Resumen de Probabilidades: Variables Aleatorias Continuas

Fernando González

May 27, 2025

1 Teoría

1.1 Distribución de Variable Aleatoria Continua

Una variable aleatoria continua (v.a.c) es aquella que puede tomar infinitos valores en un intervalo. A diferencia de las discretas, su probabilidad en un punto específico es cero, y se describe mediante una **función de densidad de probabilidad (fdp)** $f(x)$ que cumple:

- $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$

1.2 Propiedades de las v.a.c

- $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\, dx$
- $P(X = a) = 0$
- La fdp no representa probabilidad directamente, sino densidad.

1.3 Distribución Acumulada (CDF)

La función de distribución acumulada $F(x)$ se define como:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$$

Propiedades:

- $F(x)$ es no decreciente y continua.
- $\lim_{x\to -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$.

1.4 Media, Varianza y Generadora de Momentos

- **Media (Valor Esperado)**: $\mu = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx$
- **Varianza**: $\sigma^2 = Var(X) = E[(X-\mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\, dx$
- **Función Generadora de Momentos (MGF)**: $M_X(t) = E[e^{tX}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)\, dx$

1.5 Distribución Uniforme Continua

Definición: $X \sim U(a,b)$ tiene fdp constante en $[a,b]$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- Media: $\mu = \frac{a+b}{2}$
- Varianza: $\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$
- MGF: $M_X(t) = \frac{e^{tb}-e^{ta}}{t(b-a)}$

<u>Uso</u>: Modelar situaciones donde todos los resultados en un intervalo son equiprobables (ej. tiempos aleatorios).

1.6 Distribución Exponencial

Definición: $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ modela tiempos entre eventos:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

- Media: $\mu = \frac{1}{\lambda}$
- Varianza: $\sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}$
- MGF: $M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$ (para $t < \lambda$)

Uso: Procesos sin memoria (ej. tiempo de falla de componentes).

1.7 Distribución Normal

Definición: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ con fdp:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

- Media: μ
- Varianza: σ^2
- MGF: $M_X(t) = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$

Uso: Fenómenos naturales, errores de medición (Teorema del Límite Central).

1.7.1 Normal Estándar y Propiedades

La distribución normal estándar $Z \sim N(0, 1)$ es un caso particular de la normal con media $\mu = 0$ y varianza $\sigma^2 = 1$. Su función de densidad de probabilidad (fdp) es:

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}, \quad z \in \mathbb{R}.$$

Transformación a Normal Estándar: Dada $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, la estandarización se realiza mediante el cambio de variable:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}.$$

Este cambio lineal preserva las propiedades de la normal y permite convertir cualquier v.a.c normal X en Z.

Desarrollo de la Transformación:

1. **Función de Distribución Acumulada (CDF)**:

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} \, dt.$$

2. Aplicando el cambio de variable $z = \frac{t-\mu}{\sigma}$ (con $dz = \frac{dt}{\sigma}$):

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \, dz = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right),$$

donde $\Phi(z)$ es la CDF de la normal estándar:

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \phi(u) \, du = P(Z \leq z).$$

Uso de $\Phi(z)$:

- $\Phi(z)$ está tabulada y es fundamental para calcular probabilidades. Por ejemplo:

$$P(a \leq X \leq b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right).$$

- Simetría: $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$.
- Para valores negativos de z, se usan tablas o propiedades de simetría.

Ejemplo de Aplicación: Si $X \sim N(100, 25)$ ($\sigma = 5$), calcular $P(X \leq 110)$:

$$z = \frac{110 - 100}{5} = 2 \quad \Rightarrow \quad P(X \leq 110) = \Phi(2) \approx 0.9772.$$

Propiedades:

- **Linealidad**: $aX + b \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$
- **Suma**: Si $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, entonces:

$$X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

- **Promedio**: Si $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, entonces:

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

  Esto es clave para inferencia estadística.

2 Ejemplos

2.1 Ejemplo 1: Uniforme Continua

El tiempo de espera (en minutos) en un semáforo sigue una distribución uniforme $X \sim U(0, 3)$. Calcular la probabilidad de que el tiempo de espera esté entre 1 y 2.5 minutos.

Explicación: Para una distribución uniforme continua en el intervalo $[a, b]$, la probabilidad de que X esté en un subintervalo $[c, d]$ es proporcional a la longitud de dicho subintervalo:

$$P(c < X < d) = \frac{d - c}{b - a}$$

Desarrollo:

- Intervalo total: $[0, 3]$ (duración 3 minutos)
- Subintervalo deseado: $[1, 2.5]$ (duración 1.5 minutos)
- Cálculo:

$$P(1 < X < 2.5) = \frac{2.5 - 1}{3 - 0} = \frac{1.5}{3} = 0.5$$

Interpretación: Hay un 50% de probabilidad de que el tiempo de espera en el semáforo esté entre 1 y 2.5 minutos.

2.2 Ejemplo 2: Exponencial

La vida útil de un componente electrónico sigue una distribución exponencial $X \sim \text{Exp}(0.01)$, donde $\lambda = 0.01$ fallas por hora. Calcular la probabilidad de que el componente dure más de 120 horas.

Explicación: La distribución exponencial modela tiempos entre eventos con tasa constante λ. Su función de supervivencia es:

$$P(X > x) = e^{-\lambda x}$$

Desarrollo:

- Parámetro $\lambda = 0.01$ (1 falla cada 100 horas en promedio)
- Probabilidad solicitada: $P(X > 120)$
- Cálculo:

$$P(X > 120) = e^{-0.01 \times 120} = e^{-1.2} \approx 0.3012$$

Interpretación: Hay aproximadamente un 30.12% de probabilidad de que el componente funcione más de 120 horas sin fallar.

2.3 Ejemplo 3: Normal

Las calificaciones de un examen siguen una distribución normal $X \sim N(70, 10^2)$, con media $\mu = 70$ y desviación estándar $\sigma = 10$. Calcular la probabilidad de que un estudiante seleccionado al azar obtenga entre 60 y 85 puntos.

Explicación: Para calcular probabilidades en una distribución normal: 1. Estandarizar los valores a la normal estándar $Z \sim N(0, 1)$. 2. Usar tablas de $\Phi(z)$ o software para encontrar las probabilidades acumuladas.

Desarrollo:

- Estandarización:
$$Z_1 = \frac{60 - 70}{10} = -1 \quad \text{(límite inferior)}$$
$$Z_2 = \frac{85 - 70}{10} = 1.5 \quad \text{(límite superior)}$$
- Cálculo con tabla de Z:
$$P(-1 < Z < 1.5) = \Phi(1.5) - \Phi(-1)$$
$$\Phi(1.5) \approx 0.9332$$
$$\Phi(-1) = 1 - \Phi(1) \approx 1 - 0.8413 = 0.1587$$
$$P(-1 < Z < 1.5) \approx 0.9332 - 0.1587 = 0.7745$$

Interpretación: Hay un 77.45% de probabilidad de que un estudiante obtenga una calificación entre 60 y 85 puntos. La estandarización permite usar propiedades universales de la normal estándar.

3 Ejercicios

3.1 Ejercicio 1

Sea $X \sim U(2, 8)$. Calcular:

- $P(3 \leq X \leq 7)$
- El valor de k tal que $P(X > k) = 0.4$

3.2 Ejercicio 2

El tiempo entre llegadas a una estación sigue $\text{Exp}(\lambda = 5)$ (min). Determine:

- Probabilidad de que la próxima llegada ocurra en menos de 30 segundos.
- El tiempo t tal que $P(X \leq t) = 0.9$.

3.3 Ejercicio 3

Sean $X \sim N(50, 16)$ e $Y \sim N(60, 25)$ independientes. Calcular:

- $P(X + Y > 120)$
- $P(\bar{Y} < 58)$ para $n = 4$ observaciones.

3.4 Ejercicio 4

Demuestre que si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, entonces $M_X(t) = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$.

La distribución gamma

Fernando González

June 6, 2025

1 Teoría

1.1 Función gamma

La función gamma $\Gamma(\alpha)$ es una extensión del factorial a números reales positivos. Se define como:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt, \quad \alpha > 0$$

Propiedades clave:

- $\Gamma(n) = (n-1)!$ para $n \in \mathbb{N}$
- $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ (relación de recurrencia)
- $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ (demostrable con integral doble polar)

1.2 Distribución gamma

Una variable aleatoria X sigue una distribución gamma $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$ si su densidad es:

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, \quad x > 0$$

- α: parámetro de forma (controla la asimetría)
- β: parámetro de tasa (inverso de la escala)

Caso especial: Cuando $\alpha = 1$, se obtiene la exponencial $X \sim \text{Exp}(\beta)$.
La distribución gamma tiene aplicaciones clave en:

- **Modelado de tiempos de espera**: Para eventos que ocurren de forma continua en el tiempo, especialmente cuando los eventos no son memoria-less (a diferencia de la exponencial).
- **Fiabilidad y supervivencia**: Modela tiempos de fallo para sistemas con múltiples componentes o etapas de desgaste.
- **Economía y finanzas**: Describe distribuciones de ingresos, tamaños de reclamaciones de seguros, o volatilidad en mercados financieros.
- **Meteorología**: Modela cantidades de precipitación acumulada en periodos de tiempo.
- **Procesos bayesianos**: Sirve como distribución conjugada previa para parámetros de distribuciones exponenciales y Poisson.

1.3 Gamma incompleta

La función gamma incompleta se define como:

$$\Gamma(\alpha, x) = \int_x^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt$$

Relacionada con la CDF de la distribución gamma.

1.4 Distribución de Erlang

Caso particular de la gamma cuando $\alpha = k \in \mathbb{N}$ (entero). Modela:

- Tiempo hasta k-ésimo evento en proceso Poisson
- Suma de k exponenciales i.i.d.

Su CDF puede expresarse usando:

$$P(X \leq x) = 1 - \sum_{n=0}^{k-1} \frac{(\beta x)^n}{n!} e^{-\beta x}$$

1.5 Conexión con procesos Poisson

Para un proceso Poisson con tasa λ:

- Tiempo hasta k-ésimo evento $\sim \text{Gamma}(k, \lambda)$
- Probabilidad de esperar $> t$ para k eventos: $P(T > t) = \sum_{n=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$
- El tiempo entre k eventos consecutivos sigue una distribución de Erlang (caso especial de gamma con $\alpha = k$ entero).
- Formalmente, si T_k es el tiempo hasta el k-ésimo evento:

  $$T_k \sim \text{Gamma}(k, \lambda)$$

  con función de densidad:

  $$f_{T_k}(t) = \frac{\lambda^k t^{k-1} e^{-\lambda t}}{(k-1)!}$$

- Cuando $k = 1$, recuperamos la distribución exponencial $\text{Exp}(\lambda)$.

2 Ejemplos

2.1 Ejemplo 1: Cálculo de $\Gamma(1/2)$

Partimos de la definición:

$$\Gamma(1/2) = \int_0^\infty t^{-1/2} e^{-t} dt$$

Paso 1: Elevamos al cuadrado:

$$\Gamma(1/2)^2 = \left(\int_0^\infty x^{-1/2} e^{-x} dx \right) \left(\int_0^\infty y^{-1/2} e^{-y} dy \right) = \iint_{\mathbb{R}_+^2} (xy)^{-1/2} e^{-(x+y)} dx dy$$

Paso 2: Cambio a coordenadas polares:

- Sustituimos $x = r\cos^2\theta$, $y = r\sin^2\theta$
- El jacobiano es $|J| = 2r \sin\theta \cos\theta$
- Los límites: $r \in (0, \infty)$, $\theta \in (0, \pi/2)$

Paso 3: Reescribimos la integral:

$$\Gamma(1/2)^2 = \int_0^{\pi/2} \int_0^\infty \frac{1}{r \sin\theta \cos\theta} e^{-r^2} 2r \sin\theta \cos\theta \, dr d\theta$$

$$= 2 \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^\infty e^{-r^2} dr = \pi$$

Resultado final: $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

2.2 Ejemplo 2: Tiempo entre buses

Los buses llegan a una estación siguiendo Poisson con $\lambda = 8$/hora. Calcular probabilidad de esperar > 6 horas para 50 buses.

Solución:

- Tiempo $T \sim \text{Gamma}(50, 8)$
- Usando aproximación normal ($\mu = 50/8$, $\sigma^2 = 50/64$):

$$P(T > 6) \approx P\left(Z > \frac{6 - 6.25}{0.625}\right) \approx 0.6554$$

2.3 Ejemplo 3: Suma de exponenciales

Sean $X_1, \ldots, X_{10} \sim \text{Exp}(2)$ i.i.d. Hallar $P(\sum X_i > 6)$.

Solución:

- $Y = \sum X_i \sim \text{Gamma}(10, 2)$
- Cálculo exacto con software: $P(Y > 6) \approx 0.849$

3 Ejercicios

3.1 Ejercicio 1

Demuestre que si $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$, entonces $kX \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta/k)$ para $k > 0$.

3.2 Ejercicio 2

Calcule $E[X^3]$ para $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$ usando la función generadora de momentos.

3.3 Ejercicio 3

En un proceso Poisson con $\lambda = 5$/hora, encuentre el tiempo t tal que $P(3\text{er evento} > t) = 0.05$.

3.4 Ejercicio 4

Sean $X \sim \text{Gamma}(2, 3)$ y $Y \sim \text{Gamma}(4, 3)$ independientes. Derive la distribución de $X + Y$.

Anexos: Suma de exponenciales como gamma

Sean $X_1, \ldots, X_n \sim \text{Exp}(\lambda)$ i.i.d. La suma $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ sigue una distribución gamma porque:

Prueba por convolución:

- Para $n = 2$: La convolución de dos exponenciales es:

$$f_{S_2}(s) = \int_0^s \lambda e^{-\lambda x} \lambda e^{-\lambda(s-x)} dx = \lambda^2 s e^{-\lambda s}$$

  que es $\text{Gamma}(2, \lambda)$.

- Por inducción: Si $S_{n-1} \sim \text{Gamma}(n-1, \lambda)$, entonces:

$$f_{S_n}(s) = \int_0^s \frac{\lambda^{n-1} t^{n-2} e^{-\lambda t}}{(n-2)!} \lambda e^{-\lambda(s-t)} dt = \frac{\lambda^n s^{n-1} e^{-\lambda s}}{(n-1)!}$$

  que es $\text{Gamma}(n, \lambda)$.

Intuición: Cada exponencial modela el tiempo entre eventos Poisson, y su suma modela el tiempo total para n eventos.

Anexos: pregunta generadora

```
Hola, soy estudiante; no tengo problema con explicaciones técnicas y pruebas, al igual que
explicaciones intuitivas.

Genera un resumen del contenido de mi clase de Probabilidades en un archivo .tex.

Formato: letterpaper, márgenes de 1.27 cm
Título: La distribución gamma
Autor: Fernando González
Secciones: con \section{}, sin asterisco
Nombres de secciones: primera letra en mayúscula, todas las demás no (estándar RAE)

Sección: Teoría
Explicar los siguientes temas sin ejemplos. Explica la teoría detalladamente, luego introduce las fórmulas.
Busca que la fórmula tenga algún desarrollo breve para llegar a ella, y de esta u otra manera poder
acercarme a cómo y por qué funciona esa fórmula.
- La función gamma: cómo se define, para qué más se usa además de esta distribución
- Propiedades de la función gamma
- Cómo obtener gamma(1/2) haciendo una doble integral con barrido por ángulo en lugar de solo integrar el
área bajo la curva
- Distribución gamma
- Si \alpha=1 \beta=\beta, X sigue exp(\frac{1}{\beta})
- Gamma incompleta
- Distribución de Erlang, bien explicada. Cómo se define, para qué se usa. Asociar con la distribución
gamma explicada anteriormente
- Usar la distribución de Erlang para obtener la probabilidad de esperar una cierta cantidad de tiempo
a un evento Poisson.

Sección: Ejemplos
- 3 ejemplos de complejidad media que abarquen los temas de arriba. Explicados (no necesitan ser paso a
paso) y con respuesta

Que uno de ellos resuelva lo siguiente:

Los buses llegan a una estación siguiendo una variable aleatoria discreta Poisson con promedio 8 veces
por hora. Alguien se sienta a esperar hasta que lleguen 50 buses. ¿Cuál es la probabilidad de que deba
esperar 6+ horas?

Sección: Ejercicios
- 3 a 5 ejercicios de complejidad media-alta, sin respuesta.
```