Permutaciones y combinaciones

Fernando González

1 Teoría

1.1 Permutaciones

Dado un conjunto de n elementos distintos, el número de formas en que se pueden ordenar todos ellos se obtiene aplicando el principio del producto y es:

$$P(n) = n \times (n-1) \times \cdots \times 1 = n! \tag{1}$$

Si se desea obtener las permutaciones de r elementos de un conjunto de cardinalidad n, se tiene que:

$$P(n) = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!} \tag{2}$$

1.2 Permutaciones con objetos repetidos

Si en un conjunto de n elementos hay objetos repetidos, la cantidad de permutaciones se calcula dividiendo por los factoriales de las repeticiones:

$$P(n; k_1, k_2, \ldots, k_m) = \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_m!} \tag{3}$$

donde k_i representa la cantidad de veces que se repite un objeto.

1.3 Combinaciones

Las combinaciones cuentan cuántas formas hay de seleccionar k elementos de un conjunto de n elementos sin importar el orden:

$$C(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{4}$$

2 Ejemplos

2.1 Ejemplo 1: Permutaciones simples

¿Cuántas formas distintas se pueden ordenar 5 libros en una estantería?

Solución: Como los 5 libros son diferentes, aplicamos la fórmula de permutaciones:

$$P(5) = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120 \tag{5}$$

Respuesta: 120 formas.

2.2 Ejemplo 2: Combinaciones y permutaciones con repetición

Un comité de 3 personas debe seleccionarse de un grupo de 10. ¿De cuántas maneras se puede formar el comité?

Solución: Como el orden no importa, usamos combinaciones:

$$C(10, 3) = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10!}{3!7!} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120 \tag{6}$$

Respuesta: 120 maneras.

3 Ejercicios

1. ¿Cuántas formas distintas se pueden ordenar las letras de la palabra "PROBABILIDAD"?
2. Un equipo de 4 estudiantes debe ser seleccionado de un grupo de 12. ¿Cuántas maneras hay de hacerlo?
3. De un mazo de 52 cartas, ¿de cuántas formas se pueden elegir 5 cartas?
4. ¿Cuántos subconjuntos de $S_{25} = \{1, 2, ..., 25\}$ de 6 elementos tienen exactamente dos múltiplos de 3 y dos múltiplos de 5?

4 Profundización

4.1 Justificación de la fórmula de combinaciones

Para contar cuántas formas hay de seleccionar k elementos de un conjunto de n sin importar su orden, se puede hacer lo siguiente:

1. Contamos todas las formas de seleccionar y ordenar k de n elementos:

$$P(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

2. Como el orden no importa, cada selección se contó $k!$ veces, pues esa es la cantidad de ordenamientos que tiene un conjunto singular. Como 1 conjunto representa a $k!$ ordenamientos, se tiene que:

$$P(n, k) = k!\, C(n, k) \implies C(n, k) = \frac{P(n, k)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!\, k!}$$

5 Anexos

5.1 Pregunta generadora

```
Yo:   Hola, necesito que me hagas un resumen como archivo .tex de probabilidades
    con los siguientes contenidos:

    Sección: Teoría
    - Permutaciones
    - Permutaciones con objetos repetidos
    - Combinaciones

    Sección: Ejemplos
    - 1 o 2 ejemplos que incluyan a estos temas

    Sección: Ejercicios
    - 3 ejercicios sin respuesta

IA: [respuesta 1]

Yo:   También dame un snippet de LaTeX donde explique brevemente por qué funciona
    la fórmula de combinaciones

IA: [respuesta 2]
```