

# Técnicas adicionales de conteo

Fernando González

## 1 Teoría

### 1.1 Cardinalidad del conjunto de funciones de A en B

Si  $A$  y  $B$  son conjuntos finitos con  $|A| = m$  y  $|B| = n$ , entonces el número de funciones de  $A$  en  $B$  es  $n^m$ .

**Explicación:** Para cada elemento de  $A$ , tenemos  $n$  opciones en  $B$ . Como hay  $m$  elementos en  $A$ , el número total de funciones es  $n \times n \times \cdots \times n$  ( $m$  veces), que es  $n^m$ .

### 1.2 Conteo de permutaciones con objetos repetidos

Si tenemos  $n$  objetos con  $n_1$  del primer tipo,  $n_2$  del segundo tipo, ...,  $n_k$  del  $k$ -ésimo tipo, donde  $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$ , entonces el número de permutaciones distintas es:

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

**Explicación:** Si todos los objetos fueran distintos, tendríamos  $n!$  permutaciones. Sin embargo, como tenemos objetos repetidos, debemos dividir por el número de permutaciones de cada tipo de objeto para evitar contar las mismas permutaciones múltiples veces.

### 1.3 Conteo de combinaciones con repetición

El número de combinaciones de  $n$  objetos tomados de  $r$  tipos con repetición permitida es:

$$\binom{n+r-1}{r}$$

**Explicación:** Podemos representar las combinaciones con repetición mediante una secuencia de  $r$  estrellas (objetos) y  $n-1$  barras (separadores de tipos). El número total de posiciones es  $n+r-1$ , y debemos elegir  $r$  de ellas para las estrellas.

### 1.4 Soluciones naturales de $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$

El número de soluciones naturales (enteros no negativos) de la ecuación  $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$  es:

$$\binom{n+r-1}{r}$$

**Explicación:** Esto es equivalente a contar el número de combinaciones con repetición, donde  $x_i$  representa el número de objetos del tipo  $i$ .

## 1.5 Distribuir objetos distinguibles

Si tenemos  $n$  objetos distinguibles y  $k$  cajas distinguibles, el número de formas de distribuir los objetos en las cajas es  $k^n$ .

**Explicación:** Cada objeto puede ser colocado en cualquiera de las  $k$  cajas, por lo que tenemos  $k$  opciones para cada uno de los  $n$  objetos.

## 1.6 Distribuir objetos no distinguibles

Si tenemos  $n$  objetos no distinguibles y  $k$  cajas distinguibles, el número de formas de distribuir los objetos en las cajas es:

$$\binom{n+k-1}{n}$$

**Explicación:** Esto es equivalente a contar el número de combinaciones con repetición, donde los objetos no distinguibles son las estrellas y las cajas son los tipos.

# 2 Ejemplos

## 2.1 Ejemplo 1

¿Cuántas palabras de 10 letras se pueden formar con las letras de la palabra "MATEMATICAS"?

**Solución:** Tenemos 10 letras en total: 2 M, 3 A, 2 T, 1 E, 1 I, 1 C, 1 S. El número de permutaciones es:

$$\frac{10!}{2!3!2!1!1!1!1!} = 151200$$

## 2.2 Ejemplo 2

¿Cuántas soluciones enteras no negativas tiene la ecuación  $x_1 + x_2 + x_3 = 10$ ?

**Solución:** Usando la fórmula de combinaciones con repetición:

$$\binom{3+10-1}{10} = \binom{12}{10} = 66$$

## 2.3 Ejemplo 3

¿De cuántas maneras se pueden distribuir 7 bolas distintas en 4 cajas diferentes?

**Solución:** Cada bola puede ir a cualquiera de las 4 cajas, por lo que tenemos  $4^7 = 16384$  formas.

# 3 Ejercicios

1. ¿Cuántas cadenas binarias de longitud 10 tienen exactamente 4 unos?
2. ¿De cuántas maneras se pueden distribuir 10 bolas idénticas en 3 cajas diferentes si cada caja debe contener al menos 2 bolas?
3. ¿Cuántas palabras diferentes se pueden formar con las letras de la palabra "PROBABILIDAD"?
4. ¿Cuántas soluciones enteras no negativas tiene la ecuación  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$ ?
5. ¿De cuántas maneras se pueden distribuir 8 libros distintos en 5 estantes diferentes?

## 4 Profundización

### 4.1 Independencia y Dependencia de Eventos

**Definición intuitiva:** Dos eventos  $A$  y  $B$  son *independientes* si la ocurrencia de uno no afecta la ocurrencia del otro. En otras palabras, saber si  $A$  ocurrió no cambia nuestra percepción de si  $B$  ocurrió, y viceversa.

**Ejemplo de independencia:** Consideremos el lanzamiento de dos monedas justas. El evento  $A$  de que la primera moneda caiga en cara y el evento  $B$  de que la segunda moneda caiga en cara son independientes. El resultado de la primera moneda no influye en el resultado de la segunda.

**Ejemplo de dependencia:** Consideremos una urna con bolas rojas y azules. El evento  $A$  de sacar una bola roja y el evento  $B$  de sacar otra bola roja sin reemplazo son dependientes. Si sacamos una bola roja en el primer intento, la probabilidad de sacar otra bola roja en el segundo intento disminuye.

**Cómo discernir independencia sin probabilidad condicional:**

- **Causalidad:** Si los eventos no tienen relación causal entre sí, es probable que sean independientes.
- **Espacio muestral:** Si el espacio muestral de un evento no se ve alterado por la ocurrencia del otro, es probable que sean independientes.
- **Intuición:** En muchos casos, la independencia o dependencia de eventos es intuitiva. Sin embargo, es importante ser cauteloso y no confiar únicamente en la intuición.

**Nota:** La definición formal de independencia se basa en la probabilidad condicional, que se introducirá más adelante. Sin embargo, esta explicación intuitiva proporciona una base sólida para comprender el concepto.

## Anexo: pregunta generadora

Yo: Hola, soy un estudiante de Computación estudiando Probabilidades. No tengo problema con explicaciones técnicas y pruebas, al igual que explicaciones intuitivas.

Genera un resumen del contenido de clase en un archivo .tex.

Formato: letterpaper, márgenes de 1.27 cm

Sección: Teoría

Explicar los siguientes temas. Busca un abordamiento relativamente breve pero no solo poner la fórmula. Busca que la fórmula tenga algún desarrollo breve para llegar a ella, y de esta u otra manera poder a acercarme a cómo y por qué funciona esa fórmula.

- Cardinalidad del conjunto de funciones de A en B
- Conteo de permutaciones con objetos repetidos
- Conteo de combinaciones con repetición (\*)
- (\*) aplicado a soluciones naturales de  $x_1 + x_2 + \dots = r$
- Distribuir objetos distinguibles
- Distribuir objetos no distinguibles

Sección: Ejemplos

- 3 ejemplos de complejidad media que abarquen los temas de arriba. Explicados (no necesitan ser paso a paso) y con respuesta

Sección: Ejercicios

- 3 a 5 ejercicios de complejidad media-alta, sin respuesta.

IA: [respuesta 1]

Yo: Gracias. Ahora me gustaría un snippet de TeX (no todo el archivo) sobre qué es y cómo se discierne independencia y dependencia de eventos. Nota que todavía no he sido introducido al concepto de probabilidad condicional, esto es solo un acercamiento.

IA: [respuesta 2]