_1, \quad \text{and} \quad \frac{1}{R_2 R_3 C_1 C_2} \left( \frac{R_6}{R_5} \right) = b_0 \end{aligned} \quad (10-167)$$

Una solución de (10-167) es

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{1}{b_1 C_1}, \quad R_2 = \frac{k_1}{\sqrt{b_0} C_2}, \quad R_3 = \frac{1}{k_1 \sqrt{b_0} C_1}, \\ R_4 &= \frac{1}{k_2 a_2 b_1 C_1}, \quad R_7 = k_2 R_{10}, \quad R_8 = \frac{k_2}{k_1} \left( \frac{b_1}{\sqrt{b_0}} \right) R_{10}, \\ R_9 &= \frac{R_{10}}{a_2}, \quad \text{and} \quad R_5 = R_6 \end{aligned} \quad (10-168)$$

donde  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $R_5$  y  $R_{10}$  son números positivos arbitrarios. Como se discutió anteriormente,  $C_1$ ,  $C_2$  y  $R_5$  no son realmente libres, pero  $k_1$ ,  $k_2$  y  $R_{10}$  son parámetros completamente libres que se pueden configurar para diversas consideraciones de diseño.

**4. PASO TODO.** Si la función de transferencia deseada se especifica mediante

$$H(s) = -k \frac{s^2 - b_1 s + b_0}{s^2 + b_1 s + b_0} \quad (10-169)$$

entonces las ecuaciones de diseño son

$$\begin{aligned} \frac{R_{10}}{R_9} &= k, \quad \frac{1}{R_1 C_1} = b_1, \quad \frac{R_1 R_9}{R_4 R_7} = 2, \\ \frac{1}{R_2 R_3 C_1 C_2} \left( \frac{R_6}{R_5} \right) &= b_0, \quad \text{and} \quad \frac{R_3 R_9}{R_4 R_8} = 0 \end{aligned} \quad (10-170)$$

Una solución de (10-170) es

$$\begin{aligned}
R_1 &= \frac{1}{b_1 C_1}, \quad R_2 = \frac{k_1}{\sqrt{b_0} C_2}, \quad R_3 = \frac{1}{k_1 \sqrt{b_0} C_1}, \\
R_4 &= \frac{1}{k_2 2b_1 C_1}, \quad R_7 = \frac{k_2 R_{10}}{k}, \quad R_8 = \infty = \text{an open circuit}, \\
R_9 &= \frac{1}{k} R_{10}, \quad \text{and} \quad R_5 = R_6
\end{aligned} \tag{10-171}$$

donde  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $R_5$ ,  $k_1$ ,  $k_2$  y  $R_{10}$  son números positivos arbitrarios,  $C_1$ ,  $C_2$  y  $R_5$  son parcialmente fijos, y  $k_1$ ,  $k_2$  y  $R_{10}$  son parámetros libres que se establecen para diversas consideraciones de diseño.

**5. MUESCA O RECHAZO DE BANDA.** Suponga que la función de transferencia deseada es un filtro de muesca de la forma

$$H(s) = -\frac{a_2 s^2 + a_0}{s^2 + b_1 s + b_0} \tag{10-172}$$

Al comparar (10-165) y (10-172), obtenemos el siguiente conjunto de ecuaciones de diseño:

$$\begin{aligned}
\frac{R_{10}}{R_9} &= a_2, \quad \frac{R_1 R_9}{R_4 R_7} = 1, \\
\left(\frac{R_{10}}{R_9}\right) \frac{1}{R_2 R_3 C_1 C_2} \left(1 - \frac{R_3 R_9}{R_4 R_8}\right) \frac{R_6}{R_5} &= a_0, \\
\frac{1}{R_1 C_1} &= b_1, \quad \text{and} \quad \frac{1}{R_2 R_3 C_1 C_2} \left(\frac{R_6}{R_5}\right) = b_0
\end{aligned} \tag{10-173}$$

Una solución a (10-173) es

$$\begin{aligned}
R_1 &= \frac{1}{b_1 C_1}, \quad R_2 = \frac{k_1}{\sqrt{b_0} C_2}, \quad R_3 = \frac{1}{k_1 \sqrt{b_0} C_1}, \\
R_4 &= \frac{1}{k_2 a_2 b_1 C_1}, \quad R_7 = k_2 R_{10}, \quad R_8 = \frac{k_2 a_2 b_1}{k_1 (a_2 b_0 - a_0)} \sqrt{b_0} R_{10}, \\
R_9 &= \frac{R_{10}}{a_2}, \quad \text{and} \quad R_5 = R_6
\end{aligned} \tag{10-174}$$

donde  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $R_5$ ,  $k_1$ ,  $k_2$  y  $R_{10}$  son números positivos arbitrarios. Tenga en cuenta que cuando  $a_2 b_0 < a_0$ , (10-174) produce un valor negativo para  $R_3$ . Por lo tanto, desde un punto de vista práctico, el circuito de la Fig. 10-33(b) puede realizar un filtro de muesca solo cuando los coeficientes satisfacen la condición

$$a_2 b_0 \geq a_0 \tag{10-175}$$

Recuerde que en (10-155b) y (10-155c), además de un multiplicador constante positivo,  $V_2$  y  $V_3$  de la Fig. 10-33(a) son negativos entre sí. Por lo tanto, si se usa el circuito sumador de la Fig. 10-33(b) para formar una suma ponderada de  $V_i$ ,  $V_1$  y  $V_2$  en lugar de  $V_3$ , el término constante en el polinomio numerador de (10-165) se convierte en una suma de dos términos en lugar del presente caso de una diferencia. En consecuencia, esperamos que no haya problema cuando  $a_2 b_0 < a_0$ . Para formalizar esta idea, consideremos el circuito de la figura 10-35, donde el interruptor se mueve de 1 a 2 cuando  $a_2 b_0 \geq a_0$  y de 1 a 3 cuando  $a_2 b_0 < a_0$ . En el primer caso, las ecuaciones de diseño más un conjunto de soluciones viene dado por (10-173) y (10-174). En este último caso, la función de transferencia del circuito está dada por

$$H(s) \triangleq \frac{V_o}{V_i} = -\frac{R_{10}}{R_9} \frac{s^2 + \frac{1}{R_1 C_1} \left[ 1 - \frac{R_1 R_9}{R_4 R_7} \right] s + \frac{1}{R_2 R_3 C_1 C_2} \left[ \frac{R_6}{R_5} + \frac{R_3 R_9}{R_4 R_8} \right]}{s^2 + \left( \frac{1}{R_1 C_1} \right) s + \left( \frac{1}{R_2 R_3 C_1 C_2} \right) \frac{R_6}{R_5}}$$

(10-176)

Una comparación de (10-172) y (10-176) produce un conjunto de ecuaciones de diseño

$$\begin{aligned} \frac{R_{10}}{R_9} &= a_2, \quad \frac{R_1 R_9}{R_4 R_7} = 1, \\ \left( \frac{R_{10}}{R_9} \right) \frac{1}{R_2 R_3 C_1 C_2} \left( \frac{R_6}{R_5} + \frac{R_3 R_9}{R_4 R_8} \right) &= a_0, \\ \frac{1}{R_1 C_1} &= b_1, \quad \text{and} \quad \left( \frac{1}{R_2 R_3 C_1 C_2} \right) \frac{R_6}{R_5} = b_0 \end{aligned} \quad (10-177)$$

Una solución de (10-177) viene dada por

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{1}{b_1 C_1}, \quad R_2 = \frac{k_1}{\sqrt{b_0 C_2}}, \quad R_3 = \frac{1}{k_1 \sqrt{b_0 C_1}}, \\ R_4 &= \frac{1}{k_2 a_2 b_1 C_1}, \quad R_7 = k_2 R_{10}, \\ R_8 &= \frac{k_2}{k_1} \left( \frac{a_2 b_1}{a_0 - a_2 b_0} \right) \sqrt{b_0} R_{10}, \quad R_9 = \frac{R_{10}}{a_2}, \quad \text{and} \quad R_5 = R_6 \end{aligned} \quad (10-178)$$

donde  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $R_5$ ,  $k_1$ ,  $k_2$  y  $R_{10}$  son números positivos arbitrarios. Tenga en cuenta que con la excepción de  $R_3$ , (10-178) es lo mismo que (10-174).

**Ejemplo 10-20** Realice

$$H(s) = \frac{s^2 + 3.96 \times 10^8}{s^2 + (2 \times 10^3)s + (4 \times 10^8)} \quad (10-179)$$

**Solución:** Porque

$$a_1 b_0 = 4 \times 10^8 > a_0 = 3.96 \times 10^8 \quad (10-180)$$

el interruptor de la Fig. 10-35 se mueve de 1 a 2, y (10-174) es aplicable aquí. Sea

$$C_1 = C_2 = 0.01 \mu F, \quad R_{10} = 10 K\Omega, \quad \text{y} \quad k_1 = k_2 = 1$$

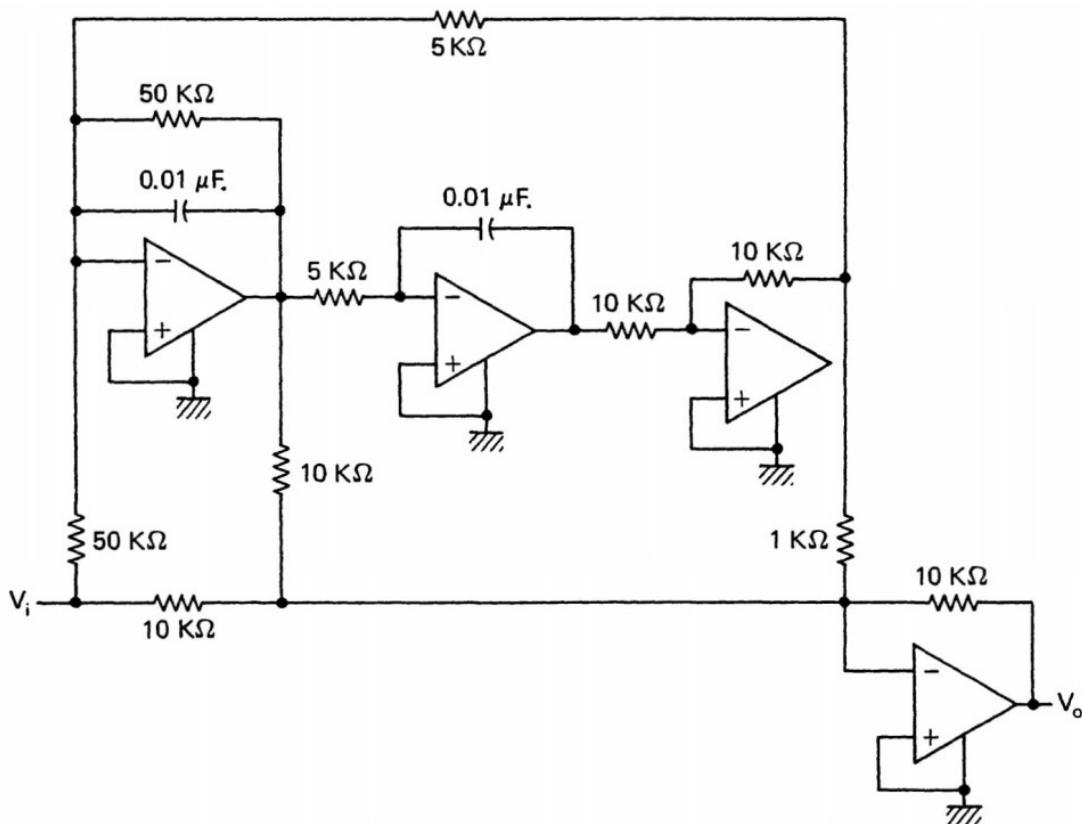


Fig. 10-36 A circuit realization of the notch filter of (10-179).

Entonces (10-174) da

$$\begin{aligned} C_1 &= 0.01 \mu\text{F}, \quad C_2 = 0.01 \mu\text{F}, \\ R_1 &= 50 \text{ k}\Omega, \quad R_2 = 5 \text{ k}\Omega, \quad R_3 = 5 \text{ k}\Omega, \\ R_4 &= 50 \text{ k}\Omega, \quad R_5 = 10 \text{ k}\Omega, \quad R_6 = 10 \text{ k}\Omega, \\ R_7 &= 10 \text{ k}\Omega, \quad R_8 = 1 \text{ k}\Omega, \quad R^9 = 10 \text{ k}\Omega, \quad \text{and} \quad R_{10} = 10 \text{ k}\Omega \end{aligned} \quad (10-181)$$

Se obtiene una realización del circuito de (10-179) sustituyendo los valores de (10-181) en la figura 10-35, como se muestra en la figura 10-36.

De (10-155) y (10-176), el polinomio denominador  $B(s)$  para los circuitos de las Figs. 10-33 y 10-35 está dada por

$$B(s) = s^2 + \left(\frac{1}{R_1 C_1}\right)s + \left(\frac{1}{R_2 R_3 C_1 C_2}\right) \frac{R_6}{R_5} = s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2 \quad (10-182)$$

donde

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{R_2 R_3 C_1 C_2} \left(\frac{R_6}{R_5}\right)} \quad (10-183)$$

y

$$Q = R_1 C_1 \omega_0 = R_1 \sqrt{\frac{C_1}{R_2 R_3 C_2} \left(\frac{R_6}{R_5}\right)} \quad (10-184)$$

Por lo tanto,

$$S_{R_2}^{\omega_0} = S_{R_3}^{\omega_0} = S_{C_1}^{\omega_0} = S_{C_2}^{\omega_0} = S_{C_3}^{\omega_0} = -\frac{1}{2}$$

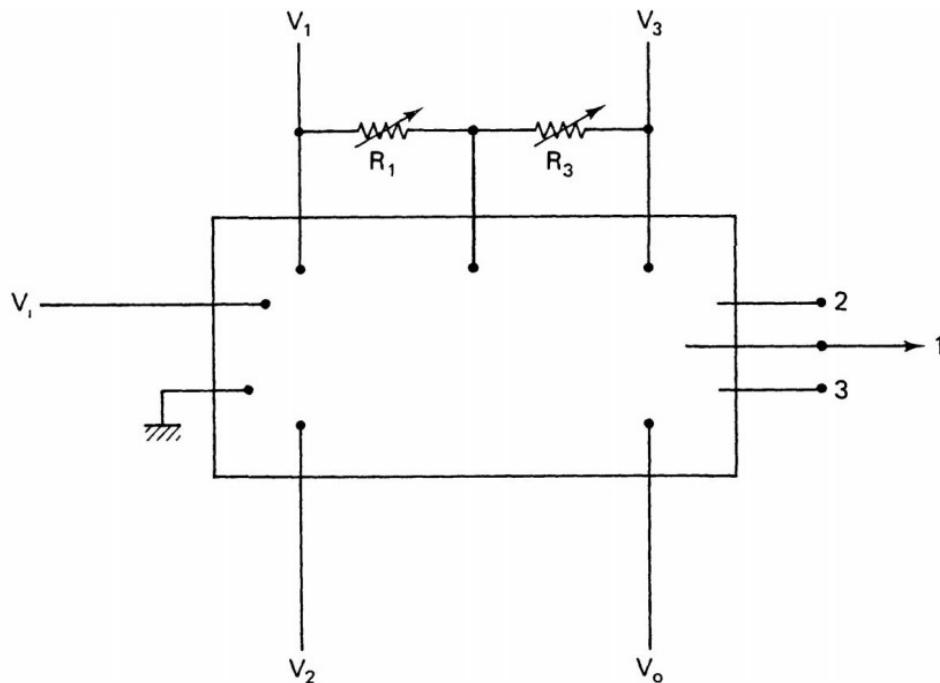
$$S_{R_4}^{\omega_0} = \frac{1}{2} \quad (10-185)$$

y

A los efectos de los ajustes posteriores, observamos que  $R_3$  se puede usar para ajustar el valor de  $\omega_0$  y, una vez hecho esto,  $R_1$  se puede usar para ajustar el valor del par de polos deseado de  $Q$ . Así, podemos encapsular el circuito completo de la Fig. 10-35 con las posiciones del interruptor,  $R_3$  y  $R_1$  colocadas externamente, como se muestra en la Fig. 10-37. Al variar  $R_1$  y  $R_3$  para los valores deseados de  $\omega_0$  y  $Q$ , la figura 10-37 se puede usar para realizar una amplia gama de circuitos de filtro.

### 10-2-2-3. Algunos comentarios.

En las dos subsecciones anteriores, hemos introducido dos biquads de amplificador único (SAB) y dos biquads de amplificadores múltiples (MAB). En este subapartado hacemos algunos comentarios sobre estas técnicas de realización.



**Fig. 10-37** A universal multiple-amplifier biquad with two external resistors for  $\omega_0$  and  $Q$  adjustments.

Los circuitos SAB de la tabla 10-1 requieren el menor número de elementos en sus realizaciones. Se pueden desarrollar procedimientos de sintonización para ajustar los valores de  $\omega_0$  y  $Q$  para algunos de estos circuitos. Estos circuitos son, en general, adecuados para funciones bicoatráticas con  $Q \leq 5$ .

Los circuitos SAB de Friend usan más elementos que los de la tabla 10-1. A cambio, los circuitos de Friend tienen una topología para todas las funciones bicoatráticas (excepto para el caso de paso bajo). Por lo tanto, los circuitos SAB de Friend son adecuados para la integración en chips. En general, los circuitos de Friend son menos sensibles que los de la Tabla 10-1 y se pueden usar para diseñar filtros con  $Q \leq 15$ . Una desventaja de los circuitos SAB de Friend es que, excepto en el caso del paso de banda, los procedimientos de sintonización para los ajustes de  $\omega_0$  y  $Q$  son imposible.

Los dos circuitos MAB presentados en la subsección 10-2-2-2 tienen aproximadamente el mismo rendimiento. Los procedimientos de sintonización y ajuste para los valores de  $\omega_0$  y  $Q$  se pueden desarrollar fácilmente. Con unas pocas resistencias externas, las partes internas pueden ser idénticas para una amplia variedad de circuitos de filtro. Por lo tanto, los circuitos MAB se pueden producir en masa, lo que reduce su costo. Esto compensa en gran medida la gran cantidad de componentes pasivos y activos necesarios en las realizaciones.

En comparación con los circuitos SAB, los circuitos MAB son menos sensibles y pueden diseñarse para rangos de frecuencia más altos. Esto se debe a que la demanda sobre los niveles de ganancia de los amplificadores operacionales es menor y, por lo tanto, se amplían los rangos de frecuencia de los circuitos MAB. Además, los circuitos MAB se pueden utilizar para aplicaciones en las que la  $Q$  de las funciones bicoatráticas es inferior a 50.

Para valores de  $Q$  más altos, debemos tener en cuenta la no idealidad de los amplificadores operacionales y proporcionar retroalimentación y acoplamiento entre las secciones de filtro

bicuadráticas para reducir las sensibilidades. Ver, por ejemplo, las Referencias [27] a [30].

### 10-2-3. Configuraciones de circuitos complementarios

En general, es más fácil y/o más económico generar filtros de paso bajo, paso de banda y paso alto que filtros de muesca(notch) y de paso total. Por ejemplo, la tabla Sallen-Key no tiene una realización simple para un filtro de muesca o de paso total. Los circuitos bicuadráticos de múltiples amplificadores requieren amplificadores adicionales para generar filtros de muesca o de paso total. En esta sección, presentamos una técnica para generar un filtro de rechazo de banda o de paso total a partir de un filtro de paso de banda a través del concepto de una función de transferencia complementaria.

Se sabe desde hace mucho tiempo que, en una red pasiva de tres terminales sin conexión interna a tierra, la función de transferencia de voltaje de una entrada a la salida debe ser el complemento de la función de transferencia de la otra entrada a la salida. Por ejemplo, en la Fig. 10-38(a), tenemos

$$H_2(s) = 1 - H_1(s) \quad (10-187a)$$

donde

$$H_1(s) = \frac{V_o}{V_1} \Big|_{V_2=0} \quad (10-187b)$$

y

$$H_2(s) = \frac{V_o}{V_2} \Big|_{V_1=0} \quad (10-187c)$$

Hilberman amplió este concepto complementario para incluir circuitos activos con amplificadores operacionales ideales. Un caso especial de su resultado se resume en el siguiente teorema.

**TEOREMA 10-2.**<sup>138</sup> Sea  $N$  una red de tres terminales con dos terminales de entrada  $V_1$  y  $V_2$  y una terminal de salida  $V_o$ , donde todos los voltajes son voltajes de nodo a tierra. Suponga que  $N$  puede dividirse en dos subredes conectadas: una que no está conectada directamente al nodo de tierra común y otra que consta de amplificadores operacionales de entrada diferencial y salida puesta a tierra, como se ilustra en la Fig. 10-38(b). Entonces tenemos (10-187). Tenga en cuenta que

$$V_o = H_1(s)V_1 + H_2(s)V_2 \quad (10-188)$$

Consideremos ahora la aplicación del teorema 10-2 a la realización de filtros de rechazo de banda y de paso total. Considere la red de tres terminales  $N$  en la Fig. 10-38(b). Suponga que con  $V_2=0$  [el nodo 2 está conectado al nodo de tierra común como se muestra en la Fig. 10-38(c)], la función de transferencia es un filtro de paso de banda dado por

$$H_1(s) \triangleq \frac{V_o}{V_1} \Big|_{V_2=0} = \frac{\alpha s}{s^2 + b_1 s + b_0} \quad (10-189)$$

Si  $\alpha=b_1$ , entonces el circuito con el nodo 1 de  $N$  conectado al nodo de tierra, como se muestra en la Fig. 10-38(d), produce la función de transferencia

$$\begin{aligned} H(s) &\triangleq \frac{V_o}{V_2} \Big|_{V_1=0} = H_2(s) = 1 - H_1(s) \\ &= \frac{s^2 + b_0}{s^2 + b_1 s + b_0} \end{aligned} \quad (10-190)$$

138 Ver Referencia [31].

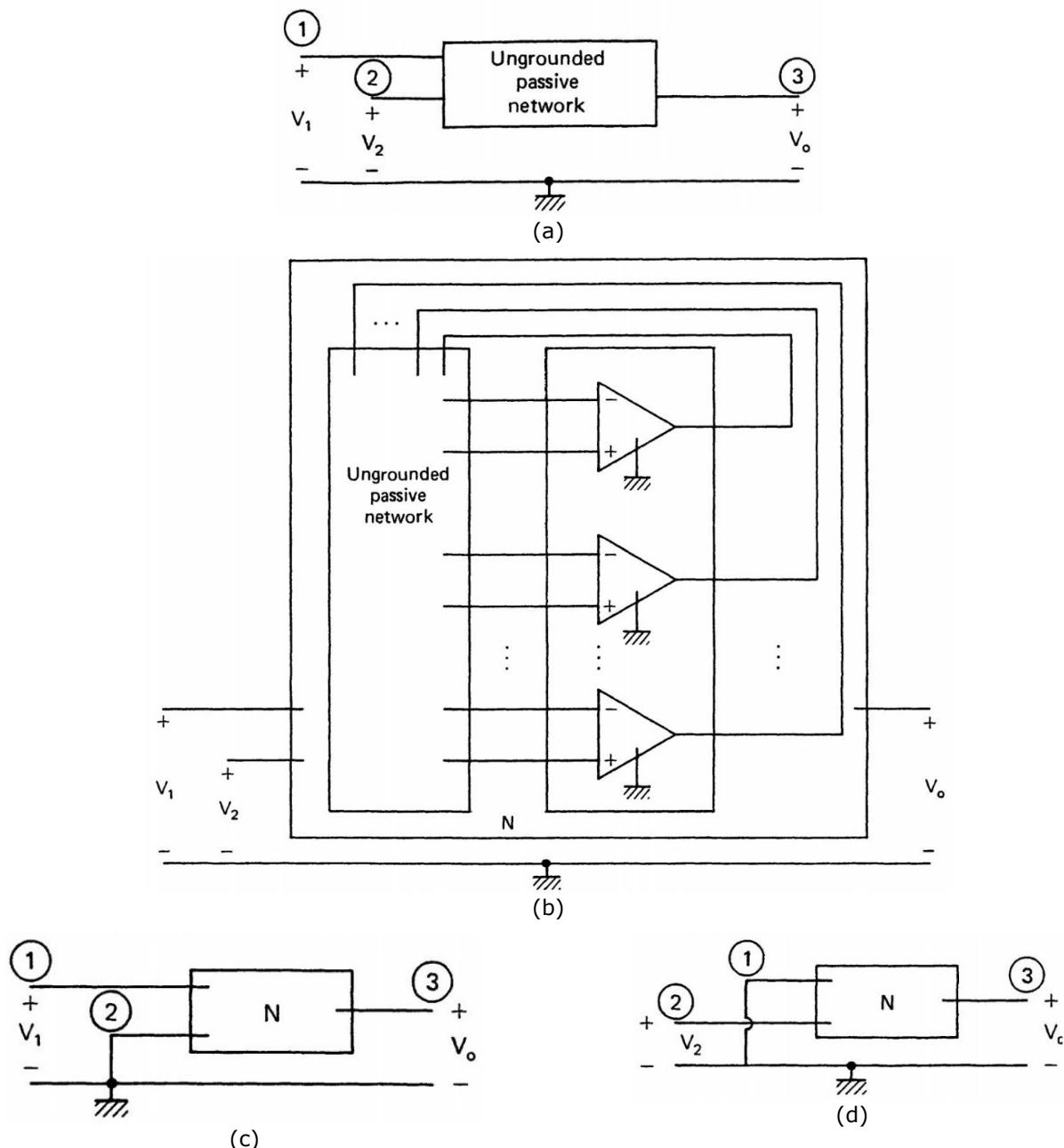


Fig. 10-38 (a) Una red pasiva de tres terminales sin conexión a tierra, (b) Una red activa de tres terminales particionable, (c) y (d) redes complementarias con función de transferencia.

Es decir, el circuito resultante de la Fig. 10-38(d) es un filtro de rechazo de banda.<sup>139</sup> Por otra parte, si  $\alpha=2b_1$ , entonces el circuito de la Fig. 10-38(d) es un filtro de paso total con

$$H(s) = 1 - H_1(s) = \frac{s^2 - b_1 s + b_0}{s^2 + b_1 s + b_0} \quad (10-191)$$

<sup>139</sup> Para generar un filtro de muesca ger  $H(s) = \frac{s^2 + b_1 s}{s^2 + b_1 s + b_0}$  para igualar  $(\alpha_1 s + \alpha_0)/(s^2 + b_1 s + b_0)$ , donde  $\alpha_1 = b_1$  y  $(b_0 - \alpha_0)$  es el cuadrado de la frecuencia de muesca deseada. En este caso, la función de transferencia resultante viene dada por  $H(s) = [s^2 + (b_0 - \alpha_0)]/(s^2 + b_1 s + b_0)$ .

Tenga en cuenta que el teorema 10-2 se puede utilizar para generar otras funciones de transferencia. Por ejemplo, la función de transferencia

Tenga en cuenta que el teorema 10-2 se puede utilizar para generar otras funciones de transferencia. Por ejemplo, la función de transferencia

$$H(s) = \frac{s^2 + b_1 s}{s^2 + b_1 s + b_0}$$

se puede obtener como la función de transferencia complementaria de un filtro de paso bajo caracterizado por

$$H_{LP}(s) = \frac{b_0}{s^2 + b_1 s + b_0}$$

**Ejemplo 10-21** Considere la red de tres terminales N en la figura 10-39(a). Con el nodo 2 conectado a tierra, el circuito resultante es un filtro de paso de banda caracterizado por

$$H(s) \triangleq \left. \frac{V_o}{V_1} \right|_{V_2=0} = \frac{\left( \frac{G_4 G_5}{C_1 C_6} \right) s}{s^2 + \frac{G_1}{C_1} s + \frac{G_2 G_3 G_5}{G_6 C_1 C_2}} \quad (10-192)$$

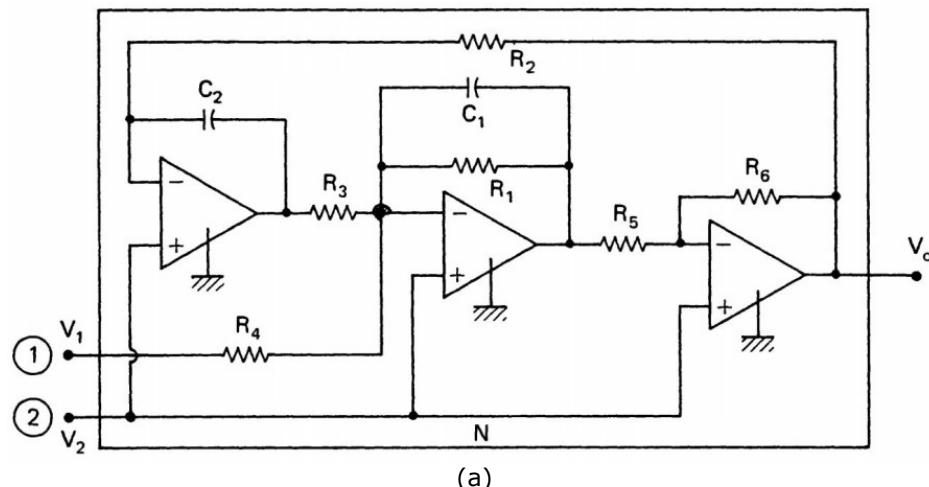
donde  $G_i \triangleq 1/R_i$ .

(a) Construya un filtro de rechazo de banda

$$H_{BR}(s) = \frac{s^2 + 1}{s^2 + s + 1} \quad (10-193a)$$

(b) Construya un filtro de paso total

$$H_{AP}(s) = \frac{s^2 - s + 1}{s^2 + s + 1} \quad (10-193b)$$



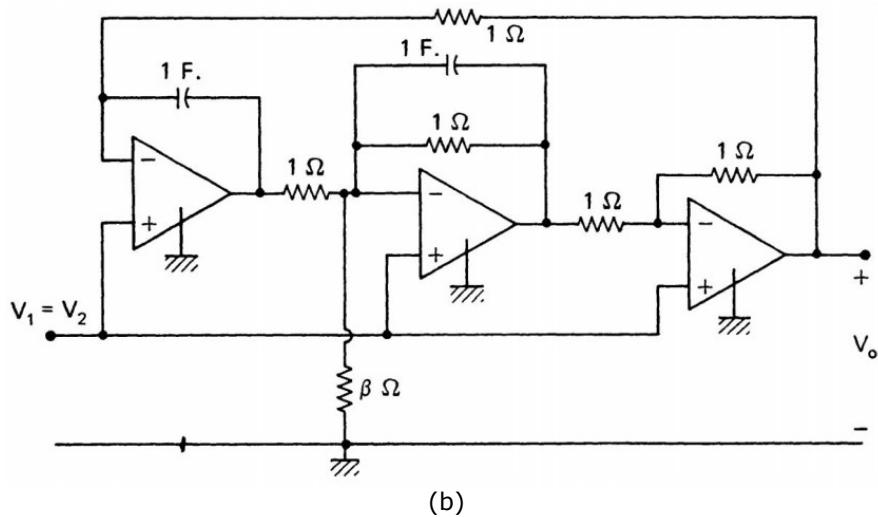


Figura 10-39 (a) Una red de paso de banda con el nodo 2 conectado a tierra,  
 (b) Un filtro de rechazo de banda de (10-193a) cuando  $\beta = 1$   
 y un filtro de paso total de (10-193b) cuando  $P = \gamma = 0.5$ .

**Solución:** Consideremos primero el filtro de rechazo de banda. En este caso, el filtro de paso de banda deseado viene dado por

$$H(s) = \frac{s}{s^2 + s + 1} \quad (10-194)$$

Por lo tanto, las ecuaciones de diseño son

$$\frac{G_4 G_5}{C_1 G_6} = \alpha \quad (10-195a)$$

$$\frac{G_1}{C_1} = 1 \quad (10-195b)$$

$$\frac{G_2 G_3 G_5}{G_6 C_1 C_2} = 1 \quad (10-195c)$$

donde  $\alpha = 1$ . Una solución a (10-195) con un general  $\alpha$  viene dada por

$$C_1 = C_2 = 1 \text{ F.}$$

$$R_1 = R_2 = R_3 = R_5 = R_6 = 1 \Omega \quad (10-196)$$

$$R_4 = \frac{1}{\alpha} \Omega$$

Utilizando el teorema 10-2 y la configuración de la figura 10-38(d), en la figura 10-39(b) se muestra una realización del circuito de (10-193a), donde  $\beta = 1$ .

Para generar el paso total filtro de (10-193b), se requiere que la función de transferencia del filtro de paso de banda sea

$$H(s) = \frac{2s}{s^2 + s + 1} \quad (10-197)$$

Las ecuaciones de diseño y una solución a estas ecuaciones están dadas por (10-195) y (10-196), con  $\alpha = 2$ . En la Fig. 10-39(b), donde  $\beta = 1/2$ .

### 10-2-4. Selección de pares de polos y ceros

Para minimizar la sensibilidad de la red con respecto a las variaciones de los parámetros, es una práctica común descomponer un filtro RC activo de enésimo orden en secciones de filtro de segundo orden conectables en cascada. Una pregunta natural es con qué criterio se debe hacer la selección de pares de polos y ceros de (10-2).

Considere una función de transferencia de  $n$  polos y  $m$  ceros:

$$H(s) = \frac{G \prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)} \quad (10-198)$$

Tomando logaritmos de (10-198) da

$$\ln H(s) = \ln G + \sum_{i=1}^m \ln(s - z_i) - \sum_{j=1}^n \ln(s - p_j)$$

Por lo tanto, tenemos

$$\frac{\partial \ln H(s)}{\partial \ln x} = \frac{\partial \ln G}{\partial \ln x} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial \ln(s - z_i)}{\partial \ln x} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial \ln(s - p_j)}{\partial \ln x} \quad (10-199)$$

donde  $x$  es cualquier parámetro de red sujeto a pequeñas variaciones. Porque<sup>140</sup>

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln(s - s_i)}{\partial \ln x} &= -\frac{1}{s - s_i} \left( \frac{\partial s_i}{\partial \ln x} \right) \\ &= -\frac{1}{s - s_i} \left( \frac{\partial s_i}{\partial x} \right) x = -\frac{1}{s - s_i} (\hat{S}_x^{s_i}) \end{aligned} \quad (10-200a)$$

y

$$\frac{\partial \ln y}{\partial \ln x} = \frac{\partial y/y}{\partial x/x} = \frac{\partial y}{\partial x} \frac{x}{y} = S_x^y \quad (10-200b)$$

La ecuación (10-199) se puede escribir como

$$\begin{aligned} S_x^{H(s)} &= S_x^G + \sum_{j=1}^n \frac{\hat{S}_x^{p_j}}{s - p_j} - \sum_{i=1}^m \frac{\hat{S}_x^{z_i}}{s - z_i} \\ &\triangleq S_x^G + F_p - F_z \end{aligned} \quad (10-201)$$

Por lo tanto, una forma obvia de minimizar la función de sensibilidad general es seleccionar los pares de polos y ceros para las funciones individuales de segundo orden tan separados como sea posible. Al hacerlo, se logrará una contribución mínima a la función de sensibilidad general de la red (1) de los términos cero de  $F_z$  cuando  $s$  está en la vecindad de un polo, y (2) de los términos de polo de

$F_p$  cuando  $s$  está en el vecindad de un cero. Como suele ser el caso, las cosas simples no siempre funcionan. Reducir la contribución de  $F_z$  en (10-201) puede ser una manera de reducir la función de sensibilidad general  $S_x^{H(s)}$  cerca de un polo, pero puede no ser la mejor manera para otros valores de  $s$ . Otra forma de minimizar  $S_x^{H(s)}$  es mediante una cancelación parcial o incluso total de los términos del par polo-cero en (10-201) [es decir, exigir que  $F_p - F_z$  se acerque a cero]. Esto puede lograrse mediante una descomposición polinomial adecuada de cada función de segundo orden de manera que su propio  $f_p - f_z$  [los términos correspondientes en (10-201) para una sección de segundo orden] llegue a cero. Este proceso esencialmente requiere que agrupemos un par de polos con su par de ceros más cercano. El procedimiento exacto es bastante complicado y no se discute aquí.<sup>141</sup>

140 Ver (9-49) para la definición de la función de sensibilidad raíz  $S$  y (9-73) para la función de sensibilidad  $S$ .

141 Ver Referencias [32] a [35].

### 10-2-5. Consideraciones sobre la sensibilidad de los polos

Para un filtro pasivo, el circuito permanecerá estable para todas las posibles perturbaciones del elemento. Desafortunadamente, esto no es cierto, en general, para los filtros activos. Es posible que un diseño en papel sea estable y que un circuito de hardware que implemente el diseño en papel no sea estable. Esto es básicamente un problema de sensibilidad del polo. Una pequeña desviación del parámetro del valor nominal puede mover una o más ubicaciones de polos al plano s de RH y, por lo tanto, causar inestabilidad en el circuito. En esta subsección, utilizamos algunos de los resultados obtenidos en el Capítulo 9 para reducir la sensibilidad del polo.

Si un filtro activo está hecho de  $n_R$  resistores,  $n_C$  capacitores y  $n_K$  elementos activos, digamos VCVS o amplificadores operacionales, entonces el cambio de posición del polo  $p_j$  debido a las variaciones de los resistores, capacitores y elementos activos es

$$\begin{aligned}\delta p_j &= \sum_{i=1}^{n_R} \frac{\partial p_j}{\partial R_i} \frac{\delta R_i}{R_i} R_i + \sum_{i=1}^{n_C} \frac{\partial p_j}{\partial C_i} \frac{\delta C_i}{C_i} C_i + \sum_{i=1}^{n_K} \frac{\partial p_j}{\partial K_i} \frac{\delta K_i}{K_i} K_i \\ &= \sum_{i=1}^{n_R} \hat{S}_{R_i}^{p_j} \frac{\delta R_i}{R_i} + \sum_{i=1}^{n_C} \hat{S}_{C_i}^{p_j} \frac{\delta C_i}{C_i} + \sum_{i=1}^{n_K} \hat{S}_{K_i}^{p_j} \frac{\delta K_i}{K_i}\end{aligned}\quad (10-202)$$

donde  $K_i$  representa la ganancia del  $i$ -ésimo elemento activo en el circuito de filtro. De (9-72), tenemos

$$\sum_{i=1}^{n_R} \hat{S}_{R_i}^{p_j} = \sum_{i=1}^{n_C} \hat{S}_{C_i}^{p_j} = -p_j \quad (10-203)$$

Si asumimos que las variaciones de los componentes pasivos son uniformes,

$$\frac{\delta R_i}{R_i} = \frac{\delta R_j}{R_j} \triangleq \frac{\delta R}{R} \quad i, j = 1, 2, \dots, n_R \quad (10-204a)$$

$$\frac{\delta C_i}{C_i} = \frac{\delta C_j}{C_j} \triangleq \frac{\delta C}{C} \quad i, j = 1, 2, \dots, n_C \quad (10-204b)$$

y que el efecto de la variación de todos los elementos activos se puede agrupar en la variación equivalente de un solo dispositivo activo

$$\sum_{i=1}^{n_K} \hat{S}_{K_i}^{p_j} \frac{\delta K_i}{K_i} = \hat{S}_K^{p_j} \frac{\delta K}{K} \quad (10-204c)$$

donde  $K$  es el parámetro del dispositivo activo equivalente, entonces (10-202) se reduce a

$$\delta p_j = \hat{S}_K^{p_j} \frac{\delta K}{K} - p_j \left[ \frac{\delta R}{R} + \frac{\delta C}{C} \right] \quad (10-205)$$

Para asegurar que las sensibilidades de los polos se minimicen, un método muy prometedor es hacer

$$\frac{\delta R}{R} + \frac{\delta C}{C} = 0 \quad (10-206)$$

usando resistencias y capacitores con coeficientes de temperatura uniformemente iguales pero opuestos y para minimizar  $(\delta K)/K$ . Con mucho cuidado con los amplificadores operacionales, podemos hacer

$$\frac{\delta K}{K} \simeq 0 \quad (10-207)$$

### 10-3 Consideración del amplificador operacional no ideal

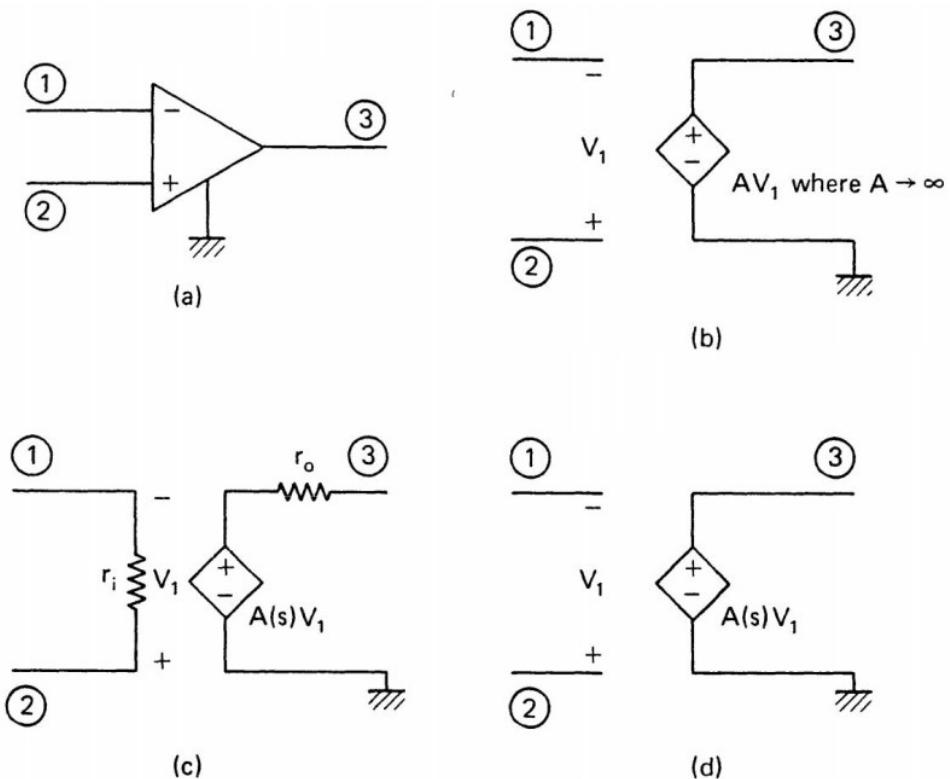
Un amplificador operacional ideal tiene una impedancia de entrada igual a  $\infty$ , una impedancia de salida igual a 0 y una ganancia de voltaje de  $\infty$ . Todas estas características no son posibles de alcanzar en casos reales. Afortunadamente, aunque los filtros activos discutidos hasta ahora están muy idealizados, los resultados obtenidos son muy cercanos a la realidad en la mayoría de los casos prácticos. Sin embargo, cuando se utilizan amplificadores operacionales en circuitos de alta precisión y/o aplicaciones de alta frecuencia, se hace necesario examinar las consecuencias de las propiedades no ideales de los amplificadores operacionales. En esta sección, analizamos brevemente las características no ideales de los amplificadores operacionales reales y las implicaciones de estas imperfecciones en el desempeño de los filtros activos.

Las principales propiedades no ideales de los amplificadores operacionales que nos interesan son:

1. ganancia de voltaje finita;
2. ganancia de tensión dependiente de la frecuencia;
3. ancho de banda finito;
4. resistencia de entrada finita;
5. resistencia de salida distinta de cero;
6. relaciones de tensión de entrada-salida no lineales; y
7. Ruido generado por amplificadores operacionales.

Ahora examinamos el efecto de cada uno de estos elementos en el rendimiento del filtro. Con respecto a los elementos 6 y 7, el ruido generado por los amplificadores operacionales limita la señal mínima a la que puede operar un filtro activo. Para eliminar los problemas asociados con las características no lineales de los amplificadores operacionales, el nivel de señal de un filtro activo se establece lo suficientemente bajo como para que todos los amplificadores operacionales involucrados funcionen en modo lineal. Juntos, los elementos 6 y 7 establecen esencialmente el rango de señal dentro del cual un filtro activo puede funcionar satisfactoriamente.

Suponiendo que la intensidad de la señal de un filtro activo se establece correctamente de modo que podamos ignorar los elementos 6 y 7, entonces podemos modelar un amplificador operacional real como se muestra en la Fig. 10-40(c), donde los valores típicos son  $r_i \approx 1 M\Omega$  y  $r_o \approx 100 \Omega$ . En términos generales, la resistencia de entrada finita y la resistencia de salida distinta de cero no tienen mucho efecto en la función de transferencia de un filtro activo si el nivel de impedancia del filtro se elige correctamente. Además, los valores de los elementos del filtro se pueden preajustar para tener en cuenta  $r_i$  y  $r_o$ . Así, en casi todos los casos de interés práctico, los elementos 4 y 5 pueden ignorarse. Por lo tanto, podemos modelar un amplificador operacional real mediante el circuito que se muestra en la figura 10-40(d).



**Fig. 10-40** (a) Symbol of an operational amplifier. (b) Model of an ideal operational amplifier. (c) Model of a real operational amplifier. (d) A simplified model of a real operational amplifier.

En el resto de esta sección, examinamos principalmente el efecto de la ganancia de voltaje finita, la ganancia de voltaje dependiente de la frecuencia y su ancho de banda finito en el desempeño de algunos circuitos amplificadores operacionales típicos.

### 10-3-1. Amplificador inversor de ganancia de voltaje

Consideré el circuito amplificador inversor de ganancia de voltaje de la Figura 10-41 (a).

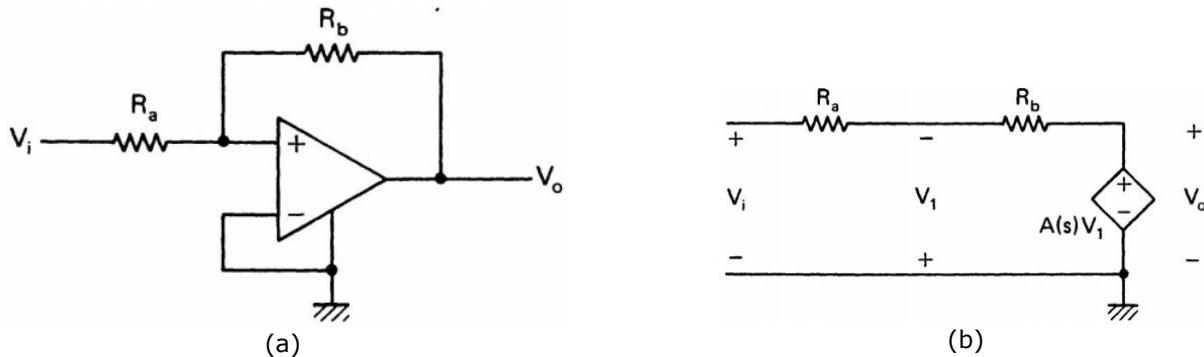


Fig. 10-41 Amplificador inversor de ganancia de voltaje.  
(a) Esquema. (b) Circuito modelado.

Con un amplificador operacional ideal, la función de transferencia viene dada por<sup>142</sup>

$$H_i(s) = -\frac{R_b}{R_a} \quad (10-208)$$

Reemplazemos ahora el amplificador operacional con su modelo simplificado, como se muestra en la Figura 10-41 (b). Las ecuaciones del circuito son

$$\frac{V_i + V_1}{R_a} = -\frac{V_1 + V_o}{R_b} \quad (10-209a)$$

$$V_o = A(s)V_1 \quad (10-209b)$$

Sustituyendo (10-209b) en (10-209a) y reorganizando los términos, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{V_o}{V_i} &= -\frac{R_b}{R_a \left[ 1 + \frac{1}{A(s)} \left( \frac{R_b}{R_a} + 1 \right) \right]} \\ &= -\frac{\beta}{1 + \frac{\beta+1}{A(s)}} \end{aligned} \quad (10-210a)$$

donde

$$\beta \triangleq \frac{R_b}{R_a} \quad (10-210b)$$

es (el valor absoluto de) la ganancia de voltaje del circuito idealizado. Ahora consideramos el efecto de la ganancia de voltaje finita, el ancho de banda finito y la ganancia de voltaje dependiente de la frecuencia del amplificador operacional en el circuito amplificador inversor de ganancia de voltaje.

<sup>142</sup> En esta subsección,  $H_i(s)$  y  $H_n(s)$  representan, respectivamente, las funciones de transferencia de los circuitos con amplificadores operacionales ideales y no ideales. Un amplificador operacional no ideal se modela en la figura 10-40(d).

**(a) CONSECUENCIA DE LA GANANCIA FINITA** Suponga que  $A(s)=A_o$  es una constante positiva muy grande pero finita. Entonces (10-210) se puede escribir como

$$H_n(s) = \frac{V_o}{V_i} = -\frac{\beta}{1 + \frac{\beta+1}{A_o}} = -\beta \left[ 1 - \frac{\beta+1}{A_o} + \frac{(\beta+1)^2}{A_o^2} - \dots \right] \quad (10-211)$$

Si se desea una ganancia de voltaje del inversor  $G$  precisa, entonces la relación necesaria  $\beta$  de  $R_b/R_a$  se puede resolver a partir de (10-211) como

$$\frac{R_b}{R_a} = \beta = -\frac{G(A_o+1)}{A_o+G} \quad (10-212)$$

Nótese que aquí  $G$  es un número negativo y  $G=-\beta$  en el circuito idealizado.

En general,  $A_o$  es muy grande en comparación con  $\beta+1$ . Por lo tanto, la serie infinita en (10-211) se puede aproximar por el primer término, o

$$H_n(s) = -\beta \left[ 1 - \frac{\beta+1}{A_o} \right] \quad (10-213)$$

Esto significa que el error de ganancia  $\epsilon$  (ganancia verdadera — ganancia idealizada) y el error de ganancia fraccional  $\epsilon_f$  están dados por

$$\epsilon = \frac{\beta(\beta+1)}{A_o} \quad (10-214a)$$

y

$$\epsilon_f \triangleq \frac{\epsilon}{\beta} = \frac{\beta+1}{A_o} \quad (10-214b)$$

Tenga en cuenta que el valor nominal de  $A_o$  es generalmente muy grande. Por lo tanto, el error de ganancia y el error de ganancia fraccional debido a la idealización del amplificador operacional es bastante pequeño para amplificadores de ganancia de voltaje bajo a medio-alto. Sin embargo, cuando  $|G|$  es muy grande, como lo exigen algunos filtros de alto  $Q$ , el VCVS debe diseñarse de acuerdo con (10-212), donde  $A_o$  es el valor mínimo de ganancia de bucle abierto del amplificador operacional en la banda de frecuencia de interés. De (10-214b), observamos que a medida que el requisito de precisión se vuelve más estricto para una ganancia de voltaje particular  $G$ , necesitamos aumentar  $A_o$ . En consecuencia, el ancho de banda de frecuencia útil (donde el VCVS funciona satisfactoriamente) disminuye.

**(b) CONSECUENCIA DEL AMPLIFICADOR OPERACIONAL NO IDEAL PUNTOS 1 A 3.** Para aumentar el ancho de banda de frecuencia operativo útil, debemos tener en cuenta la dependencia de la frecuencia de la ganancia de bucle abierto de los amplificadores operacionales. Esto se puede hacer asumiendo que  $A(s)$  es una función verdaderamente dependiente de la frecuencia. Para los amplificadores operacionales caracterizados por la Figura 10-25,  $A(s)$  viene dada aproximadamente por

$$A(s) = \frac{A_0 \omega_a}{s + \omega_a} \quad (10-215a)$$

donde los valores típicos para un amplificador operacional monolítico son

$$A_0 = 50000, \quad \omega_a = 20(2\pi) = 40\pi \text{ rad/sec.} \quad (10-215b)$$

y  $A_0 \omega_a$  se denomina producto de ganancia por ancho de banda del amplificador operacional. En este caso, podemos escribir (10-210) como

$$\begin{aligned}
H_n(s) &= -\frac{\beta A(s)}{1 + \beta + A(s)} = -\frac{\beta A_0 \omega_a}{(1 + \beta)(s + \omega_a) + A_0 \omega_a} \\
&= -\frac{\beta A_0 \omega_a}{(1 + \beta)} \frac{1}{s + \left[1 + \frac{A_0}{1 + \beta}\right] \omega_a} \\
&= -\frac{\alpha \beta \omega_a}{s + (1 + \alpha) \omega_a}
\end{aligned} \tag{10-216a}$$

donde

$$\alpha \triangleq \frac{A_0}{1 + \beta} \tag{10-216b}$$

Por lo tanto, la función de transferencia de magnitud está dada por

$$\begin{aligned}
|H_n(j\omega)| &= \frac{\alpha \beta \omega_a}{\sqrt{\omega^2 + (1 + \alpha)^2 \omega_a^2}} \\
&= \frac{\alpha \beta}{\sqrt{(1 + \alpha)^2 + (\omega/\omega_a)^2}}
\end{aligned} \tag{10-217}$$

Sea  $\epsilon_p$  el error porcentual de magnitud de ganancia de voltaje máximo permitido debido al análisis con amplificadores operacionales ideales. Entonces, la frecuencia  $\omega$  en el ancho de banda de frecuencia útil donde el amplificador de ganancia de voltaje cumple con el requisito de  $\epsilon_p$  satisface la ecuación

$$\frac{\alpha \beta}{\sqrt{(1 + \alpha)^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_a}\right)^2}} \geq \left(1 - \frac{\epsilon_p}{100}\right) \beta$$

o

$$\frac{\alpha^2}{(1 + \alpha)^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_a}\right)^2} \geq \left(1 - \frac{\epsilon_p}{100}\right)^2 \tag{10-218}$$

Si  $\epsilon_p$  es pequeño (digamos menos de 5), entonces el lado derecho de (10-218) se puede aproximar por

$$\left(1 - \frac{\epsilon_p}{100}\right)^2 \simeq 1 - \frac{\epsilon_p}{50} \tag{10-219}$$

La frecuencia más grande  $\omega_i$  tal que el amplificador de ganancia de voltaje cumpla con el requisito de  $\epsilon_p$  se puede calcular a partir de (10-218) y (10-219) como

$$\frac{\alpha^2}{(1 + \alpha)^2 + \left(\frac{\omega_i}{\omega_a}\right)^2} \geq 1 - \frac{\epsilon_p}{50}$$

o

$$\frac{1}{\left(\frac{1 + \alpha}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\omega_i}{\alpha \omega_a}\right)^2} \geq 1 - \frac{\epsilon_p}{50} \tag{10-220}$$

Nótese que a está dada por (10-216b). Si la ganancia de voltaje deseada  $A_f$  no es demasiado excesiva (digamos  $\beta/A_0 \leq 0.05$ ), entonces

$$\frac{1+\alpha}{\alpha} \simeq 1 \quad (10-221)$$

y (10-220) se puede simplificar a

$$\frac{1}{1 + \left(\frac{\omega_1}{\alpha\omega_a}\right)^2} \geq 1 - \frac{\epsilon_p}{50} \quad (10-222)$$

Invertir (10-222) rendimientos

$$1 + \left(\frac{\omega_1}{\alpha\omega_a}\right)^2 \leq \frac{1}{1 - \frac{\epsilon_p}{50}} \simeq 1 + \frac{\epsilon_p}{50} \quad (10-223)$$

Resolviendo para  $\omega_1$  obtenemos

$$\omega_1 \leq \alpha\omega_a \sqrt{\frac{\epsilon_p}{50}}$$

o

$$\omega_1 \simeq \frac{A_0 \omega_a \sqrt{0.02\epsilon_p}}{\beta + 1} \quad (10-224)$$

**Ejemplo 10-22** Considere el circuito amplificador inversor de ganancia de voltaje en la figura 10-41, donde el amplificador operacional se caracteriza por la figura 10-25. Si la ganancia deseada del amplificador de voltaje es 50 dentro de  $\pm 1\%$ , encuentre el ancho de banda de frecuencia útil.

**Solución:** De la Fig. 10-25 obtenemos  $A_0 = 50000$  y  $\omega_a = 20(2\pi) = 40\pi$  rad./seg. Para una tolerancia del 1%, (10-224) indica que el ancho de banda de frecuencia útil es de 0 a

$$\omega_1 \simeq \frac{50000}{51} (40\pi) \sqrt{0.02} \simeq 17423$$

o

$$f_1 \triangleq \frac{\omega_1}{2\pi} = 2773 \text{ Hz.}$$

### 10-3-2. Amplificador de ganancia de voltaje no inversor

Consideré el circuito amplificador de ganancia de voltaje no inversor que se muestra en la Figura 10-42(a).

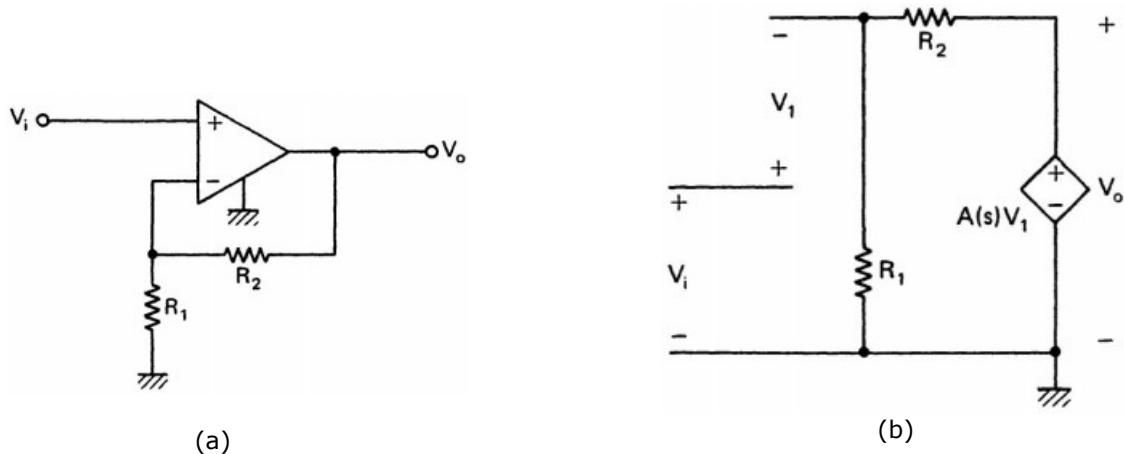


Fig. 10-42. Amplificador de ganancia de voltaje no inversor. (a) Esquema. (b) Circuito de modelado.

La función de transferencia del circuito con un amplificador operacional ideal viene dada por

$$H_i(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{R_1 + R_2}{R_1} \triangleq \gamma \quad (10-225)$$

Si se reemplaza el amplificador operacional por su modelo simplificado, como se muestra en Fig. 10-42(b), entonces la función de transferencia es

$$H_n(s) = \frac{R_1 + R_2}{R_1 + \frac{1}{A(s)}[R_1 + R_2]} = \frac{\gamma}{1 + \frac{\gamma}{A(s)}} \quad (10-226)$$

Considere el caso en el que se supone que el amplificador operacional tiene un ancho de banda infinito; es decir,  $A(s) = A_0$ . Entonces (10-226) da

$$H_n(s) = \gamma \left[ 1 - \frac{\gamma}{A_0} + \dots \right] \approx \gamma \left[ 1 - \frac{\gamma}{A_0} \right] \quad (10-227)$$

donde hemos supuesto que la ganancia de voltaje deseada  $\gamma$  es pequeña en comparación con  $A_0$ . Por lo tanto, el porcentaje de error al suponer un amplificador operacional ideal viene dado aproximadamente por

$$\in_p \% = \frac{100 \gamma}{A_0} \% \quad (10-228)$$

Como en el caso del amplificador de ganancia de voltaje inversor, necesitamos un  $A_0$  mayor para producir un amplificador de ganancia de voltaje no inversor de mayor precisión.

Para aplicaciones de frecuencia más alta, la función  $A(s)$  de ganancia de lazo abierto de un amplificador operacional se describe con mayor precisión en (10-215). En este caso, (10-226) se convierte en

$$\begin{aligned}
 H_n(s) &= \frac{\gamma}{1 + \frac{\gamma(s + \omega_a)}{A_0 \omega_a}} = \frac{A_0 \omega_a \gamma}{\gamma s + (A_0 + \gamma) \omega_a} \\
 &= \frac{A_0}{\left(\frac{s}{\omega_a}\right) + \left(1 + \frac{A_0}{\gamma}\right)}
 \end{aligned} \tag{10-229a}$$

y

$$|H_n(j\omega)| = \frac{A_0}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_a}\right)^2 + \left(1 + \frac{A_0}{\gamma}\right)^2}} \tag{10-229b}$$

Para mantenerse dentro de un error porcentual de magnitud de ganancia de voltaje  $\epsilon_p$ , la frecuencia útil más grande  $\omega_1$  satisface la ecuación

$$\frac{A_0^2}{\left(\frac{\omega_1}{\omega_a}\right)^2 + \left(1 + \frac{A_0}{\gamma}\right)^2} \geq \left(1 - \frac{\epsilon_p}{100}\right)^2 \gamma^2$$

o

$$\frac{\hat{\alpha}^2}{\left(\frac{\omega_1}{\omega_a}\right)^2 + (1 + \hat{\alpha})^2} \geq \left(1 - \frac{\epsilon_p}{100}\right)^2 \tag{10-230a}$$

donde

$$\hat{\alpha} \triangleq \frac{A_0}{\gamma} \tag{10-230b}$$

Tenga en cuenta que (10-230a) tiene el mismo formato que el de (10-218). Por tanto,  $\omega_1$  viene dado aproximadamente por

$$\omega_1 \simeq \hat{\alpha} \omega_a \sqrt{\frac{\epsilon_p}{50}} \simeq \frac{A_0 \omega_a \sqrt{0.02 \epsilon_p}}{\gamma} \tag{10-231}$$

y todas las conclusiones en el caso del amplificador inversor de ganancia de voltaje se aplican igualmente al presente caso de amplificadores no inversores de ganancia de voltaje.

### 10-3-3. Integrador

Considere el circuito integrador de la Fig. 10-43(a), donde, con un amplificador operacional ideal, la función de transferencia viene dada por

$$H_i(s) = -\frac{1}{sRC} \quad (10-232a)$$

Para  $\omega \geq 0$ , tenemos

$$|H_i(j\omega)| = \frac{1}{\omega RC} \quad (10-232b)$$

$$\phi_i(\omega) \triangleq -/H_i(j\omega) = -90^\circ \quad (10-232c)$$

Al reemplazar el amplificador operacional con su modelo simplificado, obtenemos el circuito que se muestra en la Fig. 10-43(b).

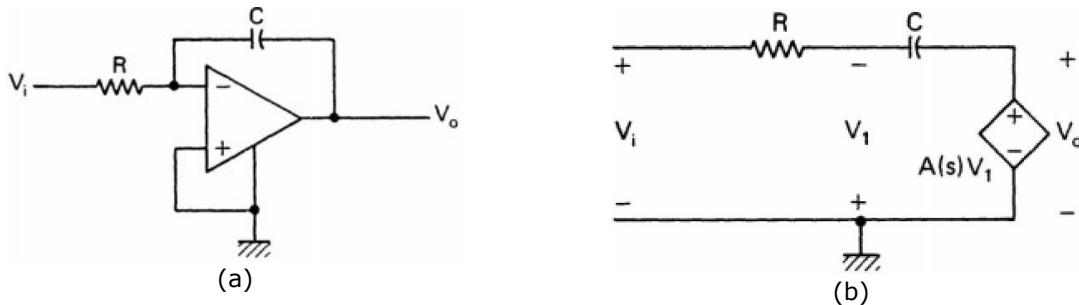


Figura 10-43 Integrador inversor. (a) Esquema. (b) Circuito modelado.

Para simplificar el análisis, supongamos que  $\omega \geq 0$ . Para  $\omega > 0$ , tenemos

$$H_n(s) = \frac{V_o}{V_i} = -\frac{1}{\frac{1}{a_0} + sRC\left(1 + \frac{1}{a_0}\right)} \quad (10-233a)$$

$$\begin{aligned} |H_n(j\omega)| &= \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{a_0}\right)^2 + (\omega RC)^2} \left(1 + \frac{1}{a_0}\right)} \\ &\approx \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{a_0}\right)^2 + (\omega RC)^2}} \\ &= \frac{1}{\omega RC} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{\omega R C a_0}\right)^2 + 1}} \end{aligned} \quad (10-233b)$$

y

$$\phi_n(\omega) \triangleq -/H_n(j\omega) = \tan^{-1}(a_0 \omega RC) \quad (10-233c)$$

Ahora consideramos el efecto de la ganancia finita de lazo abierto en el ancho de banda útil del integrador.

Para mantener el integrador dentro de un error de magnitud de porcentaje  $\epsilon_p$ , el punto de frecuencia genérica  $\omega$  tiene que satisfacer

$$\phi_n(\omega) \triangleq -\angle H_n(j\omega) = \tan^{-1}(a_0 \omega RC) \quad (10-234)$$

Sustituyendo (10-232b) y (10-233b) en (10-234) da

$$\frac{1}{\omega RC} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\omega R C a_0}\right)^2}} \geq \left(1 - \frac{\epsilon_p}{100}\right) \frac{1}{\omega RC}$$

o

$$\frac{1}{1 + \left(\frac{1}{\omega R C a_0}\right)^2} \geq \left(1 - \frac{\epsilon_p}{100}\right)^2 \quad (10-235)$$

Invirtiendo, obtenemos

$$1 + \left(\frac{1}{\omega R C a_0}\right)^2 \leq \frac{1}{\left(1 - \frac{\epsilon_p}{100}\right)^2} \simeq 1 + \frac{\epsilon_p}{50}$$

o

$$\frac{1}{\omega R C a_0} \leq \sqrt{\frac{\epsilon_p}{50}} = \sqrt{0.02 \epsilon_p} \quad (10-236)$$

Por lo tanto, el punto de frecuencia mínima  $\omega_2$  donde el integrador cumple con el requisito de  $\epsilon_p$  está dado por

$$\omega_2 = \frac{1}{R C a_0} \sqrt{\frac{50}{\epsilon_p}} \quad (10-237)$$

Es decir, el ancho de banda de frecuencia útil para un integrador con una ganancia finita y un amplificador operacional de ancho de banda infinito es de  $f_2 \triangleq \omega_2 / 2\pi$  Hz . hasta el infinito. Si

$a_0 = \infty$  entonces la magnitud del integrador funcionará correctamente para todo  $\omega$  . Por otro lado, la propiedad de ancho de banda finito de un amplificador operacional real colocará un límite de frecuencia inferior en el desempeño satisfactorio de la función de magnitud del integrador. Note que de (10-236), necesitamos un  $a_0$  más grande para producir un integrador de mayor precisión.

Otro factor a considerar para un integrador es su ángulo de fase. Si se permite un error máximo de  $\epsilon_\phi$  grados, entonces el punto de frecuencia genérico  $\omega$  tiene que satisfacer

$$|\phi_n(\omega) - \phi_i(\omega)| \leq \epsilon_\phi$$

o

$$|\tan^{-1}(a_0 \omega RC) - 90^\circ| \leq \epsilon_\phi \quad (10-238)$$

Se puede calcular un valor mínimo de frecuencia  $\omega_3$  tal que el integrador cumpla con el requisito de tolerancia de error de fase  $\epsilon_\phi$  a partir de (10-238). Por ejemplo, cuando  $\epsilon_\phi = 1^\circ$  , tenemos

$$a_0 \omega_3 RC \geq \tan 89^\circ = 57.29$$

o

$$\omega_3 = \frac{57.29}{a_0 RC} \quad (10-239)$$

**Ejemplo 10-23** Para el circuito integrador de la figura 10-43, donde  $RC=10^{-3}$  y el amplificador operacional se caracteriza por la figura 10-25, encuentre el rango de frecuencia donde el error de magnitud es inferior al 1% y la fase el error es menor a  $2^\circ$ .

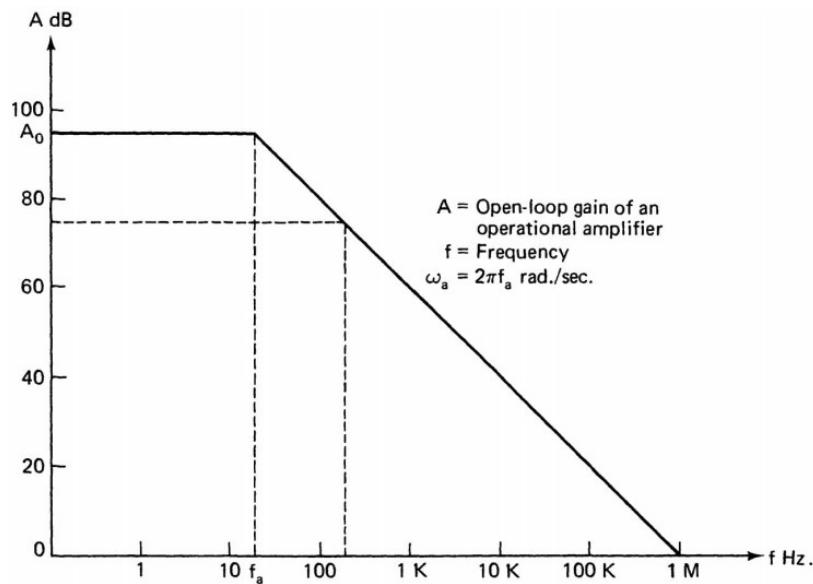


Fig. 10-25 A typical operation amplifier frequency characteristic.

**Solución:** De (10-237) y (10-238), el integrador cumplirá los requisitos de tolerancia de fase y magnitud si se cumplen las siguientes ecuaciones:

$$\omega \geq \frac{\sqrt{50}}{RCA_0} = \frac{7.07 \times 10^3}{a_0} \quad (10-240a)$$

y

$$\omega \geq \frac{\sqrt{50}}{RCA_0} = \frac{7.07 \times 10^3}{a_0} \quad (10-240b)$$

donde  $a_0$  es la ganancia mínima en lazo abierto del amplificador operacional dentro del ancho de banda de frecuencia útil del integrador. Claramente, para las dos ecuaciones en (10-240), solo necesitamos tratar con (10-240b). Recuerde que la ganancia en lazo abierto del amplificador operacional involucrado se caracteriza por

$$A(s) = \frac{A_0}{1 + (s/\omega_a)} \quad (10-241a)$$

y

$$|A(j\omega)| = \frac{A_0}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_a)^2}} \quad (10-241b)$$

donde

$$A_0 = 50000 \quad \text{and} \quad \omega_a = 20(2\pi) = 40\pi \text{ rad./sec.} \quad (10-241c)$$

Sea el ancho de banda de frecuencia útil del integrador sea desde  $\omega_m$  a  $\omega_M$  rad./sec. . Entonces las ecuaciones de diseño son de (10-240b):

$$\omega_m = \frac{28.64 \times 10^3}{a_0} \quad (10-242a)$$

y de (10-241b):

$$a_0 = \frac{A_0}{\sqrt{1 + (\omega_M/\omega_a)^2}} \approx \frac{A_0 \omega_a}{\omega_M}$$

o

$$\omega_M = \frac{A_0 \omega_a}{a_0} = \frac{2\pi \times 10^6}{a_0} \quad (10-242b)$$

Nótese que (10-242b) se derivó porque  $|A(j\omega)|$  es una función decreciente de  $\omega$  y que la razón de  $\omega_M$  a  $\omega_a$  es generalmente muy grande en comparación con 1. Debido a que hay dos ecuaciones y tres incógnitas ( $a_0$ ,  $\omega_m$  y  $\omega_M$ ) hay un grado de libertad. De (10-242), observamos que si  $a_0$  se vuelve más grande, entonces tanto  $\omega_m$  como  $\omega_M$  se vuelven más pequeños. Por ejemplo, si se elige que  $a_0$  sea 103, entonces  $\omega_m = 28.64$  y  $\omega_M = 2000\pi$  rad./seg. . Por otro lado, si  $a_0 = 10^4$ , entonces  $\omega_m = 2.864$  y  $\omega_M = 200\pi$  rad./seg. Para la mayoría de los circuitos de voz, una buena opción en este caso probablemente sería  $a_0 = 250$ , lo que produce un ancho de banda de frecuencia útil de

$$f_m \triangleq \frac{\omega_m}{2\pi} = \frac{28.64 \times 10^3}{(250)(2\pi)} = 18.23 \text{ Hz.}$$

para

$$f_M \triangleq \frac{\omega_M}{2\pi} = \frac{2\pi \times 10^6}{(250)(2\pi)} = 4000 \text{ Hz.}$$

### 10-3-4. Sección de filtro de paso de banda Friend

Consideré el circuito pasabanda de la Fig. 10-44(a), que es un caso especial del circuito biquadrático de Friend. Suponga que la función de transferencia deseada tiene un denominador

$$D(s) = s^2 + b_1 s + b_0 = s^2 + \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)s + \omega_0^2 \quad (10-243a)$$

donde

$$\omega_0 = \sqrt{b_0} \quad y \quad Q = \frac{\omega_0}{b_1} = \frac{\sqrt{b_0}}{b_1} \quad (10-243b)$$

son la frecuencia de polos y el par de polos del circuito. De (10-114) a (10-118), se obtiene un diseño de circuito haciendo

$$\begin{aligned} C_1 &= C_2 = C \\ G_1 &= G_a = Q^2 G_b \\ G_b &= G_2 \end{aligned} \quad (10-244)$$

donde hemos asumido las terminologías del inciso 10-2-1-2. Con (10-244) y un amplificador operacional ideal, el denominador del circuito se caracteriza por (10-243), con

$$b_1 = \frac{1}{C^2 G_a} [2CG_a G_2 - CG_1 G_b] = \frac{G_b}{C} \quad (10-245a)$$

$$b_0 = \frac{1}{C^2 G_a} [G_1 G_2 G_a] = \frac{G_a G_b}{C^2} \quad (10-245b)$$

$$Q = \frac{\sqrt{b_0}}{b_1} = \sqrt{\frac{G_a}{G_b}} \quad (10-245c)$$

y

$$\omega_0 = \frac{\sqrt{G_a G_b}}{C} = \frac{Q G_b}{C} \quad (10-245d)$$

Reemplazemos ahora el amplificador operacional con su modelo simplificado, como se muestra en la Fig. 10-44(b). La función de transferencia en este caso tiene el denominador

$$\hat{D}(s) = s^2 + \hat{b}_1 s + \hat{b}_0 = s^2 + \left(\frac{\hat{\omega}_0}{\hat{Q}}\right)s + \hat{\omega}_0^2 \quad (10-246a)$$

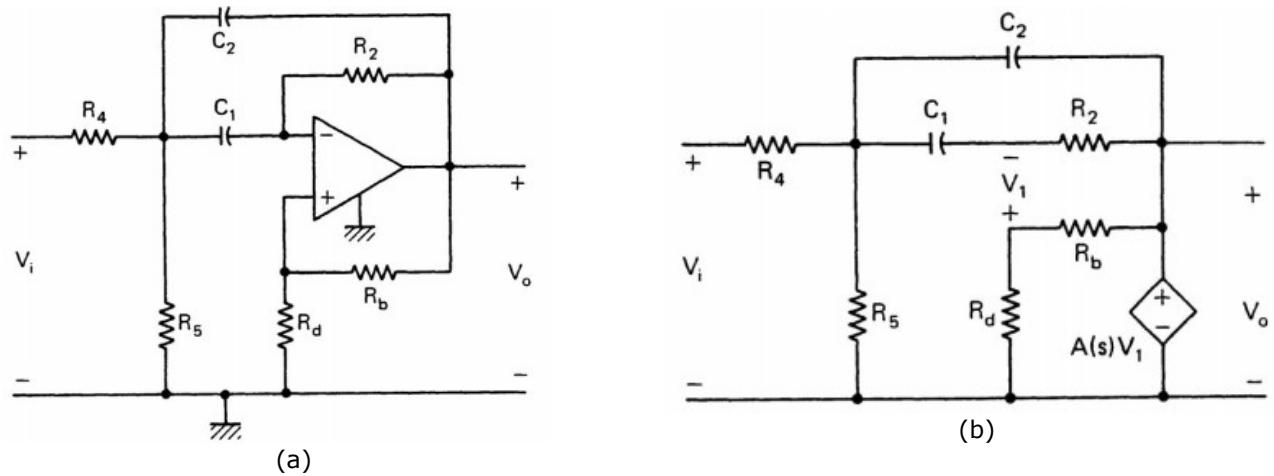


Fig. 10-44 Circuito biquadrático de paso de banda de Friend.  
(a) Esquema. (b) Circuito modelado.

donde

$$\hat{b}_1 = \frac{CQ^2G_b^2 + \frac{1}{A(s)}[CG_b^2(Q^2 + 1)(Q^2 + 2)]}{C^2Q^2G_b + \frac{1}{A(s)}[C^2G_b(Q^2 + 1)]} \quad (10-246b)$$

y

$$\hat{b}_0 = \frac{Q^4G_b^3 + \frac{1}{A(s)}[Q^2G_b^3(Q^2 + 1)]}{C^2Q^2G_b + \frac{1}{A(s)}[C^2G_b(Q^2 + 1)]} \quad (10-246c)$$

Suponiendo que la  $Q$  original es lo suficientemente grande como para  $Q^2 \gg 2$  y la frecuencia de trabajo es lo suficientemente baja como para que  $|A(j\omega)| \gg 1$ , entonces (10-246) se puede aproximar de cerca como

$$\hat{b}_1 \simeq \frac{CQ^2G_b^2 \left[ 1 + \frac{Q^2}{A(s)} \right]}{C^2Q^2G_b \left[ 1 + \frac{1}{A(s)} \right]} \quad (10-247a)$$

$$\simeq \frac{G_b}{C} \left[ 1 + \frac{Q^2}{A(s)} \right] = \frac{\omega_0}{Q} \left[ 1 + \frac{Q^2}{A(s)} \right]$$

$$\hat{b}_0 \simeq \frac{Q^4G_b^3 \left[ 1 + \frac{1}{A(s)} \right]}{C^2Q^2G_b \left[ 1 + \frac{1}{A(s)} \right]} \quad (10-247b)$$

$$= \frac{Q^2G_b^2}{C^2} = \omega_0^2$$

donde hemos utilizado (10-245) para simplificar las expresiones en (10-247). Sustituyendo (10-247) en (10-246a), obtenemos

$$\hat{D}(s) = s^2 + \frac{\omega_0}{Q} \left[ 1 + \frac{Q^2}{A(s)} \right] s + \omega_0^2 \quad (10-248)$$

Suponga que la ganancia en lazo abierto del amplificador operacional está dada por

$$A(s) = \frac{A_0 \omega_a}{s + \omega_a} \quad (10-249)$$

Entonces (10-248) se convierte en

$$\begin{aligned} \hat{D}(s) &= s^2 + \frac{\omega_0}{Q} \left[ 1 + \frac{Q^2(s + \omega_a)}{A_0 \omega_a} \right] s + \omega_0^2 \\ &= s^2 \left[ 1 + \frac{\omega_0 Q}{A_0 \omega_a} \right] + \frac{\omega_0}{Q} \left[ 1 + \frac{Q^2}{A_0} \right] s + \omega_0^2 \\ &= \left( 1 + \frac{\omega_0 Q}{A_0 \omega_a} \right) \left[ s^2 + \frac{\omega_0 \left( 1 + \frac{Q^2}{A_0} \right) s}{Q \left( 1 + \frac{\omega_0 Q}{A_0 \omega_a} \right)} + \frac{\omega_0^2}{1 + \frac{\omega_0 Q}{A_0 \omega_a}} \right] \end{aligned} \quad (10-250)$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta la ganancia finita y el ancho de banda finito de un amplificador operacional, la frecuencia polar  $\hat{\omega}_0$  real y el par de polos  $\hat{Q}$  están dados por

$$\hat{\omega}_0 = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 + \frac{\omega_0 Q}{A_0 \omega_a}}} \quad (10-251a)$$

y

$$\begin{aligned} \hat{Q} &= \frac{\omega_0}{\sqrt{1 + \frac{\omega_0 Q}{A_0 \omega_a}}} \left( \frac{Q}{\omega_0} \right) \frac{1 + \frac{\omega_0 Q}{A_0 \omega_a}}{1 + \frac{Q^2}{A_0}} \\ &= Q \frac{\sqrt{1 + \frac{\omega_0 Q}{A_0 \omega_a}}}{1 + \frac{Q^2}{A_0}} \end{aligned} \quad (10-251b)$$

De (10-251 a), observamos que a medida que aumenta el  $\omega_0 Q = b_0 / b_1$  deseado, la frecuencia polar real disminuye y estará en 0.707 del valor deseado cuando

$$\omega_0 Q = A_0 \omega_a \quad (10-252)$$

Tomando derivadas de  $\hat{Q}$  con respecto a  $A_0$  y  $\omega_a$ , se puede demostrar que el par de polos real  $\hat{Q}$  disminuye a medida que  $A_0$  disminuye y que una frecuencia de corte más baja,  $\omega_a$ , aumenta el factor  $\hat{Q}$  real.

Si  $\omega_0 Q$  es pequeño en comparación con el producto de ancho de banda de ganancia  $A_0 \omega_a$  del amplificador operacional involucrado, y si  $Q^2 \ll A_0$ , entonces podemos aproximar (10-251) como

$$\hat{\omega}_0 \simeq \omega_0 \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\omega_0 Q}{A_0 \omega_a} \right) \right] \quad (10-253a)$$

y

$$\begin{aligned} \hat{Q} &\simeq Q \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\omega_0 Q}{A_0 \omega_a} \right) \right] \left( 1 - \frac{Q^2}{A_0} \right) \\ &\simeq Q \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\omega_0 Q}{A_0 \omega_a} \right) - \frac{Q^2}{A_0} \right] \end{aligned} \quad (10-253b)$$

Por lo tanto, los errores porcentuales  $\hat{\omega}_0$  y  $\hat{Q}$  debidos a la idealización del amplificador operacional en el circuito están dados respectivamente por

$$\begin{aligned}\epsilon_{\omega_0} \% &= \frac{\hat{\omega}_0 - \omega_0}{\omega_0} (100\%) \\ &= -\frac{50\omega_0 Q}{A_0 \omega_a} \%\end{aligned}\quad (10-254a)$$

y

$$\begin{aligned}\epsilon_Q \% &= \frac{\hat{Q} - Q}{Q} (100\%) \\ &= \frac{100Q}{A_0} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\omega_0}{\omega_a} \right) - Q \right] \%\end{aligned}\quad (10-254b)$$

Como era de esperar, (10-254) indica que los errores absolutos de  $\omega_0$  y  $Q$  disminuyen al aumentar  $A_0$ .

**Ejemplo 10-24** Considere el circuito de la figura 10-44, donde el amplificador operacional se caracteriza por la figura 10-25. Suponga que la frecuencia central deseada es de 3500 Hz. y que  $Q$  es 10. Encuentre los errores porcentuales en  $\omega_0$  y  $Q$  debido a la idealización del amplificador operacional.

**Solución:** Como  $A_0 = 50000$  y  $\omega_a = 40\pi \text{ rad./seg.}$ ,

$$\omega_0 Q = 3500(2\pi)10 = 70000\pi$$

es pequeño en comparación con el producto ganancia-ancho de banda del amplificador operacional

$$A_0 \omega_a = 2\pi \times 10^6$$

Además,  $Q^2 = 100 \ll A_0$ . Por lo tanto, (10-254) es aplicable y obtenemos

$$\begin{aligned}\epsilon_{\omega_0} \% &= -\frac{50(70000\pi)}{2 \times 10^6} = -1.75\% \\ \epsilon_Q \% &= \frac{100(10)}{50000} \left[ \frac{70000\pi}{2(40\pi)} - 10 \right] \simeq 1.75\%\end{aligned}$$

Para remediar las desviaciones de  $\omega_0$  y  $Q$  de los valores deseados debido a las propiedades no ideales del amplificador operacional en el circuito, podemos predistorsionar los valores de  $\omega_0$  y  $Q$ . Por ejemplo, si los valores deseados son  $\omega_{0d}$  y  $Q_d$ , entonces los valores de  $\omega_0$  de frecuencia polar y  $Q$  de par de polos para las ecuaciones de diseño de circuito de Friend (con un amplificador operacional ideal) están dados por

$$\omega_0 = \frac{\omega_{0d}}{1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\omega_{0d} Q_d}{A_0 \omega_a} \right)} \simeq \omega_{0d} \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\omega_{0d} Q_d}{A_0 \omega_a} \right) \right] \quad (10-255a)$$

y

$$Q = \frac{Q_d}{1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\omega_{0d} Q_d}{A_0 \omega_a} \right) - \frac{Q_d^2}{A_0}} \simeq Q_d \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\omega_{0d} Q_d}{A_0 \omega_a} \right) + \frac{Q_d^2}{A_0} \right] \quad (10-255b)$$

De esta forma, el circuito final con un amplificador operacional real dará los valores deseados de  $\omega_{0d}$  y  $Q_d$  siempre que

$$\omega_{0d} Q_d \ll A_0 \omega_a \quad \text{y} \quad Q_d^2 \ll A_0 \quad (10-256)$$

## 10-4 Circuitos activos sin condensadores

De la sección anterior, está claro que para aplicaciones de alta frecuencia debemos tener en cuenta las propiedades no ideales de los amplificadores operacionales. Para la mayoría de los amplificadores operacionales con compensación T, la figura 10-25 presenta una característica típica de ganancia en lazo abierto  $A(s)$ , donde

$$A(s) = \frac{A_0 \omega_a}{s + \omega_a} = \frac{A_0}{1 + (s/\omega_a)} \quad (10-257)$$

Observe que (10-257) dice que la relación de transferencia de un amplificador operacional incluye el efecto de una red RC con un capacitor, lo que nos lleva a concluir que podemos diseñar un circuito biquadrado con resistencias y dos amplificadores operacionales (sin usar capacitores). Esta clase de filtros se llama R activo.

En esta sección, presentamos dos circuitos R activos biquadráticos. El primero es un filtro de paso de banda que tiene una estructura muy simple y es adecuado para aplicaciones de alta frecuencia y alto Q. El segundo biquad tiene una versatilidad similar a la del circuito biquad de amplificación múltiple de Tow.

### 10-4-1. Un circuito biquadrático R activo de paso de banda de alta frecuencia de alto Q

Considere el circuito de la figura 10-45. Las ecuaciones del circuito son

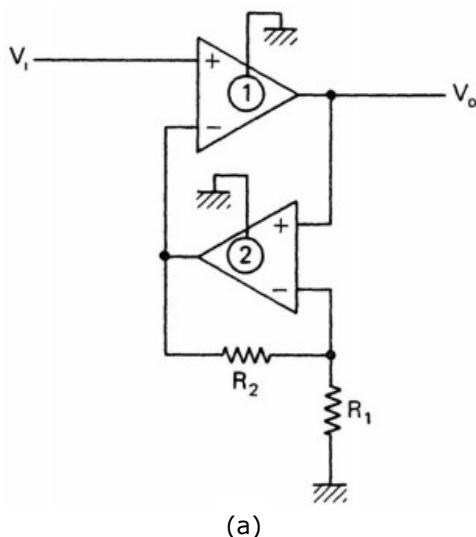
$$V_i = V_1 + A_2(s)V_2 \quad (10-258)$$

$$V_o = V_2 + \frac{R_1 A_2(s)V_2}{R_1 + R_2} \quad (10-259)$$

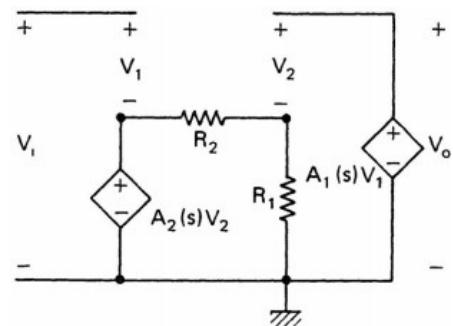
$$V_o = A_1(s)V_1 \quad (10-260)$$

$$V_o = A_1(s)V_1 \quad (10-261a)$$

Resolviendo  $V_1$  y  $V_2$  en términos de  $V_o$ , (10-259) y (10-260) se obtiene



(a)



(b)

Fig. 10-45 Un circuito de paso de banda R activo de Q alto de alta frecuencia.

$$V_2 = \frac{V_o}{1 + \frac{R_1 A_2(s)}{R_1 + R_2}} \quad (10-261b)$$

Sustituyendo (10-261) en (10-258), obtenemos

$$\begin{aligned} V_t &= \frac{V_o}{A_1(s)} + \frac{A_2(s)V_o}{1 + \frac{R_1 A_2(s)}{R_1 + R_2}} \\ &= \left[ \frac{1}{A_1(s)} + \frac{A_2(s)}{1 + \gamma A_2(s)} \right] V_o \\ &= \frac{1 + \gamma A_2(s) + A_1(s)A_2(s)}{A_1(s)[1 + \gamma A_2(s)]} V_o \end{aligned} \quad (10-262a)$$

donde

$$\gamma = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad (10-262b)$$

Por tanto, la función de transferencia del circuito de la figura 10-45 viene dada por

$$H(s) = \frac{V_o}{V_t} = \frac{A_1(s)[1 + \gamma A_2(s)]}{A_1(s)A_2(s) + \gamma A_2(s) + 1} \quad (10-263)$$

Sean idénticas las ganancias en lazo abierto  $A_1(s)$  y  $A_2(s)$  de los dos amplificadores operacionales y estén dadas por

$$A_1(s) = A_2(s) = A(s) = \frac{A_0 \omega_a}{s + \omega_a} \triangleq \frac{B}{s + \omega_a} \quad (10-264a)$$

donde

$$B = A_0 \omega \quad (10-264b)$$

es el producto ganancia-ancho de banda de los amplificadores operacionales. El (10-263) se convierte en

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{B(s + \omega_a + \gamma B)}{B^2 + \gamma B(s + \omega_a) + (s + \omega_a)^2} \\ &= \frac{B[s + (\omega_a + \gamma B)]}{s^2 + (\gamma B + 2\omega_a)s + (\omega_a^2 + \gamma B\omega_a + B^2)} \end{aligned} \quad (10-265)$$

Debido a que  $2\omega_a$  es muy pequeño en comparación con  $\gamma B = \gamma A_0 \omega_a$  para un rango muy amplio de valores gamma (digamos  $\gamma \geq 200/A_0 \approx 0.004$  ), podemos aproximarnos (10-265) por

$$H(s) \simeq \frac{B(s + \gamma B)}{s^2 + \gamma Bs + B^2} = \frac{(s/B) + \gamma}{(s/B)^2 + \gamma(s/B) + 1} \quad (10-266)$$

Note que podemos obtener (10-266) de (10-263) si asumimos que

$$A(s) = \frac{B}{s} = A_1(s) = A_2(s) \quad (10-267)$$

Es decir, (10-266) es una buena aproximación a (10-265) si la frecuencia de interés  $\omega \gg \omega_a$ .

De (10-266), obtenemos la frecuencia de polos y el par de polos del circuito biquadrático como

$$\omega_0 = B = A_0 \omega_a \quad (10-268a)$$

$$Q = \frac{1}{\gamma} = \frac{R_1 + R_2}{R_1} \quad (10-268b)$$

Para los amplificadores operacionales caracterizados por la Fig. 10-25, la frecuencia central viene dada por

$$f_0 \triangleq \frac{\omega_0}{2\pi} = 1 \text{ MHz.}$$

Es decir, el circuito de la figura 10-45 está diseñado para aplicaciones de alta frecuencia únicamente. Tenga en cuenta que es posible ajustar el producto B de ganancia por ancho de banda de los amplificadores operacionales con varios esquemas de compensación.

De (10-268b), observamos que el circuito de la figura 10-45 solo puede realizar filtros con  $Q \geq 1$ . Si  $Q \gg 1$ , entonces  $\gamma \ll 1$  y (10-266) se pueden aproximar aún más mediante

$$H(s) \approx \frac{Bs}{s^2 + \gamma Bs + B^2} \quad (10-269)$$

Esto significa que el circuito de la Fig. 10-45 es un buen filtro de paso de banda para aplicaciones de alta Q y alta frecuencia.

### 10-4-2. Un circuito Biquad R activo

En esta subsección, presentamos un circuito biquadrático R activo. Este circuito biquadrático puede proporcionar simultáneamente una salida de paso bajo y de paso de banda. Con un circuito amplificador sumador adicional, puede proporcionar todas las formas de funciones de transferencia biquadráticas.<sup>143</sup>

$$R_4 = (1 - \beta)R \quad (10-270a)$$

$$R_s = \beta R \quad (10-270b)$$

con

$$0 < \beta < 1 \quad (10-270c)$$

Se supone que los dos amplificadores operacionales son idénticos y se caracterizan por la ganancia de bucle abierto

$$A(s) = \frac{A_0 \omega_a}{s + \omega_a} = \frac{B}{s + \omega_a} \quad (10-271)$$

<sup>143</sup> Si la ganancia de bucle cerrado del circuito amplificador sumador es baja, entonces podemos considerar el amplificador operacional utilizado en el circuito sumador como un amplificador operacional ideal sin consecuencias adversas.

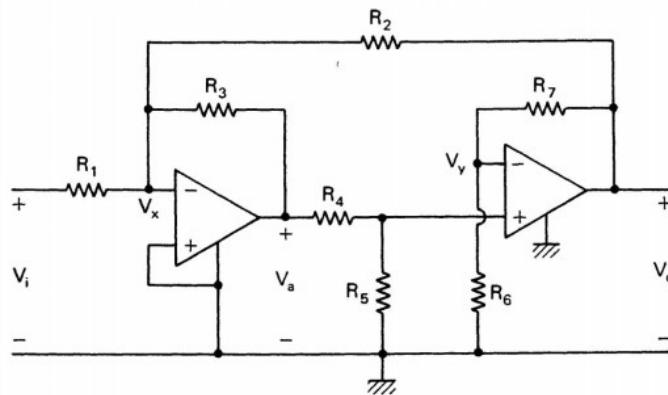


Fig. 10-46 An active R biquad circuit.

Con los voltajes de nodo a tierra indicados en la figura 10-46, las ecuaciones del circuito son

$$\frac{V_t - V_x}{R_1} + \frac{V_o - V_x}{R_2} + \frac{V_a - V_x}{R_3} = 0 \quad (10-272a)$$

$$\frac{V_o - V_y}{R_7} = \frac{V_y}{R_6} \quad (10-272b)$$

$$V_a = -\frac{A_0 \omega_a}{s + \omega_a} V_x \quad (10-272c)$$

$$V_o = \frac{A_0 \omega_a}{s + \omega_a} (\beta V_a - V_y) \quad (10-272d)$$

Después de un largo cálculo, (10-272) da como resultado

$$\frac{V_a}{V_t} = \frac{a_1 s + a_0}{s^2 + b_1 s + b_0} \quad (10-273a)$$

y

$$\frac{V_o}{V_t} = \frac{\alpha_0}{s^2 + b_1 s + b_0} \quad (10-273b)$$

donde

$$a_1 = \frac{A_0 \omega_a}{1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{R_1}{R_3}} \quad (10-274a)$$

$$a_0 = \frac{A_0 \omega_a^2}{1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{R_1}{R_3}} \left( 1 + \frac{A_0}{1 + \frac{R_7}{R_6}} \right) \quad (10-274b)$$

$$b_1 = 2\omega_a + \omega_a A_0 \left( \frac{1}{1 + \frac{R_3}{R_2} + \frac{R_3}{R_1}} + \frac{1}{1 + \frac{R_7}{R_6}} \right) \quad (10-274c)$$

y

$$b_0 = \frac{\omega_a^2 \left[ \left( A_0 + 1 + \frac{R_3}{R_2} + \frac{R_3}{R_1} \right) \left( A_0 + 1 + \frac{R_7}{R_6} \right) + \frac{R_3}{R_2} \beta A_0^2 \left( 1 + \frac{R_7}{R_6} \right) - A_0^2 \right]}{\left( 1 + \frac{R_3}{R_2} + \frac{R_3}{R_1} \right) \left( 1 + \frac{R_7}{R_6} \right)} \quad (10-274d)$$

$$\alpha_0 = \frac{A_0^2 \omega_a^2 \beta}{1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{R_1}{R_3}} \quad (10-274e)$$

En general,  $A_o$  es muy grande en comparación con las relaciones de resistencia y  $\omega_a$ . Por lo tanto, podemos aproximar (10-274) como

$$a_1 = \frac{B}{1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{R_1}{R_3}} \quad (10-275a)$$

$$a_0 = \frac{B^2}{\left(1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{R_1}{R_3}\right)\left(1 + \frac{R_7}{R_6}\right)} \quad (10-275b)$$

$$b_1 = B \left( \frac{1}{1 + \frac{R_3}{R_2} + \frac{R_3}{R_1}} + \frac{1}{1 + \frac{R_7}{R_6}} \right) \quad (10-275c)$$

$$b_0 = \frac{\frac{R_3}{R_2} \beta B^2}{1 + \frac{R_3}{R_2} + \frac{R_3}{R_1}} \quad (10-275d)$$

y

$$\alpha_0 = \frac{\beta B^2}{1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{R_1}{R_3}} \quad (10-275e)$$

De (10-275), la frecuencia de polos y el par de polos del circuito son

$$\omega_0 = \sqrt{b_0} = \sqrt{\frac{\frac{R_3}{R_2} \beta B^2}{1 + \frac{R_3}{R_2} + \frac{R_3}{R_1}}} \quad (10-276a)$$

y

$$Q = \frac{\sqrt{b_0}}{b_1} = \frac{\left(1 + \frac{R_7}{R_6}\right) \sqrt{\frac{R_3}{R_2} \beta \left(1 + \frac{R_3}{R_2} + \frac{R_3}{R_1}\right)}}{2 + \frac{R_3}{R_2} + \frac{R_3}{R_1} + \frac{R_7}{R_6}} \quad (10-276b)$$

Las funciones de sensibilidad de  $\omega_0$  y  $Q$  se pueden calcular a partir de (10-276). los resultados son

$$|S_x^{\omega_0}| \leq 0.5 \text{ and } |S_x^Q| \leq 1 \quad (10-277)$$

donde  $x$  representa  $A_o$ ,  $\omega_0$ ,  $B$  y cualquier valor de resistencia. Es decir, el circuito R activo de la figura 10-46 tiene buenas propiedades de sensibilidad activa y pasiva.

Tenga en cuenta que si tomamos  $V_o$  como salida, el circuito es un filtro de paso bajo caracterizado por (10-273b). Por otro lado, si tomamos  $V_a$  como salida, entonces el circuito funcionará como un filtro de paso de banda si

$$a_0 \ll b_0 \quad (10-278)$$

Al sustituir (10-275) en (10-278), obtenemos el requisito para que el circuito funcione como un filtro de paso de banda como

$$\frac{R_1}{R_2} \beta \left(1 + \frac{R_7}{R_6}\right) \gg 1 \quad (10-279)$$

Paso bajo. Ahora consideramos procedimientos para realizar funciones de transferencia biquadráticas con el circuito de la Fig. 10-46. Consideraremos primero el caso de paso bajo. Suponga que el filtro de paso bajo deseado viene dado por (10-273b). Entonces las ecuaciones de diseño pueden derivarse de (10-275) como

$$1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{R_1}{R_3} = \frac{\beta B^2}{\alpha_0}$$

lo que implica que

$$\begin{aligned} 1 + \frac{R_3}{R_2} + \frac{R_3}{R_1} &= \frac{R_3(\beta B^2)}{R_1(\alpha_0)} \\ \frac{1}{1 + \frac{R_7}{R_6}} &= \frac{b_1}{B} - \frac{R_1}{R_3} \frac{\alpha_0}{\beta B^2} \end{aligned} \quad (10-280)$$

o eso

$$1 + \frac{R_7}{R_6} = \frac{1}{\frac{b_1}{B} - \frac{R_1}{R_3} \left( \frac{\alpha_0}{\beta B^2} \right)} \quad (10-281)$$

Sustituyendo (10-280) y (10-281) en (10-275d), obtenemos

$$\begin{aligned} b_0 &= \frac{R_3 \beta B^2}{R_2} \frac{1}{1 + \frac{R_3}{R_2} + \frac{R_3}{R_1}} \\ &= \frac{R_3 \beta B^2}{R_2} \frac{R_1 \alpha_0}{R_3 \beta B^2} = \frac{R_1 \alpha_0}{R_2} \end{aligned}$$

o

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{b_0}{\alpha_0} \quad (10-282)$$

Con (10-282), (10-280) y (10-281) rendimiento

$$\frac{R_1}{R_3} = \frac{\beta B^2}{\alpha_0} - \frac{R_1}{R_2} - 1 = \frac{\beta B^2}{\alpha_0} - \frac{b_0}{\alpha_0} - 1 \quad (10-283)$$

y

$$\frac{R_7}{R_6} = \frac{1}{\frac{b_1}{B} - \frac{R_1}{R_3} \left( \frac{\alpha_0}{\beta B^2} \right)} - 1 \quad (10-284)$$

Para asegurar que las relaciones de resistencia en (10-282) a (10-284) sean positivas, necesitamos satisfacer las siguientes dos ecuaciones:

$$\beta B^2 - b_0 - \alpha_0 > 0 \quad (10-285a)$$

y

$$1 > \frac{b_1}{B} - \frac{\beta B^2 - b_0 - \alpha_0}{\beta B^2} > 0 \quad (10-285b)$$

Con  $0 < \beta < 1$ , (10-285) forma el criterio de realizabilidad para que el circuito de la figura 10-46 funcione como un filtro de paso bajo. Observe que (10-285a) y la mitad derecha de (10-285b) se satisfacen si  $\beta$  se establece en

$$\frac{\beta B^2 - b_0 - \alpha_0}{\beta B^2} = \frac{b_1}{yB} \quad (10-286a)$$

o

$$\beta = \frac{b_0 + \alpha_0}{B^2 - \frac{b_1 B}{y}} \quad (10-286b)$$

donde

$$y > 1 \quad (10-286c)$$

En este caso, un procedimiento de diseño es:

1. Dada la función de transferencia biquadrática de paso bajo deseada ( $\alpha_0$ ,  $b_1$ ,  $b_0$ ) y los parámetros del amplificador operacional ( $\omega_a$ ,  $A_0$  o  $B = \omega_a A_0$ )
2. Verifique si las condiciones de realizabilidad en (10-285) se pueden satisfacer con  $0 < \beta < 1$ . En caso afirmativo, encuentre un valor  $\beta$  apropiado de (10-286).
3. Elija  $R$ ,  $R_3$  y  $R_6$  arbitrariamente.<sup>144</sup>
4. Encuentre  $R_4$  y  $R_5$  de (10-270),  $R_1$  de (10-283),  $R_2$  de (10-282) y  $R_7$  de (10-284).

**Ejemplo 10-25** Encuentre una realización R activa de

$$H(s) = \frac{2 \times 10^{12}}{s^2 + 10^5 s + 10^{12}} \quad (10-287)$$

**Solución:** Suponiendo que los amplificadores operacionales se caracterizan por la figura 10-25, entonces los parámetros dados son

$$\alpha_0 = 2 \times 10^{12}, b_1 = 10^5, b_0 = 10^{12}, \text{ and } B = 2\pi \times 10^6$$

Con estos parámetros dados, (10-285a) requiere que

$$\beta > \frac{b_0 + \alpha_0}{B^2} = \frac{3}{4\pi^2} \quad (10-288)$$

Porque

$$\frac{b_1}{B} = \frac{1}{20\pi} < 1$$

(10-285b) estará satisfecho si

$$\beta B^2 - b_0 - \alpha_0 = \frac{\beta b_1 B}{y} \quad (10-289a)$$

donde

<sup>144</sup> Los valores de  $R$ ,  $R_3$  y  $R_6$  generalmente se eligen (1) para minimizar la dispersión de los valores de resistencia y (2) para minimizar el efecto de la impedancia de entrada finita y la impedancia de salida distinta de cero de los amplificadores operacionales en el circuito.

$$y \geq 1 \quad (10-289b)$$

o

$$\beta = \frac{3 \times 10^{12}}{4\pi^2 \times 10^{12} - \frac{2\pi \times 10^{11}}{y}} \quad (10-290)$$

Claramente, el valor  $p$  en (10-290) también debe cumplir la condición establecida por (10-288).

Para ver cómo elegir correctamente el valor de  $y$ , usamos (10-284), (10-283) y (10-286a) como

$$\begin{aligned} \frac{R_7}{R_6} &= \frac{1}{\frac{b_1}{B} - \frac{R_1}{R_3} \frac{\alpha_0}{\beta B^2}} - 1 \\ &= \frac{1}{\frac{b_1}{B} - \frac{\beta B^2 - b_0 - \alpha_0}{\beta B^2}} - 1 \\ &= \frac{1}{\frac{b_1}{B} - \frac{b_1}{yB}} - 1 \\ &= \frac{B}{b_1} \frac{1}{1 - \frac{1}{y}} - 1 \end{aligned} \quad (10-291)$$

Para asegurar que la aproximación empleada para obtener (10-275d) no cause errores significativos, necesitamos tener una relación grande para  $R_7$  sobre  $R_6$ . Por lo tanto, debemos elegir  $y$  muy cerca (y mayor que) 1.

Sea  $y=1.1$ ; entonces (10-290) da

$$\beta=0.077 \quad (10-292)$$

Nótese que (10-288) se satisface con (10-292). De (10-282) a (10-284), obtenemos

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{1}{2} = 0.5 \quad (10-293a)$$

$$\frac{R_1}{R_3} = 2\pi^2\beta - 1.5 = 0.022 \quad (10-293b)$$

 $y$ 

$$\frac{R_7}{R_6} = 690.15 \quad (10-293c)$$

de demostrarse que con las relaciones de resistencia de (10-293) y  $\beta$  de (10-292), se satisface la condición de realizabilidad de (10-285). Sea  $\beta$ . Entonces (10-270) da

$$R_4 = 9230 \Omega \quad (10-294a)$$

$$R_5 = 770 \Omega \quad (10-294b)$$

Además, deja

$$R_3=25 K\Omega \quad (10-294c)$$

 $y$ 

$$R_6=250 \Omega \quad (10-294d)$$

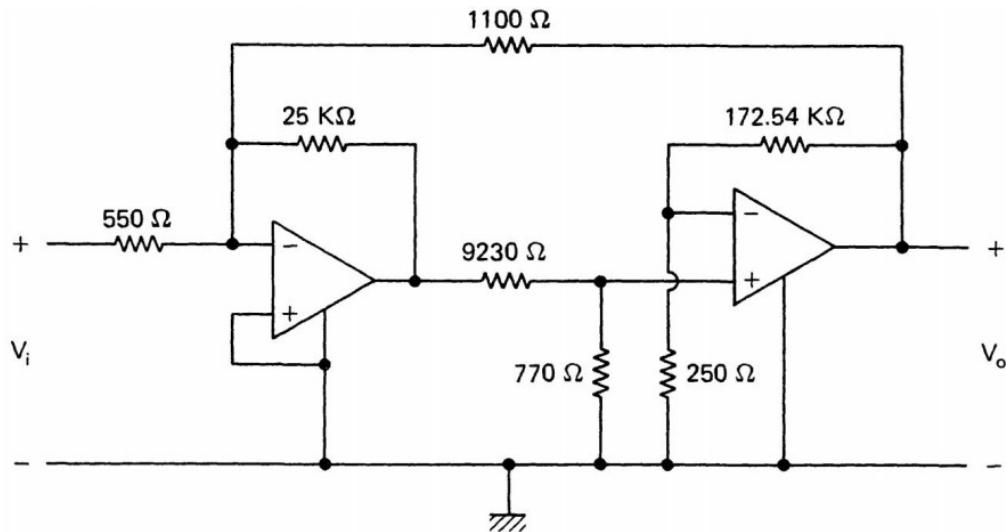
Entonces (10-293) da

$$R_7 = 172.54 \text{ K}\Omega \quad (10-294e)$$

$$R_1 = 550 \Omega \quad (10-294f)$$

$$R_2 = 1100 \Omega \quad (10-294g)$$

En la Fig. 10-47 se muestra una realización del circuito de (10-286) a través de los valores de los elementos de (10-294).



**Fig. 10-47** An active *R* circuit realization of (10-286).

**Paso de banda.** Si la función de transferencia deseada es un filtro de paso de banda,

$$H(s) = \frac{a_1 s}{s^2 + b_1 s + b_0} \quad (10-295)$$

entonces podemos derivar un conjunto de ecuaciones de diseño de (10-275) y (10-279) como

$$1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{R_1}{R_3} = \frac{B}{a_1} \quad (10-296a)$$

$$1 + \frac{R_3}{R_2} + \frac{R_3}{R_1} = \frac{R_3}{R_1} \frac{B}{a_1} \quad (10-296b)$$

$$1 + \frac{R_7}{R_6} = \frac{1}{\frac{b_1}{B} - \frac{R_1}{R_3} \left( \frac{a_1}{B} \right)} \quad (10-296c)$$

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{b_0}{B a_1 \beta} \quad (10-296d)$$

De (10-296), obtenemos

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{b_0}{B a_1 \beta} \quad (10-297a)$$

$$\frac{R_1}{R_3} = \frac{B}{a_1} - \frac{b_0}{B a_1 \beta} - 1 \quad (10-297b)$$

$$\frac{R_7}{R_6} = \frac{1}{\frac{b_1}{B} - \frac{R_1}{R_3} \left( \frac{a_1}{B} \right)} - 1 \quad (10-297c)$$

Para asegurar que (10-297) produzca razones positivas, requerimos que

$$B - \frac{b_0}{\beta B} - a_1 > 0 \quad (10-298a)$$

$$1 > \frac{1}{B} \left[ b_1 - \left( B - \frac{b_0}{\beta B} - a_1 \right) \right] > 0 \quad (10-298b)$$

Nótese aquí también que (10-298a) y la mitad derecha de (10-298b) se satisfacen si

$$B - \frac{b_0}{\beta B} - a_1 = \frac{b_1}{y} \quad (10-299a)$$

o

$$\beta = \frac{b_0}{B \left( B - \frac{b_1}{y} - a_1 \right)} \quad (10-299b)$$

donde

$$y > 1 \quad (10-299c)$$

En este caso, (10-297c), (10-297b) y (10-299a) producen

$$\begin{aligned} \frac{R_7}{R_6} &= \frac{1}{\frac{b_1}{B} - \frac{a_1}{B} \frac{B}{a_1} - \frac{b_0}{Ba_1\beta} - 1} \\ &= \frac{1}{\frac{b_1}{B} - \frac{b_1}{By}} - 1 \\ &= \frac{B}{b_1} \frac{1}{1 - \frac{1}{y}} - 1 \end{aligned} \quad (10-299d)$$

Un valor apropiado para  $y$  se determina conjuntamente por (10-299b) para producir un valor de  $\beta$  entre 0 y 1 y por (10-279) para satisfacer el requisito de un filtro de paso de banda.

Démosle ahora un procedimiento de diseño para que el circuito de la Fig. 10-46 actúe como un filtro de paso de banda:

1. Dada la función de transferencia deseada ( $a_1$ ,  $b_1$ ,  $b_0$ ) y los parámetros del amplificador operacional ( $\omega_a$ ,  $A_0$ , o  $B = \omega_a A_0$ ).
2. Verifique los criterios de realizabilidad de (10-298) con  $0 < \beta < 1$ . Encuentre un valor  $\beta$  apropiado si es posible.
3. Elija  $R_1$ ,  $R_3$  y  $R_6$
4. Encuentre  $R_4$  y  $R_5$  de (10-270),  $R_1$  de (10-297b),  $R_2$  de (10-297a) y  $R_7$  de (10-297c).

**Ejemplo 10-26** Encuentre una realización R activa de

$$H(s) = \frac{10^5 s}{s^2 + 10^5 s + 10^{12}} \quad (10-300)$$

**Solución:** De (10-299), el valor de  $\beta$  para satisfacer las condiciones de realizabilidad de (10-298) viene dado por

$$\beta = \frac{1}{2\pi \left( 2\pi - 0.1 - \frac{0.1}{y} \right)} \quad (10-301a)$$

donde

$$y > 1 \quad (10-301b)$$

y donde hemos supuesto que

$$B = 2\pi \times 10^6 \quad (10-302)$$

Para que el circuito funcione como un filtro de paso de banda, (10-279) requiere que la relación  $R_7/R_6$  sea grande. De (10-299d), esto significa que  $y$  debería elegirse para que esté cerca de 1. Sea  $y=1.1$ ; luego

$$\beta = \frac{1}{2\pi(2\pi - 0.1 - \frac{0.1}{1.1})} = 0.026 \quad (10-303)$$

Nótese que (10-298b) se satisface con (10-303). De (10-297), obtenemos

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{10^{12}}{2\pi \times 10^6 (10^5) 0.026} = 61.2 \quad (10-304a)$$

$$\frac{R_1}{R_3} = \frac{2\pi \times 10^6}{10^5} - 61.2 - 1 = 0.632 \quad (10-304b)$$

$$\frac{R_7}{R_6} = \frac{2\pi \times 10^6}{10^5} (1 + 10) - 1 = 690.5 \quad (10-304c)$$

Elijamos

$$R = 10 K\Omega$$

Entonces (10-270) da

$$R_4 = 9739 \Omega \quad (10-305a)$$

$$R_5 = 261 \Omega \quad (10-305b)$$

Sea

$$R_3 = 20 K\Omega \quad (10-305c)$$

y

$$R_6 = 200 \Omega \quad (10-305d)$$

Entonces (10-304) da

$$R_1 = 12.64 K\Omega \quad (10-305e)$$

$$R_2 = 207 \Omega \quad (10-305f)$$

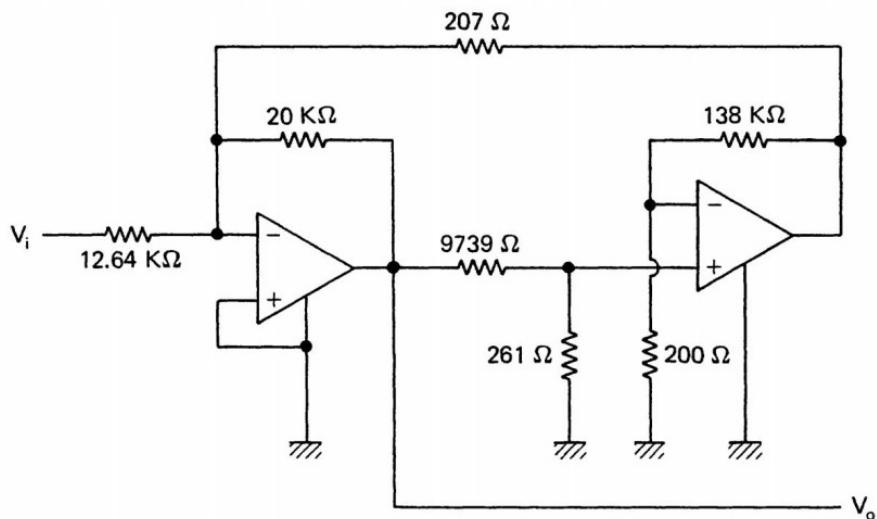
$$R_7 = 138 K\Omega \quad (10-305g)$$

En la figura 10-48 se muestra una realización de circuito de (10-300) a través de (10-305). De (10-275b), encontramos el término ignorado

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{B^2}{\frac{B}{a_1} \left(1 + \frac{R_7}{R_6}\right)} \\ &= \frac{(2\pi \times 10^6)(10^5)}{691.5} = 9.1 \times 10^8 \end{aligned} \quad (10-306)$$

Por lo tanto, la ganancia

$$\frac{a_0}{b_0} = 9.1 \times 10^{-4}$$



**Fig. 10-48** An active *R* bandpass filter.

Es bastante pequeño en comparación con la ganancia de banda media.

$$\frac{a_1}{b_1} = 1$$

del filtro de paso de banda. Es decir, el circuito de la figura 10-48 es una buena realización de (10-300).

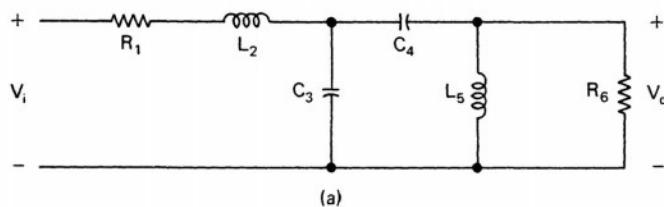
## Referencias y lecturas adicionales

- [1] Mitra, S. K. derive Inductorless Filters. New York: IEEE Press, 1971.
- [2] Mitra, S. K. Analysis and Synthesis of Linear Active Networks. New York: John Wiley, 1968.
- [3] Su, K. L. Active Network Synthesis. New York: McGraw-Hill, 1965.
- [4] Huelsman, L. P. Theory and Design of Active RC Circuits. New York: McGraw-Hill, 1968.
- [5] Hilburn, J. L., and Johnson , D. E. Manual of Active Filter Design. New York: McGraw-Hill, 1973.
- [6] Heinlein, W. E., and Holmes, W. H. Active Filters For Integrated Circuits. London: Prentice-Hall, 1974.
- [7] Moschytz, G. S. Linear Integrated Networks: Fundamental. New York: Van Nostrand Reinhold, 1974.
- [8] Moschytz, G. S. Linear Integrated Network: Design. New York: Van Nostrand Reinhold, 1975.
- [9] Johnson, D. E. Introduction to Filter Theory. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1976.
- [10] Bruton, L. T. "Network Transfer Functions Using the Concept of Frequency Dependent Negative Resistance." IEEE Trans. Circuit Theory CT-16 (1969): 406-8.
- [11] Bruton, L. T., and Treleaven , D. "Active Filter Design Using Generalized Impedance Converter." EDN, (Feb. 5, 1973): 68-75.
- [12] Kuh, E. S. "Transfer Function Synthesis of Active RC Networks." 1960 IRE International Record 8 (pt. 2): 134-38.
- [13] Hazony, D., and Joseph , R. D. "Transfer Matrix Synthesis with Active RC Networks." SIAM J. Appl. Math. 14 (1966): 739-61.
- [14] Mitra, S. K. "Transfer Function Synthesis Using a Single Operational Amplifier." Electronic Letters 3 (1967): 333-34.
- [15] Yanagisawa, T. "RC Active Networks Using Current Inversion Type Negative Impedance Converters." IRE Trans. Circuit Theory CT-4 (1957): 140-44.
- [16] Mathews, M. V., and Seifert , W. W. "Transfer Function Synthesis with Computer Amplifiers and Passive Networks." Proc. Western Joint Computer Conference (March 1955): 7-12.
- [17] Lovering, W. F. "Analog Computer Simulation of Transfer Functions." Proc. IEEE 53 (1965): 306.
- [18] Mitra, S. K. "Active RC Filters Employing a Single Operational Amplifier as the Active Element." Proc. Hawaii International Conference on System Science (1968): 433-36.
- [19] Brown, G. C. "Sensitivity in Active RC Filters." Electronic Letters 3 (1967): 298-99.
- [20] Sallen, R. P., and Key, E. L. "A Practical Method of Designing RC Active Filters." IRE Trans. Circuit Theory CT-2 (1955): 74-85.
- [21] Kerwin, W. J., and Huelsman, L. P. "The Design of High Performance Active RC Band Pass Filters." 1966 IEEE International Convention Record 14 (pt. 10): 74-80.
- [22] Friend, J. J., Harris, C. A., and Hilbermann, D. "STAR: An Active Biquadratic Filter Section." IEEE Trans. Circuit and Systems CAS-22 (1975): 115-21.
- [23] Kerwin, W. J., Huelsman, L. P., and Newcomb , R. W. "State-Variable Synthesis for Insensitive Integrated Circuit Transfer Functions." IEEE J. Solid State Circuits SC-2 (1967): 87-92.
- [24] Tow, J. "A Step-by-Step Active-Filter Design." IEEE Spectrum 6 (1969): 64-68.
- [25] Thomas, L. C. "The Biquad: Part I—Some Practical Design Considerations." IEEE Trans. Circuit Theory CT-18 (1971): 350-57.
- [26] Thomas, L. C. "The Biquad: Part II—A Multipurpose Active Filtering System." IEEE Trans. Circuit Theory CT-18 (1971): 358-61.
- [27] Girling, F. E. J., and Good , E. F. "The Leapfrog or Active Ladder Synthesis." Wireless World QvAy 1970): pp. 285-87.

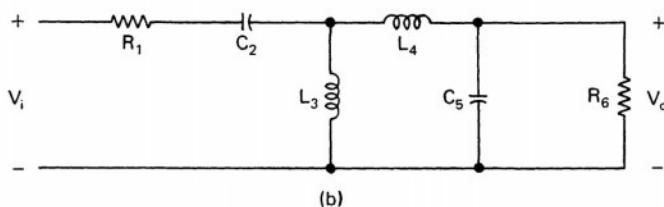
- [28] Adams, R. L. "On Reduced Sensitivity Active Filters." 14th Midwest Symp. on Circuit Theory, University of Denver, Colorado (May 1971):14.3-1 to 3-8.
- [29] Szentirmai, G. "Synthesis of Multiple-Feedback Active Filters." Bell Syst. Tech. J. 52 (1973): 527-55.
- [30] Laker, K. R., and Ghausi , M. S. "Synthesis of a Low Sensitivity Multiloop Feedback Active RC Filter." IEEE Trans. Circuit and Systems CAS-21 (1974): 252-59.
- [31] Hilberman, D. "Input and Ground as Complements in Active Filter." IEEE Trans. Circuit Theory CT-20 (1973): 540-47.
- [32] Moschytz, G. S. "Second Order Pole-Zero Pair Section for zzth Order Minimum Sensitivity Networks." IEEE Trans. Circuit Theory CT-17 (1970): 527-34.
- [33] Lee, S. C. "Sensitivity Minimization in Active RC Integrated Circuit Design." Proc. 4th Annual Allerton Conference on Circuit and System Theory (1966): 269-81.
- [34] Lueder, E. "A Decomposition of a Transfer Function Minimizing Distortion and Inband Losses." Bell System Tech. J. 49 (1970): 455-69.
- [35] Halfin, S. "An Optimization Method for Cascaded Filters." Bell System Tech. J. 49 (1970): 185-90.
- [36] Graeme, J. G., Tobey , G. E., and Huelsman, L. P. Operational Amplifier Design and Application. New York: McGraw-Hill, 1971.
- [37] Graeme, J. D. Applications of Operational Amplifiers: Third Generation Techniques. New York: McGraw-Hill, 1973.
- [38] Roberge, J. K. Operational Amplifier: Theory and Practice. New York: John Wiley, 1975.
- [39] Stout, D. F., and Kaufman, M. Handbook of Operational Amplifier Circuit Design. New York: McGraw-Hill, 1976.
- [40] Moschytz, G. S. "The Operational Amplifier in Linear Active Networks." IEEE Spectrum 7 (1970): 42-50.
- [41] Soundararajan, K., and Ramakrishna, K. "Characteristics of Nonideal Operational Amplifiers." IEEE Trans. Circuit and Systems CAS-21 (1974): 69-75.
- [42] Budak, A., and Petrela, D. M. "Frequency Limitations of Active Filters Using Operational Amplifiers." IEEE Trans. Circuit Theory CT-19 (1972): 322-28.
- [43] Gray, P. R., and Meyer, R. G. "Recent Advances in Monolithic Operational Amplifier Design." IEEE Trans. Circuit and Systems CAS-21 (1974): 317-27.
- [44] Fleischer , P. E. "Sensitivity Minimization in a Single Amplifier Biquad Circuit." IEEE Trans. Circuit and Systems CAS-23 (1976): 45-55.
- [45] Srinivasagopalan , P., and Martens , G. O. "A Comparison of a Class of Active Filters with Respect to Operational Amplifier Gain-Bandwidth Product." IEEE Trans. Circuit and Systems CAS-21 (1974): 377-81.
- [46] Geffe, P. R. "Exact Synthesis with Real Amplifiers." IEEE Trans. Circuit and Systems CAS-21 (1974): 369-76.
- [47] Rao, K. R., and Srinivasan , S. "Low-Sensitivity Active Filters Using the Operational Amplifier Pole." IEEE Trans. Circuit and Systems CAS-21 (1974): 260-62.
- [48] Schaumann, R. "Low Sensitivity High Frequency Tunable Active Filter Without External Capacitors." IEEE Trans. Circuit and Systems CAS-22 (1975): 39-44.
- [49] Mitra, A. K., and Aatre , V. K. "Low Sensitivity High Frequency Active R Filters." IEEE Trans. Circuit and Systems CAS-23 (1976):670-76.

## Problemas

- 10-1. Encuentre una realización de circuito de escalera activa de un filtro Butterworth de paso bajo de orden  $n$  con la frecuencia de corte de 3 dB  $f_c=8 \text{ KHz}$  y la resistencia de carga terminal  $R_l=600\Omega$ , donde  $n=2,3,4,5$ , y 6 .
- 10-2. Encuentre una realización de circuito de escalera activa de un filtro Chebyshev de paso bajo de orden  $n$  con riple 0,1 dB, ancho de banda de riple  $f_r=3.4 \text{ KHz}$  y una resistencia de carga terminal  $R_l=600\Omega$ , donde  $n=2,3,4,5$ , y 6 .
- 10-3. Encuentre una realización de circuito de escalera activa de un filtro Butterworth de paso alto de orden  $w$  con la frecuencia de corte de 3 dB  $f_c=10 \text{ KHz}$ . y la resistencia terminal  $R_l=600\Omega$ , donde  $n=2,3,4,5$ , y 6 .
- 10-4. Encuentre una realización de circuito de escalera activa de un filtro Chebyshev de paso alto de orden  $n$  con ondas de 1 dB para  $f_r \geq 10 \text{ KHz}$  . y la resistencia terminal  $R_l=600\Omega$  .
- 10-5. Reemplace cada circuito de escalera pasivo en la figura P10-5 con un circuito de escalera activo que tenga la misma función de transferencia general. Los circuitos activos pueden contener solamente resistencias, capacitores, dispositivos de dos puertos escalados en impedancia  $k_s$  y  $k/s$  , giradores y FDNR.

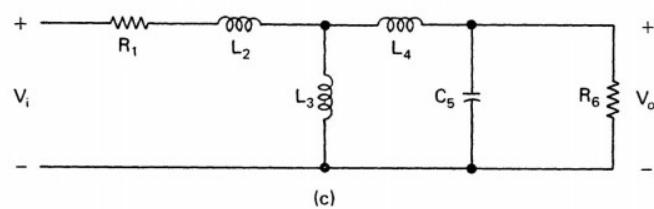


(a)

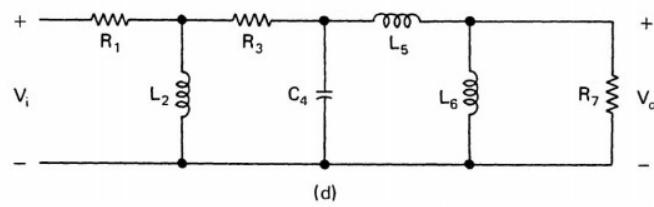


(b)

Fig. P10-5(a), (b)



(c)



(d)

Fig. P10-5(c), (d)

10-6. Realice los siguientes filtros con la configuración de Kuh:

- Un filtro de paso bajo Butterworth de segundo orden con una ganancia de 10 y una frecuencia de corte de 3 dB  $\omega_c=10 \text{ Krad./seg}$ .
- Un filtro Chebyshev de paso bajo de tercer orden con ondas de  $0.1 \text{ dB}$ , ancho de banda  $\omega_r=10 \text{ Krad./seg}$ . y una ganancia de 5.
- Un filtro Butterworth de paso de banda de cuarto orden con frecuencia central  $\omega_0=8 \text{ Krad./seg}$ ., ancho de banda  $B=2 \text{ Krad./seg}$ . y una ganancia de banda media de 1.
- Un filtro Butterworth de paso alto de cuarto orden con una ganancia de alta frecuencia de 1 y una frecuencia de corte de  $3 \text{ dB}$  en  $\omega_c=10 \text{ Krad./seg}$ .

10-7. Realice las siguientes funciones de transferencia con las configuraciones de Kuh:

- $H(s) = \frac{1}{(s^2 + 1)(s + 1)^2}$
- $H(s) = \frac{1}{(\hat{s} + 1)(\hat{s} + 2)(\hat{s} + 3)}$  where  $\hat{s} = \frac{s}{10000}$
- $H(s) = \frac{1}{(s + 1)^3}$
- $H(s) = \frac{s^2}{(s + 1)^3}$
- $H(s) = \frac{s^2}{s^2 + 3s + 3}$

10-8. Realice las siguientes funciones de transferencia por el método de Yanagisawa:

- $H(s) = \frac{1}{(s + 1)^3}$
- $H(s) = \frac{1}{(\hat{s} + 1)(\hat{s}^2 + 1)}$  where  $\hat{s} = \frac{s}{1000}$
- $H(s) = \frac{s + 1}{(s + 2)(s^2 + 3)}$
- $H(s) = \frac{(s + 1)^2}{(s + 2)(s^2 + 3)}$
- $H(s) = \frac{\hat{s}^2 + 1}{(\hat{s} + 1)(\hat{s}^2 + 3\hat{s} + 3)}$  where  $\hat{s} = \frac{s}{4000}$
- $H(s) = \frac{s^2 + 1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$
- $H(s) = \frac{s^3 + 1}{s(s + 1)^3}$
- $H(s) = \frac{s^3}{(s + 1)(s^2 + 3s + 1)}$
- $H(s) = \frac{\hat{s}^2 - 3\hat{s} + 3}{\hat{s}^2 + 3\hat{s} + 3}$  where  $\hat{s} = \frac{s}{10000}$
- $H(s) = \frac{-s^3 + 2s^2 - 2s + 4}{s^3 + 2s^2 + 2s + 4}$

10-9. Realice las funciones de transferencia del problema 10-8 mediante el método de Mathews-Seifert.

10-10. Realice las funciones de transferencia del problema 10-8 por el método de Lovering.

10-11. Realice las funciones de transferencia del problema 10-8 por el método de Mitra.

10-12. (a) Realizar la función de transferencia

$$H(s) = \frac{(s + 1)^2}{(s^2 + 1)(s + 3)}$$

por el método de Mathew-Seifert de la figura 10-13 con  $D(s)=(s+1)(s+3)$ ,  $k_i=0$   $k_1=0$  y  $k_2=1$ .

(b) Encuentre las sensibilidades de los polos  $\hat{S}_{k_2}^{p_1}$ ,  $\hat{S}_{k_2}^{p_2}$  y  $\hat{S}_{k_2}^{p_3}$ , donde  $p_1=j$ ,

$p_2 = -j$  y  $p_3 = -3$  son los polos de la red.

(c) Encuentre las condiciones bajo las cuales las ubicaciones de los polos de  $p_1$  y  $p_2$  pueden ser perturbadas al plano s de RH y, por lo tanto, el circuito se vuelve inestable.

10-13. Realice las siguientes funciones de transferencia a través de la técnica de variable de estado:

(a)  $H(s) = \frac{1}{(s + 1)^3}$

(b)  $H(s) = \frac{s}{(s + 1)(s^2 + 1)}$

(c)  $H(s) = \frac{2s^2}{(s + 2)(s^2 + 1)}$  where  $s = \frac{s}{10^4}$

(d)  $H(s) = \frac{3s^4}{(s + 1)(s + 2)(s^2 + 3s + 3)}$

(e)  $H(s) = \frac{s^4}{(s^2 + 1)(s^2 + 3s + 3)}$

(f)  $H(s) = \frac{s^2 + 1}{(s + 2)(s^2 + 3s + 3)}$

(g)  $H(s) = \frac{\hat{s}^2 - 3\hat{s} + 3}{\hat{s}^2 + 3\hat{s} + 3}$  where  $\hat{s} = \frac{s}{5000}$

(h)  $H(s) = \frac{s^3 - 6s^2 + 15s - 15}{s^3 + 6s^2 + 15s + 15}$

(i)  $H(s) = \frac{1}{(\hat{s}^2 + 0.77\hat{s} + 1)(\hat{s}^2 + 1.85\hat{s} + 1)}$  where  $\hat{s} = \frac{s}{10^4}$

(j)  $H(s) = \frac{s^2}{(s + 1)^2(s + 2)^2}$

10-14. Realice las siguientes funciones de transferencia de segundo orden a través de la tabla 10-1:

(a)  $H(s) = \frac{6}{s^2 + 3s + 3}$

(b)  $H(s) = \frac{2}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$  where  $\hat{s} = \frac{s}{10^4}$

(c)  $H(s) = \frac{10^8}{s^2 + 100s + 10^8}$

(d)  $H(s) = \frac{6s}{s^2 + 3s + 3}$

(e)  $H(s) = \frac{2\hat{s}}{\hat{s}^2 + \sqrt{2}\hat{s} + 1}$  where  $\hat{s} = \frac{s}{10^4}$

(f)  $H(s) = \frac{10^3 s}{s^2 + 100s + 10^8}$

(g)  $H(s) = \frac{3\hat{s}^2}{\hat{s}^2 + 3\hat{s} + 3}$  where  $\hat{s} = \frac{s}{10^5}$

(h)  $H(s) = \frac{s^2}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$

(i)  $H(s) = \frac{2s^2}{s^2 + 100s + 10^8}$

(j)  $H(s) = \frac{s + 2}{s^2 + 3s + 4}$

(k)  $H(s) = \frac{s(s + 2)}{s^2 + 5s + 2}$

(l)  $H(s) = \frac{\hat{s}^2 + 1}{\hat{s}^2 + 0.1\hat{s} + 1}$  where  $\hat{s} = \frac{s}{10^4}$

(m)  $H(s) = \frac{s^2 + (120\pi)^2}{s^2 + 10\pi s + (120\pi)^2}$

(n)  $H(s) = \frac{s^2 + (120\pi)^2}{s^2 + 10\pi s + (240\pi)^2}$

(o)  $H(s) = \frac{s^2 + 5}{s^2 + 5s + 2}$

(p)  $H(s) = \frac{s^2 + 2}{s^2 + 5s + 5}$

(q)  $H(s) = \frac{s^2 + 3s + 1}{s^2 + 5s + 1}$

(r)  $H(s) = \frac{s^2 + 5s + 1}{s^2 + 3s + 1}$

10-15. Realice las siguientes funciones de transferencia conectando en cascada las secciones de segundo orden obtenidas de la tabla 10-1:

- (a)  $H(s) = \frac{2}{(s^2 + 0.77s + 1)(s^2 + 1.85s + 1)}$
- (b)  $H(s) = \frac{2}{(s^2 + 3s + 3)(s^2 + \sqrt{2}s + 1)}$
- (c)  $H(s) = \frac{2s^2}{(s^2 + 3s + 3)(s^2 + \sqrt{2}s + 1)}$  where  $s = \frac{s}{10^4}$
- (d)  $H(s) = \frac{s(s^2 + 1)}{(s^2 + 0.77s + 1)(s^2 + 1.85s + 1)}$
- (e)  $H(s) = \frac{s^2(s^2 + 1)}{(s^2 + 3s + 3)(s^2 + \sqrt{2}s + 1)}$
- (f)  $H(s) = \frac{1}{(s^2 + 0.77s + 1)(s^2 + 1.85s + 1)(s^2 + \sqrt{2}s + 1)}$   
where  $s = \frac{s}{10^4}$
- (g)  $H(s) = \frac{s^2}{(s^2 + 3s + 3)(s^2 + \sqrt{2}s + 1)^2}$
- (h)  $H(s) = \frac{10}{(s^2 + s + 1)^3}$

10-16. Considere la función de transferencia

$$H(s) = \frac{10^8}{s^2 + 10^\alpha s + 10^8}$$

- (a) Con  $\alpha=4$ , realice  $H(s)$  a través de la tabla 10-1.
- (b) Encuentre las sensibilidades  $\omega_0$  y  $Q$  con respecto a la ganancia del VCVS.
- (c) Repita (a) y (b) con  $\alpha=3$ .
- (d) Repita (a) y (b) con  $\alpha=2$ .
- (e) Repita (a) y (b) con  $\alpha=1$ .

10-17. Repita el problema 10-16 con

$$H(s) = \frac{10^\alpha s}{s^2 + 10^\alpha s + 10^8}$$

10-18. Repita el problema 10-16 con

$$H(s) = \frac{s^2}{s^2 + 10^\alpha s + 10^8}$$

10-19. Realice las siguientes funciones de transferencia mediante la configuración del circuito de Friend de la figura 10-26:

- (a)  $H(s) = \frac{100s}{s^2 + 100s + 10^6}$
- (b)  $H(s) = \frac{s^2 - 100s + 10^6}{s^2 + 100s + 10^6}$
- (c)  $H(s) = \frac{s^2 + 10^6}{s^2 + 100s + 10^6}$
- (d)  $H(s) = \frac{s^2}{s^2 + 100s + 10^6}$
- (e)  $H(s) = \frac{100s(s^2 + 10^6)}{(s^2 + 100s + 10^6)^2}$
- (f)  $H(s) = \frac{s^2}{(s^2 + 100s + 10^6)^2}$

10-20. (a) Realizar la función de transferencia

$$H(s) = \frac{s^2 + \omega_1^2}{s^2 + 100s + 10^6} = \frac{s^2 + 10^4}{s^2 + 100s + 10^6}$$

por la configuración del circuito de Friend.

(b) Encuentre las sensibilidades  $\omega_1$ ,  $\omega_0$  y  $Q$  con respecto a los capacitores  $C_1$ ,  $C_2$ .

10-21. Realice las siguientes funciones de transferencia a través de los amplificadores múltiples biquadrados de la figura 10-29.

(a)  $H(s) = \frac{6}{s^2 + 3s + s}$

(b)  $H(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$  where  $s = \frac{S}{10^4}$

(c)  $H(s) = \frac{s}{(s + 2)^2}$

(d)  $H(s) = \frac{6s}{s^2 + 3s + 3}$  where  $s = \frac{S}{10^5}$

(e)  $H(s) = \frac{s^2}{(s + 2)^2}$

(f)  $H(s) = \frac{s^2}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$  where  $s = \frac{S}{10^4}$

(g)  $H(s) = \frac{s^2 + 3}{s^2 + 3s + 3}$

(h)  $H(s) = \frac{s^2 + 1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$  where  $s = \frac{S}{120\pi}$

(i)  $H(s) = \frac{s + 1}{s^2 + 3s + 1}$

(j)  $H(s) = \frac{s^2 + \sqrt{2}s + 1}{s^2 + 3s + 3}$

10-22. Realice las siguientes dos funciones de transferencia simultáneamente en un circuito biquadrático (utilice la figura 10-29):

$$H_1(s) = \frac{2}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$$

Y

$$H_2(s) = \frac{4s}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$$

where  $s = \frac{S}{10^5}$ ,

10-23. Realice las siguientes tres funciones de transferencia simultáneamente en un circuito biquadrático (utilice la figura 10-29):

$$H_1(s) = \frac{6}{s^2 + 3s + 3}$$

$$H_2(s) = \frac{2s}{s^2 + 3s + 3}$$

Y

$$H_3(s) = \frac{3s^2}{s^2 + 3s + 3}$$

10-24. Realice las siguientes cuatro funciones de transferencia simultáneamente en un circuito biquadrático completo (utilice la figura 10-29):

$$H_1(s) = \frac{10^6}{s^2 + 100s + 10^6}$$

$$H_2(s) = \frac{200s}{s^2 + 100s + 10^6}$$

$$H_3(s) = \frac{2s^2}{s^2 + 100s + 10^6}$$

and

$$H_4(s) = \frac{s^2 + 10^6}{s^2 + 100s + 10^6}$$

10-25. (a) Realizar la función de transferencia

$$H(s) = \frac{10^8}{s^2 + 100s + 10^8}$$

por un circuito biquadrático (utilice la figura 10-29).

- (b) Encuentre las sensibilidades  $\omega_0$  y Q con respecto a todas las resistencias y capacitores.
- (c) Encuentre las sensibilidades de los polos con respecto a todos los resistores y capacitores.
- (d) Verifique (9-72) para este caso.

10-26. (a) Use el circuito biquadrático de la figura 10-29 para realizar un filtro de paso de banda de segundo orden con una ganancia de banda media de 10, frecuencia central  $\omega_0/Q=2K \text{ rad./seg.}$ , y un par de polos  $Q=5N$ , donde N es un número entero. Nota: La función de transferencia de dicho filtro viene dada por

$$H(s) = \frac{G(\omega_0/Q)s}{s^2 + (\omega_0/Q)s + \omega_0^2}$$

donde G es la ganancia de banda media y  $\omega_0/Q=2K \text{ rad./seg.}$  es el ancho de banda.

(b) Un cable transporta 10 canales con una asignación de frecuencia, como se muestra en la Fig. P10-26(a), donde #N denota el canal N. Para procesar esta señal de cable en mensajes inteligentes, usamos un banco de filtros de paso de banda (BPF), como se muestra en la figura P10-26(b). Suponga que el filtro en (a) se usa para implementar los BPF. Encuentre la función de transferencia del filtro de paso de banda de cada canal, cada uno con una ganancia de banda media de 10, un ancho de banda de 2 K rad./seg. y una frecuencia central de 10 NK rad./seg. (para el canal N).

(c) Encuentre realizaciones de circuito de los BPF en (b) en la forma de la figura 10-29 de manera que la realización de circuito de BPF tenga solo un elemento diferente del de BPF #&, donde  $i \neq k = 1, 2, \dots, 10$ .

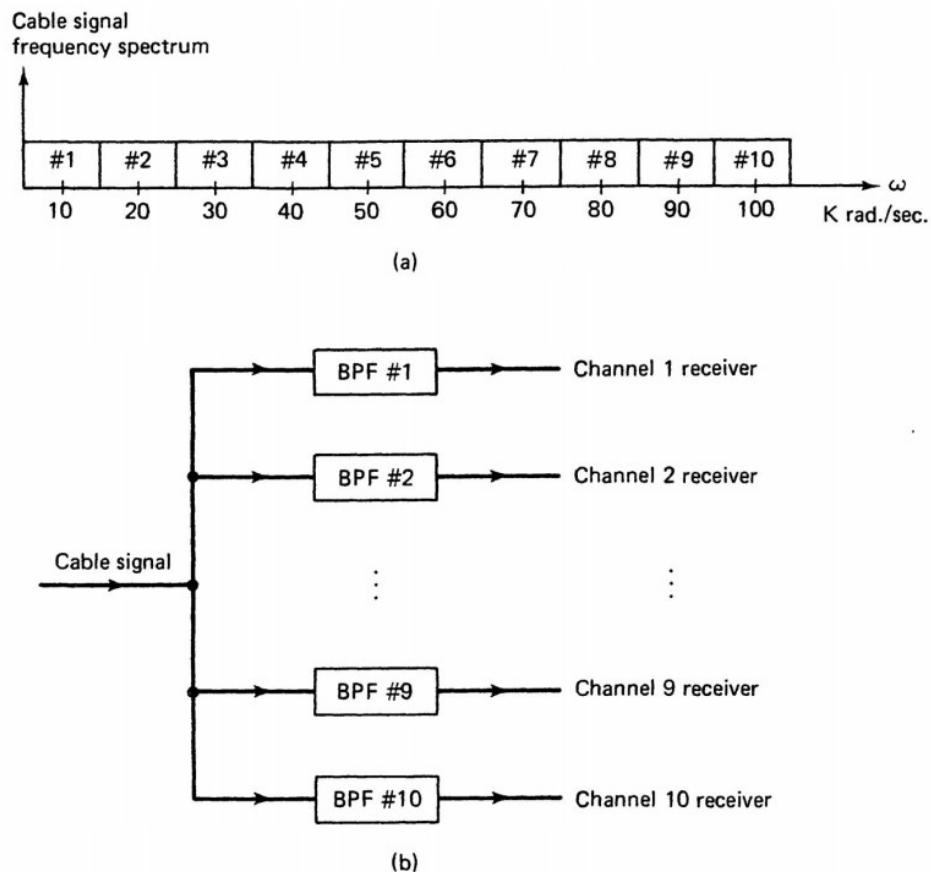


Fig. P10-26

10-27. Suponga que se requiere un banco de filtros de eliminación de banda (BEF) para eliminar una frecuencia base y sus armónicos. Las funciones de transferencia deseadas están en la forma

$$H(s) = \frac{s^2 + \omega_0^2}{s^2 + (\omega_0/Q)s + \omega_0^2}$$

donde  $\omega_0 = 120 N \pi \text{rad./sec.}$ , el ancho de banda de eliminación  $\omega_0/Q = 10 \pi \text{rad./sec.}$ , y  $N = 1, 2, 3, 4$  y  $5$ . Encuentre las realizaciones de circuito de estos cinco filtros en la forma de la figura 10-29 tal que la realización del circuito del filtro  $n$ -ésimo tiene a lo sumo tres elementos diferentes del filtro  $k$ -ésimo, donde  $i \neq k = 1, 2, 3, 4$  y  $5$ .

10-28. Realice las funciones de transferencia del problema 10-21 mediante el amplificador múltiple bicoadrado de Tow.

10-29. Realice las siguientes dos funciones de transferencia simultáneamente en un biquad amplificador múltiple de Tow:

$$H_1(s) = \frac{10^8}{s^2 + 100s + 10^8}$$

y

$$H_2(s) = \frac{200s}{s^2 + 100s + 10^8}$$

10-30. Repita el problema 10-29 con las siguientes dos funciones de transferencia:

$$H_1(s) = \frac{10^9}{s^2 + 200s + 10^8}$$

y

$$H_2(s) = \frac{s^2 - 200s + 10^8}{s^2 + 200s + 10^8}$$

10-31. Repita el problema 10-29 con las siguientes dos funciones de transferencia:

$$H_1(s) = \frac{s^2 + 10^6}{s^2 + 100s + 10^8}$$

y

$$H_2(s) = \frac{200s}{s^2 + 100s + 10^8}$$

10-32. Realice las siguientes tres funciones de transferencia simultáneamente en un amplificador múltiple biquadrado de Tow:

$$H_1(s) = \frac{10^{10}}{s^2 + 400s + 10^{10}}$$

$$H_2(s) = \frac{1000s}{s^2 + 400s + 10^{10}}$$

y

$$H_3(s) = \frac{2s^2}{s^2 + 400s + 10^{10}}$$

10-33. Considere el circuito de 3 puertos de la Fig. 10-39(a). Usando el concepto de función de transferencia complementaria:

(a) Construya un filtro de paso total

$$H_A(s) = \frac{s^2 - 3s + 3}{s^2 + 3s + 3}$$

(b) Construya un filtro de rechazo de banda

$$H_B(s) = \frac{s^2 + 3}{s^2 + 3s + 3}$$

10-34. Encuentre la función de transferencia  $V_o/V_i$  para el circuito que se muestra en la Fig. P10-34,

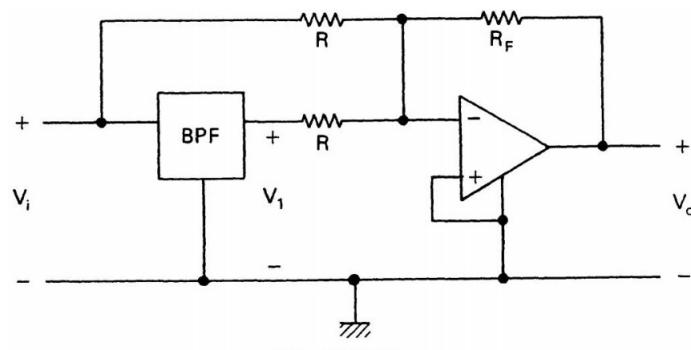


Fig. P10-34

donde el BPF se caracteriza por

$$\frac{V_1}{V_t} = H_{\text{BPF}}(s) = -\frac{(\omega_0/Q)s}{s^2 + (\omega_0/Q)s + \omega_0^2}$$

10-35. Considere el circuito amplificador inversor de ganancia de voltaje que se muestra en la Fig. 10-41, donde el amplificador operacional se caracteriza por la figura 10-25.

- (a) Encuentre el rango de frecuencia útil si la ganancia de voltaje deseada está dentro de  $\pm 1\%$  de  $|G|$  donde  $-G=1,5,10,50,100,200,500$  y  $1000$ .
- (b) Grafique los resultados de (a) con  $|G|$  siendo la variable independiente.
- (c) Repita (a) y (b) si la precisión requerida se cambia a  $\pm 5\%$ .

10-36. Considere el amplificador de ganancia de voltaje no inversor de la figura 10-42(a), donde el amplificador operacional se caracteriza por la figura 10-25.

- (a) Encuentre el rango de frecuencia útil si la ganancia de voltaje deseada está dentro de  $\pm 1\%$  de su valor de ganancia nominal  $G$ , donde  $G=1,5,10,50,100,200,500$  y  $1000$ .
- (b) Grafique el resultado de (a) siendo  $G$  la variable independiente.
- (c) Repita (a) y (b) si la precisión requerida es de  $\pm 5\%$ .

10-37. Considere el circuito integrador de la Fig. 10-43, donde  $RC=10^{-4}$  y el amplificador operacional se caracteriza por la Fig. 10-25.

- (a) Encuentre el rango de frecuencia útil si se requiere que el error de magnitud sea menor que  $\pm 1\%$  y el error de fase es menor que  $\pm 1^\circ$ .
- (b) Repita (a) si  $RC=10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-5}, 10^{-6}$  y  $10^{-7}$ .
- (c) Grafique los resultados de (b).

10-38. Repita el problema 10-37 si el error de magnitud debe ser inferior a  $\pm 5\%$  y el error de fase inferior a  $\pm 3^\circ$ .

10-39. Si el amplificador operacional se caracteriza por la figura 10-25, encuentre una realización de

$$H(s) = \frac{2s}{s^2 + 0.1s + 1}$$

a través del circuito (a) del Caso A2 de la Tabla 10-1 que producirá el rango de frecuencia útil más grande. Sugerencia: Optimice el rango de frecuencia útil con respecto a la ganancia  $k$  de VCVS.

10-40. (a) Si el amplificador operacional está modelado por la Fig. 10-40(d), con  $A(s)=A_0$ , encuentre la función de transferencia del circuito integrador que se muestra en la figura P10-40.

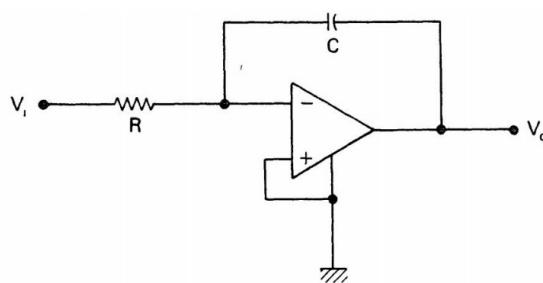


Fig. P10-40

(b) Considere el circuito biquadrático de la Fig. 10-29(a), donde se supone que los dos amplificadores operacionales en los circuitos integradores se caracterizan por (a) y se supone que el amplificador operacional restante es ideal. Encuentre las funciones de transferencia

$$H_1(s) = \frac{V_1}{V_t}, \quad H_2(s) = \frac{V_2}{V_i}, \quad \text{and} \quad H_3(s) = \frac{V_3}{V_i}$$

(c) Con base en los resultados de (b), encuentre los efectos de la ganancia finita del amplificador operacional en la frecuencia polar  $\omega_0$  y el par de polos  $Q$  del circuito.

(d) Si  $A_0=500$ , encuentre una realización para

$$H(s) = \frac{2}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$$

where  $s = \frac{s}{2K}$ .

(e) Encuentre las sensibilidades  $\omega_0$  y  $Q$  del circuito en (d) con respecto a  $A_0$ .

(f) Repita (d) y (e) para la siguiente función de transferencia:

$$H(s) = \frac{2}{s^2 + \sqrt{2} \times 10^{-2}s + 1}$$

where  $s = \frac{s}{2K}$ .

10-41. Suponga que un amplificador operacional está modelado por la Fig. P10-41(a), donde  $A_0$  y  $\tau$  son constantes.

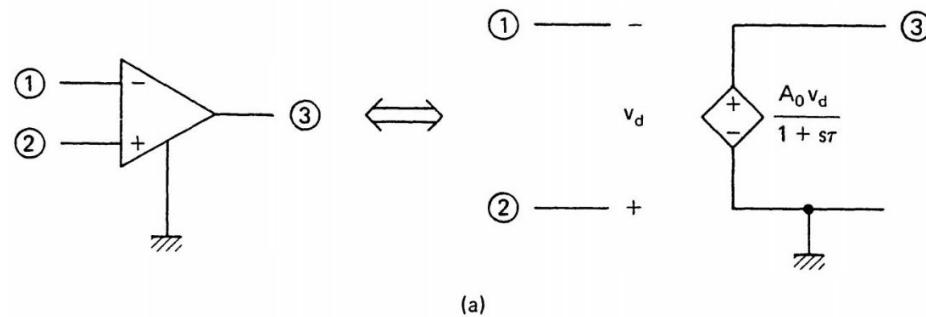


Fig. P10-41(a)

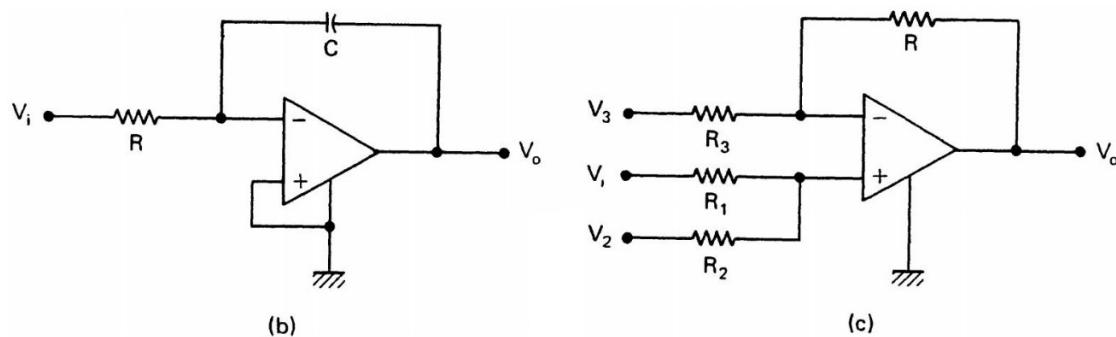


Fig. P10-41(b), (c)

(a) Encuentre la función de transferencia del circuito integrador que se muestra en la Fig. P10-41 (b).

(b) Encuentre la función de transferencia del circuito de verano que se muestra en la Fig. P10-

41(c) .

(c) Encuentre las funciones de transferencia

$$H_1(s) = \frac{V_1}{V_t}, \quad H_2(s) = \frac{V_2}{V_t}, \quad \text{and} \quad H_3(s) = \frac{V_3}{V_t}$$

del circuito biquadrático de la Fig. 10-29(a), donde los amplificadores operacionales se modelan de manera idéntica en la figura P10-41(a).

(d) Con base en los resultados de (c), encuentre  $H_2(s)$  , y  $H_3(s)$  si  $\tau \rightarrow 0$

(e) Repita (d) si  $A_0 \rightarrow \infty$  y  $\tau \rightarrow 0$  .

10-42. Suponga que un amplificador operacional se caracteriza por una ganancia de lazo abierto

$$A(s) = \frac{A_0 \omega_a}{s + \omega_a}$$

(a) Encuentre una realización activa del circuito biquadrático R de

$$H(s) = \frac{Bs}{s^2 + \gamma Bs + B^2}$$

donde  $B = A_0 \omega_a$  y  $\gamma = 0.01$  .

(b) Encuentre la sensibilidad de  $Q$  con respecto a  $A_0$  .

(c) Encuentre las sensibilidades de los polos con respecto a  $B$  .

(d) Repita (a), (b) y (c) con  $\gamma = 0.1$  .

(e) Repita (a), (b) y (c) con  $\gamma = 0.001$  .

10-43. Suponga que un amplificador operacional se caracteriza por una ganancia de lazo abierto

$$A(s) = \frac{A_0 \omega_a}{s + \omega_a}$$

donde  $A_0 = 50000$  y  $\omega_a = 40\pi rad./seg$  . Encuentre una realización biquadrática R activa para cada una de las siguientes funciones de transferencia:

(a)  $H(s) = \frac{2 \times 10^{10}}{s^2 + 10^3 s + 10^{10}}$

(b)  $H(s) = \frac{3 \times 10^{12}}{s^2 + 10^5 s + 10^{12}}$

(c)  $H(s) = \frac{10^{14}}{s^2 + 10^5 s + 10^{14}}$

(d)  $H(s) = \frac{10^3 s}{s^2 + 10^3 s + 10^{10}}$

(e)  $H(s) = \frac{2 \times 10^5 s}{s^2 + 10^5 s + 10^{12}}$

(f)  $H(s) = \frac{10^5 s}{s^2 + 10^5 s + 10^{14}}$

10-44. Suponga que un amplificador operacional se caracteriza por una ganancia de lazo abierto

$$A(s) = \frac{A_0 \omega_a}{s + \omega_a}$$

where  $A_0 = 50000$  and  $\omega_a = 40\pi$  rad./sec.

(a) Realizar la función de transferencia

$$H(s) = \frac{10^{10}}{s^2 + \sqrt{2} \times 10^5 s + 10^{10}}$$

por un circuito biquad R activo.

(b) Encuentre las sensibilidades de  $\omega_0$  y  $Q$  con respecto a  $A_0$  y  $\omega_a$ .

(c) Encuentre las sensibilidades de los polos con respecto a  $A_0$  y  $\omega_a$ .

10-45. Repita el problema 10-44 con

$$H(s) = \frac{10^6 s}{s^2 + 10^5 s + 10^{14}}$$

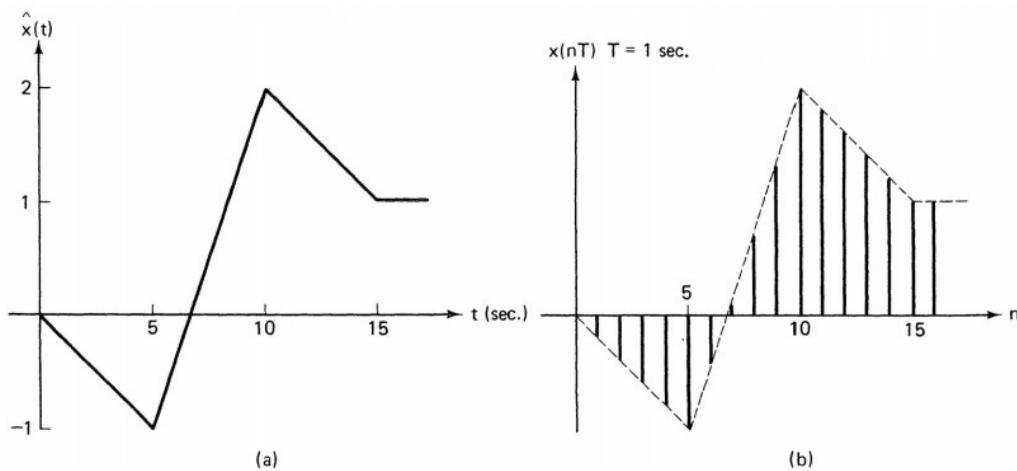
## 11. Introducción a filtros digitales

Un filtro digital es un procesador de señal digital que convierte una secuencia de números llamada entrada en otra secuencia de números llamada salida. Muchos conceptos teóricos del filtrado digital se conocen desde los días de Laplace. Sin embargo, la tecnología de esa época no podía utilizar este cuerpo de conocimiento. A medida que las computadoras digitales entraron en escena, los filtros digitales comenzaron a proliferar. Los científicos sísmicos hicieron un uso notable de los conceptos de filtrado digital para resolver muchos problemas interesantes. El procesamiento de imágenes utiliza técnicas de filtrado digital para mejorar la claridad de las imágenes obtenidas a partir de sensores remotos, comunicaciones interplanetarias y películas de rayos X. Otras áreas de aplicación incluyen procesamiento de voz, mapeo, radar, sonar y varios campos de la tecnología médica.

Un filtro digital se puede implementar como software, como una subrutina en una computadora digital, o como hardware, como un circuito que contiene registros, multiplicadores y sumadores. Durante varios años, la implementación de software fue el único modo posible de realizar el filtrado digital. Hoy en día, la implementación de software sigue siendo el modo dominante. Los filtros digitales a gran escala se implementan invariablemente en una computadora digital de propósito general o de propósito especial. Sin embargo, el rápido desarrollo de tecnologías de circuitos integrados a gran escala ha abierto el área de implementación de hardware de filtros digitales. Actualmente, la industria puede producir sumadores, registros de desplazamiento y chips multiplicadores necesarios para la implementación de hardware de filtros digitales a un costo razonable. Además, se vislumbran chips de procesamiento de señales digitales de propósito general y microprocesadores de procesamiento de números. En vista de la historia pasada de la industria de circuitos integrados, es previsible que estos componentes cuesten mucho menos y funcionen mucho mejor en el futuro. En consecuencia, las implementaciones de hardware y software pueden combinarse para producir filtros digitales de bajo costo pero eficientes.

### 11-1 Señales y sistemas digitales

Como se mencionó en el Capítulo 1, un filtro es un procesador de señales que mejora algunas señales y atenúa otras. Una señal puede ser una función continua de una variable independiente, que generalmente llamamos tiempo, como las formas de onda de voltaje y corriente en filtros analógicos. Estas señales se denominan señales de *tiempo continuo*. Por otro lado, una señal puede definirse para un número finito o, como mucho, infinitamente numerable de instantes de tiempo solamente. Este tipo de señal se denomina señal de tiempo discreto. Algunos ejemplos de señales de *tiempo discreto* son: el PNB anual de una nación que se muestra en la Fig. 11-1(a), la tasa de desempleo mensual en la Fig. 11-1(b), el gráfico de población de un pequeño pueblo que se muestra en la Fig. 11-1(c), y la producción mensual de automóviles de una empresa en la figura 11-1(d). Entre las principales fuentes de señales en tiempo discreto se encuentran las que se obtienen muestreando una señal en tiempo continuo. Un ejemplo de ello se muestra en la Fig. 11-2.



**Fig. 11-2** Sampling of a continuous signal. (a) A continuous signal. (b) Its corresponding sampled sequence.

Las señales digitales son señales de tiempo discreto cuyos valores están cuantificados. La salida de un convertidor A/D, que muestrea una señal de entrada de tiempo continuo y genera una secuencia de números binarios de longitud finita, es una señal digital típica. La esencia de un convertidor A/D se muestra en la Fig. 11-3(a). Si el muestreador toma muestras a razón de una muestra por  $\mu\text{seg}$  y el cuantificador tiene una relación entrada-salida como la que se muestra en la Fig. 11-3(b), luego, dada una señal de tiempo continuo  $\hat{x}(t)$  como en la Fig. 11-3(c), la correspondiente señal de tiempo discreto  $x_1(nT)$  y la señal digital de salida  $x(nT)$  se muestran, respectivamente, en las Figs. 11-3(d) y (e). Algunas otras señales digitales típicas son las que se muestran en la Fig. 11-1(c) y (d), donde los niveles cuantificados son respectivamente por persona y por automóvil. Estrictamente hablando, las computadoras digitales solo pueden manejar señales digitales.

Debido a que solo hay un número finito de niveles de señal cuantificados, surgen errores en cualquier sistema que maneje señales digitales. En consecuencia, una de las consideraciones de diseño de un filtro digital es el número de bits o el número de niveles cuantificados necesarios para representar una señal digital. Cuanto mayor sea el número de bits utilizados, más precisa será la representación de la señal y más costoso será el filtro. Claramente, existe una compensación entre la precisión y el costo.

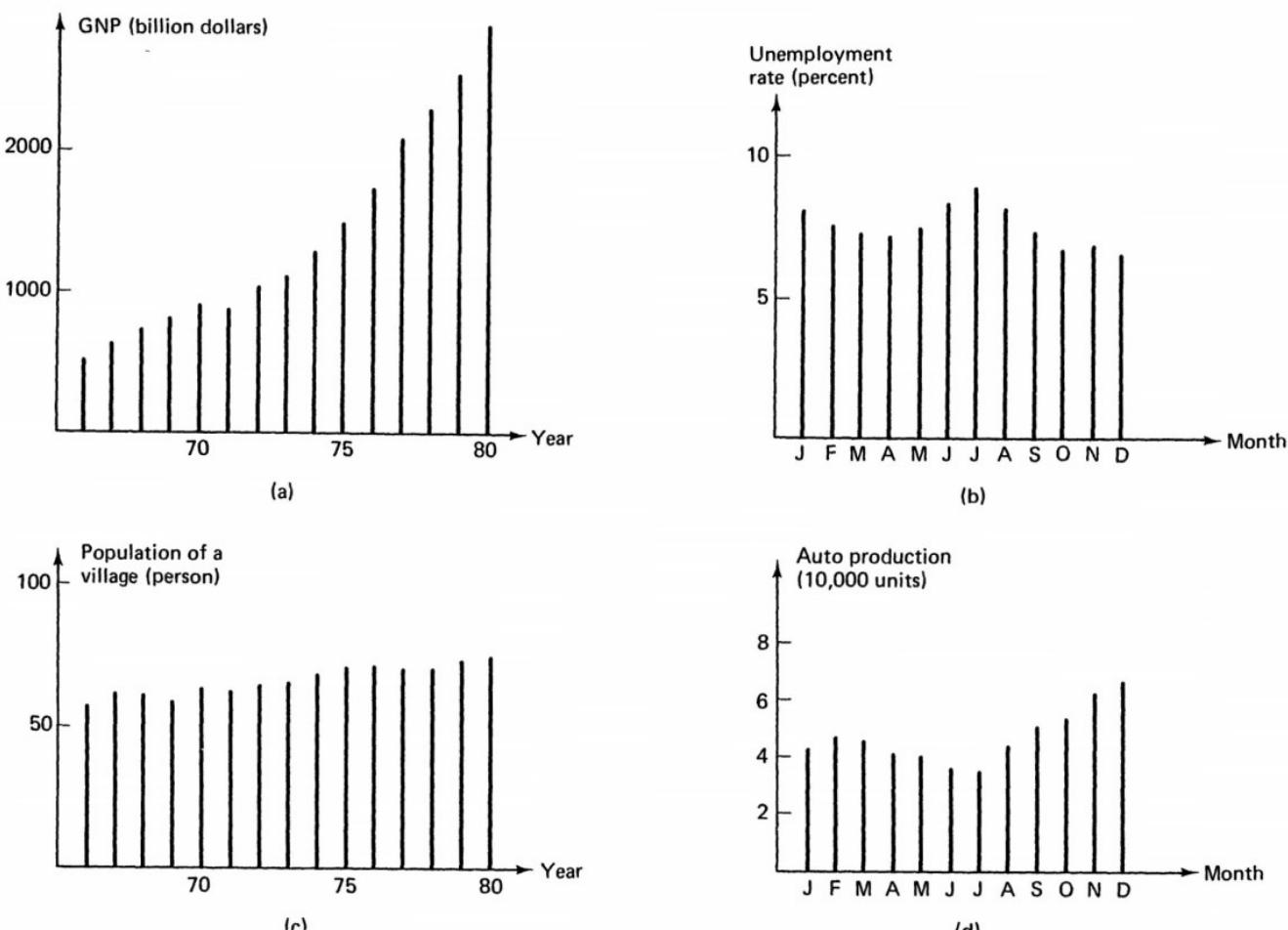


Fig. 11-1(a)

En este libro, no consideramos el efecto de cuantificación de un filtro digital. Esto esencialmente significa que tenemos una representación de números de bits infinitos. Por lo tanto, tratamos las señales digitales como si fueran señales de tiempo discreto. En otras palabras, no hacemos distinción entre las palabras "tiempo discreto" y "digital", y usamos la palabra "digital" de ahora en adelante.

No importa cómo surjan, las señales digitales se pueden considerar como secuencias de números. Las notaciones utilizadas para describir las señales digitales son<sup>145</sup>

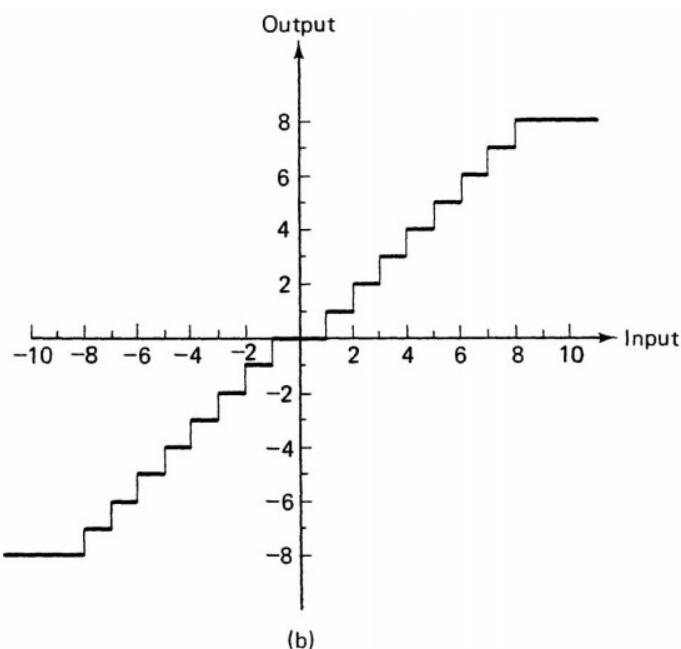
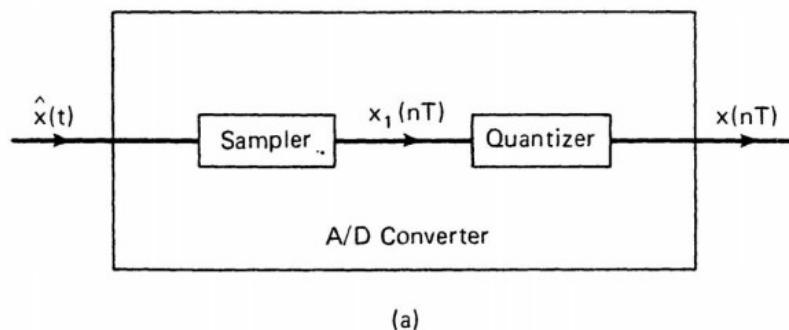
<sup>145</sup> Estrictamente hablando,  $\{x(n)\}$  denota la secuencia completa y  $x(n)$  denota el valor de la secuencia en el

$$\text{o } \{x(n)\} \quad (11-1a)$$

y

$$x(nT) \text{ o } \{x(nT)\} \quad (11-1b)$$

Tenga en cuenta que (11-1b) se aplica a señales con intervalos de tiempo uniformes, mientras que (11-1a) se aplica a señales con espacios de tiempo uniformes y no uniformes.<sup>146</sup>



**Fig. 11-3** The function of an A/D converter. (a) Schematic. (b) Input-output relationship of the quantizer.

Algunas secuencias importantes son:

1. La secuencia de impulso unitario  $\delta(n)$  definida por

$$\begin{aligned} \delta(n) &= 0 & n \neq 0 \\ &= 1 & \text{cuando } n = 0 \end{aligned} \quad (11-2)$$

Observe que una sucesión  $x(n)$  dada por

$$\{x(n)\} = \{\dots, x(-1), x(0), x(1), \dots\}$$

punto  $n$ . Sin embargo, por conveniencia, usamos tanto  $x(n)$  como  $\{x(n)\}$  para denotar la secuencia de  $x$ .

En este libro, consideraremos secuencias digitales unidimensionales solamente. Es decir, los valores de las sucesiones dependen de una sola variable independiente.

<sup>146</sup> Consideraremos exclusivamente señales digitales con espacios de tiempo uniformes solamente. Para aquellos que estén interesados en sistemas en los que los intervalos de tiempo entre muestras de señales no sean idénticos, consulte la referencia [23].

puede escribirse en términos de la secuencia de impulso unitario como

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k) \quad (11-3)$$

2. La secuencia de *pasos unitario*  $u(n)$  (o escalón unitario) definida por

$$\begin{aligned} x(n) &= a^n u(n) && \text{cuando } n \geq 0 \\ &= 0 && \text{cuando } n < 0 \end{aligned} \quad (11-4)$$

Con base en las definiciones en (11-2) y (11-4), las relaciones entre el impulso unitario y las secuencias de escalón unitario son

$$u(n) = \sum_{k=-\infty}^n \delta(k) \quad (11-5a)$$

$$\delta(n) = u(n) - u(n-1) \quad (11-5b)$$

3. Una secuencia exponencial

$$\begin{aligned} x(n) &= a^n u(n) && \text{cuando } n \geq 0 \\ &= 0 && \text{cuando } n < 0 \end{aligned} \quad (11-6a)$$

donde  $a$  puede ser real o complejo. Tenga en cuenta que una secuencia exponencial se puede expresar como

$$x(n) = a^n u(n) \quad (11-6b)$$

4. Sucesiones *sinusoidales* con periodo  $P$

$$x_1(n) = A_1 \cos(2\pi n/P) \quad (11-7a)$$

$$x_2(n) = A_2 \sin(2\pi n/P) \quad (11-7b)$$

Si  $P$  es un número racional positivo, digamos  $P = \alpha/\beta$ , donde tanto  $\alpha$  como  $\beta$  son dos números enteros positivos relativamente primos, entonces las secuencias en (11-7) se repiten cada  $\alpha$  muestra. Es decir,

$$x_k(n) = x_k(n+m\alpha) \quad (11-8)$$

donde  $k=1,2$  y  $m$  es un número entero. Por otro lado, si  $P$  es un número positivo irracional, entonces las secuencias en (11-7) no se repiten. Por lo tanto, las secuencias digitales sinusoidales no son necesariamente secuencias periódicas.

Al igual que las funciones de tiempo continuo, las señales o secuencias digitales están sujetas a operaciones aritméticas. Sean  $x \triangleq \{x(n)\}$  y  $y \triangleq \{y(n)\}$  dos secuencias, y sea  $\alpha$  un escalar.

Luego definimos:

1. suma y diferencia de dos secuencias

$$x \pm y \triangleq \{x(n) \pm y(n)\} \quad (11-9a)$$

2. Multiplicación de una secuencia por un escalar.

$$\alpha x \triangleq \{\alpha x(n)\} \quad (11-9b)$$

3. multiplicación y división de dos secuencias

$$\alpha x \triangleq \{\alpha x(n)\} \quad (11-9c)$$

$$\frac{x}{y} \triangleq \{x(n)/y(n)\} \quad (11-9d)$$

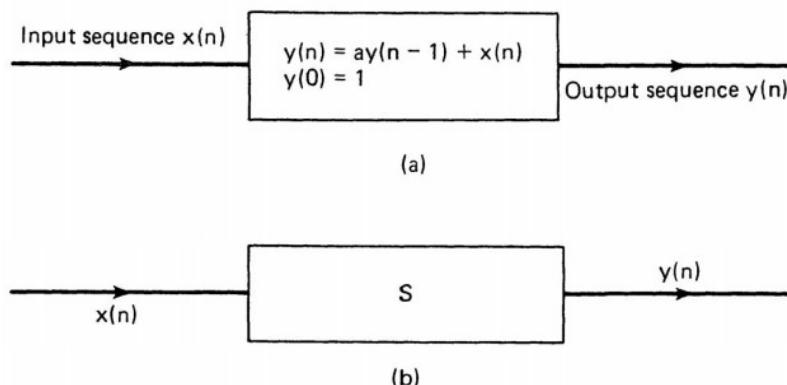
En el dominio del "tiempo", un sistema digital se caracteriza por un conjunto de *ecuaciones de diferencias*.<sup>147</sup> Esto significa que dada una secuencia de entrada y las condiciones iniciales del sistema, el conjunto de ecuaciones de diferencias producirá una secuencia de salida única.<sup>148</sup> Por ejemplo, considere el sistema caracterizado por

$$y(n) - ay(n-1) = x(n) \quad (11-10a)$$

$$y(0) = 1 \quad (11-10b)$$

donde  $x(n)$  e  $y(n)$  son, respectivamente, las secuencias de entrada y salida, como se muestra en la Fig. 11-4. Si la secuencia de entrada es un escalón unitario

$$\begin{aligned} x(n) &= 1 && \text{cuando } n \geq 0 \\ &= 0 && \text{cuando } n < 0 \end{aligned} \quad (11-11)$$



**Fig. 11-4** A digital system. (a) A specific case. (b) A general case.

entonces la secuencia de salida se puede calcular a partir de (11-10) para  $n=1,2,\dots$  como

$$\begin{aligned} y(1) &= ay(0) + x(1) = a + 1 \\ y(2) &= ay(1) + x(2) = a(a + 1) + 1 \\ &= a^2 + a + 1 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ y(k) &= ay(k-1) + x(k) \\ &= a^k + a^{k-1} + a^{k-2} + \dots + 1 = \left( \sum_{i=0}^k a^i \right) \end{aligned} \quad (11-12)$$

Si  $|a|<1$ , entonces (11-12) se puede escribir como

$$\begin{aligned} y(k) &= \left( \sum_{i=0}^k a^i \right) = \left( \sum_{i=0}^{\infty} a^i \right) - \left( \sum_{i=k+1}^{\infty} a^i \right) \\ &= \left( \sum_{i=0}^{\infty} a^i \right) - a^{k+1} \left( \sum_{j=0}^{\infty} a^j \right) \\ &= (1 - a^{k+1}) \left( \sum_{i=0}^{\infty} a^i \right) = \frac{1 - a^{k+1}}{1 - a} \end{aligned} \quad (11-13)$$

147 Recuerde que un sistema de tiempo continuo como el de un circuito RLC activo o pasivo se caracteriza por un conjunto de ecuaciones diferenciales en el dominio del tiempo.

148 En este libro, se supone que todas las ecuaciones en diferencias son lineales e invariantes en el tiempo.

Básicamente, un sistema digital  $S$  de entrada única y salida única es un algoritmo para convertir una secuencia de números en otra secuencia de números, como se muestra en la Fig. 11-4(b), donde la secuencia de entrada se llama  $x(n)$  y la secuencia de salida se llama  $y(n)$ . Sean  $y_1(n)$  e  $y_2(n)$ , respectivamente, las respuestas de estado cero<sup>149</sup> debidas a las secuencias de entrada  $x_1(n)$  y  $x_2(n)$ . Entonces se dice que  $S$  es lineal si la secuencia de salida de estado cero  $y(n)$  debido a la secuencia de entrada

$$x(n) \triangleq a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n) \quad (11-14a)$$

es dado por

$$y(n) \triangleq a_1 y_1(n) + a_2 y_2(n) \quad (11-14b)$$

Se dice que  $S$  es invariante en el tiempo si la salida de estado cero  $y(n)$  debido a la secuencia de entrada

$$x(n) \triangleq x_1(n - n_o) \quad (11-15a)$$

es dado por

$$y(n) \triangleq y_1(n - n_o) \quad (11-15b)$$

Sea  $h(n)$  la respuesta de estado cero a  $\delta(n)$ . La propiedad invariante en el tiempo del sistema nos lleva a concluir que  $h(n - k)$  es la respuesta de estado cero a  $\delta(n - k)$ . Por (11-3) y por la propiedad de linealidad del sistema, la secuencia de salida de estado cero debida a una secuencia de entrada de  $x(n)$  escrita como

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \delta(n - k) \quad (11-16)$$

es dado por

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) h(n - k) \quad (11-17a)$$

Esto significa que un sistema digital  $S$  lineal e invariante en el tiempo se puede caracterizar por una respuesta de impulso  $h(n)$ , que es la secuencia de salida de  $S$  cuando la entrada es una secuencia de impulso unitario y todas las condiciones iniciales de  $S$  son cero. Por un cambio de variable, (11-17a) también se puede escribir como

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n - k) h(k) \quad (11-17b)$$

Ambas ecuaciones de (11-17) se denominan suma de convolución de las dos sucesiones  $x(n)$  y  $h(n)$  y se denotan por

$$y(n) = x(n) * h(n) \quad (11-17c)$$

Finalmente, un sistema digital  $S$  lineal e invariante en el tiempo es estable si su respuesta al impulso  $h(n)$  satisface la condición

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty \quad (11-18)$$

y es causal si

$$h(n) = 0 \text{ para } n < 0 \quad (11-19)$$

Tenga en cuenta que si se viola (11-18), entonces podemos encontrar una secuencia de entrada acotada  $x(n)$ , donde

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |y(n)|^2 \rightarrow \infty \quad (11-20b)$$

<sup>149</sup> Una respuesta de estado cero es una salida del sistema cuando todas las condiciones iniciales del sistema son cero.

**Ejemplo 11-1** Sea el sistema  $S$  caracterizado por<sup>150</sup>

$$y(n) - a y(n-1) = x(n) \quad (11-21a)$$

$$y(-1) = 0 \quad (11-21b)$$

Encuentre la respuesta al impulso  $h(n)$  de  $S$  y discuta las condiciones de estabilidad y causalidad de  $S$ .

**Solución:** Debido a que la condición inicial de  $S$  es cero, como está dada por (11-21b), cuando

$$x(n) = \delta(n) \quad (11-22)$$

la secuencia de salida  $y(n)$  será la respuesta al impulso  $h(n)$ . De (11-21), obtenemos

$$y(0) = a y(-1) + \delta(0) = 0 + 1 = 1$$

$$y(1) = a y(0) + \delta(1) = a + 0 = a$$

$$y(2) = a y(1) + \delta(2) = a^2 + 0 = a^2$$

Progresando inductivamente, obtenemos

$$y(n) = a^n \quad \text{para } n \geq 0 \quad (11-23a)$$

Para considerar el caso cuando  $n < -1$ , escribimos (11-21) y (11-22) como

$$y(n-1) = a^{-1}[y(n) - \delta(n)]$$

con

$$y(-1) = 0$$

Esto da

$$\begin{aligned} y(-2) &= a^{-1}[y(-1) - \delta(-1)] = a^{-1}(0 - 0) = 0 \\ y(-3) &= a^{-1}[y(-2) - \delta(-2)] = 0 \end{aligned}$$

Claramente, tenemos

$$y(n) = 0 \quad \text{para } n < 0 \quad (11-23b)$$

Por tanto, la respuesta al impulso  $h(n)$  del sistema  $S$  caracterizado por (11-21) viene dada por

$$h(n) = a^n u(n) \quad (11-24)$$

En vista de (11-24), el sistema  $S$  es causal para todo  $a$  y es estable cuando  $|a| < 1$ .

<sup>150</sup> La condición inicial cero del sistema 5 está dada por (11-21 b), donde hemos supuesto que el tiempo inicial es cuando  $n = 0$ . Recuérdese que para el caso de tiempo continuo, las condiciones iniciales están dadas en el punto \_\_\_\_\_.

## 11-2 Transformada Z

El método de la transformada-z es una herramienta muy útil para resolver ecuaciones en diferencias lineales. Reduce las soluciones de tales ecuaciones a las de las ecuaciones algebraicas. La aplicación de transformadas-z a un conjunto de ecuaciones en diferencias es análoga a la aplicación de transformadas de Laplace a un conjunto de ecuaciones diferenciales.

La transformada-z  $X(z)$  de una sucesión  $x(n)$  se define como<sup>151</sup>

$$X(z) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad (11-25)$$

donde  $z$  es una variable compleja. Por lo tanto,  $X(z)$  es complejo.

**Ejemplo 11-2** Encuentre la transformada z de la sucesión  $x(n)$  dada por

$$x(n) = (\cos n\phi + \sin n\phi)u(n) \quad (11-26)$$

**Solución:** De (11-25), tenemos

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\cos n\phi + \sin n\phi)z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{e^{jn\phi} + e^{-jn\phi}}{2} + \frac{e^{jn\phi} - e^{-jn\phi}}{2j} \right] z^{-n} \quad (11-27) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{1-j}{2} e^{jn\phi} z^{-n} \right] + \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{1+j}{2} e^{-jn\phi} z^{-n} \right] \end{aligned}$$

si

$$|z^{-1}| < 1 \quad \text{o} \quad |z| > 1 \quad (11-28a)$$

luego

$$|e^{\pm j\phi} z^{-1}| < 1 \quad (11-28b)$$

y (11-27) se puede simplificar a

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{1-j}{2} \frac{1}{1 - e^{j\phi} z^{-1}} + \frac{1+j}{2} \frac{1}{1 - e^{-j\phi} z^{-1}} \\ &= \frac{1 - (\cos \phi)z^{-1} + (\sin \phi)z^{-1}}{1 - (e^{j\phi} + e^{-j\phi})z^{-1} + z^{-2}} \quad (11-29) \\ &= \frac{1 + (\sin \phi - \cos \phi)z^{-1}}{1 - 2(\cos \phi)z^{-1} + z^{-2}} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Claramente,  $X(z)$  se define para aquellos valores de  $z$  o  $z^{-1}$  para los cuales converge la serie de potencias en (11-25). Por ejemplo,  $X(z)$  de (11-27) se define sólo si se satisface (11-28a). Escribiendo  $z$  en su forma polar

$$z = r e^{j\theta} \quad (11-30)$$

(11-25) se convierte en

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)r^{-n} e^{-j\theta n} \quad (11-31)$$

<sup>151</sup> Usamos la convención de que la transformada z de una secuencia de tiempo  $x(n)$  se denota por  $X(z)$ ; una secuencia de tiempo se denota con una letra minúscula y su transformación z se denota con la letra mayúscula correspondiente.

Por lo tanto,  $X(z)$  se define para aquellos valores de  $z$  con radio  $r$  en el plano-z tal que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)r^{-n}| < \infty \quad (11-32)$$

La totalidad de todos los  $z$  tales que se cumple (11-32) se denomina región de convergencia para la sucesión  $x(n)$ . En el caso del Ejemplo 11-2, la región de convergencia es  $r > 1$  en el plano-z.

**Ejemplo 11-3** Encuentre la región de convergencia para la secuencia de pulsos

$$\begin{aligned} h(n) &= a && \text{para } 0 \leq n < N-1 \\ &= 0 && \text{para otro valor} \end{aligned} \quad (11-33)$$

donde  $a$  es real.

**Solución:**

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} az^{-n}$$

Por lo tanto,

$$H(re^{j\theta}) = \sum_{n=0}^{N-1} ar^{-n}e^{-j\theta n} \quad (11-34)$$

Como (11-34) involucra solo una suma finita (el número de términos en la suma es finito),  $H(z)$  está definido para todo  $r < \infty$ . Por lo tanto, la región de convergencia es todo el plano z.

**Ejemplo 11-4** Encuentre la región de convergencia para la secuencia exponencial

$$\begin{aligned} h(n) &= a^n && \text{para } 0 \leq n < \infty \\ &= 0 && \text{para } n < 0 \end{aligned} \quad (11-35)$$

**Solución:** porque

$$H(re^{j\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)r^{-n}e^{-j\theta n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n r^{-n} e^{-j\theta n} = \sum_{n=0}^{\infty} (ar^{-1})^n e^{-j\theta n} \quad (11-36)$$

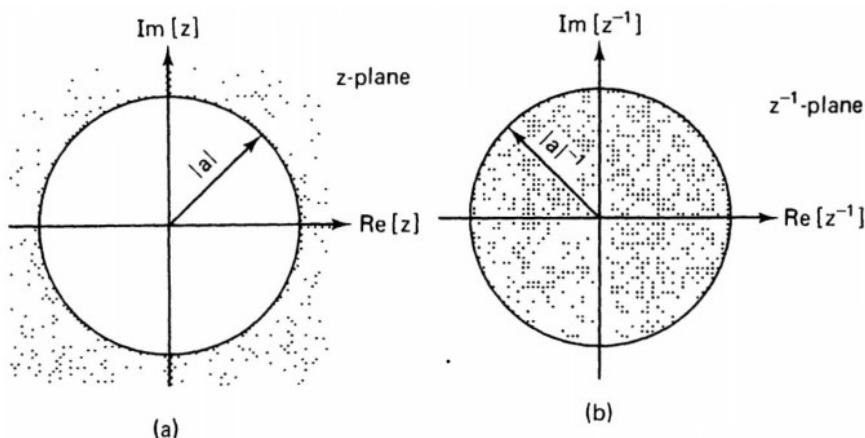
la región de convergencia son los valores de z con radio  $r$  tales que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{a}{r} \right|^n < \infty \quad (11-37)$$

Claramente, (11-37) se cumple si y solo si

$$\left| \frac{a}{r} \right| < 1 \quad (11-38)$$

Por lo tanto, la *región de convergencia* de  $x(n)$  de (11-35) es el exterior de un círculo con radio  $|a|$  en el plano-z, como se muestra en la Fig. 11-5(a).



**Fig. 11-5** Region of convergence for an exponential sequence. (a) In the  $z$ -plane. (b) In the  $z^{-1}$ -plane.

La región de convergencia para una secuencia causal  $x(n)$  —con  $x(n)=0$  para  $n<0$ —está en todas partes fuera de cierto círculo con radio  $R$  en el plano- $z$ .<sup>152</sup>

Un ejemplo de ello es el Ejemplo 11-4. El valor de  $R$  depende de las ubicaciones de los polos de  $X(z)$ .<sup>153</sup> Para la sucesión considerada en el Ejemplo 11-4, la transformada- $z$   $H(z)$  de la sucesión  $h(n)$  viene dada por

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} \\ &= \frac{1}{1 - az^{-1}} \end{aligned} \quad (11-39)$$

Por lo tanto, el polo de  $H(z)$  está ubicado en el punto  $z=a$ , que es el límite de la región de convergencia de la secuencia.

En la mayoría de los sistemas digitales físicos, incluidos los filtros digitales, las secuencias causales forman la base de todas las señales involucradas en el procesamiento. Por conveniencia, las transformadas  $z$  de algunas de las sucesiones causales de uso frecuente se enumeran en la tabla 11-1, junto con sus regiones de convergencia. En general, supondremos que estamos trabajando dentro del área en el plano- $z$  donde se definen las transformadas  $z$  de todas las secuencias involucradas y, por lo tanto, podemos ignorar los problemas asociados con las regiones de convergencia.

152 La región de convergencia también se puede ubicar en el plano- $z^{-1}$ . Para una secuencia causal, la región de convergencia está en todas partes dentro de cierto círculo con radio  $\tilde{R}$  en el plano  $z^{-1}$ . Por ejemplo, la región de convergencia de la secuencia exponencial en el ejemplo 11-4 está en todas partes dentro del círculo con radio  $|a|^{-1}$  en el plano  $z^{-1}$ , como se muestra en la Fig. 11-5(b).

153 Un polo {cero} de una función transformada en  $z$   $X(z)$  es la ubicación  $z^{-1}$  en el plano  $z$ , donde  $X(z_1)=\infty \{X(z_1)=0\}$ .

**TABLE 11-1** Z-Transform Pairs of Some Causal Sequences

Causal Sequence $x(n)$	Z -Transforms of Causal Sequences	Radius of Convergence
$\{x(n) = 0 \text{ for } n < 0\}$	$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}$	$ z  > R \text{ or }  z^{-1}  < \frac{1}{R}$
$x(n) = \delta(n)$	$X(z) = 1$	$R = 0$
$x(n) = \delta(n - m)$	$X(z) = z^{-m}$	$R = 0$
$x(n) = u(n)$	$X(z) = \frac{z}{z-1} = \frac{1}{1-z^{-1}}$	$R = 1$
$x(n) = a^n u(n)$	$X(z) = \frac{z}{z-a} = \frac{1}{1-az^{-1}}$	$R =  a $
$x(n) = nu(n)$	$X(z) = \frac{z}{(z-1)^2} = \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$	$R = 1$
$x(n) = [a^n \sin n\omega T]u(n)$	$\begin{aligned} X(z) &= \frac{az \sin \omega T}{z^2 - 2az \cos \omega T + a^2} \\ &= \frac{az^{-1} \sin \omega T}{a^2 z^{-2} - 2az^{-1} \cos \omega T + 1} \end{aligned}$	$R =  a $
$x(n) = [a^n \cos n\omega T]u(n)$	$\begin{aligned} X(z) &= \frac{z(z - a \cos \omega T)}{z^2 - 2az \cos \omega T + a^2} \\ &= \frac{1 - az^{-1} \cos \omega T}{a^2 z^{-2} - 2az^{-1} \cos \omega T + 1} \end{aligned}$	$R =  a $

De la tabla 11-1, observamos que la transformada-z de una secuencia es una función racional de  $z$  o  $z^{-1}$ . Por lo tanto, si conocemos los polos y ceros de la transformada-z  $X(z)$  de una secuencia  $x(n)$ , podemos construir  $X(z)$  hasta un múltiplo constante con bastante facilidad. Por ejemplo, si  $X(z)$  tiene polos  $p_1, p_2, \dots, p_n$  y ceros  $z_1, z_2, \dots, z_M$  entonces  $X(z)$  se puede escribir en la forma factorizada a

$$X(z) = \frac{\alpha \prod_{i=1}^M (1 - z_i z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - p_k z^{-1})} \quad (11-40a)$$

o

$$X(z) = \frac{\alpha z^{(N-M)} \prod_{i=1}^M (z - z_i)}{\prod_{k=1}^N (z - p_k)} \quad (11-40b)$$

donde  $\alpha$  es una constante. En aplicaciones de filtros digitales, se prefiere (11-40a), porque un registro de desplazamiento o una unidad de una línea de retardo con derivación es una implementación del operador  $z^{-1}$ . Al multiplicar los factores en (11-40a), obtenemos

$$X(z) = \frac{\sum_{i=0}^M a_i z^{-i}}{1 + \sum_{k=1}^N b_k z^{-k}} \quad (11-41)$$

Usamos principalmente (11-41) para el diseño general de filtros digitales.

### 11-2-1. Propiedades de la Transformada z

En esta subsección, analizamos las diversas propiedades asociadas con las transformadas z.

Propiedad de unicidad: Sean  $X_1(z)$  y  $X_2(z)$  las transformadas z de  $x_1(n)$  y  $x_2(n)$  respectivamente. Entonces  $X_1(z)=X_2(z)$  si y solo si  $x_1(n)=x_2(n)$  para  $-\infty < n < \infty$ . Esto significa que a cada sucesión  $x(n)$ , le corresponde una y sólo una función  $X(z)$  transformada en z.

Propiedad de linealidad: la transformación Z es una operación lineal. Si  $X_1(z)$  y  $X_2(z)$  son las transformadas z de  $x_1(n)$  y  $x_2(n)$ , respectivamente, entonces la transformada z  $X(z)$  de

$$x(n) \triangleq a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n) \quad (11-42a)$$

Donde  $a_1$  y  $a_2$  son constantes, viene dada por

$$X(z) = a_1 X_1(z) + a_2 X_2(z) \quad (11-42b)$$

**Ejemplo 11-5** Encuentre  $X(z)$ , la transformada-z de

$$x_1(n) = [\cos n \phi] u(n) \quad (11-43)$$

a través de la Tabla 11-1, donde a es una constante.

**Solución:** De la tabla 11-1, las transformadas z  $X_1(z)$  y  $X_2(z)$  de las sucesiones

$$x_1(n) = [\cos n \phi] u(n)$$

y

$$x_2(n) = [\sin n \phi] u(n)$$

son dados por

$$X_1(z) = \frac{1 - z^{-1} \cos \phi}{z^{-2} - 2z^{-1} (\cos \phi) + 1} \quad (11-44a)$$

y

$$X_2(z) = \frac{z^{-1} \sin \phi}{z^{-2} - 2z^{-1} (\cos \phi) + 1} \quad (11-44b)$$

Por la propiedad de linealidad, obtenemos

$$X(z) = X_1(z) + \alpha X_2(z) = \frac{1 + (\alpha \sin \phi - \cos \phi) z^{-1}}{z^{-2} - 2z^{-1} (\cos \phi) + 1} \quad (11-45)$$

Tenga en cuenta que (11-45) es idéntica a (11-29) cuando  $\alpha=1$ .

Propiedad de desplazamiento: Sea  $X_1(z)$  la transformada z de  $x(n)$ . Entonces la transformada z  $X(z)$  de

$$x(n) \triangleq x_1(n-m) \quad (11-46a)$$

es dado por

$$\begin{aligned} X(z) &= z^{-m}X_1(z) + x_1(-m) + x_1(-m+1)z^{-1} \\ &\quad + \dots + x_1(-1)z^{-m+1} \end{aligned} \quad (11-46b)$$

Si  $x_1(n)$  es una secuencia causal, entonces (11-46b) se reduce a

$$X(z) = z^{-m}X_1(z) \quad (11-46c)$$

**Ejemplo 11-6** Sea  $S$  un sistema digital caracterizado por

$$y(n) + b_1 y(n-1) + b_2 y(n-2) = a_0 x(n) + a_1 x(n-1) \quad (11-47)$$

suponiendo que tanto  $x(n)$  como  $y(n)$  son secuencias causales, encuentre la relación entre  $X(z)$  e  $Y(z)$ , las transformadas z de  $x(n)$  y  $y(n)$ , respectivamente.

**Solución:** Por la propiedad de desplazamiento, la transformada z de (11-47) da

$$Y(z) + b_1 z^{-1} Y(z) + b_2 z^{-2} Y(z) = a_0 X(z) + a_1 z^{-1} X(z)$$

o

$$Y(z) + b_1 z^{-1} Y(z) + b_2 z^{-2} Y(z) = a_0 X(z) + a_1 z^{-1} X(z)$$

Por lo tanto,

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{a_0 + a_1 z^{-1}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}} \quad (11-48)$$

Propiedad de convolución: Sean  $X_1(z)$  y  $X_2(z)$  las transformadas z de  $x_1(n)$  y  $x_2(n)$ , respectivamente. Entonces la transformada-z  $X(z)$  de

$$\begin{aligned} x(n) &= x_1(n) * x_2(n) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k)x_2(n-k) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(n-k)x_2(k) \end{aligned} \quad (11-49a)$$

es dado por

$$X(z) = X_1(z)X_2(z) \quad (11-49b)$$

**Ejemplo 11-7** Sea  $x(n)$  la entrada a un sistema digital lineal e invariante en el tiempo, con una respuesta de impulso  $h(n)$ . Sean  $X(z)$  y  $H(z)$  las transformadas z de  $x(n)$  y  $h(n)$  respectivamente. Halle la transformada-z  $Y(z)$  de la secuencia de salida de estado cero  $y(n)$ .

**Solución:** De (11-17), la salida  $y(n)$  viene dada por

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

Por lo tanto, la propiedad de convolución produce

$$Y(z) = H(z) * X(z) \quad (11-50)$$

La transformada-z  $H(z)$  de la respuesta al impulso de un sistema lineal invariante en el tiempo se denomina función de transferencia del sistema. En vista de (11-50), la función de transferencia de un sistema se da como una relación de las transformadas z de la respuesta de salida de estado cero y la entrada asociada del sistema. Por ejemplo, de (11-48), el sistema S del Ejemplo 11-6 tiene una función de transferencia dada por

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{a_0 + a_1 z^{-1}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}} \quad (11-51)$$

Esto significa que si se da un conjunto de ecuaciones en diferencias que representan un sistema S, podemos encontrar la función de transferencia del sistema S. Por el contrario, si se nos da la función de transferencia del sistema S,

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^M a_i z^{-i}}{1 + \sum_{k=1}^N b_k z^{-k}} \quad (11-52)$$

podemos encontrar la ecuación en diferencias que caracteriza al sistema S de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \left(1 + \sum_{k=1}^N b_k z^{-k}\right) Y(z) &= \left(\sum_{i=0}^M a_i z^{-i}\right) X(z) \\ y(n) + \sum_{k=1}^N [b_k y(n - k)] &= \sum_{i=0}^M [a_i x(n - i)] \end{aligned}$$

o

$$\begin{aligned} y(n) + b_1 y(n - 1) + \dots + b_N y(n - N) \\ = a_0 x(n) + a_1 x(n - 1) + \dots + a_M x(n - M) \end{aligned} \quad (11-53)$$

Es decir, un sistema S puede caracterizarse por una ecuación en diferencias o por una función de transferencia. Tenga en cuenta que la función de transferencia de un sistema solo puede producir la respuesta de impulso del sistema. Para encontrar una secuencia de salida única, necesitamos conocer la secuencia de entrada y las condiciones iniciales del sistema.

### 11-2-2. Transformada Z inversa

Las transformadas Z son herramientas para el análisis de sistemas digitales lineales e invariantes en el tiempo. Al final de un análisis, se desean las secuencias de salida en lugar de sus correspondientes transformadas z. El proceso de encontrar una secuencia asociada con una función de z se llama transformada inversa de z. Formalmente, la transformada z inversa  $x(n)$  de  $X(z)$  se define como

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz \quad (11-54)$$

donde la integral en (11-54) es una integral de contorno sobre un camino cerrado C. Para simplificar, C puede ser un círculo en la región de convergencia de  $X(z)$  en el plano-z.

La evaluación directa de (11-54) es poco práctica, si no imposible. En general, (11-54) no se usa directamente para encontrar la transformada-z inversa de  $X(z)$ . En esta subsección, presentamos cuatro métodos para implementar (11-54).

**Método del residuo:** Sea  $X(z)$  una función racional de z. Entonces (11-54) puede evaluarse mediante el teorema del residuo, que establece que

$$\begin{aligned} x(n) &= \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz \triangleq \frac{1}{2\pi j} \oint_C F_n(z) dz \\ &= \sum \text{residues of } F_n(z) \text{ at all poles of } F_n(z) \text{ inside } C \end{aligned} \quad (11-55a)$$

donde

$$F_n(z) = X(z) z^{n-1} \quad (11-55b)$$

y  $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$

**Ejemplo 11-8** Encuentro la transformada z inversa de

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a} \quad (11-56)$$

por el método de los residuos.

**Solución:** sea

$$F_n(z) \triangleq X(z) z^{n-1} = \frac{z^n}{z - a} \quad (11-57)$$

Entonces (11-55) implica que  $x(n)$  es la suma de los residuos de  $F_n(z)$  en todos los polos de  $F_n(z)$  dentro de algún círculo C. Para simplificar, elegimos que C sea un círculo de radio mayor que  $|a|$  en el plano-z. Para  $n \geq 0$ , la trayectoria cerrada C encierra sólo un polo en  $z = a$ , como se muestra en la Fig. 11-6(a). Por lo tanto, (11-55a) da

$$\begin{aligned} x(n) &= \text{residue of } F_n(z) \text{ at } z = a \\ &= (z - a) F_n(z)|_{z=a} = z^n|_{z=a} \\ &= a^n \text{ for } n \geq 0 \end{aligned} \quad (11-58)$$

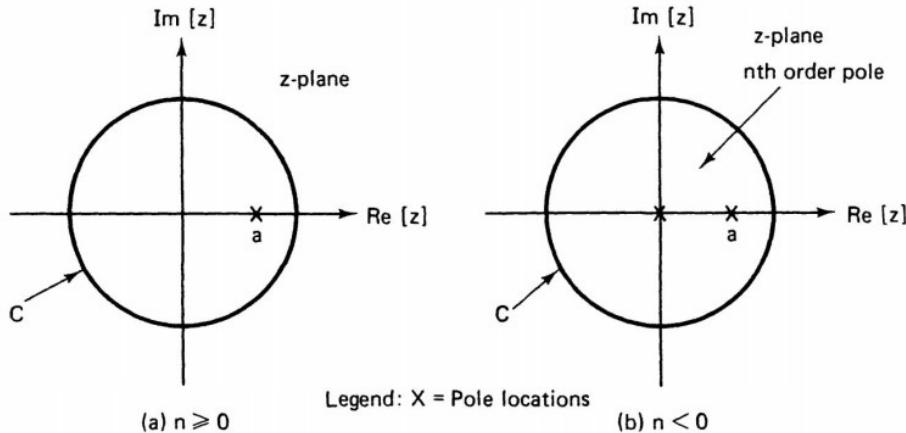
Para  $n < 0$ ,  $F_n(z)$  se puede escribir como

$$F_n(z) = \frac{1}{z^{|n|}(z - a)} \quad (11-59)$$

Es decir, hay un polo simple en  $z = a$  y un polo en  $z = 0$  con multiplicidad  $|n|$ , como se muestra

en la Fig. 11-6(b). Por eso,

$$x(n) = \zeta_a + \zeta_0 \quad (11-60)$$



**Fig. 11-6** Pole locations of  $F_n(z)$  of (11-57). (a) For  $n \geq 0$ . (b) for  $n < 0$ .

donde  $\zeta_a$  y  $\zeta_0$  son, respectivamente, los residuos de  $F_n(z)$  en  $z=a$  y  $z=0$ .<sup>154</sup>

Cuando  $n=-1$ , tenemos<sup>155</sup>

$$\zeta_a = (z-a)F_n(z)\Big|_{z=a} = \frac{1}{z}\Big|_{z=a} = a^{-1} \quad (11-61a)$$

$$\zeta_0 = zF_n(z)\Big|_{z=0} = \frac{1}{z-a}\Big|_{z=0} = -a^{-1} \quad (11-61b)$$

Por lo tanto,

$$x(-1) = \zeta_a + \zeta_0 = a^{-1} - a^{-1} = 0 \quad (11-62)$$

Cuando  $n=-2$ , tenemos

$$F_n(z) = \frac{1}{z^2(z-a)} \quad (11-63a)$$

$$\zeta_a = (z-a)F_n(z)\Big|_{z=a} = \frac{1}{z^2}\Big|_{z=a} = a^{-2} \quad (11-63b)$$

y

$$\begin{aligned} \zeta_0 &= \frac{d}{dz} [z^2 F_n(z)]\Big|_{z=0} = \frac{d}{dz} \left[ z^2 \frac{1}{z^2(z-a)} \right]\Big|_{z=0} \\ &= \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{z-a} \right)\Big|_{z=0} = -\frac{1}{(z-a)^2}\Big|_{z=0} = -a^{-2} \end{aligned} \quad (11-63c)$$

154 El residuo de una función compleja  $G(z)$  en un polo  $z=p_0$  de multiplicidad  $n$  viene dado por

$$\frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z-p_0)^n G(z)]\Big|_{z=p_0}$$

155 See (4-48).

Por eso,

$$x(-2) = a^{-2} - a^{-2} = 0 \quad (11-63d)$$

Resulta que para todo  $n < 0$ , tenemos

$$\zeta_a = -\zeta_0 \quad (11-64a)$$

Por lo tanto,

$$x(n) = 0 \quad \text{para } n < 0 \quad (11-64b)$$

De (11-58) y (11-64), la transformada-z inversa de  $X(z)$  de (11-56) viene dada por

$$x(n) = a^n u(n) \quad (11-65)$$

Este resultado se puede verificar fácilmente consultando la Tabla 11-1.

**Método de división larga:** suponga que  $X(z)$  está dada por

$$X(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_M z^{-M}}{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_N z^{-N}} \quad (11-66)$$

donde  $M < N$ . Luego, la división larga del numerador por el denominador de  $X(z)$  da como resultado.<sup>156</sup>

$$X(z) = x_0 + x_1 z^{-1} + x_2 z^{-2} + \dots \quad (11-67)$$

Comparando (11-67) y (11-25), obtenemos

$$\begin{aligned} x(n) &= x_n \quad \text{para } n \geq 0 \\ &= 0 \quad \text{para } n < 0 \end{aligned} \quad (11-68)$$

**Ejemplo 11-9** Encuentre la transformada z inversa de

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad (11-69)$$

por el método de la división larga.

**Solución:** Dividiendo el numerador de  $X(z)$  por el denominador de  $X(z)$ , obtenemos

$$\begin{array}{r} 1 + az^{-1} + a^2 z^{-2} + \dots \\ \hline 1 - az^{-1) } 1 \\ \hline 1 - az^{-1} \\ \hline az^{-1} \\ \hline az^{-1} - a^2 z^{-2} \\ \hline a^2 z^{-2} \\ \hline a^2 z^{-2} - a^3 z^{-3} \\ \hline a^3 z^{-3} \end{array}$$

Por lo tanto,  $X(z)$  se puede escribir como

$$X(z) = 1 + az^{-1} + a^2 z^{-2} + \dots$$

o

$$x(n) = a^n u(n)$$

---

<sup>156</sup> See (4-48).

En general, este método no proporcionará respuestas para  $x(n)$  cuando  $n$  es grande a menos que uno esté dispuesto a realizar una división larga extensa para llegar a la  $n$ -ésima etapa. Por lo tanto, este método rara vez se usa a menos que solo se desee conocer los valores de los primeros términos de la secuencia.

**Método de la serie de potencias:** Sea  $X(z)$  la transformada z de una sucesión  $x(n)$ . Define  $X_1(z^{-1})$  como

$$X_1(z^{-1}) \triangleq X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad (11-70)$$

Una expansión en serie de Taylor de  $X_1(z^{-1})$  sobre el punto  $z^{-1}=0$  da

$$X_1(z^{-1}) = \alpha_0 + \alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2} + \dots \quad (11-71a)$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \frac{1}{k!} \left. \frac{\partial^{(k)} X_1(z^{-1})}{\partial z^{-1}} \right|_{z^{-1}=0} \\ &\triangleq \frac{1}{k!} X_1^{(k)}(0) \end{aligned} \quad (11-71b)$$

Al comparar (11-70) y (11-71), obtenemos

$$\begin{aligned} X(n) &= \alpha_n && \text{para } n \geq 0 \\ &= 0 && \text{para } n < 0 \end{aligned} \quad (11-72)$$

**Ejemplo 11-10** Encuentre la transformada z inversa de

$$X(z) = 1 - az^{-1} \quad (11-73)$$

por el método de la serie de potencias.

**Solución:** Por (11-70) y (11-71),

$$\begin{aligned} X_1(z^{-1}) &= \frac{1}{1 - az^{-1}} \\ &= X_1(0) + X_1^{(1)}(0)z^{-1} + \frac{1}{2!} X_1^{(2)}(0)z^{-2} \\ &\quad + \dots + \frac{1}{k!} X_1^{(k)}(0)z^{-k} + \dots \end{aligned} \quad (11-74)$$

donde

$$X_1(0) = 1 \quad (11-75a)$$

$$X_1^{(1)}(0) \triangleq \left. \frac{d}{dz^{-1}} X_1(z^{-1}) \right|_{z^{-1}=0} = \left. \frac{a}{(1 - az^{-1})^2} \right|_{z^{-1}=0} = a \quad (11-75b)$$

$$X_1^{(2)}(0) \triangleq \left. \frac{d^2}{(dz^{-1})^2} X_1(z^{-1}) \right|_{z^{-1}=0} = \left. \frac{2a^2}{(1 - az^{-1})^3} \right|_{z^{-1}=0} = 2a^2 \quad (11-75c)$$

$$X_1^{(k)}(0) \triangleq \left. \frac{d^k}{(dz^{-1})^k} X_1(z^{-1}) \right|_{z^{-1}=0} = \left. \frac{k! a^k}{(1 - az^{-1})^{k+1}} \right|_{z^{-1}=0} = k! a^k \quad (11-75d)$$

Sustituyendo (11-75) en (11-74), obtenemos

$$X(z) = 1 + az^{-1} + z^2 z^{-2} + \dots + a^k z^{-k} + \dots$$

o

$$x(n) = a^n u(n) \quad (11-76)$$

**Método de expansión en fracciones parciales:** Cuando  $X(z)$  se escribe en su forma factorizada de (11-40), una expansión en fracciones parciales de  $X(z)$  da

$$X(z) = \frac{\zeta_1}{1-p_1 z^{-1}} + \frac{\zeta_2}{1-p_2 z^{-1}} + \dots + \frac{\zeta_N}{1-p_N z^{-1}} \quad (11-77)$$

donde hemos supuesto que  $N > M$  y los polos son distintos (es decir,  $p_i \neq p_j$  siempre que  $i \neq j$ ). Tenga en cuenta que  $\zeta_i$ , es el residuo de  $X(z)$  en la ubicación del polo  $z = p_i$ .

Por eso,

$$\zeta_i = (1 - p_i z^{-1}) X(z) \Big|_{z=p_i} \text{ para } i=1,2,\dots,N \quad (11-78)$$

Debido a que la transformada  $z$  es una operación lineal, la transformada-z inversa también es una operación lineal. Por tanto,  $x(n)$  puede obtenerse sumando la transformada-z inversa de cada término individual en (11-77). Es decir,

$$\begin{aligned} x(n) &= (\zeta_1 p_1^n + \zeta_2 p_2^n + \dots + \zeta_N p_N^n) u(n) \\ &= \left( \sum_{i=1}^N (\zeta_i p_i^n) u(n) \right) \end{aligned} \quad (11-79)$$

Si todos los polos son reales, entonces (11-79) produce un  $x(n)$  real integral. Sin embargo, si algunos o todos los polos son complejos, entonces no está claro que la secuencia resultante de (11-79) sea una secuencia con números reales.

Suponga que todos los coeficientes de  $X(z)$  son reales. En este caso, se sabe que si un polo  $p_i$  es complejo (incluido el caso puramente imaginario), entonces existe un polo  $p_k$  tal que

$$p_k = \bar{p}_i \quad (11-80a)$$

donde  $\bar{a}$  denota el complejo conjugado de  $a$ . Además, los residuos correspondientes a  $p_i$  y  $p_k$  son conjugados complejos entre sí. Es decir, también tenemos

$$\zeta_k = \bar{\zeta}_i \quad (11-80b)$$

Por lo tanto, la suma de los términos  $i$ -ésimos y  $k$ -ésimos en (11-77) viene dada por<sup>157</sup>

$$\begin{aligned} \zeta_i p_i^n + \zeta_k p_k^n &= \zeta_i p_i^n + \bar{\zeta}_i \bar{p}_i^n \\ &= 2 \operatorname{Re} [\zeta_i p_i^n] \\ &= 2 |\zeta_i| |p_i|^n \cos(\angle \zeta_i + n \angle p_i) \end{aligned} \quad (11-81a)$$

donde

$$\zeta_i = |\zeta_i| e^{j \angle \zeta_i} \quad (11-81b)$$

y

$$p_i = |p_i| e^{(j \angle p_i)} \quad (11-81c)$$

---

<sup>157</sup> Sea  $\alpha = a + jb$  y  $\bar{\alpha}$  el complejo conjugado de  $\alpha$ . Entonces  $\bar{\alpha} = a - jb$ , y  $\alpha + \bar{\alpha} = (a + jb) + (a - jb) = 2a = 2\operatorname{Re}[\alpha]$ .

**Ejemplo 11-11** Sea

$$X(z) = \frac{1}{(1-az^{-1})(1-bz^{-1})} \quad (11-82)$$

(a) Encuentre la transformada z inversa de  $X(z)$  mediante el método de expansión en fracciones parciales.

(b) Si  $a=0.5+j0.5$  y  $b=\bar{a}$ , encuentre  $x(n)$ .

**Solución:** La expansión en fracciones parciales de (11-82) viene dada por

$$X(z) = \frac{\zeta_1}{1-az^{-1}} + \frac{\zeta_2}{1-bz^{-1}} \quad (11-83a)$$

donde están los polos

$$p_1=a \quad y \quad p_2=b \quad (11-83b)$$

y sus residuos correspondientes son

$$\zeta_1 = (1-az^{-1})X(z)|_{z=a} = \left. \frac{1}{1-bz^{-1}} \right|_{z=a} = \frac{a}{a-b} \quad (11-83c)$$

y

$$\zeta_2 = (1-bz^{-1})X(z)|_{z=b} = \left. \frac{1}{1-az^{-1}} \right|_{z=b} = \frac{b}{a-b} \quad (11-83d)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} x(n) &= (\zeta_1 a^n + \zeta_2 b^n) u(n) \\ &= \left( \frac{a}{a-b} a^n + \frac{b}{a-b} b^n \right) u(n) \\ &= \left( \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b} \right) u(n) \end{aligned} \quad (11-84)$$

Si

$$\begin{aligned} a &= 0.5 + j0.5 = \sqrt{(0.5)^2 + (0.5)^2} e^{j45^\circ} \\ &= 0.707 e^{j45^\circ} \end{aligned} \quad (11-85a)$$

luego

$$p_1 = a = 0.707 e^{j45^\circ}$$

$$\zeta_1 = \frac{a}{a-\bar{a}} = 0.5 - j0.5 = 0.707 e^{-j45^\circ} \quad (11-85b)$$

y (11-81) produce

$$\begin{aligned} x(n) &= (\zeta_1 a^n + \zeta_2 b^n) u(n) \\ &= 2 |\zeta_1| |a|^n \cos(\angle \zeta_1 + n \angle a) u(n) \\ &= 2(0.707)(0.707)^n \cos(-45^\circ + 45n^\circ) u(n) \\ &= (0.707)^{n-1} \cos[(n-1)45^\circ] u(n) \end{aligned} \quad (11-85c)$$

Nótese que también podemos obtener (11-85c) directamente de (11-84).

**Ejemplo 11-12** Sea S un sistema digital representado por

$$y(n) - 3y(n-1) + 2y(n-2) = 2x(n-1) - 2x(n-2) \quad (11-86)$$

Si la entrada  $x(n)$  viene dada por

$$x(n) = 5\delta(n) \quad (11-87)$$

encuentre la respuesta de estado cero  $y(n)$ .

**Solución:** Tomando las transformadas z de (11-86), obtenemos

$$Y(z)(1 - 3z^{-1} + 2z^{-2}) = (2z^{-1} - 2z^{-2})X(z)$$

o

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{2z^{-1} - 2z^{-2}}{1 - 3z^{-1} + 2z^{-2}} X(z) = \frac{10z^{-1} - 10z^{-2}}{1 - 3z^{-1} + 2z^{-2}} \\ &= -5 + \frac{-5z^{-1} + 5}{1 - 3z^{-1} + 2z^{-2}} \\ &= -5 + \frac{-5}{1 - 2z^{-1}} \end{aligned}$$

De la tabla 11-1, obtenemos

$$y(n) = -5\delta(n) - [5(2)^n]u(n) \quad (11-88)$$

Nótese que el sistema caracterizado por (11-86) es inestable.

### 11-3 Transformada de Fourier

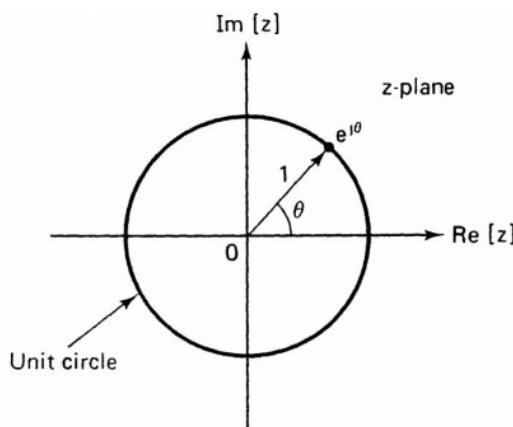
La transformada de Fourier  $X_F(e^{j\theta})$  de una secuencia  $x(n)$  se define como<sup>158</sup>

$$X_F(e^{j\theta}) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jn\theta} \quad (11-89)$$

Comparando (11-25) y (11-89), concluimos que la transformada de Fourier de una secuencia es la transformada z de la secuencia evaluada a lo largo del círculo unitario en el plano-z, como se muestra en la Fig. 11-7. Es decir,

$$X_F(e^{j\theta}) = X(z)|_{z=e^{j\theta}} \triangleq X(e^{j\theta}) \quad (11-90)$$

De aquí en adelante, usamos  $X(e^{j\theta})$  para denotar la transformada de Fourier de una secuencia  $x(n)$  donde  $X(z)$  es la transformada-z de  $x(n)$ .



**Fig. 11-7** Fourier transforms are z-transforms evaluated along the unit circle.

Note que para cualquier entero  $k$ , tenemos

$$e^{j\theta} = e^{j(\theta+2\pi k)} \quad (11-91)$$

Por eso,

$$X(e^{j\theta}) = X[e^{j(\theta+2\pi k)}] \quad (11-92)$$

Esto significa que la transformada de Fourier de una secuencia es una función periódica de  $\theta$ .

<sup>158</sup>  $\theta$  is a real quantity.

**Ejemplo 11-13** Encuentre la transformada de Fourier de la secuencia  $h(n)$  dada por

$$\begin{aligned} h(n) &= a \quad \text{para } 0 \leq n \leq N-1 \\ &= 0 \quad \text{para otro valor} \end{aligned} \quad (11-93)$$

**Solución:** Por (11-89), la transformada de Fourier de  $h(n)$  viene dada por

$$\begin{aligned} H(e^{j\theta}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-jn\theta} = \sum_{n=0}^{N-1} ae^{-jn\theta} \\ &= \frac{a[1 - e^{-j\theta N}]}{1 - e^{-j\theta}} \end{aligned} \quad (11-94a)$$

$$= \frac{a \exp\left(-j\frac{\theta N}{2}\right) [\exp\left(j\frac{\theta N}{2}\right) - \exp\left(-j\frac{\theta N}{2}\right)]/2j}{\exp\left(-j\frac{\theta}{2}\right) [\exp\left(j\frac{\theta}{2}\right) - \exp\left(-j\frac{\theta}{2}\right)]/2j} \quad (11-94b)$$

$$= a \exp\left[-j\frac{\theta(N-1)}{2}\right] \frac{\sin(N\theta/2)}{\sin(\theta/2)}$$

Como tanto el numerador como el denominador del lado derecho de (11-94a) son periódicos como

$$1 - e^{-j(\theta+2\pi k)N} = 1 - e^{-j\theta N} e^{-j2\pi kN} = 1 - e^{-j\theta N} \quad (11-95a)$$

y

$$1 - e^{-j(\theta+2\pi k)} = 1 - e^{-j\theta} e^{-j2\pi k} = 1 - e^{-j\theta} \quad (11-95b)$$

donde  $k$  es un entero, concluimos que  $H(e^{j\theta})$  de (11-94) es una función periódica de  $\theta$ .

Considere un sistema digital lineal e invariante en el tiempo caracterizado por una respuesta de impulso  $h(n)$ . Dada la secuencia de entrada  $x(n)$ , la secuencia de salida de estado cero  $y(n)$  puede obtenerse mediante una suma de convolución, como se indica en (11-17). Suponga

$$x(n) = e^{j\theta n} \quad -\infty < n < \infty \quad (11-96)$$

que  $x(n)$  está dada por

Entonces la salida  $y(n)$  viene dada por

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{j\theta(n-k)} \\ &= e^{j\theta n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j\theta k} \\ &= H(e^{j\theta})e^{j\theta n} \\ &= H(e^{j\theta})x(n) \end{aligned} \quad (11-97)$$

donde  $\theta$  es la frecuencia exponencial de entrada.<sup>159</sup> De (11-97),  $H(e^{j\theta})$  es el multiplicador (independiente de  $n$ ) que convierte la secuencia de entrada exponencial  $x(n)$  de (11-96) a la

<sup>159</sup> Sea  $\hat{x}(t) = e^{j\omega t}$  la función de tiempo continuo sinusoidal exponencial. Entonces, la correspondiente secuencia muestreada  $x(n)$  está dada por  $x(n) \triangleq \hat{x}(nT) = e^{j\omega nT} = e^{j\theta n}$ , donde  $\theta \triangleq \omega T$  es la frecuencia digital de la secuencia muestreada  $x(n)$ , y  $T$  es el período de muestreo.

secuencia de salida  $y(n)$ . Debido a que la secuencia de entrada  $x(n)$  de (11-96) es funcionalmente equivalente a una sinusoida muestreada con frecuencia  $\theta$ ,  $H(e^{j\theta})$  en (11-97) se denomina **respuesta de frecuencia** del sistema. En otras palabras, la respuesta de frecuencia  $H(e^{j\theta})$  de un sistema  $S$  es la función de transferencia  $H(z)$  del sistema  $S$  evaluada a lo largo del círculo unitario, haciendo  $z=e^{j\theta}$  con  $0 \leq \theta < 2\pi$  —en el plano-z.<sup>160</sup> [Recuerde que  $H(z)$  es la transformada z de  $h(n)$  y, por lo tanto,  $H(e^{j\theta})$  es la transformada de Fourier de  $h(n)$ , donde  $h(n)$  es la respuesta al impulso del sistema.] De (11-97), observamos que si la secuencia de entrada es una sinusoida, entonces la secuencia de salida se puede obtener simplemente multiplicando la secuencia de entrada con la respuesta de frecuencia del sistema.

**Ejemplo 11-14** Sea  $S$  un sistema caracterizado por

$$y(n) - a y(n-1) = x(n) \quad (11-98)$$

Si la secuencia de entrada está dada por

$$x(n) = \cos \theta n \quad (11-99)$$

encuentre la secuencia de salida  $y(n)$ .

**Solución:** Tomando las transformadas z de (11-98), obtenemos

$$(1 - az^{-1})Y(z) = X(z) \quad (11-100)$$

Por lo tanto, la función de transferencia del sistema es<sup>161</sup>

$$H(z) \triangleq \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad (11-101)$$

La entrada  $x(n)$  se puede escribir como

$$\begin{aligned} x(n) &= \cos n \theta = \frac{1}{2} e^{jn\theta} + \frac{1}{2} e^{-jn\theta} \\ &\triangleq x_1(n) + x_2(n) \end{aligned} \quad (11-102)$$

donde

$$x_1(n) \triangleq \frac{1}{2} e^{jn\theta} \quad (11-103a)$$

y

$$x_2(n) \triangleq \frac{1}{2} e^{-jn\theta} \quad (11-103b)$$

De (11-97), las respuestas  $y_1(n)$  y  $y_2(n)$  debidas a  $x_1(n)$  y  $x_2(n)$ , respectivamente, están dadas por

$$y_1(n) = \frac{1}{2} H(e^{j\theta}) e^{jn\theta} = \frac{1}{2} \frac{e^{jn\theta}}{1 - ae^{-jn\theta}} \quad (11-104a)$$

160 Esto es análogo al caso de tiempo continuo, donde la respuesta de frecuencia  $\hat{H}(\omega)$  de un sistema es la función de transferencia  $H(s)$  del sistema, con  $s$  evaluada a lo largo del eje imaginario en el plano  $s$ , haciendo que  $s = j\omega$  y  $-\infty < \omega < \infty$ . Aquí  $\hat{H}(t)$  es la transformada de Laplace de la respuesta al impulso  $\hat{h}(t)$  del sistema.

161 Observe que en el ejemplo 11-1 la respuesta al impulso  $h(n)$  del sistema está dada por (11-24) como  $h(n) = a^n u(n)$ . Según la tabla 11-1, la función de transferencia del sistema (que es la transformada z de esta respuesta al impulso) viene dada por (11-101).

y

$$y_2(n) = \frac{1}{2} H(e^{-j\theta}) e^{-jn\theta} = \frac{1}{2} \frac{e^{-jn\theta}}{1 - ae^{j\theta}} \quad (11-104b)$$

En consecuencia, la salida  $y(n)$  debida a la entrada  $x(n)$  puede obtenerse mediante la propiedad de linealidad como

$$\begin{aligned} y(n) &= y_1(n) + y_2(n) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{e^{jn\theta}}{1 - ae^{-j\theta}} + \frac{e^{-jn\theta}}{1 - ae^{j\theta}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{e^{jn\theta}(1 - ae^{j\theta}) + e^{-jn\theta}(1 - ae^{-j\theta})}{(1 - ae^{-j\theta})(1 - ae^{j\theta})} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{e^{jn\theta} + e^{-jn\theta} - a[e^{j(n+1)\theta} + e^{-j(n+1)\theta}]}{1 - a[e^{j\theta} + e^{-j\theta}] + a^2} \right] \\ &= \frac{\cos n\theta - a \cos [(n+1)\theta]}{1 - 2a \cos(\theta) + a^2} \quad \blacksquare \end{aligned} \quad (11-105)$$

### 11-3-1. Teorema de muestreo

Lo básico para el filtrado digital son los problemas asociados con el muestreo de señales continuas para formar señales digitales y la construcción de señales continuas a partir de sus contrapartes digitales. En esta subsección tratamos estos problemas a través de las transformadas de Fourier de señales continuas y digitales.<sup>162</sup>

Sea  $\hat{x}(t)$  una señal de tiempo continuo que tiene una representación de Fourier

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{X}(j\omega) e^{j\omega t} dt \quad (11-106a)$$

donde

$$\hat{X}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(t) e^{-j\omega t} dt \quad (11-106b)$$

se llama transformada de Fourier de  $x(t)$ . Sea  $x(n)$  la secuencia definida por

$$x(n) = \hat{x}(nT) \quad (11-107a)$$

donde  $T$  es el período de muestreo, y

$$f_s \triangleq \frac{1}{T} \quad (11-107b)$$

se llama frecuencia de muestreo. La transformada de Fourier de la sucesión  $x(n)$  viene dada por (11-89) como

$$X(e^{j\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-jn\theta} \quad (11-108a)$$

Debido a que  $X(e^{j\theta})$  es una función periódica de  $\theta$  con período  $2\pi$ , (11-108a) representa la expansión de la serie de Fourier de  $X(e^{j\theta})$  con los coeficientes de Fourier siendo  $x(n)$ . En términos de  $X(e^{j\theta})$ ,  $x(n)$  viene dado por

<sup>162</sup> Excepto por la frecuencia analógica  $\omega$ , usamos el símbolo “^” para denotar variables asociadas con el caso de tiempo continuo. Por ejemplo,  $\hat{x}(t)$  es una función de tiempo continuo y  $\hat{H}(s)$  es una función de transferencia de un sistema analógico.

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta}) e^{j\theta n} d\theta \quad (11-108b)$$

Como  $x(n)$  se obtiene muestreando la señal continua  $\hat{x}(t)$  como se indica en (11-107), es posible relacionar  $\hat{X}(j\omega)$ , la transformada de Fourier de  $\hat{x}(t)$  y  $X(e^{j\theta})$ , la transformada de Fourier de  $x(n)$ . Sustituyendo (11-106a) en (11-107a) y con  $t=nT$ , obtenemos

$$\begin{aligned} x(n) &= \hat{x}(nT) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{X}(j\omega) e^{j\omega nT} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{[(2k+1)\pi/T]}^{[(2k-1)\pi/T]} \hat{X}(j\omega) e^{j\omega nT} d\omega \end{aligned} \quad (11-109)$$

Por un cambio de la variable de integración con

$$\omega' \triangleq \omega - \frac{2\pi k}{T} \quad (11-110)$$

y notando que

$$\begin{aligned} e^{j\omega nT} &= e^{j[\omega' + (2\pi k/T)]nT} \\ &= e^{j\omega'nT} + e^{j2\pi kn} = e^{j\omega'nT} \end{aligned} \quad (11-111)$$

(11-109) se puede escribir como

$$\begin{aligned} x(n) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \hat{X}\left[j\left(\omega' + \frac{2\pi k}{T}\right)\right] e^{j\omega'nT} d\omega' \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{X}\left[j\left(\omega + \frac{2\pi k}{T}\right)\right] e^{j\omega nT} d\omega \end{aligned} \quad (11-112)$$

donde la variable ficticia  $\omega'$  se reemplaza por otra variable ficticia de integración  $\omega$ . Con otro cambio de variable

$$\theta = \omega T \quad (11-113)$$

Podemos escribir (11-112) como

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{X}\left[j\left(\frac{\theta}{T} + \frac{2\pi k}{T}\right)\right] e^{jn\theta} d\theta \quad (11-114)$$

Al comparar (11-108b) y (11-114), obtenemos

$$X(e^{j\theta}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{X}\left[j\left(\frac{\theta}{T} + \frac{2\pi k}{T}\right)\right] \quad (11-115a)$$

o

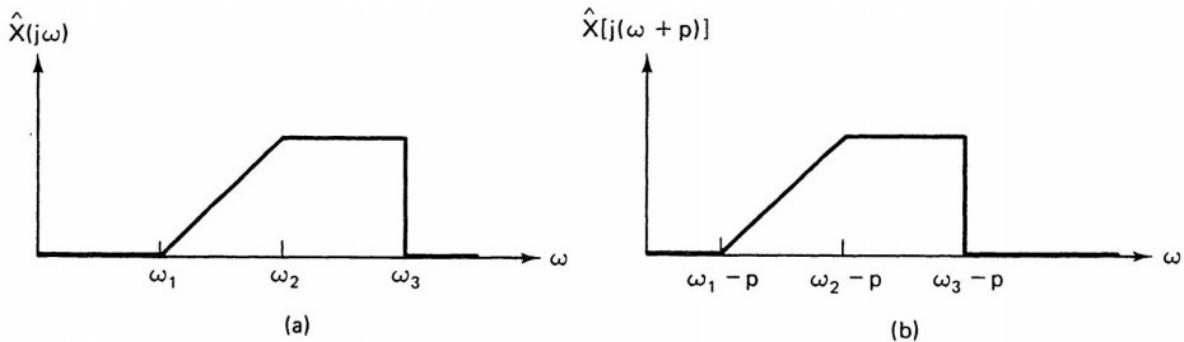
$$X(e^{j\theta}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{X}\left[j\left(\frac{\theta}{T} + \frac{2\pi k}{T}\right)\right] \quad (11-115b)$$

Observe que  $\hat{X}[j(\omega+p)]$  es una versión desplazada en frecuencia de  $\hat{X}(j\omega)$ . Por ejemplo, si  $\hat{X}(j\omega)$  viene dada por la Fig. 11-8(a), entonces  $\hat{X}[j(\omega+p)]$  se muestra en la Fig. 11-8(b), donde hemos supuesto que  $p$  es un número real positivo. Por lo tanto, (11-115) dice que la característica de frecuencia de la secuencia muestreada  $x(n)$  es una suma escalada de un número infinito de copias desplazadas en frecuencia de la característica de frecuencia de la correspondiente señal de tiempo continuo  $\hat{x}(t)$ . En el caso de que una señal de tiempo continuo esté limitada en banda con un ancho de banda  $\omega_0$ ; es decir,

$$\hat{X}(j\omega) = 0 \quad \text{para } |\omega| \geq \frac{\omega_0}{2} \quad (11-116)$$

como se muestra en la Fig. 11-9(a), entonces (11-115) produce varios  $X(e^{j\theta})$  posibles, como se

muestra en las Figs. 11-9(b), (c), o (d), dependiendo del período de muestreo  $T$  siendo



**Fig. 11-8** An illustration of the relationship between  
(a)  $\hat{X}(j\omega)$  and (b)  $\hat{X}[j(\omega + p)]$ .

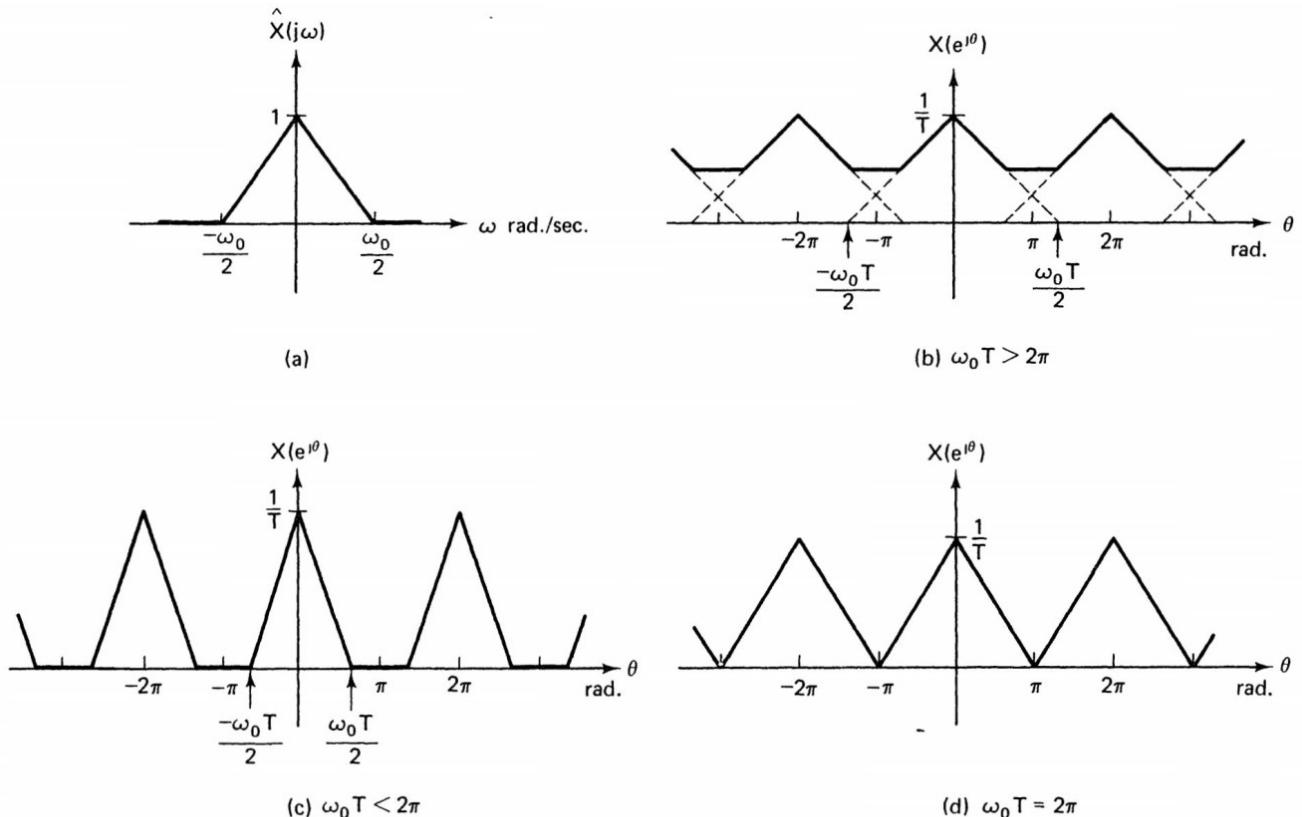
mayor, menor o igual a  $2\pi/\omega_0$ . cuando<sup>163</sup>

$$T \leq \frac{2\pi}{\omega_0} \quad (11-117)$$

(11-115) se reduce a

$$X(e^{j\theta}) = \frac{1}{T} \hat{X}\left(j\frac{\theta}{T}\right) \text{ para } |\theta| = \omega T \leq \pi \quad (11-118)$$

Es decir, las características de frecuencia de la señal de tiempo continuo y su secuencia muestreada son idénticas en forma y difieren solo por un factor de escala para  $|\theta| \leq \pi$ . Este hecho también puede observarse en la Fig. 11-9.



**Fig. 11-9** Frequency characteristics of a continuous signal and its corresponding sampled sequence.

163 La relación entre el período de muestreo  $T$  y el ancho de banda de la señal  $\omega_0$  en (11-117) se denomina condición de Nyquist. La tasa o frecuencia de muestreo  $f_s$  tal que  $f_s \triangleq 1/T = \omega_0/2\pi$  se denomina *tasa de Nyquist*.

Como (11-118) implica que las características de frecuencia tanto de la señal de tiempo continuo como de su correspondiente secuencia muestreada son idénticas hasta un factor de escala constante, es razonable esperar que dado  $x(n)$  y el período de muestreo  $T$ , puede construir una señal de tiempo continuo limitada en banda  $\hat{x}(t)$  tal que  $\omega_0 T < 2\pi$ , donde  $\omega_0$  es el ancho de banda de la señal construida  $\hat{x}(t)$ . En otras palabras, cuando tanto (11-116) como (11-117) se cumplen, esperamos que sea posible reconstruir la señal continua  $\hat{x}(t)$  a partir de su secuencia muestreada  $x(n)$ .<sup>164</sup> Para ver esto, permítanos sustituir (11-116) en (11-106a) para obtener

$$\begin{aligned}\hat{x}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{X}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0/2}^{\omega_0/2} \hat{X}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega\end{aligned}\quad (11-119)$$

Por un cambio de variable con  $\theta \triangleq \omega T$ , podemos escribir (11-119) como

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-(\omega_0 T)/2}^{(\omega_0 T)/2} \hat{X}\left(j\frac{\theta}{T}\right) \exp\left(j\frac{\theta t}{T}\right) \frac{d\theta}{T} \quad (11-120)$$

Sustituyendo (11-118) en (11-120), obtenemos

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-(\omega_0 T)/2}^{(\omega_0 T)/2} X(e^{j\theta}) \exp\left(j\frac{\theta t}{T}\right) d\theta \quad (11-121)$$

como puede observarse en la Fig. 11-9, cuando el período de muestreo satisface la condición de Nyquist de (11-117), tenemos

$$X(e^{j\theta}) = 0 \quad \text{para } \frac{\omega_0 T}{2} < |\theta| < \pi \quad (11-122)$$

En vista de (11-122), (11-121) se puede escribir como

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta}) e^{j\frac{\theta t}{T}} d\theta \quad (11-123)$$

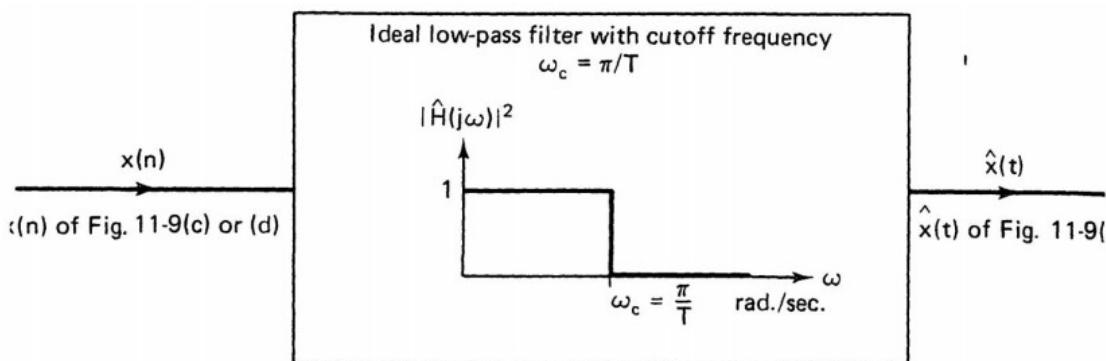
Sustituyendo (11-108a) en (11-123), obtenemos

$$\begin{aligned}\hat{x}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\theta n} \exp(j\theta t/T) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \int_{-\pi}^{\pi} \exp[-j\theta(n - t/T)] d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \frac{\exp[-j(n - t/T)\pi] - \exp[j(n - t/T)\pi]}{-j(n - t/T)} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \frac{-2j \sin[\pi(n - t/T)]}{-j(n - t/T)2\pi} \\ \hat{x}(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \frac{\sin\left[\frac{\pi}{T}(nT - t)\right]}{\frac{\pi}{T}(nT - t)}\end{aligned}\quad (11-124)$$

Dada una secuencia muestreada  $x(n)$ , (11-124) proporciona una fórmula de interpolación para

<sup>164</sup> Tenga en cuenta que si no se cumple la condición de Nyquist, entonces la construcción de una señal de tiempo continuo a partir de la secuencia  $x(n)$  no producirá la señal original  $\hat{x}(t)$  sino una con un ancho de banda que satisfaga la condición de Nyquist donde el período de muestreo  $T$  está arreglado.

recuperar la señal continua  $\hat{x}(t)$ . En el dominio de la frecuencia, (11-124) establece esencialmente que las características de frecuencia de la señal de tiempo continuo se pueden obtener pasando la secuencia muestreada a través de un filtro de paso bajo ideal con una frecuencia de corte en  $\omega_c = \pi/T$ , como se ilustra en la Fig. 11-10. Por ejemplo, si pasamos la secuencia muestreada asociada con la Figura 11-9(c) o (d) a través del filtro ideal de la figura 11-10, entonces la señal de salida de tiempo continuo será  $\hat{x}(t)$  asociada con Fig. 11-9(a). Observe que (11-124) se deriva bajo las condiciones de que la señal continua tiene una banda limitada como se indica en (11-116) y que la tasa de muestreo satisface la condición de Nyquist de (11-117).



**Fig. 11-10** The interpolation filter to construct a continuous-time signal from a sampled sequence.

Si la condición de Nyquist de (11-117) no se cumple (la tasa de muestreo no es lo suficientemente rápida), entonces las características de frecuencia  $\hat{X}(j\omega)$  y  $X(e^{j\theta})$  de la señal continua  $\hat{x}(t)$  y la secuencia muestreada  $x(n)$  ya no están relacionadas linealmente, como se ve en las Figs. 11-9(a) y (b). En este caso, una parte de la información de alta frecuencia en  $\hat{X}(j\omega)$  se desplaza a las frecuencias más bajas en  $X(e^{j\theta})$ , como se ilustra en la Fig. 11-9(b) mediante líneas de puntos. Este cambio de información se denomina aliasing o efecto de plegado (*folding effect*). En este caso, no se puede construir la señal de tiempo continuo  $\hat{x}(t)$  a partir de su secuencia muestreada  $x(n)$ .

## 11-4 Transformada de Fourier discreta

En las dos secciones anteriores, hemos discutido dos representaciones, a saber, la transformada-z y la transformada de Fourier de secuencias. Cuando una secuencia  $x(n)$  es periódica o de duración finita, es posible tener otra representación más, que se conoce como transformada de Fourier discreta o DFT. En el Capítulo 12 se muestra que una de las técnicas utilizadas para diseñar filtros digitales con una respuesta de impulso finito es mediante DFT.

Sea  $x_p(n)$  una sucesión periódica de periodo  $N$ .<sup>165</sup> Entonces

$$x_p(n) = x_p(n+mN) \quad (11-125)$$

donde  $m$  es cualquier número entero. En general,  $x_p(n)$  no admite una representación de transformada-z, porque no hay un valor finito de  $z$  tal que

$$X_p(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_p(n) z^{-n} \quad (11-126)$$

convergiera. En consecuencia,  $x_p(n)$  tampoco tendrá una representación por transformada de Fourier. Sin embargo, debido a que  $x_p(n)$  es periódica, tiene una representación en serie de Fourier discreta como<sup>166</sup>

$$x_p(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{X}_p(k) e^{j(2\pi/N)kn} \quad (11-127)$$

donde sus  $\tilde{X}_p(k)$  son los coeficientes de la serie de Fourier. Note que para cualquier entero  $m$ , tenemos

$$\begin{aligned} e^{j(2\pi/N)(k+mN)n} &= e^{j[(2\pi/N)kn + 2\pi mn]} \\ &= e^{j(2\pi/N)kn} e^{j2\pi mn} = e^{j(2\pi/N)kn} \end{aligned} \quad (11-128)$$

Esto significa que (11-127) contiene información redundante. En vista de (11-128), solo hay  $N$  frecuencias exponenciales distintas en (11-127), a saber,

$$\frac{2\pi}{N}k \quad \text{para } k=0,1,2,\dots,N-1 \quad (11-129)$$

Por lo tanto, (11-127) se puede expresar como

$$x_p(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}_p(k) e^{j(2\pi/N)kn} \quad (11-130)$$

donde  $1/N$  es un factor de normalización.

Multiplicando (11-130) por  $e^{-j2\pi mn/N}$  y sumando  $n$  en un período, obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) e^{-j(2\pi/N)mn} &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}_p(k) e^{j(2\pi/N)n(k-m)} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}_p(k) \sum_{n=0}^{N-1} e^{j(2\pi/N)n(k-m)} \quad (11-131a) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}_p(k) \delta(k - m) \end{aligned}$$

165 Una secuencia con un subíndice  $p$  denota una secuencia periódica.

166 Recuerde que en el caso de tiempo continuo, una señal periódica  $\hat{x}_p(t)$  con período  $T$  tiene una representación en serie de Fourier  $\hat{x}_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{X}_p(k) e^{jk\omega t}$ , donde  $\omega = 2\pi/T$ . Si hacemos que  $t=n$  y  $T=N$ , obtenemos la Representación en serie de Fourier de una secuencia periódica en (11-127).

donde hemos usado la relación

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{j(2\pi/N)n(k-m)} = \begin{cases} N & \text{if } k = m \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (11-131b)$$

De (11-131a), los coeficientes de Fourier de (11-130) vienen dados por

$$\tilde{X}_p(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) e^{-j(2\pi/N)kn} \quad (11-132)$$

Observe que (11-132) es similar en forma a la (11-130). Por lo tanto, podemos concluir que la secuencia  $\hat{X}_p(k)$  es periódica con período  $N$ . La representación de la serie discreta de Fourier de  $\hat{X}_p(k)$  está dada por (11-132), donde  $x_p(n)$  son los coeficientes de la serie de Fourier. La ecuación (11-132) se denomina transformada discreta de Fourier (DFT) de la secuencia  $x_p(n)$ , y (11-130) se denomina transformada inversa de Fourier discreta (IDFT) de la secuencia  $\hat{X}_p(k)$ .<sup>167</sup>

**Ejemplo 11-15** Sea  $x_p(n)$  una secuencia periódica dada por

$$x_p(n) = a^n \quad \text{para } 0 \leq n \leq N-1$$

y

$$x_p(n+mN) = x_p(n) \quad (11-133)$$

donde  $m$  es un número entero. Encuentre la DFT de  $x_p(n)$ .

**Solución:** Por (11-132),

$$\begin{aligned} \tilde{X}_p(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} a^n e^{-j(2\pi k/N)n} \\ &= \frac{1 - a^N e^{-j(2\pi k/N)N}}{1 - a e^{-j(2\pi k/N)}} = \frac{1 - a^N}{1 - a e^{-j(2\pi k/N)}} \end{aligned} \quad (11-134)$$

Observe que  $\hat{X}_p(k)$  es efectivamente periódica con período  $N$ , porque

$$\begin{aligned} \tilde{X}_p(k + mN) &= \frac{1 - a^N}{1 - a \exp[-j2\pi(k + mN)/N]} \\ &= \frac{1 - a^N}{1 - a \exp(-j2\pi k/N) \exp(-j2\pi m)} \\ &= \frac{1 - a^N}{1 - a \exp(-j2\pi k/N)} = \tilde{X}_p(k) \end{aligned}$$

Tenga en cuenta que tanto en (11-130) como en (11-132), la DFT y la IDFT de una secuencia periódica pueden determinarse por solo un período de la secuencia periódica. Consideremos una secuencia de duración finita<sup>168</sup>  $x_p(n)$  dada por

---

167 Usamos el símbolo " $\sim$ " para indicar las variables DFT.

168 Se dice que una secuencia  $x(n)$  es de duración finita si  $x(n)=0$  para  $n \leq N_1$  y  $n \geq N_2$ , donde  $N_1$  y  $N_2$  son números enteros tales que  $-\infty < N_1 < N_2 < \infty$ .

$$\begin{aligned} x(n) &= x_p(n) \quad \text{for } 0 \leq n \leq N-1 \\ &= 0 \quad \text{elsewhere} \end{aligned} \quad (11-135)$$

Es decir,  $x(n)$  es un solo período de  $x_p(n)$ . En este caso, existe la transformada-z  $X(z)$  de  $x(n)$ , y

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n)z^{-n} \quad (11-136)$$

Una comparación de (11-136) y (11-132) muestra que la relación entre la transformada-z de  $x(n)$ , que es el primer período de  $x_p(n)$ , y la DFT de  $x_p(n)$  está dada por

$$\tilde{X}_p(k) = X(z)|_{z=\exp[j2\pi k/N]} = X(e^{j2\pi k/N}) \quad (11-137)$$

Desde otro punto de vista, la DFT de  $x_p(n)$  es una secuencia muestreada por  $N$  puntos de la función de transformada de Fourier  $X(e^{j\theta})$ , con un espaciado uniforme de  $\theta$  para  $0 < \theta < 2\pi$ . Esto se debe a que (11-137) se puede escribir como

$$\tilde{X}_p(k) = X(e^{j\theta})|_{\theta=2\pi k/N} \quad k=0,1,2,\dots,N-1 \quad (11-138)$$

**Ejemplo 11-16** Sea  $x(n)$  una secuencia finita dada por

$$\begin{aligned} x(n) &= a^n \quad \text{para } 0 \leq n \leq N-1 \\ &= 0 \quad \text{para otros valores} \end{aligned} \quad (11-139)$$

Encuentre la DFT de la secuencia periódica  $x_p(n)$  definida como

$$x_p(n) = a^n \quad \text{para } 0 \leq n \leq N-1$$

y

$$x_p(n+mN) = x_p(n) \quad (11-140)$$

donde  $m$  es un número entero.

**Solución:** La transformada-z y la transformada de Fourier de la sucesión  $x(n)$  están dadas por

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a^n z^{-n} = \frac{1 - a^N z^{-N}}{1 - a z^{-1}} \quad (11-141a)$$

$$X(e^{j\theta}) = \frac{1 - a^N e^{-jN\theta}}{1 - a e^{-j\theta}} \quad (11-141b)$$

Por (11-138), obtenemos la DFT de  $x_p(n)$  como

$$\begin{aligned} \tilde{X}_p(k) &= X(e^{j\theta})|_{\theta=2\pi k/N} \\ &= \frac{1 - a^N e^{-j2\pi k}}{1 - a e^{-j2\pi k/N}} \\ &= \frac{1 - a^N}{1 - a e^{-j2\pi k/N}} \end{aligned} \quad (11-142)$$

Donde  $k=0,1,2,\dots,N-1$ .

**Ejemplo 11-17** Encuentre la DFT de la secuencia periódica  $x_p(n)$  definida por

$$x_p(n) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n & \text{para } 0 \leq n \leq 3 \\ 0 & \text{para otro valor} \end{cases}$$

y

$$x_p(n+4m) = x_p(n) \quad (11-143)$$

para todo entero  $m$ .

**Solución:** Definamos una sucesión finita  $x(n)$  como

$$\begin{aligned} x(n) &= \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n & \text{para } 0 \leq n \leq 3 \\ 0 & \text{para otro valor} \end{cases} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (11-144)$$

Usando los resultados del ejemplo 11-16 con  $a = 1/2$  y  $N = 4$ , obtenemos

$$X(e^{j\theta}) = \frac{1 - (1/2)^4 e^{-j4\theta}}{1 - (1/2)e^{-j\theta}} \quad (11-145)$$

y

$$\tilde{X}_p(k) = \frac{1 - (1/2)^4}{1 - \frac{1}{2} \exp(-j\pi k/2)} \quad (11-146)$$

Con  $k = 0, 1, 2, 3$ , (11-146) produce

$$\tilde{X}_p(0) = \frac{15/16}{1 - (1/2)(1)} = \frac{15}{16}(2) = \frac{15}{8} \quad (11-147a)$$

$$\begin{aligned} \tilde{X}_p(1) &= \frac{15/16}{1 - (1/2)(-j)} = \frac{15/16}{1 + (j/2)} = \frac{(15/16)[1 - (j/2)]}{5/4} \\ &= \frac{3}{4} \left(1 - \frac{j}{2}\right) = \frac{3}{8}(2 - j) \end{aligned} \quad (11-147b)$$

$$\tilde{X}_p(2) = \frac{15/16}{1 - (1/2)(-1)} = \frac{15}{16} \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{5}{8} \quad (11-147c)$$

$$\tilde{X}_p(3) = \frac{15/16}{1 - (1/2)(j)} = \frac{15/16}{1 - (j/2)} = \frac{3}{8}(2 + j) \quad (11-147d)$$

$$\tilde{X}_p(4) = \tilde{X}_p(8) = \dots = \tilde{X}_p(4m) = \tilde{X}_p(0) = \frac{15}{8} \quad (11-147e)$$

$$\tilde{X}_p(5) = \tilde{X}_p(9) = \dots = \tilde{X}_p(4m + 1) = \tilde{X}_p(1) = \frac{3}{8}(2 - j) \quad (11-147f)$$

$$\tilde{X}_p(6) = \tilde{X}_p(10) = \dots = \tilde{X}_p(4m + 2) = \tilde{X}_p(2) = \frac{5}{8} \quad (11-147g)$$

$$\tilde{X}_p(7) = \tilde{X}_p(11) = \dots = \tilde{X}_p(4m + 3) = \tilde{X}_p(3) = \frac{3}{8}(2 + j) \quad (11-147h)$$

donde  $m$  es un número entero.

En vista de (11-137) y (11-138), definimos la DFT  $\hat{X}(k)$  de una secuencia finita  $x(n)$  de longitud  $N$ , donde

$$x(n) = 0 \quad \text{para } n < 0 \quad \text{y } n \geq N \quad (11-148)$$

como

$$\begin{aligned}\tilde{X}(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi kn/N} \quad \text{for } 0 \leq k \leq N-1 \\ &= 0 \quad \text{elsewhere}\end{aligned}\tag{11-149}$$

Por el contrario, la IDFT de  $\hat{X}(k)$  de (11-149) se define como

$$\begin{aligned}x(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k)e^{j2\pi kn/N} \quad \text{for } 0 \leq n \leq N-1 \\ &= 0 \quad \text{elsewhere}\end{aligned}\tag{11-150}$$

Tenga en cuenta que (11-149) y (11-150) son las versiones truncadas de (11-137) y (11-138), respectivamente. Por lo tanto, se puede demostrar que la DFT de una secuencia finita es única, al igual que la IDFT de una secuencia finita. Además, las operaciones de (11-149) y (11-150) son inversas entre sí. Basado en (11-137) y (11-138), (11-149) produce

$$\begin{aligned}\tilde{X}(k) &= X(z)|_{z=\exp[j(2\pi k/N)]} \\ &= X(e^{j\theta})|_{\theta=2\pi k/N} \quad \text{for } 0 \leq k \leq N-1 \\ &= 0 \quad \text{elsewhere}\end{aligned}\tag{11-151}$$

**Ejemplo 11-18** Encuentre  $\hat{X}(k)$  la DFT de la secuencia

$$\begin{aligned}x(n) &= a^n \quad \text{para } 0 \leq n \leq N-1 \\ &= 0 \quad \text{para otro valor}\end{aligned}\tag{11-152}$$

donde  $a = 1/2$  y  $N = 4$ .

**Solución:** De (11-141) y (11-151), obtenemos

$$\begin{aligned}\tilde{X}(k) &= \frac{1-a^N}{1-a e^{-j2\pi k/N}} \quad \text{para } 0 \leq k \leq N-1 \\ &= 0 \quad \text{para otro valor}\end{aligned}\tag{11-153}$$

Con  $a = 1/2$  y  $N = 4$ , (11-153) da

$$\begin{aligned}\tilde{X}(1) &= \frac{15}{8}, \quad \tilde{X}(2) = \frac{3}{8}(2-j), \\ \tilde{X}(3) &= \frac{5}{8}, \quad \tilde{X}(4) = \frac{3}{8}(2+j),\end{aligned}$$

y

$$\tilde{X}(k) = 0 \quad \text{para } k < 0 \text{ y para } k \geq 4\tag{11-154}$$

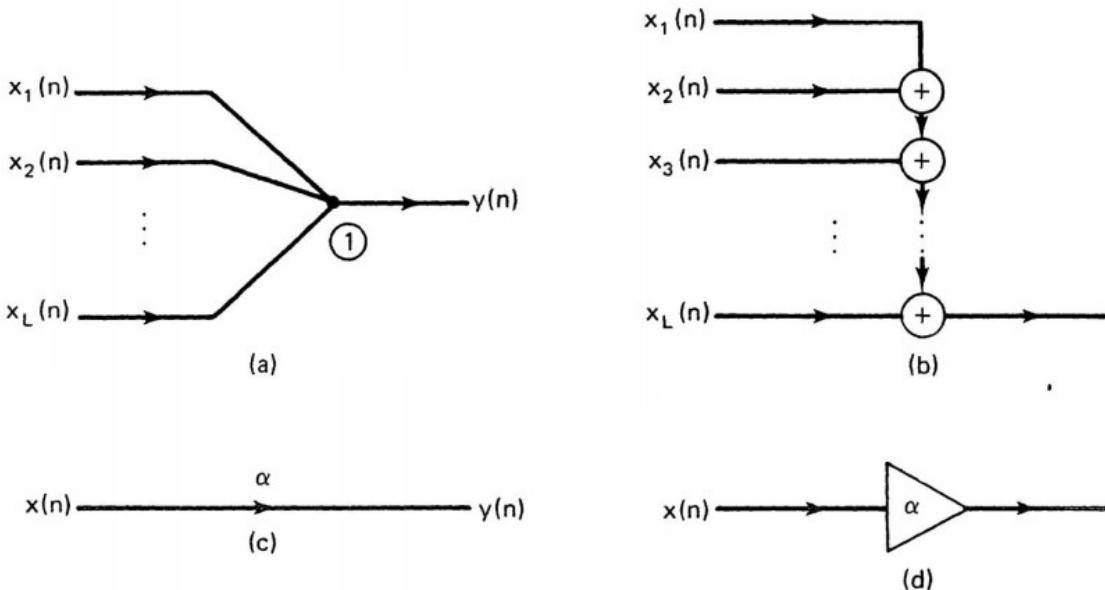
Dada la transformada z de una secuencia finita, podemos usar (11-151) para encontrar su DFT.<sup>169</sup> En la mayoría de las situaciones de diseño donde la DFT  $\tilde{H}(k)$  de una respuesta de impulso finita  $h(n)$  de longitud  $N$  se da en alguna manera como especificaciones, el problema es construir una función de transferencia  $H(z)$  tal que  $\tilde{H}(k)$  satisfaga (11-151) —  $\tilde{H}(k)$  es una secuencia muestrada de la respuesta de frecuencia  $\tilde{H}(k)$  del filtro deseado. Con este fin, sustituimos (11-150) en la transformada-z de  $h(n)$  como respectivamente. La Fig. 11-11 también muestra la relación entrada-salida de estos tres componentes digitales básicos. De ahora en adelante, por simplicidad, los llamaremos retrasos, veranos y multiplicadores.

Tenga en cuenta que en la Fig. 11-11, cada línea de entrada o salida asociada con un elemento

<sup>169</sup> Un procedimiento eficiente para calcular DFT e IDFT se denomina transformada rápida de Fourier o FFT. Ver referencia [22] para más detalles.

digital contiene una flecha que indica la dirección del flujo de la señal. Por conveniencia, asumimos que existe un verano en cada cruce para resumir todas las señales que se acercan al cruce. Esto se ilustra en la Fig. 11-12(a),

$$\begin{aligned}
 H(z) &= \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} \\
 &= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{H}(k) e^{j(2\pi/N)kn} z^{-n} \\
 &= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\tilde{H}(k)}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j(2\pi k/N)n} z^{-n} \\
 &= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\tilde{H}(k)}{N} \frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1} \exp(j\frac{2\pi k}{N})}
 \end{aligned} \tag{11-155}$$



**Fig. 11-12** Simplified schematics for (a) and (b) summers, and (c) and (d) multipliers.

donde la salida  $y(n)$  es una suma de todas las entradas que convergen en la unión del nodo (T) como

$$y(n) = x_1(n) + x_2(n) + \dots + x_L(n) \tag{11-159}$$

De hecho, la Fig. 11-12(a) representa el circuito digital detallado de la Fig. 11-12(b).

Además, un multiplicador tiene una notación simplificada, como se muestra en la figura 11-12(c), donde la salida viene dada por

$$y(n) = \alpha x(n) \tag{11-160}$$

La Fig. 11-12(c) es equivalente al circuito digital de la Fig. 11-12(d). Cuando no hay una constante de multiplicación asociada con una flecha, simplemente significa que la constante de multiplicación a es 1.

**Ejemplo 11-19** Encuentre la función de transferencia del circuito digital que se muestra en la Fig. 11-13(a).

Solución: observe que el circuito de la Fig. 11-13(a) representa el circuito digital de la Fig. 11-13(b). Como se muestra en la Fig. 11-13(a), la ecuación en diferencias y su correspondiente ecuación de transformación z están dadas, respectivamente, por

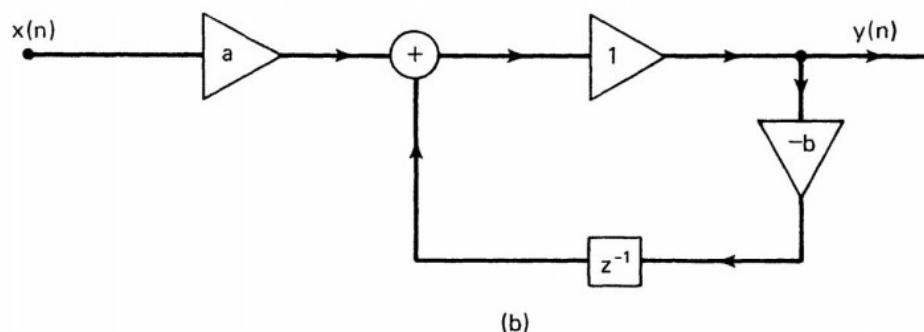
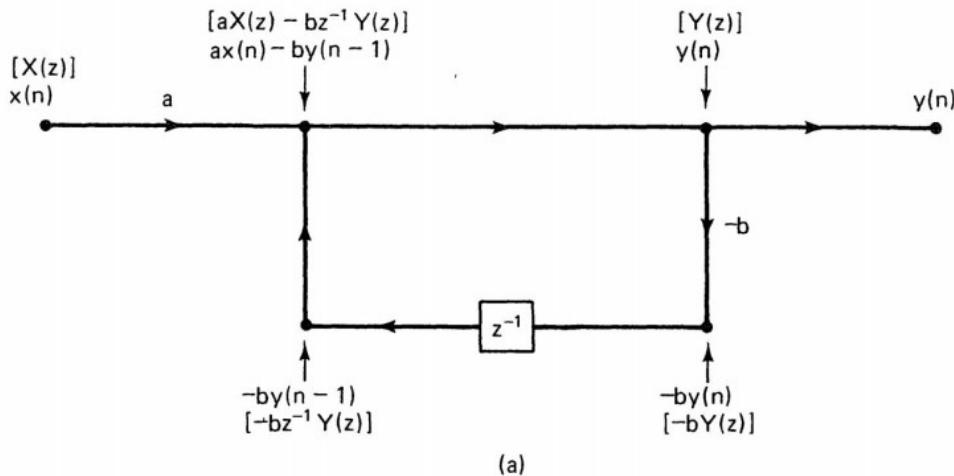
$$y(n) + b y(n-1) = a x(n) \quad (11-161a)$$

y

$$(1+bz^{-1})Y(z) = aX(z) \quad (11-161b)$$

Por tanto, la función de transferencia del circuito digital de la Fig. 11-13 es

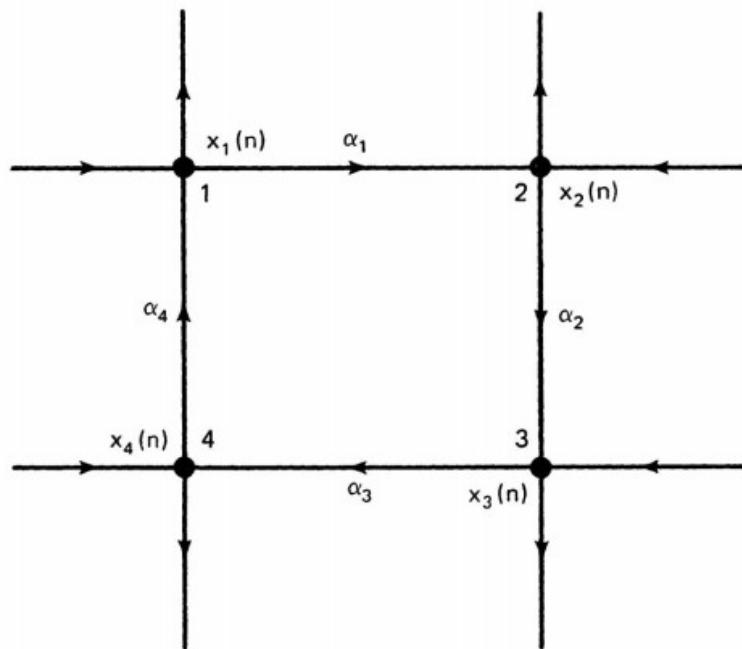
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{a}{(1+bz^{-1})} \quad (11-162)$$



**Fig. 11-13** A digital circuit (a) with simplified notations, and (b) with explicitly drawn components.

Al contrario del caso del filtro analógico, donde se requiere que los componentes pasivos básicos de R, L y C tengan valores reales y positivos, las constantes de multiplicación aquí no están restringidas en absoluto. Sin embargo, algunas estructuras simples de filtro digital pueden causar inconsistencias y/o imposibilidades computacionales. Considere el circuito de la Fig. 11-14. Sean  $x_1(n)$ ,  $x_2(n)$ ,  $x_3(n)$  y  $x_4(n)$  las salidas de los sumadores en los nodos 1, 2, 3 y 4, respectivamente. De la Fig. 11-14, observamos que:

1. para calcular  $x_1(n)$  , necesitamos conocer  $x_4(n)$  .
2. para calcular  $x_4(n)$  , necesitamos conocer  $x_3(n)$  .
3. para calcular  $x_3(n)$  , necesitamos conocer  $x_2(n)$  .
4. para calcular  $x_2(n)$  , necesitamos conocer  $x_1(n)$  .



**Fig. 11-14** An illegal structure for digital filters.

Este tipo de procedimiento de dar la vuelta al círculo impone una imposibilidad computacional para calcular  $x_1(n)$  ,  $x_2(n)$  ,  $x_3(n)$  y  $x_4(n)$  . Nótese que esta imposibilidad computacional surge porque existe un bucle sin elementos de retardo.<sup>170</sup> Por tanto, es necesario comprobar que no existen bucles sin retardo en las realizaciones finales de las funciones de transferencia digital.<sup>171</sup>

170 Un bucle en un filtro digital siempre significa un bucle dirigido.

171 En el Capítulo 13 se presenta una técnica para transformar un circuito de filtro digital con bucles sin retardo en uno sin bucles sin retardo.

## 11-6 Consideraciones de estabilidad

En el dominio del tiempo, un filtro digital es estable si su respuesta al impulso satisface (11-18). Aquí examinamos las condiciones de estabilidad de los filtros digitales en el dominio z.

Consideré una función de transferencia general dada por (11-40), que se reproduce aquí por conveniencia

$$H(z) = \frac{\alpha \prod_{i=1}^M (1 - z_i z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - p_k z^{-1})} \quad (11-163)$$

Cualquier filtro cuyas funciones de transferencia estén dadas por (11-163) con  $N > 1$  se denomina filtro digital de respuesta de impulso infinito (IIR), porque no existe un entero finito L tal que

$$h(n) = 0 \quad \text{para } n > L \quad (11-164)$$

donde  $h(n)$  es la respuesta de impulso del filtro. Para los filtros digitales IIR, supongamos que

$$M \leq N \quad (11-165)$$

Esta suposición es válida para casi todos los casos de interés práctico. Una expansión en fracciones parciales de (11-163) da

$$H(z) = \xi_0 + \frac{\xi_1}{1 - p_1 z^{-1}} + \frac{\xi_2}{1 - p_2 z^{-1}} + \dots + \frac{\xi_N}{1 - p_N z^{-1}} \quad (11-166a)$$

donde

$$\begin{aligned} \xi_0 &= \alpha & \text{si } N = M \\ &= 0 & \text{si } N > M \end{aligned} \quad (11-166b)$$

y

$$\xi_i = (1 - p_i z^{-1}) H(z) \Big|_{z=p_i} \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, N \quad (11-166c)$$

Por lo tanto, la respuesta de impulso correspondiente de (11-163) viene dada por

$$h(n) = [\xi_1 p_1^n + \xi_2 p_2^n + \dots + \xi_N p_N^n] u(n) + \xi_0 \delta(n) \quad (11-167)$$

Claramente, las condiciones necesarias y suficientes para que la respuesta al impulso de (11-167) satisfaga los criterios de estabilidad de

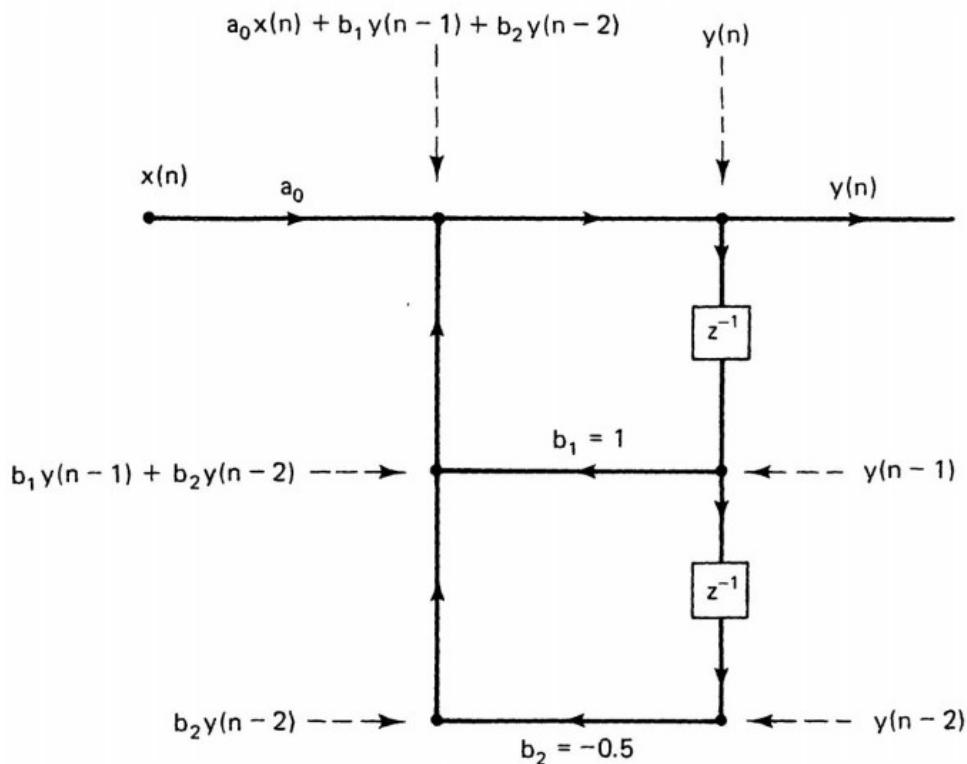
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty \quad (11-168)$$

es eso

$$|p_i| < 1 \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, N \quad (11-169)$$

Es decir, todas las ubicaciones de los polos del filtro digital están dentro del círculo unitario en el plano z.

**Ejemplo 11-20** Muestre que el circuito de la Fig. 11-15 es estable.



**Fig. 11-15** A stable digital circuit for Example 11-20.

**Solución:** La ecuación en diferencias que representa el circuito está dada por

$$y(n) = a_0 x(n) + y(n-1) - 0.5 y(n-2) \quad (11-170)$$

La función de transferencia del circuito se puede obtener tomando las transformadas z de (11-170) como

$$(1 - z^{-1} + 0.5 z^{-2}) Y(z) = a_0 X(z)$$

o

$$\begin{aligned} H(z) &\triangleq \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{a_0}{1 - z^{-1} + 0.5 z^{-2}} \\ &= \frac{a_0 z^2}{z^2 - z + 0.5} \end{aligned} \quad (11-171)$$

Por lo tanto, las ubicaciones de los polos del filtro están en

$$\begin{aligned} p_{1,2} &= \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(0.5)}}{2} \\ &= \frac{1 \pm j1}{2} = 0.5 \pm j0.5 \end{aligned} \quad (11-172)$$

Es decir,  $H(z)$  se puede escribir como

$$H(z) = \frac{a_0}{[1 - (0.5 + j0.5)z^{-1}][1 - (0.5 - j0.5)z^{-1}]} \quad (11-173)$$

Porque

$$|p_1| = |p_2| = 0.71 \quad (11-174)$$

el circuito de la Fig. 11-15 es estable.

Cuando la función de transferencia de un filtro digital está dada por

$$H(z) = a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_M z^{-M} \quad (11-175)$$

lo cual es equivalente al caso cuando  $N=0$  en (11-163), se dice que el filtro digital es del tipo de respuesta de impulso finito (FIR). Se usa este nombre porque la respuesta al impulso de (11-175) tiene la propiedad de que

$$h(n) = 0 \text{ para } n > M \text{ y para } n < 0 \quad (11-176)$$

Es decir, la respuesta de impulso correspondiente es de duración finita. En este caso, no hay polos. Por lo tanto, este tipo de filtro es siempre estable.

### 11-7 Un ejemplo de filtro digital sencillo

Considere el circuito RC de la Fig. 11-16, donde el voltaje inicial del capacitor es cero. Con  $\hat{v}_i(t)=0$  para  $t<0$ , la salida  $\hat{v}_o(t)=0$  viene dada por

$$\begin{aligned}\hat{v}_o(t) &= \int_0^t \frac{1}{RC} e^{-(1/RC)(t-\tau)} \hat{v}_i(\tau) d\tau \\ &= \hat{h}(t) * \hat{v}_i(t)\end{aligned}\quad (11-177a)$$

donde

$$\hat{h}(t) = \frac{1}{RC} e^{-(1/RC)t} \quad (11-177b)$$

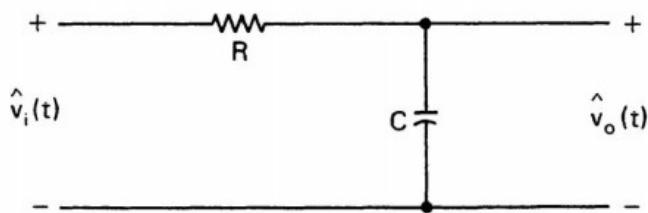


Fig. 11-16 An RC circuit.

es la respuesta al impulso del circuito RC de la Fig. 11-16. Para introducir las ideas básicas del filtrado digital, consideremos el problema de diseñar un filtro digital que realice aproximadamente la misma función de procesamiento de señales que el filtro de paso bajo de primer orden RC simple de la Fig. 11-16. Debido a que la señal de entrada en el filtro RC es una función de tiempo continuo, el primer paso es tener un convertidor A/D en el extremo de entrada para convertir el voltaje de entrada  $\hat{v}_i(t)$  en una secuencia de entrada  $v_i(n)$ . De manera inversa, se coloca un convertidor D/A en el extremo de salida del filtro digital para convertir la secuencia de salida  $v_o(n)$  en una señal de salida continua  $\hat{v}_o(t)$ , como se muestra en la Fig. 11-17, donde la caja etiquetada como filtro digital es el corazón de este problema de diseño.

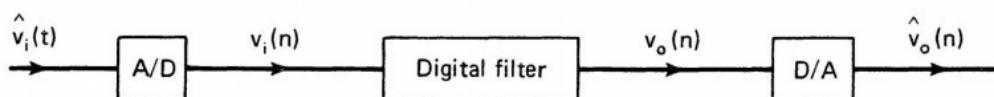


Fig. 11-17 A general setting for digital filters.

Como el circuito RC de la Fig. 11-16 se describe mediante una ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{d\hat{v}_o}{dt} + \frac{1}{RC} \hat{v}_o(t) = \frac{1}{RC} \hat{v}_i(t) \quad (11-178a)$$

con

$$\hat{v}_o(0-) = 0 \quad (11-178b)$$

supongamos que el filtro digital de la Fig. 11-17 se caracteriza por una ecuación en diferencias de primer orden

$$v_o(n) = a v_o(n-1) + b v_i(n) \quad (11-179)$$

con

$$v_o(-1) = 0$$

Tomando las transformadas z de (11-179), obtenemos

$$(1-a z^{-1}) V_o(z) = b V_i(z)$$

o

$$H(z) \triangleq \frac{V_o(z)}{V_i(z)} = \frac{b}{1 - az^{-1}} \quad (11-180)$$

Por lo tanto, la respuesta al impulso viene dada por

$$h(n) = b a^n u(n) \quad (11-181)$$

Por (11-17), la salida  $v_o(n)$  del filtro digital viene dada por

$$\begin{aligned} v_o(n) &= h(n) * v_i(n) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n-k) v_i(k) \\ &= \sum_{k=0}^n b a^{n-k} v_i(k) \end{aligned} \quad (11-182)$$

Si se usa una aproximación de suma rectangular para integrar (11-177) con un espacio de tiempo de  $T$  segundos, obtenemos

$$\hat{v}_o(nT) = \sum_{k=0}^n \frac{T}{RC} e^{-(n-k)(T/RC)} \hat{v}_i(kT) \quad (11-183)$$

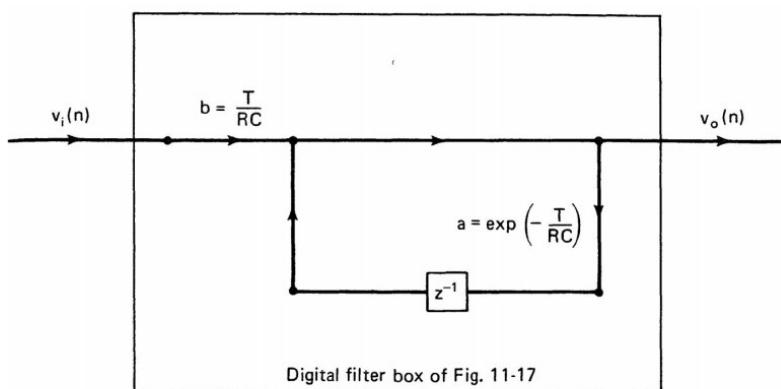
Al comparar (11-182) y (11-183), observamos que si

1. el período de muestreo en los convertidores A/D y D/A es  $T$  segundos,
2. las constantes  $a$  y  $b$  en la supuesta ecuación de caracterización del filtro digital de (11-179) toman los valores

$$b = \frac{T}{RC} \quad (11-184a)$$

$$a = e^{-T/RC} \quad (11-184b)$$

entonces la salida  $v_o(n)$  del filtro digital es una secuencia muestreada de  $\hat{v}_o(n)$  del filtro de paso bajo RC de la Fig. 11-16. En la Fig. 11-18 se muestra un filtro digital que implementa la ecuación en diferencia de (11-179) con los parámetros dados por (11-184). Al sustituir la Fig. 11-18 en la Fig. 11-17, obtenemos una simulación del circuito RC de la Fig. 11-16. Claramente, un método de integración numérica diferente aplicado a (11-177) dará lugar a un filtro digital diferente en la Fig. 11-18.



**Fig. 11-18** A digital filter simulation of the RC circuit in Fig. 11-16.

## 11-8 Análisis de filtros digitales

En esta sección, presentamos una técnica simple para analizar circuitos de filtro digital. El método presentado aquí es similar al análisis nodal de circuitos analógicos. De hecho, conserva muchas propiedades deseables del análisis nodal, incluida la formulación simple, la implementación fácil de la máquina y el cálculo eficiente debido a la aplicabilidad de las técnicas de matriz dispersa.

Considera un circuito digital  $S$  de entrada única y salida única con  $N+2$  nodos y  $b$  ramas. Sea el nodo 0 el nodo de entrada (o fuente) y el nodo  $N + 1$  el nodo de salida (o sumidero). Para  $\alpha=1,2,\dots,N$ , sea  $x_\alpha(n)$  la variable asociada con la salida del verano en el nodo  $\alpha$ . Sea  $x_{out}(n)$  la secuencia de entrada y  $X_i(z)$  la secuencia de salida. Finalmente, sea  $X_i(z)$  la transformada z de  $x_i(n)$  para  $i=1,2,\dots,N$ , dentro y fuera.

En cada nodo  $a$ , escribamos una ecuación de nodo que describa las interacciones de la señal entre las ramas que inciden en el nodo  $a$ , donde  $a = 1, 2, \dots, A$ . El resultado será un sistema de  $N$  ecuaciones algebraicas complejas

$$N \times N \quad (11-185)$$

donde  $A(z)$  es una matriz  $N \times N$  que incluye las características de la rama,  $B(z)$  es un vector  $N \times 1$ ,  $X_{in}(z)$  es la entrada y  $X(z)$  es un vector  $N \times 1$  que contiene las  $N$  variables nodales

$$X(z) = \begin{bmatrix} X_1(z) \\ X_2(z) \\ \vdots \\ \vdots \\ X_N(z) \end{bmatrix}$$

Resolviendo para  $X(z)$ , (11-185) se obtiene

$$X(z) = A^{-1}(z)B(z)X_{in}(z) \quad (11-186)$$

Con una ecuación adicional en el nodo  $N+1$ , obtenemos la ecuación de salida

$$X_{out}(z) = C(z)X(z) + D(z)X_{in}(z) \quad (11-187)$$

donde  $C(z)$  es un vector fila de  $1 \times N$  y  $D(z)$  es un escalar. Sustituyendo (11-186) en (11-187) da

$$X_{out}(z) = (CA^{-1}B + D)X_{in}(z) \triangleq H(z)X_{in}(z) \quad (11-188a)$$

donde

$$H(z) = C(z)A^{-1}(z)B(z) + D(z) \quad (11-188b)$$

es la función de transferencia del circuito. Observe que la función de transferencia  $H(z)$  {o la respuesta de frecuencia del circuito} se puede obtener resolviendo para  $X_{out}(z)$  {o  $X_{out}(e^{j\theta})$ } con la entrada configurada en  $X_{in}(z)=1$  {o  $X_{in}(e^{j\theta})=1$  para todo  $\theta$ }.

**Ejemplo 11-21** Encuentre la respuesta de frecuencia y la función de transferencia del circuito de la figura 11-19.

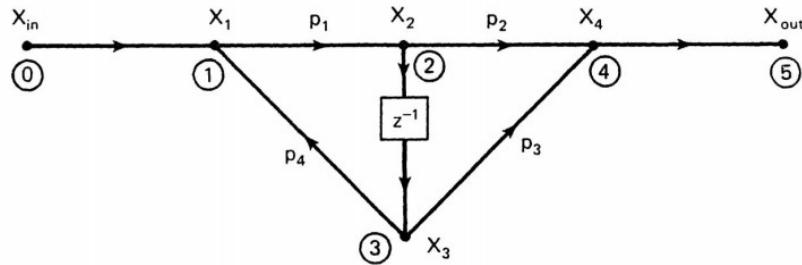


Fig. 11-19 A digital filter circuit.

**Solución:** Debido a que se nos pide encontrar la respuesta de frecuencia y la función de transferencia del circuito, podemos suponer que todas las condiciones iniciales del circuito son cero. Sea  $X_k(z)$  la transformada z de la secuencia nodal en el nodo  $k$  para  $k=1,2,3$  y 4. Las ecuaciones de los nodos son:

$$X_1(z) = X_{in}(z) + p_4 X_3(z)$$

$$X_2(z) = p_1 X_1(z)$$

$$X_3(z) = z^{-1} X_2(z)$$

$$X_4(z) = p_2 X_2(z) + p_3 X_3(z)$$

o

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -p_4 & 0 \\ -p_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -z^{-1} & 1 & 0 \\ 0 & -p_2 & -p_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(z) \\ X_2(z) \\ X_3(z) \\ X_4(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} X_{in}(z) \quad (11-189)$$

La ecuación de salida está dada por

$$X_{out}(z) = X_4(z) \quad (11-190)$$

Despejando  $X_4(z)$  de (11-189) y sustituyendo el resultado en (11-190), obtenemos

$$X_{out}(z) = \frac{p_1(p_2 + p_3 z^{-1})}{1 - p_1 p_4 z^{-1}} X_{in}(z) \quad (11-191)$$

Por tanto, la función de transferencia y la respuesta en frecuencia del circuito de la figura 11-19 están dadas por

$$H(z) = \frac{X_{out}(z)}{X_{in}(z)} = \frac{p_1 p_2 \left(1 + \frac{p_3}{p_2} z^{-1}\right)}{1 - p_1 p_4 z^{-1}} \quad (11-192a)$$

y

$$H(e^{j\theta}) = \frac{p_1 p_2 \left[1 + \frac{p_3}{p_2} \exp(-j\theta)\right]}{1 - p_1 p_4 \exp(-j\theta)} \quad (11-192b)$$

■

## Referencias y lecturas adicionales

- [1] Rabiner, L. R., and Rader , C. M. Digital Signal Processing. New York: IEEE Press, 1972.
- [2] Steiglitz, K. An Introduction to Discrete Systems, New York: John Wiley, 1974.
- [3] Bogner, R. E., and Constantinides , A. G. Introduction to Digital Filtering. New York: John Wiley, 1975.
- [4] Digital Signal Processing Committee of IEEE Acoustics, Speech and Signal Processing Society, ed. Digital Signal Processing II. New York: IEEE Press, 1975.
- [5] Oppenheim, A. V., and Schafer , R. W. Digital Signal Processing. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1975.
- [6] Rabiner, L. R., and Gold , B. Theory and Application of Digital Signal Processing. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1975.
- [7] Peled, A., and Liu, B. Digital Signal Processing. New York: John Wiley, 1976.
- [8] Leon, B. J., and Bass , S. C. "Designer's Guide to Digital Filter Parts 1-6," EDA (Jan. 1974): 30-36; (Feb. 1974): 65-72; (Mar. 1974): 51-59; (Apr. 1974): 57-62; (May 1974): 61-68; and (June 1974): 69-75.
- [9] Kuo, F. F., and Kaiser , J. F. System Analysis by Digital Computer. New York: John Wiley, 1966.
- [10] Gibbs, A. J. "An Introduction to Digital Filters," Australian Telecommunications Research 3 (1969): 3-14.
- [11] Rosenfeld, A. Picture Processing by Computer. New York: Academic Press, 1969.
- [12] Flanagan, J. L., and Rabiner , L. R. Speech Synthesis. New York: Dowden, Huchington and Ross, 1973.
- [13] Cadzow, J. A. Discrete Time Systems. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1973.
- [14] Peled, A., and Liu, B. "A New Hardware Realization of Digital Filters." IEEE Trans. Acoustics, Speech, Signal Processing ASSP-22 (1974): 456-62.
- [15] Liu, B. "Effect of Finite Word Length on Accuracy of Digital Filters—A Review." IEEE Trans. Circuit Theory CT-18 (1971): 670-77.
- [16] Fettweis, A. "On the Connection Between Multiplier Word Length Limitation and Roundoff Noise in Digital Filters." IEEE Trans. Circuit Theory CT-19 (1972): 486-91.
- [17] Yakowitz, S., and Parker , S. R. "Computation of Bounds for Digital Filter Quantization Errors." IEEE Trans. Circuit Theory CT-20 (1973): 391-96.
- [18] Crochiere, R. E. "A New Statistical Approach to the Coefficient Word Length Problem for Digital Filters." IEEE Trans. Circuit and Systems CAS-22 (1975): 190-96.
- [19] Mitra, S. K., and Sherwood , R. J. "Estimation of Pole-Zero Displacements of Digital Filter due to Coefficient Quantization." IEEE Trans. Circuit and Systems CAS-21 (1974): 116-24.
- [20] Corsini, P., and Frosini , G. "Structures for Evaluating the Discrete Fourier Transform on Staggered Blocks." IEEE Trans. Acoustics, Speech, Signal Processing ASSP-24 (1976): 128-31.
- [21] Bongiovanni, G., Corsini , P., and Frosini , G. "Procedure for Computing the Discrete Fourier Transform on Staggered Blocks." IEEE Trans. Acoustics, Signal Processing ASSP-24 (1976): 132-37.
- [22] Brigham, E. O. The Fast Fourier Transform. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1974.
- [23] Jury, E. I. Theory and Application of the Z-Transform Method. New York: John Wiley, 1964.

## Problemas

11-1. Encuentre las respuestas escalón unitario e impulso unitario de los siguientes sistemas:

- (a)  $y(n) - 0.5y(n-1) = x(n)$
- (b)  $y(n) + 0.5y(n-1) = x(n)$
- (c)  $y(n) - 2y(n-1) = x(n)$
- (d)  $y(n) - 2y(n-1) = x(n)$
- (e)  $y(n) - 0.5y(n-1) - 0.5y(n-2) = x(n)$
- (f)  $y(n) + 0.5y(n-1) - y(n-2) = x(n) + x(n-1)$

11-2. Suponga que un sistema  $S$  se caracteriza por la ecuación en diferencias

$$y(n) + y(n-1) - \frac{1}{2}y(n-2) = 2x(n) - x(n-1)$$

donde  $y(n)$  es la salida y  $x(n)$  es la entrada.

- (a) Encuentre la función de transferencia de  $S$ .
- (b) Determine si  $S$  es estable.
- (c) Determine si  $S$  es causal.

Suponiendo que  $y(-1) = y(-2) = 0$ , encuentre  $y(n)$  si

- (d)  $x(n) = u(n) =$  la secuencia de paso unitario
- (e)  $x(n) = \delta(n) =$  la secuencia de impulso unitario
- (f)  $x(n) = 2u(n) - \delta(n)$

11-3. Encuentre las transformadas z inversas de las siguientes  $X(z)$ :

- (a)  $X(z) = \frac{1}{1 - 0.75z^{-1} + 0.125z^{-2}}$
- (b)  $X(z) = \frac{2z^{-1}}{1 - 0.25z^{-2}}$
- (c)  $X(z) = \frac{1 + 2z^{-1}}{1 + 0.5z^{-1} + 0.5z^{-2}}$
- (d)  $X(z) = \frac{2 + z^{-1} + z^{-2}}{1 + z^{-1} + 0.5z^{-2}}$
- (e)  $X(z) = \frac{1 - z^{-1}}{(1 + z^{-1})(1 + 0.4z^{-1} - 0.1z^{-2})}$
- (f)  $X(z) = \frac{1 - 3z^{-1} + 2z^{-2}}{(1 + 0.5z^{-1})(1 + 0.1z^{-1} + z^{-2})}$
- (g)  $X(z) = \frac{1}{(1 + 0.5z^{-1} + 0.5z^{-2})(1 - 0.75z^{-1} + 0.125z^{-2})}$
- (h)  $X(z) = \frac{(1 - z^{-1})(1 + 0.75z^{-1} + z^{-2})}{(1 + 0.1z^{-1} + z^{-2})(1 + z^{-1} + 0.5z^{-2})}$
- (i)  $X(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 + 0.1z^{-1} + z^{-2}} + \frac{1 + 0.75z^{-1} + z^{-2}}{1 + z^{-1} + 0.5z^{-2}}$
- (j)  $X(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 + 0.5z^{-1} + 0.5z^{-2}} + \frac{1 - z^{-1}}{1 - 0.75z^{-1} + 0.125z^{-2}}$

1-4. Suponga que un filtro digital se caracteriza por

$$y(n) + \frac{1}{4}y(n-1) - \frac{1}{8}y(n-2) = x(n)$$

donde  $y(n)$  es la salida y  $x(n)$  es la entrada.

- (a) Encuentre la función de transferencia del filtro digital.
- (b) Encuentre  $y(n)$  si  $x(n) = e^{(-n)}u(n)$  y  $y(-1) = y(-2) = 0$ .
- (c) Encuentre  $y(n)$  si  $y(n) = 0$  y  $y(-1) = y(-2) = 0$ .
- (d) Repita (b) y (c) si  $y(-1) = 1$  y  $y(-2) = 0$ .

11-5. Calcule la suma de convolución de las siguientes dos secuencias:

$$\begin{aligned}x_1(n) &= n + 1 && \text{for } 0 \leq n \leq 1 \\&= 0 && \text{otherwise}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_2(n) &= n^2 && \text{for } 0 \leq n \leq 2 \\&= 0 && \text{otherwise}\end{aligned}$$

- (a) usando la fórmula de suma de convolución.
- (b) usando transformadas z y transformadas z inversas.

11-6. Suponga que un filtro digital se caracteriza por

$$y(n) + b_1y(n-1) + b_2y(n-2) = x(n)$$

- (a) Encuentre la función de transferencia  $H(z) = Y(z)/X(z)$  del filtro.
- (b) Sea  $b_1 = 0.5$  y  $b_2 = 0.4$ ; Encuentre  $h(n)$ , la respuesta de impulso unitario del filtro.
- (c) Sea  $b_1 = 0.3$  y  $b_2 = 0.4$ ; Encuentre  $s(n)$ , la respuesta escalón unitario del filtro.
- (d) Sean  $b_1 = 0.2$  y  $b_2 = 0.5$ . Si  $x(-1) = x(-2) = 0$  y

$$\begin{aligned}x(n) &= n && \text{for } -1 \leq n \leq 1 \\&= 0 && \text{otherwise}\end{aligned}$$

encuentre  $y(n)$ .

11-7. Suponga que un filtro digital se caracteriza por

$$y(n) - \frac{1}{2}y(n-1) + \frac{1}{8}y(n-2) = x(n-1) + \frac{1}{2}x(n)$$

- (a) Encuentre la respuesta al impulso unitario  $h(n)$ .

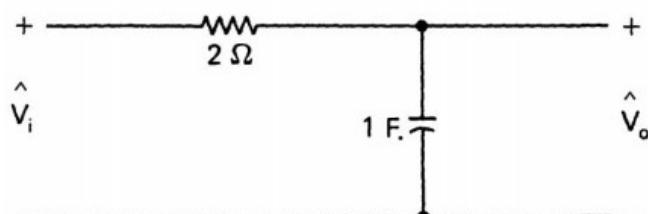
Si la secuencia de entrada está dada por

$$\begin{aligned}x(n) &= n && \text{for } -1 \leq n \leq 1 \\&= 0 && \text{otherwise}\end{aligned}$$

- (b) encuentre  $y(n)$  por convolución.
- (c) encuentre  $y(n)$  mediante transformadas z y transformadas z inversas.

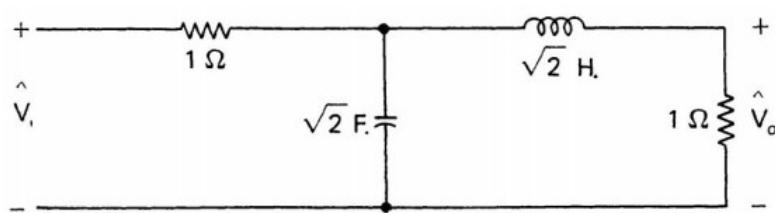
11-8. Considere el circuito analógico que se muestra en la figura P11-8.

- (a) Encuentre la respuesta al impulso  $h(t)$ .
- (b) Sea el período de muestreo  $T = 0.1$  seg., y definamos la secuencia  $h(n) \triangleq \hat{h}(nT)$ . Encuentre la transformada z de  $h(n)$ .



**Fig. P11-8**

11-9. Considere el circuito analógico que se muestra en la figura P11-9.



**Fig. P11-9**

- (a) Halle la respuesta al impulso  $\hat{h}(n)$ .
- (b) Defina  $h(n) \triangleq \hat{h}(nT)$ , donde  $T = 0.1$  seg. Encuentre la transformada z de  $h(n)$ .
- (c) Encuentre la respuesta de frecuencia de  $h(n)$ .
- (d) Encuentre la ecuación en diferencias correspondiente a los resultados obtenidos en (b).
- (e) Si la entrada  $\hat{V}_i(f) = \cos t$ , encuentre la respuesta de estado estable  $v_0(t)$  del circuito de la figura P11-9.
- (f) Si  $h(n) \triangleq \hat{h}(nT)$  es la entrada al sistema discretizado de (d), encuentre la correspondiente salida en estado estacionario  $v_0(n)$ .

11-10. Suponga que un filtro digital se caracteriza por la función de transferencia

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - 0.5z^{-1} + 0.5z^{-2}}$$

- (a) Encuentre la respuesta de frecuencia del filtro.
- (b) Si la entrada  $x(n) = e^{jn}$ , encuentre la salida de estado estable  $y(n)$ .
- (c) Si la entrada  $x(n) = e^{-jn}$ , encuentre la salida de estado estacionario  $y(n)$ .
- (d) Si la entrada  $x(n) = \cos n$ , encuentre la salida de estado estable  $y(n)$ .

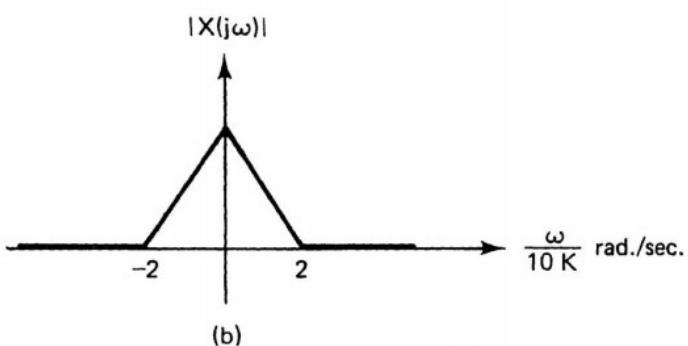
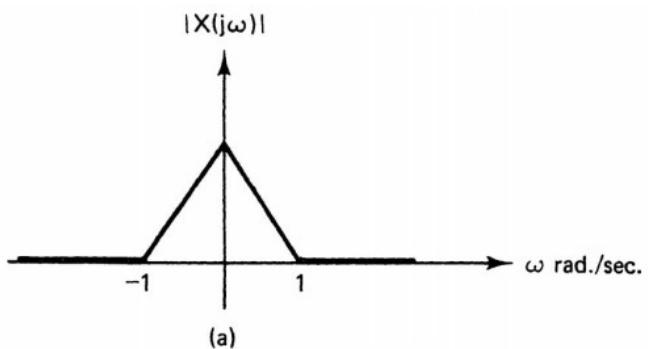
- (e) Si la entrada  $x(n)=\cos \pi n/2$ , encuentre la salida de estado estacionario  $y(n)$ .
- (f) Si la entrada  $x(n)=\cos 0.1n$ , encuentre la salida de estado estable  $y(n)$ .
- (g) Dibuje la función de magnitud de la respuesta de frecuencia del filtro.
- (h) Comente los resultados obtenidos en (d), (e) y (f) con respecto a la gráfica obtenida en (g).

11-11. Sean  $\hat{x}_1(t)=\cos \omega t$  y  $\hat{x}_2(t)=\cos[\omega+(2\pi/T)]t$ , donde  $\omega=1$  y  $T=1$ . Defina  $x_1(n)\triangleq\hat{x}_1(nT)$  y  $x_2(n)\triangleq\hat{x}_2(nT)$ .

- (a) Construya una tabla (con 3 columnas) dando los valores correspondientes de  $n$ ,  $x_1(n)$ , y  $x_2(n)$ , y comente los resultados obtenidos.
- (b) Sea  $x(n)=x_2(n)$ , y sea  $\hat{x}(t)$  la señal analógica obtenida de  $x(n)$  a través del teorema de muestreo. Determine si  $\hat{x}(t)=\hat{x}_1(t)$  o  $\hat{x}(t)=\hat{x}_2(t)$ . Dar razones.
- (c) Repita (a) y (b) si  $\omega=0.1$ .
- (d) ¿Qué sucede con los resultados de (a) y (b) si  $\omega=10$ ? Dar razones.

11-12. Encuentre el período de muestreo  $T$  más grande y apropiado para la señal  $x(t)$ , que tiene una curva de magnitud de transformada de Fourier que se muestra en

- (a) Fig. P11-12(a).
- (b) Fig. P11-12 (b).



**Fig. P11-12**

11-13. Suponga que una señal se caracteriza por una transformada de Laplace

$$\hat{X}(s) = \frac{10^8}{s^2 + \sqrt{2} \times 10^4 s + 10^8}$$

Encuentre el período de muestreo máximo T tal que el efecto de aliasing sea menor que

- |          |          |        |
|----------|----------|--------|
| (a) 10%  | (b) 5%   | (c) 1% |
| (d) 0.5% | (e) 0.1% |        |

11-14. Considere la secuencia

$$\begin{aligned}x(0) &= x(2) = 0.5 \\x(1) &= 1 \\x(n) &= 0 \quad \text{for } n < 0 \text{ and } n > 2\end{aligned}$$

- (a) Encuentre la transformada z de la sucesión.
- (b) Encuentre la transformada de Fourier de la secuencia.
- (c) Encuentre la DFT de la secuencia.
- (d) Verifique (11-151), (11-155) y (11-156) para este caso.

11-15. Considere la secuencia

$$\begin{aligned}x(0) &= x(5) = 2 \\x(1) &= x(4) = 1 \\x(2) &= x(3) = 2 \\x(n) &= 0 \quad \text{for } n < 0 \text{ and for } n > 5\end{aligned}$$

- (a) Encuentre la transformada z  $X(z)$  de la sucesión.
- (b) Encuentre la DFT  $\tilde{X}(k)$  de la secuencia.

Defina la secuencia periódica

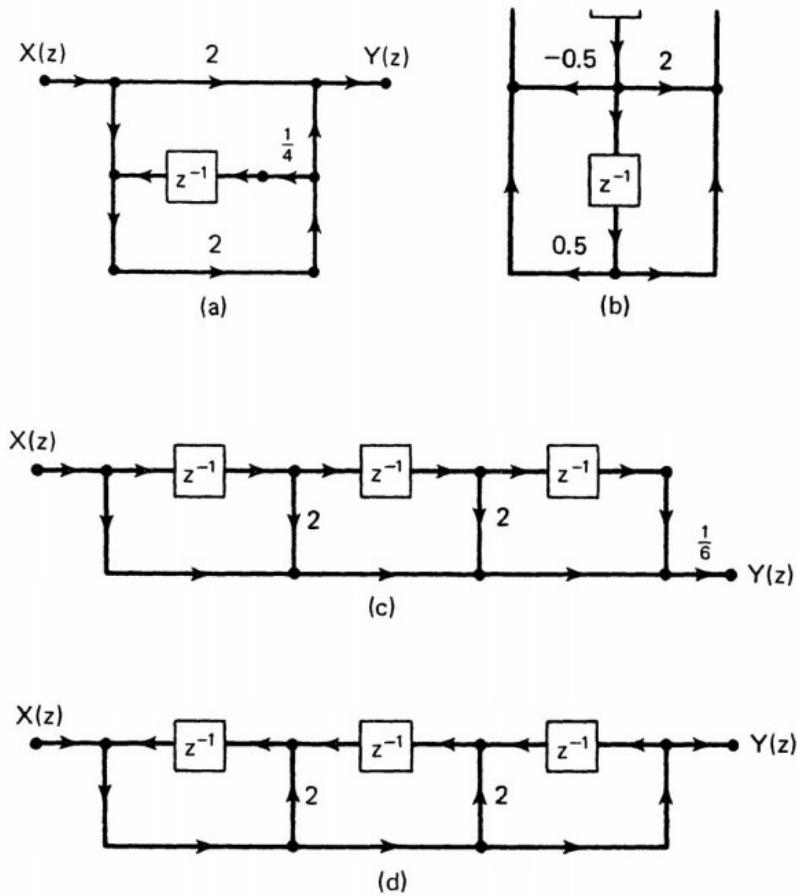
$$\begin{aligned}x_p(n) &= x(n) \quad \text{para } 0 \leq n \leq 5 \\x_p(6m+n) &= x(n) \quad \text{para todo entero } m\end{aligned}$$

- (c) Encuentre la DFT  $\tilde{X}_p(k)$  de la secuencia periódica  $x_p(n)$ .

11-16 Considere la secuencia

- (a) Encuentre la transformada z  $H_1(z)$  de la sucesión
- (b) Encuentre la DFT  $\tilde{H}(k)$  de la sucesión.
- (c) Con base en los resultados obtenidos en (b), encuentre la transformada z  $H_2(z)$  de la sucesión  $h(n)$ .
- (d) Compare  $H_1(z)$  y  $H_2(z)$  y comente.

11-17. Encuentre la función de transferencia y la respuesta de frecuencia de cada circuito que se muestra en la figura P11-17



**Fig. P11-17**

## 12. Diseño de filtros digitales

Como en el caso de los filtros analógicos, el diseño de filtros digitales involucra el proceso de encontrar funciones de transferencia apropiadas para cumplir con las especificaciones requeridas. Las especificaciones para los filtros digitales a menudo se dan en el dominio de la frecuencia. Se ha demostrado en (11-92) que la respuesta de frecuencia  $H(e^{j\theta})$  de un filtro digital es una función continua de  $\theta$  con periodo  $2\pi$  como

$$H(e^{j\theta}) = H(e^{j(\theta+m2\pi)}) \quad (12-1)$$

donde  $m$  es un número entero. El período normalmente se toma de  $-\pi$  a  $\pi$ . Esto implica que si  $H(e^{j\theta})$  se especifica para  $\theta$  desde  $-\pi$  hasta  $\pi$ , entonces  $H(e^{j\theta})$  se especifica para todo  $\theta$ . Escribiendo  $H(e^{j\theta})$  en la forma polar, tenemos

$$H(e^{j\theta}) = |H(e^{j\theta})| e^{-j\phi(\theta)} \quad (12-2a)$$

donde  $|H(e^{j\theta})|$  se llama la *función de magnitud* y  $\phi(\theta)$  definida por

$$\phi(\theta) \triangleq -\angle H(e^{j\theta}) \quad (12-2b)$$

se denomina ángulo de fase (retraso) del filtro. Como las funciones de magnitud son funciones pares,

$$|H(e^{j\theta})| = |H(e^{-j\theta})| \quad (12-3a)$$

y las funciones de fase son impares,

$$\phi(\theta) = -\phi(-\theta) \quad (12-3b)$$

basta con especificar la respuesta de frecuencia  $H(e^{j\theta})$  de un filtro digital para  $\theta$  desde  $\theta=0$  hasta  $\theta=\pi$  – a lo largo de la mitad superior del círculo unitario en el plano-z, como se muestra en la Fig. 12-1. Para ilustrar estos patrones repetitivos, los filtros selectivos de frecuencia de los filtros ideales de paso bajo, paso de banda, paso alto, rechazo de banda y paso total<sup>172</sup> tienen las funciones de magnitud que se muestran en la Fig. 12-2, y los filtros de fase lineal tienen la fase características que se muestran en la Fig. 12-3.

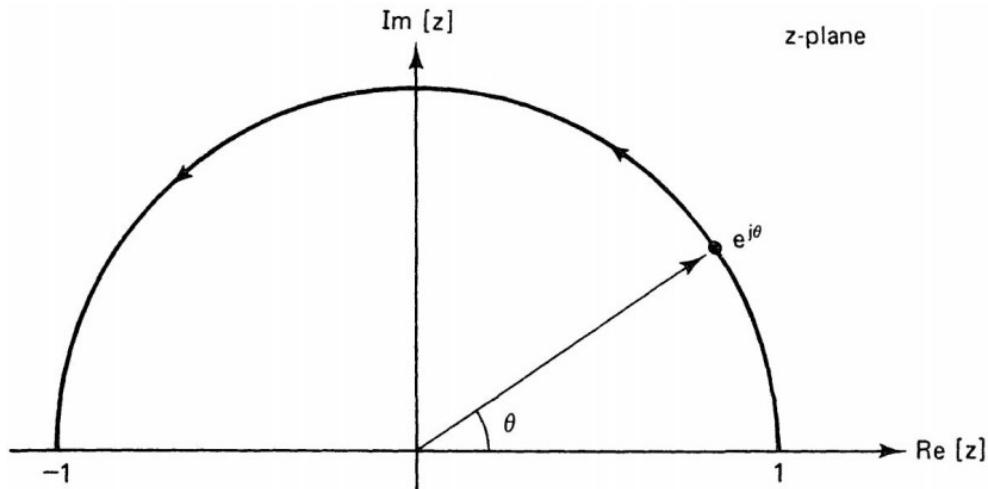


Fig. 12-1 La respuesta de frecuencia de un filtro digital se especifica a lo largo de la mitad superior del círculo unitario.

<sup>172</sup> Estrictamente hablando, un filtro digital de paso total es un filtro de fase en lugar de un filtro selectivo de frecuencia.

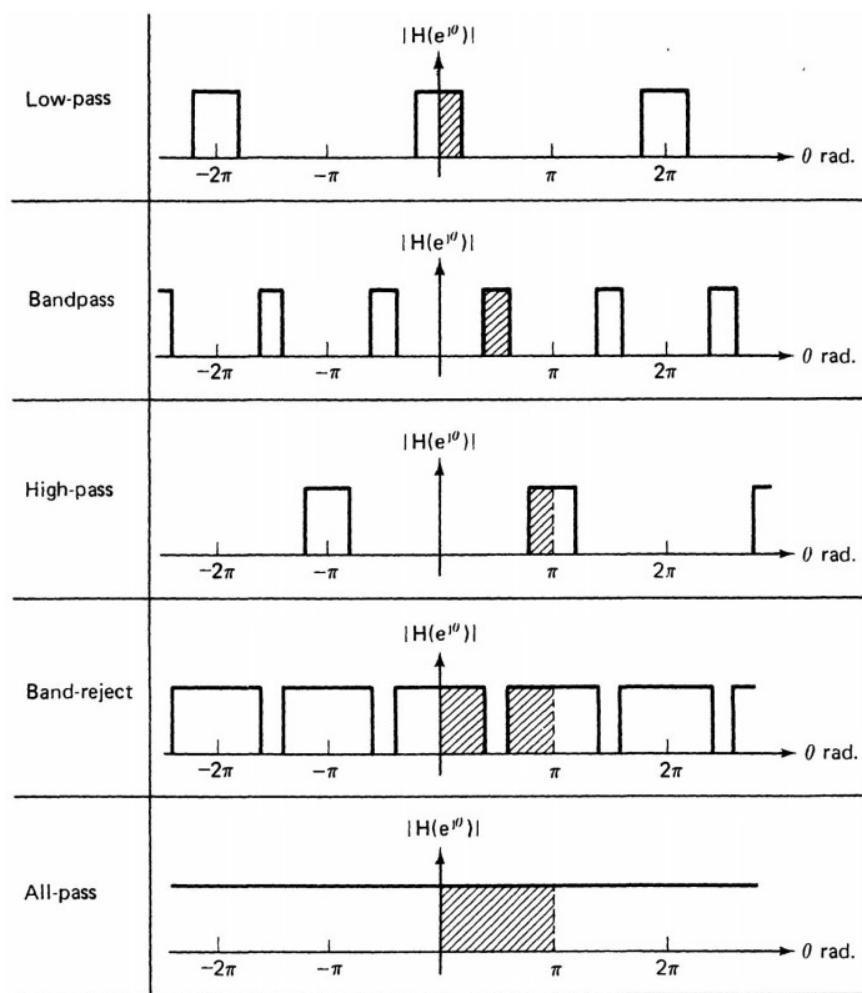


Fig. 12-2 Características de magnitud de los filtros ideales de paso bajo, paso de banda, paso alto, rechazo de banda y paso total.

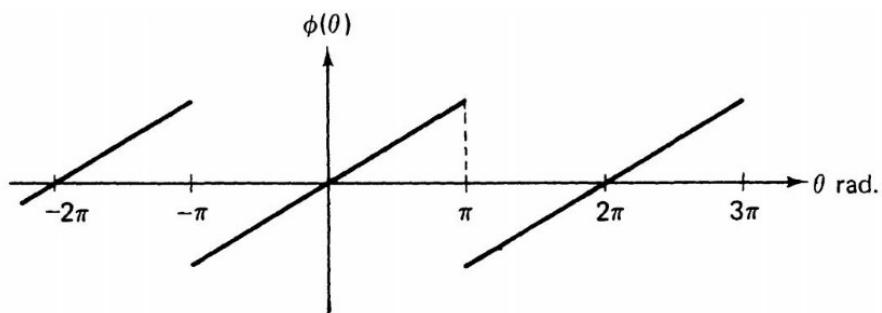


Fig. 12-3 Características de fase de filtros de fase lineal.

Al diseñar filtros, es más conveniente discutir la función de magnitud al cuadrado y la función de retardo de grupo en lugar de las funciones de magnitud y fase. La función de magnitud al cuadrado viene dada por<sup>173</sup>

$$|H(e^{j\theta})|^2 = H(z)H(z^{-1}) \Big|_{z=e^{j\theta}} \quad (12-4)$$

173 Suponemos que  $H(z)$  solo tiene coeficientes reales.

De (12-4), observamos que si

$$z_k \{ p_k \} = r_k e^{j\theta_k} \quad (12-5a)$$

es un cero{polo} de  $H(z)H(z^{-1})$  , entonces

$$\overline{z_k} \{ \overline{p_k} \} = \frac{1}{r_k} e^{-j\theta_k} \quad (12-5b)$$

es también un {polo} cero de  $H(z)H(z^{-1})$  . Como los ceros{polos} complejos deben aparecer en pares conjugados, concluimos que

$$\overline{z_k} \{ \overline{p_k} \} = r_k e^{-j\theta_k} \quad (12-5c)$$

y

$$\overline{z_k^{-1}} \{ \overline{p_k^{-1}} \} = \frac{1}{r_k} e^{j\theta_k} \quad (12-5d)$$

son ceros {polos} de  $H(z)H(z^{-1})$  . De (12-5), tenemos las siguientes conclusiones:

1. Si  $z_k = a$  es un {polo} cero real de entonces  $z_k^{-1} = a^{-1}$  es también un {polo} cero real de  $H(z)H(z^{-1})$  . En el caso particular cuando  $a = \pm 1$  , el {polo} cero es de multiplicidad par.
2. Si  $z_k = e^{j\theta_k}$  es un {polo} cero de  $H(z)H(z^{-1})$  , entonces  $z_k^{-1} = e^{-j\theta_k}$  es también es un {polo} cero de  $H(z)H(z^{-1})$  . Además, tanto  $z_k$  como  $z_k^{-1}$  son ceros {polos} de  $H(z)H(z^{-1})$  con multiplicidades pares.
3. Si  $z_k = r_k e^{j\theta_k}$  donde  $r_k \neq 1$  y  $\theta_k \neq 0$  o  $\pi$  , es un {polo} cero de  $H(z)H(z^{-1})$  , entonces  $r_k e^{-j\theta_k}$  ,  $1/r_k e^{j\theta_k}$  y  $1/r_k e^{-j\theta_k}$  son también ceros {polos} de  $H(z)H(z^{-1})$  .

Estas propiedades polo-cero de la función de magnitud al cuadrado de  $H(z)H(z^{-1})$  se ilustran en la Fig. 12-4.

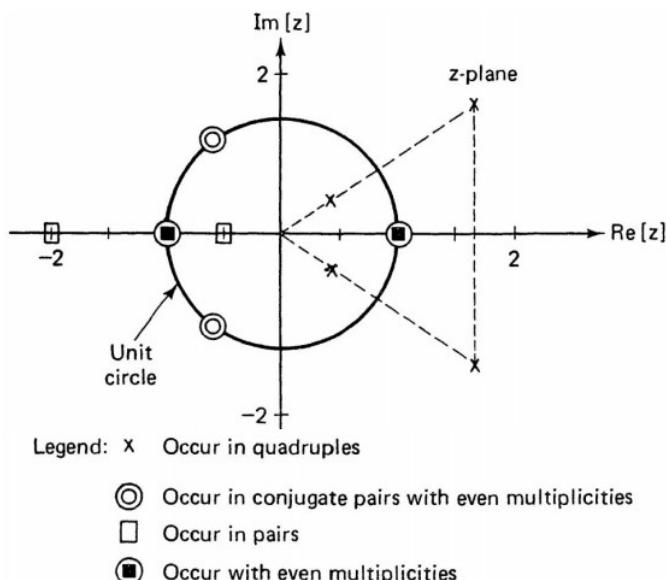


Fig. 12-4 Pole-zero properties of  $H(z)H(z^{-1})$ .

La función de retardo de grupo  $\tau(\theta)$  es una medida del retardo de la respuesta del filtro y está definida por

$$\tau(\theta) \triangleq \frac{d\phi(\theta)}{d\theta} \quad (12-6)$$

Una característica de retardo de grupo deseable de un filtro en general es aquella que se aproxima a una constante sobre las frecuencias de banda de paso del filtro.

El problema de diseñar filtros es encontrar una respuesta de frecuencia o función de transferencia tal que algunos aspectos de la respuesta del filtro cumplan con las especificaciones deseadas. Por lo tanto, el problema de diseño de filtros es básicamente un problema de aproximación matemática. Para progresar sistemáticamente, un problema de aproximación matemática se maneja convenientemente con un conjunto de funciones base. Este conjunto de funciones base proporciona una familia de funciones, una o más de las cuales es una solución del problema de aproximación. En el caso del filtro analógico analizado en el capítulo 8, las familias de funciones como las asociadas con los filtros Butterworth, Chebyshev, Chebyshev inverso, elíptico y Bessel son funciones racionales de la frecuencia compleja  $s$ . Se eligen estas familias porque en el caso del filtro analógico, tanto los circuitos pasivos como los activos solo pueden realizar funciones de transferencia en forma de función racional. En el caso del filtro digital, las funciones realizables son polinomios de  $z^{-1}$  así como funciones racionales de  $z^{-1}$ . Filtros digitales caracterizados por funciones de transferencia en forma de polinomio,

$$H(z) = a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_M z^{-M} \quad (12-7)$$

se denominan filtros digitales de respuesta de impulso finito (FIR). Por otro lado, los filtros digitales caracterizados por funciones de transferencia en forma de función racional,<sup>174</sup>

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^M a_i z^{-i}}{\sum_{k=0}^N b_k z^{-k}} \triangleq \frac{A(z^{-1})}{B(z^{-1})} \quad (12-8)$$

donde  $B(z^{-1})$  no es una constante, se denominan filtros digitales de respuesta de impulso infinito (IIR).<sup>175</sup> En el caso de FIR, no hay problema de estabilidad y causalidad, porque todos los filtros FIR son estables y causales. En el caso de IIR, el filtro digital es estable si todos los polos de  $H(z)$  de (12-8) están dentro del círculo unitario en el plano-z y causal si  $b_L$  es el primer coeficiente distinto de cero en el denominador (es decir,  $b_0=b_1=\dots=b_{L-1}=0$ ), entonces  $a_0=a_1=\dots=a_{L-1}=0$  en el numerador. Debido a que solo nos interesan los filtros causales, es conveniente suponer que  $b_0=1$ . Por lo tanto, las funciones de transferencia generales de los filtros digitales IIR tienen la forma de

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^M a_i z^{-i}}{1 + \sum_{k=1}^N b_k z^{-k}} \quad (12-9)$$

En este capítulo, analizamos las técnicas de diseño de filtros para los filtros digitales IIR y FIR.

<sup>174</sup> Para simplificar, supondremos a continuación que no hay factores comunes no triviales entre el numerador y el denominador de la función de transferencia de un filtro digital IIR. En otras palabras, el máximo común divisor de  $A(z^{-1})$  y  $B(z^{-1})$  en (12-8) es una constante.

<sup>175</sup> La razón detrás de estos nombres es que la secuencia de respuesta de impulso de (12-7) es una secuencia finita,  $h(n)=0$  para  $n>M$  y  $n<0$ , donde  $M$  es un número entero finito; la respuesta al impulso de (12-8) es una secuencia infinita.

## 12-1 Diseño de filtros digitales IIR

En el caso de los filtros digitales IIR, las funciones de transferencia tienen la forma de (12-9).

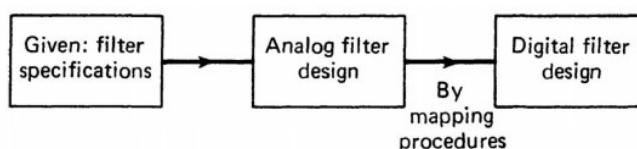
$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^M a_i z^{-i}}{1 + \sum_{k=1}^N b_k z^{-k}} \quad (12-9)$$

Observe que con  $z$  reemplazada por  $s$ , la (12-9) es una función de transferencia de un filtro analógico. Debido a las similitudes entre las funciones de transferencia de los filtros digitales IIR y las de los filtros analógicos, las técnicas más populares para diseñar filtros digitales IIR son, de alguna manera, versiones digitales de diseños de filtros analógicos. Estas técnicas requieren la construcción de procedimientos de mapeo simples para mapear diseños de filtros analógicos en diseños de filtros digitales IIR.<sup>176</sup> Esto significa que el diseño de un filtro digital IIR involucra los siguientes dos pasos:

**PASO 1.** Diseñe un filtro analógico obteniendo una función de transferencia  $\hat{H}(s)$  apropiada para cumplir con los requisitos de procesamiento de señales.<sup>177</sup>

**PASO 2.** Construya un procedimiento de mapeo para transformar  $\hat{H}(s)$  en una función de transferencia adecuada  $H(z)$ , lo que dará como resultado un diseño de filtro digital IIR que cumpla con las especificaciones.

Este procedimiento de dos pasos para diseñar filtros digitales IIR se ilustra en la Fig. 12-5. Este procedimiento es más útil para el diseño de filtros estándar como filtros de paso bajo, paso de banda, paso alto y rechazo de banda, para los cuales se dispone de un considerable conocimiento sobre filtrado analógico. Las técnicas de diseño de filtros analógicos se analizaron extensamente en el capítulo 8. Para completar el procedimiento de diseño de la Fig. 12-5, en esta sección analizamos varios métodos para implementar el paso 2.



**Fig. 12-5** A two-step procedure for designing IIR digital filters.

Debido a que los filtros analógicos del Paso 1 están diseñados para cumplir con los requisitos de procesamiento de señales, debemos asegurarnos de que los filtros digitales resultantes conserven las propiedades deseables de los filtros analógicos, incluidas las características de frecuencia, la magnitud y el comportamiento de fase de los filtros analógicos. Como consecuencia, es deseable que los procedimientos de mapeo en el Paso 2 satisfagan las siguientes dos condiciones:<sup>178</sup>

<sup>176</sup> Consulte el Capítulo 8 para conocer algunas técnicas de diseño de filtros analógicos.

<sup>177</sup> En este capítulo, usamos el símbolo " $\hat{}$ " para denotar variables asociadas con filtros analógicos y señales de tiempo continuo.

<sup>178</sup> Tenga en cuenta que es deseable que cada procedimiento de mapeo en el Paso 2 satisfaga estas dos "condiciones". La condición 2 es un requisito absolutamente necesario. Sin embargo, la Condición 1 no es un requisito obligatorio para que un procedimiento de mapeo sea útil. Muy a menudo, un procedimiento de mapeo útil solo puede satisfacer la Condición 1 en porciones del círculo unitario en el plano-z.

**CONDICIÓN 1.** El eje imaginario del plano-s ( $s = j\omega$  para  $-\infty < \omega < \infty$ ) se mapea en el círculo unitario del plano-z ( $z = e^{j\theta}$  para  $-\pi < \theta \leq \pi$ ), como se muestra en Fig. 12-6(a). Notacionalmente, esta condición está representada por<sup>179</sup>

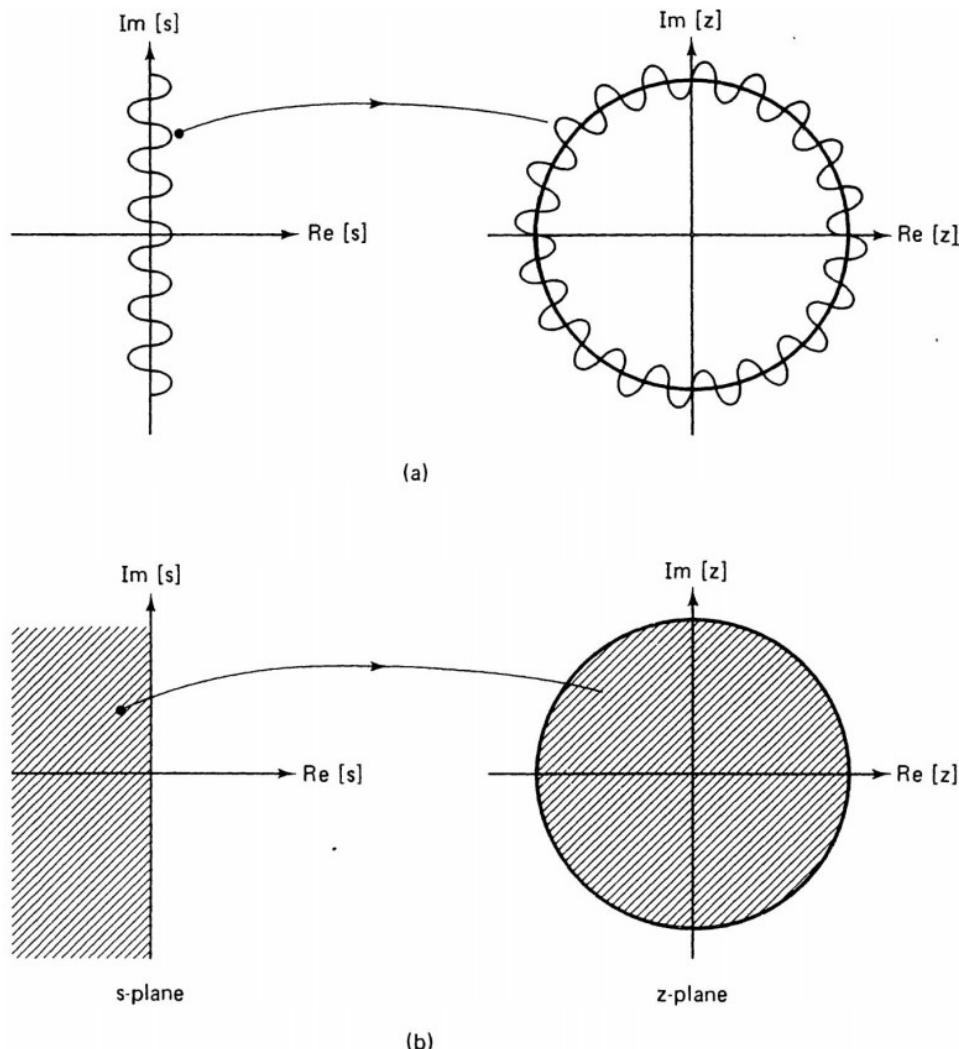
$$\{s = j\omega | -\infty < \omega < \infty\} \rightarrow \{z = e^{j\theta} | -\pi < \theta \leq \pi\} \quad (12-10a)$$

Esta condición es necesaria para preservar las características de frecuencia de los filtros analógicos.

**CONDICIÓN 2.** El plano-s de LH ( $\text{Re}[s] < 0$ ) se mapea en el interior del círculo unitario del plano-z ( $|z| < 1$ ), como se muestra en la Fig. 12-6(b). Notacionalmente, esta condición está representada por

$$\{s | \text{Re}[s] < 0\} \rightarrow \{z | |z| < 1\} \quad (12-10b)$$

Esta condición es necesaria para preservar las propiedades de estabilidad de los filtros analógicos. En otras palabras, requerimos los procedimientos de mapeo para mapear filtros analógicos estables a filtros digitales estables.



**Fig. 12-6** Two desirable requirements for the mapping procedures in Fig. 12-5.

179 El símbolo “ $\rightarrow$ ” representa la frase “está mapeado a”.

### 12-1-1. Técnicas de Integración Numérica

Un método para obtener un diseño de filtro digital a partir de un diseño de filtro analógico es mediante técnicas de integración numérica, donde una derivada se aproxima mediante algunas diferencias finitas. El efecto resultante es reemplazar una ecuación diferencial (característica de un filtro analógico) con una ecuación de diferencias (característica de un filtro digital). Esta acción da lugar a un mapeo de la variable compleja  $s$  en la función de transferencia de un filtro analógico a la variable compleja  $z$  en la función de transferencia de un filtro digital

$$s = f(z) \quad (12-11)$$

Claramente, diferentes métodos de integración numérica darán lugar a diferentes funciones de mapeo de (12-11) y, por lo tanto, los filtros digitales resultantes serán diferentes. En esta sección, analizamos el caso más simple: **la aproximación de Euler**.

El método de Euler aproxima la derivada temporal de una función de tiempo continuo  $d\hat{y}(t)/dt$  por una diferencia finita como

$$\left. \frac{d\hat{y}(t)}{dt} \right|_{t=nT} = \frac{y(n) - y(n-1)}{T} \quad (12-12a)$$

donde  $T$  es el período de muestreo y

$$y(k) \triangleq \hat{y}(t)|_{t=kT} \quad (12-12b)$$

para todos los  $k$  enteros. En términos de operadores, (12-12) da

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{T} \triangleq f(z) \quad (12-13)$$

Por el contrario, (12-13) implica que

$$z = \frac{1}{1 - sT} \quad (12-14)$$

**Ejemplo 12-1** Considere un filtro de Bessel de paso bajo con una función de transferencia

$$\hat{H}(s) = \frac{K}{s^2 + 3s + 3} \quad (12-15)$$

Encuentre el filtro digital correspondiente por el método de aproximación de Euler.

**Solución:** De (12-13), el filtro digital correspondiente tiene una función de transferencia dada por

$$\begin{aligned} H(z) &= \hat{H}(s)|_{s=f(z)=(1-z^{-1})/T} \\ &= \frac{K}{\left(\frac{1-z^{-1}}{T}\right)^2 + 3\left(\frac{1-z^{-1}}{T}\right) + 3} \\ &= \frac{KT^2}{(1-2z^{-1}+z^{-2}) + 3T(1-z^{-1}) + 3T^2} \\ &= \frac{KT^2}{z^{-2} - (2+3T)z^{-1} + (1+3T+3T^2)} \end{aligned} \quad (12-16)$$

Observe que también podemos llegar al (12-16) realizando la aproximación básica de las derivadas de la siguiente manera:

Sean  $\hat{Y}(s)$  y  $\hat{X}(s)$ , respectivamente, la salida y la entrada del filtro de Bessel. Entonces (12-15) da

$$(x^2+3s+3)\hat{Y}(s)=k\hat{X}(s) \quad (12-17a)$$

Por lo tanto, la ecuación diferencial que caracteriza el filtro de Bessel analógico está dada por

$$\frac{d^2\hat{y}(t)}{dt^2} + 3\frac{d\hat{y}(t)}{dt} + 3\hat{y}(t) = K\hat{x}(t) \quad (12-17b)$$

Con

$$y(n) \triangleq \hat{y}(t)|_{t=nT} \quad (12-18a)$$

y

$$x(n) \triangleq \hat{x}(t)|_{t=nT} \quad (12-18b)$$

la aproximación de Euler de derivadas da

$$\frac{d\hat{y}}{dt}\Big|_{t=nT} \frac{y(n)-y(n-1)}{T} \quad (12-18c)$$

$$\frac{d\hat{y}}{dt}\Big|_{t=(n-1)T} \frac{y(n-1)-y(n-2)}{T} \quad (12-18d)$$

y

$$\begin{aligned} \frac{d^2\hat{y}}{dt^2}\Big|_{t=nT} &= \frac{\frac{d\hat{y}}{dt}\Big|_{t=nT} - \frac{d\hat{y}}{dt}\Big|_{t=(n-1)T}}{T} \\ &= \frac{\frac{y(n)-y(n-1)}{T} - \frac{y(n-1)-y(n-2)}{T}}{T} \quad (12-18e) \\ &= \frac{y(n)-2y(n-1)+y(n-2)}{T^2} \end{aligned}$$

Sustituyendo (12-18) en (12-17b), obtenemos

$$\frac{1}{T^2}[y(n)-2y(n-1)+y(n-2)] + \frac{3}{T}[y(n)-y(n-1)] + 3y(n) = Kx(n)$$

o

$$(1+3T+3T^2)y(n) - (2+3T)y(n-1) + y(n-2) = KT^2x(n) \quad (12-19)$$

Tomando las transformadas z de (12-19), obtenemos la función de transferencia del filtro digital resultante como

$$[(1+3T+3T^2) - (2+3T)z^{-1} + z^{-2}]Y(z) = KT^2X(z)$$

o

$$H(z) \triangleq \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{KT^2}{z^{-2} - (2+3T)z^{-1} + (1+3T+3T^2)} \quad (12-20)$$

En dc cuando  $\theta=0$ , tenemos

$$z^{-1} = e^{-j\theta} = 1 \quad (12-21a)$$

y (12-20) da

$$H(e^{-j\theta}) = \frac{K}{3} \quad (12-21b)$$

Es decir, la ganancia dc del filtro digital resultante de (12-20) es idéntica a la ganancia dc del filtro analógico original de (12-15).

### Resolución Matlab – Ejemplo 12-1

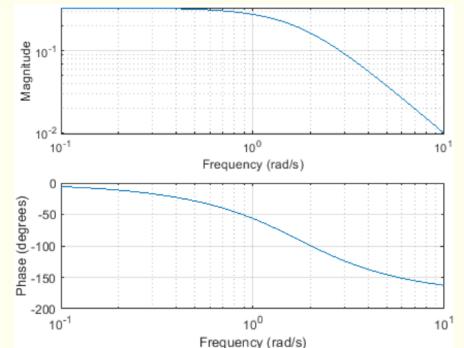
```
clear all; clc;

% función de transferencia - bessel
syms s, syms K 'real';
Hk(s)=K/(s^2+3*s+3)
```

```
% dando un valor a K.
H(s)=subs(Hk(s),K=sym(1));
```

```
% respuesta en frecuencia s
[B,A]=numden(H(s));
b= sym2poly(collect(B));
a= sym2poly(collect(A));
w=logspace(-1,1);
clf, freqs(b,a,w);
```

$$H_k(s) = \frac{K}{s^2 + 3s + 3}$$



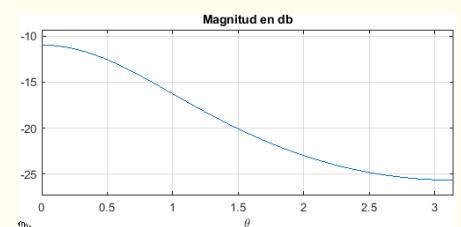
```
% Transformación por Integración numérica - método de
% euler
syms z, syms T 'real';
HzT(z)=subs( H(s), s=(1-z^-1)/T) ;
HzT(z)=collect(HzT(z), z^-1)
```

$$H_{zT}(z) = \frac{T^2}{\frac{1}{z^2} + \frac{-3T - 2}{z} + 3T^2 + 3T + 1}$$

```
% periodo de muestreo;
Hz(z)=subs(HzT(z), T=sym(1))
```

$$H_z(z) = \frac{1}{\frac{1}{z^2} - \frac{5}{z} + 7}$$

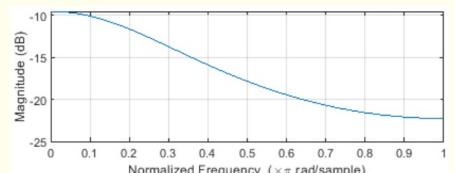
```
% respuesta en frecuencia
syms theta 'real';
clf; ezplot(10*log(abs(Hz(exp(j*theta)))), [0,pi]),
title('Magnitud en db'); grid on;
```



```
% respuesta en frecuencia
[Bz,Az]=numden(Hz(z));
bz=sym2poly(Bz); az=sym2poly(Az);
clf; freqz(bz, az)

%numerator = [1,0,0];
%denominator = [1,2,3];
%ts = 0.1;
```

```
%sys = tf(bz,az,ts,'Variable','z^-1')
%freqz(bz, az,2048)
```



Observe que el filtro digital de (12-20) es solo una aproximación al filtro analógico de (12-15). Para considerar la calidad de esta aproximación, examinemos las dos condiciones de (12-10) para el procedimiento de mapeo de Euler. De acuerdo con (12-14), el eje imaginario del plano-s se asigna a

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{1-j\omega T} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(j\omega T) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(j\omega T)}{1-j\omega T} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left( \frac{1+j\omega T}{1-j\omega T} \right) \end{aligned}$$

o

$$\begin{aligned} z - \frac{1}{2} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1+j\omega T}{1-j\omega T} \right) \left( \frac{1+j\omega T}{1+j\omega T} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1 - (\omega T)^2 + 2j\omega T}{1 + (j\omega T)^2} \right] \\ &= \frac{1}{2} \frac{\sqrt{[1 - (\omega T)^2]^2 + [2\omega T]^2}}{1 + (\omega T)^2} e^{j \tan^{-1} \frac{2\omega T}{1 - (\omega T)^2}} \\ &= \frac{1}{2} \left[ e^{j \tan^{-1} \frac{2\omega T}{1 - (\omega T)^2}} \right] \end{aligned} \quad (12-22)$$

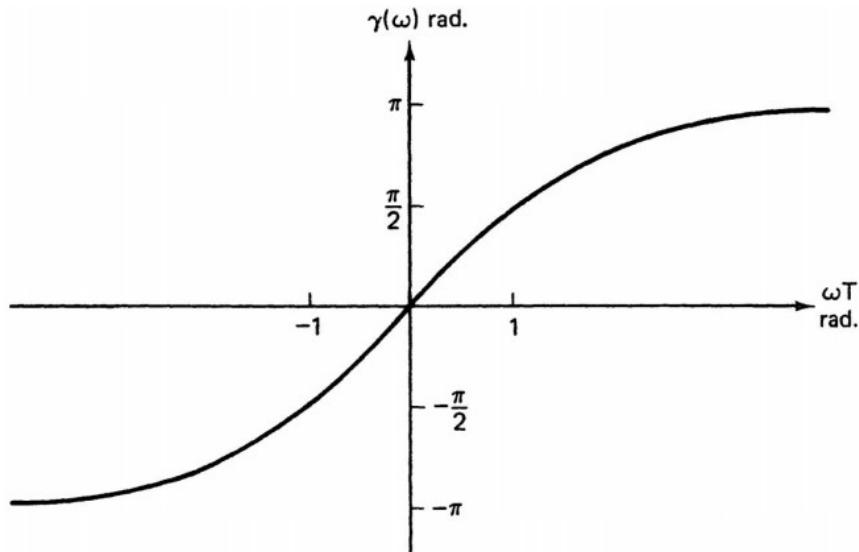
De (12-22), concluimos que

$$\left| z - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2} \quad \text{para todo } \omega \quad (12-23a)$$

y el ángulo de fase  $\gamma(\omega)$  de  $[z - (1/2)]$  viene dado por

$$\gamma(\omega) \triangleq \tan^{-1} \frac{2\omega T}{1 - (\omega T)^2} \quad (12-23b)$$

Como se muestra en la Fig. 12-7,  $\gamma(\omega)$  va desde  $-\pi$  a  $\pi$  como también  $\omega$  va desde  $-\infty$  a  $\infty$ .



**Fig. 12-7** The phase characteristics of  $\gamma(\omega)$  of (12-23b).

Esto implica que la imagen del eje imaginario del plano-s es un círculo en el plano-z con radio  $1/2$  y centrado en  $z=1/2$ , como se muestra en la Fig. 12-8. Cuándo

$$\operatorname{Re}[s] = \operatorname{Re}[\sigma + j\omega] = \sigma < 0 \quad (12-24)$$

el procedimiento de mapeo de (12-14) da

$$z = \frac{1}{1 - \sigma T + j\omega T}$$

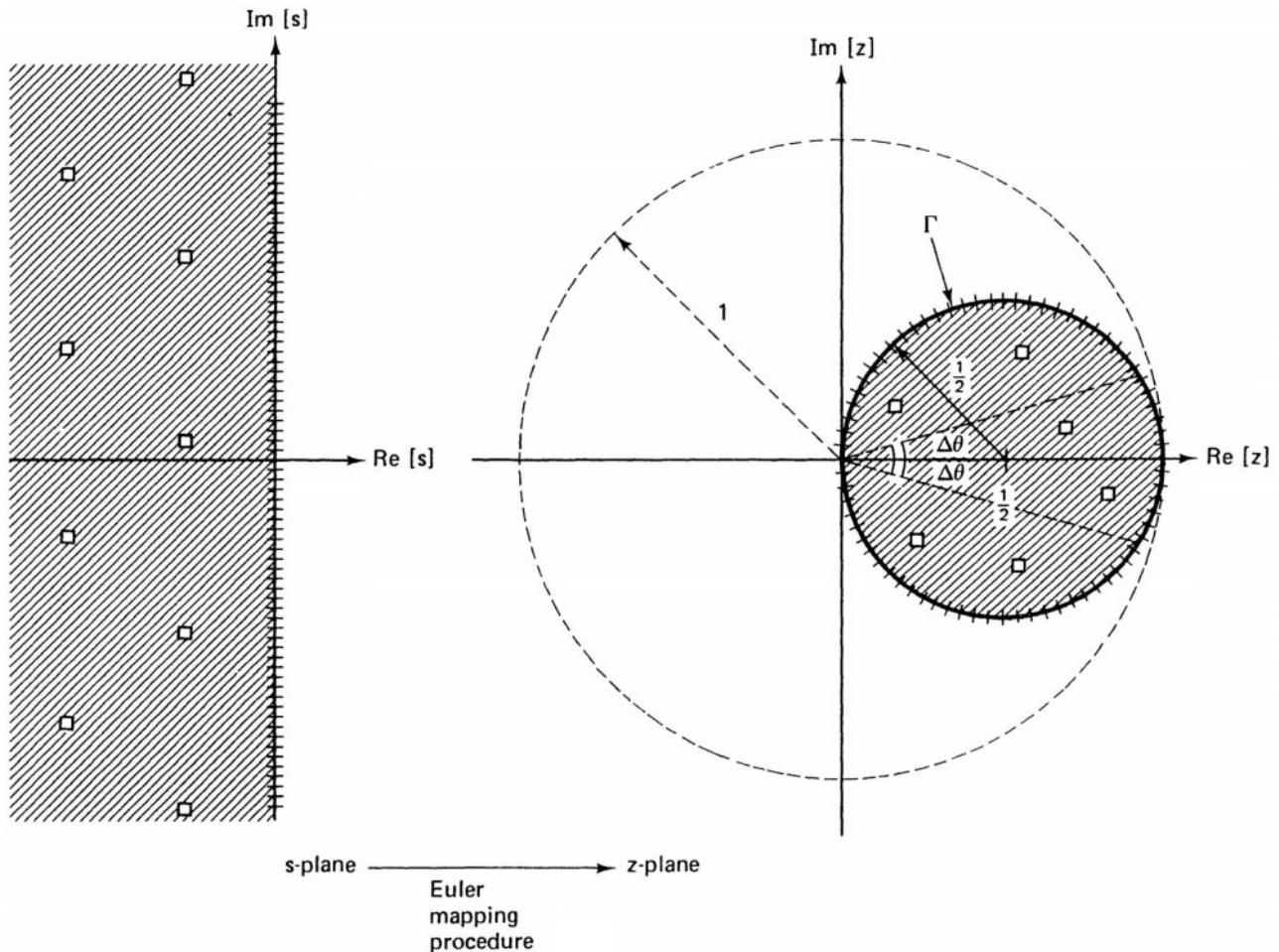
y por lo tanto,

$$|z| = \frac{1}{\sqrt{(1 - \sigma T)^2 + (\omega T)^2}} \leq \frac{1}{|1 - \sigma T|} \leq 1 \quad (12-25)$$

Esto significa que el plano-s de LH se mapea en el círculo unitario del plano-z.<sup>180</sup> Por lo tanto, se satisface la Condición 2 de (12-10b).

De la Fig. 12-8, se cumple la condición 2 de (12-10b), pero la Condición 1 de (12-10a) no se cumple por completo. Sin embargo, para  $|\theta|$  pequeño, como  $|\theta| \leq \Delta\theta$  en la Fig. 12-8, el procedimiento de mapeo de (12-13) cumple bastante bien la Condición 1. Por lo tanto, el procedimiento de mapeo de Euler de (12-13) dará resultados satisfactorios para operaciones de baja frecuencia y filtros de paso bajo. En otras palabras, el filtro digital de paso bajo resultante obtenido por el procedimiento de mapeo de Euler a partir de un filtro analógico de paso bajo tendrá aproximadamente las mismas características de frecuencia de banda de paso que el filtro analógico de paso bajo original, siempre que el período de muestreo  $T$  sea suficientemente pequeño.

<sup>180</sup> Puede demostrarse que el plano-s LH se representa en un círculo  $r$  con radio  $1/2$  y centrado en  $z=1/2$ , como se muestra en la Fig. 12-8.



**Fig. 12-8** Results of Euler mapping procedure between the *s*-plane and the *z*-plane.

Si, en lugar de la simple aproximación de Euler de (12-12), se approxima una derivada temporal mediante una suma ponderada de diferencias finitas de orden superior, como<sup>181</sup>

$$\left. \frac{d \hat{y}(t)}{dt} \right|_{t=nT} = \frac{1}{T} \sum_{k=0}^L \alpha_k y(n-k) \quad (12-26)$$

donde  $L$  es un entero positivo, entonces el procedimiento de mapeo viene dado por

$$s = \frac{1}{T} \sum_{k=0}^L \alpha_k z^{-k} \quad (12-27)$$

En este caso, se puede demostrar que el procedimiento de mapeo de (12-27) satisfará la Condición 2 de (12-10b) pero no la Condición 1 de (12-10a). De hecho, la región o el rango de valores de  $\theta$  donde la Condición 1 se cumple aproximadamente disminuye a medida que  $L$ , el orden de aproximación, aumenta.<sup>182</sup> Esto significa que cualquier aproximación de derivadas temporales con un orden mayor que el de Euler no es práctica y no producirá buenos resultados en general, excepto en frecuencias digitales extremadamente bajas.

<sup>181</sup> Con  $L=1$ ,  $\alpha_0=\alpha_1=1$ , y  $\alpha_k=0$  para  $k>1$ , obtenemos la aproximación de Euler.

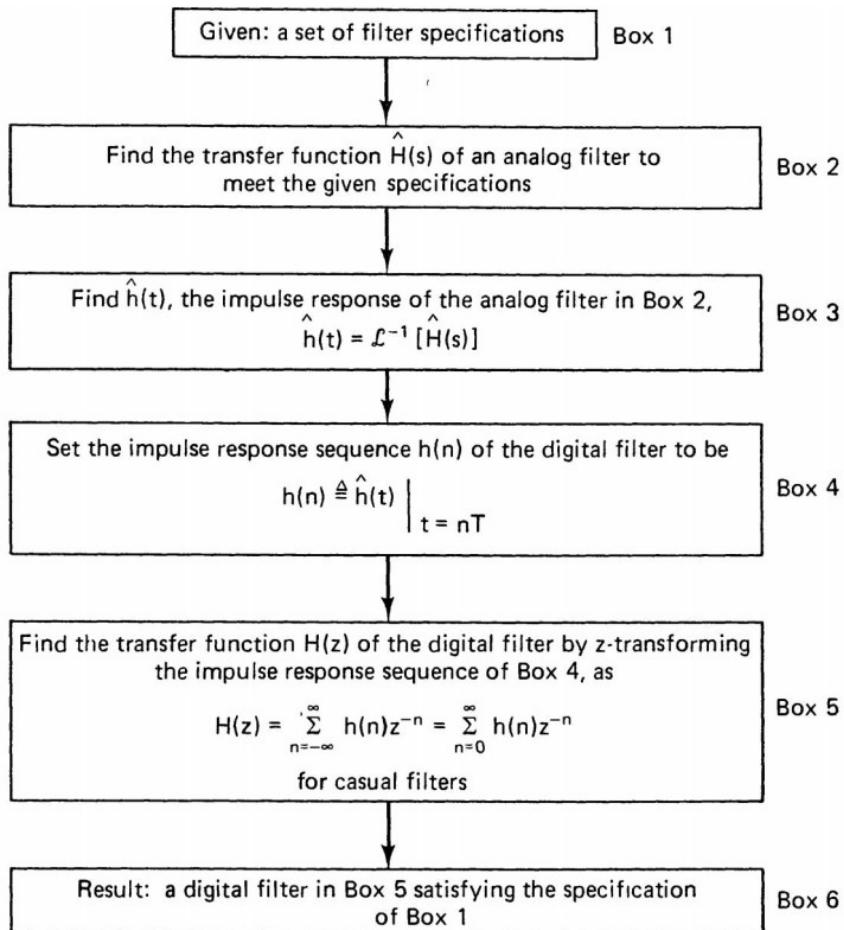
<sup>182</sup> Ver Referencia [12].

### 12-1-2. Transformación invariante de impulso

Un procedimiento de mapeo para obtener filtros digitales a partir de filtros analógicos se denomina transformación invariante de impulso. Este procedimiento asegura que la respuesta al impulso  $h(n)$  del filtro digital resultante sea la versión muestrada de la respuesta al impulso  $\hat{h}(t)$  de su correspondiente filtro analógico definiendo

$$h(n) \triangleq \hat{h}(t) \Big|_{t=nT} \quad (12-28)$$

donde  $T$  es el período de la muestra. En la Fig. 12-9 se muestra un procedimiento de diseño para este método.



**Fig. 12-9** A design procedure for the impulse invariant transformation method.

Para ver cómo opera el método de transformación invariante de impulso, realicemos una expansión en fracción parcial de la función de transferencia  $H(s)$  del filtro analógico deseado como

$$\hat{H}(s) = \frac{\sum_{i=0}^M \hat{a}_i s^i}{\sum_{i=0}^N \hat{b}_i s^i} = \sum_{i=1}^N \frac{\xi_i}{s - \hat{p}_i} \quad (12-29)$$

donde hemos supuesto que  $N > M \geq 0$ ,  $b_N \neq 0$ ,  $b_0 \neq 0$  y que todos los polos son distintos. Además, para cada  $i=1,2,\dots,N$ ,  $\hat{p}_i$  es el  $i$ -ésimo polo del filtro analógico y  $\xi_i$  es el residuo

de  $\hat{H}(s)$  en el polo  $\hat{p}_i$ . La respuesta al impulso  $\hat{h}(t)$  del filtro analógico se puede obtener tomando la transformada inversa de Laplace de (12-29). El resultado es

$$\hat{h}(t) = \sum_{i=1}^N \xi_i e^{\hat{p}_i t} \hat{u}(t) \quad (12-30)$$

donde  $\hat{u}(t)$  representa la función escalón unitario. Sustituyendo (12-30) en (12-28) se obtiene la secuencia de respuesta de impulso  $h(n)$  del filtro digital correspondiente

$$h(n) \triangleq \hat{h}(t)|_{t=nT} = \sum_{i=1}^N \xi_i e^{\hat{p}_i nT} u(n) \quad (12-31)$$

donde  $u(n)$  representa la secuencia de pasos unitario. La función de transferencia  $H(z)$  del filtro digital resultante puede obtenerse encontrando la transformada z de la secuencia de respuesta al impulso de (12-31) como

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} h(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^N \xi_i e^{\hat{p}_i nT} z^{-n} \\ &= \sum_{i=1}^N \xi_i \sum_{n=0}^{\infty} (e^{\hat{p}_i T} z^{-1})^n \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{\xi_i}{1 - z^{-1} e^{\hat{p}_i T}} \end{aligned} \quad (12-32)$$

Al comparar (12-29) y (12-32), la relación de mapeo entre filtros analógicos y digitales en el método de transformación invariante de impulso viene dada por

$$\frac{\xi_i}{s - \hat{p}_i} \rightarrow \frac{\xi_i}{1 - z^{-1} e^{\hat{p}_i T}} \triangleq \frac{\xi_i}{1 - p_i z^{-1}} \quad (12-33b)$$

donde

$$p_i \triangleq e^{\hat{p}_i T} \quad (12-33b)$$

es el polo del filtro digital correspondiente al polo del filtro analógico en  $\hat{p}_i$ .

**Ejemplo 12-2** Suponga que el filtro analógico deseado tiene una función de transferencia dada por

$$\hat{H}(s) = \frac{2s}{(s+1)(s+2)} \quad (12-34)$$

Encuentre  $H(z)$  la función de transferencia del filtro digital correspondiente, por el método de invariancia de impulso.

**Solución:** Escribiendo  $\hat{H}(s)$  de (12-34) en forma de fracciones parciales, tenemos

$$\hat{H}(s) = \frac{-2}{s+1} + \frac{4}{s+2} \quad (12-35a)$$

donde

$$\hat{p}_1 = -1 \quad y \quad \hat{p}_2 = -2 \quad (12-35b)$$

Por (12-33),  $H(z)$  viene dada por

$$H(z) = \frac{-2}{1 - z^{-1} e^{-T}} + \frac{4}{1 - z^{-1} e^{-2T}} \quad (12-36a)$$

donde es el período de la muestra. Simplificando (12-36a), obtenemos

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{-2(1-z^{-1}e^{-2T})+4(1-z^{-1}e^{-T})}{(1-z^{-1}e^{-T})+(1-z^{-1}e^{-2T})} \\ &= \frac{2+(2e^{-T}-4e^{-2T})z^{-1}}{1-(e^{-T}+e^{-2T})z^{-1}+e^{-3T}z^{-2}} \end{aligned} \quad (12-36b)$$

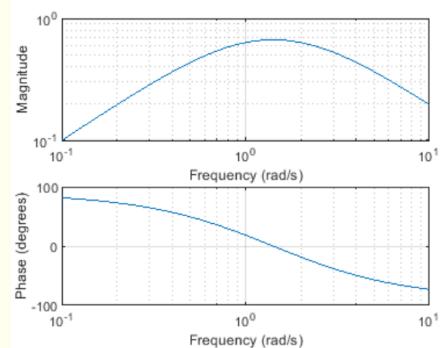
### Resolución Matlab – Ejemplo 12-2

```
clear all; clc;

% función de transferencia - bessel
syms s;
H(s)=(2*s)/((s+1)*(s+2))

% respuesta en frecuencia s
[B,A]=numden(H(s));
b= sym2poly(collect(B));
a= sym2poly(collect(A));
w=logspace(-1,1);
clf, freqs(b,a,w);
```

$$H(s) = \frac{2s}{(s+1)(s+2)}$$



```
% H(s) en fracciones parciales
[r,p,k]=residue(b,a);
H(s) = sum(r(1:end)./(s-p(1:end)))
```

$$H(s) = \frac{4}{s+2} - \frac{2}{s+1}$$

```
% transformación invariante al impulso
syms z, syms T 'real';
HzT(z) = sum(r(1:end)./(1-exp(p(1:end)*T)*z^-1))
```

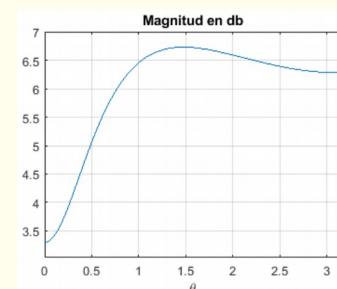
$$HzT(z) = \frac{2}{e^{-T}-1} - \frac{4}{e^{-2T}-1}$$

```
HzT(z)=collect(HzT(z),z^-1)
```

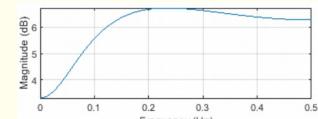
$$Hz(z) = \frac{2e^3 + \frac{2e-4e^2}{z}}{e^3 - \frac{e+e^2}{z} + \frac{1}{z^2}}$$

```
% periodo de muestreo;
Hz(z)=subs(HzT(z),T=sym(1))
```

```
% respuesta en frecuencia
syms theta 'real';
clf; ezplot(10*log(abs(Hz(exp(j*theta)))),[0,pi]),
title('Magnitud en db'); grid on;
```



```
% respuesta en frecuencia
[Bz,Az]=numden(Hz(z));
bz=sym2poly(Bz); az=sym2poly(Az);
clf; freqz(bz, az)
```



**Ejemplo 12-3** Un filtro Chebyshev de paso bajo de segundo orden normalizado con un rizado de banda de paso de 3 dB tiene una función de transferencia dada por

$$\hat{H}(s) = \frac{0.5011887}{s^2 + 0.6448996s + 0.7079478} \quad (12-37)$$

Encuentre  $H(z)$  la función de transferencia del filtro digital correspondiente, mediante el método de invariancia de impulso.

**Solución:** Escribiendo  $\hat{H}(s)$  de (12-37) en forma factorizada, tenemos

$$\begin{aligned} \hat{H}(s) &= \frac{0.5011887}{(s+0.3224498+j0.7771576)(s+0.3224498-j0.7771576)} \\ &= \frac{-j0.3224498}{(s+0.3224498+j0.7771576)} + \frac{j0.3224498}{(s+0.3224498-j0.7771576)} \end{aligned} \quad (12-38)$$

Aplicando (12-33) a (12-38), obtenemos

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{-j0.3224498}{1-z^{-1}e^{(-0.3224498-j0.7771576)T}} \\ &\quad + \frac{j0.3224498}{1-z^{-1}e^{(-0.3224498+j0.7771576)T}} \\ &= \frac{[-2e^{-0.3224498T}0.3224498 \cdot \sin(0.7771576T)]z^{-1}}{1-2z^{-1}e^{-0.3224498T} \cos(0.7771576T) + e^{-0.6448996T}z^{-2}} \end{aligned} \quad (12-39)$$

Cuando  $T=1$  seg., la (12-39) viene dada por

$$H_{0.1}(z) = \frac{-0.3275899z^{-1}}{1-1.0328240z^{-1}+0.5247152z^{-2}} \quad (12-40)$$

y cuando  $T=0.1$  seg., la (12-39) se convierte en

$$H_{0.1}(z) = \frac{-0.0484797z^{-1}}{1-1.9306935z^{-1}+0.9375455z^{-2}} \quad (12-41)$$

Las características de magnitud de (12-40) y (12-41) se muestran en la Fig. 12-10.

Recuerda que  $|H(e^{j\theta})|$  es una función periódica de  $\theta$  con periodo  $2\pi$  y que  $|\hat{H}(j\omega)|$  no es una función periódica. El efecto de estas distintas propiedades básicas de los filtros digitales y analógicos es que las características de magnitud del filtro digital resultante se apartarán de las del filtro analógico original cuando las curvas lleguen a  $\theta=\pi$  o  $\omega=\pi/T$ , donde  $T$  es el periodo de muestreo. Si el periodo de muestreo es lo suficientemente pequeño, la desviación comenzará en un punto cercano a  $\theta=\pi$ . De lo contrario, la desviación comenzará mucho antes de que las curvas alcancen el punto  $\theta=\pi$ . Un ejemplo de ello se muestra en la Fig. 12-10. Observe que las frecuencias de corte del filtro digital están en

$$\theta_{C1,2} = \pm\omega_c T = \pm T \text{ rad.} \quad (12-42a)$$

donde hemos utilizado la información de que la frecuencia de corte analógica está en  $\omega_c = 1 \text{ rad./seg.}$ . Estas frecuencias de corte se repetirán a partir de entonces en

$$\theta_{C1,2} \pm k 2\pi \text{ rad.} \quad (12-42b)$$

donde  $k$  es cualquier número entero.

**Resolución Matlab – Ejemplo 12-3**

```

clear all; clc;

% función de transferencia
syms s;
H(s)=0.5011887/(s^2+0.6448996*s+0.7079478);

% respuesta en frecuencia s
[B,A]=numden(H(s));
b= sym2poly(collect(B));
a= sym2poly(collect(A));
w=logspace(-1,1);
clf, freqs(b,a,w);

% Integración numérica - método de euler
syms z, syms T 'real';
HzT(z)=subs( H(s), s=(1-z^-1)/T) ;

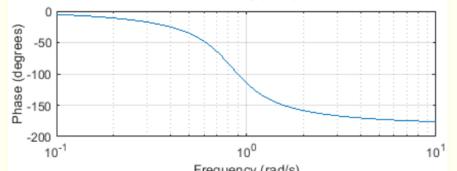
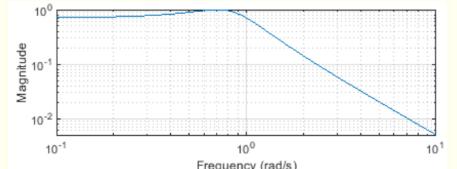
HzT(z)=collect(HzT(z),z^-1)

% periodo de muestreo;
Hz(z)=subs(HzT(z),T=sym(1))

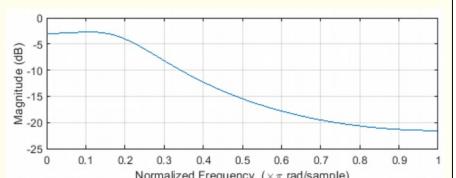
% respuesta en frecuencia
syms theta 'real';
clf; ezplot(20*log10(abs(Hz(exp(j*theta)))),[0,pi]);
title('Magnitud en db'); grid on;

% respuesta en frecuencia
[Bz,Az]=numden(Hz(z));
bz=sym2poly(Bz); az=sym2poly(Az);
clf; freqz(bz, az)

```



$$Hz(z) = \frac{4514306485124607}{z^2} - \frac{23823137705984748}{z} + 21192565347799281$$

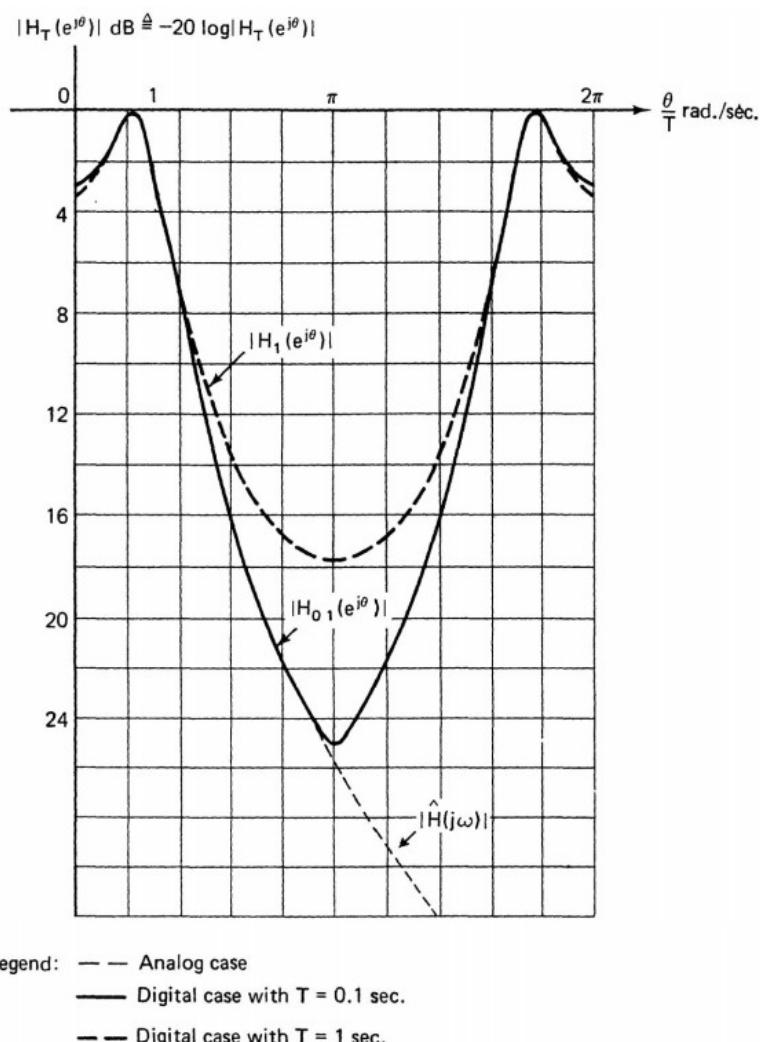


Debido a que la secuencia de respuesta de impulso  $h(n)$  del filtro digital obtenida por la técnica de invariancia de impulso es en realidad una versión muestrada de la respuesta de impulso  $\hat{h}(n)$  del filtro analógico, la respuesta de frecuencia del filtro digital es una versión distorsionada (aliased) de la respuesta de frecuencia del filtro analógico, como se indica en (11-115) y se repite aquí por conveniencia:

$$H(e^{j\theta}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{H}\left[j\left(\frac{\theta}{T} + \frac{2\pi k}{T}\right)\right] \quad (12-43a)$$

o

$$H(e^{j\omega T}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{H}\left[j\left(\omega + \frac{2\pi k}{T}\right)\right] \quad (12-43b)$$



**Fig. 12-10** Magnitude characteristics of a second-order Chebyshev filter with a 3 dB ripple.

Si la frecuencia de muestreo es lo suficientemente rápida, el efecto de aliasing es mínimo. Como se ilustra en la Fig. 12-10, cuando  $T=0,1\text{ seg}$ , el efecto de alias representado por la diferencia entre las respuestas de frecuencia de los filtros analógico y digital para  $0 < \theta < \pi$  apenas se nota. Sin embargo, cuando la frecuencia de muestreo no es lo suficientemente rápida, como  $T=1\text{ seg}$ . En el caso de la Fig. 12-10, el efecto de aliasing entra en juego cuando observamos que  $|H_1(e^{j\theta})|$  es marcadamente diferente de la de  $|\hat{H}(j\omega)|$ . Haciendo  $s=j\omega$  en (12-43), obtenemos<sup>183</sup>

$$H(z)|_{z=e^{j\theta}} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{H}\left(s + j\frac{2\pi k}{T}\right)$$

O

$$H(z)|_{z=e^{j\theta}} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{H}\left(s + j\frac{2\pi k}{T}\right) \quad (12-44)$$

Observe que (12-44) da la relación entre las funciones de transferencia del filtro digital y su filtro analógico correspondiente bajo la transformación de invariancia de impulso.

Para examinar el desempeño del método de invariancia de impulso con respecto a las dos

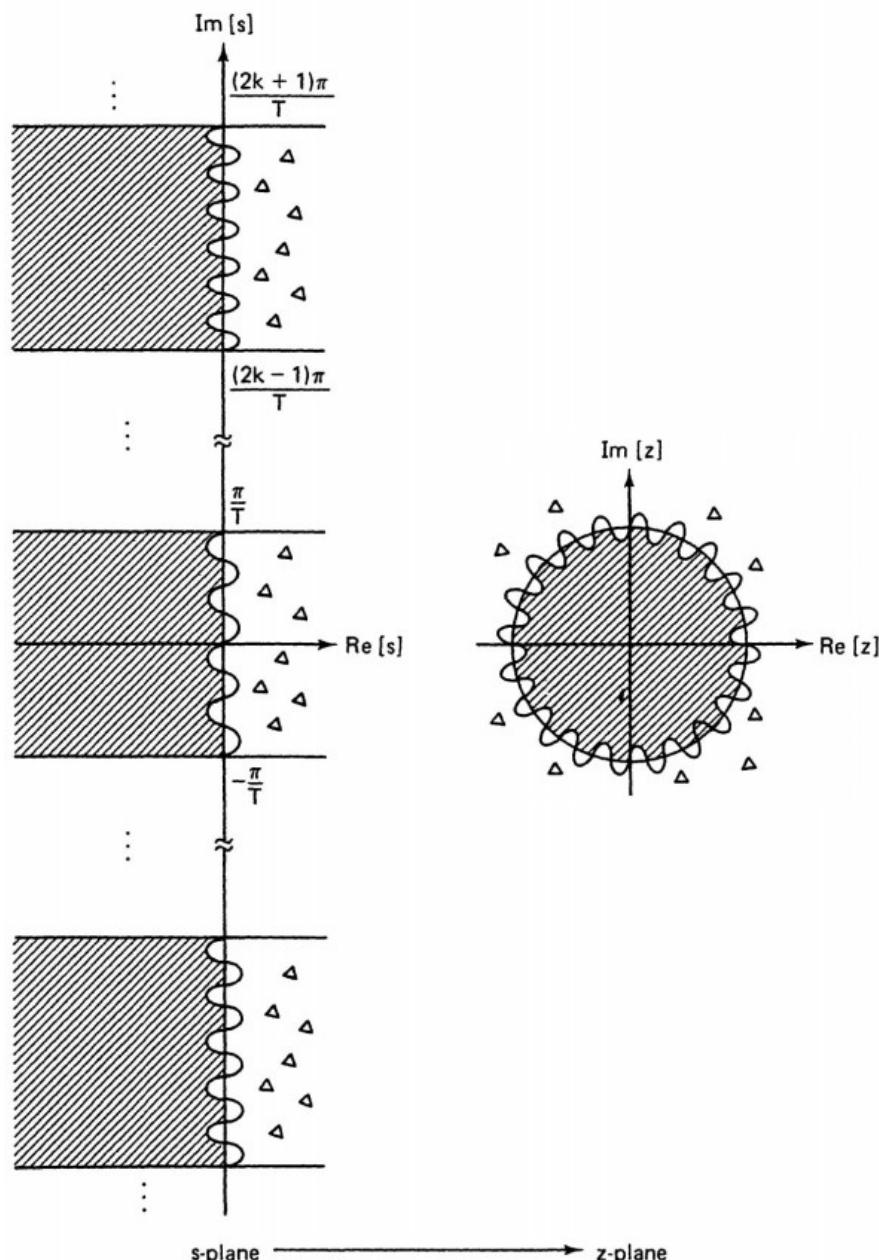
<sup>183</sup> Cuando la tasa de muestreo es muy alta ( $1/T$  es muy grande), el filtro digital resultante tendrá una ganancia muy alta. Esto da lugar a muchos problemas indeseables, como el desbordamiento. Por esta razón, la función de transferencia del filtro digital resultante obtenido por el método de transformación invariante de impulso de (12-33) se multiplica por un factor de  $T$  para reducir el nivel de ganancia del filtro digital al del filtro analógico.

condiciones deseadas para los procedimientos de mapeo en (12-10), consideramos la relación<sup>184</sup>

$$z = e^{sT} \quad (12-45a)$$

y por lo tanto

$$\theta = \omega T \quad (12-45b)$$



**Fig. 12-11** Properties of the impulse invariant-transformation mapping procedure.

La Fig. 12-11 muestra que una franja horizontal de altura  $2\pi/T$  en el plano-s se mapea en todo el plano-z, con la mitad izquierda de la franja mapeada en el interior del círculo unitario, la mitad derecha de la tira en el exterior del círculo unitario, y el eje imaginario de la tira en el círculo unitario. De la Fig. 12-11 podemos ver que la fuente del efecto de aliasing es que el mapeo de (12-

184 Como indica (12-44), (12-45) no es la relación de mapeo entre las variables de frecuencia s y z bajo la transformación de invariancia de impulso. Este hecho se expondrá más adelante. Sin embargo, la relación en (12-45) pone de manifiesto las propiedades esenciales del procedimiento de mapeo de transformación invariante de impulso de una manera sencilla.

45) no es uno a uno.<sup>185</sup> Por ejemplo, los puntos  $s=0$ ,  $s=j(2\pi/T)$ , y  $s=j(4\pi/T)$  se asignan al punto único  $z=1$ . De hecho, (12-45) dice que la función de transferencia analógica de cada tira de  $2\pi/T$  se superpone al plano-z completo para formar la función de transferencia digital. Por lo tanto, el método de invariancia de impulso no es un simple mapeo lineal o afín del plano-s al plano-z.<sup>186</sup> Debido a este efecto de aliasing, el método de invariancia de impulso es aplicable solo a filtros con una respuesta de frecuencia analógica esencialmente limitada en banda que satisface el condición

$$|\hat{H}(j\omega)| \approx 0 \text{ para } |\omega| > \omega_B \quad (12-46)$$

como en los casos de filtros de paso bajo y de paso de banda.

Como hemos mostrado, el procedimiento de mapeo del método de invariancia de impulso viene dado por (12-33), que establece que las ubicaciones de los polos  $\hat{p}_i$  del filtro analógico se transforman en las ubicaciones de los polos

$$p_i \triangleq e^{\hat{p}_i T} \quad i=1,2,\dots,N \quad (12-47)$$

Así, (12-45) relaciona las ubicaciones de los polos de los filtros digital y analógico. Sin embargo, no es del todo cierto que (12-45) relate las ubicaciones cero de los filtros digitales y analógicos bajo la transformación invariante de impulso. Un caso en cuestión es el siguiente:

**Ejemplo 12-4** Se nos da la función de transferencia de un filtro analógico como<sup>187</sup>

$$\hat{H}(s) = \frac{s+a}{(s+a)^2 + b^2} \quad (12-48)$$

donde  $a \neq 0$  y  $b \neq 0$ . Encuentre las ubicaciones cero y polo del filtro digital obtenido por la transformación invariante de impulso.

**Solución:** Una expansión en fracciones parciales de  $\hat{H}(s)$  de (12-48) da

$$\hat{H}(s) = \frac{1/2}{s+a+jb} + \frac{1/2}{s+a-jb} \quad (12-49)$$

La función de transferencia del filtro digital correspondiente viene dada por (12-33) como

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1/2}{1 - e^{-(a+jb)T} z^{-1}} + \frac{1/2}{1 - e^{-(a-jb)T} z^{-1}} \\ &= \frac{1 - (e^{-aT} \cos bt)}{1 - (2e^{-aT} \cos bt)z^{-1} + e^{-2aT} z^{-2}} \end{aligned} \quad (12-50)$$

De (12-50), la posición cero finito del filtro digital es

$$z_1 = e^{-aT} \cos bt \neq e^{\hat{z}_1 T} = e^{-aT} \quad (12-51)$$

donde  $\hat{z}_1 = -a$  es la ubicación cero del filtro analógico. Sin embargo, las ubicaciones de los polos del filtro digital están en

$$p_1 = e^{-(a+jb)T} = e^{\beta_1 T} \quad (12-52a)$$

$$p_2 = e^{-(a-jb)T} = e^{\hat{p}_2 T} \quad (12-52b)$$

185 Se dice que una función  $f(x)$  es uno a uno  $f(x_1) \neq f(x_2)$  siempre que  $x_1 \neq x_2$ .

186 Un mapa lineal tiene la forma  $y = Ax$ , y un *mapa afín* se caracteriza por  $y = Ax + b$ .

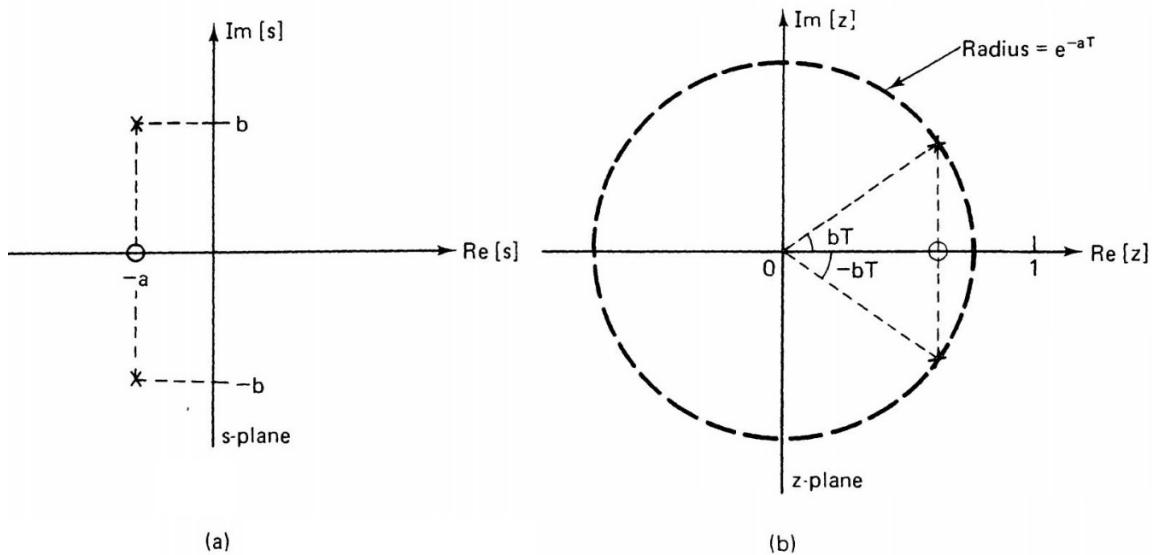
187 Los filtros caracterizados por (12-48) se denominan filtros de Lerner. Se ha demostrado que los filtros de Lerner tienen un alto grado de linealidad de fase y bandas de paso razonablemente selectivas. Para más detalles, consultar la Referencia [16].

donde  $\hat{p}_1 = -(a + jb)$  y  $\hat{p}_2 = -(a - jb)$  son las ubicaciones de los polos del filtro analógico. Los diagramas de polos y ceros del filtro analógico y su filtro digital asociado se muestran en la Fig. 12-12.

Como hemos visto, (12-33) se aplica tanto a los polos reales como a los complejos  $\hat{p}_i$ . Sin embargo, cuando  $\hat{p}_i$  es complejo, es más conveniente considerar el par de polos  $\hat{p}_i$  y  $\bar{\hat{p}}_i$  juntos, donde la barra sobre una variable indica su complejo conjugado. Aplicando (12-33) apropiadamente, obtenemos los pares de transformación para los siguientes dos casos de segundo orden:

1. Si la función de transferencia de un filtro analógico viene dada por

$$\hat{H}(s) = \frac{s + \sigma_1}{(s + \sigma_1)^2 + \omega_1^2} \quad (12-53a)$$



**Fig. 12-12** Pole-zero diagrams of a second order Lerner filter.  
(a) Analog filter version. (b) Digital filter version obtained by the impulse invariance method.

donde están los polos

$$\hat{p}_{1,2} = -\sigma_1 \pm j\omega_1 \quad (12-53b)$$

entonces la función de transferencia del filtro digital correspondiente viene dada por

$$H(z) = \frac{1 - z^{-1} e^{-\sigma_1 T} \cos \omega_1 T}{1 - 2z^{-1} e^{-\sigma_1 T} \cos \omega_1 T + z^{-2} e^{-2\sigma_1 T}} \quad (12-54)$$

2. Si  $\hat{H}(s)$  viene dado por

$$\hat{H}(s) = \frac{\omega_1}{(s + \sigma_1)^2 + \omega_1^2} \quad (12-55)$$

entonces, bajo el procedimiento de mapeo de (12-33),  $H(z)$  viene dada por

$$H(z) = \frac{z^{-1} e^{-\sigma_1 T} \sin \omega_1 T}{1 - 2z^{-1} e^{-\sigma_1 T} \cos \omega_1 T + z^{-2} e^{-2\sigma_1 T}} \quad (12-56)$$

**Ejemplo 12-5** Un filtro analógico Butterworth de paso bajo de tercer orden tiene una función de transferencia dada por

$$\hat{H}(s) = \frac{\omega_c^3}{(s + \omega_c) \left[ s + \left( \frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \omega_c \right] \left[ s + \left( \frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \omega_c \right]} \quad (12-57)$$

Encuentre la función de transferencia del filtro digital Butterworth de tercer orden correspondiente mediante el método de transformación invariante de impulso.

**Solución:**  $\hat{H}(s)$  se puede escribir como

$$\begin{aligned} \hat{H}(s) &= \frac{\omega_c}{s + \omega_c} + \frac{-\omega_c s}{\left( s + \frac{\omega_c}{2} \right)^2 + \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \omega_c \right)^2} \\ &= \frac{\omega_c}{s + \omega_c} + \frac{-\omega_c \left( s + \frac{\omega_c}{2} \right)}{\left( s + \frac{\omega_c}{2} \right)^2 + \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \omega_c \right)^2} \\ &\quad + \frac{\frac{\omega_c}{\sqrt{3}} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \omega_c \right)}{\left( s + \frac{\omega_c}{2} \right)^2 + \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \omega_c \right)^2} \end{aligned} \quad (12-58)$$

Por (12-33) y (12-53) hasta (12-56), el filtro digital deseado tiene una función de transferencia dada por

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{\omega_c}{1 - z^{-1} \exp(-\omega_c T)} \\ &\quad - \frac{\omega_c \left[ 1 - z^{-1} \exp\left(-\frac{\omega_c T}{2}\right) \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \omega_c T\right) \right]}{1 - 2z^{-1} \exp\left(-\frac{\omega_c T}{2}\right) \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \omega_c T\right) + z^{-2} \exp(-\omega_c T)} \\ &\quad + \frac{\omega_c}{\sqrt{3}} \frac{z^{-1} \exp\left(-\frac{\omega_c T}{2}\right) \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \omega_c T\right)}{1 - 2z^{-1} \exp\left(-\frac{\omega_c T}{2}\right) \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \omega_c T\right) + z^{-2} \exp(-\omega_c T)} \\ &= \frac{\omega_c \left\{ -1 + \exp\left(-\frac{\omega_c T}{2}\right) \left[ \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \omega_c T\right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \omega_c T\right) \right] z^{-1} \right\}}{1 - 2z^{-1} \exp\left(-\frac{\omega_c T}{2}\right) \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \omega_c T\right) + z^{-2} \exp(-\omega_c T)} \\ &\quad + \frac{\omega_c}{1 - z^{-1} \exp(-\omega_c T)} \end{aligned} \quad (12-59)$$

**Ejemplo 12-6** Suponga que se desea un filtro digital de paso bajo para satisfacer las siguientes condiciones:

- (a) El punto de corte de 3 dB está en  $0.2\pi$  rad.
- (b) La magnitud de la banda de paso está dentro de 0.1 dB de su valor máximo para  $0 < \theta < 0.1\pi$  rad.
- (c) La atenuación de la banda suprimida es superior a 30 dB para  $0.5\pi < \theta < \pi$ .
- (d) Se desea una curva de magnitud monótonamente decreciente para  $0 < \theta < \pi$ .
- (e) El período de muestreo  $T = 10\pi\mu\text{seg}$ .

Encuentre una función de transferencia para el filtro digital deseado.

**Solución:** El primer paso es traducir estos criterios digitales a criterios analógicos. Esto se hace observando que cuando T satisface los criterios de Nyquist, (12-43) se reduce aproximadamente a

$$H(e^{j\theta}) = \frac{1}{T} \hat{H}\left(j\frac{\theta}{T}\right) \quad (12-60a)$$

y por lo tanto,

$$\omega = \frac{\theta}{T} \quad (12-60b)$$

Con (12-60b), el filtro analógico deseado debe cumplir con las siguientes especificaciones:

- (a') La frecuencia de corte de 3 dB está en

$$\omega_c = \frac{0.2\pi}{10\pi \times 10^{-6}} = 20 \text{ Krad./sec.} \quad (12-61a)$$

- (b') La magnitud de la banda de paso está dentro de 0,1 dB para

$$0 < \omega < \frac{0.1\pi}{10\pi \times 10^{-6}} = 10 \text{ K rad./sec.} \quad (12-61b)$$

- (c') La atenuación de la banda suprimida es superior a 30 dB para

$$\omega > \frac{0.5\pi}{10\pi \times 10^{-6}} = 50 \text{ K rad./sec.} \quad (12-61c)$$

- (d') Se desea una curva de magnitud monótonamente decreciente para  $\omega > 0$ .

El criterio (d') indica que se necesita un filtro Butterworth. Por lo tanto, la función de magnitud es de la forma

$$|\hat{H}(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2} \quad (12-62)$$

Este filtro Butterworth debe cumplir las dos condiciones siguientes:

$$-10 \log |\hat{H}(j10^4)|^2 \leq 0.1 \quad (12-63a)$$

y

$$-10 \log |\hat{H}(j5 \times 10^4)|^2 > 30 \quad (12-63b)$$

La condición (12-63a) implica que

$$-\log \left| \frac{1}{1 + \left( \frac{10^4}{2 \times 10^4} \right)^{2n}} \right|^2 \leq 0.01$$

o

$$n \geq 3 \quad (12-64a)$$

y (12-63b) requiere que

$$-10 \log \left| \frac{1}{1 + \left( \frac{5 \times 10^4}{2 \times 10^4} \right)^{2n}} \right|^2 > 30$$

o

$$n \geq 4 \quad (12-64b)$$

Por lo tanto, el orden mínimo del filtro Butterworth necesario para cumplir con las especificaciones es  $n=4$ . Para  $n=4$ , las ubicaciones de los polos del filtro Butterworth analógico con un ancho de banda unitario o una frecuencia de corte en  $\omega=1$  rad./seg., se puede encontrar de (8-34) y (8-35) para ser

$$\begin{aligned}\hat{s}_{1,4} &= -0.38268 \pm j0.92388 \\ \hat{s}_{2,3} &= -0.92388 \pm j0.38268\end{aligned}\quad (12-65)$$

Esto significa que la función de transferencia del filtro Butterworth de cuarto orden normalizado está dada por

$$\begin{aligned}\hat{H}_N(s) &= \frac{1}{(s - \hat{s}_1)(s - \hat{s}_4)(s - \hat{s}_2)(s - \hat{s}_3)} \\ &= \frac{1}{(s^2 + 0.76537s + 1)(s^2 + 1.84776s + 1)}\end{aligned}$$

$$\hat{H}_N(s) = -\frac{0.92388s + 0.70711}{s^2 + 0.76537s + 1} + \frac{0.92388s + 1.70711}{s^2 + 1.84776s + 1} \quad (12-66)$$

Por lo tanto, la función de transferencia del filtro analógico deseado, uno que satisface los criterios (a') a (d'), está dada por

$$\begin{aligned}\hat{H}(s) &= \hat{H}_N\left(\frac{s}{\omega_c}\right) = H_N\left(\frac{s}{2 \times 10^4}\right) \\ &= -\frac{0.92388\omega_c s + 0.70711\omega_c^2}{s^2 + 0.76537\omega_c s + \omega_c^2} + \frac{0.92388\omega_c s + 1.70711\omega_c^2}{s^2 + 1.84776\omega_c s + \omega_c^2}\end{aligned}$$

o

$$\begin{aligned}\hat{H}(s) &= -\frac{(1.84776 \times 10^4)s + (2.82844 \times 10^8)}{s^2 + (1.53074 \times 10^4)s + (4 \times 10^8)} \\ &\quad + \frac{(1.84776 \times 10^4)s + (6.82844 \times 10^8)}{s^2 + 3.69552s + (4 \times 10^8)}\end{aligned}\quad (12-67)$$

donde están los polos

$$\begin{aligned}\hat{p}_{1,2} &= \omega_c \hat{s}_{1,4} = -0.76537 \times 10^4 \pm j1.84776 \times 10^4 \\ \hat{p}_{3,4} &= \omega_c \hat{s}_{2,3} = -1.84776 \times 10^4 \pm j0.76537 \times 10^4\end{aligned}\quad (12-68)$$

Para encajar en las formas de (12-53) y (12-55), (12-68) se escribe como

$$\begin{aligned}
 \hat{H}(s) = & -\frac{(1.84776 \times 10^4)[s + (0.76537 \times 10^4)]}{s^2 + (1.53074 \times 10^4)s + (4 \times 10^8)} \\
 & -\frac{(0.76537 \times 10^4)(1.84776 \times 10^4)}{s^2 + (1.53074 \times 10^4)s + (4 \times 10^8)} \\
 & +\frac{(1.84776 \times 10^4)[s + (1.84776 \times 10^4)]}{s^2 + 3.69552s + (4 \times 10^8)} \\
 & +\frac{(4.46087 \times 10^4)(0.76537 \times 10^4)}{s^2 + 3.69552s + (4 \times 10^8)}
 \end{aligned} \tag{12-69}$$

Por (12-53) a (12-56), la función de transferencia del filtro digital deseado, uno que satisface todas las especificaciones de (a) a (e), está dada por

$$\begin{aligned}
 H(z) = & \\
 & 10^4 \left\{ \frac{-1.84776 + z^{-1}e^{-0.076537\pi}[(1.84776 \cos 0.184776\pi) - (0.76537 \sin 0.184776\pi)]}{1 - 2z^{-1}e^{-0.076537\pi} \cos 0.184776\pi + z^{-2}e^{-0.153073\pi}} \right. \\
 & \left. + \frac{1.84776 + z^{-1}e^{-0.184776\pi}[(-1.84776 \cos 0.076537\pi) + (4.46087 \sin 0.076537\pi)]}{1 - 2z^{-1}e^{-0.184776\pi} \cos 0.076537\pi + z^{-2}e^{-0.369552\pi}} \right\} \\
 & = \frac{10^4[-1.84776 + 0.88482z^{-1}]}{1 - 1.314958z^{-1} + 0.61823z^{-2}} + \frac{10^4[1.84776 - 0.409815z^{-1}]}{1 - 1.087049z^{-1} + 0.313179z^{-2}} \tag{12-70}
 \end{aligned}$$

Observe que la frecuencia de corte del filtro de paso bajo analógico es de 20 Krad./seg. . Esto significa que el filtro analógico está efectivamente limitado en banda a aproximadamente ( $\omega_0/2 \triangleq 80 K$  rad./seg. ), como se muestra en la Fig. 12-13(a). Debido a que la frecuencia de muestreo de 200 K rad./seg. está por encima de la tasa de Nyquist,<sup>188</sup> esperamos casi ningún efecto de aliasing.<sup>189</sup> Por lo tanto, tenemos

$$H(e^{j\theta}) \approx \frac{1}{T} \hat{H}\left(j \frac{\theta}{T}\right) \tag{12-71A}$$

y

$$\theta = \omega T \tag{12-71b}$$

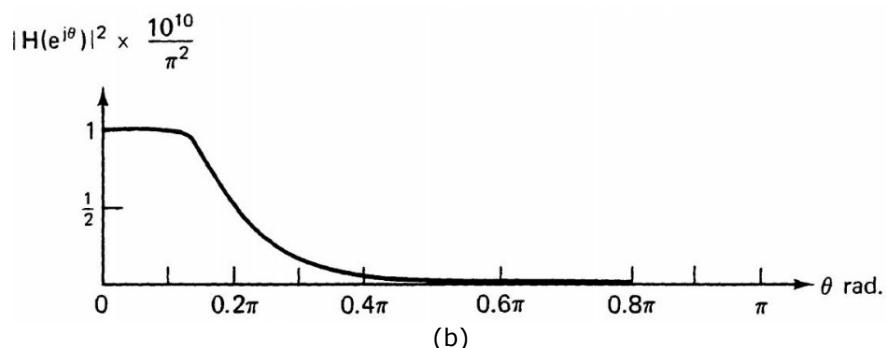
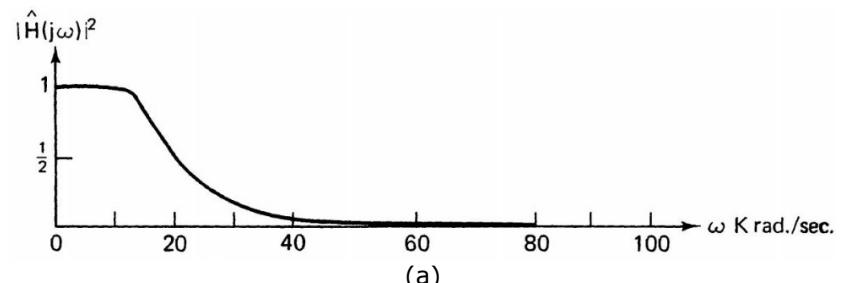


Fig. 12-13 Características de magnitud de un filtro de paso bajo Butterworth de cuarto orden. (a) Filtro analógico de (12-69). (b) Filtro digital de (12-70)

<sup>188</sup> Tasa de Nyquist significa que el período de muestreo  $T_N = 2\pi/\omega_0$ , o  $1/T_N = \omega_0/2\pi$

<sup>189</sup> En este caso, el error debido al efecto de aliasing es de aproximadamente 0.02% en dc.

para  $-\pi < \theta < \pi$ . En vista de (12-71), la curva de magnitud del filtro digital es similar a la del filtro analógico correspondiente, como se muestra en la Fig. 12-13(b).

Observe que la ganancia del filtro digital en  $\theta=0$  es exactamente  $1/T$ , mientras que la ganancia del filtro analógico en  $\omega=0$  es 1. Para eliminar este efecto de alta ganancia, el diseño final es dejar que la función de transferencia del filtro digital sea

$$\begin{aligned} H_F(z) &= TH(z) \\ &= \frac{(\pi/10)(-1.84776+0.88482z^{-1})}{1-1.314958z^{-1}+0.61823z^{-2}} + \frac{(\pi/10)(1.84776-0.409815z^{-1})}{1-1.087049z^{-1}+0.313179z^{-2}} \end{aligned} \quad (12-72)$$

Observe que la pérdida de ganancia de  $H_F(z)$  se ha normalizado a la unidad.

### Resolución Matlab – Ejemplo 12-6 – condiciones de un filtro digital

```
clear all; clc;

%datos condiciones de un filtro digital
wcN=0.2*pi;
A1=0.1; %db
w1N=0.1*pi;
A2=30; %db
w2N=0.5*pi;

T=sym(10*pi*1E-6);

% traduciendo los criterios digitales a criterios analógicos.
fprintf('Traduciendo los criterios digitales a criterios analógicos.');
wc=wcN/T;
w1=w1N/T;
w2=w2N/T;
fprintf('Frecuencia de corte desnormalizadas: wc=%f',wc);
fprintf('Frecuencia en banda de paso: w1=%f',w1);
fprintf('Frecuencia en banda suprimida: w2=%f',w2);

% función de aproximación butterworth
syms w 'real', syms n 'integer'
H2(w)=1/(1+(w/wc)^(2*n))

% condiciones requeridas.
n1=vpasolve(-10*log10(H2(w1))==A1, n);
n2=vpasolve(-10*log10(H2(w2))==A2, n);
nb=n1;
if nb<n2
    nb=n2;
end
fprintf('Orden de: cond1->%d, cond2->%d, elegido->%d',n1,n2,nb);

syms s 'real', syms k 'integer';
theta(k)=((2*k-1)/(2*nb))*pi;
H_pb(s,k)=1/(s^2 + 2*sin(theta(k))*s + 1);
H(s)=prod(H_pb(s, sym(1:nb/2)));
if mod(nb,2)~=0
    H(s)=H(s)/(s+1);
end
```

Traduciendo los criterios digitales a criterios analógicos

Frecuencia de corte desnormalizadas: wc=20000.00  
Frecuencia en banda de paso: w1=10000.00  
Frecuencia en banda suprimida: w2=50000.00  
 $H_2(w) = \frac{1}{\left(\frac{w}{20000}\right)^2 + 1}$

Orden de: cond1->3, cond2->4, elegido->4

ans =

$$\frac{1}{(s+1) \left(s^2 + 2 \sin(0.13266588452029071575441365634384\pi)s + 1\right)}$$

```
% función de transferencia
H(s)

% respuesta en frecuencia s
[B,A]=numden(H(s));
b= sym2poly(collect(B));
a= sym2poly(collect(A));
w=logspace(-1,1);
clf, freqs(b,a,w);

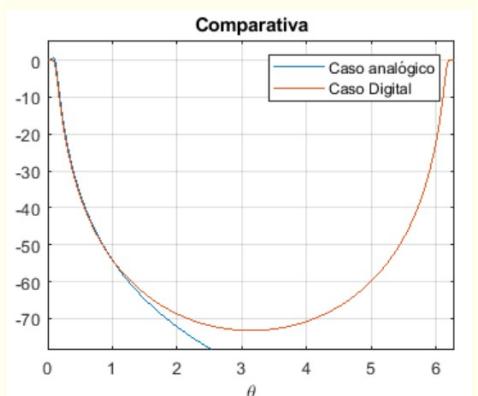
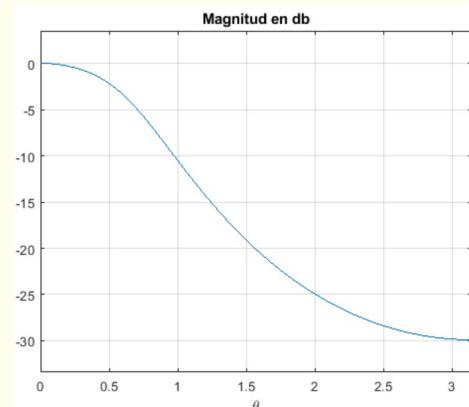
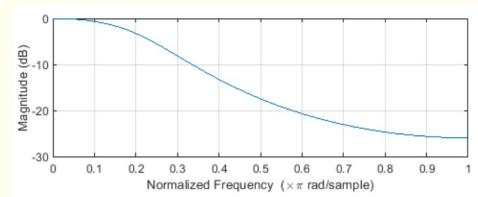
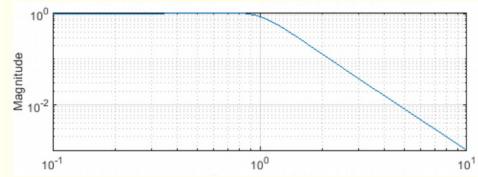
% Integración numérica - método de euler
syms z, syms Ts 'real';
HzT(z)=subs( H(s), s=(1-z^-1)/Ts) ;
HzT(z)=collect(HzT(z), z^-1 )

% periodo de muestreo;
Hz(z)=subs(HzT(z),Ts=T)

% respuesta en frecuencia
syms theta 'real';
clf; ezplot(20*log(abs( Hz(exp(j*theta)) )), [0,pi]),
title('Magnitud en db'); grid on;

% respuesta en frecuencia
[Bz,Az]=numden(Hz(z));
bz=sym2poly(Bz); az=sym2poly(Az);
clf; freqz(bz, az)

% comparativa caso analógico - caso digital
syms wN 'real';
HwN(wN)=subs(H(s), s=j*wN/T );
clf; ezplot(20*log10(abs( HwN(wN) )),[0,2*pi]);
hold on ;
ezplot(20*log10(abs( Hz(exp(j*theta) ))),[0,2*pi]);
legend('Caso analógico', 'Caso Digital' );
title('Comparativa');
hold off; grid on;
```



### 12-1-3. Transformación bilineal

Se ha demostrado que el efecto de aliasing en el método de transformación invariante de impulso es causado por un mapeo que no es una función uno a uno del plano-s al plano-z. Para eliminar este efecto de alias no deseado, necesitamos encontrar un mapeo continuo uno a uno desde el plano-s hacia el plano-z. Una de estas transformaciones se denomina transformación bilineal, definida por<sup>190</sup>

$$s = f(z) \triangleq \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \quad (12-73)$$

Con algunas manipulaciones algebraicas, obtenemos la relación inversa

$$z^{-1} = \frac{1 - \frac{sT}{2}}{1 + \frac{sT}{2}} = \frac{2 - sT}{2 + sT} \quad (12-74a)$$

o

$$z = \frac{2+sT}{2-sT} \quad (12-74b)$$

Ahora examinaremos las propiedades del procedimiento de mapeo de transformación bilineal con la debida atención a las dos condiciones en (12-10). Consideremos primero el eje imaginario del plano-s. Con  $s = j\omega$ , (12-74) se convierte en

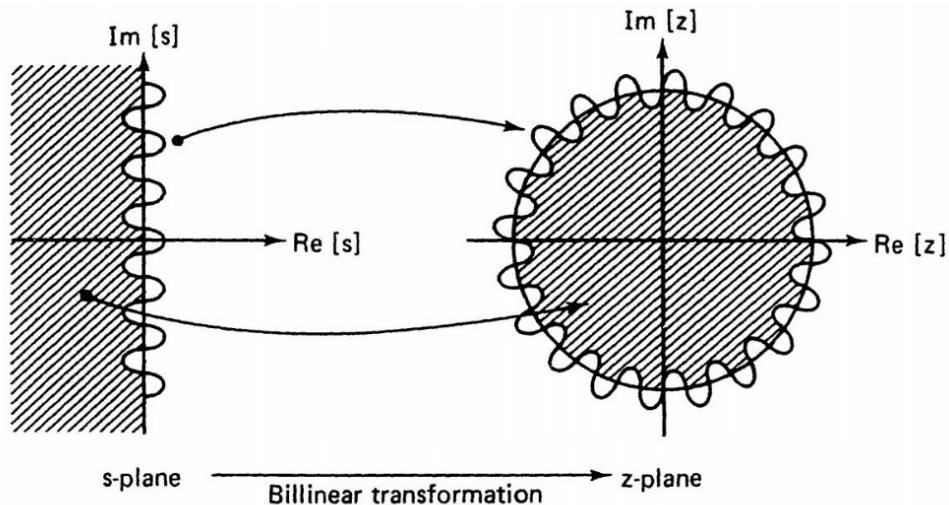
$$\begin{aligned} z &= \frac{2+j\omega T}{2-j\omega T} \\ &= \frac{2+j\omega T^2}{4+(\omega T)^2} = \frac{4-(\omega T)^2+4j\omega T}{4+(\omega T)^2} \\ &= \frac{\sqrt{[4-(\omega T)^2]^2+(4\omega T)^2}}{4+(\omega T)^2} e^{j \tan^{-1} \left[ \frac{4\omega T}{4-(\omega T)^2} \right]} \\ &= e^{j \tan^{-1} \left[ \frac{4\omega T}{4-(\omega T)^2} \right]} \triangleq e^{j\theta(\omega)} \end{aligned}$$

donde

$$\theta(\omega) = \tan^{-1} \left[ \frac{4\omega T}{4-(\omega T)^2} \right] \quad (12-75b)$$

De (12-75a), observamos que el eje imaginario del plano-s está mapeado al círculo unitario (donde  $|z|=1$ ) en el plano-z. En particular, un punto  $0+j\omega$  en el plano-s se asigna al punto correspondiente  $e^{j\theta(\omega)}$  en el plano-z. Como en el caso de (12-23b) y como se ilustra en la figura 12-7, el ángulo de fase  $\theta(\omega)$  varía de  $-\pi$  a  $\pi$  cuando  $\omega$  varía de  $-\infty$  a  $\infty$ . Por lo tanto, concluimos que el eje imaginario del plano-s está mapeado en el círculo unitario del plano-z, como se muestra en la Fig. 12-14. En otras palabras, la Condición 1 de (12-10)

<sup>190</sup> Se ha demostrado en la Referencia [13] que la transformación bilineal de (12-73) proporciona un mapeo uno a uno entre sistemas analógicos y digitales.



**Fig. 12-14** Properties of the bilinear transformation mapping procedure.

se satisface por la transformación bilineal de (12-73). Para verificar la Condición 2 de (12-10), dejamos

$$s = \sigma + j\omega \quad (12-76a)$$

donde

$$\sigma < 0 \quad (12-76b)$$

Entonces (12-74) da

$$z = \frac{2+sT}{2-sT} \Big|_{s=\sigma+j\omega} = \frac{2+\sigma T + j\omega T}{2-\sigma T - j\omega T}$$

o

$$z = \frac{2+sT}{2-sT} \Big|_{s=\sigma+j\omega} = \frac{2+\sigma T + j\omega T}{2-\sigma T - j\omega T} \quad (12-77)$$

Si  $\sigma < 0$ , el denominador de (12-77) siempre es mayor que su numerador. Concluimos que

$$|z| < 1 \quad (12-78)$$

siempre que  $\text{Re}[s] = \sigma < 0$ . Por lo tanto, también se satisface la condición 2 de (12-10b), como se muestra en la figura 12-14. Además, se puede demostrar que la transformación bilineal de (12-73) es una función uno a uno. Esto significa que cada punto en el plano-z corresponde exactamente a un punto en el plano-s y viceversa. Como resultado de esta propiedad de unicidad, no hay efecto de aliasing en el procedimiento de mapeo bilineal.

El procedimiento de diseño de filtros digitales bajo el método de transformación bilineal involucra la búsqueda de una función de transferencia  $\hat{H}(s)$  apropiada de un filtro analógico y la aplicación de la transformación bilineal de (12-73) o (12-74) para obtener la función de transferencia  $H(z)$  del filtro digital deseado,

$$H(z) = \hat{H}(s) \Big|_{s=(2/T)(1-z^{-1})/(1+z^{-1})} \quad (12-79)$$

donde  $T$  es el período de muestreo. Esta transformación preservará tanto las características de frecuencia como las propiedades de estabilidad del filtro analógico.

Sin embargo, esto no significa que las características de frecuencia de los filtros digitales y las del filtro analógico sean idénticas. Simplemente significa que las "formas" son idénticas. Por ejemplo, si la función de magnitud de un filtro analógico es monótonamente decreciente para  $0 < \omega < \infty$ , entonces su correspondiente filtro digital obtenido por (12-79) tendrá una función de magnitud

monótonamente decreciente de 0 a  $n$ ; o si la función de magnitud de un filtro analógico tiene  $k$  altibajos para  $0 < \omega < \infty$ , entonces la función de magnitud del filtro digital correspondiente bajo (12-79) también tendrá  $k$  altibajos.

**Ejemplo 12-7** Suponga que un filtro analógico tiene una función de transferencia dada por

$$\hat{H}(s) = \frac{K}{s - \hat{p}} \quad (12-80)$$

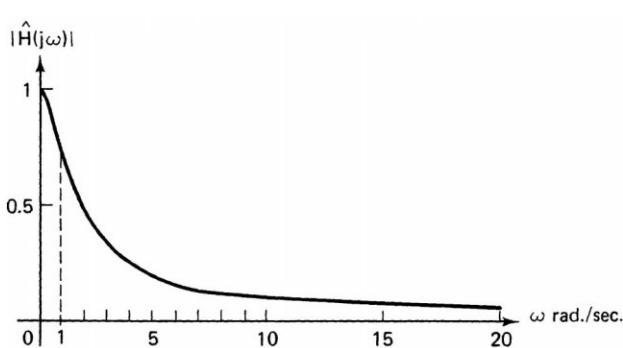
Encuentre la función de transferencia del filtro digital correspondiente por el método de transformación bilineal.

**Solución:** Por (12-79), la función de transferencia  $H(s)$  del filtro digital deseado viene dada por

$$\begin{aligned} H(z) &= \hat{H}(s)|_{s=(2/T)(1-z^{-1})/(1+z^{-1})} \\ &= \frac{K}{\frac{2(1-z^{-1})}{1+z^{-1}} - \hat{p}} = \frac{KT(1+z^{-1})}{2(1-z^{-1}) - \hat{p}T(1+z^{-1})} \\ &= \frac{KT(1+z^{-1})}{(2-\hat{p}T) - (2+\hat{p}T)z^{-1}} = \frac{\frac{KT}{2-\hat{p}T}(1+z^{-1})}{1 - \frac{2+\hat{p}T}{2-\hat{p}T}z^{-1}} \end{aligned} \quad (12-81)$$

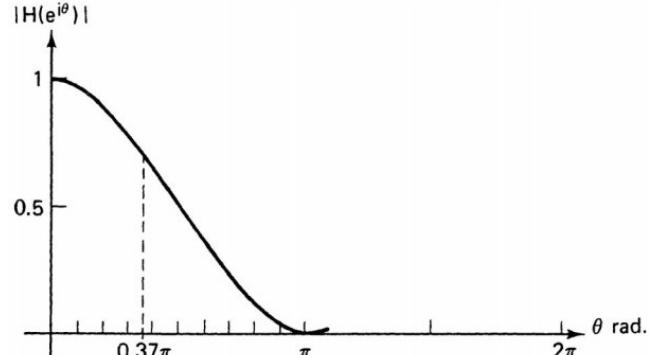
■

La Fig. 12-15 muestra la función de magnitud del filtro analógico representado por (12-80), con  $K=1$  y  $\hat{p}=-1$ , y la función de magnitud del filtro digital correspondiente de (12-81), con  $T=1$  segundo. Se considera que estas curvas de la Fig. 12-15 tienen la misma "forma".



$$\hat{H}(s) = \frac{1}{s+1} \quad y \quad |H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}$$

(a)



$$\hat{H}(z) = \frac{1+z^{-1}}{3-z^{-1}} \quad y \quad |H(e^{j\theta})| = \frac{\sqrt{(1+\cos\theta)^2 + \sin^2\theta}}{\sqrt{(3-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta}}$$

(b)

Fig. 12-15 Características de magnitud de un filtro analógico y su correspondiente filtro digital obtenidas por el método de transformación bilineal.

Si imaginamos que la curva  $|H(e^{j\theta})|$  respecto a  $\theta$  se traza con una escala  $\theta$  no uniforme (si la escala para  $\theta$  se comprime para  $0 < \theta < 0.5\pi$  y se estira para  $0.5\pi < \theta < \pi$ ), entonces la curva de la Fig. 12-15(b) se parecerá más al de la Fig. 12-15(a). Esto se debe a que la relación entre la variable de frecuencia digital  $\theta$  y la variable de frecuencia analógica  $\omega$  no es lineal, como lo indica (12-75b). Para examinar completamente esta relación no lineal entre  $\theta$  y  $\omega$ , necesitamos encontrar una expresión para  $\omega$  en términos de  $\theta$ . Teóricamente, podemos invertir (12-75b) para obtener tal expresión. Por otro lado, también podemos hacer  $z=e^{j\theta}$  y encontrar la imagen de dicho punto  $z$  en el plano-s. Tomando la última ruta, (12-73) produce

$$\begin{aligned}
 s = \sigma + j\omega &= \frac{2}{T} \left( \frac{1 - e^{-j\theta}}{1 + e^{-j\theta}} \right) = \frac{2}{T} \frac{e^{j\theta/2} - e^{-j\theta/2}}{e^{j\theta/2} + e^{-j\theta/2}} \\
 &= \frac{2}{T} \left[ \frac{j \sin(\theta/2)}{\cos(\theta/2)} \right] = j \left( \frac{2}{T} \tan \frac{\theta}{2} \right)
 \end{aligned} \tag{12-82}$$

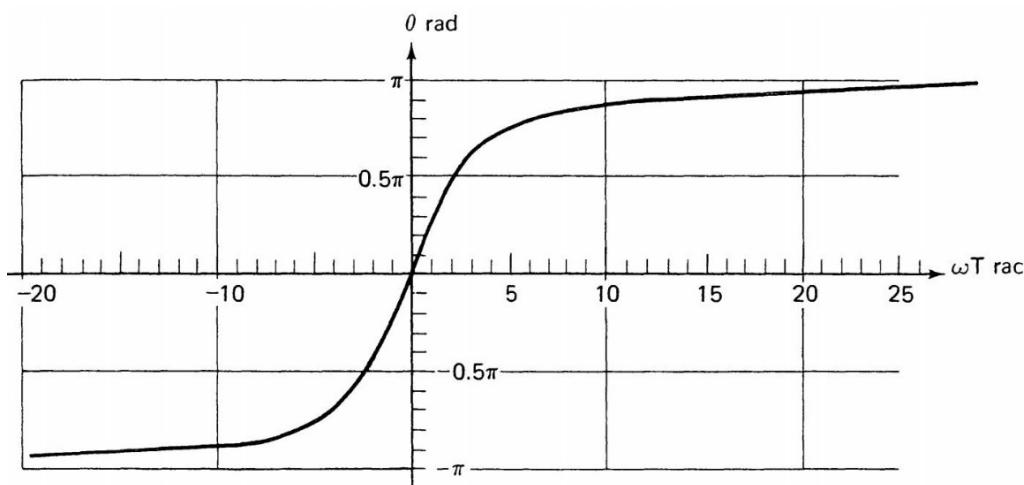
Al comparar las partes real e imaginaria de ambos lados de (12-82), obtenemos

$$\sigma = 0 \tag{12-83a}$$

y

$$\omega = \frac{2}{T} \tan \frac{\theta}{2} \tag{12-83b}$$

Observe que las relaciones de (12-75b) y (12-83b) entre la variable de frecuencia digital  $\theta$  y la variable de frecuencia analógica  $\omega$  son inversas entre sí. Estas relaciones se representan en la Fig. 12-16.



(a)

$\theta$	$\omega T$
0	0
$0.1\pi$	0.31677
$0.2\pi$	0.64984
$0.3\pi$	1.01905
$0.4\pi$	1.45309
$0.5\pi$	2
$0.6\pi$	2.75276
$0.7\pi$	3.92522
$0.8\pi$	6.15537
$0.9\pi$	12.62750
$0.95\pi$	25.41241
$\pi$	$\infty$

(b)

Fig. 12-16 Relationships between  $\theta$  and  $\omega$ . (a) A plot. (b) A table of correspondence.

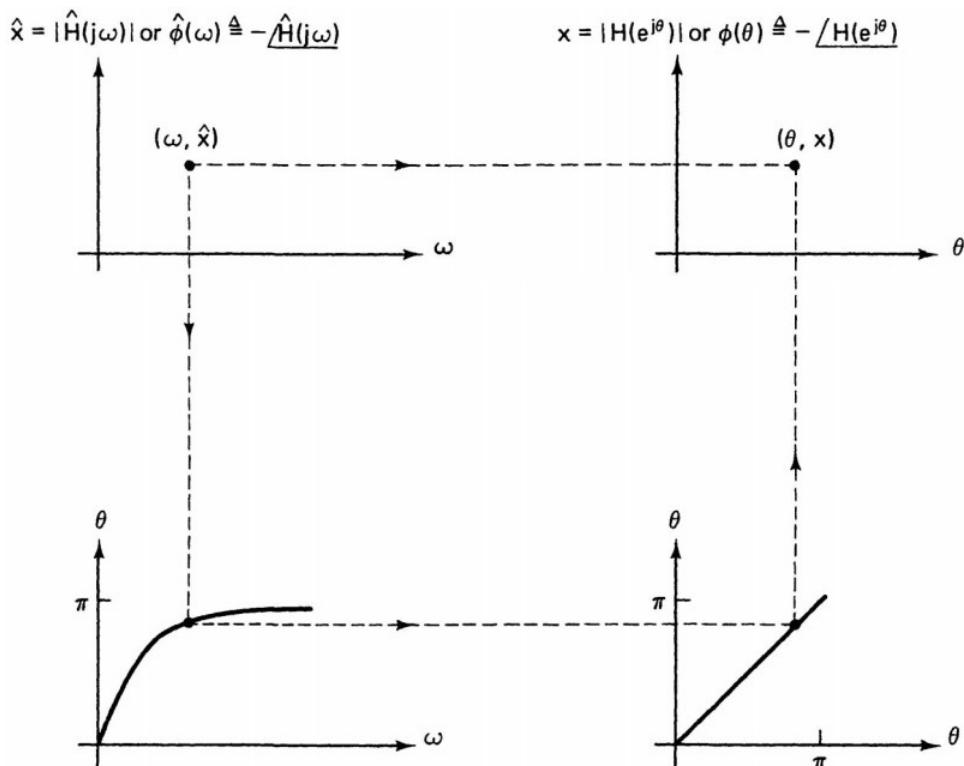
De la Fig. 12-16, observamos que el período de muestreo  $T$  se puede usar para estirar o comprimir la curva a lo largo del eje  $\omega T$ . Por supuesto, dado un período de muestreo  $T$ , la curva de  $\theta$  respecto a  $\omega$  será fija. Si las características de frecuencia [la función de magnitud  $|\hat{H}(j\omega)|$  y/o la función de fase  $\hat{\phi}(\omega) \triangleq -\angle \hat{H}(j\omega)$ ] de un filtro analógico, entonces (12-83b) puede usarse para obtener las características de frecuencia del filtro digital correspondiente como

$$|H(e^{j\theta})| = |\hat{H}(j\omega)| \Big|_{\omega=(2/T)\tan(\theta/2)} \tag{12-84a}$$

y

$$\hat{\phi}(\theta) \triangleq -\underline{H}(e^{j\theta}) = \hat{\phi}(\omega) \Big|_{\omega=(2/T)\tan(\theta/2)} \quad (12-84b)$$

En vista de (12-84), dadas las características de frecuencia de un filtro analógico, podemos construir gráficamente las características de frecuencia del filtro digital mediante un diagrama cuádruple como se muestra en la Fig. 12-17, donde las flechas indican las direcciones de las líneas constructivas. Específicamente, un punto  $(\omega_1, \hat{x}_1)$  en la característica analógica, donde  $\hat{x}_1$  puede ser la magnitud  $\hat{H}(j\omega_1)$  o el ángulo de fase  $\hat{\phi}(\omega_1) \triangleq -\underline{H}(j\omega_1)$  en el punto  $\omega_1$  se refleja en dos direcciones. Primero, el valor de  $\omega_1$  se refleja hasta la curva  $\theta - \omega$  para dar su valor  $\theta_1$  correspondiente. El valor  $\theta_1$  se refleja en la línea de  $45^\circ$  para proporcionar el valor  $\theta_1$  en el gráfico de características digitales. En segundo lugar, el valor de  $\hat{x}_1$  se refleja horizontalmente para proporcionar el valor de ordenadas  $x_1$  para la gráfica característica digital, donde  $x_1$  puede ser el valor de magnitud  $|H(e^{j\theta_1})|$  o el valor de fase  $\phi(\theta_1) \triangleq -\underline{H}(e^{j\theta_1})$  dependiendo de la naturaleza de  $\hat{x}_1$ . Al construir un número de puntos  $(\omega_1, \hat{x}_1)$ ,  $(\omega_2, \hat{x}_2)$ , ...,  $(\omega_N, \hat{x}_N)$  para producir  $(\omega_1, x_1)$ ,  $(\theta_2, x_2)$ , ...,  $(\theta_N, x_N)$ , podemos unir los puntos y formar las gráficas de características de frecuencia digital. Observe que este método producirá las características de frecuencia digital para  $0 < \theta < \pi$ . Por la simetría (incluso para funciones de magnitud e impar para funciones de fase) y las propiedades de periodicidad de respuestas de frecuencia digital, podemos construir las características de frecuencia para todos los  $\theta$ .



**Fig. 12-17** Construction procedure to obtain frequency characteristics of a digital filter under bilinear transformation mapping.

**Ejemplo 12-8** Dada la curva de magnitud de un filtro analógico en la Fig. 12-18(a),<sup>191</sup> encuentre la curva de magnitud de su filtro digital correspondiente bajo una transformación bilineal.

**Solución:** Utilizando el procedimiento de construcción de la Fig. 12-17, obtenemos la curva de magnitud  $|H(e^{j\theta})|$  con respecto a  $\theta$  en la Fig. 12-18(d), donde hemos supuesto  $T=1$  seg.

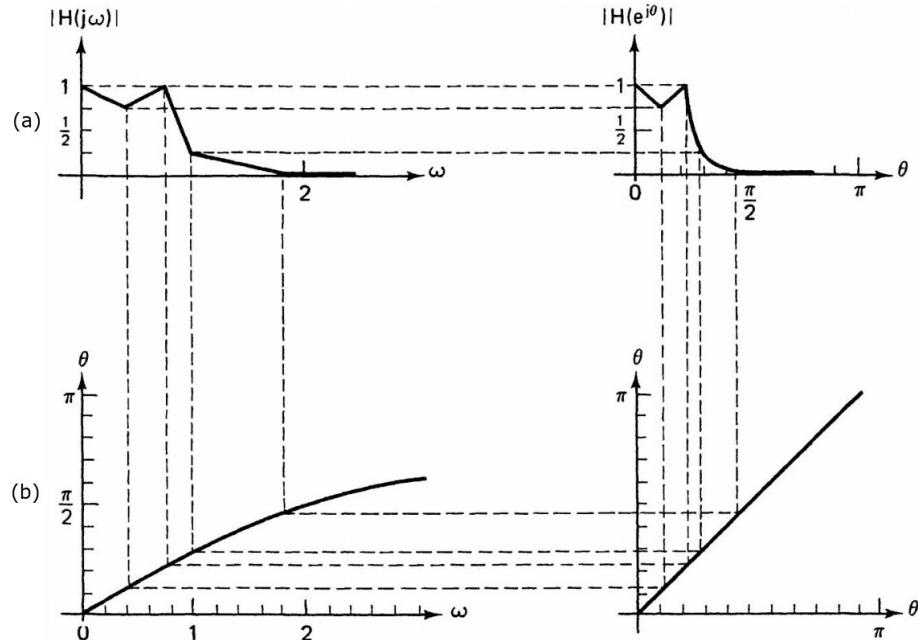


Fig. 12-18 Construction diagrams for Example 12-8.

Del ejemplo 12-7, observamos que bajo la transformación bilineal, la ubicación del polo  $\hat{p}$  de un filtro analógico se transforma en la ubicación del polo

$$p \triangleq \frac{2+\hat{p}T}{2-\hat{p}T} \quad (12-85)$$

del filtro digital. Además, con base en (12-81) del ejemplo 12-7, si la función de transferencia  $\hat{H}(s)$  de un filtro analógico se da en forma de fracción parcial

$$\hat{H}(s) = \sum_{k=1}^N \frac{\xi_i}{s - \hat{p}_i} \quad (12-86)$$

entonces el filtro digital correspondiente, bajo la transformación bilineal, tendrá una función de transferencia dada por

$$H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{\frac{\xi_i T}{2-\hat{p}_i T} (1+z^{-1})}{1 - \frac{2+\hat{p}_i T}{2-\hat{p}_i T} z^{-1}} \quad (12-87)$$

<sup>191</sup> La figura 12-18(a) es una aproximación lineal por partes de un filtro de paso bajo de Chebyshev de tercer orden.

**Ejemplo 12-9** Suponga que el filtro deseado tiene una función de transferencia analógica dada por

$$\hat{H}(s) = \frac{2s}{(s+1)(s+2)} \quad (12-88)$$

Encuentre  $H(z)$ , la función de transferencia del filtro digital correspondiente, por el método de transformación bilineal.

**Solución:** Escribiendo  $\hat{H}(s)$  de (12-88) en forma de fracción parcial, obtenemos

$$\hat{H}(s) = \frac{-2}{s+1} + \frac{4}{s+2} \quad (12-89a)$$

donde

$$\hat{p}_1 = -1 \quad y \quad \hat{p}_2 = -2 \quad (12-89b)$$

Por (12-87), la función de transferencia digital deseada  $H(z)$  viene dada por

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{\frac{-2T}{2+T}(1+z^{-1})}{1-\frac{2-T}{2+T}z^{-1}} + \frac{\frac{4T}{2+2T}(1+z^{-1})}{1-\frac{2-2T}{2+2T}z^{-1}} \\ &= \frac{2T}{(2+T)(1+T)} \frac{(1-z^{-2})}{\left[1-\frac{2-T}{2+T}z^{-1}\right]\left[1-\frac{1-T}{1+T}z^{-1}\right]} \quad \blacksquare \end{aligned} \quad (12-90)$$

Observe que en el Ejemplo 12-9, el número de ceros finitos en el filtro analógico es diferente al del filtro digital asociado. Este es el caso en general para la transformación bilineal.

**Ejemplo 12-10** Suponga que se desea un filtro digital de paso bajo para satisfacer las siguientes condiciones:

- (a) El punto de corte  $\theta_C$  de 3 dB está en  $0,5\pi$  rad.
- (b) La magnitud de la banda de paso está dentro de  $0.1dB$  de su valor máximo para  $0 < \theta < 0.295\pi$ .
- (c) La magnitud de la banda suprimida es al menos  $30dB$  inferior para  $0.75\pi < \theta < \pi$ .
- (d) Se desea una curva de magnitud monótonamente decreciente.
- (e) El período de muestreo  $T = 100\mu\text{seg}$ .

Encuentre la función de transferencia para el filtro digital deseado.

**Solución:** El primer paso es traducir los criterios digitales a su equivalencia analógica. Las especificaciones piden un filtro Butterworth donde:

- (a') La frecuencia de corte

$$\omega_c = \frac{2}{T} \tan \frac{\theta_c}{2} = \frac{2}{T} \tan \frac{0.5\pi}{2} = 20 \text{ Krad./seg.}$$

- (b') La magnitud de la banda de paso está dentro de  $0.1dB$  para

$$0 < \omega < \frac{2}{T} \tan \frac{0.295\pi}{2} \approx 10 \text{ Krad./seg.}$$

- (c') La magnitud de la banda suprimida es al menos  $30dB$  inferior para

$$\omega > \frac{2}{T} \tan \frac{0.75\pi}{2} \approx 50 \text{ Krad./seg.}$$

Como en el caso del ejemplo 12-6, la función de transferencia del filtro analógico deseado viene dada por (12-67) como

$$\hat{H}(s) = \frac{(1.84776 \times 10^4)s + (2.82844 \times 10^8)}{s^2 + (1.53074 \times 10^4)s + (4 \times 10^8)} + \frac{(1.84776 \times 10^4)s + (6.82844 \times 10^8)}{s^2 + 3.69552s + (4 \times 10^8)} \quad (12-91a)$$

donde están los polos

$$\begin{aligned}\hat{p}_{1,2} &= -0.76537 \times 10^4 \pm j1.84776 \times 10^4 \\ \hat{p}_{3,4} &= -1.84776 \times 10^4 \pm j0.76537 \times 10^4\end{aligned} \quad (12-91b)$$

Para ajustar  $\hat{H}(s)$  de (12-91) en la forma de (12-86), realizamos una expansión adicional en fracciones parciales en  $\hat{H}(s)$  para obtener

$$\begin{aligned}\hat{H}(s) &= \frac{(0.92388 \times 10^4) + j(2.23044 \times 10^4)}{s + [(0.76537 \times 10^4) - j(1.84776 \times 10^4)]} \\ &\quad + \frac{(0.92388 \times 10^4) - j(2.23044 \times 10^4)}{s + [(0.76537 \times 10^4) + j(1.84776 \times 10^4)]} \\ &\quad + \frac{(0.92388 \times 10^4) + j(0.38268 \times 10^4)}{s + [(1.84776 \times 10^4) - j(0.76537 \times 10^4)]} \\ &\quad + \frac{(0.92388 \times 10^4) - j(0.38268 \times 10^4)}{s + [(1.84776 \times 10^4) + j(0.76537 \times 10^4)]}\end{aligned} \quad (12-92)$$

Por (12-87), la función de transferencia del filtro digital deseado, que satisface las condiciones (a) a (e), viene dada por

$$\begin{aligned}H(z) &= \frac{(-0.14161 + j0.71194)(1+z^{-1})}{1 - j0.66818z^{-1}} \\ &= \frac{(-0.14161 - j0.71194)(1+z^{-1})}{1 + j0.66818z^{-1}} \\ &= \frac{(0.21194 + j0.14161)(1+z^{-1})}{1 - j0.19891z^{-1}} \\ &= \frac{(0.21194 - j0.14161)(1+z^{-1})}{1 + j0.19891z^{-1}}\end{aligned} \quad (12-93a)$$

donde las ubicaciones de los polos del filtro digital son

$$\begin{aligned}p_{1,2} &= \pm j0.66818 \\ p_{3,4} &= \pm j0.19891\end{aligned} \quad (12-93b)$$

Combinando los pares conjugados en (12-93a), obtenemos

$$\begin{aligned}H(z) &= -\frac{(1+z)(0.28322 + 0.95140z^{-1})}{1 + 0.44646z^{-2}} \\ &\quad - \frac{(1+z)(0.42388 + 0.05634z^{-1})}{1 + 0.03957z^{-2}}\end{aligned} \quad (12-94)$$

**Resolución Matlab – Ejemplo 12-10 – condiciones de un filtro digital**

```

clear all; clc;

%datos condiciones de un filtro digital
theta_c=0.5*pi;

A1=0.1; %db
theta_1=0.295*pi;

A2=30; %db
theta_2=0.75*pi;

T=sym(100*1E-6);

% traduciendo los criterios digitales a criterios analógicos.
% w: frecuencia analógica.
fprintf('Traduciendolos criterios digitales a criterios analógicos');
wc=2/T*tan(theta_c/2);
w1=2/T*tan(theta_1/2);
w2=2/T*tan(theta_2/2);
fprintf('Frecuencia de corte desnormalizadas: wc=% .2f',wc);
fprintf('Frecuencia en banda de paso: w1=% .2f',w1);
fprintf('Frecuencia en banda suprimida: w2=% .2f',w2);

% función de aproximación butterworth
syms w 'real', syms n 'integer'
H2(w)=1/(1 + (w/wc)^(2*n))

% condiciones requeridas.
n1=vpasolve(-10*log10(H2(w1))==A1, n);
n2=vpasolve(-10*log10(H2(w2))==A2, n);
nb=n1;
if nb<n2
    nb=n2;
end
fprintf('Orden de: cond1->%d, cond2->%d, elegido->%d',n1,n2,nb);

syms s 'real', syms k 'integer';
theta(k)=((2*k-1)/(2*nb))*pi;
H_pb(s,k)=1/(s^2 + 2*sin(theta(k))*s + 1);

H(s)=prod(H_pb(s,sym(1:nb/2)));
if mod(nb,2)~=0
    H(s)=H(s)/(s+1);
end

% función de transferencia
H(s)

% respuesta en frecuencia s
[B,A]=numden(H(s));
b= sym2poly(collect(B));
a= sym2poly(collect(A));
w=logspace(-1,1);
clf, freqs(b,a,w);

% Integración numérica - método de euler
syms z, syms Ts 'real';
HzT(z)=subs( H(s), s=(2/Ts)*(1-z^-1)/(1+z^-1) );

```

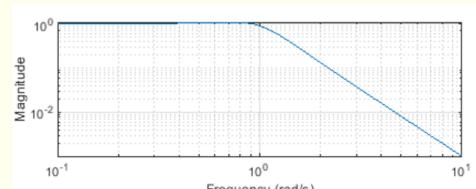
Traduciendolos criterios digitales a criterios analógicos

Frecuencia de corte desnormalizadas: wc=20000.00  
 Frecuencia en banda de paso: w1=9993.43  
 Frecuencia en banda suprimida: w2=48284.27

$$H_2(w) = \frac{1}{\left(\frac{w}{20000}\right)^2 + 1}$$

Orden de: cond1-&gt;3, cond2-&gt;4, elegido-&gt;4

$$\text{ans} = \frac{1}{(s+1)(s^2 + 2 \sin(0.12761037784984188615469383167661\pi)s + 1)}$$



```

HzT(z)=collect(HzT(z), z^-1)

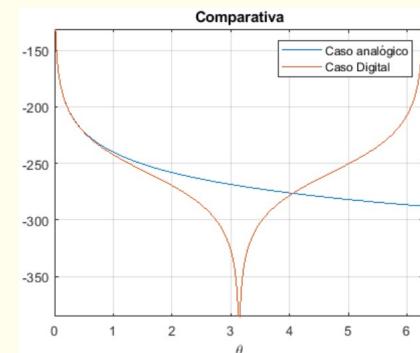
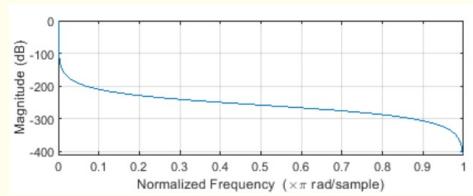
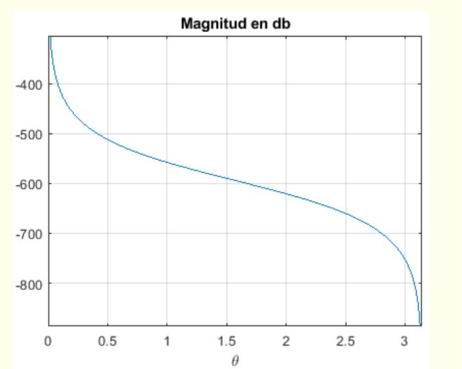
% periodo de muestreo;
Hz(z)=subs(HzT(z),Ts=T)

% respuesta en frecuencia
syms theta 'real';
clf; ezplot(20*log(abs( Hz(exp(j*theta)) )), [0,pi]),
title('Magnitud en db'); grid on;

% respuesta en frecuencia
[Bz,Az]=numden(Hz(z));
bz=sym2poly(Bz); az=sym2poly(Az);
clf; freqz(bz, az)

% comparativa caso analógico - caso digital
syms wN 'real';
HwN(wN)=subs(H(s), s=j*wN/T );
clf; ezplot(20*log10(abs( HwN(wN) )),[0,2*pi]);
hold on ;
ezplot(20*log10(abs( Hz(exp(j*theta)) )),[0,2*pi]);
legend('Caso analógico', 'Caso Digital' );
title('Comparativa');
hold off; grid on;

```

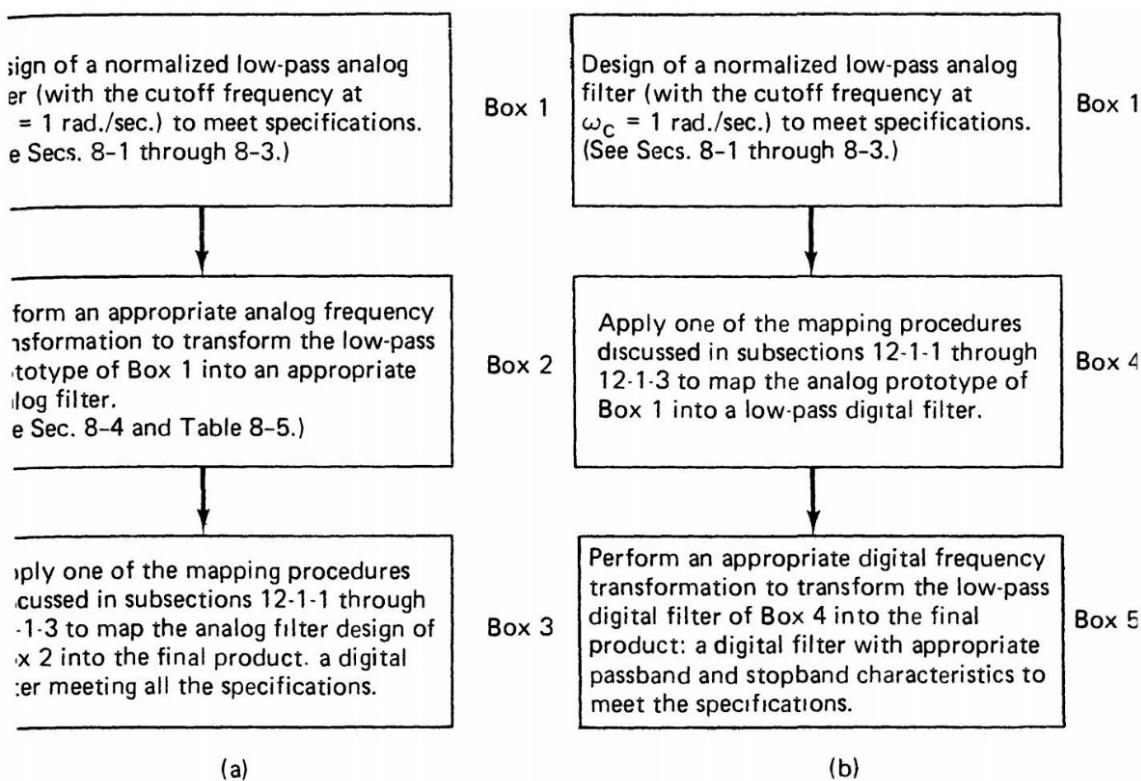


La transformación bilineal proporciona un procedimiento de mapeo simple entre filtros analógicos y digitales de modo que las características de frecuencia se conservan bajo esta transformación. Esto significa que los filtros analógicos de corte nítido de banda ancha se pueden asignar a filtros digitales de corte nítido de banda ancha sin efecto de aliasing. Esta es una ventaja sobre la transformación invariantes de impulso. En el lado negativo, la relación no lineal entre la frecuencia digital  $\theta$  y la frecuencia analógica  $\omega$  bajo la transformación bilineal distorsiona las características de frecuencia de los filtros analógicos. Además, la respuesta al impulso no se conserva bajo esta transformación.

### 12-1-4. Transformaciones de frecuencia

En las subsecciones anteriores, hemos discutido tres métodos para diseñar filtros digitales. Todos estos métodos implican primero encontrar un filtro analógico adecuado para cumplir con las especificaciones. Como se discutió en el Capítulo 8, el diseño de un filtro analógico se basa en encontrar primero un prototipo de filtro analógico de paso bajo apropiado. Luego se usa una transformación de frecuencia analógica adecuada para transformar este prototipo de paso bajo en el filtro analógico deseado. Finalmente, se usa un procedimiento de mapeo para mapear este filtro analógico a un filtro digital IIR deseado que cumpla con las especificaciones. Este procedimiento general de diseño se resume en la Fig. 12-19(a).

De las subsecciones anteriores, sabemos que los procedimientos de mapeo de la transformación de invariancia de impulso y los métodos de Euler no darán buenos diseños de filtros digitales a menos que el filtro analógico esté esencialmente limitado en banda a bajas frecuencias. Debido a la relación no lineal entre la frecuencia digital  $\theta$  y la frecuencia analógica  $\omega$ , la transformación bilineal producirá mejores resultados solo cuando las características de frecuencia del filtro analógico sean constantes por tramos. Esto significa que el procedimiento de diseño de la figura 12-19(a) no producirá buenos diseños para filtros de paso alto, rechazo de banda y algunos filtros de paso de banda. Para eliminar estas deficiencias, existe otro enfoque para el diseño de filtros digitales IIR a través del diseño de filtros analógicos. Este enfoque se describe en la Fig. 12-19(b). En este enfoque, el procedimiento de mapeo siempre tratará con un prototipo de paso bajo normalizado. Por lo tanto, los tres procedimientos de mapeo discutidos en las subsecciones anteriores darán buenos resultados. Básicamente, este enfoque implica encontrar un filtro analógico de paso bajo normalizado apropiado. Este prototipo analógico se mapeará en un prototipo de filtro digital de paso bajo. Finalmente, se utiliza una transformación de frecuencia digital para transformar el prototipo digital de paso bajo en el diseño final, un filtro digital con características de paso y banda de parada apropiadas para cumplir con las especificaciones. En esta subsección, analizamos las diversas transformaciones de frecuencia digital necesarias para completar la herramienta de diseño requerida en la Fig. 12-19(b).



**Fig. 12-19** Overall design procedures for digital filters.

Para todas las transformaciones de frecuencia digital que se discutirán en esta subsección, asumimos que el prototipo de filtro digital de paso bajo tiene una frecuencia de corte en  $\theta_p$ . Por ejemplo,

considere la función de transferencia del filtro analógico Butterworth de paso bajo normalizado de segundo orden

$$\hat{H}(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1} \quad (12-95a)$$

donde están los polos

$$\hat{p}_{1,2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \pm j \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (12-95b)$$

Por (12-56), la transformación de invariancia de impulso mapea el diseño de filtro analógico de (12-95) en un filtro digital con la función de transferencia dada por

$$H_p(z) = \frac{\sqrt{2} z^{-1} \exp(-T/\sqrt{2}) \sin(T/\sqrt{2})}{1 - 2z^{-1} \exp(-T/\sqrt{2}) \cos(T/\sqrt{2}) + z^{-2} \exp(-\sqrt{2}T)} \quad (12-96)$$

donde  $T$  es el período de muestreo. Debido a que la frecuencia de corte  $\omega_c$  del filtro Butterworth de paso bajo normalizado está en

$$\omega_c = 1 \text{ rad./sec.} \quad (12-97)$$

el prototipo analógico de paso bajo está efectivamente limitado en banda a, por ejemplo,  $\omega_0/2 = 6 \text{ rad./seg.}$ ,

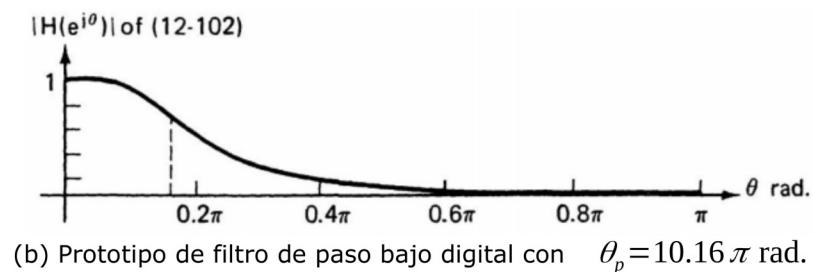
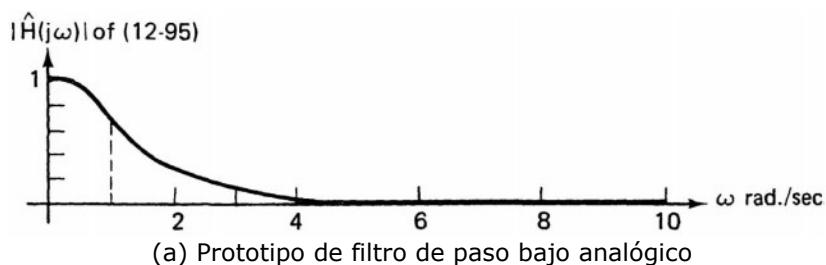
$$|\hat{H}(j\omega)| \approx 0 \text{ para } |\omega| > \frac{\omega_0}{2} = 6 \quad (12-98)$$

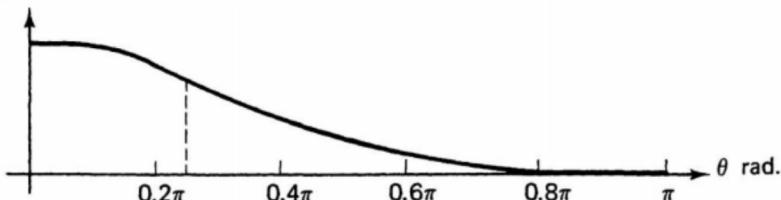
como se muestra en la Fig. 12-20(a). Cualquier período de muestreo  $T$  que satisfaga la condición de Nyquist de

$$\omega_0 T \leq 2\pi \quad (12-99)$$

no causará mucho aliasing. Por simplicidad, dejamos  $T = 0.5 \text{ seg.}$ . Claramente, en  $T = 0.5 \text{ seg.}$  satisface la (12-99). Por lo tanto, (12-96) se convierte en

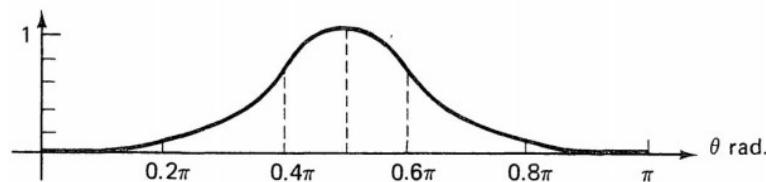
$$H_p(z) = \frac{0.344 z^{-1}}{1 - 1.318 z^{-1} + 0.493 z^{-2}} \quad (12-100)$$



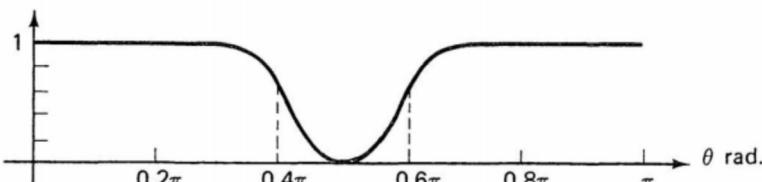
| $H(e^{j\theta})$ | of (12-107)


(c) Filtro de paso bajo digital con  $\theta_c = 0.25 \pi \text{ rad.}$

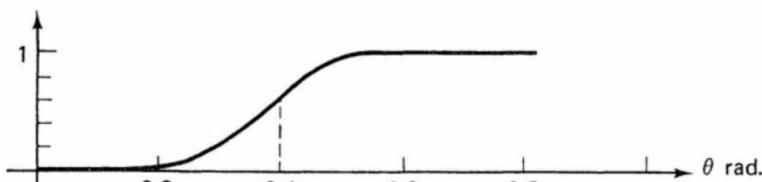
Fig. 12-20 Ilustraciones de transformaciones de frecuencia digital.

 | $H(e^{j\theta})$ | of (12-112)


(f) Filtro pasa banda digital con  $\theta_o = 0.5 \pi$ ,  $\theta_u = 0.6 \pi$  y  $\theta_v = 0.4 \pi$  rad.

 | $H(e^{j\theta})$ | of (12-116)


(f) Filtro rechaza banda digital con  $\theta_o = 0.5 \pi$ ,  $\theta_u = 0.5 \pi$  y  $\theta_v = 0.4 \pi$  rad.

 | $H(e^{j\theta})$ | of (12-120)


(f) Filtro paso alto digital con  $\theta_C = 0.4 \pi$  rad.

Fig. 12-20 (Continuado)

Observe que el filtro digital de (12-100) tiene una ganancia "dc" de <sup>192</sup>

$$\begin{aligned} |H_p(e^{j0})| &= \frac{0.344}{1 - 1.318 + 0.493} \\ &= 1.966 \simeq \frac{1}{T} |\hat{H}(j0)| = \frac{1}{T} = 2 \end{aligned} \quad (12-101)$$

Para deshacerse de esta ganancia no deseada debido al período de muestreo, el filtro digital de (12-100) se multiplica por el valor del período de muestreo. Por lo tanto, la función de transferencia del prototipo de filtro digital de paso bajo viene dada por<sup>193</sup>

$$H_p(z) = \frac{0.175 z^{-1}}{1 - 1.318 z^{-1} + 0.493 z^{-2}} \quad (12-102)$$

<sup>192</sup> La pequeña discrepancia se debe en parte a los errores aritméticos de redondeo al calcular los coeficientes de (12-100) y en parte al pequeño pero inevitable aliasing.

<sup>193</sup> En realidad, la función de transferencia de (12-102) se obtiene dividiendo la función de transferencia de (12-100) por la ganancia "de" de (12-101) para compensar los errores de redondeo de cálculo que ya ocurrieron y por la pequeña distorsión debida al aliasing.

Debido a que  $T$  es más pequeño que el período de muestreo de Nyquist, el alias casi no existe en este caso. Por lo tanto, por (12-60), la frecuencia digital  $\theta$  y la frecuencia analógica  $\omega$  están efectivamente relacionadas por

$$\theta = \omega T \quad (12-103)$$

Esto significa que  $\theta_p$ , la frecuencia de corte del prototipo de filtro digital de (12-102), viene dada por

$$\theta_p = \omega_C T = 0.5 = 0.16\pi \quad (12-104)$$

Usamos el prototipo de filtro digital de paso bajo de (12-102) para ilustrar el efecto de varias transformaciones de frecuencia digital en esta subsección. Como referencia, las características de magnitud del prototipo de filtro digital de paso bajo se muestran en la Fig. 12-20(b).

### 12-1-4-1. Transformación de paso bajo a paso bajo.

Supongamos que queremos obtener un filtro digital de paso bajo con una frecuencia de corte en  $\theta_C$  a partir de un prototipo de paso bajo con una frecuencia de corte en  $\theta_p$ . Entonces la transformación de frecuencia digital necesaria viene dada por

$$z^{-1} \rightarrow \frac{z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha z^{-1}} \quad (12-105a)$$

donde

$$\alpha \triangleq \frac{\sin[(\theta_p - \theta_C)/2]}{\sin[(\theta_p + \theta_C)/2]} \quad (12-105b)$$

**Ejemplo 12-11** Suponga que tenemos que diseñar un filtro Butterworth de paso bajo de segundo orden con una frecuencia de corte de  $0.257\pi$  rad. Encuentre la función de transferencia del filtro digital deseado basado en (12-102).

**Solución:** Por (12-105), el parámetro  $\alpha$  viene dado por

$$\alpha = \frac{\sin[(0.16\pi - 0.25\pi)/2]}{\sin[(0.16\pi + 0.25\pi)/2]} = -0.235 \quad (12-106)$$

y el filtro digital deseado tiene una función de transferencia

$$\begin{aligned} H(z) &= H_p \left[ \left( \frac{z^{-1} + 0.235}{1 + 0.235z^{-1}} \right)^{-1} \right] \\ &= \frac{0.175 \left( \frac{z^{-1} + 0.235}{1 + 0.235z^{-1}} \right)}{1 - 1.318 \left( \frac{z^{-1} + 0.235}{1 + 0.235z^{-1}} \right) + 0.493 \left( \frac{z^{-1} + 0.235}{1 + 0.235z^{-1}} \right)^2} \\ &= \frac{0.175(z^{-1} + 0.235)(1 + 0.235z^{-1})}{(1 + 0.225z^{-1})^2 - 1.318(z^{-1} + 0.235)(1 + 0.235z^{-1}) + 0.493(z^{-1} + 0.235)^2} \\ &= \frac{0.041 + 0.185z^{-1} + 0.041z^{-2}}{0.718 - 0.691z^{-1} + 0.239z^{-2}} \end{aligned} \quad (12-107)$$

Como en (12-102), la ganancia "dc" del filtro digital de (12-107) es<sup>194</sup>

$$\begin{aligned} |H(e^{j0})| &= \frac{0.041 + 0.185 + 0.041}{0.718 - 0.691 + 0.239} \\ &= \frac{0.267}{0.266} = 1.003 \simeq 1 \end{aligned} \quad (12-108)$$

La función de magnitud de (12-107) se representa en la Fig. 12-20(c).

<sup>194</sup> Observe que la ganancia de "dc" debe ser exactamente 1. La pequeña discrepancia se debe a los errores de redondeo en el cálculo.

### 12-1-4-2. Transformación de paso bajo a paso de banda.

Supongamos que tenemos que convertir un prototipo de filtro digital de paso bajo con una frecuencia de corte en  $\theta_p$  a un filtro de paso de banda con frecuencia central  $\theta_0$ , límite de frecuencia de banda de paso superior  $\theta_u$  y límite de frecuencia de banda de paso inferior  $\theta_l$  donde  $\theta_0$ ,  $\theta_u$  y  $\theta_l$  están restringidos por<sup>195</sup>

$$\cos \theta_o = \frac{\cos[(\theta_u + \theta_l)/2]}{\cos[(\theta_u - \theta_l)/2]} \quad (12-109)$$

La transformación de frecuencia digital necesaria viene dada por

$$z^{-1} \longrightarrow -\frac{z^{-2} - \left(\frac{2\alpha\beta}{\beta+1}\right)z^{-1} + \left(\frac{\beta-1}{\beta+1}\right)}{\left(\frac{\beta-1}{\beta+1}\right)z^{-2} - \left(\frac{2\alpha\beta}{\beta+1}\right)z^{-1} + 1} \quad (12-110a)$$

donde

$$\alpha = \cos \theta_0 \quad (12-110b)$$

$$\beta = \cot[(\theta_u - \theta_l)/2] \tan(\theta_p/2) \quad (12-110c)$$

**Ejemplo 12-12** Suponga que tenemos que convertir el filtro de paso bajo de (12-102) a un filtro de paso de banda con frecuencia central  $\theta_0=0.5\pi$ ,  $\theta_u=0.6\pi$  y  $\theta_l=0.4\pi$ .<sup>196</sup> Encuentre la transferencia función del filtro digital deseado.

**Solución:** Antes de continuar, calculemos los parámetros necesarios para la transformación de frecuencia.

$$\alpha = \cos 0.5\pi = 0 \quad (12-111a)$$

$$\beta = (\cos 0.1\pi)(\tan 0.08\pi) = 0.786 \quad (12-111b)$$

$$\frac{\beta-1}{\beta+1} = -0.120 \quad (12-111c)$$

$$\frac{2\alpha\beta}{\beta+1} = 0 \quad (12-111d)$$

Sustituyendo (12-111) y (12-110) en (12-102), obtenemos la función de transferencia del filtro digital deseado<sup>197</sup>

$$\begin{aligned} H(z) &= H_p \left[ \left( -\frac{z^{-2} - 0.12}{-0.12z^{-2} + 1} \right)^{-1} \right] \\ &= \frac{-0.175 \left( \frac{z^{-2} - 0.12}{-0.12z^{-2} + 1} \right)}{1 + 1.318 \left( \frac{z^{-2} - 0.12}{-0.12z^{-2} + 1} \right) + 0.493 \left( \frac{z^{-2} - 0.12}{-0.12z^{-2} + 1} \right)^2} \\ &= \frac{-0.175(z^{-2} - 0.12)(-0.12z^{-2} + 1)}{(-0.12z^{-2} + 1)^2 + 1.318(z^{-2} - 0.12)(-0.12z^{-2} + 1) + 0.493(z^{-2} - 0.12)^2} \\ &= \frac{0.021z^{-4} - 0.178z^{-2} + 0.021}{0.349z^{-4} + 0.979z^{-2} + 0.849} \end{aligned} \quad (12-112)$$

La ganancia de banda media del filtro digital resultante se puede obtener sustituyendo

<sup>195</sup> Esto significa que dos de los tres parámetros  $\theta_o$ ,  $\theta_u$  y  $\theta_l$  están libres y el tercero no.

<sup>196</sup> Claramente, (12-109) está satisfecho aquí.

<sup>197</sup> En general, la función de transferencia  $H(z)$  de un filtro de paso de banda no es una función incluso racional como en (12-112).

$$z = e^{j0.5\pi} = j$$

en (12-112) como

$$H(e^{j0.5\pi}) = \frac{0.220}{0.219} = 1.004 \approx 1$$

La función de magnitud del filtro de paso de banda deseado de (12-112) se muestra en la Fig. 12-20(d).

### 12-1-4-3. Transformación de paso bajo a rechazo de banda.

Supongamos que tenemos que transformar un prototipo de filtro digital de paso bajo con una frecuencia de corte en 0p a un filtro de rechazo de banda con  $\theta_o$  como frecuencia central de la banda de rechazo, y con  $\theta_u$  y  $\theta_l$  como los límites de frecuencia superior e inferior de la banda. banda de rechazo, donde  $\theta_o$ ,  $\theta_u$  y  $\theta_l$  están restringidos por

$$\cos \theta_o = \frac{\cos[(\theta_u - \theta_l)/2]}{\cos[(\theta_u + \theta_l)/2]} \quad (12-113)$$

La transformación de frecuencia digital requerida viene dada por

$$z^{-1} \longrightarrow \frac{z^{-2} - \left(\frac{2\alpha}{1+\beta}\right)z^{-1} + \left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)}{\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)z^{-2} - \left(\frac{2\alpha}{1+\beta}\right)z^{-1} + 1} \quad (12-114a)$$

donde

$$\alpha \triangleq \cos \theta_0 \quad (12-114b)$$

$$\beta \triangleq \tan[(\theta_u - \theta_l)/2] \tan(\theta_p/2) \quad (12-114c)$$

**Ejemplo 12-13** Suponga que tenemos que convertir el prototipo de filtro digital de paso bajo de (12-102) en un filtro de rechazo de banda con  $\theta_o = 0.5\pi rad.$ ,  $\theta_u = 0.6\pi rad.$  y  $\theta_l = 0.4\pi rad.$ . <sup>198</sup> Encuentre la función de transferencia del filtro digital deseado.

**Solución:** De (12-114), tenemos

$$\alpha = \cos 0.5\pi = 0 \quad (12-115a)$$

$$\beta = (\tan 0.1\pi)(\tan 0.08\pi) = 0.083 \quad (12-115b)$$

$$\frac{2\alpha}{1+\beta} = 0 \quad (12-115c)$$

$$\frac{1-\beta}{1+\beta} = 0.847 \quad (12-115d)$$

Sustituyendo (12-114) y (12-115) en (12-102), la función de transferencia deseada viene dada por

<sup>198</sup> Observe que (12-113) se cumple aquí.

$$\begin{aligned}
 H(z) &= H_p \left[ \left( \frac{z^{-2} + 0.847}{0.847z^{-2} + 1} \right)^{-1} \right] \\
 &= \frac{0.175 \frac{z^{-2} + 0.847}{0.847z^{-2} + 1}}{1 - 1.318 \left( \frac{z^{-2} + 0.847}{0.847z^{-2} + 1} \right) + 0.493 \left( \frac{z^{-2} + 0.847}{0.847z^{-2} + 1} \right)^2} \quad (12-11t) \\
 &= \frac{0.175(z^{-2} + 0.847)(0.847z^{-2} + 1)}{(0.847z^{-2} + 1)^2 - 1.318(z^{-2} + 0.847)(0.847z^{-2} + 1) + 0.493(z^{-2} + 0.847)^2} \\
 &= \frac{0.148z^{-4} + 0.300z^{-2} + 0.148}{0.094z^{-4} + 0.266z^{-2} + 0.237}
 \end{aligned}$$

Observe que la ganancia "de" de este filtro de rechazo de banda viene dada por

$$H(e^{j0}) = \frac{0.596}{0.597} = 0.998 \approx 1 \quad (12-117)$$

El pequeño error se debe a un error de cálculo. La característica de magnitud del filtro de rechazo de banda se muestra en la Fig. 12-20(e).

#### 12-1-4-4. Transformación de paso bajo a paso alto.

La transformación de frecuencia digital necesaria para convertir un filtro digital de paso bajo con una frecuencia de corte de  $\theta_p$  en un filtro digital de paso alto con una frecuencia de corte de  $\theta_c$  viene dada por

$$z^{-1} \longrightarrow -\frac{z^{-1} + \alpha}{1 + \alpha z^{-1}} \quad (12-118a)$$

donde

$$\alpha \triangleq \frac{\cos[(\theta_p - \theta_c)/2]}{\cos[(\theta_p + \theta_c)/2]} \quad (12-118b)$$

**Ejemplo 12-14** Suponga que tenemos que convertir el prototipo de filtro digital de paso bajo de (12-102) en un filtro digital de paso alto con frecuencia de corte en  $\theta_c = 0.4\pi rad$ . Encuentre la función de transferencia deseada.

**Solución:** De (12-118b), obtenemos

$$\alpha = -\frac{\cos 0.12\pi}{\cos 0.28\pi} = -0.687 \quad (12-119)$$

Sustituyendo (12-118) y (12-119) en (12-102), se encuentra que la función de transferencia deseada es

$$\begin{aligned} H(z) &= H_p \left[ \left( -\frac{z^{-1} - 0.687}{1 - 0.687z^{-1}} \right)^{-1} \right] \\ &= \frac{-0.175 \left( \frac{z^{-1} - 0.687}{1 - 0.687z^{-1}} \right)}{1 + 1.318 \left( \frac{z^{-1} - 0.687}{1 - 0.687z^{-1}} \right) + 0.493 \left( \frac{z^{-1} - 0.687}{1 - 0.687z^{-1}} \right)^2} \quad (12-120) \\ &= \frac{-0.175(z^{-1} - 0.687)(1 - 0.687z^{-1})}{(1 - 0.687z^{-1})^2 + 1.318(z^{-1} - 0.687)(1 - 0.687z^{-1}) + 0.493(z^{-1} - 0.687)^2} \\ &= \frac{0.120z^{-2} - 0.258z^{-1} + 0.120}{0.059z^{-2} - 0.111z^{-1} + 0.327} \end{aligned}$$

Observe que la ganancia "de" y la ganancia de alta frecuencia del filtro digital resultante están dadas, respectivamente, por

$$H(e^{j0}) = -\frac{0.018}{0.275} = -0.065 \quad (12-121a)$$

y

$$H(e^{j\pi}) = -\frac{0.498}{0.497} = 1.002 \approx 1 \quad (12-121b)$$

Idealmente,  $H(e^{j0})$  debería ser cero y  $H(e^{j\pi})$  debería ser la unidad. Observe que el resultado no ideal en (12-120) se debe principalmente a errores de cálculo que ocurrieron en (12-102) en lugar de aliasing. Esto se debe a que el método de invariancia de impulso se aplicó a un filtro de paso bajo con características efectivas de banda limitada en lugar de a un filtro de paso alto. El filtro de paso alto resultante se obtuvo mediante transformación de frecuencia digital. La curva de magnitud de este filtro de paso alto se muestra en la Fig. 12-20(f).

Para cerrar esta subsección, nos gustaría señalar que el procedimiento general de diseño de filtros digitales de la Fig. 12-19(b) se puede utilizar para diseñar filtros de paso alto, paso de banda y rechazo de banda, así como filtros pasa bajo. No hay mucha distorsión de aliasing en el diseño final.

Sin embargo, este procedimiento requiere representaciones de coeficientes más precisas y necesita más dígitos significativos en el cálculo, lo que genera un costo mayor que sus contrapartes correspondientes en el procedimiento de diseño de la Fig. 12-19(a). Este inconveniente económico a menudo eclipsa algunas de las ventajas técnicas que tiene este método sobre el procedimiento presentado en la Fig. 12-19(a).-

### 12-1-5. Diseño de filtros digitales de paso todo

En todos los procedimientos de diseño discutidos hasta ahora en la Sec. 12-1, hemos evitado discutir los filtros digitales de paso total. Esto se debe en parte a que los filtros de paso total funcionan de manera bastante diferente y en parte a que es extremadamente difícil determinar las características de fase de los filtros digitales de paso total. En esta subsección, analizamos algunas características básicas de los filtros digitales de paso total.

Un filtro digital de paso total es un filtro digital IIR con una función de magnitud constante para todos los valores de frecuencia digital. La condición necesaria para que una función de transferencia  $H(z)$  represente un filtro de paso total es que para cada polo  $z_k = (1/r_k)e^{j\theta_k}$  haya un cero correspondiente  $p_k = r_k e^{j\theta_k}$ . Si  $\theta_k \neq 0$  o  $\pi$ , entonces el polo  $p_k$  y el cero  $z_k$  aparecerán en pares conjugados.

Una sección típica de primer orden de un filtro digital de paso total tiene una función de transferencia

$$H_1(z) = \frac{z^{-1} - a}{1 - az^{-1}} \quad (12-122)$$

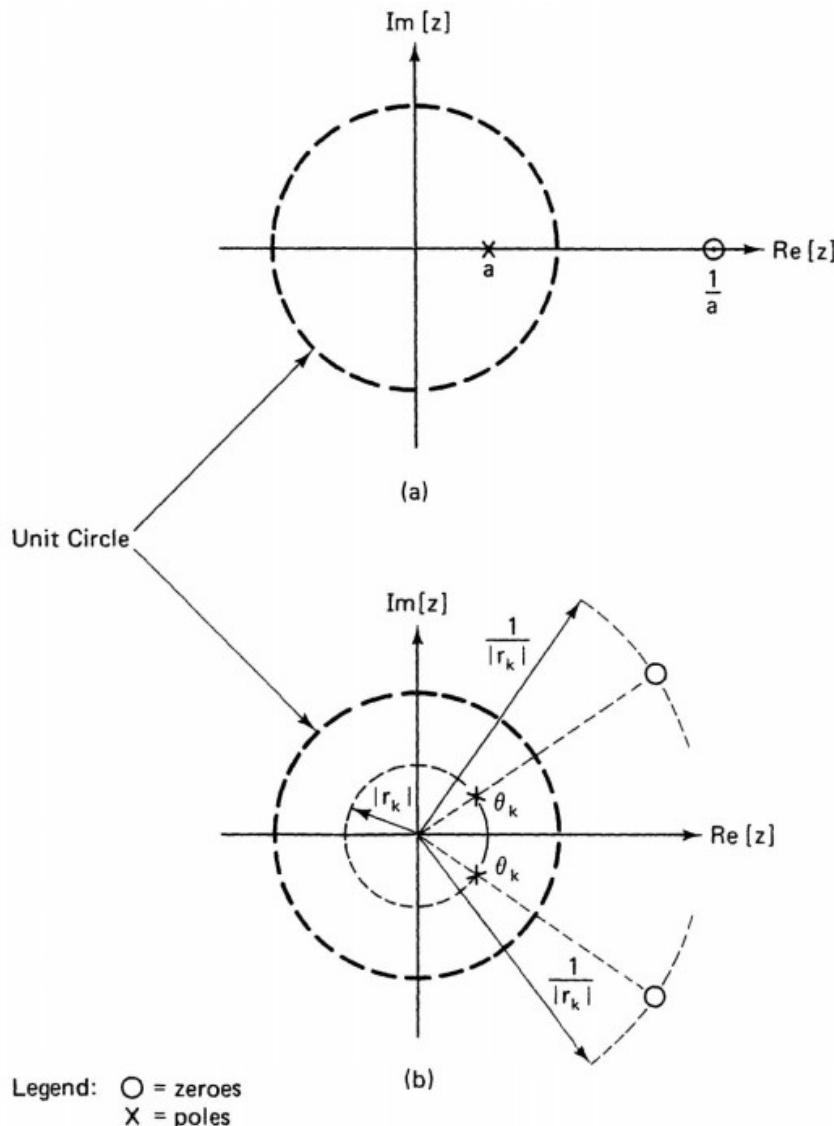
donde  $a$  es real. El filtro de paso total de (12-122) tiene un polo en  $z=a$  y un cero en  $z=1/a$ , como se muestra en la Fig. 12-21(a). Para ser estable, debemos tener

$$|a| < 1 \quad (12-123)$$

Para ver que (12-122) es de hecho un filtro de paso total, calculamos su función de magnitud como

$$\begin{aligned} |H_1(e^{j\theta})|^2 &= \left| \frac{e^{-j\theta} - a}{1 - ae^{-j\theta}} \right|^2 \\ &= \left| \frac{\cos \theta - a - j \sin \theta}{1 - a \cos \theta + aj \sin \theta} \right|^2 \\ &= \frac{(\cos \theta - a)^2 + \sin^2 \theta}{(1 - a \cos \theta)^2 + (a \sin \theta)^2} \quad (12-124) \\ &= \frac{\cos^2 \theta - 2a \cos \theta + a^2 + \sin^2 \theta}{1 - 2a \cos \theta + a^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta} \\ &= \frac{1 - 2a \cos \theta + a^2}{1 - 2a \cos \theta + a^2} = 1 \end{aligned}$$

lo que significa que el filtro definido por (12-122) es de hecho un filtro de paso total.



**Fig. 12-21** Pole-zero patterns of all-pass digital filters. (a) First-order case. (b) Second-order case.

Una sección típica de segundo orden de un filtro de paso total tiene una función de transferencia dada por<sup>28</sup>

$$\begin{aligned} H_2(z) &= \frac{1 - (2/r_k) \cos \theta_k z^{-1} + (1/r_k^2)z^{-2}}{1 - 2r_k \cos \theta_k z^{-1} + r_k^2 z^{-2}} \\ &= \frac{[1 - (1/r_k)z^{-1} \exp(j\theta_k)][1 - (1/r_k)z^{-1} \exp(-j\theta_k)]}{[1 - r_k z^{-1} \exp(j\theta_k)][1 - r_k z^{-1} \exp(-j\theta_k)]} \end{aligned} \quad (12-125a)$$

donde están los polos

$$p_{1,2} = r_k e^{(\pm j \theta_k)} \quad (12-125b)$$

y los ceros están en

$$z_{1,2} = (1/r_k) e^{\pm j \theta_k} \quad (12-125c)$$

como se muestra en la Fig. 12-21(b). Para que el filtro sea estable, requerimos que

$$|r_k| < 1 \quad (12-126)$$

Si hacemos que  $z = e^{j\theta}$ , encontramos que la función de magnitud de (12-125) es

$$|H_2(e^{j\theta})|^2 = \left| \frac{\exp(j\theta) - (1/r_k) \exp(j\theta_k)}{\exp(j\theta) - r_k \exp(j\theta_k)} \right|^2 \left| \frac{\exp(j\theta) - (1/r_k) \exp(-j\theta_k)}{\exp(j\theta) - r_k \exp(-j\theta_k)} \right|^2 \quad (12-127)$$

Consideremos el primer término en la expresión para  $|H_2(e^{j\theta})|^2$ .

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\exp(j\theta) - (1/r_k) \exp(j\theta_k)}{\exp(j\theta) - r_k \exp(j\theta_k)} \right|^2 \\ &= \frac{|[\cos \theta - (1/r_k) \cos \theta_k] + j[\sin \theta - (1/r_k) \sin \theta_k]|^2}{|(\cos \theta - r_k \cos \theta_k) + j(\sin \theta - r_k \sin \theta_k)|^2} \quad (12-128a) \\ &= \frac{[\cos \theta - (1/r_k) \cos \theta_k]^2 + [\sin \theta - (1/r_k) \sin \theta_k]^2}{(\cos \theta - r_k \cos \theta_k)^2 + (\sin \theta - r_k \sin \theta_k)^2} \\ &= \frac{1 + (1/r_k^2) - (2/r_k) \cos(\theta - \theta_k)}{1 + r_k^2 - 2r_k \cos(\theta - \theta_k)} = r_k^{-2} \end{aligned}$$

De manera similar, podemos demostrar que

$$\left| \frac{\exp(j\theta) - (1/r_k) \exp(-j\theta_k)}{\exp(j\theta) - r_k \exp(-j\theta_k)} \right|^2 = r_k^{-2} \quad (12-128b)$$

Sustituyendo (12-128) en (12-127), tenemos

$$|H_2(e^{j\theta})|^2 = r_k^{-4} = \text{constante para todo } \theta \quad (12-129)$$

Esto implica que el filtro digital de (12-125) es de hecho un filtro digital de paso total.

Una propiedad importante de los filtros de paso total es que un filtro digital, obtenido mediante una conexión en cascada de secciones de filtro de paso total, es un filtro de paso total. Hablando matemáticamente, esto significa que si  $H_1(z), H_2(z), \dots, H_N(z)$  son funciones de transferencia que representan filtros de paso total, entonces la función de transferencia

$$H(z) \triangleq H_1(z)H_2(z)\dots H_N(z) \quad (12-130)$$

representa un filtro de paso total.

**Ejemplo 12-15** Muestre que el filtro digital representado por

$$H(z) = \left( \frac{z^{-1} - a}{1 - az^{-1}} \right) \left( \frac{r_k^2 - 2r_k z^{-1} \cos \theta_k + z^{-2}}{1 - 2r_k z^{-1} \cos \theta_k + r_k^2 z^{-2}} \right) \quad (12-131)$$

Es un filtro de paso total.

**Solución:** Observa que

$$H(z) = H_1(z) H_2(z) r_k^2 \quad (12-132)$$

donde  $H_1(z)$  viene dado por (12-122) y  $H_2(z)$  por (12-125). Por (12-124) y (12-129), la función de magnitud

$$|H(e^{j\theta})|^2 = |H_1(e^{j\theta})|^2 |H_2(e^{j\theta})|^2 r_k^4$$

es dado por

$$|H(e^{j\theta})|^2 = (1)(r_k^{-4})(r_k^4) = 1 \quad \text{para todo } \theta \quad (12-133)$$

Por lo tanto (12-131) representa un filtro digital de paso total.

## 12-2 Diseño de filtros digitales FIR

La función de transferencia de un filtro digital FIR tiene la forma de

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n} \quad (12-134)$$

donde la respuesta al impulso es de longitud  $N$  o tiene una duración de  $N$  muestras. Si la respuesta de impulso de un filtro digital FIR satisface

$$h(n) = h(N-1-n) \quad (12-135)$$

para  $n=0,1,\dots,(N/2)-1$  si  $N$  es par, y para  $n=0,1,\dots,(N-1)/2$  si  $N$  es impar, entonces se puede demostrar que el filtro digital tendrá una característica de fase lineal. De hecho, cuando  $N$  es impar, (12-134) y (12-135) dan

$$\begin{aligned} H(e^{j\theta}) &= \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-jn\theta} \\ &= \sum_{n=0}^{(N-3)/2} [h(n) e^{-jn\theta} + h(N-1-n) e^{-j(N-1-n)\theta}] + h\left(\frac{N-1}{2}\right) e^{-j[(N-1)/2]\theta} \\ &= \sum_{n=0}^{(N-3)/2} h(n) [e^{-jn\theta} + e^{-j(N-1-n)\theta}] + h\left(\frac{N-1}{2}\right) e^{-j[(N-1)/2]\theta} \quad (12-136a) \\ &= e^{-j[(N-1)/2]\theta} \left\{ h\left(\frac{N-1}{2}\right) + \sum_{n=0}^{(N-3)/2} h(n) [e^{-j\{n-\lceil(N-1)/2\rceil\}\theta} + e^{j\{n-\lceil(N-1)/2\rceil\}\theta}] \right\} \\ &= e^{-j[(N-1)/2]\theta} \left\{ h\left(\frac{N-1}{2}\right) + \sum_{n=0}^{(N-3)/2} 2h(n) \cos \left[ \left( n - \frac{N-1}{2} \right) \theta \right] \right\} \end{aligned}$$

De la misma manera, cuando  $N$  es par, la respuesta en frecuencia viene dada por

$$H(e^{j\theta}) = e^{-j[(N-1)/2]\theta} \left\{ \sum_{n=0}^{(N/2)-1} 2h(n) \cos \left[ \left( n - \frac{N-1}{2} \right) \theta \right] \right\} \quad (12-136b)$$

En ambos casos, la fase  $\phi(\theta)$  del filtro digital FIR viene dada por

$$\phi(\theta) = -\underline{H(e^{j\theta})} = \frac{N-1}{2} \theta \quad (12-137)$$

que es lineal para  $-\pi < \theta \leq \pi$ . La función de retardo de grupo

$$\tau(\theta) \triangleq \frac{d\phi(\theta)}{d\theta} = \frac{N-1}{2} \quad (12-138)$$

es constante para  $-\pi < \theta \leq \pi$ .

En la mayoría de las situaciones, es la demanda de una fase lineal o un requisito de retardo de grupo constante lo que induce a utilizar filtros digitales FIR. Debido a la restricción impuesta por (12-135), las ubicaciones cero de un filtro digital FIR de fase lineal están restringidas para cumplir con ciertos requisitos de simetría. Para ver esto, escribimos (12-134) como

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{m=0}^{N-1} h(m) z^{-m} \\ &= z^{-(N-1)} \sum_{m=0}^{N-1} h(m) z^{(N-m-1)} \end{aligned} \quad (12-139)$$

Definamos una nueva variable independiente

$$m \triangleq N-n-1 \quad (12-140)$$

Con (12-135),(12-139) se puede escribir en términos de la nueva variable ficticia  $m$  como

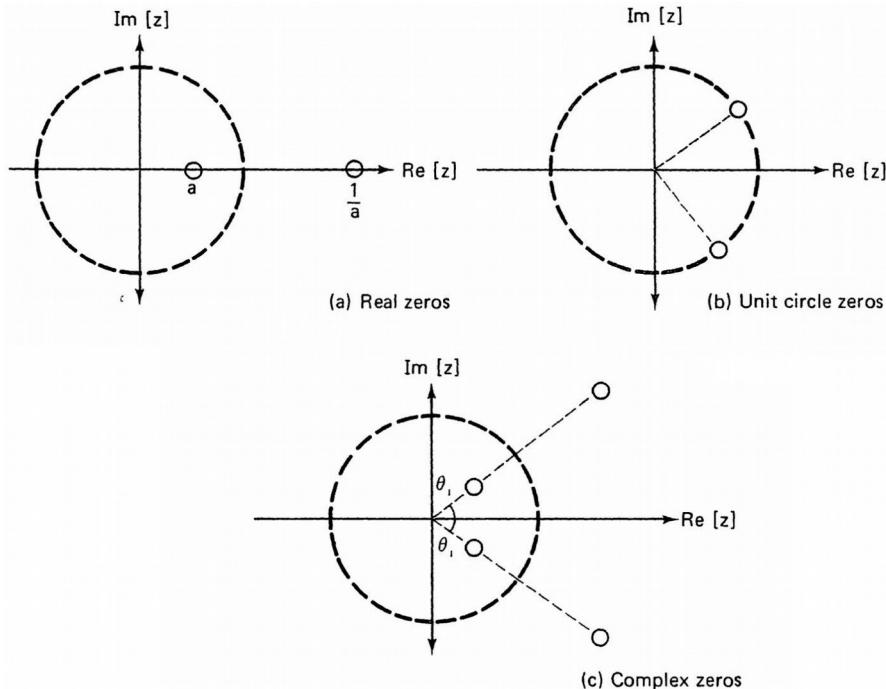
$$\begin{aligned} H(z) &= z^{-(N-1)} \sum_{m=0}^{N-1} h(N-m-1)z^m \\ &= z^{-(N-1)} \sum_{m=0}^{N-1} h(m)(z^{-1})^{-m} \\ &= z^{-(N-1)} H(z^{-1}) \end{aligned} \quad (12-141)$$

Esto significa que los ceros de  $H(z)$  son los ceros de  $H(z^{-1})$  excepto, quizás, por los ceros "fantasmas" en el origen. En base a esta observación, los ceros de un filtro digital FIR de fase lineal tienen las siguientes propiedades de simetría:

- (a) Si  $z_i=a$  es un cero real de  $H(z)$ , entonces  $z_i^{-1}=a^{-1}$  es también un cero de  $H(z)$ .
- b) Si  $z_i=e^{(j\theta_i)}$  es un cero de  $H(z)$ , donde  $\theta_i \neq 0$  y  $\theta_i \neq \pi$ , entonces  $z_i^{-1}=\bar{z}_i=e^{-j\theta_i}$  también es un cero de  $H(z)$ .
- (c) Si  $z_i=r_i e^{(j\theta_i)}$  es un cero de  $H(z)$ , donde  $r_i \neq 1$ ,  $\theta_i \neq 0$  y  $\theta_i \neq \pi$ , entonces  $\bar{z}_i=r_i e^{-j\theta_i}$ ,  $z_i^{-1}=(1/r_i)e^{-j\theta_i}$  y  $\bar{z}_i^{-1}=(1/r_i)e^{j\theta_i}$  también son ceros de  $H(z)$ .

Estas propiedades simétricas de las ubicaciones de los ceros se ilustran en la Fig. 12-22. Como consecuencia, la función de transferencia de un filtro digital FIR de fase lineal se puede escribir como un producto de factores elementales como

$$H(z)=\prod_{i=1}^K H_i(z) \quad (12-142)$$



**Fig. 12-22** Symmetry properties of zero locations of linear phase FIR digital filters.

donde cada  $H(z)$  puede adoptar uno de los siguientes tres formatos:

$$\begin{aligned} H_A(z) &= (1 - az^{-1}) \left[ 1 - \left( \frac{1}{a} \right) z^{-1} \right] \\ &= 1 - \left( a + \frac{1}{a} \right) z^{-1} + z^{-2} \end{aligned} \quad (12-14)$$

$$\begin{aligned} H_B(z) &= (1 - e^{j\theta_i} z^{-1})(1 - e^{-j\theta_i} z^{-1}) \\ &= 1 - (2 \cos \theta_i) z^{-1} + z^{-2} \end{aligned} \quad (12-143b)$$

$$\begin{aligned} H_C(z) &= [1 - r_i e^{j\theta_i} z^{-1}][1 - r_i e^{-j\theta_i} z^{-1}][1 - (1/r_i) e^{j\theta_i} z^{-1}][1 - (1/r_i) e^{-j\theta_i} z^{-1}] \\ &= 1 - 2 \left[ \frac{r_i^2 + 1}{r_i} \right] (\cos \theta_i) z^{-1} + \left[ r_i^2 + \frac{1}{r_i^2} + 4 \cos \theta_i \right] z^{-2} \\ &\quad - 2 \left[ \frac{r_i^2 + 1}{r_i} \right] (\cos \theta_i) z^{-3} + z^{-4} \end{aligned} \quad (12-143c)$$

### 12-2-1. Método de muestreo de frecuencia

Como se discutió en la Sec. 11-4, un filtro digital FIR caracterizado por (12-134) tiene una representación DFT equivalente

$$\tilde{H}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j2\pi nk/N} \quad (12-144)$$

donde  $\tilde{H}(k)$  es en realidad la secuencia de muestras de  $N$  puntos uniformemente espaciadas de la respuesta de frecuencia del filtro digital. Como consecuencia, la secuencia de respuesta al impulso  $h(n)$  y la función de transferencia  $H(z)$  del filtro digital FIR, en términos de la DFT de (12-144), están dadas por

$$h(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{H}(k) e^{j2\pi nk/N} \quad (12-145)$$

y

$$H(z) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{H}(k) \frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1} e^{j2\pi k/N}} \quad (12-146)$$

La ecuación (12-146) es clave para el diseño de un filtro digital FIR.

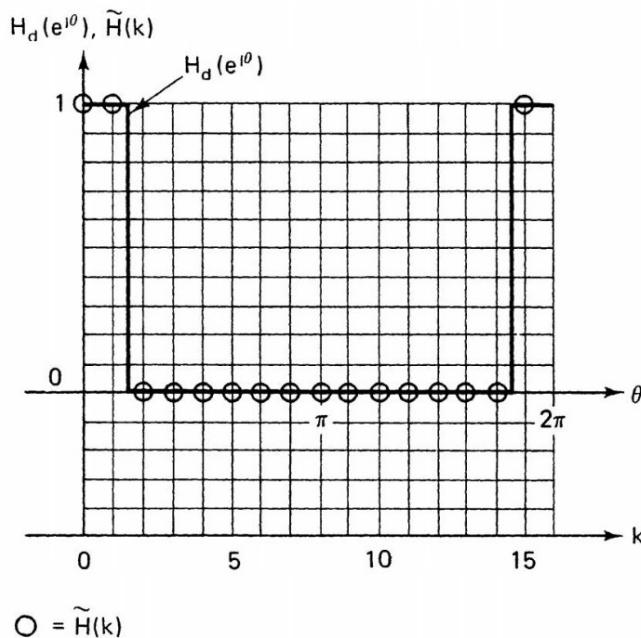
Suponga que se da una respuesta de frecuencia deseada  $H_d(e^{j\theta})$  para  $-\pi \leq \theta \leq \pi$ . Esto significa que  $H_d(e^{j\theta})$  está definida para todo  $\theta$ . Un procedimiento de diseño es dejar que sea  $\tilde{H}(k)$  la secuencia de muestras de  $N$  puntos uniformemente espaciadas de la respuesta de frecuencia deseada,

$$\tilde{H}(k) \triangleq H_d(e^{j\theta}) \Big|_{\theta=2\pi k/N} \quad (12-147)$$

donde  $k=0,1,2,\dots,N-1$ . Usando los datos sin procesar de (12-147), podemos obtener una función de transferencia FIR apropiada mediante (12-146). Este procedimiento asegura que la respuesta de frecuencia resultante coincida con las características deseadas en los puntos muestreados

$$\theta = \frac{2\pi k}{N} \quad \text{para } k=0,1,2,\dots,N-1 \quad (12-148)$$

**Ejemplo 12-16** Suponga que vamos a diseñar un filtro digital de paso bajo cuyas características de magnitud se muestran en la Fig. 12-23. Encuentre una función de transferencia adecuada a través de un método de muestreo de frecuencia de 16 puntos.



**Fig. 12-23** An example for the frequency-sampling method.

**Solución:** En este caso la secuencia DFT está dada por

$$\begin{aligned} \widetilde{H}(0) &= \widetilde{H}(1) = \widetilde{H}(15) = 1 \\ \widetilde{H}(k) &= 0 \quad \text{para } k = 2, 3, 4, \dots, 14 \end{aligned} \quad (12-149)$$

Usando (12-146), obtenemos la función de transferencia deseada

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1}{16} \left[ \sum_{k=0}^{15} \frac{(1 - z^{-16}) \widetilde{H}(k)}{1 - z^{-1} \exp(j\pi k/8)} \right] \\ &= \frac{1 - z^{-16}}{16} \left[ \frac{1}{1 - z^{-1} \exp(j\pi 0/8)} + \frac{1}{1 - z^{-1} \exp(j\pi/8)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{1 - z^{-1} \exp(j\pi 15/8)} \right] \\ &= \frac{1 - z^{-16}}{16} \left[ \frac{1}{1 - z^{-1}} + \frac{1}{1 - z^{-1} \cos(\pi/8) - jz^{-1} \sin(\pi/8)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{1 - z^{-1} \cos(\pi/8) + jz^{-1} \sin(\pi/8)} \right] \\ &= \frac{1 - z^{-16}}{16} \left[ \frac{1}{1 - z^{-1}} + \frac{2(1 - z^{-1} \cos(\pi/8))}{1 - 2z^{-1} \cos(\pi/8) + z^{-2}} \right] \quad \blacksquare \end{aligned} \quad (12-150)$$

Se puede demostrar que la respuesta de frecuencia de (12-150) será igual a las especificaciones de (12-149) en las frecuencias digitales de muestreo

$$\theta = \frac{k\pi}{8} \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \dots, 15 \quad (12-151)$$

Sin embargo, la respuesta de frecuencia resultante de (12-150) puede no comportarse bien entre las frecuencias de muestreo. Este comportamiento está relacionado con el fenómeno de Gibbs, que

describe el sobreimpulso de una función escalonada representada por una serie de Fourier truncada.

### Resolución Matlab – Problema 12-16

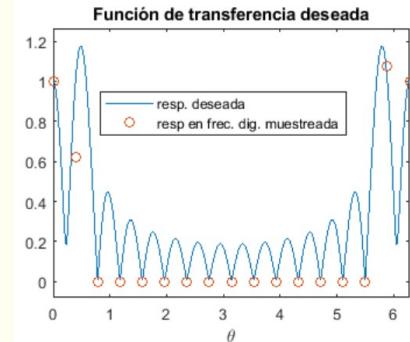
$$\left\{ \begin{array}{l} h(n) = \underbrace{\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \widetilde{H}(k) e^{\frac{j2\pi nk}{N}}}_{H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n}} \\ H(z) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \widetilde{H}(k) \underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} e^{\frac{j2\pi nk}{N}} z^{-n}}_{H(z) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \widetilde{H}(k) \frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1} e^{j2\pi k/N}}} \end{array} \right.$$

```
clear all, clc;
syms k 'integer';

syms z 'real';
H(z)=(1-z^-16)/16*(1/(1-z^-1)+ 2*(1-z^-1*cos(pi/8)) / (1-
2*z^-1 * cos(pi/8)+z^-2) );

syms theta 'real';
clf; ezplot( abs( H(exp(j*theta) ) ) , [ 0, 2*pi] ),
hold on;
plot([0:pi/8:2*pi], abs([limit( H(exp(j*theta) ), theta , 0) H(exp(j*[pi/8:pi/8:2*pi]) ) ]),'o');
legend('resp. deseada', 'resp en freq. dig.
muestrada');

title('Función de transferencia deseada')
legend('Position',[0.23544,0.61655,0.52658,0.12331]);
hold off;
```



### 12-2-2. El método de ventanas (windowing)

Debido a que la respuesta de frecuencia  $H(e^{j\theta})$  de cualquier filtro digital es una función periódica de  $\theta$ , tiene una expansión en serie de Fourier como

$$H(e^{j\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) e^{-j\theta n} \quad (12-152a)$$

donde

$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\theta}) e^{j\theta n} d\theta \quad (12-152b)$$

Obviamente, los coeficientes de la serie de Fourier  $h(n)$  son, de hecho, la secuencia de respuesta al impulso del filtro digital.

Una forma posible de obtener un filtro digital FIR que se aproxime a  $H(e^{j\theta})$  es truncar la serie infinita de (12-152a) en una serie finita. Sin embargo, el conocido fenómeno de Gibbs establece que el truncamiento de la serie infinita de (12-152a) provocará sobreimpulsos y rizados antes y después de cualquier punto de discontinuidad en la respuesta de frecuencia deseada. Además, estos tamaños de sobreimpulso y rizados no disminuirán sin importar cuán larga sea la secuencia, siempre que sea de longitud finita. Esto, en esencia, implica que el truncamiento directo de (12-152a) para obtener una aproximación de filtro digital FIR no es un método satisfactorio.

El método de creación de ventanas consiste en utilizar secuencias de ponderación finitas  $w(n)$ , denominadas ventanas, para modificar los coeficientes de Fourier de (12-152a) a una secuencia de respuesta de impulso finita deseable  $h_D(n)$ , donde

$$h_D(n) = h(n)w(n) \quad (12-153a)$$

y  $w(n)$  es una secuencia de longitud finita con

$$w(n) = 0 \text{ para } n > N \text{ y } n < 0 \quad (12-153b)$$

De (12-153), observamos que la respuesta de impulso resultante  $n > N$  también tiene una duración  $N$ . Tal que esto es

$$h_D(n) = 0 \text{ para } n > N \text{ y } n < 0 \quad (12-154)$$

Ahora resumimos el procedimiento de diseño para el método de ventanas de la siguiente manera:

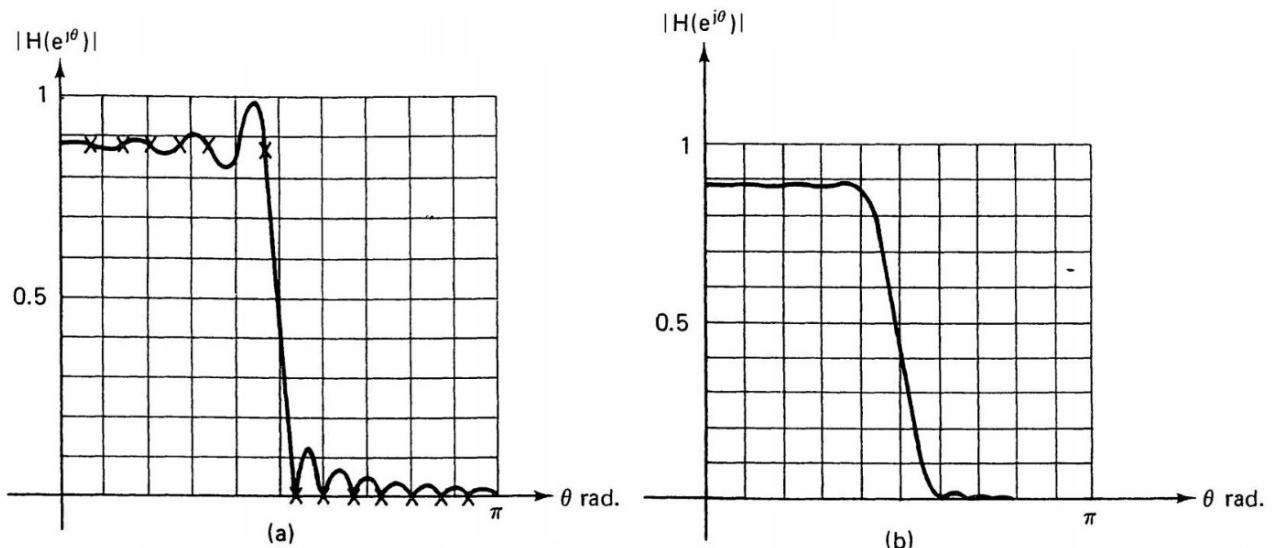
1. Dada la función de respuesta de frecuencia deseada  $H(e^{j\theta})$ , que puede ser el resultado obtenido por el método de muestreo de frecuencia.
2. Encuentre su secuencia de respuesta de impulso asociada  $h(n)$  mediante (12-152) o encontrando la transformada z inversa de  $H(z)$ , donde  $H(z)$  se obtiene de  $H(e^{j\theta})$  reemplazando  $e^{j\theta}$  con  $z$ .
3. Emplear una función de ventana apropiada  $w(n)$  para modificar la secuencia  $h(n)$  para obtener la secuencia de respuesta de impulso del filtro digital FIR  $h_D(n)$  por (12-153).

Debido a que la multiplicación de dos secuencias en el dominio del tiempo es equivalente a la convolución de dos respuestas de frecuencia en el dominio de la frecuencia, el método de ventana tiene el efecto de suavizar los puntos ásperos (moderando los sobreimpulsos y los rizados) en la respuesta de frecuencia original. Por ejemplo, considere la respuesta de frecuencia del filtro digital FIR que se muestra en la Fig. 12-24(a).<sup>199</sup> Con la función de ventana simple

<sup>199</sup> La figura 12-24(a) muestra la respuesta de frecuencia de un filtro digital FIR diseñado para implementar un filtro de paso bajo a través de la técnica de muestreo de frecuencia.

$$\begin{aligned} w(n) &= 1 + \cos \frac{2\pi n}{N} && \text{para } 0 \leq n \leq N-1 \\ &= 0 && \text{para otro valor} \end{aligned} \quad (12-155)$$

aplicada a la Fig. 10-24(a), obtenemos la respuesta en frecuencia de la Fig. 10-24(b). Es evidente que la respuesta original de la Fig. 10-24(a) se ha suavizado de tal manera que los rizados de los lóbulos laterales se reducen considerablemente. El inconveniente es que la banda de transición se ha ampliado.



**Fig. 12-24** Magnitude characteristics of a low-pass filter (a) before windowing, and (b) after windowing with (12-155).

Para cerrar esta subsección, enumeramos algunas funciones de ventana establecidas de la siguiente manera:

#### VENTANA RECTANGULAR:

$$\begin{aligned} w(n) &= 1 && \text{para } 0 \leq n \leq N-1 \\ &= 0 && \text{para otro valor} \end{aligned} \quad (12-156)$$

#### VENTANA BARTLETT O VENTANA TRIANGULAR:

$$\begin{aligned} w(n) &= \frac{2n}{N-1} && \text{for } 0 \leq n \leq \frac{N-1}{2} \\ &= 2 - \frac{2n}{N-1} && \text{for } \frac{N-1}{2} \leq n \leq N-1 \\ &= 0 && \text{elsewhere} \end{aligned} \quad (12-157)$$

donde N es par.

#### VENTANA DE HANN:

$$\begin{aligned} w(n) &= \frac{1}{2} \left[ 1 - \cos \left( \frac{2\pi n}{N-1} \right) \right] && \text{for } 0 \leq n \leq N-1 \\ &= 0 && \text{elsewhere} \end{aligned} \quad (12-158)$$

**HAMMING WINDOW:**

$$w(n) = \begin{cases} 0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) & \text{for } 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases} \quad (12-159)$$

**BLACKMAN WINDOW:**

$$w(n) = \begin{cases} 0.42 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) + 0.08 \cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right) & \text{for } 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases} \quad (12-160)$$

**VENTANA KAISER:**

$$w(n) = \begin{cases} \frac{I_0\left[\omega_a \sqrt{\left(\frac{N-1}{2}\right)^2 - \left(n - \frac{N-1}{2}\right)^2}\right]}{I_0\left[\omega_a \left(\frac{N-1}{2}\right)\right]} & \text{for } 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases} \quad (12-161)$$

donde  $I_0(\cdot)$  es una función de Bessel de orden cero modificada del primer tipo y  $\omega_a$  es un parámetro de forma de ventana.

### 12-2-3. Algunos comentarios sobre los filtros digitales FIR

Como en el caso de los filtros analógicos, los filtros digitales IIR no pueden tener características de fase lineal perfectas. Por el contrario, los filtros digitales FIR pueden diseñarse para tener características de fase lineal. Además, los filtros digitales FIR son siempre estables. Estos son los puntos buenos de los filtros digitales FIR. En el lado negativo, la implementación de un filtro digital FIR requiere más cálculos y más componentes digitales; por lo tanto, los filtros digitales FIR son más caros que los filtros digitales IIR.<sup>200</sup> Por ejemplo, el filtro digital FIR

$$H(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots + z^{-L} \quad (12-162a)$$

o

$$y(n) = x(n) + x(n-1) + x(n-2) + \dots + x(n-L) \quad (12-162b)$$

se puede implementar sumando  $(L+1)$  números. Tomando el enfoque del filtro digital IIR, obtenemos

$$H(z) = \frac{1 - z^{-(L+1)}}{1 - z^{-1}} \quad (12-163a)$$

o

$$y(n) = y(n-1) + x(n) - x(n-L-1) \quad (12-163b)$$

Es decir, podemos implementar la misma función de filtrado sumando tres números. Hay una enorme cantidad de ahorro en computación y requisitos de hardware.

La cantidad de computación y hardware necesaria para realizar un proceso de filtrado suele ser una consideración práctica importante. En general, los filtros digitales IIR requieren menos cómputos y/o hardware para lograr una función de filtrado particular que los requeridos por los filtros digitales FIR correspondientes. Por lo tanto, en la mayoría de las situaciones, los filtros digitales FIR son necesarios para realizar tareas que no son posibles y/o no prácticas para los filtros digitales IIR, como los filtros de fase lineal y los filtros multifrecuencia donde las señales de entrada y las señales de salida correspondientes se muestran a diferentes velocidades.

---

200 Para obtener más información sobre las comparaciones entre los filtros digitales FIR e IIR, consulte la Referencia [19].

## Referencias y lecturas adicionales

- [1] Rabiner, L. R., and Rader , C. M. Digital Signal Processing. New York: IEEE Press, 1972.
- [2] Oppenheim, A. V., and Schafer , R. W. Digital Signal Processing. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1975.
- [3] Rabiner, L. R., and Gold , B. Theory and Application of Digital Signal Processing. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1975.
- [4] Daniels, R. W. Approximation Methods for Electronic Filter Design with Applications to Passive, Active and Digital Networks. New York: McGraw-Hill, 1974.
- [5] Rhodes, J. D. Theory of Electrical Filters. New York: John Wiley, 1976.
- [6] Blinchikoff, H. J., and Zverev, A. I. Filtering in the Time and Frequency Domains. New York: Wiley Interscience, 1976.
- [7] Bogner, R. E., and Constantinides, A. G. Introduction to Digital Filtering. New York: John Wiley, 1975.
- [8] Leon, B. J., and Bass, S. C. "Designer's Guide to Digital Filter Parts 1-6." EDN 30-36, Jan., 1974; pp. 65-72, Feb., 1974; pp. 51-59, Mar., 1974; pp. 57-62, Apr., 1974; pp. 61-68, May, 1974; and pp. 69-75, June, 1974.
- [9] Kuo, F. F., and Kaiser, J. F. System Analysis by Digital Computer. New York: John Wiley, 1966.
- [10] Gibbs, A. J. "An Introduction to Digital Filters," Australian Telecommunications Research 3 (1969): 3-14.
- [11] Brigham, E. O. The Fast Fourier Transform. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1974.
- [12] Gear, C. W. Numerical Initial Value Problems in Ordinary Differential Equations. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1971.
- [13] Steiglitz , K. "The Equivalence of Digital and Analog Signal Processing." Information and Control 8 (1965): 455-67.
- [14] Gibbs, A. J. "The Design of Digital Filters." Australian Telecommunication Research 4 (1970): 29-34.
- [15] Rader, C. M., and Gold , B. "Digital Filter Design Techniques in the Frequency Domain." Proc. IEEE 55 (1967): 149-71.
- [16] Lerner, R. M. "Band Pass Filters with Linear Phase." Proc. IEEE 52 (1964): 249-68.
- [17] Constantinides, A. G. "Spectral Transformations for Digital Filters." Proc. IEEE 117 (1970): 1585-90.
- [18] Rabiner, L. R. "Techniques for Designing Finite-Duration Impulse-Response Digital Filters." IEEE Trans. Communication Technology COM-19 (1971): 188-95.
- [19] Rabiner, L. R., Kaiser, J. F., Herrmann , O., and Dolan , M. T. "Some Comparisons Between FIR and HR Digital Filters." Bell System Tech. J. 53 (1974): 305-31.
- [20] Mc Clellan, J. H., and Parks , T. W. "A Unified Approach to the Design of Optimum FIR Linear Phase Digital Filters." IEEE Trans. Circuit Theory CT-20 (1973): 697-701.
- [21] Kaiser, J. F. "Nonrecursive Digital Filter Design Using I\_0-sinh Window Function." Proc. 1974 IEEE International Symposium on Circuit and Systems, pp. 20-23.

## Problemas

12-1. (a) Encuentre la función de magnitud al cuadrado de

$$H(z) = \frac{1+z^{-1}}{1+0.5z^{-1}+0.5z^{-2}}$$

(b) Construya el diagrama de polos y ceros de  $H(z)$ .

(c) Construya el diagrama de polos y ceros de la función de magnitud al cuadrado de  $H(z)$ .

12-2. Repita el problema 12-1 para la función de transferencia

$$H(z) = \frac{1+z^{-2}}{(1+0.5z^{-1})(1+0.2z^{-1}+0.2z^{-2})}$$

12-3. Considere la función de transferencia de un filtro analógico

$$\hat{H}(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$$

Sea el período de muestreo  $T=0.1\text{ seg.}$ . Encuentre la función de transferencia digital correspondiente por:

- (a) método de aproximación de Euler;
- (b) el método de invariancia de impulso; y
- (c) el método de transformación bilineal.

Para cada caso de (a), (b) y (c),

- (d) encuentre el diagrama de polos y ceros de la función de transferencia resultante.
- (e) dibuje las características de magnitud.

$$\hat{H}(s) = \frac{3}{s^2 + 3s + 3}$$

12-4. Repita el Problema 12-3 para la función de transferencia analógica

12-5. Considere la función de transferencia analógica

$$\hat{H}(s) = \frac{10^8}{s^2 + 10^4 s + 10^8}$$

Sea el período de muestreo  $T=10^5\text{ seg.}$ . Encuentre la función de transferencia digital correspondiente por:

- (a) el método de invariancia de impulso; y
- (b) el método de transformación bilineal.
- (c) Dibuje las características de magnitud de las funciones de transferencia resultantes obtenidas en (a) y (b).

12-6. Suponga que se desea un filtro Butterworth de paso bajo para satisfacer los siguientes requisitos:

- (i) El punto de corte de 3 dB está en  $\theta_c = 0.1\pi$  rad.
- (ii) La atenuación de la banda de paso es como máximo de 0.2 dB para  $0 \leq \theta \leq 0.05\pi$  rad.
- (iii) La atenuación de la banda suprimida es de al menos 40 dB para  $0.5\pi \leq \theta \leq \pi$  rad
- (iv) El período de muestreo T es de  $10\pi$  seg.

Utilizando el procedimiento de la Fig. 12-19(a), encuentre la función de transferencia deseada:

(a) por el método de invariancia de impulso; y

(b) por el método de transformación bilineal.

(c) Dibuje las características de magnitud de (a) y (b).

12-7. Repita el problema 12-6 utilizando el procedimiento de transformación de frecuencia digital de la Figura 12-19(b).

12-8. Suponga que se desea un filtro digital de paso bajo ripple para cumplir con los siguientes requisitos:

- (i) Las ondas de banda de paso son de 0.5 dB para  $0 \leq \theta \leq 0.2\pi$  rad.
- (ii) La pérdida de la banda suprimida es de al menos 19 dB para  $0.366\pi \leq \theta \leq \pi$  rad.
- (iii) La frecuencia de muestreo es de 1 KHz.

Encuentre la función de transferencia deseada por:

- (a) el método de invariancia de impulso a través de la Fig. 12-19(a); y
- (b) el método de transformación bilineal a través de la Fig. 12-19 (b).

12-9. Supongamos que necesitamos implementar un paso bajo de Butterworth de tercer orden filtro con la frecuencia de corte de 3 dB en  $\omega_c = 100$  K rad./seg. en términos de un filtro digital.

(a) Utilice el método de invariancia de impulso para encontrar la función de transferencia del filtro digital deseado con la frecuencia de corte de 3 dB a  $0.2\pi$  rad.

(b) Suponga que las características de frecuencia del filtro Butterworth de tercer orden normalizado están dadas por la Figura P12-9. Dibuje las características de frecuencia del filtro digital en (a) para  $0 \leq \theta \leq 4\pi$  rad.

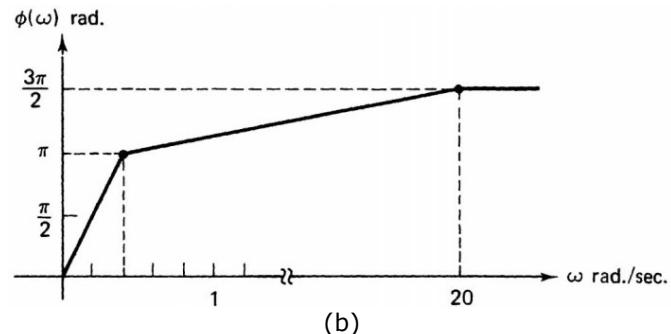
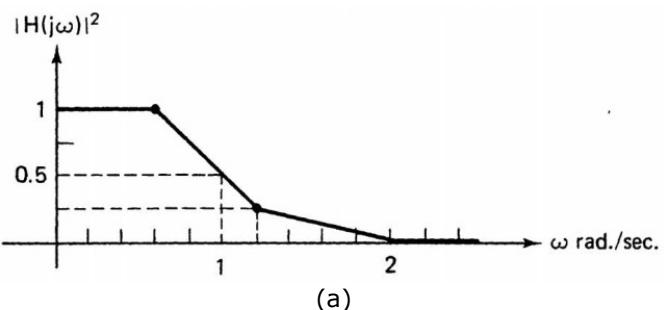


Fig. P12-9.

12-10. Un filtro Butterworth de segundo orden de paso bajo normalizado tiene una función de transferencia

$$\hat{H}(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$$

- (a) Encuentre la función de transferencia del filtro digital de paso bajo correspondiente mediante el método de transformación bilineal con un período de muestra  $T = 0.1$  s.
- (b) Encuentre la frecuencia de corte digital del filtro obtenido en (a).
- (c) Dibuje las características de magnitud del filtro en (a).

12-11. Suponga que se desea un filtro digital de ripple de paso bajo para cumplir con los siguientes requisitos:

- (i) Las ondulaciones de la banda de paso son de 0.1 dB con un ancho de banda de ripple  $B = 0.1\pi$  rad.
- (ii) La atenuación de la banda suprimida es superior a 20 dB para  $0.6\pi \leq \theta < \pi$  rad.
- (iii) El período de muestreo  $T = 10\pi \mu\text{seg}$ .

Encuentre la función de transferencia digital deseada por el método de invariancia de impulso a través del procedimiento de:

- (a) Fig. 12-19(a); y
- (b) Fig. 12-19 (b).

12-12. Repita el problema 12-11 utilizando el método de transformación bilineal.

12-13. Suponga que se desea un filtro digital de paso de banda Butterworth de cuarto orden con la frecuencia central en  $\theta_0 = 0.4\pi$  rad. y la frecuencia de banda de paso más baja en  $0.3\pi$  rad. Si el período de muestreo  $T = 0.1$  seg., encuentre la función de transferencia deseada por el método de invariancia de impulso a través del procedimiento de:

- (a) Fig. 12-19(a); y
- (b) Fig. 12-19 (b).

Dibuje las características de magnitud del filtro:

- (c) obtenido en (a); y
- (d) obtenido en (b).

12-14. Repita el problema 12-13 utilizando el método de transformación bilineal.

12-15. El filtro Butterworth de paso bajo normalizado de segundo orden tiene la función de transferencia analógica

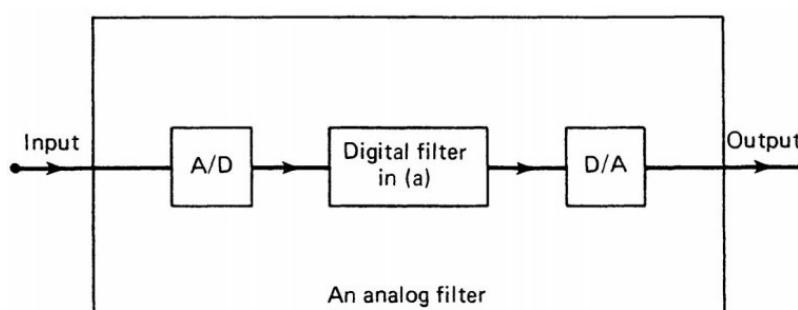
$$\hat{H}(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$$

a) Usando el procedimiento de método de invariancia de impulso y transformación digital de frecuencia, encuentre la función de transferencia del filtro de paso de banda digital correspondiente con:

- (i) la frecuencia central de la banda de paso  $\theta_0 = 0.5\pi$  rad. correspondiente a la frecuencia analógica  $\omega_0 = 120\pi$  rad. ; y
- (ii) la frecuencia de banda de paso inferior  $\theta_l = 0.47\pi$  rad.

(b) Dibuje la función de magnitud de (a) para  $0 \leq \theta \leq 4\pi$  rad.

(c) Suponiendo que no hay solapamiento y que un conjunto de convertidores A/D y D/A perfectos están conectados al filtro digital en (a), como se muestra en la figura P12-15, dibuje la función de magnitud del filtro analógico resultante en la Fig. P12-15. Indique todos los puntos de frecuencia importantes explícitamente.



**Fig. P12-15**

12-16. Suponga que se desea un filtro de rechazo de banda Butterworth de cuarto orden con la frecuencia central  $\theta_0 = 0.4\pi$  rad. y la frecuencia de rechazo de banda inferior  $\theta_l = 0.35\pi$  .

Si el período de muestreo  $T = 1\mu\text{sec}$  , encuentre la función de transferencia digital deseada utilizando los procedimientos de:

- (a) la transformación de frecuencia analógica y el método de transformación bilineal;
- (b) el método de transformación bilineal y la transformación de frecuencia digital; y
- (c) el método de invariancia de impulso y la transformación de frecuencia digital.

12-17. El filtro Butterworth de paso bajo normalizado de segundo orden tiene la función de transferencia

$$\hat{H}(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$$

a) Usando el procedimiento del método de invariancia de impulso y transformación de frecuencia digital, encuentre la función de transferencia del filtro de paso alto digital correspondiente con la frecuencia de corte de 3 dB  $\theta_c = 0.8\pi$  rad. correspondiente a la frecuencia de corte analógica  $\omega_c = 192\pi$  rad./seg.

(b) Suponiendo que no haya efecto de aliasing, dibuje las características de magnitud para  $0 \leq \theta \leq 4\pi$  rad.

12-18. El filtro de Bessel de segundo orden tiene una función de transferencia

$$\hat{H}(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 3}$$

- (a) Usando el método de invariancia de impulso y el procedimiento de transformación de frecuencia digital, encuentre la función de transferencia del filtro de Bessel de paso alto digital correspondiente con la frecuencia de corte de 3 dB  $\theta_c = 0.8\pi$  rad. . correspondiente a la frecuencia de corte analógica de 3 dB  $\omega_c = 192\pi$  rad./seg. .
- (b) Suponiendo que no haya efecto de aliasing, dibuje la función de retardo de grupo para  $-4\pi$  rad.  $\theta \leq 4\pi$  rad. .

12-19. Suponga que se desea un filtro digital Chebyshev de paso alto para cumplir con los siguientes requisitos:

- (i) Las ondas de banda de paso son de  $0.1\text{ dB}$  para  $0.4\pi \leq \theta \leq \pi$  rad. .
- (ii) La pérdida de la banda suprimida es de al menos  $40\text{ dB}$  para  $0 \leq \theta \leq 0.1\pi$  rad.

Encuentre la función de transferencia digital deseada por:

- (a) utilizando el procedimiento de la Fig. 12-19(b) y el método de invariancia de impulso;
- (b) utilizando el procedimiento de la Fig. 12-19(a) y el método de transformación bilineal; y
- (c) utilizando el procedimiento de la Fig. 12-19(b) y el método de transformación bilineal.

12-20. Encuentre las funciones de retardo de grupo de los siguientes filtros digitales FIR:

$$(a) \begin{cases} h(n) = 1 & \text{para } 0 \leq n \leq 4 \\ = 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$$

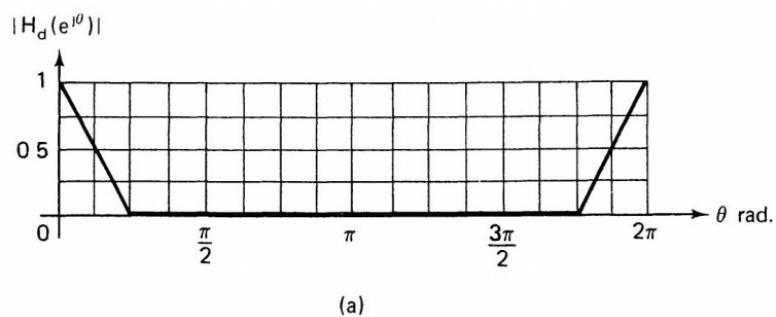
$$(d) \begin{cases} h(0)=h(5)=2 \\ h(1)=h(4)=1 \\ h(2)=h(3)=0,5 \\ h(n)=0 & \text{para } n<0 \text{ y para } n>4 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} h(0)=h(4)=2 \\ h(1)=h(3)=1 \\ h(2)=0,5 \\ h(n)=0 & \text{para } n<0 \text{ y para } n>4 \end{cases}$$

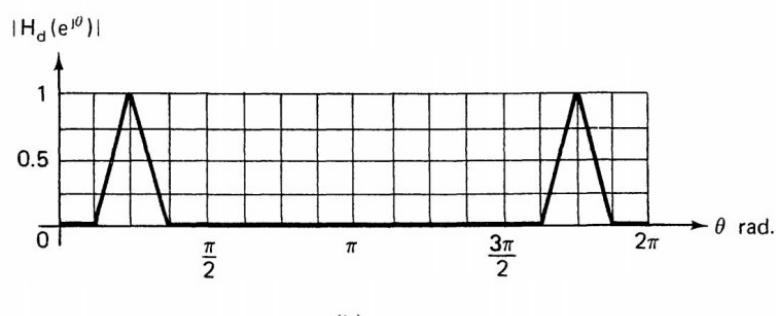
$$(e) \begin{cases} h(n)=1 & \text{para } 0 \leq n \leq 6 \\ = 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} h(n)=2 & \text{para } 0 \leq n \leq 5 \\ = 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$$

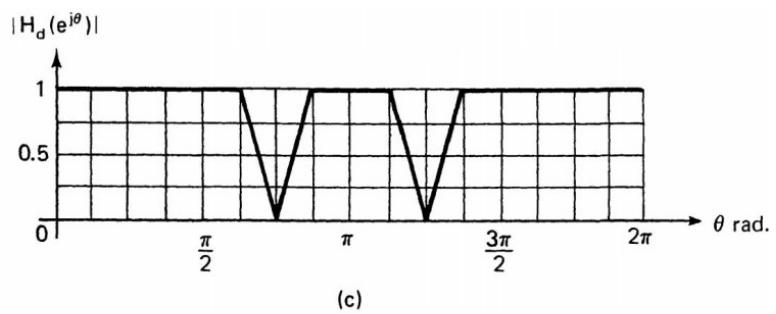
12-21. Suponga que se desea diseñar filtros digitales cuyas características de magnitud se muestran en la Fig. P12-21. Para cada característica de magnitud, encuentre una función de transferencia adecuada a través de un método de muestreo de frecuencia de ocho puntos.



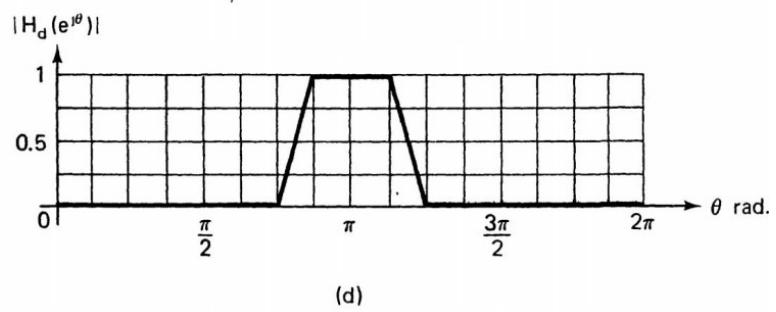
(a)



(b)

**Fig. P12-21(a), (b)**


(c)



(d)

**Fig. P12-21(c), (d)**

12-22. Para cada característica de magnitud que se muestra en la Fig. P12-21, encuentre una función de transferencia digital adecuada mediante un método de muestreo de frecuencia de 16 puntos.

12-23. Escriba un programa de computadora para implementar:

- (a) el procedimiento de mapeo de invariancia de impulso; y
- (b) el procedimiento de mapeo de transformación bilineal.

12-24. Escriba un programa de computadora para implementar:

- (a) de paso bajo a paso bajo
- (b) de paso bajo a paso de banda
- (c) paso bajo a rechazo de banda
- (d) transformaciones de frecuencia digital de paso bajo a paso alto.

12-25. Escriba un programa de computadora para implementar los dos procedimientos descritos en la Fig. 12-19:

- (a) para el método de invariancia de impulso; y
- (b) para el método de transformación bilineal.

## 13 Realización de filtros digitales

Después de obtener una función de transferencia para cumplir con los requisitos de procesamiento de señales, el problema restante es implementar o realizar la función de transferencia deseada. Este capítulo trata el problema de la realización de funciones de transferencia digital.

Los componentes estándar para la implementación de filtros digitales son unidades de retardo, sumadores y multiplicadores, como se analiza en la Sec. 11-5. Básicamente, es tan fácil procesar números negativos como números positivos. Por lo tanto, los coeficientes de las funciones de transferencia no están restringidos a números positivos. Al examinar algunos ejemplos en el Capítulo 12, vemos que algunos coeficientes de las funciones de transferencia digital son, de hecho, números negativos.

Debido a que las funciones de transferencia de los filtros digitales de respuesta de impulso infinito (IIR) difieren de las de los filtros digitales de respuesta de impulso finito (FIR), en aras de la claridad, discutiremos sus técnicas de realización por separado aunque los principios subyacentes sean los mismos.

### 13-1 Realización de filtros digitales IIR

La función de transferencia de un filtro digital IIR tiene la forma

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^M a_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=0}^N b_i z^{-i}} \triangleq \frac{A(z)}{B(z)} \quad (13-1)$$

Hay dos enfoques para realizar (13-1). Son el enfoque directo y el enfoque indirecto. En el enfoque directo, la función de transferencia  $H(z)$  de (13-1) se realiza en una sola pieza. En el enfoque indirecto, la función de transferencia de (13-1) se descompone en varias secciones de primer y segundo orden. La realización de (13-1) se completa entonces realizando todas las secciones asociadas de primer y segundo orden e interconectándolas entre sí de alguna manera. En cuanto a los errores de cuantificación, se ha encontrado que el enfoque indirecto da resultados superiores a los obtenidos por el enfoque directo.

### 13-1-1. Realización Directa

Hay muchas técnicas en el enfoque directo para realizar funciones de transferencia digital. Entre las técnicas más conocidas se encuentran las formas directas, las estructuras de escalera y celosía, las técnicas de extracción de multiplicadores y las formas modulares de los filtros digitales de onda. Las formas directas son técnicas de realización que implementan las ecuaciones en diferencias de los filtros de varias formas. Las constantes de multiplicación son los coeficientes de las funciones de transferencia. Para las funciones de transferencia de bajo orden, las formas directas son muy competitivas en rendimiento y costo.<sup>201</sup> Las formas de escalera y celosía<sup>202</sup> tienen la propiedad inherente de baja sensibilidad estructural. Sus constantes de multiplicación se calculan mediante una serie de operaciones aritméticas. Esto provoca cierta degradación en el rendimiento de los filtros digitales resultantes. La técnica de extracción de multiplicadores<sup>203</sup> tiene la ventaja de que los filtros digitales resultantes siempre contendrán el número mínimo de multiplicadores,<sup>204</sup> una propiedad compartida también por algunas otras técnicas de realización. Las formas modulares de realización de filtros digitales de ondas<sup>205</sup> a menudo toman la ruta de convertir un circuito RLC pasivo directamente en un circuito de filtro digital a través de las representaciones de dispersión de elementos de circuitos analógicos. En un estudio informal, encontramos que los filtros digitales de ondas y los filtros digitales regulares requieren aproximadamente la misma cantidad de hardware digital para realizar los mismos requisitos de filtrado.

Una función de transferencia digital se puede realizar por muchos métodos, incluidos los mencionados en el párrafo anterior. Se han realizado intentos<sup>206</sup> para identificar estructuras y técnicas para producir los mejores circuitos digitales en términos de costo (requisitos de hardware, representaciones de longitud de palabra) y rendimiento (sensibilidades de resultado final, respuestas de frecuencia resultantes). Aún no se ha encontrado la mejor técnica global; la elección de la técnica depende del problema en cuestión.

En esta subsección, nos concentraremos en las realizaciones de filtros digitales en forma directa y en forma de escalera. Las realizaciones de forma directa son muy populares y funcionan muy bien para funciones de transferencia de bajo orden, mientras que las formas de escalera tienen la propiedad deseable de baja sensibilidad estructural. Ambas técnicas conducen a la realización de filtros digitales con el mínimo número de multiplicadores.

#### 13-1-1-1. Formas Directas.

Recuerde que la función de transferencia de (13-1) define una ecuación de diferencias que relaciona la secuencia de entrada  $x(n)$  y la secuencia de salida  $y(n)$  como<sup>207</sup>

$$y(n) = \sum_{i=0}^M a_i x(n-i) + \sum_{i=1}^N (-b_i) y(n-i) \quad (13-2)$$

Por lo tanto, se puede obtener una realización de la función de transferencia de (13-1) implementando un procedimiento de cálculo para (13-2). La Fig. 13-1(a) muestra una implementación de red digital de (13-2).<sup>208</sup> Esta configuración se denomina forma directa I realización de la función de transferencia de (13-1). En la Fig. 13-1 (a), cada sumador se usa para sumar dos señales. En la Fig. 13-1(b) se muestra un diagrama simplificado para la forma directa I, donde se requieren ciertos sumadores para sumar más de dos señales.

<sup>201</sup> En el enfoque indirecto, la función de transferencia general se descompone en secciones de filtro de primer y segundo orden. Las formas directas son técnicas muy populares para realizar cada sección individual.

<sup>202</sup> Ver Referencias [6 a 8].

<sup>203</sup> Ver Referencia [9].

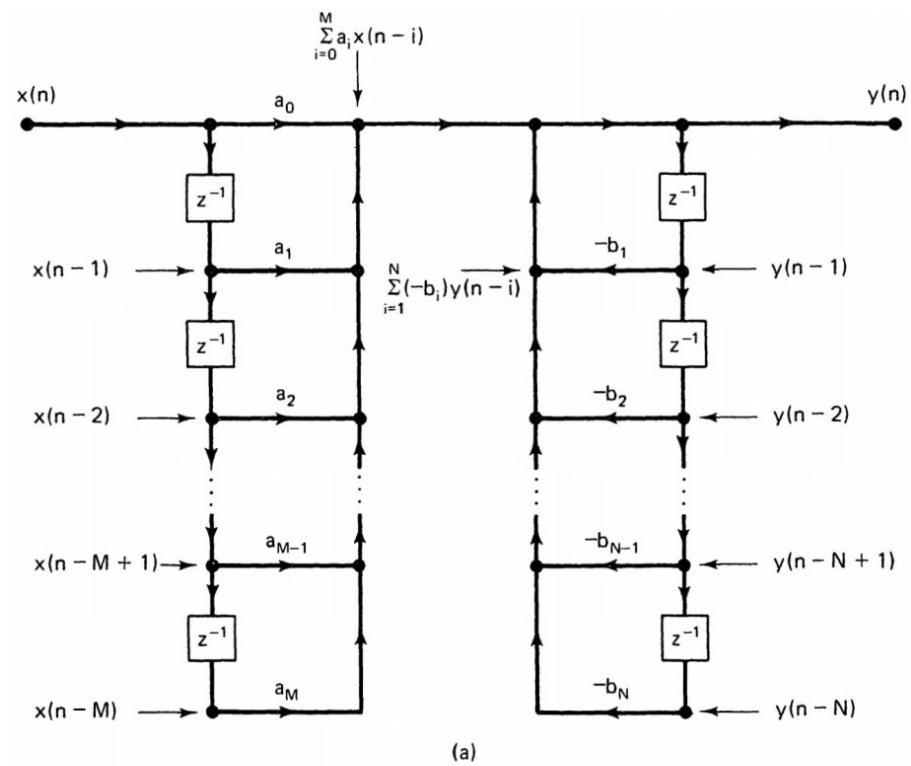
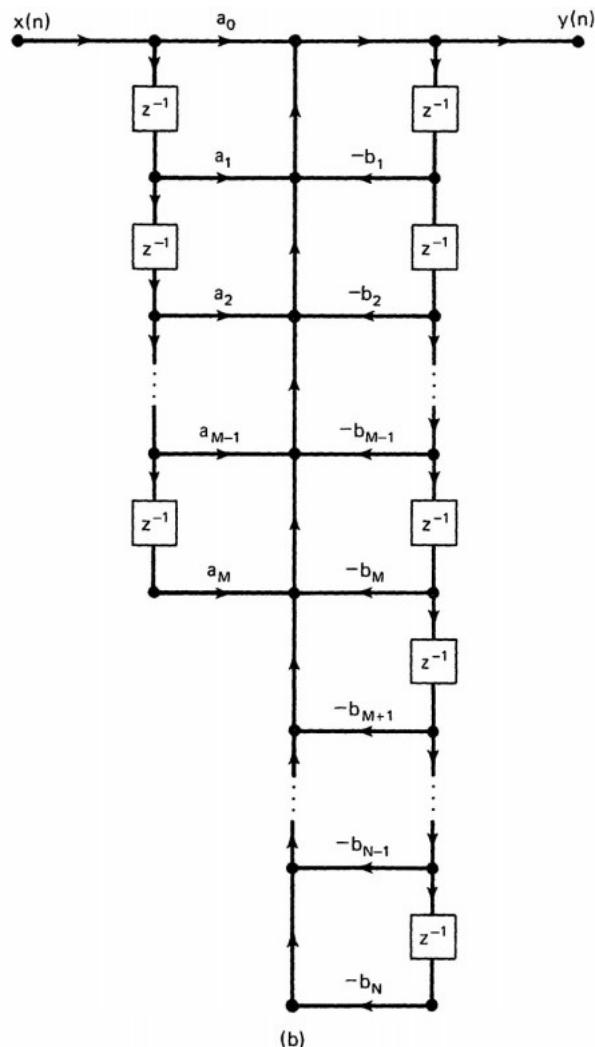
<sup>204</sup> Un multiplicador cuesta mucho más que un sumador o una unidad de retraso. Por lo tanto, es económico realizar una función de transferencia digital con el mínimo número de multiplicadores.

<sup>205</sup> Ver Referencias [10,11].

<sup>206</sup> Ver Referencias [12 a 14].

<sup>207</sup> Ver (11-53).

<sup>208</sup> En las Figs. 13-1 a 13-3, hemos supuesto que  $N < M$  en (13-1). Claramente, como puede verse por el contexto, esta suposición no es necesaria.


**Fig. 13-1** Direct form I realization.

**Fig. 13-1** (Continued)

Sea  $W(z)$  definido por

$$\frac{W(z)}{X(z)} \triangleq \frac{1}{B(z)} \quad (13-3a)$$

Entonces (13-1) se puede usar para obtener

$$\frac{Y(z)}{W(z)} = \frac{Y(z)}{X(z)} \frac{X(z)}{W(z)} = \frac{A(z)}{B(z)} B(z) = A(z) \quad (13-3b)$$

De (13-3), observamos que uno puede realizar la función de transferencia  $H(z)$  de (13-1) realizando dos funciones de transferencia más simples dadas por (13-3a) y (13-3b). Esta implementación se muestra en la Fig. 13-2(a). En la Fig. 13-2(b) se da un esquema simplificado de la Fig. 13-2(a). La Fig. 13-2 ilustra la forma directa II de realización de (13-1). Observe que la realización directa de la forma II requiere solo  $N$  elementos de retardo. Este es el número más pequeño de unidades de retardo requeridas para realizar un filtro digital de orden  $N$  como el especificado por (13-1).<sup>209</sup> Ambas formas directas requieren  $(N+M+1)$  multiplicadores, que es el número mínimo de multiplicadores necesario para realizar (13-1).

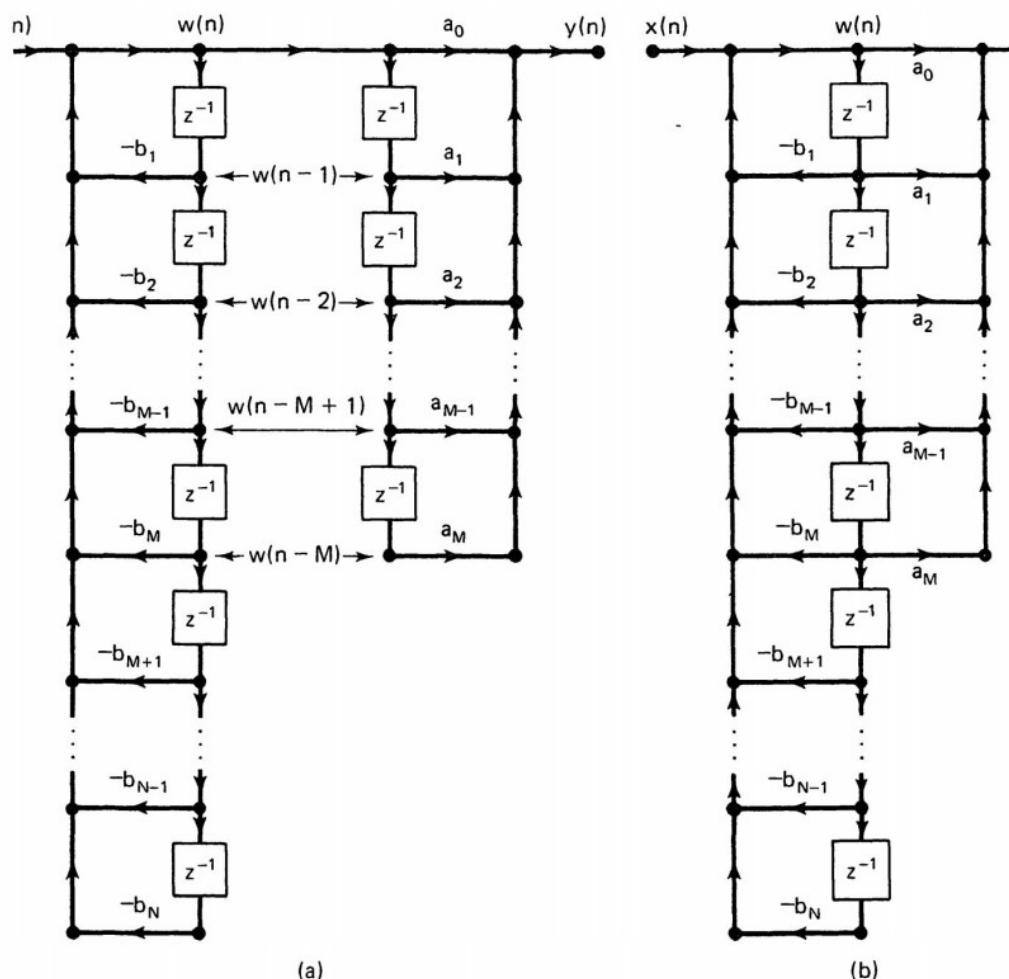
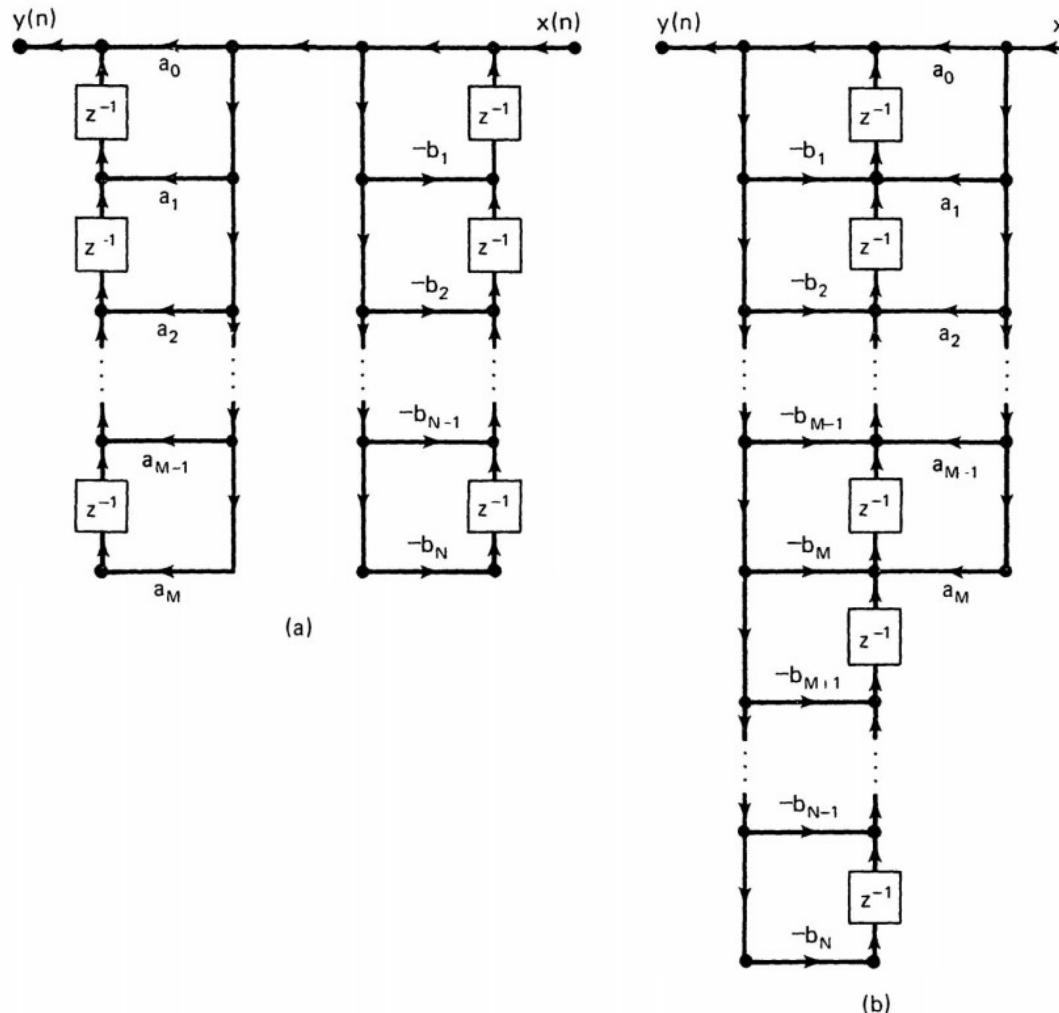


Fig. 13-2 Direct form II realization

<sup>209</sup> El orden de un filtro digital IIR caracterizado por (13-1) es igual a  $\max\{M, N\}$ .

Según la teoría de los gráficos de flujo de señales, tanto la transposición de un circuito digital como el circuito digital original tienen funciones de transferencia idénticas. Específicamente, el circuito digital transpuesto se obtiene invirtiendo las direcciones de cada rama del circuito e intercambiando las terminales de entrada y salida. Por ejemplo, los circuitos transpuestos de las formas directas I y II de las Figs. 13-1 (b) y 2 (b) se muestran en las Figs. 13-3(a) y (b), respectivamente. Puede demostrarse que las funciones de transferencia de las Figs. 13-3(a) y (b) están dadas por (13-1).



**Fig. 13-3** Transposed direct forms. (a) Transposed direct form I. (b) Transposed direct form II.

**Ejemplo 13-1** Realizar la función de transferencia

$$H(z) = \frac{1 + 0.2z^{-1} - 0.2z^{-2}}{1 - 0.2z^{-1} + 0.3z^{-2} + z^{-3}} \quad (13-4)$$

**Solución:** Identificando los términos correspondientes entre (13-4) y (13-1), obtenemos

$$\begin{aligned} M &= 2, \quad N = 3, \quad a_0 = 1, \quad a_1 = 0.2, \quad a_2 = -0.2, \\ b_0 &= 1, \quad b_1 = -0.2, \quad b_2 = 0.3, \quad \text{and} \quad b_3 = 1 \end{aligned} \quad (13-5)$$

Las Fig. 13-4(a), (b), (c) y (d), respectivamente, dan las formas directas I y II y las formas directas traspuestas I y II de (13-4).

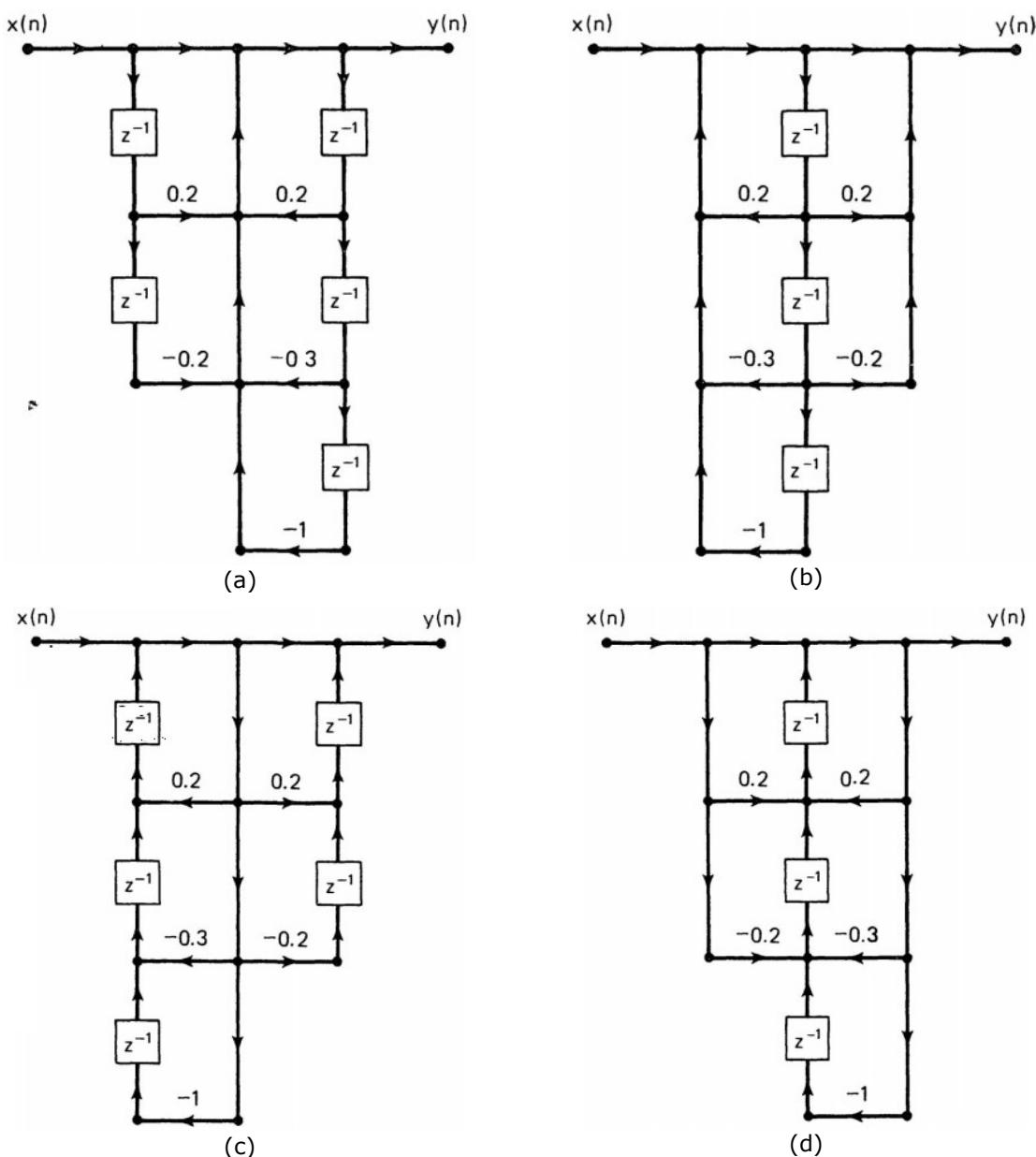


Fig. 13-4 Realizaciones de forma directa y forma directa traspuesta de (13-4).

**13-1-1-2. Formas de escalera.**

Suponga que la función de transferencia del filtro digital IIR deseado viene dada por

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_M z^{-M}}{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_N z^{-N}} \quad (13-6a)$$

donde

$$|N - M| \leq 1 \quad (13-6b)$$

Entonces  $H(z)$  puede admitir varias representaciones equivalentes en forma de expansiones en fracciones continuas. Más adelante en esta sección se mostrará que las realizaciones de estas expansiones de fracciones continuas de  $H(z)$  producen configuraciones de red en escalera. Consideremos ahora algunas situaciones específicas.

**CASO 1** Suponga que  $H(z)$  de (13-6) admite una expansión en fracción continua en  $z^{-1} = \infty$  o  $z=0$ :<sup>210</sup>

$$\begin{aligned} H_1(z) = A_0 + \cfrac{1}{B_1 z^{-1} + \cfrac{1}{A_1 + \cfrac{1}{\ddots}}} \\ \quad \quad \quad + \cfrac{1}{B_N z^{-1} + \cfrac{1}{A_N}} \end{aligned} \quad (13-7)$$

o

$$\begin{aligned} H_2(z) = B_0 z^{-1} + \cfrac{1}{A_0 + \cfrac{1}{B_1 z^{-1} + \cfrac{1}{A_1 + \cfrac{1}{\ddots}}}} \\ \quad \quad \quad + \cfrac{1}{B_N z^{-1} + \cfrac{1}{A_N}} \end{aligned} \quad (13-8)$$

Al examinar (13-7) y (13-8) de cerca, concluimos que las realizaciones de las fracciones continuas (13-7) y (13-8) se pueden lograr fácilmente si podemos realizar dos bloques de construcción caracterizados por lo siguiente dos funciones de transferencia:

$$H_{B1}(z) = \frac{1}{A + T(z)} \quad (13-9)$$

y

$$H_{B2}(s) = \frac{1}{Bz^{-1} + T(z)} \quad (13-10)$$

donde  $T(z)$  es arbitrario. Esto se debe a que las fracciones continuas (13-7) y (13-8) se pueden escribir en las formas (13-9) y (13-10) repetidamente. Las Figs. 13-5(a) y (b) dan un conjunto de

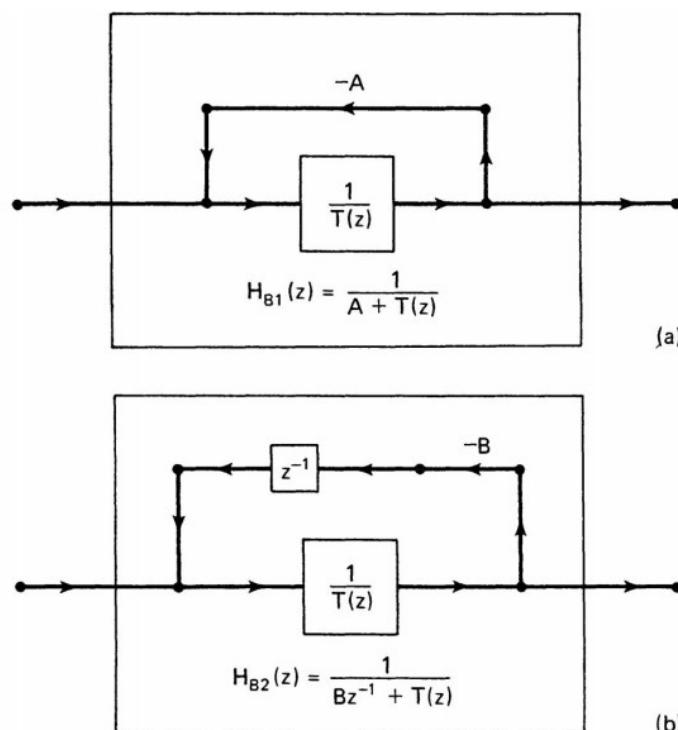
<sup>210</sup> Una condición suficiente simple es que la función  $F(s) \triangleq H(1/s)$  solo tiene polos y ceros simples, reales y alternos.

Este tipo de  $F(s)$  se puede realizar como una impedancia DP o función de admitancia de un puerto de 1 puerto que contiene condensadores pasivos y resistencias pasivas y activas.

realizaciones de circuitos digitales de  $H_{B1}(z)$  y  $H_{B2}(z)$  de (13-9) y (13-10), respectivamente.

Con la Fig. 13-5 proporcionando los bloques básicos de construcción de circuitos digitales, ahora podemos proceder a la realización de (13-7) y (13-8). Específicamente, consideremos primero el caso de (13-7). Escribiendo  $H_1(z)$  como

$$\frac{1}{T_{A0}^1(z)} \triangleq H_1(z) = A_0 + T_{B1}^1(z) \quad (13-11a)$$



**Fig. 13-5** Two basic building blocks for ladder realizations.

donde

$$T_{B1}^1(z) = \frac{1}{B_1 z^{-1} + \frac{1}{A_1 + \dots + \frac{1}{A_N}}} \quad (13-11b)$$

podemos realizar  $H_1(z)$  sumando dos funciones de transferencia  $A_0$  y  $T_{B1}^1(z)$ , como se muestra en la Fig. 13-6(a). Para realizar  $T_{B1}^1(z)$ , escribimos

$$T_{B1}^1(z) = \frac{1}{B_1 z^{-1} + T_{A1}^1(z)} \quad (13-12a)$$

donde

$$\frac{1}{T_{A1}^1(z)} = A_1 + \frac{1}{B_2 z^{-1} + \dots} + \frac{1}{A_N}$$
(13-12b)

Usando la Fig. 13-5(b), podemos implementar (13-12) mediante el circuito que se muestra en la Fig. 13-6(b). Observe que la función de transferencia de  $T_{A1}^1(z)$  de (13-12b) tiene la misma forma que la de  $T_{A0}^1(z)$  de (13-1) la excepto que es más simple. Por lo tanto, podemos usar los procedimientos de (13-11) y (13-12) repetidamente hasta que se realice  $H_1(z)$ . En la figura 13-6(c) se muestra una realización de  $H_1(z)$  utilizando el procedimiento alternativo de (13-11) y (13-12).

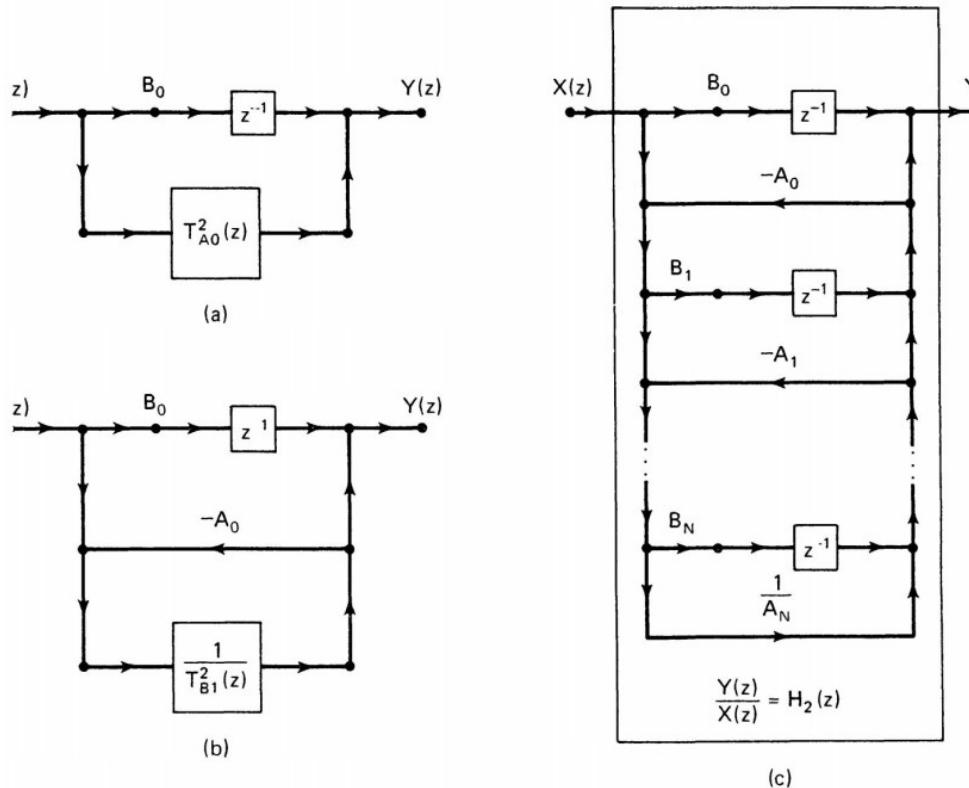
De manera similar, la función de transferencia  $H_2(z)$  de (13-8) puede realizarse aplicando la Fig. 13-5(a) en forma repetitiva. Los pasos correspondientes y la realización del circuito final se muestran en la Fig. 13-7, donde

$$T_{A0}^2(z) = \frac{1}{A_0 + T_{B1}^2(z)} \quad (13-13a)$$

y

$$T_{B1}^2(z) = \frac{1}{B_1 z^{-1} + \frac{1}{A_1 + \dots}} \quad (13-13b)$$

$$+ \frac{1}{A_N}$$



**Fig. 13-7** A ladder circuit realization of  $H_2(z)$  of (13-8). (a) and (b) Steps involved. (c) A final circuit realization.

Observe que en la Fig. 13-7(c) hay bucles sin elementos de retardo. Como se discutió en la Sec. 11-5, no se permiten bucles sin retardo en los circuitos de filtro digital. En la subsección 13-1-1-3, presentaremos un método para eliminar bucles sin retardo sin alterar las funciones de transferencia previstas. Tenga en cuenta que si  $N=0$  (la expansión de fracción continua termina con  $B_N z^{-1}$ , entonces este proceso producirá circuitos de realización válidos.

**Ejemplo 13-2** Realizar la función de transferencia

$$H(z) = \frac{-1 + z^{-1} + \left(\frac{3}{16}\right)z^{-2}}{1 - \left(\frac{1}{4}\right)z^{-1} - \left(\frac{1}{8}\right)z^{-2}} \quad (13-14)$$

por un circuito de escalera.

**Solución:** Por un proceso de división larga:

$$\begin{array}{r} \left(-\frac{3}{2}\right) \\ \hline -\frac{1}{8}z^{-2} - \frac{1}{4}z^{-1} + 1 \left( \frac{3}{16}z^{-2} + z^{-1} - 1 \right) \\ \left(\frac{3}{16}z^{-2} - \frac{3}{8}z^{-1} - \frac{3}{2}\right) \left(-\frac{1}{5}z^{-1}\right) \\ \hline \frac{5}{8}z^{-1} + \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{8}z^{-1} - \frac{1}{4}z^{-1} + 1 \right) \\ \left( -\frac{1}{8}z^{-1} - \frac{1}{10}z^{-1} \right) \left( -\frac{25}{6} \right) \\ \hline -\frac{3}{20}z^{-1} + 1 \left( \frac{5}{8}z^{-1} + \frac{1}{2} \right) \\ \left( \frac{5}{8}z^{-1} - \frac{25}{6} \right) \left( -\frac{9}{280}z^{-1} \right) \\ \hline \frac{14}{3} \left( -\frac{3}{20}z^{-1} + 1 \right) \\ \left( -\frac{3}{20}z^{-1} \right) \left( \frac{14}{3} \right) \\ \hline 1 \left( \frac{14}{3} \right) \\ \frac{14}{3} \\ \hline 0 \end{array}$$

una expansión en fracción continua de  $H(z)$  de (13-14) está dada por

$$H(z) = -\frac{3}{2} + \frac{1}{-\left(\frac{1}{5}\right)z^{-1} + \frac{1}{-\frac{25}{6} + \frac{1}{-\left(\frac{9}{280}\right)z^{-1} + \frac{1}{\frac{14}{3}}}}} \quad (13-15)$$

La realización de la función de transferencia de (13-14) mediante un circuito de escalera digital mediante (13-15) y la Fig. 13-6 se muestra en la Fig. 13-8.

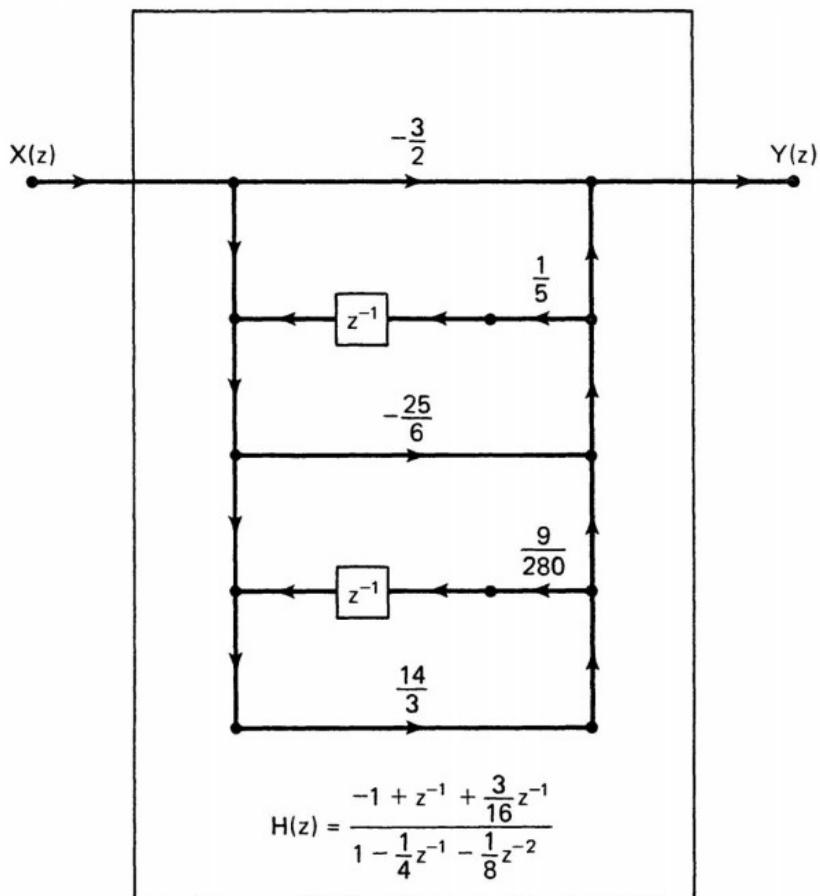


Fig. 13-8 A ladder circuit realization of (13-14).

**Ejemplo 13-3** Realizar la función de transferencia

$$H(z) = \frac{z^{-2} + z^{-1}}{1 - \left(\frac{1}{4}\right)z^{-1} - \left(\frac{1}{8}\right)z^{-2}} \quad (13-16)$$

por una red de escalera.

**Solución:** Una expansión en fracción continua de  $H(z)$  de (13-16) da

$$(Hz) = \cfrac{1}{-\frac{1}{8} + \cfrac{1}{-8z^{-1} + \cfrac{1}{-\frac{1}{72} + \cfrac{1}{9z^{-1}}}}} \quad (13-17)$$

**CASO 2** Suponga que  $H(z)$  de (13-6) admite un desarrollo en fracción continua en  $z^{-1}=0$  o  $z=\infty$ :<sup>211</sup>

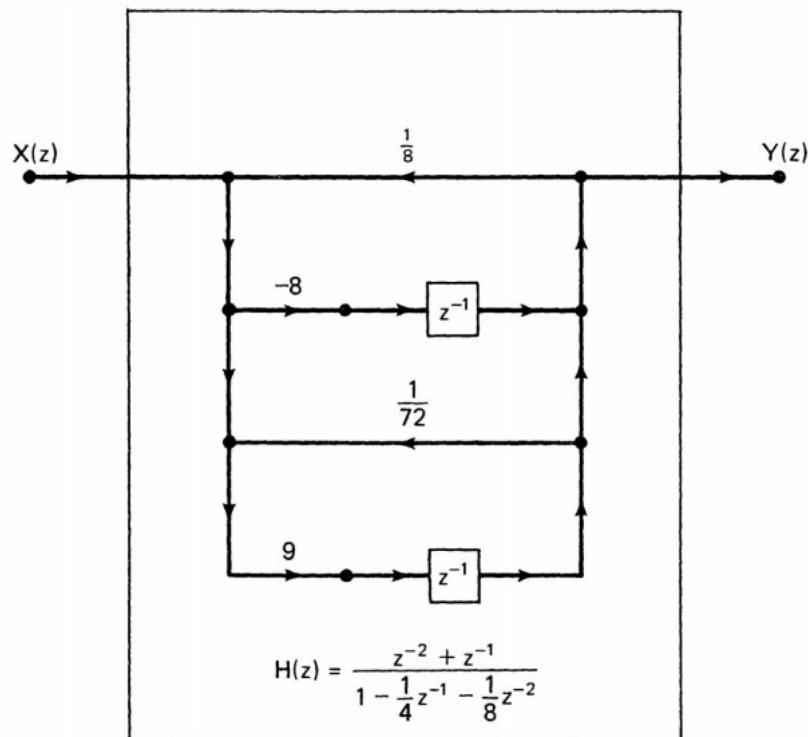


Fig. 13-9 A ladder circuit realization of (13-16).

$$H_3(z) = A_0 + \frac{1}{B_1 z + \frac{1}{A_1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{B_N z + \frac{1}{A_N}}}}} \quad (13-18)$$

$$H_4(z) = \frac{1}{A_0 + \frac{1}{B_1 z + \frac{1}{A_1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{B_N z + \frac{1}{A_N}}}}} \quad (13-19)$$

Para implementar (13-18) o (13-19), necesitamos bloques de construcción que realicen las dos funciones

$$H_{B3}(z) = \frac{1}{Bz + T(z)} \quad (13-20)$$

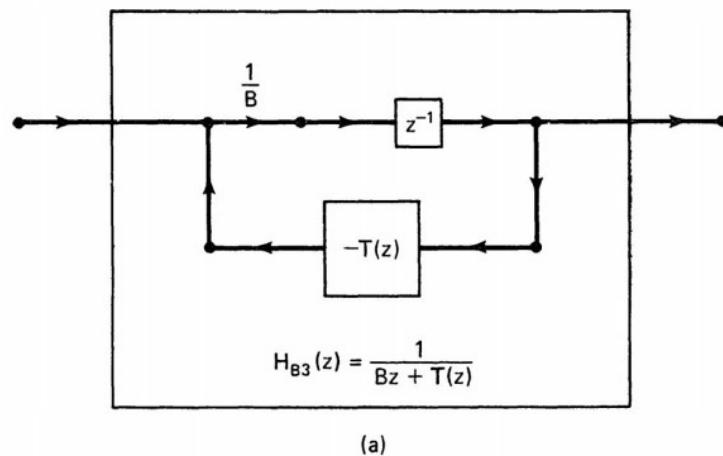
<sup>211</sup> Aquí hemos supuesto que  $a_0 \neq 0$  y  $b_0 \neq 0$  en (13-6).

y

$$H_{B4}(z) = \frac{1}{A + T(z)} \quad (13-21)$$

La Fig. 13-10 da un conjunto de realizaciones de  $H_{B3}(z)$  y  $H_{B4}(z)$   
Para realizar la función de transferencia de (13-18), escribimos  $H_3(z)$  como

$$H_3(z) = A_0 + T_{B1}^3(z) = A_0 + \frac{1}{B_1 z + T_{A1}^3(z)} \quad (13-22)$$



(a)

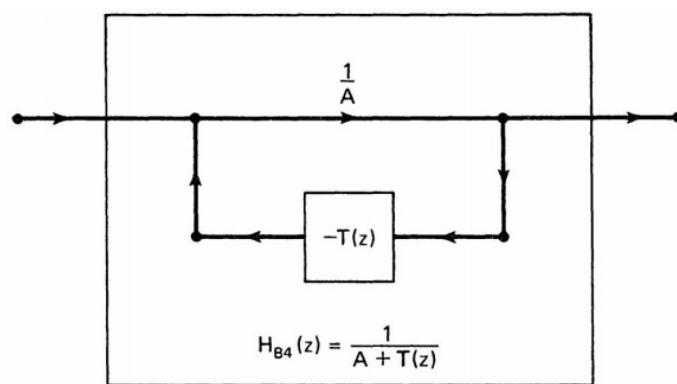
donde

$$T_{B1}^3(z) = \frac{1}{B_1 z + T_{A1}^3(z)} \quad (13-23a)$$

y

$$T_{A1}^3(z) = \frac{1}{A_1 + \frac{1}{B_2 z + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{A_N}}}} \quad (13-23b)$$

$$+ \frac{1}{A_N}$$



(b)

Fig. 13-10 Two basic building blocks for ladder realizations.

Al aplicar la figura 13-10(a), las acciones de (13-22) y (13-23) se implementan en la Fig. 13-11(a) y (b). Observe que  $-T_{A1}^3(z)$  en la Fig. 13-11(b) se puede escribir como

$$-T_{A1}^3(z) = \frac{1}{-A_1 - T_{B2}(z)} \quad (13-24a)$$

donde

$$\begin{aligned} T_{B2}^3(z) &= \frac{1}{B_2 z + \frac{1}{A_2 + \frac{1}{\ddots}}} \\ &\quad + \frac{1}{B_N z + \frac{1}{A_N}} \end{aligned} \quad (13-24b)$$

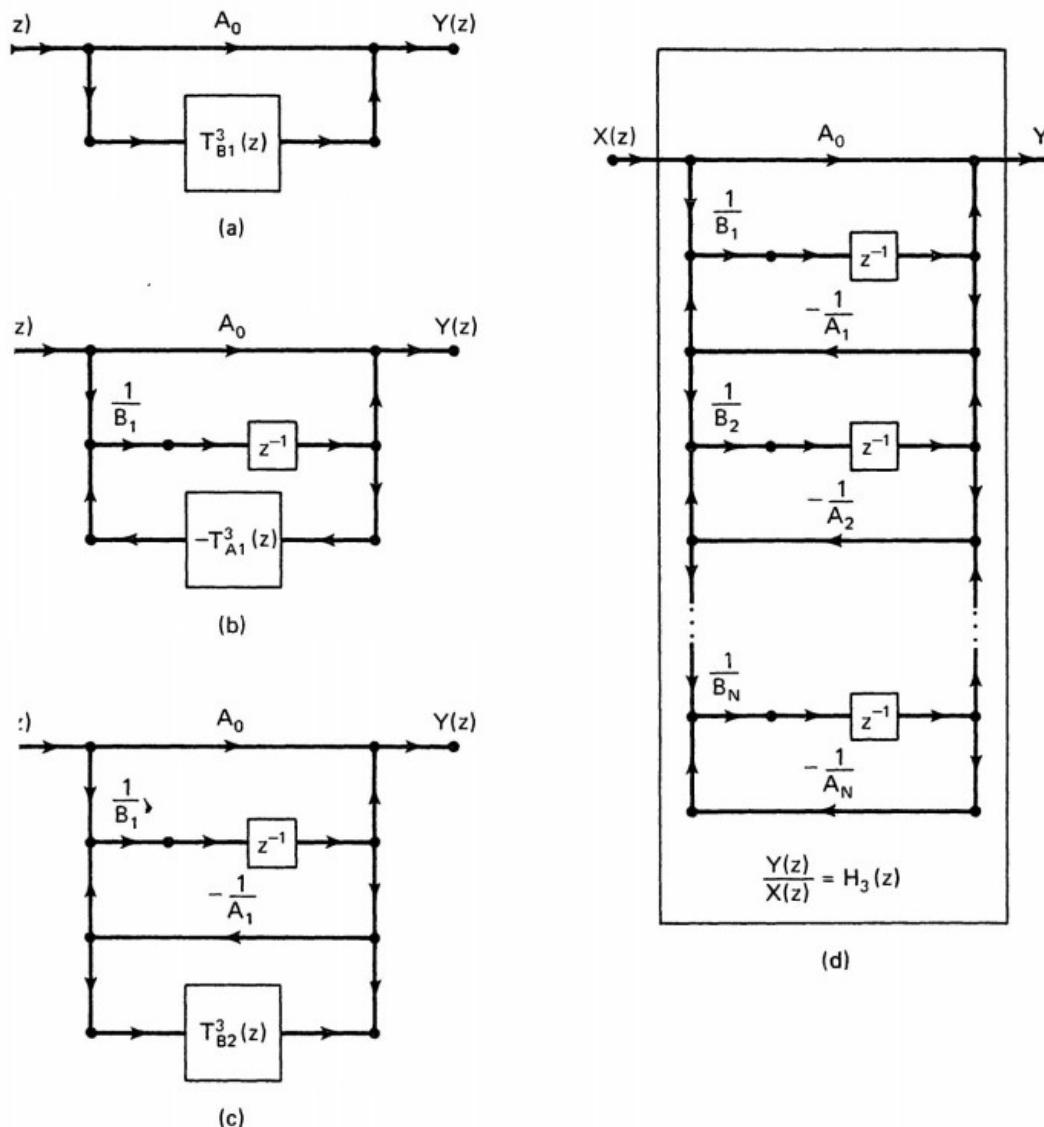
Con la ayuda de la Fig. 13-10(b), la Fig. 13-11(c) ilustra el paso involucrado en (13-24). Observe que  $T_{B2}^3(z)$  es similar a  $T_{B1}^3(z)$  excepto que es más simple. Repitiendo el proceso de (13-23) y (13-24), podemos realizar  $H_3(z)$  como se muestra en la Fig. 13-11(d).

De manera similar, aplicando las Figs. 13-10(a) y (b) repetidamente, obtenemos la realización del circuito de  $H_4(z)$  de (13-19) como se ilustra en la Fig. 13-12, donde

$$-T_{B1}^4(z) = \frac{1}{-B_1 z - T_{A1}^4(z)} \quad (13-25a)$$

y

$$\begin{aligned} T_{A1}^4(z) &= \frac{1}{A_1 + \frac{1}{B_2 z + \frac{1}{\ddots}}} \\ &\quad + \frac{1}{A_N} \end{aligned} \quad (13-25b)$$



**Fig. 13-11** A ladder circuit realization of  $H_3(z)$  of (13-18). (a), (b), and (c) Steps involved. (d) A final circuit realization.

**Ejemplo 13-4** Realizar la función de transferencia

$$H(z) = \frac{z^{-1}}{1 - \left(\frac{1}{4}\right)z^{-1} - \left(\frac{1}{8}\right)z^{-2}} \quad (13-26)$$

por el circuito de escalera de la figura 13-11.

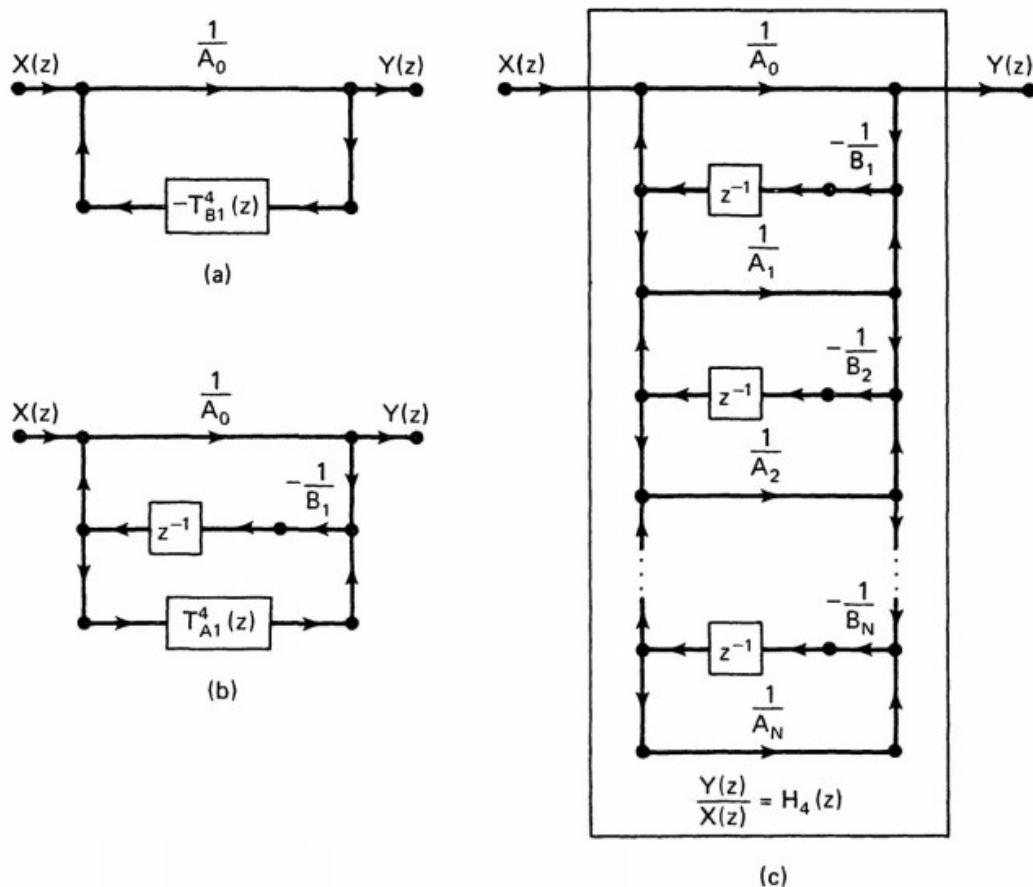
**Solución:** Multiplicando tanto el numerador como el denominador de  $H(z)$  de (13-26) por  $z^2$ , obtenemos

$$H(z) = \frac{z}{z^2 - \left(\frac{1}{4}\right)z - \frac{1}{8}}$$

Una expansión en fracciones parciales de  $H(z)$  en  $z=\infty$  (o de manera equivalente en  $z^2=0$ ) da

$$H(z) = \frac{1}{z + \frac{1}{-4 + \frac{1}{(\frac{1}{2})z + \frac{1}{4}}}} \quad (13-27)$$

En la Fig. 13-13 se muestra una realización de circuito de escalera de (13-26) a través de (13-27).



**Fig. 13-12** A ladder circuit realization of  $H_4(z)$  of (13-19). (a) and (b) Steps involved. (c) A final circuit realization.

**Ejemplo 13-5** Realizar la función de transferencia

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1} + z^{-2}}{1 - \left(\frac{1}{4}\right)z^{-1} - \left(\frac{1}{8}\right)z^{-2}} \quad (13-28)$$

por la estructura de escalera que se muestra en la Fig. 13-12.

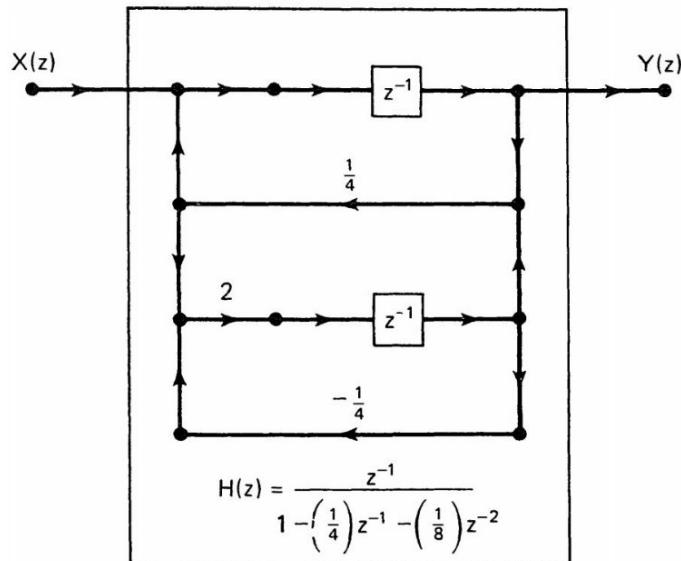


Fig. 13-13 A ladder circuit realization of (13-26).

**Solución:** Con  $H(z)$  de (13-28) escrito como

$$H(z) = \frac{z^2 + z + 1}{z^2 - \left(\frac{1}{4}\right)z - \frac{1}{8}}$$

una expansión en fracción parcial de  $H(z)$  en  $z=\infty$  produce

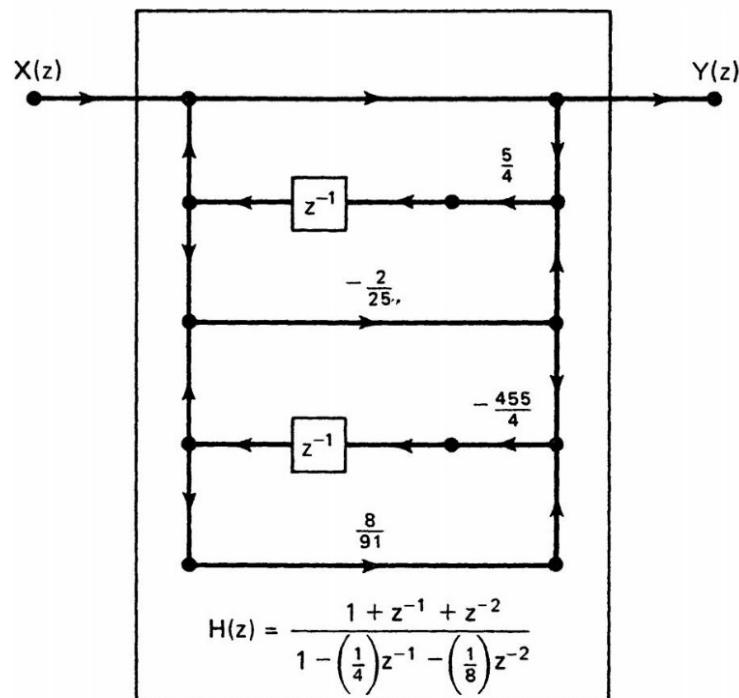
$$H(z) = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{-\left(\frac{4}{5}\right)z + \cfrac{1}{-\frac{25}{2} + \cfrac{1}{\left(\frac{4}{455}\right)z + \cfrac{1}{\frac{91}{8}}}}} \quad (13-29)}$$

En la Fig. 13-14 se da una realización de (13-28) mediante (13-29).

De los ejemplos 13-2 a 13-5, observamos que un inconveniente importante de las realizaciones en escalera es que las constantes de multiplicación en las realizaciones finales del circuito digital se obtienen después de una serie de cálculos. En consecuencia, las realizaciones de circuitos resultantes pueden no realizar exactamente las funciones de transferencia originales. Además, no tenemos mucho control sobre el tamaño (la magnitud) de las constantes de multiplicación. Por ejemplo, el número 455/4 de la Fig. 13-14 es un número muy grande en comparación con otras constantes de multiplicación en el mismo circuito. Esto provoca verdaderas dificultades en los diseños de hardware.

Como en el caso de los circuitos de escalera analógicos pasivos, una función de transferencia digital se puede realizar mediante una combinación de varias formas de procedimientos de realización de escalera digital. Muy a menudo, este proceso producirá mejores constantes de multiplicación. Un

ejemplo de ello es el ejemplo 13-6.



**Fig. 13-14** A ladder circuit realization of (13-28).

**Ejemplo 13-6** Realice la función de transferencia  $H(z)$  de (13-28) en el ejemplo 13-5 primero expandiendo  $H(z)$  en  $z^{-1}=0$  y luego en  $z^{-1}=\infty$

**Solución:** Expandir  $H(z)$  en  $z^{-1}=0$  hasta que se extrae el primer elemento de retraso significa que escribimos  $H(z)$  como

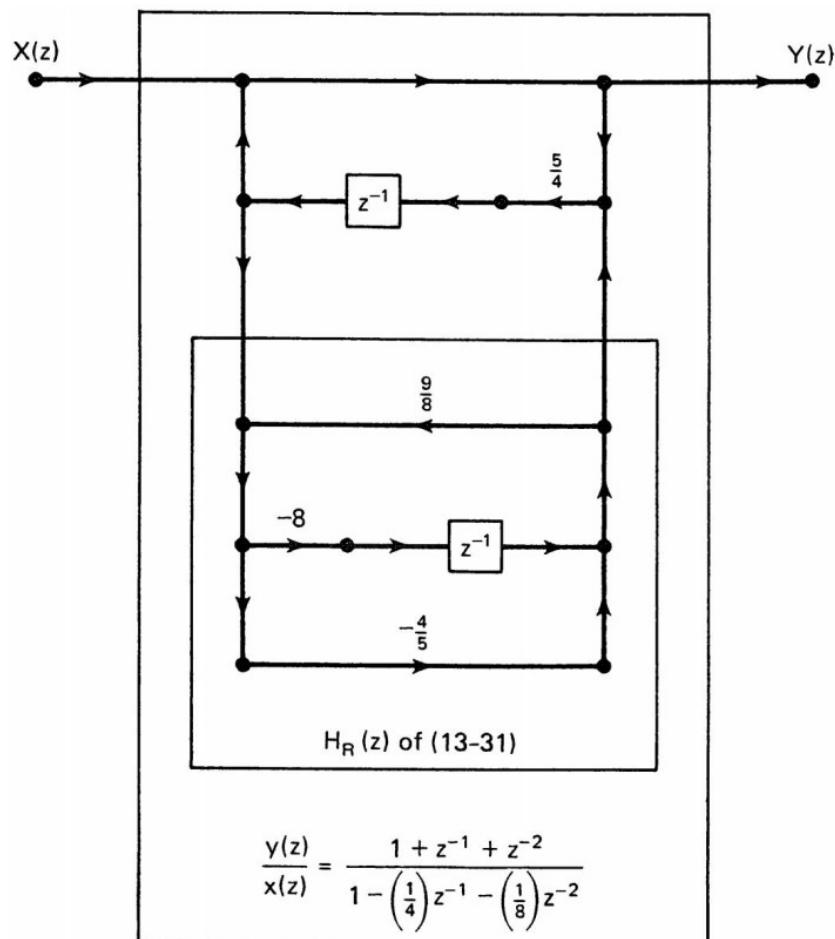
$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1 + z^{-1} + z^{-2}}{1 - \left(\frac{1}{4}\right)z^{-1} - \left(\frac{1}{8}\right)z^{-2}} = \frac{z^2 + z + 1}{z^2 - \left(\frac{1}{4}\right)z - \frac{1}{8}} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{1}{-\left(\frac{4}{5}\right)z + H_R(z)}} \end{aligned} \quad (13-30)$$

donde la función residuo

$$H_R(z) = \frac{\left(\frac{4}{5}\right)z + 8}{-10z - 9} = \frac{\frac{4}{5} + 8z^{-1}}{-10 - 9z^{-1}}$$

se expande en  $z^{-1}=\infty$  como

$$H_R(z) = \frac{1}{-\frac{9}{8} + \frac{1}{-8z^{-1} + \frac{1}{-\frac{5}{4}}}} \quad (13-31)$$

**Fig. 13-15** A ladder realization of (13-28).

En la figura 13-15 se muestra un circuito de (13-28) basado en la expansión de  $H(z)$  dada por (13-30) y (13-31).<sup>212</sup>

Antes de concluir esta subsección sobre realizaciones en forma de escalera, señalamos que la transposición de un circuito digital de escalera es el circuito de escalera original en sí mismo. En otras palabras, son circuitos autotranspuestos.

<sup>212</sup> Aquí usamos una combinación de Figs. 13-12 y 13-7 para realizar la realización de (13-28). Tenga en cuenta que la figura 13-15 contiene un ciclo sin retardo. Las técnicas para transformar un circuito con bucles sin retardo en uno sin bucles se presentan en la siguiente subsección.

### 13-7-7-3. Eliminación de bucles sin retardo.

En la Sección. 11-5, discutimos la imposibilidad de calcular circuitos digitales con bucles sin retardo. En la subsección anterior, encontramos que algunas técnicas de realización de escalera producen circuitos digitales con bucles sin retardo. En consecuencia, esos circuitos no pueden implementarse sin modificaciones. En esta subsección, presentamos un procedimiento para eliminar bucles sin retardo en circuitos digitales sin alterar las funciones de transferencia generales previstas.

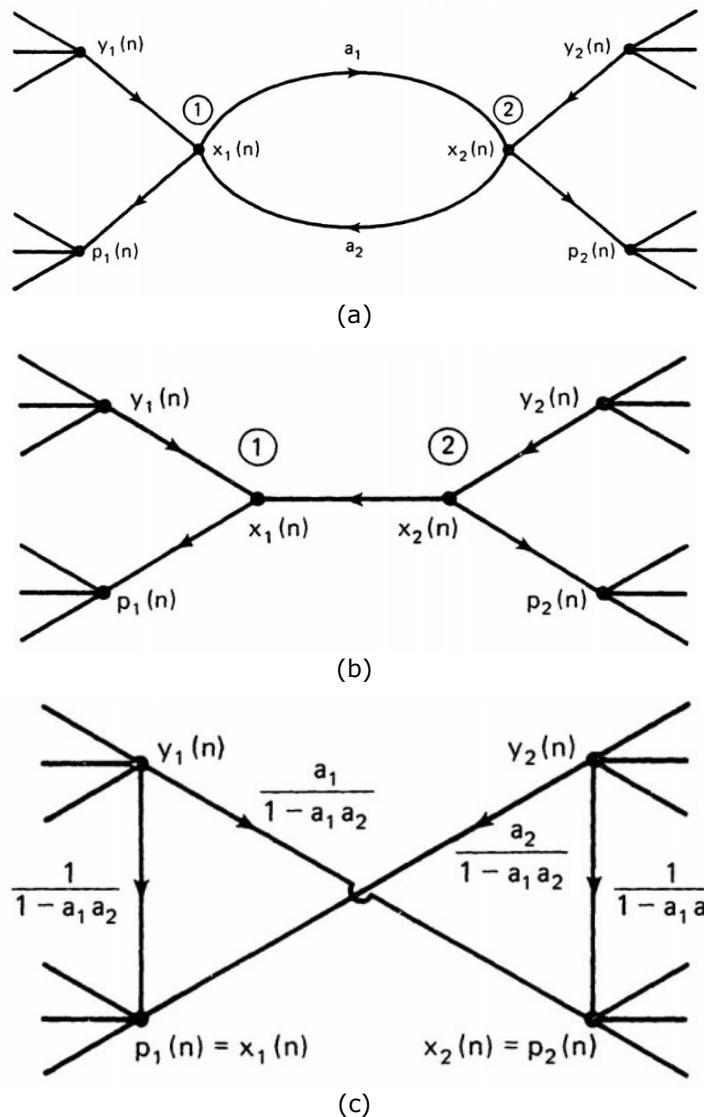


Fig. 13-16 Eliminación de un bucle sin retardo de dos nodos, (a) Circuito original.  
 (b) Circuito simplificado cuando  $y_1(n)=y_2(n)=0$   
 y  $a_1 \cdot a_2=1$  . (c) Un circuito equivalente con el bucle sin retardo eliminado.

Consideremos primero el circuito parcial que se muestra en la Fig. 13-16(a), donde el bucle sin retardo consta de dos ramas que se conectan entre los nodos 1 y 2. Las ecuaciones que describen esta parte del circuito son

$$x_1(n) = a_2 x_2(n) + y_1(n) \quad (13-32a)$$

$$x_2(n) = a_1 x_1(n) + y_2(n) \quad (13-32b)$$

$$p_1(n) = x_1(n) \quad (13-32c)$$

$$p_2(n) = x_2(n) \quad (13-32d)$$

donde  $y_1(n)$  y  $y_2(n)$ , respectivamente, representan los agregados de todas las señales que van a los nodos 1 y 2, y  $p_1(n)$  y  $p_2(n)$ , respectivamente, representan los agregados de señales que salen de los nodos 1 y 2. Resolviendo las dos primeras ecuaciones en (13-32), obtenemos

$$x_1(n) = \frac{1}{1-a_1a_2}y_1(n) + \frac{a^2}{1-a_1a_2}y_2(n) \quad (13-33a)$$

$$x_2(n) = \frac{a_1}{1-a_1a_2}y_1(n) + \frac{1}{1-a_1a_2}y_2(n) \quad (13-33b)$$

Si no hay señal en los nodos 1 y 2, entonces  $y_1(n)=y_2(n)=0$ . En este caso, si  $a_1a_2\neq 1$ , entonces (13-32) implica que  $x_1(n)=x_2(n)=p_1(n)=p_2(n)=0$ . Por lo tanto, podemos eliminar completamente el circuito parcial de la Figura 13-16(a) sin alterar la función de transferencia general. Si, cuando  $y_1(n)=y_2(n)=0$ , tenemos  $a_1a_2=1$ , entonces hay muchas soluciones para (13-33). En ausencia de mejores criterios, simplemente podemos dejar que  $x_1(n)=x_2(n)$  y el circuito de la Fig. 13-16(a) se reduzca al que se muestra en la Fig. 13-16(b).

Suponga ahora que  $y_1(n)$  e  $y_2(n)$  no son simultáneamente cero. Es decir, hay al menos una señal distinta de cero que ingresa al nodo 1 o al nodo 2. Si  $a_1a_2=1$ , el circuito original no es correcto y no hay forma de mejorarlo sin alterar la función de transferencia prevista. Si  $a_1a_2\neq 1$ , entonces (13-33) produce resultados correctos con

$$p_1(n) = \frac{1}{1-a_1a_2}y_1(n) + \frac{a_2}{1-a_1a_2}y_2(n) \quad (13-34a)$$

$$p_2(n) = \frac{a_1}{1-a_1a_2}y_1(n) + \frac{1}{1-a_1a_2}y_2(n) \quad (13-34b)$$

Es decir, podemos eliminar los nodos 1 y 2 por completo. El circuito resultante se muestra en la Fig. 13-16(c). Observe que se elimina el ciclo sin retardo de la Fig. 13-16(a). Observe también que la función de transferencia general permanece sin cambios porque (13-34) se deriva directamente de (13-32).

Para bucles sin retardo que involucran más de dos nodos, una estrategia simple es reducir un bucle sin retardo de nodo  $k$  a un bucle sin retardo de nodo  $(k-1)$ . Repitiendo este procedimiento de reducción de nodos un número suficiente de veces, llegamos al caso en el que el bucle sin retardo involucra solo dos nodos. Por lo tanto, el procedimiento ilustrado en la figura 13-16 se puede aplicar para eliminar por completo el bucle sin retardo. En el resto de esta subsección, presentamos un procedimiento para eliminar un nodo de un ciclo sin demora que involucra más de dos nodos.

Considere el circuito parcial que se muestra en la Fig. 13-17(a), donde los nodos 1, 2, 3 y 4 forman un ciclo sin retardo. Excepto por las señales dentro del bucle sin retardo,  $y_i$  y  $p_i$  respectivamente, representan las señales agregadas que entran y salen del nodo  $i$ , donde  $i=1,2,3$  y 4. Las ecuaciones que describen el circuito son

$$x_1(n) = a_4x_4(n) + y_1(n) \quad (13-35)$$

$$x_i(n) = a_{i-1}x_{i-1}(n) + y_i(n) \text{ for } i = 2, 3, 4 \quad (13-36a)$$

$$p_k(n) = x_k(n) \text{ for } k = 1, 2, 3, 4 \quad (13-36b)$$

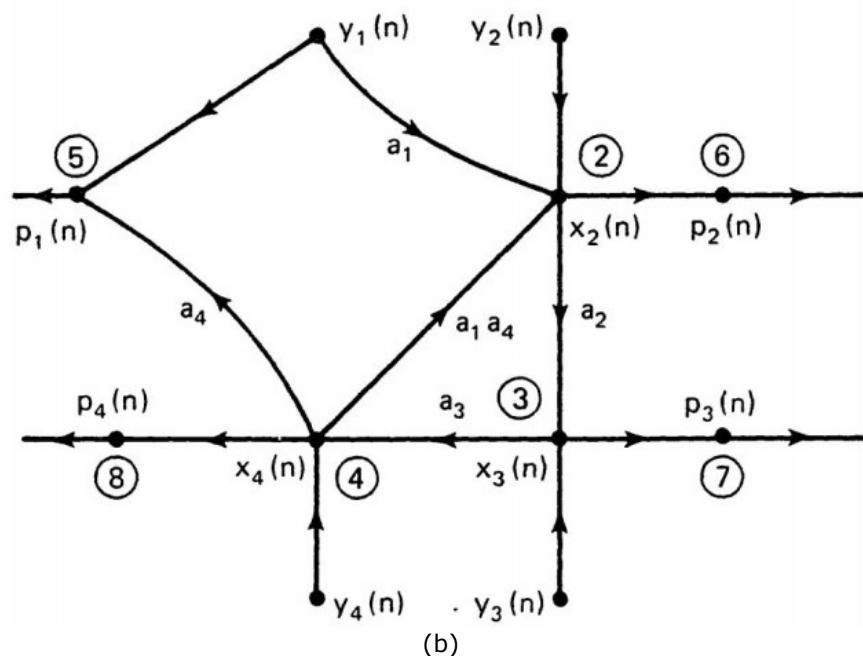
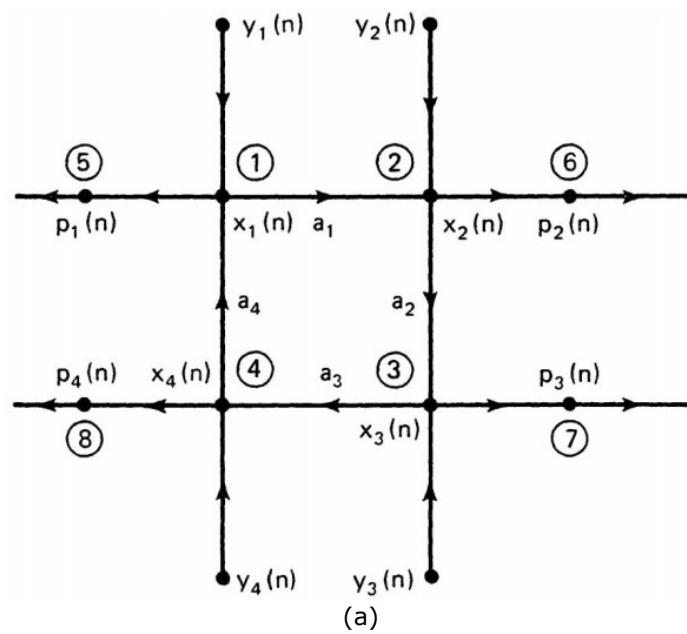


Fig. 13-17 Procedimiento para eliminar un nodo en un bucle sin retardo  
 , (a) El circuito original con un bucle sin retardo  
 de cuatro nodos, (b) Un circuito equivalente con un bucle  
 sin retardo de tres nodos.

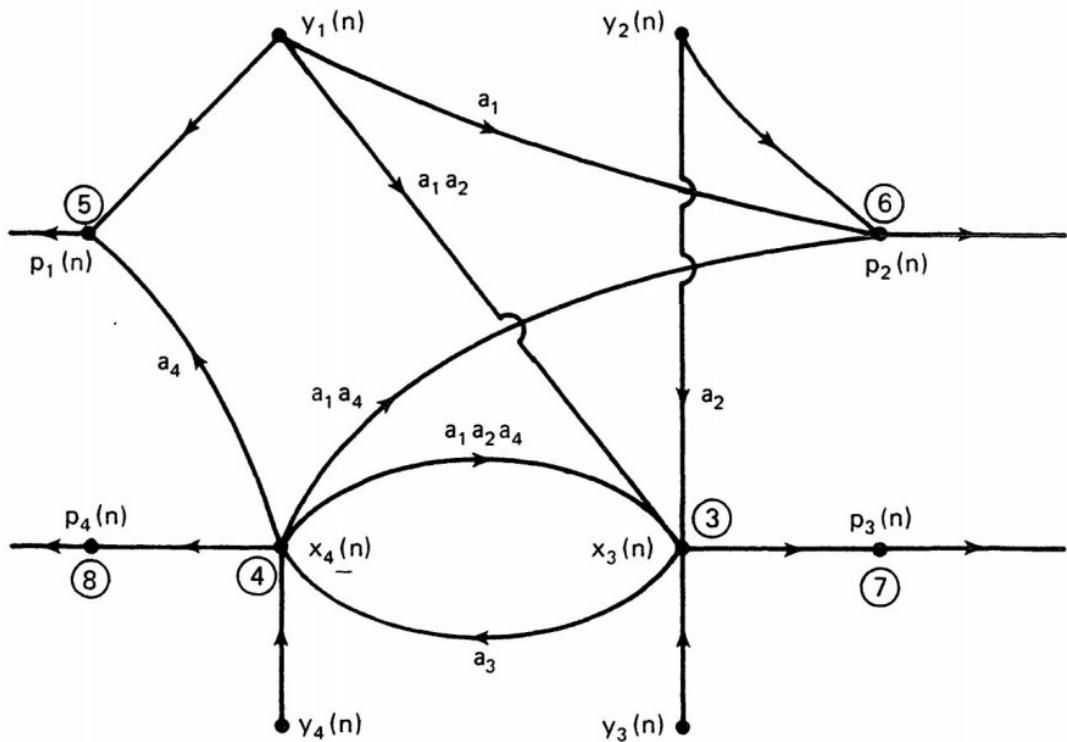


Figura 13-17 (c) Un circuito equivalente con un bucle sin retardo de dos nodos.

Sustituyendo (13-35) en (13-36), obtenemos

$$x_2(n) = a_1 a_4 x_4(n) + a_1 y_1(n) + y_2(n) \quad (13-37a)$$

$$x_3(n) = a_2 x_2(n) + y_3(n) \quad (13-37b)$$

$$x_4(n) = a_3 x_3(n) + y_4(n) \quad (13-37c)$$

$$p_1(n) = a_4 x_4(n) + y_1(n) \quad (13-37d)$$

$$p_k(n) = x_k(n) \text{ for } k = 2, 3, 4 \quad (13-37e)$$

En la Fig. 13-17(b) se muestra un circuito digital que implementa (13-37). Observe que el bucle sin retardo de la figura 13-17(b) consta de tres nodos en comparación con el bucle sin retardo de cuatro nodos de la figura 13-17(a). Llevando este procedimiento un paso más allá, escribimos (13-37) como

$$x_3(n) = a_1 a_2 a_4 x_4(n) + a_1 a_2 y_1(n) + a_2 y_2(n) + y_3(n) \quad (13-38a)$$

$$x_4(n) = a_3 x_3(n) + y_4(n) \quad (13-38b)$$

$$p_1(n) = a_4 x_4(n) + y_1(n) \quad (13-38c)$$

$$p_2(n) = a_1 a_4 x_4(n) + a_1 y_1(n) + y_2(n) \quad (13-38d)$$

$$p_3(n) = x_3(n) \quad (13-38e)$$

$$p_4(n) = x_4(n) \quad (13-38f)$$

El diagrama de circuito para (13-38) se muestra en la Fig. 13-17(c). Tenga en cuenta que el bucle sin demora contiene solo dos nodos ahora. Es decir, podemos usar la técnica de la Fig. 13-16 para eliminar el ciclo final sin retardo. Observe que el proceso de eliminar un nodo de un bucle sin retardo no implica resolver un conjunto de ecuaciones simultáneas. Simplemente requiere sustituciones de ecuaciones.

**Ejemplo 13-7** Considere el circuito de la Fig. 13-18(a). Encuentre un circuito equivalente sin bucles sin retraso.

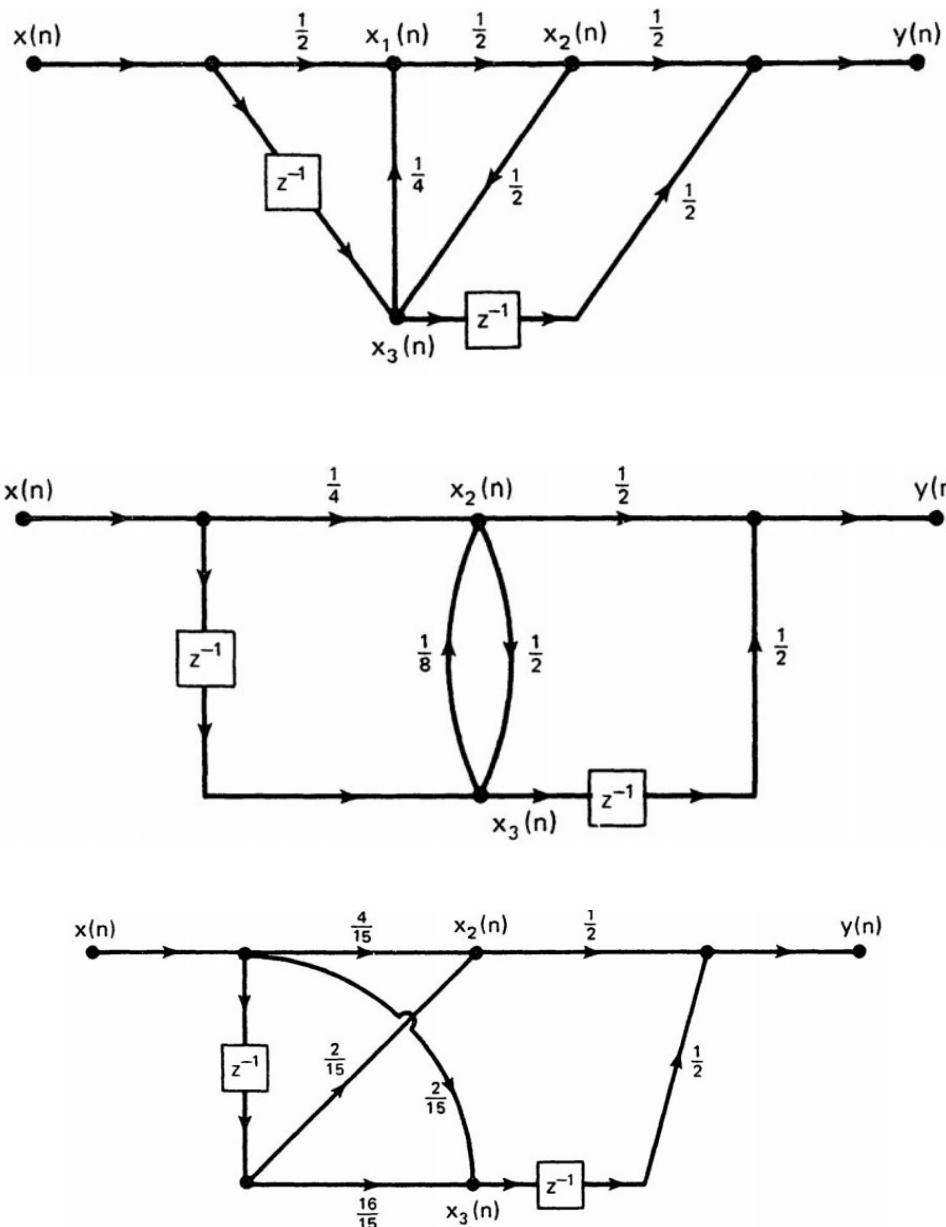


Figura 13-18 Un procedimiento paso a paso para eliminar un bucle sin retraso de tres nodos en el ejemplo 13-7.

**Solución:** Las ecuaciones que describen el circuito son

$$x_1(n) = \left(\frac{1}{4}\right)x_3(n) + \left(\frac{1}{2}\right)x(n) \quad (13-39)$$

$$x_2(n) = \left(\frac{1}{2}\right)x_1(n) \quad (13-40a)$$

$$x_3(n) = \left(\frac{1}{2}\right)x_2(n) + x(n - 1) \quad (13-40b)$$

$$y(n) = \left(\frac{1}{2}\right)x_2(n) + \left(\frac{1}{2}\right)x_3(n - 1) \quad (13-40c)$$

Sustituyendo (13-39) en (13-40), obtenemos

$$x_2(n) = \left(\frac{1}{8}\right)x_3(n) + \left(\frac{1}{4}\right)x(n) \quad (13-41a)$$

$$x_3(n) = \left(\frac{1}{2}\right)x_2(n) + x(n - 1) \quad (13-41b)$$

$$y(n) = \left(\frac{1}{2}\right)x_2(n) + \left(\frac{1}{2}\right)x_3(n - 1) \quad (13-42)$$

Por lo tanto, el circuito de la Fig. 13-18(a) se puede reemplazar por su circuito equivalente en la Fig. 13-18(b). Resolviendo  $x_2(n)$  y  $x_3(n)$  de (13-41) se obtiene

$$x_2(n) = \left(\frac{4}{15}\right)x(n) + \left(\frac{2}{15}\right)x(n - 1) \quad (13-43a)$$

$$x_3(n) = \left(\frac{2}{15}\right)x(n) + \left(\frac{16}{15}\right)x(n - 1) \quad (13-43b)$$

El circuito equivalente resultante caracterizado por (13-42) y (13-43) no contiene bucle sin retardo y se muestra en la Fig. 13-18(c).

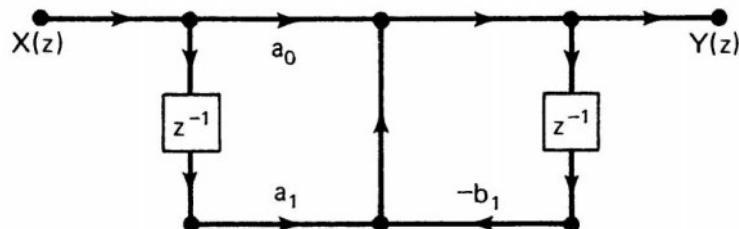
### 13-1-2. Realización indirecta

Para minimizar el efecto del error de cuantificación o el efecto de longitud de palabra finita, los filtros digitales a menudo se realizan interconectando secciones de primer y segundo orden. En esta subsección, primero presentamos algunas realizaciones de filtros digitales de primer y segundo orden, y luego analizamos dos métodos de realización indirecta.

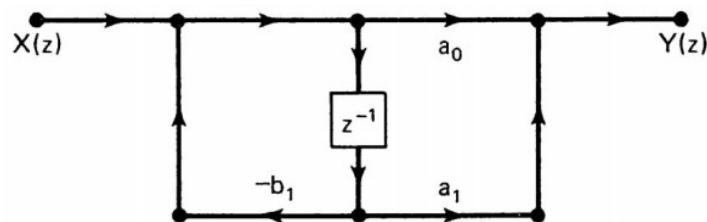
Un filtro digital de primer orden se caracteriza por una función de transferencia de la forma

$$H_1(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1}}{1 + b_1 z^{-1}} \quad (13-44)$$

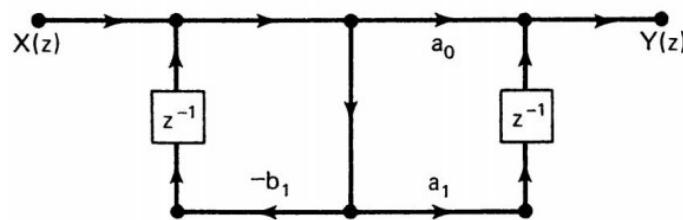
Hay muchas realizaciones distintas de circuitos de (13-44). La Fig. 13-19 muestra realizaciones de (13-44) mediante métodos de forma directa I, forma directa II, forma directa transpuesta I, forma directa transpuesta II y dos métodos de escalera. Observe que cada circuito de primer orden en la Fig. 13-19 requiere tres multiplicadores, que es el número mínimo de multiplicadores necesarios para realizar (13-44).



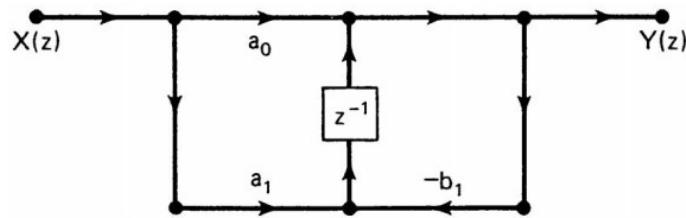
(a) Forma directa I



(b) Forma directa II



(c) Forma directa transpuesta I



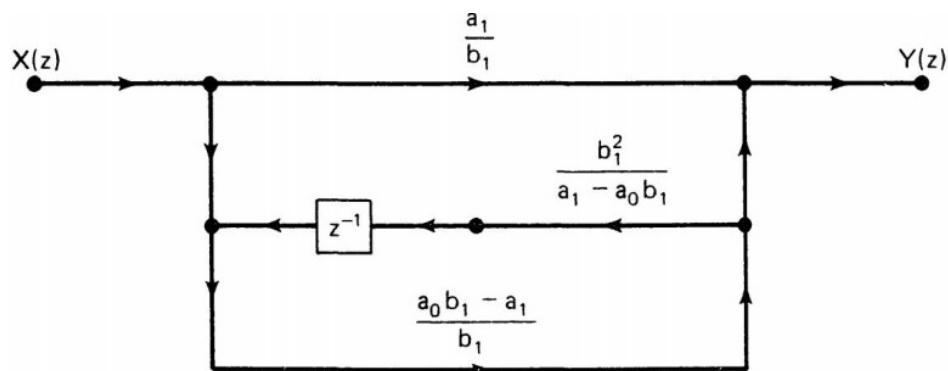
(d) Forma directa transpuesta II

Fig. 13-19 Seis secciones de filtro digital de primer orden.

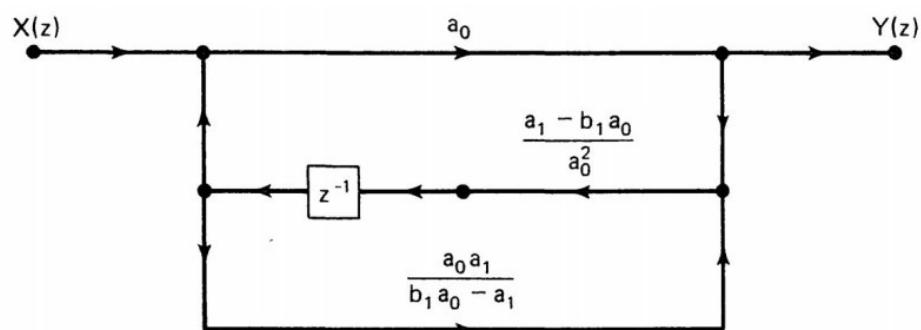
Un filtro digital general de segundo orden se caracteriza por una función de transferencia en forma de

$$H_2(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}} \quad (13-45)$$

Como en el caso de primer orden, hay muchas realizaciones de (13-45) que incluyen formas directas I y II, formas directas transpuestas I y II y formas en escalera. La Fig. 13-20 muestra las realizaciones de forma directa y sus realizaciones de circuito digital transpuesto de (13-45).



$$(e) \text{ Ladder form } H(z) = \frac{a_1}{b_1} + \frac{1}{\frac{b_1^2}{a_0 b_1 - a_1} z^{-1} + \frac{1}{\frac{a_0 b_1 - a_1}{b_1}}}$$



$$(f) \text{ Ladder form } H(z) = \frac{1}{\frac{1}{a_0} + \frac{1}{\frac{a_0^2}{b_1 a_0 - a_1} z + \frac{1}{\frac{b_1 a_0 - a_1}{a_0 a_1}}}}$$

Figura 13-19 (continuación)

Con los bloques de construcción básicos de las secciones de filtros digitales de primer y segundo orden a la mano, ahora procedemos a discutir dos técnicas entre las realizaciones indirectas de los filtros digitales IIR de (13-1). A continuación, suponemos que

$$M \leq N \quad (13-46)$$

en (13-1). Si (13-46) no es el caso [es decir, si  $M > N$  en (13-1)], entonces la función de transferencia no es una función racional propia y podemos escribir  $H(z)$  de (13-1) como

$$H(z) = H_{\text{FIR}}(z) + H_{\text{IIR}}(z) \quad (13-47a)$$

donde

$$H_{\text{FIR}}(z) = c_0 + c_1 z^{-1} + \dots + c_{M-N} z^{-(M-N)} \quad (13-47b)$$

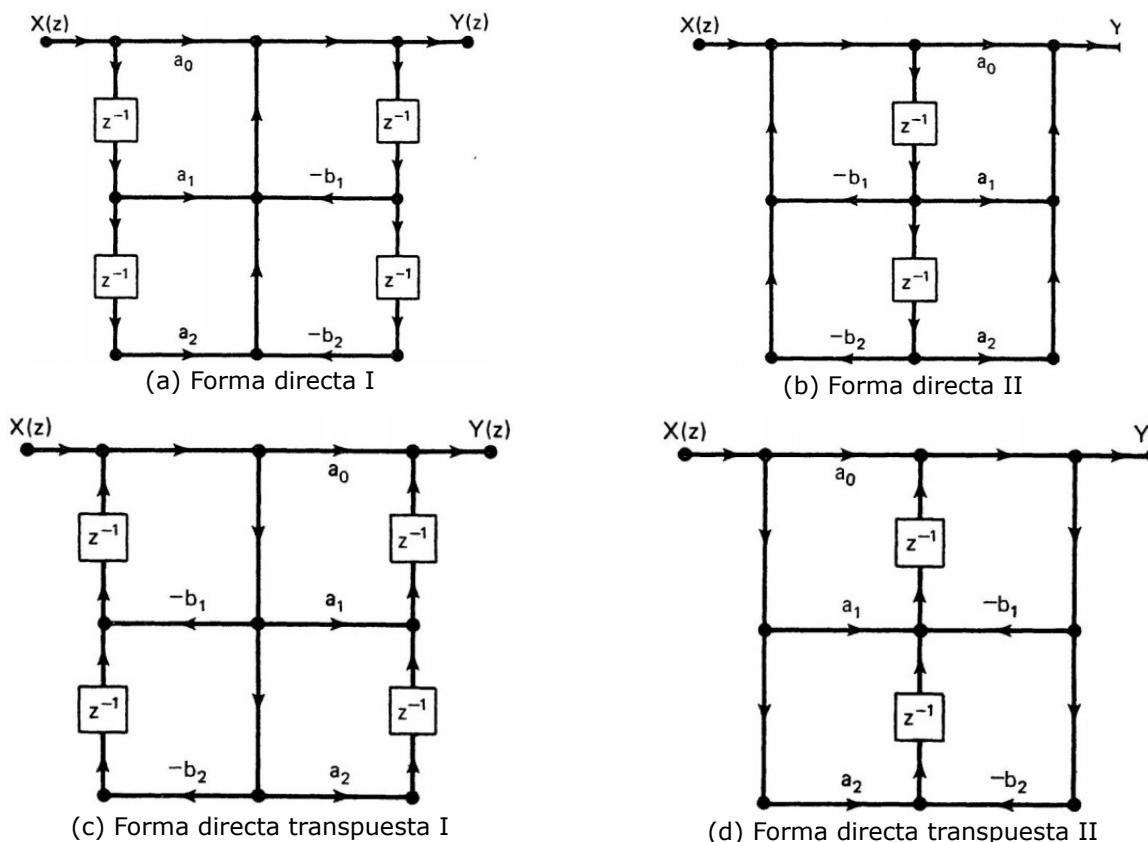


Fig. 13-20 Cuatro secciones de filtro digital de segundo orden.

Y

$$H_{IIR} = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} d_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^N b_i z^{-i}} \quad (13-47c)$$

En este caso, la realización de la función de transferencia puede obtenerse realizando un filtro digital FIR de (13-47b) y un filtro digital IIR de (13-47c) y luego conectando estos dos filtros digitales en paralelo, como se muestra en la Fig. 13-21. Discutimos la realización de filtros digitales FIR en la Sec. 13-2. Por lo tanto, aquí es suficiente considerar el problema de realizar filtros digitales IIR caracterizados por la función de transferencia de (13-1) con  $M \leq N$ .

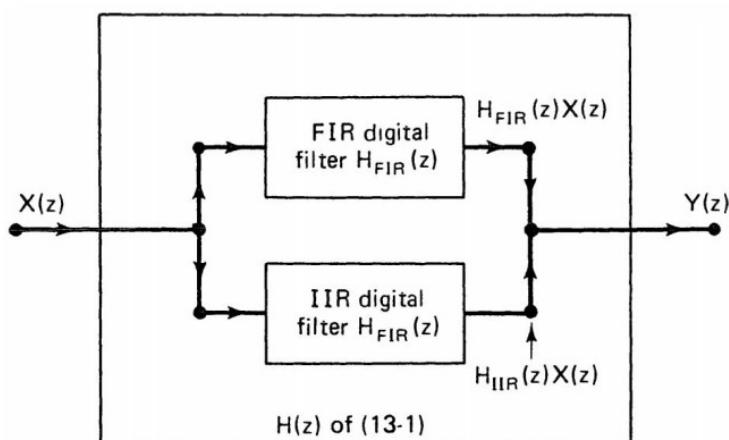


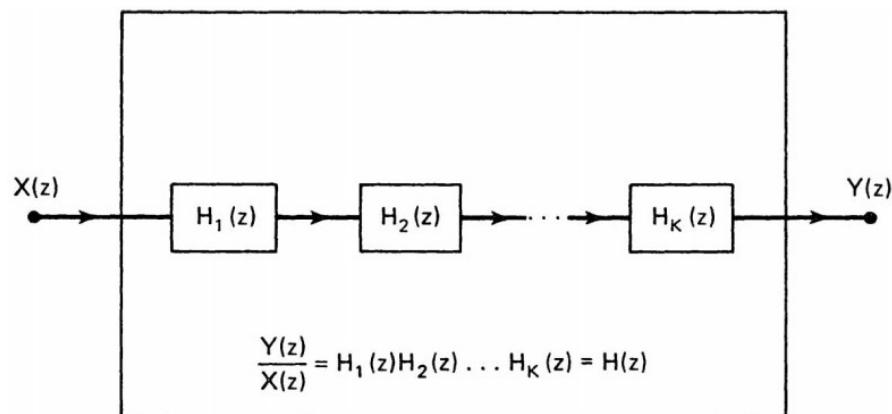
Fig. 13-21 Diagrama de bloques para funciones de transferencia digital incorrectas.

**13-1-2-1. Realizaciones en cascada.**

Dada una función de transferencia digital  $H(z)$  de (13-1) con  $M \leq N$ , podemos escribir  $H(z)$  como

$$H(z) = H_1(z) H_2(z) \dots H_K(z) \quad (13-48)$$

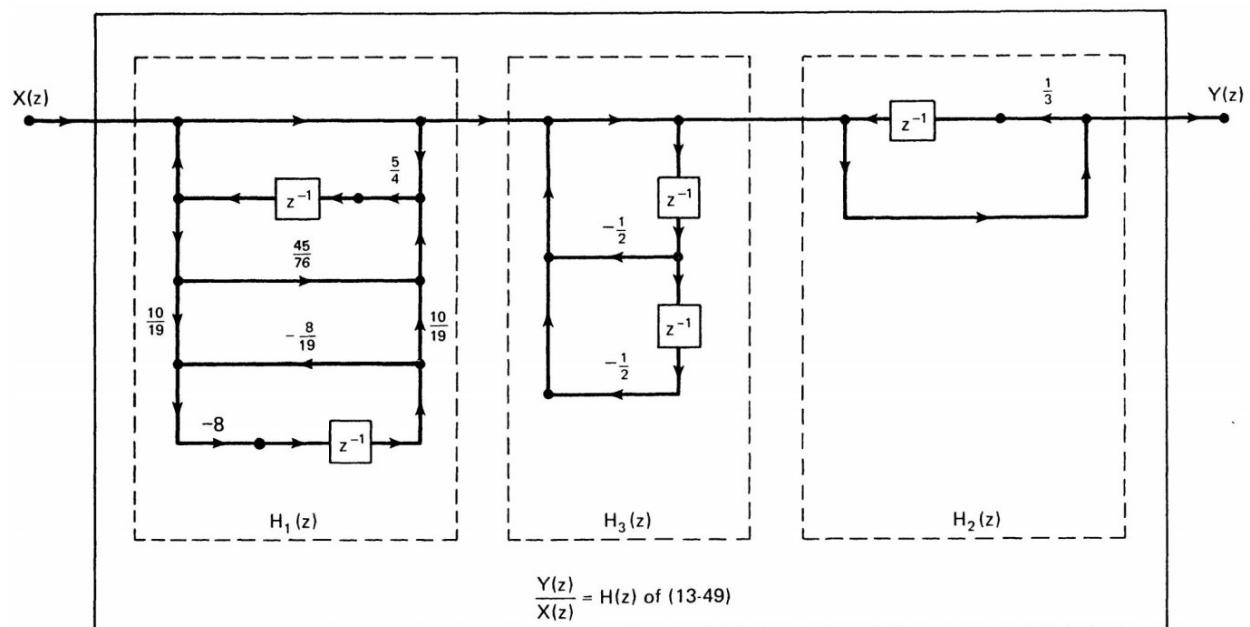
donde  $H_i(z)$  es un filtro digital de primer o segundo orden e  $i=1,2,\dots,K$ . Con base en (13-48), podemos realizar  $H(z)$  realizando primero cada  $H(z)$  individual y luego colocándolos en cascada, como se muestra en la Fig. 13-22.



**Fig. 13-22** Block diagram for cascade realization of digital filters.

**Ejemplo 13-8** Realizar la función de transferencia

$$H(z) = \frac{1 + z + z^{-2}}{\left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)z^{-1} - \left(\frac{1}{8}\right)z^{-2}\right]\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)z^{-1}\right]\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)z^{-1} + \left(\frac{1}{2}\right)z^{-2}\right]} \quad (13-49)$$



**Fig. 13-23** Realización en cascada de (13-49).

**Solución:** Podemos descomponer la función de transferencia general en tres secciones como

$$H(z) = H_1(z)H_2(z)H_3(z) \quad (13-50a)$$

donde

$$H_1(z) \triangleq \frac{1 + z + z^{-2}}{1 - \left(\frac{1}{4}\right)z^{-1} - \left(\frac{1}{8}\right)z^{-2}}$$

$$H_2(z) = \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)z^{-1}} \quad (13-50b)$$

$$H_3(z) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)z^{-1} + \left(\frac{1}{2}\right)z^{-2}}$$

Realizando  $H_1(z)$ ,  $H_2(z)$  y  $H_3(z)$  por separado y luego juntándolos en cascada, obtenemos una realización de  $H(z)$ , como se muestra en la Fig. 13-23, donde  $H_1(z)$  se realiza por la figura 13-15 como en el ejemplo 13-6,  $H_2(z)$  se realiza mediante una forma de escalera (caso 1), y  $H_3(z)$  se realiza mediante la forma directa II. Obsérvese que el bucle sin retardo de  $H_1(z)$  de la Fig. 13-15 se eliminó mediante la técnica presentada en la sección 13-1-3.

### 13-1-2-2. Realización Paralela.

Dada una función de transferencia digital  $H(z)$  de (13-1) con  $M < N$ , podemos realizar una expansión en fracción parcial de  $H(z)$  en la forma

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{i=1}^{N_1} \frac{A_i}{1 - c_i z^{-1}} + \sum_{i=N_1+1}^{N_2} \frac{B_i - C_i z^{-1}}{(1 - d_i z^{-1})(1 - \bar{d}_i z^{-1})} \\ &= H_1(z) + H_2(z) + \dots + H_{N_1}(z) + H_{N_1+1}(z) \\ &\quad + \dots + H_{N_2}(z) \end{aligned} \quad (13-51)$$

donde  $\bar{d}_i$  es el conjugado complejo de  $d_i$ , todos los  $c_i$ ,  $A_i$ ,  $B_i$  y  $C_i$  son reales,  $H_1(z), \dots, H_{N_1}(z)$  son funciones de transferencia de filtros digitales de primer orden, y  $H_{N_1+1}(z), \dots, H_{N_2}(z)$  son funciones de transferencia de filtros digitales de segundo orden. La interpretación de (13-51) es que una función de transferencia digital general de  $n$ -ésimo orden puede realizarse realizando funciones de transferencia digital de primer y segundo orden de  $H_1(z), \dots, H_{N_2}(z)$  y luego conectándolas en paralelo, como se muestra en la figura 13-24.

**Ejemplo 13-9** Realizar la función de transferencia

$$H(z) = \frac{3 + \left(\frac{5}{3}\right)z^{-1} + \left(\frac{2}{3}\right)z^{-2}}{\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)z^{-1}\right]\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)z^{-1} + \left(\frac{1}{2}\right)z^{-2}\right]} \quad (13-52)$$

por el método paralelo.

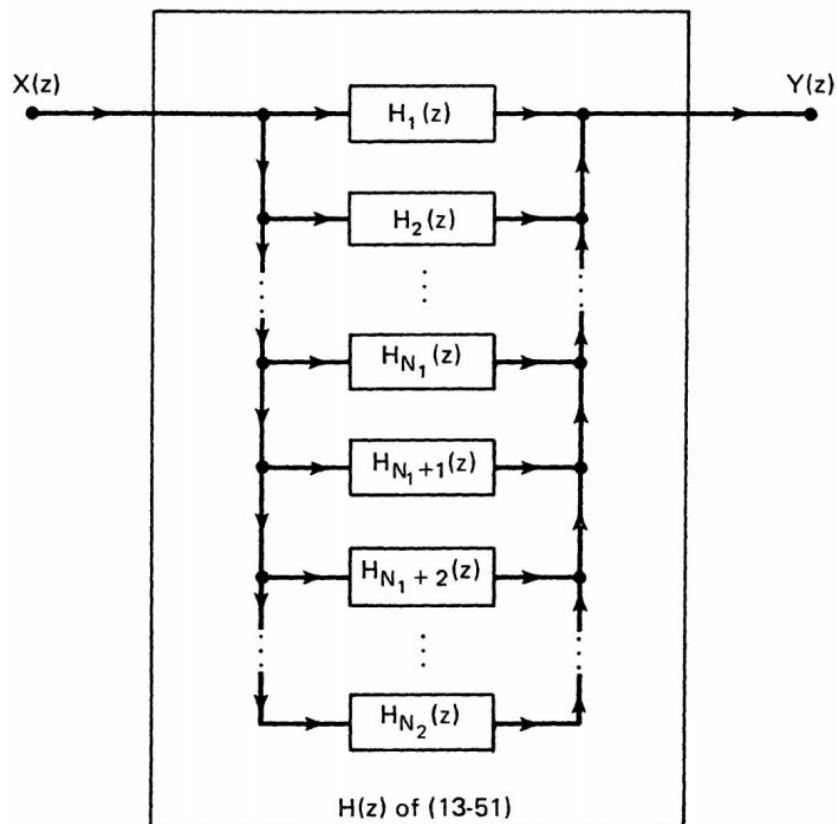


Fig. 13-24 Diagrama de bloques para la realización en paralelo de filtros digitales.

**Solución:** Una expansión en fracciones parciales de  $H(z)$  de (13-52) viene dada por

$$H(z) = \frac{2}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)z^{-1}} + \frac{1 + z^{-1}}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)z^{-1} + \left(\frac{1}{2}\right)z^{-2}} \quad (13-53a)$$

$$\triangleq H_1(z) + H_2(z)$$

donde

$$H_1(z) \triangleq \frac{2}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)z^{-1}} \quad (13-53b)$$

y

$$H_2(z) \triangleq \frac{1 + z^{-1}}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)z^{-1} + \left(\frac{1}{2}\right)z^{-2}} \quad (13-53c)$$

Se puede obtener una realización de  $H(z)$  de (13-52) realizando  $H_1(z)$  y  $H_2(z)$  individualmente y luego conectándolos en paralelo, como se muestra en la Fig. 13-25, donde  $H_1(z)$  es realizado por la forma directa I transpuesta y  $H_2(z)$  se realiza por la forma directa II.

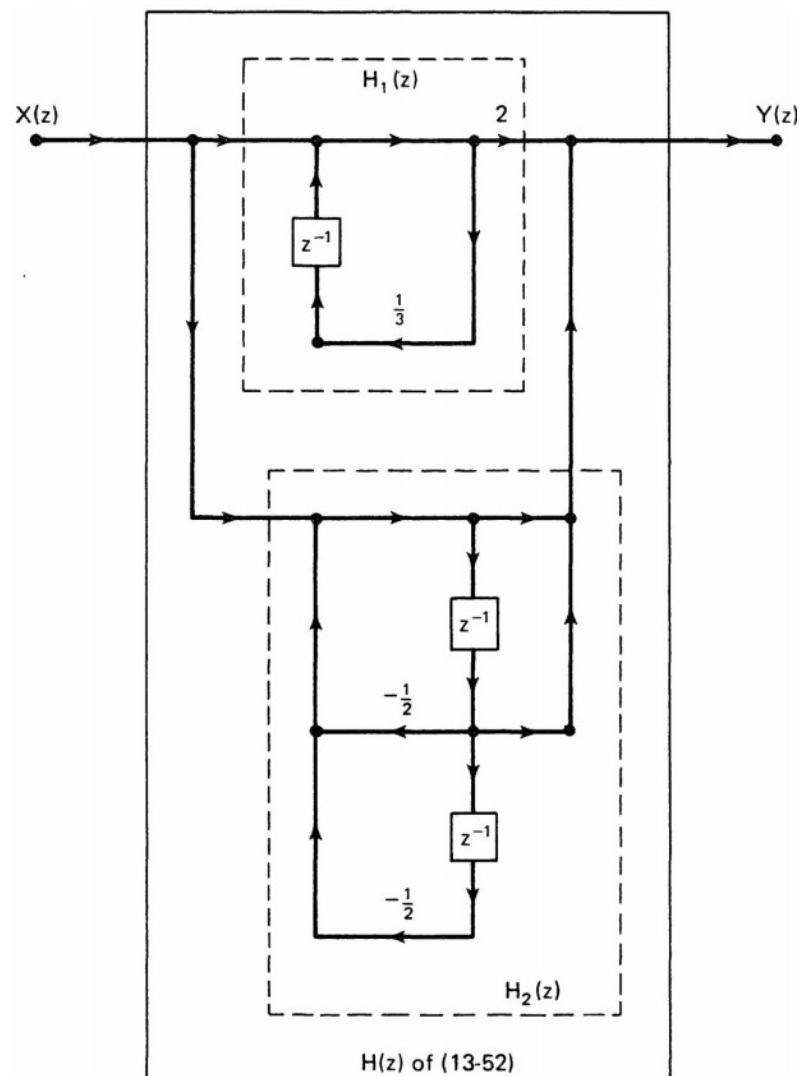


Fig. 13-25 Una realización paralela de (13-52).

### 13-2 Realización del filtro digital FIR

La función de transferencia de un filtro digital FIR viene dada por

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n} \quad (13-54)$$

La realización de (13-54) es mucho más sencilla que la realización de filtros digitales IIR. En la Fig. 13-26(a) se muestra una realización directa de (13-54). La escritura de (13-54) como producto de polinomios de primer y segundo orden como

$$H(z) = H_1(z) H_2(z) \dots H_K(z) \quad (12-55a)$$

donde

$$H_i(z) = \alpha_i + \beta_i z^{-1} + \gamma_i z^{-2} \quad (12-55b)$$

se puede realizar un filtro digital FIR en forma de cascada, como se muestra en la Fig. 13-26(b).

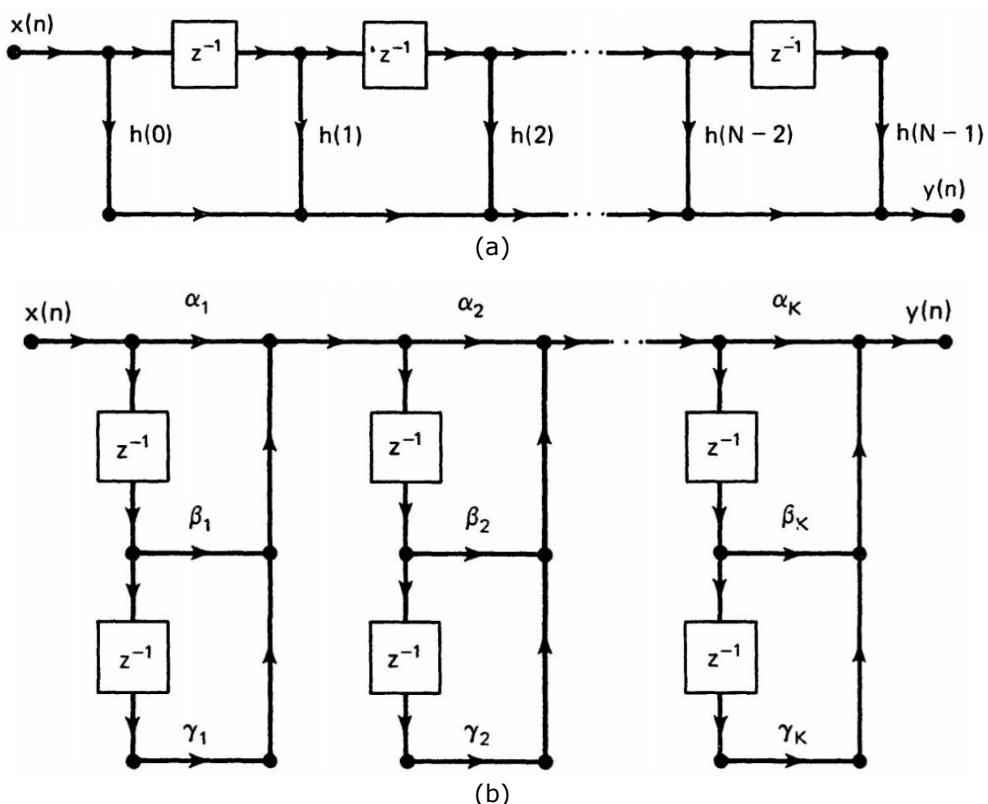


Fig. 13-26 Realizaciones de filtros digitales FIR, (a) Enfoque directo, (b) Enfoque en cascada.

En el caso particular en que el filtro digital FIR es un filtro de fase lineal, entonces<sup>213</sup>

$$(13-56)$$

El número de multiplicadores en la Fig. 13-26(a) se puede reducir a la mitad como se muestra en la Fig. 13-27(a) cuando N es par y como en la Fig. 13-27(b) cuando N es impar. Finalmente, cuando se obtiene un filtro digital FIR mediante el método de muestreo de frecuencia, la función de transferencia viene dada por<sup>214</sup>

<sup>213</sup> Ver (12-135) a (12-137).

<sup>214</sup> See (12-146).

$$H(z) = [1 - z^{-N}] \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\tilde{H}(k)/N}{1 - z^{-1} \exp\left[j \frac{2\pi k}{N}\right]} \quad (13-57)$$

En la Fig. 13-28 se muestra una realización de (13-57) con multiplicadores complejos.

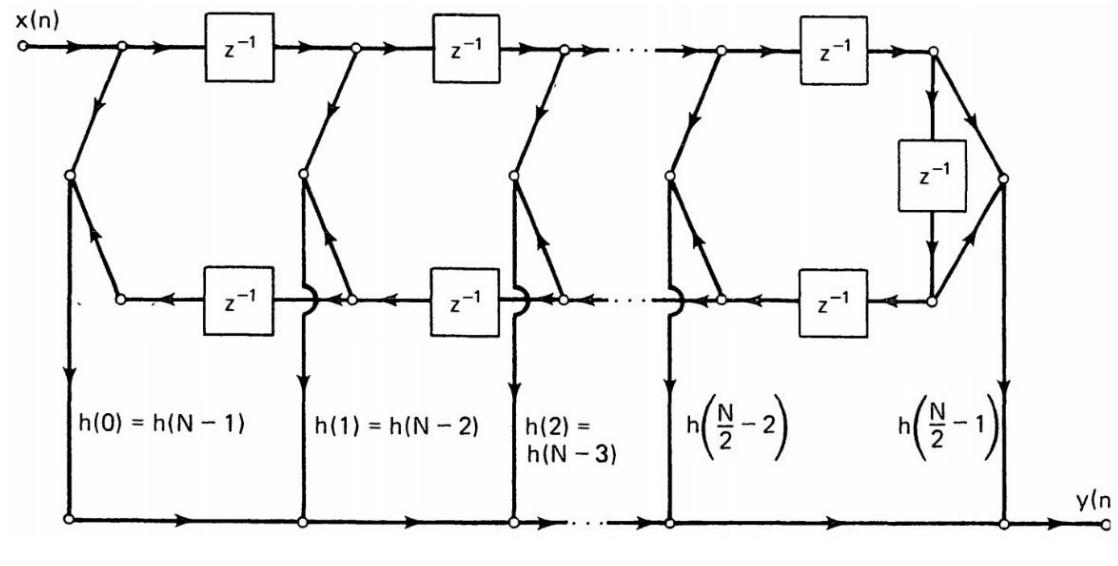
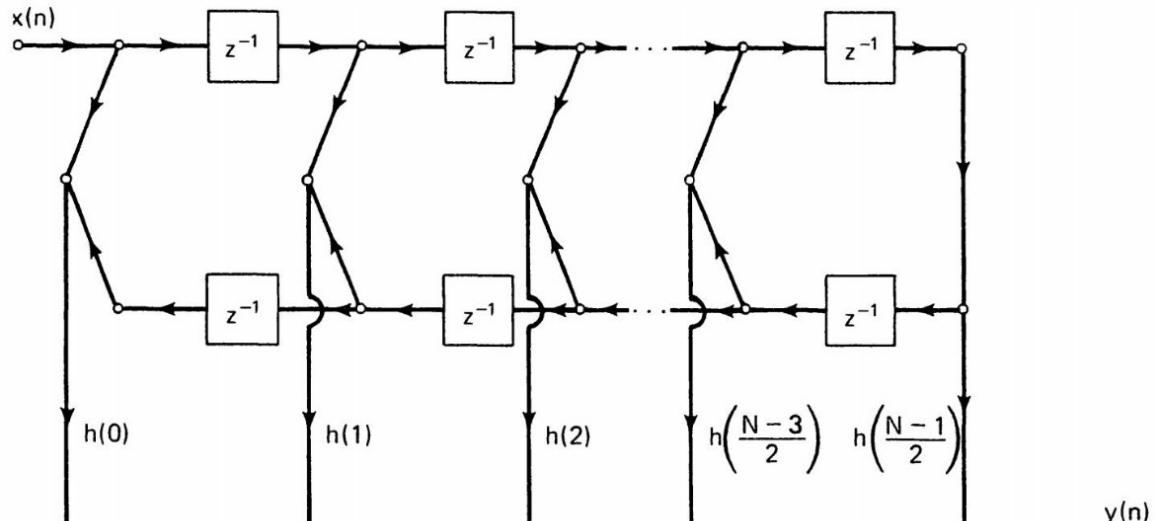
(a)  $N = \text{even}$ (b)  $N = \text{odd}$ 

Fig. 13-27 Realización de filtros digitales FIR de fase lineal.

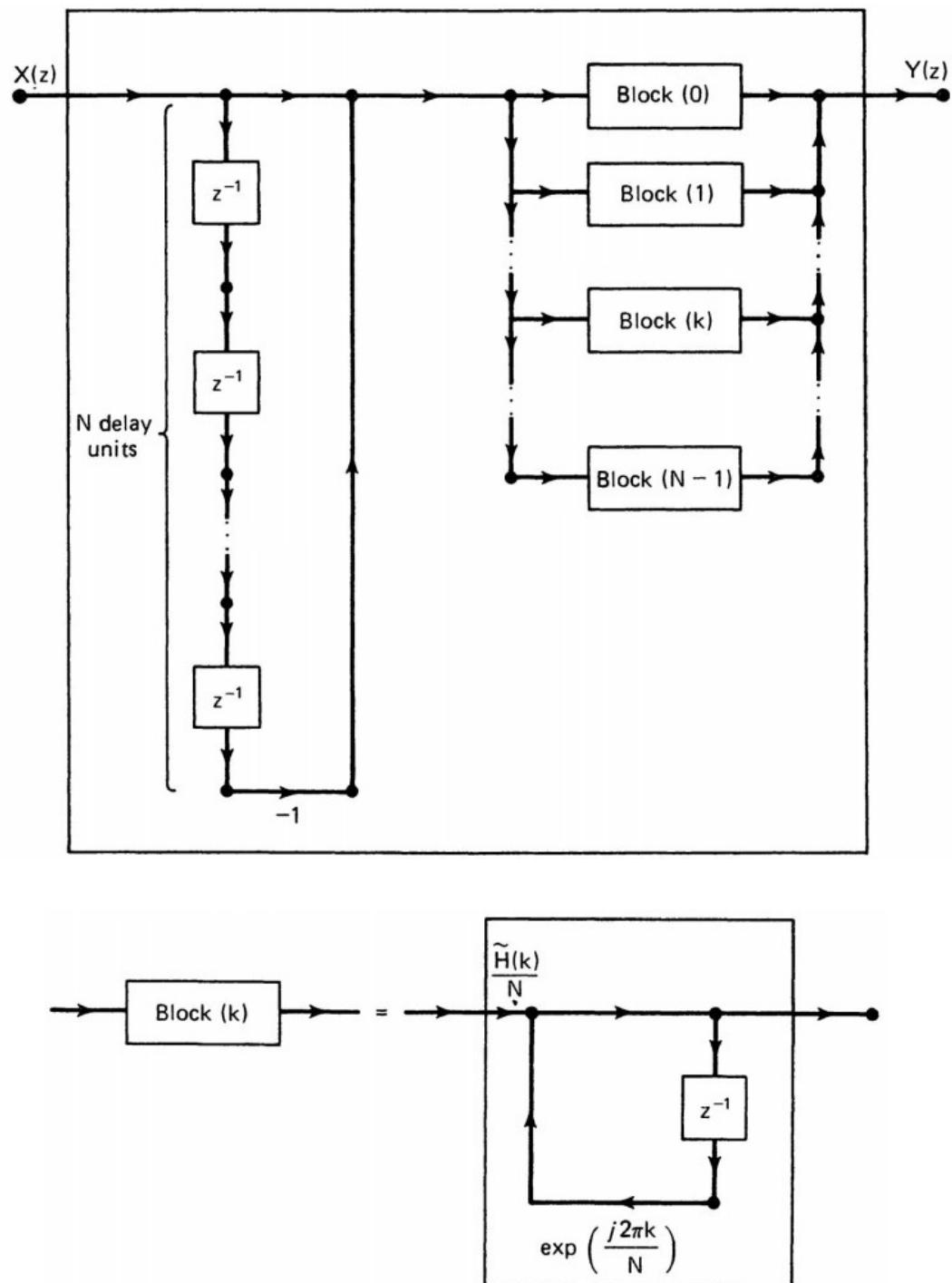


Fig. 13-28 Realización de filtros digitales FIR mediante la técnica de muestreo de frecuencia.

## Referencias y lecturas adicionales

- [1] Rabiner, L. R., and Rader , C. M. Digital Signal Processing. New York: IEEE Press, 1972.
- [2] Digital Signal Processing Committee of IEEE Acoustics, Speech and Signal Processing Society, ed. Digital Signal Processing II. New York: IEEE Press, 1975.
- [3] Oppenheim, A. V., and Schafer, R. W. Digital Signal Processing. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1975.
- [4] Rabiner, L. R., and Gold, B. Theory and Application of Digital Signal Processing. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1975.
- [5] Jackson, L. B. "An Analysis of Roundoff Noise in Digital Filter." Sc. D. Thesis, Stevens Institute of Technology, 1967.
- [6] Mitra, S. K., and Sherwood , R. J. "Canonic Realizations of Digital Filters Using Continued Fraction Expansion." IEEE Trans. Audio Electroacoustics AU-20 (1972): 185-94.
- [7] Mitra, S. K., and Sagar , A. D. "Additional Canonic Realization of Digital Filters Using the Continued Fraction Expansion." IEEE Trans. Circuit and Systems CAS-21 (1974): 135-36.
- [8] Gray, A. H., Jr., and Markel , J. D. "Digital Lattice and Ladder Filter Synthesis." IEEE Trans. Audio Electroacoustics AU-21 (1973): 491-500.
- [9] Szczupak, J., and Mitra, S. K. "Digital Filter Realization Using Successive Multiplier-Extraction Approach." IEEE Trans. Acoustics, Speech and Signal Processing ASSP-23 (1975): 235-39.
- [10] Fettweis, A. "Digital Filter Structures Related to Classical Filter Networks." Arch. Elek. Übertragung 25 (1971): 79-89.
- [11] Sedlmeyer, A., and Fettweis , A. "Digital Filters with True Ladder Configuration." Intern. J. Circuit Theory Appl. 1 (1973): 5-10.
- [12] Parker, S. R., and Hess , S. "Canonic Realization of Second Order Digital Filter due to Finite Precision Arithmetics." IEEE Trans. Circuit Theory CT-19 (1972): 410-13.
- [13] Hwang, S. Y. "Realization of Canonical Digital Networks." IEEE Trans. Acoustics, Speech, Signal Processing ASSP-22 (1974): 27-38.
- [14] Shiva, S. G. "A Unified Approach to the Selection of Structures for Digital Filters." IEEE Intern. Conf. Acoustics, Speech and Signal Processing, May 9-11, 1977: 601-4.
- [15] Szczupak, J., and Mitra , S. K. "Detection, Location, and Removal of Delay-Free Loops in Digital Filter Configurations." IEEE Trans. Acoustics, Speech and Signal Processing ASSP-23 (1975): 558-62.

**Problemas**

13-1. (a) Realice la ecuación en diferencias

$$y(n) = \left(\frac{3}{4}\right)y(n-1) + \left(\frac{1}{8}\right)y(n-2) = x(n) + \left(\frac{1}{3}\right)x(n-1)$$

por las formas directas I y II.

(b) Encuentre las transpuestas de los circuitos en (a).

(c) Demuestre que los circuitos en (b) se caracterizan por la ecuación en diferencia dada en (a).

13-2. Repita el problema 13-1 para la ecuación en diferencia

$$y(n) - \left(\frac{1}{2}\right)y(n-1) + \left(\frac{1}{4}\right)y(n-2) - \left(\frac{1}{8}\right)y(n-3) = x(n)$$

13-3. Realice cada una de las siguientes funciones de transferencia por formas directas I y II y formas directas transpuestas I y II:

(a)  $H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 + 0.5z^{-1} + 0.5z^{-2}}$

(b)  $H(z) = \frac{1 + z^{-2}}{(1 + 0.5z^{-1})(1 + 0.2z^{-1} + 0.2z^{-2})}$

(c)  $H(z) = \frac{(1 + z^{-1})(1 + z^{-2})}{(1 + 0.5z^{-1})(1 - 0.5z^{-1} + 0.5z^{-2})}$

(d)  $H(z) = \frac{1 + z^{-1} - 0.5z^{-2}}{(1 - 0.5z^{-1})(1 + 0.2z^{-1} - 0.2z^{-2})}$

(e)  $H(z) = \frac{(1 - z^{-1})^2}{1 + 0.1z^{-1} - 0.2z^{-2} + 0.3z^{-3} + 0.4z^{-4}}$

(f)  $H(z) = \frac{0.1z^{-1} + z^{-3} + 0.9z^{-5}}{1 - 0.2z^{-2} + 0.4z^{-4} + 0.6z^{-6}}$

13-4. Realice cada función de transferencia del problema 13-3 mediante cuatro formas de escalera (si es posible).

13-5. Realice cada una de las siguientes ecuaciones en diferencias por las formas directas I y II y las formas directas transpuestas I y II:

$$(a) y(n) + \left(\frac{1}{2}\right)y(n-1) - \left(\frac{1}{4}\right)y(n-2) = x(n)$$

$$(b) y(n) + \left(\frac{1}{2}\right)y(n-1) - \left(\frac{1}{2}\right)y(n-2) + \left(\frac{1}{4}\right)y(n-3)$$

$$= x(n) + \left(\frac{1}{3}\right)x(n-1)$$

$$(c) y(n) + \left(\frac{1}{2}\right)y(n-1) - \left(\frac{1}{4}\right)y(n-2) + \left(\frac{1}{8}\right)y(n-3)$$

$$- \left(\frac{1}{16}\right)y(n-4) = x(n) - \left(\frac{1}{4}\right)x(n-1) + \left(\frac{1}{4}\right)x(n-3)$$

$$(d) y(n) + \left(\frac{1}{2}\right)y(n-1) = x(n) + \left(\frac{1}{2}\right)x(n-1) + x(n-4)$$

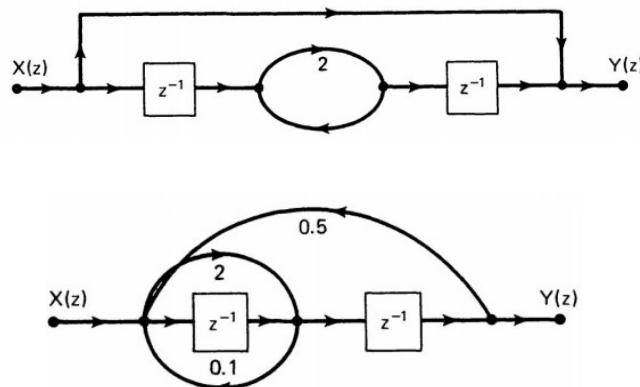
$$(e) y(n) - y(n-1) = x(n) - \left(\frac{1}{2}\right)x(n-1) + \left(\frac{1}{4}\right)x(n-2)$$

$$- \left(\frac{1}{8}\right)x(n-3)$$

$$(f) y(n) = \frac{1}{4} [x(n) + x(n-1) + x(n-2) + x(n-3)]$$

13-6. Realice cada ecuación en diferencia del problema 13-5 mediante cuatro formas de escalera (si es posible).

13-7. Suponga que algunos procedimientos de realización producen circuitos digitales con bucles sin retardo, como se muestra en la Fig. P13-7. Para cada circuito en la Fig. P13-7,



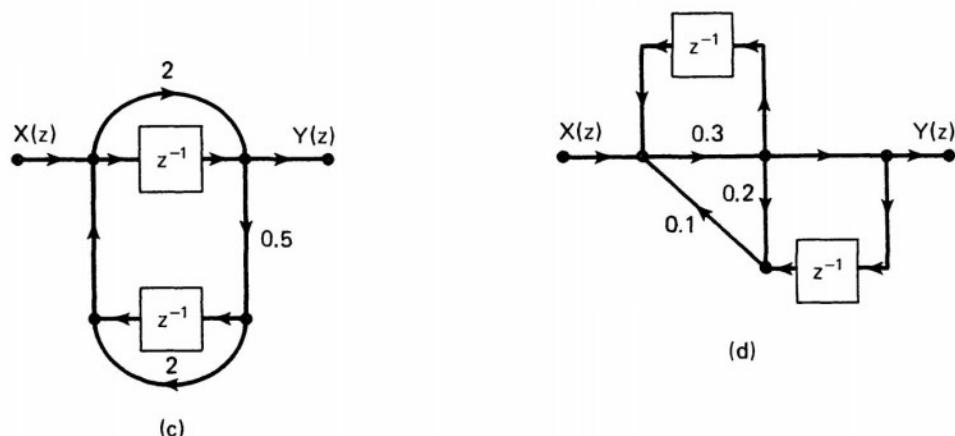


Fig. P13-7(a), (b), (c), (d)

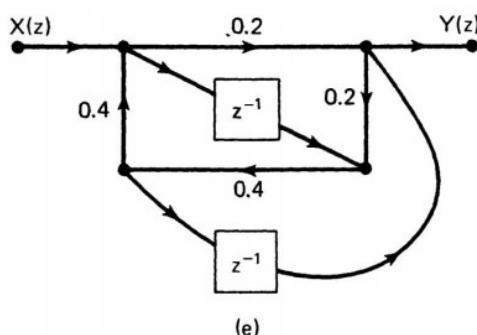


Fig. P13-7(e)

encuentre un circuito equivalente (que tenga la misma función de transferencia general) que no contenga bucles sin retardo.

13-8. Sea

$$H_1(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 + z^{-1} + 0.5z^{-2}}$$

$$H_2(z) = \frac{1 - z^{-2}}{1 - 1.2z^{-1} + 0.5z^{-2}}$$

$$H_3(z) = \frac{1 - 2z^{-1} + 2z^{-2}}{1 + 0.5z^{-1} + 0.25z^{-2}}$$

Realice las siguientes funciones de transferencia por la forma de cascada:

- (a)  $H(z) = H_1(z)H_2(z)$
- (b)  $H(z) = H_1(z)H_3(z)$
- (c)  $H(z) = H_2(z)H_3(z)$
- (d)  $H(z) = H_1(z)H_2(z)H_3(z)$
- (e)  $H(z) = H_1(z) + H_2(z)$
- (f)  $H(z) = H_1(z) + H_3(z)$
- (g)  $H(z) = H_2(z) + H_3(z)$
- (h)  $H(z) = H_1(z) + H_2(z) + H_3(z)$

13-9. Realice las funciones de transferencia del problema 13-8 mediante la forma paralela.

13-10. Considere el circuito de la Fig. P13-10.

(a) Encuentre la función de transferencia global  $H(z)$ .

(b) Si  $H_B(z)=k_B$  y  $H_A(z)=z^{-1}/(1+0.95z^{-2})$ , encuentre la función de transferencia global  $H(z)$ .

(c) Con base en el resultado de (b), encuentre el rango de valores para  $k_B$  tal que el circuito general sea estable.

(d) Repita (b) y (c) si

$$H_A(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 + z^{-2}}$$

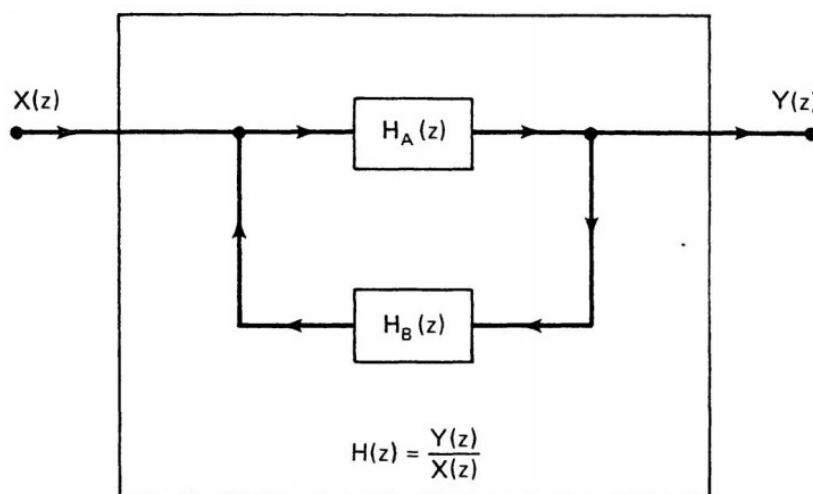


Fig. P13-10

13-11. Realice los siguientes filtros digitales FIR:

$$(a) \begin{array}{ll} h(n)=1 & \text{para } 0 \leq n \leq 4 \\ & =0 \quad \text{de otro modo} \end{array}$$

$$(b) \begin{array}{l} h(0)=h(4)=2 \\ h(1)=h(3)=1 \\ h(2)=0.5 \\ h(n)=0 \text{ para } n<0 \text{ y para } n>4 \end{array}$$

$$(c) \begin{array}{ll} h(n)=1 & \text{para } 0 \leq n \leq 4 \\ & =0 \quad \text{de otro modo} \end{array}$$

$$(d) \begin{array}{l} h(0)=A(5)=2 \\ h(1)=A(4)=1 \\ h(2)=A(3)=0.5 \\ h(n)=0 \text{ para } n<0 \text{ y para } n>5 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} h(n)=1 & \text{para } n=0,1,2 \\ & h(n)=1.5 \quad \text{para } n=3,4,5 \end{array}$$

$$(e) \begin{array}{ll} h(n)=2 & \text{para } n=6,7,8 \\ h(n)=-1 & \text{para } n=9 \\ h(n)=0 & \text{para } n<0 \text{ y para } n \geq 10 \end{array}$$

$$(f) \begin{array}{ll} h(n)=n+1 & \text{para } n=0,1,2,3 \\ & =0 \quad \text{de otro modo} \end{array}$$

$$(g) \begin{array}{ll} h(n)=1 & \text{para } 0 \leq n \leq 9 \\ & =0 \quad \text{de otro modo} \end{array}$$

$$(h) \begin{array}{ll} h(n)=n^2 & \text{para } n=0,1,2,3 \\ & =n+6 \quad \text{para } 4 \leq n \leq 9 \\ & =0 \quad \text{de otro modo} \end{array}$$

13-12. Realice las funciones de transferencia obtenidas por el método de muestreo de frecuencia en el problema 12-21.

13-13. Realice la función de transferencia obtenida por el método de muestreo de frecuencia en el ejemplo 12-16.

13-14. Realice las funciones de transferencia obtenidas por el método de muestreo de frecuencia en el problema 12-22.

13-15. Escriba un programa de computadora para implementar los cuatro métodos de realización en forma de escalera.

13-16. Sea S un filtro digital caracterizado por la función de transferencia

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_N z^{-N}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_N z^{-N}}$$

(a) Demuestre que S puede describirse mediante el siguiente conjunto de ecuaciones en diferencias de primer orden:

$$\begin{bmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \\ x_3(n+1) \\ \vdots \\ x_N(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b_1 & -b_2 & -b_3 & \cdots & -b_{N-1} & -b_N \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ x_3(n) \\ \vdots \\ x_N(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} x(n)$$

$$y(n) = [c_1 \ c_2 \ c_3 \ \cdots \ c_N] \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ x_3(n) \\ \vdots \\ x_N(n) \end{bmatrix} + a_0 x(n)$$

donde  $x(n)$  y  $y(n)$  son, respectivamente, las transformadas z inversas de  $X(z)$  e  $Y(z)$  y

$$c_i = a_i - b_i a_0 \text{ para } i=1,2,\dots,N$$

(b) Encuentre una realización de  $H(z)$  a través de las ecuaciones en diferencias en (a). Nota: Esto se llama la realización de la variable de estado de  $H(z)$ .