Repaso final

Fernando González

March 21, 2025

1 Teoría

1.1 Aspectos de teoría de conjuntos relevante a probabilidades

La teoría de conjuntos proporciona la base para definir eventos y espacios muestrales. Las operaciones de unión ($A \cup B$), intersección ($A \cap B$) y complemento (A^c) son fundamentales para describir relaciones entre eventos.

1.2 Regla de inclusión-exclusión

Permite calcular la probabilidad de la unión de eventos:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Para tres eventos:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

1.3 Espacio muestral

Es el conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio, denotado como Ω.

1.4 Regla de Laplace

Asigna probabilidades iguales a todos los resultados en un espacio muestral finito y equiprobable:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

1.5 Conteo: ley de la suma y del producto

1.5.1 Ley de la suma

Si hay n opciones mutuamente excluyentes para realizar una tarea, y m opciones para realizar otra tarea, entonces hay $n + m$ formas de realizar una de las dos tareas.

1.5.2 Ley del producto

Si hay n formas de realizar una tarea y m formas de realizar otra tarea, entonces hay $n \times m$ formas de realizar ambas tareas.

1.6 Permutaciones (anagramas, anagramas de n letras, con objetos repetidos)

Permutaciones de n objetos: $P(n) = n!$
Permutaciones de n objetos con n_1 objetos de tipo 1, n_2 objetos de tipo 2, ..., n_k objetos de tipo k:

$$P(n; n_1, n_2, ..., n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}$$

1.7 Combinaciones (subconjuntos, distribuir r elementos iguales entre n personas)

Combinaciones de n objetos tomados de r en r:

$$C(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

1.8 Probabilidad condicional e independencia

Probabilidad condicional:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Independencia: $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ o $P(A|B) = P(A)$

1.9 Eventos excluyentes

$P(A \cap B) = 0$

1.10 Probabilidad total

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)$$

1.11 Regla de Bayes

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$$

2 Ejemplos

Ejemplo 1

Se lanzan dos dados. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma sea 7 o 11?

Solución: Hay 6 resultados posibles para cada dado, por lo que hay $6 \times 6 = 36$ resultados posibles en total. Hay 6 formas de obtener una suma de 7 y 2 formas de obtener una suma de 11. Por lo tanto, la probabilidad es $\frac{6+2}{36} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$.

Ejemplo 2

¿Cuántos anagramas se pueden formar con la palabra "MISSISSIPPI"?

Solución: La palabra tiene 11 letras, con 4 I, 4 S y 2 P. El número de anagramas es $\frac{11!}{4!4!2!} = 34650$.

Ejemplo 3

Se extraen dos cartas de una baraja de 52 cartas. ¿Cuál es la probabilidad de que ambas sean ases?

Solución: Hay 4 ases en la baraja. La probabilidad de que la primera carta sea un as es $\frac{4}{52}$. Dado que la primera carta es un as, la probabilidad de que la segunda carta también sea un as es $\frac{3}{51}$. Por lo tanto, la probabilidad de que ambas cartas sean ases es $\frac{4}{52} \times \frac{3}{51} = \frac{1}{221}$.

3 Ejercicios

1. ¿Cuál es la probabilidad de obtener al menos un 6 al lanzar tres dados?
2. ¿Cuántas formas hay de distribuir 10 libros idénticos entre 4 personas?
3. Se extraen tres cartas de una baraja de 52 cartas. ¿Cuál es la probabilidad de que las tres sean del mismo palo?
4. Hay 10 personas en una fiesta. ¿Cuántos apretones de manos se darán si cada persona saluda a todas las demás?
5. Una caja contiene 5 bolas rojas y 3 bolas azules. Se extraen 2 bolas al azar sin reemplazo. ¿Cuál es la probabilidad de que ambas bolas sean rojas?