

Teoría de Conjuntos y Principio de Multiplicación en Probabilidad

Fernando González

1 Conceptos Fundamentales

1.1 Conjuntos y Operaciones

Un conjunto es una colección de elementos. Se denota por letras mayúsculas (A, B, C, \dots).

Operaciones básicas:

- **Unión:** $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}$.
- **Intersección:** $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B\}$.
- **Diferencia:** $A - B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \notin B\}$.
- **Complemento:** $A^c = \{x \mid x \notin A\}$.

Propiedades:

- Conmutatividad: $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$.
- Asociatividad: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.
- Distributividad: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
- Leyes de De Morgan: $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ y $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

1.2 Particiones de un Conjunto

Una partición de un conjunto S es una colección de subconjuntos $\{A_1, A_2, \dots\}$ tal que:

- $\bigcup_i A_i = S$ (cobertura total).
- $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$ (disjuntos entre sí).
- $A_i \neq \emptyset$.

Ejemplo: Si $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, una partición posible es:

$$A_1 = \{1, 2\}, \quad A_2 = \{3, 4\}, \quad A_3 = \{5, 6\}.$$

1.3 Principio de la Multiplicación

Si un proceso tiene k etapas sucesivas con n_1, n_2, \dots, n_k maneras de realizar cada una, el número total de formas es:

$$N = n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k.$$

Ejemplo: Si un menú tiene 3 entradas, 2 platos fuertes y 4 postres, las combinaciones posibles son:

$$3 \times 2 \times 4 = 24.$$

2 Ejercicios

2.1 Ejercicio 1: Operaciones con Conjuntos

En una universidad, se encuestó a 70 estudiantes sobre su participación en clubes:

- $|M| = 40$ (Matemáticas).
- $|F| = 30$ (Física).
- $|M \cap F| = 10$ (Ambos clubes).

Responde:

1. ¿Cuántos estudiantes están en al menos un club?
2. ¿Cuántos no están en ningún club?
3. ¿Cuántos están solo en Matemáticas?

2.2 Ejercicio 2: Partición y Probabilidad Total

Un estudiante estudia para un examen de tres maneras:

- Solo (A_1) con probabilidad 0.4, éxito 0.8.
- En grupo (A_2) con probabilidad 0.35, éxito 0.9.
- No estudia (A_3) con probabilidad 0.25, éxito 0.3.

Responde:

1. Demuestra que $\{A_1, A_2, A_3\}$ es una partición del espacio muestral.
2. ¿Cuál es la probabilidad total de aprobar el examen?

2.3 Ejercicio 3: Claves de Acceso y Conteo

Una clave tiene 3 letras mayúsculas seguidas de 3 dígitos numéricos. Las letras pueden repetirse, los números no.

1. ¿Cuántas claves distintas pueden generarse?
2. ¿Cuál es la probabilidad de que una clave empiece con "A" y termine en 7?