

Teorema de categoría de Baire y algunas aplicaciones en análisis

Fernando Herrera Valverde

I semestre 2019

1 Introducción

El teorema de Categoría de Baire es una herramienta importante usada en topología general y análisis. Fue probado en 1899 por René-Louis Baire. Una de las características importantes de esta herramienta es que permite mostrar existencia de elementos con propiedades peculiares sin tener que construirlos. Por un lado esto es una desventaja pero por otro lado puede simplificar mucho las pruebas de existencia.

En este trabajo se mostrarán dos aplicaciones del teorema para mostrar existencia de funciones con propiedades que no son intuitivas. La primera: que existen funciones continuas en todo punto, derivables en ninguno. La segunda: que existen funciones derivables monótonas en ninguna parte. Como muestra de lo poderosa que es esta herramienta: según [4] en los años 1800's no se sabía si estas últimas funciones existían, en 1887 Köpcke construyó un ejemplo, sin embargo la construcción era muy complicada; posteriormente otros matemáticos, incluido él mismo, simplificaron la construcción hasta que las pruebas más cortas alcanzaron alrededor de 10 páginas. En 1976 Clifford Weil da una prueba de la existencia de estas funciones (la que se presenta aquí de hecho) usando el teorema de categoría de Baire, en menos de dos páginas, ver [6].

En este documento se probará el teorema de categoría de Baire para espacios métricos completos y su versión topológica para espacios T_2 localmente compactos, pruebas que fueron tomadas de [5]. Luego se mostrarán dos aplicaciones, se definirá el concepto de filtro y se explicará porque el teorema de categoría de Baire no solo prueba existencia; si no que prueba que en cierto sentido la mayoría de elementos de un espacio cumple con la propiedades que se buscaban.

2 Teorema de categoría de Baire

Teorema 2.1 (Categoría de Baire, versión de espacios métricos). *Sea X un espacio métrico completo y $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ una familia de abiertos densos. Entonces $\bigcap U_n$ es denso.*

Prueba. Sean $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ abiertos densos. Basta mostrar que cualquier abierto W contiene un elemento x que está en cada U_i .

Como U_1 es denso entonces existe $x_1 \in U_1 \cap W$. Además podemos encontrar r_1 tal que:

$$\overline{B(x_1, r_1)} \in U_1 \cap W.$$

Continuando de esta manera es posible construir dos sucesiones, una de elementos $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ y otra de números $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$, tales que:

$$0 < r_n < \frac{1}{n}, \text{ y adem\'as: } \overline{B(x_n, r_n)} \in B(x_{n-1}, r_{n-1}) \cap U_n$$

Luego tenemos que la sucesi3n es de Cauchy, entonces converge (llamemos al l\'ımite x). Finalmente note que $x \in \overline{B(x_n, r_n)}$ para todo n , entonces $x \in U_n$ para todo n y como $x \in W$ se concluye el resultado. \square

Corolario 2.1.1. *En un espacio m\'etrico la intersecci3n numerable de G_δ 's densos es un G_δ denso.*

Prueba. Esto es consecuencia directa del teorema anterior y de que la uni3n numerable de conjuntos numerables es numerable. \square

Este resultado se puede generalizar a espacios topol3gicos homeomorfos a un subconjunto abierto de un espacio pseudom\'etrico completo, sin embargo para los fines de este documento la versi3n antes dada es suficiente. A continuaci3n se enuncia y demuestra la versi3n topol3gica del teorema de categor\'ıa de Baire. Primero un lema.

Lema 2.2. *Sea X un espacio Hausdorff localmente compacto; sea $x \in X$. Dado un vecindario abierto U de x existe un vecindario abierto V de x tal que \overline{V} es compacto y $\overline{V} \subset U$.*

Prueba. Como X es localmente compacto y Hausdorff entonces es regular. Sea W un vecindario abierto de x tal que \overline{W} es compacto. Considere el cerrado $(W \cap U)^c$. Como X es regular existen abiertos V y O disjuntos tal que $x \in V$ y $(W \cap U)^c \subset O$. Note que $V \subset O^c$ por ser disjuntos, luego $\overline{V} \subset O^c$ pues O^c es cerrado. Entonces concluimos que: $x \in V \subset \overline{V} \subset W \cap U$. Note que como en particular $\overline{V} \subset W$ entonces \overline{V} es compacto. Adem\'as $\overline{V} \subset U$. \square

Teorema 2.3 (Categor\'ıa de Baire, versi3n topol3gica). *Sea X un espacio T_2 localmente compacto y $\{U_n\}_{n=1}^\infty$ una familia de abiertos densos. Entonces $\cap U_n$ es densa.*

Prueba. Sea $W \subset_{ab} X$ no vac\'ıo. Basta mostrar que $W \cap (\cap U_n) \neq \emptyset$.

Note que $U_1 \cap W \neq \emptyset$ pues U_1 es denso. Por el lema 2.2 existe V_1 abierto no vac\'ıo tal que $\overline{V_1} \subset U_1 \cap W$ y $\overline{V_1}$ es compacto.

Aplicando el mismo argumento podemos encontrar V_2 abierto no vac\'ıo al que $\overline{V_2} \subset V_1 \cap U_2$ con $\overline{V_2}$ compacto. Inductivamente podemos construir $\{V_n\}$ una sucesi3n de abiertos no vac\'ıos cuya clausura es compacta y donde $\overline{V_{n+1}} \subset \overline{V_n}$. Por el teorema de intersecci3n de Cantor $\cap \overline{V_n} \neq \emptyset$.

Finalmente vea que: $\overline{V_n} \subset \overline{V_1} \subset W$ para todo n .

Adem\'as $\overline{V_n} \subset U_n$ para todo n .

Entonces $\cap \overline{V_n} \subset W \cap (\cap U_n)$. \square

En este documento se utilizar\'a la versi3n de espacios m\'etricos. Vale la pena notar que hay una forma equivalente del teorema de categor\'ıa de Baire para espacios m\'etricos que dice lo siguiente: Sea X un espacio m\'etrico completo. Si $\{A_i\}_{i=1}^\infty$ es una familia de cerrados con interior vac\'ıo entonces $\cup A_i$ tiene interior vac\'ıo. En muchas aplicaciones esta forma del teorema es la que se utiliza.

3 Aplicaci3n 1: Existen funciones continuas con derivada finita en ning\'un punto

Para esta secci3n se utilizaron las sugerencias de un ejercicio tomado de [2].

Sea $E = C[0, 1]$, con la distancia d_∞ . Entonces $(C[0, 1], d_\infty)$ es un espacio m\'etrico completo.

Sea $D = \{f \in E : f \text{ tiene derivada por la derecha finita en alg\'un punto}\}$.

Queremos demostrar que $D^c \neq \emptyset$. Vamos a mostrar algo más fuerte; que D tiene interior vacío. Para esto considere el siguiente conjunto:

$$F_n = \{f \in E : \exists a \in [0, 1 - 1/n] \text{ con } |f(a+h) - f(a)| \leq nh \text{ para } 0 < h < 1/n\}.$$

Lema 3.1. F_n es cerrado para todo n .

Prueba. Sea $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset F_n$ tal que $f_k \rightarrow f$ y sean a_k sus correspondientes puntos (los de la definición de F_n). Queremos mostrar que $f \in F_n$, i.e $\exists a$ tal que $|f(a+h) - f(a)| \leq nh$ para $0 < h < 1/n$. Tome cualquier subsucesión convergente del conjunto de los a_k (existe por Bolzano-Weierstrass), llamémosla a_{k_l} , el límite de esta sucesión será nuestro a . Note que:

$$|f_{k_l}(a_{k_l} + h) - f_{k_l}(a_{k_l})| \leq nh \quad \forall l$$

Entonces si probamos que:

$$\lim_{l \rightarrow \infty} (f_{k_l}(a_{k_l} + h) - f_{k_l}(a_{k_l})) = f(a+h) - f(a)$$

concluye la demostración. En efecto, como:

$$\begin{aligned} |f_{k_l}(a_{k_l} + h) - f_{k_l}(a_{k_l}) - f(a+h) + f(a)| &\leq |f_{k_l}(a_{k_l} + h) - f(a_{k_l} + h)| + \\ &\quad |f(a_{k_l} + h) - f(a+h)| + \\ &\quad |f_{k_l}(a_{k_l}) - f(a_{k_l})| + \\ &\quad |f(a_{k_l}) - f(a)| \end{aligned}$$

y recordando que la convergencia de estas funciones es uniforme y que f es continua, podemos tomar límite cuando $l \rightarrow \infty$ para obtener el resultado. \square

Lema 3.2. F_n tiene interior vacío para todo n .

Prueba. Vamos a mostrar que F_n^c es denso. Por Stone-Weierstrass basta ver que un polinomio puede aproximarse por funciones en F_n^c . Sea f un polinomio en E , sea d el máximo de la derivada de f en E y sea $\varepsilon > 0$, basta mostrar que existe una función g en F_n^c tal que:

$$f \leq g \leq f + \frac{\varepsilon}{2}. \quad (1)$$

Para ver una posible g divida E en k intervalos de longitud $\frac{1}{k}$. Llame a estos intervalos $[a_i, b_i]$ con $i = 1, \dots, k$ (note que $b_i = a_{i+1}$ para $i = 1, \dots, k-1$).

En los intervalos impares una los puntos $(a_i, f(a_i))$ y $(b_i, f(b_i) + \frac{\varepsilon}{2})$ y en los intervalos pares una los puntos $(a_i, f(a_i) + \frac{\varepsilon}{2})$ y $(b_i, f(b_i))$, esto nos da una función lineal a trozos cuya derivada por la derecha en el intervalo $[a_i, b_i]$ tiene valor absoluto $\left| \frac{f(b_i) + \frac{\varepsilon}{2} - f(a_i)}{1/k} \right|$ o bien $\left| \frac{f(b_i) - f(a_i) - \frac{\varepsilon}{2}}{1/k} \right|$.

Note que esto nos dice que podemos hacer que la derivada por la derecha de g tenga valor absoluto tan grande como queramos (tomando k suficientemente grande), entonces debe existir un K tal que (1) se cumpla, de lo contrario aplicando el teorema del valor medio obtendríamos que $d = \infty$, lo cual es imposible por tratarse de un polinomio, además podemos tomar K de forma que $g \in F_n^c$ (de nuevo tomando K suficientemente grande). \square

Entonces por teorema de categoría de Baire se concluye que $\cup F_n$ tiene interior vacío. Recordemos que todo conjunto que esté contenido en un conjunto de interior vacío también tiene interior vacío. Note que claramente $D \subset \cup F_n$, entonces D tiene interior vacío.

4 Aplicación 2: Existen funciones derivables monótonas en ninguna parte

Lo que se prueba en esta sección viene principalmente de [6].

Considere el siguiente conjunto:

$$D = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ es acotada y tiene antiderivada en } \mathbb{R}\}.$$

En D podemos definir la métrica de convergencia uniforme:

$$d(f, g) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - g(x)|.$$

Por un resultado estándar de análisis (D, d) es un espacio métrico completo. Para ver esta prueba puede consultar [1].

Ahora considere el conjunto:

$$E = \{f \in D : \text{existe un intervalo donde } f \text{ no cambia de signo}\}.$$

Queremos ver que $E^c \neq \emptyset$. Esto puede ser complicado entonces nos vamos a restringir a un subconjunto de D donde es más fácil trabajar; este conjunto es D_0 y se define así:

$$D_0 = \{f \in D : \{x : f(x) = 0\} \text{ es denso en } \mathbb{R}\}.$$

Entonces es mejor definir E así:

$$E = \{f \in D_0 : \text{existe un intervalo donde } f \text{ no cambia de signo}\}.$$

Lema 4.1. D_0 con la métrica de D es completo.

Prueba. Basta ver que es cerrado. Sea $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset D_0$ con $f_k \rightarrow f$. Usando el hecho de que el conjunto de ceros de una derivada es un G_δ (la prueba de esto puede encontrarse en [3]) tenemos que si $Z_k = \{x : f_k(x) = 0\}$, entonces $Z = \cap Z_k \subset \{x : f(x) = 0\}$, por el corolario 2.1.1 Z es denso, entonces $f \in D_0$. \square

Note que este mismo argumento sirve para probar que D_0 es cerrado bajo suma. En este punto tiene sentido preguntarse si D_0 tiene funciones además de la función 0. La respuesta a esta pregunta es sí y fue contestada por Dimitrie Pompeiu en 1907, de hecho estas funciones se conocen como derivadas de Pompeiu. Entonces D_0 es un espacio métrico completo, cerrado bajo suma y no es trivial. Estos puntos serán útiles más adelante.

Recordemos que buscamos probar que $E^c \neq \emptyset$.

Para esto definimos lo siguiente:

$\{I_n\}$ un ordenamiento de los intervalos cerrados de \mathbb{R} que tienen puntos extremos racionales.

$$E_n = \{f \in D_0 : f(x) \geq 0 \forall x \in I_n\}.$$

$$F_n = \{f \in D_0 : f(x) \leq 0 \forall x \in I_n\}.$$

Lema 4.2. E_n y F_n son cerrados con interior vacío en D_0 .

Prueba. Se puede probar solo para E_n pues el argumento para F_n es análogo.

El hecho de que E_n es cerrado es inmediato. Para probar que E_n no contiene abiertos tome $f \in E_n$ y $\varepsilon > 0$, luego existe $x \in I_n$ tal que $f(x) = 0$; como vimos que existen funciones no nulas en D_0

entonces podemos conseguir $h \in D_0$ tal que $h(x) < 0$ (podemos desplazar y reflejar hasta lograr esto) y multiplicando por $\varepsilon/2$ podemos hacer que $\sup_{x \in \mathbb{R}} |h(x)| < \varepsilon$. Ahora defina $g = f + h$, así $g \in D_0$, $d(f, g) < \varepsilon$ y $g \notin I_n$ pues $g(x) < 0$. En conclusión E_n no contiene abiertos. □

Teorema 4.3. *E tiene interior vacío.*

Prueba. Basta notar que $E = \bigcup (E_n \cup F_n)$ y por los lemas anteriores podemos aplicar teorema de categoría de Baire para concluir que E tiene interior vacío. □

5 Filtros

Dado un conjunto, existe una noción de "mayoría" que podemos definir, bajo la cual el teorema de categoría de Baire no solo demuestra existencia, si no que en cierto sentido prueba que la mayoría de elementos del espacio cumplen la propiedad que se estaba buscando. Esto es interesante porque originalmente estamos intentando probar que existen elementos que satisfacen una propiedad P (es decir que no son tan fáciles de encontrar) y terminamos viendo que tales elementos no solo existen, si no que son (de alguna manera) la mayoría. El concepto del que se habla es el de filtro, que a continuación se define.

Definición. Sea S un conjunto. Decimos que $\mathcal{F} \subset P(S)$ es un filtro sobre S si cumple lo siguiente:

1. $\mathcal{F} \neq \emptyset$.
2. $(A \in \mathcal{F} \wedge B \in \mathcal{F}) \implies A \cap B \in \mathcal{F}$.
3. $(A \subset B \wedge A \in \mathcal{F}) \implies B \in \mathcal{F}$.
4. $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

Definición. Un conjunto es denso en ninguna parte si el interior de su clausura es denso.

Definición. Un conjunto magro (o de primera categoría) en S es aquel que puede verse como unión numerable de densos en ninguna parte. Un conjunto es comagro si su complemento es magro.

Definición. Decimos que la mayoría de elementos de S cumple la propiedad P si el conjunto $A := \{s \in S : s \text{ cumple la propiedad } P\}$ es elemento de algún filtro sobre S .

Sea \mathcal{F} la familia de conjuntos comagros en S un espacio métrico o un espacio topológico Hausdorff localmente compacto. Veamos que \mathcal{F} es un filtro.

1. Tome el complemento de un singletón.
2. La unión de dos conjuntos numerables es numerable.
3. Todo subconjunto de un conjunto denso en ninguna parte es denso en ninguna parte, entonces todo subconjunto de un conjunto magro es magro.
4. Si el espacio es magro, por teorema de categoría de Baire tendría interior vacío, es decir sería el espacio trivial.

Entonces vemos que en efecto \mathcal{F} es un filtro. En las secciones 3 y 4 se probó que los conjuntos de las funciones con las propiedades que buscábamos tienen complemento magro (son comagros) entonces podemos decir que la mayoría de funciones continuas en $[0, 1]$ son derivables en ningún punto y que la mayoría de funciones acotadas con antiderivada son monótonas en ninguna parte.

6 Conclusión

El teorema de categoría de Baire es una herramienta muy poderosa, en este trabajo se utilizó para dos aplicaciones en análisis, otra de ella de una naturaleza parecida es el hecho de que existen funciones de clase C^∞ que son analíticas en ningún punto, resultado probado por Morgenstern. Otras aplicaciones del teorema es en análisis funcional para probar el teorema de la aplicación abierta, el teorema del grafo cerrado y el principio de acotación uniforme.

Algo interesante es que el teorema de categoría de Baire es equivalente al axioma de opciones dependientes, que es una forma débil del axioma de elección.

Lo que me parece más llamativo es que el teorema de categoría de Baire no solo prueba existencia de elementos muy difíciles de encontrar, si no que además prueba que estos elementos "extraños" para nuestra intuición son realmente los más "comunes". Refuerza la idea de que aunque siempre es bueno ver el lado intuitivo de las cosas hay que ser muy cuidadosos con la rigurosidad pues muchas veces la intuición falla.

Referencias

- [1] *Differentiation and uniformly convergent sequences of functions*, <http://mathonline.wikidot.com/differentiation-and-uniformly-convergent-sequences-of-functi>, [En línea; accedido 28-junio-2019].
- [2] Santiago Cambronero, *Notas del curso ma-505*.
- [3] Robert Israel (<https://math.stackexchange.com/users/8508/robert-israel>), *The set where a derivative vanishes is g -delta*, Mathematics Stack Exchange, URL:<https://math.stackexchange.com/q/1768816> (version: 2016-05-02).
- [4] Sara H. Jones, *Applications of the baire category theorem*, Real Analysis Exchange **23** (1997), 363–394.
- [5] James R. Munkres, *Topology*, Prentice Hall, Upper Saddle River, N.J., 2000.
- [6] Clifford E. Weil, *On nowhere monotone functions*, American Mathematical Society **56** (1976), 388–389.