Espacio y juego de Choquet

Axcel Picado Piedra

MA-0704 Topología General
Profesor: Dr. Rafael Zamora.
I-Semestre 2019

Palabras Clave Topología, Juego, Choquet, Espacio de Baire, Espacio Polaco.

Resumen

En este documento presentamos el conocido **juego de Choquet** definido sobre un espacio topológico χ y algunos resultados relevantes que se pueden deducir en ciertos espacios donde los jugadores del juego de Choquet cumplen ciertas hipótesis. Asumimos que el lector tiene familiaridad con espacios métricos y lo que significa que un espacio métrico sea completo. Empezamos con nociones y resultados importantes tales como, espacios de Baire y espacios Polacos, son parte fundamental en las aplicaciones del juego de Choquet que presentamos en este documento.

1. Introducción

El **juego de Choquet** fue introducido por el matemático Gustave Choquet en 1969, con la intención de caracterizar a los espacios topológicos metrizables que admiten una métrica completa: podríamos recordar el **teorema de metrización de Urysohn** que nos dice que un espacio topológico regular, que posee una base numerable, es metrizable, pero, esto no nos da imformación suficiente como para hablar de la completitud de esta métrica. Dado un espacio topológico χ vamos a denotar el **juego de Choquet sobre** χ como $Ch(\chi)$, más adelante detallamos exactamente la dinámica del juego de Choquet, por ahora empezamos con algunas nociones necesarias.

2. Resultados y definiciones sobre espacios métricos

Definición [2.1](Espacio métrico) Sea X un conjunto y sea $d : X \times X \longrightarrow [0, \infty)$ tal que, para todo $x, y, z \in X$ se cumplen:

- $d(x, y) = d(y, x)$.
- $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$.
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

decimos que d es una **métrica** y llamamos a (X, d) **espacio métrico**

Ahora vamos a definir completitud de espacios métricos, para esto, sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una suceción en un espacio métrico (X, d) decimos que la suceción es de **Cauchy** si para todo $\epsilon > 0$ existe $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que si $m, n > N_\epsilon$ se tiene que $d(x_n, x_m) < \epsilon$.
Además, decimos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ **converge a** x en X si para todo $\epsilon > 0$ existe $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N_\epsilon$ se tiene que $d(x_n, x) < \epsilon$.
Un espacio métrico (X,d) es completo sii toda suceción que cumple la propiedad de Cauchy descrita anteriormente converge a un elemento de X.

Teorema [2.2]. Sea (X, d) un espacio métrico completo y sea $\{C_n\}_{n\in\omega}$ una colección de subconjuntos cerrados de X con interior vacío, entonces:

$$\bigcup_{n\in\omega} C_n$$

tiene interior vacío.

Teorema [2.3] Teorema de categoría de Baire para espacios métricos completos. Sea (χ, d) un espacio métrico completo y suponga que $\{O_n\}_{n\in\omega}$ es una colección de subconjuntos abiertos densos de χ, entonces:

$$\Theta = \bigcap_{n\in\omega} O_n$$

Es denso en χ.

Las demostraciones de estos teoremas no son el el centro de atención de este documento, si el lector desea las puede consultar en [2].

Definición [2.4] Si (χ, τ) es un espacio topológico (e.t.) decimos que χ es un **espacio de Baire** sii para cada subcolección contable $\{O_n\}_{n\in\omega}$ de abiertos densos tenemos que $\bigcap_{n\in\omega} O_n$ es denso en χ.

Definición [2.5] Si (χ, τ) es e.t. y $A \subseteq \chi$, decimos que A es denso en **ninguna parte** o **nada denso** sii $Int(\bar{A}) = \emptyset$, de lo contrario decimos que A es denso en alguna parte.

Además, decimos que A es magro si existe una colección contable de conjuntos nada densos $\{A_n\}_{n\in\omega}$ tales que $A = \bigcup_{n\in\omega} A_n$.

Recordemos que un espacio métrico se dice separable si posee un subconjunto que es denso y numerble.

Definición [2.6] Sea (χ, τ) e.t. decimos que χ es **Polaco** sii es metrizable por una métrica d completa y además es separable.

3. Conjuntos ordenados

Definición [3.1](Relaciones de orden) Sea X un conjunto, una relación binaria $\mathcal{R}$ en X que es reflexiba, antisimétrica y transitiva, se llama **relación de orden**. Si para todo $a, b \in X$ tenemos $(a, b) \in \mathcal{R}$ ó $(b, a) \in \mathcal{R}$, entonces, decimos que $\mathcal{R}$ es un **orden total**. Si para todo $a \in X$ exite $b \in X$ tal que $(a, b) \in \mathcal{R}$ decimos que $\mathcal{R}$ es un **orden parcial**. Denotamos $(X, \mathcal{R})$ al conjunto con su orden respectivo.

Para comprender lo que significa tener una **estrategia ganadora** en el juego de Choquet, nececitaremos entender el concepto de árbol y subárbol. Si A es un conjunto definimos:

$$A^{n<\mathbb{N}} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A^n$$

es decir, todas las n-tuplas de elementos en A. Si $s \in A^{n<\mathbb{N}}$, entonces, existe un único valor de $n \in \mathbb{N}$ tal que $s \in A^n$, a este valor lo llamaremos $l(s)$. La idea a continuación es definir una relación de orden en $A^{n<\mathbb{N}}$.

Sean $s, t \in A^{n<\mathbb{N}}$, decimos que $s \leq t$ sii $l(s) \leq l(t)$ y $s(i) = t(i)\ \forall i \leq l(s)$.
Esto define una relación de orden parcial y decimos que t extiende a s. Así tenemos las herramientas para dar las siguiente definición.

Definición [3.2](Árbol y subárbol) Sea $T \subset A^{n<\mathbb{N}}$, decimos que T es un árbol si satisface lo siguiente:

$$(\forall t \in T)(\forall s^{n<\mathbb{N}})(s \leq t \Rightarrow s \in T)$$

Un subárbol de T es un subconjunto $L \subseteq T$ que también es un árbol en $A^{n<\mathbb{N}}$.

Si $(A. \leq)$ es un conjunto con un relación de orden "$\leq$", dados dos elementos $a, b \in A$ decimos que a y b son $\leq$-comparables si tenemos ya sea "$a \leq b$" o "$b \leq a$". Puede darse el caso en que todos los elementos de A sean $\leq$-comparanles entre sí, por ejemplo cuando tenermos ordenes totales, pero, en caso de lo contrario, podemos encontrar subconjuntos de A que si estén ordenados totalmente, como es el caso de una **cadena** $\mathcal{C}$ en A que es un subconjunto tal que para todo $a, b \in \mathcal{C}$ a, b son $\leq$-comparables. Decimos que $\mathcal{C}$ es maximal si no existe otra cadena $\mathcal{C}'$ en A que contenga a $\mathcal{C}$ de manera propia. Aunque las cadenas sean conjuntos totalmente ordenados podrían ser acotadas, es decir que exista $c \in A$ tal que $a \leq c$ $\forall a \in \mathcal{C}$.

Definición [**3.3**] Sea A un conjunto cordenado y sea T un árbol sobre A.

- Una rama $\mathcal{C}$ sobre T es una Cadena $\leq$-maximal.
- Un elemento $s \in A^{\mathbb{N}}$ es una rama infinita de T sii $(s_0, ..., s_n) \in T$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Lema [**3.4**] **(Lema de Zorn).** Sea $(X, \mathcal{R})$ un conjunto con un orden parcial, si toda cadena $\mathcal{C}$ de X está acotada, entonces, existe un elemento maximal.

4. Juego de Choquet

Este es un juego con información perfecta entre dos jugadores (I y II) que se define sobre un espacio topológico, es decir, en cada jugada todos los jugadores conocen todas la jugadas anteriores efectuadas por todos los jugadores.

Como mencionamos anteriormente, si (χ, τ) es e.t. denotamos el **juego de Choquet sobre** χ como $Ch(\chi)$ y lo definimos como sigue: Tenemos dos jugadores I y II que realizan sus jugadas de forma alternada en ω rondas (es decir, una cantidad infinita contable de rondas). Los jugadores deben elegir conjuntos abiertos anidados, en la i-ésima jugada el jugador I elige un abierto $U_i \subset V_{i-1}$ y en esa ronda el jugador II efecta su jugada $i-$ésima eligiendo otro abierto V_i tal que $V_i \subset U_i$, y asi el juego continúa iterando el valor de i. Cuando todas las rondas han sido elegidas se observa el resultado: si $\bigcap_{n \in \omega} U_n = \emptyset$ diremos que gana el jugador I, en caso contrario gana el jugador II.

Después de esta definición podemos ver que después de una cantidad finita de rondas en $Ch(\chi)$ los estados posibles del juego son cadenas finitas de conjuntos abiertos anidados, con lo que podemos definir las **jugadas legales**.

Definición [**4.1**] Una **Jugada legal** en $Ch(X)$ es una secuencia finita de la forma $\{U_0, V_0, ...V_{n-1}, U_n\}$ o ya sea $\{U_0, V_0, ...U_n, V_n\}$ de manera que los $U_i's$ y $V_i's$ son abiertos en χ y se cumple con la relación de orden parcial de "$\subseteq$"lo siguiente: $V_i \subseteq U_i \subseteq V_i$.

Ahora que ya sabemos como describir una jugada legal concreta, podríamos definir lo que para algún jugador significa tener estrategia ganadora.

Definición [**4.2**]**(Estrategia)** Para χ no vacío definimos $(T, \leq)$ como el árbol de jugadas legales de $Ch(\chi)$. Una **estrategia** para el jugador I es un subárbol $L \subset T$ tal que:

- L es no vacío.
- Si $(U_0, V_0, ..., U_n) \in L$, entonces, para todo abierto $V \neq \emptyset$ tal que $V \subseteq U_n$ se tiene que $(U_0, V_0, ..., U_n, V) \in L$.
- Si $(U_0, V_0, ..., U_n, V_n) \in L$, entonces, existe un único abierto $U \neq \emptyset$ tal que $U \subseteq V$ y se tiene que $(U_0, V_0, ..., U_n, V) \in L$.

Definición [**4.3**]**(Estrategia ganadora)** Con la notación anterior decimos que L es una **estrategia ganadora** si es una estrategia y cada vez que $s = (U_0, V_0, ..., U_n) \in L$ con $t = (U_0, V_0, ..., U_n, \hat{V}_n, \hat{U}_{n+1}, \hat{V}_{n+1}, ...) \in L$ es una rama infinita de L, tal que $s \leq t$ se tiene que:

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n = \emptyset$$

De una forma similar podemos definir una estrategia ganadora para el jugador II, note que esta también depende de la definición de estrategia para el jugador II.

Teorema [**4.4**]**.** Un espacio topológico (χ, τ) es un espacio de Baire si y solo si el jugador I **no** tiene una estrategia ganadora en $Ch(\chi)$.

Demostración. $(\Rightarrow)$
En este caso vamos a proceder por contradicción construyendo un subárbol de la estategia ganadora σ del jugador I y mostrando que el conjunto U_0 no es de Baire. esto basta puesto que Si un estacio es de Baire todo subconjunto con la topología de subespacio es de Baire, y es facíl de verificar desde la definición.
Así construimos un subárbol $L \subseteq \sigma$ de la siguiente manera:

- $(U_0) \in L$.
- Cada vez que $(U_0, V_0, ..., U_{n-1}, V_{n-1}) \in L$ tenemos que $(U_0, V_0, ..., U_{n-1}, V_{n-1}, U_n) \in L$, donde U_n se elige de forma única para que se pueda tener $L \subseteq \sigma$.
- Cada vez que $(U_0, V_0, ..., U_n) \in L$ entonces, para cada abierto no vació $V \subseteq U_n$, existe un abierto $U_V \subseteq V$ tal que $(U_0, V_0, ..., U_n, U_V) \in L$

Ahora, definimos el conjunto $\mathcal{A} = \{A \in \tau | A \subseteq U_n\}$, de manera que podemos definir suceciones $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de subfamilias de $\mathcal{A}$ tales que para todo $n \in \mathbb{N}$:

- $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_{n+1}$.
- $A \cap B = \emptyset$

Así todas estas familias (que en realidad son cadenas) están acotadas por $\mathcal{A}$, de manera que por el Lema de Zorn, existe $\mathcal{A}^*$ maximal.

Luego, el conjunto $\{U_{A^*} | A^* \in \mathcal{A}^*\}$ es una familia de conjuntos disjuntos dos a dos. Para $s = (U_0, V_0, ..., U_n) \in L$, sea $\mathcal{S}_P = \{U \in \tau |$ existe $V_n \in \tau$ con $(U_0, V_0, ..., U_n, V_n, U) \in L\}$.

Afirmación [A1]. $\Omega := \bigcup_{U \in \mathcal{S}_P} U$ es denso en U_n

Por contradicción obtenemos que existe un abierto $V \in U_n$ tal que $V \cap \Omega = \emptyset$, entonces, $V \cap A^* = \emptyset$(**) para todo $A^* \in \mathcal{A}^*$, con lo que $\mathcal{A}^* \subset \{V\} \cup \mathcal{A}^*$ contradice la maximalidad de $\mathcal{A}^*$.

En (**) se debe a que de lo contrario podemos decir que si $\theta = V \cap A^*$ para algún $A^* \in \mathcal{A}^*$, entonces, debe existir un abierto $U_\theta \subseteq \theta$ tal que $(U_0, V_0, ..., U_n, U_\theta) \in L$, y también por construcción de L existe otro abierto no vacío $U_{n+1} \subseteq U_\theta$ tal que $(U_0, V_0, ..., U_n, U_\theta, U_{n+1}) \in L$, con lo que tenemos las inclusiones:

$$\emptyset \neq U_{n+1} \subseteq U_\theta \subseteq \theta = V \cap A^*$$

Con lo que $U_{n+1} \cap V \neq \emptyset$, es decir, $\Omega \cap V \neq \emptyset$, y esto no pouede ser por hipótesis de contradicción.

Continuando con la demostración del teorema. Sea $n \in \mathbb{N}$, definimos el conjunto:

$$\Theta_n = \bigcup_{s \in L, l(s) \leq n} S_P$$

Como $\mathcal{S}_{(U_0)} \subseteq \Theta_n$ tenemos que Θ_n es denso en U_0 para todo $n \in \mathbb{N}$. Para ver que U_0 no es de Baire, vamos a ver que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Theta_n = \emptyset$.

Por contradicción sea $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \theta_n$, entonces, existe una rama infinita en $L \subseteq \sigma$ digamos $(U_0, V_0, ..., U_n, U_n, V_n, ...)$ tal que $x \in U_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, con lo que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n \neq \emptyset$ y esto contradice que σ es una estrategia ganadora para I. Por lo tanto, $\in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n = \emptyset$ y así U_0 no es de Baire.

($\Leftarrow$) Al igual que los casos anteriores vamos a proceder por contradicción, si χ no es de Baire, tome $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una familia de conjuntos abiertos y densos en χ tales que $\alpha = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ no es denso. Tome $U_0 \subseteq \chi$ un abierto no vacío de manera que $U_0 \cap \alpha = \emptyset$, entonces, si (U_0) es la primera jugada del jugador I y $V_0 \subseteq U_0$ es la jugada del jugador II, tenemos que $V_0 \cap A_0 \neq \emptyset$ por la densidad de A_0. así podemos definir la siguiente jugada de $U_1 = A_0 \cap V_0$. de manera similar definimos la jugada $(n+1)$-ésima del jugador I como $U_{n+1} = A_n \cap V_n$. Luego tenemos que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n \subseteq \alpha \cap U_0 = \emptyset$. Es decir, con esto se construye una estrategia ganadora para el jugador I.

$\square$

Definición [4.5] Un espacio topológico (χ, τ) se llama **espacio de Choquet** sii el jugador II tiene una estrategia ganadora en $Ch(\chi)$.

Ahora, para el espacio topológico (χ, τ), introducimos conocido como **el juego fuerte de Choquet**, que igualmente al juego anterior consiste de dos jugadores alternando turnos en ω rondas. En la ronda $n-$ésima el jugador I elige un par (U_n, x_n) tal que $x_n \in \chi$, y luego, el Jugador II elige un conjunto V_n de manera que se cumplan las siguientes condiciones:

- $U_n, V_n \in \tau$
- $x_n \in V_n \subseteq U_n$

Decimos que el jugador I gana si $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n = \emptyset$, en caso contrario, gana el jugador II. Similarmente al caso anterior decimos que un espacio topológico (χ, τ) es **fuertemente de Choquet** sii el jugador II tiene una estrategia ganadora.

Lema [4.6]. Si (Y, d) es un espacio métrico separable y $\mathcal{U}$ es una coleccion de subconjuntos abiertos no vacíos de Y, entonces, $\mathcal{U}$ admite un refinamiento puntual finito γ, es decir:

- $\bigcup \gamma = \bigcup \mathcal{U}$
- $(\forall V \in \gamma)(U \in \mathcal{U})(V \subseteq U)$
- $(\forall y \in Y)(|\{V \in \gamma : y \in \gamma\}| < \infty)$

El siguiente resultado caracteriza por medio del juego de Choquet a los espacios topológicos completamente metrizables.

Teorema [4.7]. Sea (χ, d) un espacio métrico separable y $\hat{\chi}$ un espacio polaco tal que χ es denso en $\hat{\chi}$.

a)**(Oxtoby)** χ es un espacio de Choquet $\Leftrightarrow$ χ es comagro en $\hat{\chi}$.

b) χ es fuertemente de Choquet $\Leftrightarrow$ X es G_δ en $\hat{\chi}$ $\Leftrightarrow$ χ es polaco.

Acá debemos recordar que un subconjunto A de un espacio topológico χ se dice que es G_δ si existe una suceción de subconjuntos abiertos de χ digamos $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tales que $A = \bigcap A_n$.

Referencias

[1] Choquet, G. (2019). Lectures On Analisis, Volume I, Integration and Topological Vector Spaces. 1st ed.

[2] Salgado, E. (2019). Aplicaciones del teorema de categora de Baire. [online] Fcfm.buap.mx. Available at: https://www.fcfm.buap.mx/assets/docs/docencia/tesis/matematicas/ErickSalgadoMatias.pdf [Accessed 28 Jun. 2019].