Resumen de Probabilidades: Variables Aleatorias Continuas

Fernando González

May 27, 2025

1 Teoría

1.1 Distribución de Variable Aleatoria Continua

Una variable aleatoria continua (v.a.c) es aquella que puede tomar infinitos valores en un intervalo. A diferencia de las discretas, su probabilidad en un punto específico es cero, y se describe mediante una **función de densidad de probabilidad (fdp)** $f(x)$ que cumple:

- $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$

1.2 Propiedades de las v.a.c

- $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\, dx$
- $P(X = a) = 0$
- La fdp no representa probabilidad directamente, sino densidad.

1.3 Distribución Acumulada (CDF)

La función de distribución acumulada $F(x)$ se define como:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$$

Propiedades:

- $F(x)$ es no decreciente y continua.
- $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$.

1.4 Media, Varianza y Generadora de Momentos

- **Media (Valor Esperado)**: $\mu = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx$
- **Varianza**: $\sigma^2 = Var(X) = E[(X-\mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\, dx$
- **Función Generadora de Momentos (MGF)**: $M_X(t) = E[e^{tX}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)\, dx$

1.5 Distribución Uniforme Continua

Definición: $X \sim U(a, b)$ tiene fdp constante en $[a, b]$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- Media: $\mu = \frac{a+b}{2}$
- Varianza: $\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$
- MGF: $M_X(t) = \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}$

Uso: Modelar situaciones donde todos los resultados en un intervalo son equiprobables (ej. tiempos aleatorios).

1.6 Distribución Exponencial

Definición: $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ modela tiempos entre eventos:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

- Media: $\mu = \frac{1}{\lambda}$
- Varianza: $\sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}$
- MGF: $M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$ (para $t < \lambda$)

Uso: Procesos sin memoria (ej. tiempo de falla de componentes).

1.7 Distribución Normal

Definición: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ con fdp:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

- Media: μ
- Varianza: σ^2
- MGF: $M_X(t) = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$

Uso: Fenómenos naturales, errores de medición (Teorema del Límite Central).

1.7.1 Normal Estándar y Propiedades

La distribución normal estándar $Z \sim N(0,1)$ es un caso particular de la normal con media $\mu = 0$ y varianza $\sigma^2 = 1$. Su función de densidad de probabilidad (fdp) es:

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}, \quad z \in \mathbb{R}.$$

Transformación a Normal Estándar: Dada $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, la estandarización se realiza mediante el cambio de variable:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}.$$

Este cambio lineal preserva las propiedades de la normal y permite convertir cualquier v.a.c normal X en Z.

Desarrollo de la Transformación:

1. **Función de Distribución Acumulada (CDF)**:

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dt.$$

2. Aplicando el cambio de variable $z = \frac{t-\mu}{\sigma}$ (con $dz = \frac{dt}{\sigma}$):

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}\, dz = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right),$$

donde $\Phi(z)$ es la CDF de la normal estándar:

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \phi(u)\, du = P(Z \leq z).$$

Uso de $\Phi(z)$:

- $\Phi(z)$ está tabulada y es fundamental para calcular probabilidades. Por ejemplo:

$$P(a \leq X \leq b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right).$$

- Simetría: $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$.
- Para valores negativos de z, se usan tablas o propiedades de simetría.

Ejemplo de Aplicación: Si $X \sim N(100, 25)$ $(\sigma = 5)$, calcular $P(X \leq 110)$:

$$z = \frac{110 - 100}{5} = 2 \quad \Rightarrow \quad P(X \leq 110) = \Phi(2) \approx 0.9772.$$

Propiedades:

- **Linealidad**: $aX + b \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$
- **Suma**: Si $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, entonces:

$$X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

- **Promedio**: Si $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, entonces:

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

  Esto es clave para inferencia estadística.

2 Ejemplos

2.1 Ejemplo 1: Uniforme Continua

El tiempo de espera (en minutos) en un semáforo sigue una distribución uniforme $X \sim U(0, 3)$. Calcular la probabilidad de que el tiempo de espera esté entre 1 y 2.5 minutos.

Explicación: Para una distribución uniforme continua en el intervalo $[a, b]$, la probabilidad de que X esté en un subintervalo $[c, d]$ es proporcional a la longitud de dicho subintervalo:

$$P(c < X < d) = \frac{d - c}{b - a}$$

Desarrollo:

- Intervalo total: $[0, 3]$ (duración 3 minutos)
- Subintervalo deseado: $[1, 2.5]$ (duración 1.5 minutos)
- Cálculo:

$$P(1 < X < 2.5) = \frac{2.5 - 1}{3 - 0} = \frac{1.5}{3} = 0.5$$

Interpretación: Hay un 50% de probabilidad de que el tiempo de espera en el semáforo esté entre 1 y 2.5 minutos.

2.2 Ejemplo 2: Exponencial

La vida útil de un componente electrónico sigue una distribución exponencial $X \sim \text{Exp}(0.01)$, donde $\lambda = 0.01$ fallas por hora. Calcular la probabilidad de que el componente dure más de 120 horas.

Explicación: La distribución exponencial modela tiempos entre eventos con tasa constante λ. Su función de supervivencia es:

$$P(X > x) = e^{-\lambda x}$$

Desarrollo:

- Parámetro $\lambda = 0.01$ (1 falla cada 100 horas en promedio)
- Probabilidad solicitada: $P(X > 120)$
- Cálculo:

$$P(X > 120) = e^{-0.01 \times 120} = e^{-1.2} \approx 0.3012$$

Interpretación: Hay aproximadamente un 30.12% de probabilidad de que el componente funcione más de 120 horas sin fallar.

2.3 Ejemplo 3: Normal

Las calificaciones de un examen siguen una distribución normal $X \sim N(70, 10^2)$, con media $\mu = 70$ y desviación estándar $\sigma = 10$. Calcular la probabilidad de que un estudiante seleccionado al azar obtenga entre 60 y 85 puntos.

Explicación: Para calcular probabilidades en una distribución normal: 1. Estandarizar los valores a la normal estándar $Z \sim N(0, 1)$. 2. Usar tablas de $\Phi(z)$ o software para encontrar las probabilidades acumuladas.

Desarrollo:

- Estandarización:

$$Z_1 = \frac{60 - 70}{10} = -1 \quad \text{(límite inferior)}$$

$$Z_2 = \frac{85 - 70}{10} = 1.5 \quad \text{(límite superior)}$$

- Cálculo con tabla de Z:

$$P(-1 < Z < 1.5) = \Phi(1.5) - \Phi(-1)$$

$$\Phi(1.5) \approx 0.9332$$

$$\Phi(-1) = 1 - \Phi(1) \approx 1 - 0.8413 = 0.1587$$

$$P(-1 < Z < 1.5) \approx 0.9332 - 0.1587 = 0.7745$$

Interpretación: Hay un 77.45% de probabilidad de que un estudiante obtenga una calificación entre 60 y 85 puntos. La estandarización permite usar propiedades universales de la normal estándar.

3 Ejercicios

3.1 Ejercicio 1

Sea $X \sim U(2, 8)$. Calcular:

- $P(3 \leq X \leq 7)$
- El valor de k tal que $P(X > k) = 0.4$

3.2 Ejercicio 2

El tiempo entre llegadas a una estación sigue $\text{Exp}(\lambda = 5)$ (min). Determine:

- Probabilidad de que la próxima llegada ocurra en menos de 30 segundos.
- El tiempo t tal que $P(X \leq t) = 0.9$.

3.3 Ejercicio 3

Sean $X \sim N(50, 16)$ e $Y \sim N(60, 25)$ independientes. Calcular:

- $P(X + Y > 120)$
- $P(\bar{Y} < 58)$ para $n = 4$ observaciones.

3.4 Ejercicio 4

Demuestre que si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, entonces $M_X(t) = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$.