Probabilidad condicional

Fernando González

1 Teoría

1.1 Cálculos de probabilidad con espacios equiprobables

Cuando todos los resultados posibles de un experimento tienen la misma probabilidad de ocurrir, podemos calcular la probabilidad de un evento A como:

$$P(A) = \frac{\text{Número de resultados favorables a } A}{\text{Número total de resultados posibles}} = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

En problemas de probabilidad, es crucial evitar el re-conteo, que ocurre cuando contamos el mismo resultado posible múltiples veces. Esto lleva a sobreestimar el número total de resultados y, por lo tanto, a calcular probabilidades incorrectas.

El principio de inclusión-exclusión es una técnica fundamental para evitar el re-conteo cuando contamos el número de elementos en la unión de conjuntos.

1.2 Probabilidad condicional

La probabilidad condicional de A dado B es la probabilidad de que A ocurra, sabiendo que B ha ocurrido:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Esta fórmula se puede ver de la siguiente manera: como B ya ocurrió, el espacio muestral Ω se restringe para que sea solo B. Entonces, los casos favorables en el nuevo espacio son aquellos que, además de cumplir la condición B, cumplen la A.

Note también que:

$$P(A \cap B) = P(A|B)\, P(B)$$

1.3 Independencia de eventos

Un evento A es independiente de B si la ocurrencia de A no es afectada por la ocurrencia de B. Por lo tanto:

$$P(A|B) = P(A)$$

Note entonces que si A y B son independientes entre sí:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

.

1.4 Eventos excluyentes

Dos eventos A y B son excluyentes si no pueden ocurrir simultáneamente ($A \cap B = \emptyset$).

- Si A y B son excluyentes: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- Si A y B no son excluyentes: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

2 Ejemplos

2.1 Ejemplo 1

En una clase hay 22 hombres y 6 mujeres. ¿Cuál es la probabilidad de que haya al menos una mujer?

Solución: Es más fácil calcular la probabilidad del evento complementario (ninguna mujer) y restarla de 1.

$$P(\text{al menos una mujer}) = 1 - P(\text{ninguna mujer}) = 1 - \frac{\binom{22}{28}}{\binom{28}{28}} = 1 - \frac{22}{28} = \frac{6}{28} = \boxed{\frac{3}{14}}$$

2.2 Ejemplo 2

Hay una urna con 4 bolas azules y 3 amarillas. Se eligen 2 de la urna. ¿Cuál es la probabilidad de que la segunda sea amarilla?

Solución: Podemos usar probabilidad condicional.

- am_1: primera amarilla
- am_2: segunda amarilla
- az_1: primera azul
- az_2: segunda azul

Se tiene el caso de cuando se elige azul y amarilla, y de cuando se elige amarilla y amarilla. Estos son eventos excluyentes.

$$\begin{aligned} P(am_2) &= P(az_1 \cap am_2) + P(am_1 \cap am_2) \\ &= P(az_1)P(am_2|az_1) + P(am_1)P(am_2|am_1) \\ &= \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} + \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{12}{42} + \frac{6}{42} = \frac{18}{42} = \boxed{\frac{3}{7}} \end{aligned}$$

2.3 Ejemplo 3

- $P(A) = 0.3$
- $P(B^c) = 0.2$ (donde B^c es el complemento de B)
- $P(C|B) = 0.3$ (probabilidad de C dado B)
- A y B son eventos independientes
- A y C son eventos excluyentes

- $P(A \cup B \cup C) = 0.9$ (probabilidad de A unión B unión C)

¿Cuánto es $P(C)$?

Solución:

1. $P(B^c) = 0.2 \implies P(B) = 1 - P(B^c) = 1 - 0.2 = 0.8$.
2. $P(C|B) = \frac{P(C \cap B)}{P(B)} \implies P(C \cap B) = P(C|B) \cdot P(B) = 0.3 \cdot 0.8 = 0.24$.
3. $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$.
4. **Simplificamos usando la independencia y la exclusión:**
   - $P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0.3 \cdot 0.8 = 0.24$ (independencia).
   - $P(A \cap C) = 0$ (excluyentes).
   - $P(A \cap B \cap C) = 0$ (ya que $A \cap C = 0$).
5. **Sustituimos en la fórmula:** $0.9 = 0.3 + 0.8 + P(C) - 0.24 - 0 - 0.24 + 0$.
6. **Resolvemos para P(C):** $0.9 = 1.1 + P(C) - 0.48$. $0.9 = 0.62 + P(C)$. $P(C) = 0.9 - 0.62 = 0.28$.

Por lo tanto, $P(C) = \boxed{0.28}$.

3 Ejercicios

1. Se lanzan dos dados. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma sea 7 o 11?
2. Se extraen 3 cartas de una baraja de 52 cartas. ¿Cuál es la probabilidad de que las tres cartas sean del mismo palo?
3. Una urna contiene 5 bolas rojas y 3 bolas azules. Se extraen 2 bolas sin reemplazo. ¿Cuál es la probabilidad de que ambas bolas sean rojas?
4. En una ciudad, el 60% de las personas ven el programa de televisión A, el 50% ven el programa B y el 30% ven ambos. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona vea al menos uno de los programas?
5. Un examen tiene 10 preguntas de verdadero o falso. Un estudiante responde todas las preguntas al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que el estudiante responda correctamente al menos 8 preguntas?

4 Profundización

4.1 Probabilidad Total

La probabilidad total se utiliza para calcular la probabilidad de un evento A cuando este puede ocurrir a través de diferentes eventos $B_1, B_2, ..., B_n$ que particionan el espacio muestral.

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)$$

Donde:

- $P(A|B_i)$ es la probabilidad de A dado B_i.
- $P(B_i)$ es la probabilidad de B_i.

4.2 Regla de Bayes

La regla de Bayes permite calcular la probabilidad condicional inversa, es decir, $P(B|A)$ dado $P(A|B)$.

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$$

Donde:

- $P(B|A)$ es la probabilidad de B dado A.
- $P(A|B)$ es la probabilidad de A dado B.
- $P(B)$ es la probabilidad de B.
- $P(A)$ se puede calcular usando la probabilidad total.

4.3 Relación

La probabilidad total se usa frecuentemente para calcular el denominador $P(A)$ en la regla de Bayes.

Anexo: pregunta generadora

Yo: Hola, soy un estudiante de Computación estudiando Probabilidades.
No tengo problema con explicaciones técnicas y pruebas, al igual que
explicaciones intuitivas.
Genera un resumen del contenido de clase en un archivo .tex.

Formato: letterpaper, márgenes de 1.27 cm

Sección: Teoría
Explicar los siguientes temas. Busca un abordamiento relativamente breve
pero no solo poner la fórmula. Busca que la fórmula tenga algún desarrollo
breve para llegar a ella, y de esta u otra manera poder a acercarme a cómo
y por qué funciona esa fórmula.

- Cálculos de probabilidad con espacios equiprobables
- Problemas de reconteo
- Independencia de eventos
- Probabilidad condicional
- P(A | B) = P(A) => A es independiente de B
- P(A | B) = P(A ∩ B) / P(A)
- P(A ∩ B) si A y B son independientes
- Eventos excluyentes y qué pasa con P(A ∪ B) si sí o si no

Sección: Ejemplos
Explicados (no necesitan ser paso a paso) y con respuesta
- En una clase hay 22 hombres y 6 mujeres. ¿Cuál es la probabilidad de que
haya al menos una mujer?
- Hay una urna con 4 bolas azules y 3 amarillas. Se eligen 2 de la urna.
¿Cuál es la probabilidad de que la segunda sea amarilla?
- P[A] = 0,3 ; P[B complemento] = 0,2 ; P[C | B] = 0,3 ; A y B son
independientes ; A y C son excluyentes ; P[A ∪ B ∪ C] =
0,9. ¿Cuánto es P[C]?

Sección: Ejercicios
- 3 a 5 ejercicios de complejidad media-alta, sin respuesta.

IA: [respuesta 1]

Yo: Gracias. Ahora me gustaría un acercamiento no muy extenso hacia la
probabilidad total y la regla de Bayes. No necesitas explicarme todo el
tema, pero me gustaría un pedazo de información que me acerque a los
enunciados que se me harán en clase sobre ello.

IA: [respuesta 2]