Técnicas adicionales de conteo

Fernando González

1 Teoría

1.1 Cardinalidad del conjunto de funciones de A en B

Si A y B son conjuntos finitos con $|A| = m$ y $|B| = n$, entonces el número de funciones de A en B es n^m.

Explicación: Para cada elemento de A, tenemos n opciones en B. Como hay m elementos en A, el número total de funciones es $n \times n \times \cdots \times n$ (m veces), que es n^m.

1.2 Conteo de permutaciones con objetos repetidos

Si tenemos n objetos con n_1 del primer tipo, n_2 del segundo tipo, ..., n_k del k-ésimo tipo, donde $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$, entonces el número de permutaciones distintas es:

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$$

Explicación: Si todos los objetos fueran distintos, tendríamos $n!$ permutaciones. Sin embargo, como tenemos objetos repetidos, debemos dividir por el número de permutaciones de cada tipo de objeto para evitar contar las mismas permutaciones múltiples veces.

1.3 Conteo de combinaciones con repetición

El número de combinaciones de n objetos tomados de r tipos con repetición permitida es:

$$\binom{n+r-1}{r}$$

Explicación: Podemos representar las combinaciones con repetición mediante una secuencia de r estrellas (objetos) y $n-1$ barras (separadores de tipos). El número total de posiciones es $n+r-1$, y debemos elegir r de ellas para las estrellas.

1.4 Soluciones naturales de $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$

El número de soluciones naturales (enteros no negativos) de la ecuación $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$ es:

$$\binom{n+r-1}{r}$$

Explicación: Esto es equivalente a contar el número de combinaciones con repetición, donde x_i representa el número de objetos del tipo i.

1.5 Distribuir objetos distinguibles

Si tenemos n objetos distinguibles y k cajas distinguibles, el número de formas de distribuir los objetos en las cajas es k^n.

Explicación: Cada objeto puede ser colocado en cualquiera de las k cajas, por lo que tenemos k opciones para cada uno de los n objetos.

1.6 Distribuir objetos no distinguibles

Si tenemos n objetos no distinguibles y k cajas distinguibles, el número de formas de distribuir los objetos en las cajas es:

$$\binom{n+k-1}{n}$$

Explicación: Esto es equivalente a contar el número de combinaciones con repetición, donde los objetos no distinguibles son las estrellas y las cajas son los tipos.

2 Ejemplos

2.1 Ejemplo 1

¿Cuántas palabras de 10 letras se pueden formar con las letras de la palabra "MATEMATICAS"?

Solución: Tenemos 10 letras en total: 2 M, 3 A, 2 T, 1 E, 1 I, 1 C, 1 S. El número de permutaciones es:

$$\frac{10!}{2!3!2!1!1!1!1!} = 151200$$

2.2 Ejemplo 2

¿Cuántas soluciones enteras no negativas tiene la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 = 10$?

Solución: Usando la fórmula de combinaciones con repetición:

$$\binom{3+10-1}{10} = \binom{12}{10} = 66$$

2.3 Ejemplo 3

¿De cuántas maneras se pueden distribuir 7 bolas distintas en 4 cajas diferentes?

Solución: Cada bola puede ir a cualquiera de las 4 cajas, por lo que tenemos $4^7 = 16384$ formas.

3 Ejercicios

1. ¿Cuántas cadenas binarias de longitud 10 tienen exactamente 4 unos?
2. ¿De cuántas maneras se pueden distribuir 10 bolas idénticas en 3 cajas diferentes si cada caja debe contener al menos 2 bolas?
3. ¿Cuántas palabras diferentes se pueden formar con las letras de la palabra "PROBABILIDAD"?
4. ¿Cuántas soluciones enteras no negativas tiene la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$?
5. ¿De cuántas maneras se pueden distribuir 8 libros distintos en 5 estantes diferentes?

4 Profundización

4.1 Independencia y Dependencia de Eventos

Definición intuitiva: Dos eventos A y B son *independientes* si la ocurrencia de uno no afecta la ocurrencia del otro. En otras palabras, saber si A ocurrió no cambia nuestra percepción de si B ocurrió, y viceversa.

Ejemplo de independencia: Consideremos el lanzamiento de dos monedas justas. El evento A de que la primera moneda caiga en cara y el evento B de que la segunda moneda caiga en cara son independientes. El resultado de la primera moneda no influye en el resultado de la segunda.

Ejemplo de dependencia: Consideremos una urna con bolas rojas y azules. El evento A de sacar una bola roja y el evento B de sacar otra bola roja sin reemplazo son dependientes. Si sacamos una bola roja en el primer intento, la probabilidad de sacar otra bola roja en el segundo intento disminuye.

Cómo discernir independencia sin probabilidad condicional:

- **Causalidad:** Si los eventos no tienen relación causal entre sí, es probable que sean independientes.
- **Espacio muestral:** Si el espacio muestral de un evento no se ve alterado por la ocurrencia del otro, es probable que sean independientes.
- **Intuición:** En muchos casos, la independencia o dependencia de eventos es intuitiva. Sin embargo, es importante ser cauteloso y no confiar únicamente en la intuición.

Nota: La definición formal de independencia se basa en la probabilidad condicional, que se introducirá más adelante. Sin embargo, esta explicación intuitiva proporciona una base sólida para comprender el concepto.