Verificación Formal 2021-1, tarea 2
Posgrado en Ciencia e Ingeniería de la Computación
IIMAS, UNAM

Favio E. Miranda Perea
Ayudante: Fernando A. Galicia-Mendoza

16 de noviembre de 2020
Fecha de entrega: lunes 30 de noviembre de 2020, 2359hrs.

Formato de entrega

Deberán subir a la plataforma de `Google Classroom` un archivo de texto con el enlace a un repositorio. Dicho repositorio deberá contener los siguientes archivos:

- `Defs_⟨Sección⟩` En este archivo incluirán todas las definiciones no nativas de `Coq`. Por ejemplo, la definición del operador de cotenabilidad del primer ejercicio de la sección de lógica clásica. Debe haber un archivo por cada sección, es decir, `Defs_LC` para la sección de lógica clásica, `Defs_LM` para la sección de lógica minimal, etc. En caso de que no haya definiciones extra, no deberás crear el archivo `Coq`.
- `Props_⟨Sección⟩` En este archivo incluirán todos los resultados y sus demostraciones. Análogo a los archivos de definiciones, deberás hacer un archivo por cada sección, salvo la última sección.
- `Examples` En este archivo incluirán los resultados de la última sección. Deberás importar los archivos anteriores para tener acceso a la biblioteca `Classical`.
- `README` En este archivo darás tu nombre, número de cuenta, breve explicación de como utilizar tu biblioteca y como están constituidos los archivos.

Lógica Minimal

1. Realizar las siguientes derivaciones.
   a) $\vdash \neg\neg\neg A \leftrightarrow \neg A$
   b) $\vdash \neg\neg(A \land B) \to \neg\neg A \land \neg\neg B$
   c) $\neg\neg\forall x A \to \forall x \neg\neg A$

Lógica Intuicionista

2. Verifica la validez de la equivalencia lógica

$$\neg\neg(A \to B) \leftrightarrow \neg\neg A \to \neg\neg B$$

de la siguiente manera:

   a) $\vdash_m \neg\neg(A \to B) \to \neg\neg A \to \neg\neg B$.
   Sugerencia: pruebe previamente y utilice el lema: $\neg\neg A, \neg B \vdash \neg(A \to B)$

   b) $\vdash_i (\neg\neg A \to \neg\neg B) \to \neg\neg(A \to B)$.
   Sugerencia: primero construya derivaciones de $\neg\neg A$ y $\neg B$ usando $\neg(A \to B)$ como hipótesis.

Lógica Clásica

El objetivo de este ejercicio es utilizar las tácticas en lógica clásica (importando la biblioteca `Classical`[1]). Queda prohibido usar la definición de negación mediante unfold, así como exfalso.

3. En el estudio filosófico del condicional surgen las situaciones contrafácticas formalizadas por las lógicas del mismo nombre. Un operador relevante en estas lógicas es el de cotenabilidad. Decimos que A es cotenable con B, denotado $A \circ B$ si y sólo si no es el caso que si A fuera verdadero, entonces B sería falso. Es decir, A no excluye a B.
Para nuestros propósitos, definimos al operador de cotenabilidad como

$$A \circ B =_{def} \neg(A \to \neg B)$$

Con esta definición verifique las siguientes propiedades, utilizando el razonamiento clásico disponible con las tácticas y propiedades discutidas en clase.

   a) Conmutatividad: $A \circ B \leftrightarrow B \circ A$
   b) Asociatividad: $A \circ (B \circ C) \leftrightarrow (A \circ B) \circ C$
   c) Distributividad: $(A \circ B) \vee (A \circ C) \leftrightarrow A \circ (B \vee C)$
   d) Fusion: $(A \to B \to C) \leftrightarrow A \circ B \to C$
   e) Definición de implicación: $(A \to B) \leftrightarrow \neg(A \circ \neg B)$

4. Verificar cada argumento lógico mediante una proposición en Coq.

   a) $\exists x(Ax \wedge Bx) \to \forall x(Bx \to Cx),\ Ba \wedge \neg Ca \vdash \neg\forall x Ax$
   b) $\exists x(\neg Bxm \wedge \forall y(Cy \to \neg Gxy)),\ \forall z(\neg\forall y(Wy \to Gzy) \to Bzm) \vdash \forall x(Cx \to \neg Wx)$
   c) $\neg\forall x(\neg Px \vee \neg Hx) \to \forall x(Cx \wedge \forall y(Ly \to Axy)),\ \exists x(Hx \wedge \forall y(Ly \to Axy)) \to \forall x(Rx \wedge \forall y Bxy)\ \vdash \neg\forall x\forall y Bxy \to \forall x(\neg Px \vee \neg Hx)$

[1] `https://coq.inria.fr/library/Coq.Logic.Classical.html`

Cualquier sistema

5. Realizar las siguientes derivaciones indicando qué sistema usaste. Considera que $\vdash_m, \vdash_i$ ó $\vdash_c$ es lógica minimal, intuisionista y clásica, respectivamente.
   - $A \to B, \neg(A \lor C) \to D, A \lor B \to C \vdash \neg D \to C$
   - $A \lor B \vdash (\neg D \to C) \land (\neg B \to \neg A) \to (C \to \neg B) \to D$
   - $\forall x(Px \to \neg Bx) \vdash Ra \to \forall x(Rx \to Bx) \to \neg Pa$
   - $\forall x(Px \lor Bx \to \neg Rx),\ \forall x(Sx \to Rx) \vdash \forall x(Px \to \neg Sx \lor Tx)$
   - $\vdash \forall x(Px \land \exists y By) \to \exists x(Px \land Bx)$
   - $\forall x \exists y(Px \to Rxy) \vdash \forall x(Px \to \exists y Rxy)$
   - $\forall x(Px \to \neg Bx) \vdash \neg \exists x(Px \land Bx)$
   - $\exists x \forall y Pxy \vdash \forall y \exists x Pxy$