La distribución gamma

Fernando González

June 6, 2025

1 Teoría

1.1 Función gamma

La función gamma $\Gamma(\alpha)$ es una extensión del factorial a números reales positivos. Se define como:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt, \quad \alpha > 0$$

Propiedades clave:

- $\Gamma(n) = (n-1)!$ para $n \in \mathbb{N}$
- $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ (relación de recurrencia)
- $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ (demostrable con integral doble polar)

1.2 Distribución gamma

Una variable aleatoria X sigue una distribución gamma $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$ si su densidad es:

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, \quad x > 0$$

- α: parámetro de forma (controla la asimetría)
- β: parámetro de tasa (inverso de la escala)

Caso especial: Cuando $\alpha = 1$, se obtiene la exponencial $X \sim \text{Exp}(\beta)$.
La distribución gamma tiene aplicaciones clave en:

- **Modelado de tiempos de espera**: Para eventos que ocurren de forma continua en el tiempo, especialmente cuando los eventos no son memoria-less (a diferencia de la exponencial).
- **Fiabilidad y supervivencia**: Modela tiempos de fallo para sistemas con múltiples componentes o etapas de desgaste.
- **Economía y finanzas**: Describe distribuciones de ingresos, tamaños de reclamaciones de seguros, o volatilidad en mercados financieros.
- **Meteorología**: Modela cantidades de precipitación acumulada en periodos de tiempo.
- **Procesos bayesianos**: Sirve como distribución conjugada previa para parámetros de distribuciones exponenciales y Poisson.

1.3 Gamma incompleta

La función gamma incompleta se define como:

$$\Gamma(\alpha, x) = \int_x^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt$$

Relacionada con la CDF de la distribución gamma.

1.4 Distribución de Erlang

Caso particular de la gamma cuando $\alpha = k \in \mathbb{N}$ (entero). Modela:

- Tiempo hasta k-ésimo evento en proceso Poisson
- Suma de k exponenciales i.i.d.

Su CDF puede expresarse usando:

$$P(X \leq x) = 1 - \sum_{n=0}^{k-1} \frac{(\beta x)^n}{n!} e^{-\beta x}$$

1.5 Conexión con procesos Poisson

Para un proceso Poisson con tasa λ:

- Tiempo hasta k-ésimo evento $\sim \text{Gamma}(k, \lambda)$
- Probabilidad de esperar $> t$ para k eventos: $P(T > t) = \sum_{n=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$
- El tiempo entre k eventos consecutivos sigue una distribución de Erlang (caso especial de gamma con $\alpha = k$ entero).
- Formalmente, si T_k es el tiempo hasta el k-ésimo evento:

  $$T_k \sim \text{Gamma}(k, \lambda)$$

  con función de densidad:

  $$f_{T_k}(t) = \frac{\lambda^k t^{k-1} e^{-\lambda t}}{(k-1)!}$$

- Cuando $k = 1$, recuperamos la distribución exponencial $\text{Exp}(\lambda)$.

2 Ejemplos

2.1 Ejemplo 1: Cálculo de $\Gamma(1/2)$

Partimos de la definición:

$$\Gamma(1/2) = \int_0^\infty t^{-1/2} e^{-t} dt$$

Paso 1: Elevamos al cuadrado:

$$\Gamma(1/2)^2 = \left(\int_0^\infty x^{-1/2} e^{-x} dx\right)\left(\int_0^\infty y^{-1/2} e^{-y} dy\right) = \iint_{\mathbb{R}_+^2} (xy)^{-1/2} e^{-(x+y)} dx dy$$

Paso 2: Cambio a coordenadas polares:

- Sustituimos $x = r\cos^2\theta$, $y = r\sin^2\theta$
- El jacobiano es $|J| = 2r\sin\theta\cos\theta$
- Los límites: $r \in (0, \infty)$, $\theta \in (0, \pi/2)$

Paso 3: Reescribimos la integral:

$$\Gamma(1/2)^2 = \int_0^{\pi/2} \int_0^\infty \frac{1}{r\sin\theta\cos\theta} e^{-r^2} 2r\sin\theta\cos\theta \, dr d\theta$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^\infty e^{-r^2} dr = \pi$$

Resultado final: $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

2.2 Ejemplo 2: Tiempo entre buses

Los buses llegan a una estación siguiendo Poisson con $\lambda = 8/\text{hora}$. Calcular probabilidad de esperar > 6 horas para 50 buses.
Solución:

- Tiempo $T \sim \text{Gamma}(50, 8)$
- Usando aproximación normal ($\mu = 50/8$, $\sigma^2 = 50/64$):

$$P(T > 6) \approx P\left(Z > \frac{6 - 6.25}{0.625}\right) \approx 0.6554$$

2.3 Ejemplo 3: Suma de exponenciales

Sean $X_1, \ldots, X_{10} \sim \text{Exp}(2)$ i.i.d. Hallar $P(\sum X_i > 6)$.
Solución:

- $Y = \sum X_i \sim \text{Gamma}(10, 2)$
- Cálculo exacto con software: $P(Y > 6) \approx 0.849$

3 Ejercicios

3.1 Ejercicio 1

Demuestre que si $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$, entonces $kX \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta/k)$ para $k > 0$.

3.2 Ejercicio 2

Calcule $E[X^3]$ para $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$ usando la función generadora de momentos.

3.3 Ejercicio 3

En un proceso Poisson con $\lambda = 5/\text{hora}$, encuentre el tiempo t tal que $P(3\text{er evento} > t) = 0.05$.

3.4 Ejercicio 4

Sean $X \sim \text{Gamma}(2, 3)$ y $Y \sim \text{Gamma}(4, 3)$ independientes. Derive la distribución de $X + Y$.

Anexos: Suma de exponenciales como gamma

Sean $X_1, \ldots, X_n \sim \text{Exp}(\lambda)$ i.i.d. La suma $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ sigue una distribución gamma porque:
Prueba por convolución:

- Para $n = 2$: La convolución de dos exponenciales es:

$$f_{S_2}(s) = \int_0^s \lambda e^{-\lambda x} \lambda e^{-\lambda(s-x)} dx = \lambda^2 s e^{-\lambda s}$$

  que es $\text{Gamma}(2, \lambda)$.

- Por inducción: Si $S_{n-1} \sim \text{Gamma}(n-1, \lambda)$, entonces:

$$f_{S_n}(s) = \int_0^s \frac{\lambda^{n-1} t^{n-2} e^{-\lambda t}}{(n-2)!} \lambda e^{-\lambda(s-t)} dt = \frac{\lambda^n s^{n-1} e^{-\lambda s}}{(n-1)!}$$

  que es $\text{Gamma}(n, \lambda)$.

Intuición: Cada exponencial modela el tiempo entre eventos Poisson, y su suma modela el tiempo total para n eventos.

Anexos: pregunta generadora

Hola, soy estudiante; no tengo problema con explicaciones técnicas y pruebas, al igual que explicaciones intuitivas.

Genera un resumen del contenido de mi clase de Probabilidades en un archivo .tex.

Formato: letterpaper, márgenes de 1.27 cm
Título: La distribución gamma
Autor: Fernando González
Secciones: con \section{}, sin asterisco
Nombres de secciones: primera letra en mayúscula, todas las demás no (estándar RAE)

Sección: Teoría
Explicar los siguientes temas sin ejemplos. Explica la teoría detalladamente, luego introduce las fórmulas. Busca que la fórmula tenga algún desarrollo breve para llegar a ella, y de esta u otra manera poder acercarme a cómo y por qué funciona esa fórmula.
- La función gamma: cómo se define, para qué más se usa además de esta distribución
- Propiedades de la función gamma
- Cómo obtener gamma(1/2) haciendo una doble integral con barrido por ángulo en lugar de solo integrar el área bajo la curva
- Distribución gamma
- Si \alpha=1 \beta=\beta, X sigue exp(\frac{1}{\beta})
- Gamma incompleta
- Distribución de Erlang, bien explicada. Cómo se define, para qué se usa. Asociar con la distribución gamma explicada anteriormente
- Usar la distribución de Erlang para obtener la probabilidad de esperar una cierta cantidad de tiempo a un evento Poisson.

Sección: Ejemplos
- 3 ejemplos de complejidad media que abarquen los temas de arriba. Explicados (no necesitan ser paso a paso) y con respuesta

Que uno de ellos resuelva lo siguiente:

Los buses llegan a una estación siguiendo una variable aleatoria discreta Poisson con promedio 8 veces por hora. Alguien se sienta a esperar hasta que lleguen 50 buses. ¿Cuál es la probabilidad de que deba esperar 6+ horas?

Sección: Ejercicios
- 3 a 5 ejercicios de complejidad media-alta, sin respuesta.