Universidade Federal da Paraíba

Centro de Informática

Análise e Projetos de Algoritmos

Projeto Final - Etapa 1

Fernando Maximo Alves - 11500204

1. DESCRIÇÃO DO PROBLEMA

Em teoria dos grafos, esse problema é representado como um problema de coloração. Este é um caso especial de rotulagem de grafos e é caracterizado pela atribuição de rótulos tradicionalmente chamados “cores” a elementos de um grafo sujeita a certas restrições. De maneira mais simples, é uma forma de colorir os vértices de um grafo de tal maneira que não tenha nenhum par de vértices adjacentes com a mesma cor. O objetivo, é de minimizar o número de cores utilizadas, esse número mínimo de cores é chamado **número cromático**.

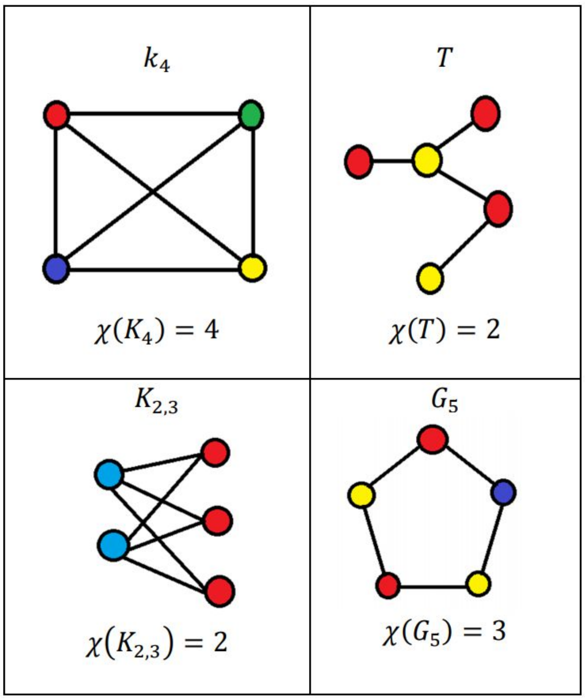
De modo formal uma coloração consiste em função $c\colon V(G) \to \mathbb{N}$, onde V é número de vértices e $\mathbb{N}$ o número de cores, tal que $c(u) \neq c(v)$, se u e v são adjacentes em G. Se cada cor utilizada no grafo for uma das k cores estabelecidas, denomina-se a coloração resultante como uma k-coloração.

O problema da coloração de grafos pode ser visto de através de duas perspectivas o problema da coloração mínima e o problema da coloração k. O problema da coloração mínima consiste em determinar o menor valor k, representando a quantidade de cores, tal que o grafo seja corretamente colorido, atendendo-se às restrições o que refere-se ao um problema de otimização. Já o problema da coloração k consiste em determinar se um grafo G pode ser colorido corretamente com no máximo k cores o que refere-se a um problema de decisão.

Como já foi mencionado anteriormente para cada vértice do grafo é atribuída uma cor diferente dos seus adjacentes, Este valor de cores o chamado número cromático representado por $X(G)$ pode ser entendido como a quantidade de classes em que cada uma dessas classes irá conter um conjunto de vértices independentes. Desta forma, $X(G)$ determina o número mínimo de conjuntos independentes por meio dos quais $V(G)$ pode ser subdividido.

Para determinadas categorias de grafos o $X(G)$ é um valor que pode ser presumido de modo trivial. Por exemplo:

- se Kn for um grafo completo com n vértices então $X(Kn) = n$;
- Se T for uma árvore (grafo conexo sem ciclos) com pelo menos 2 vértices, então $X(T) = 2$;
- $X(Kn,m) = 2$ se kn,m for um grafo bipartido com pelo menos uma aresta;
- Se Cn for um grafo com n vértices formando um único ciclo então $X(Cn) = 2$, quando n for par e $X(Cn) = 3$, quando n for ímpar.



Abaixo temos alguns exemplos das aplicação da coloração de vértices:

- **Separação de produtos explosivos:** Os vértices representam produtos químicos necessários em algum processo de produção. Existe uma aresta ligando cada par de produtos que pode explodir caso entrem em contato. O número cromático representa o número mínimo de compartimento para guardar estes produtos químicos em segurança;

- **Atribuição de frequências de rádio:** Os vértices representam os transmissores das estações de rádio. O objetivo é evitar que estações adjacentes tenham a mesma frequência para que não ocorra interferência;

- **Sudoku:** Nesse jogo cada vértice representa uma célula, cada uma dessas células terá uma aresta para outra de célula se estiver na mesma linha, mesma coluna e no mesmo bloco;

2. PERTENCE A NP?

Na sua versão de decisão o problema da coloração de grafos é classificado como um problema pertencente à classe NP (Polinomial Não-determinístico). A prova para essa afirmação é demonstrada levando em consideração o problema da coloração ***k***, que consiste em determinar se um grafo G pode ser colorido corretamente com no máximo ***k*** cores.

A demonstração para essa afirmação é simples, e baseia-se em encontrar um algoritmo verificador que será responsável por fazer a checagem das soluções fornecidas para o problema, analisando e confirmando se é um solução válida. Essa checagem pode ser feita em tempo polinomial O(***V***) e pode ser feita da seguinte maneira. Primeiro uma cor aleatória dentre ***k*** de cores é definida para cada vértice, então se verifica para todos os vértices (***u***,***v***) de ***G*** se a cor de ***u*** difere de ***v***, caso um par de vértices (***u***,***v***) possua as mesmas cores retorna falso, senão retorna verdadeiro.

```
Pseudocódigo:
{

   for ( i = 0; i < num_vertices; i++ )
       V[i]->color = random_color();

   for ( i = 0; i < num_edges; i++ )
       if ( E[i]->v->color == E[i]->u->color )
           return false;

   return true;
}
```

A partir do pseudocódigo acima é possível observar que o problema de coloração de grafos pertence a classes de problemas decisórios NP, já que foi possível em tempo polinomial certifica-se de uma determinada solução para tal problema.

3. PERTENCE A NP-DIFÍCIL?

A fim de que seja possível evidenciar que o problema de coloração de grafos trata-se um problema pertencente a classe de problemas NP-difícil, é necessário que seja feita a redução de algum outro problema, de caráter NP-Completo para o problema em questão. Tal procedimento é proveniente do lema que enuncia que dado um problema π tal que π' pertence a NPC (NP-Completo), então π é classificado como NP-Difícil. Além disso, se π pertence a classe NP, então ele será considerado também NPC. Apesar de nos próximos passos ser utilizado o problema de coloração para k igual a 3, é possível mostrar que para um valor de k igual a 4 também é NP-Difícil reduzindo para o de k igual a 3. Logo, pode-se provar o mesmo para qualquer valor de k.

Antes de mais nada, é necessário conhecer o problema que utilizaremos para reduzir o problema 3-Coloring. NAE-3-SAT que é nada mais que uma particularidade do problema 3SAT, que este, por sua vez, é uma particularidade do problema booleano de satisfatibilidade (SAT), reconhecido através do teorema de Cook-Levin como sendo o primeiro problema da classe NP-c.

Para provar que um problema está na classe dos NP-completos, é suficiente que este seja redutível por um outro problema já conhecido ser da classe NP-c. Partindo dessa ideia, utilizaremos o problema NAE-3-SAT para provar que 3-Coloring é NP-c, onde: SAT $\leq_p$ 3SAT $\leq_p$ NAE3SAT.

O problema NAE-3-SAT aborda a metodologia do problema SAT, que tem como objetivo responder a seguinte pergunta: De acordo com meu conjunto de literais x1, x2, …, xn, é possível resolver expressões booleanas na forma normal conjuntiva de tal forma que o resultado final seja sempre true?

Para isso, não podemos esquecer das restrições impostas pelos problema NAE-3-SAT e 3SAT:

- Cada cláusula (expressões dentro do parênteses) deve conter no máximo 3 literais. (restrição do problema 3SAT);
- Uma cláusula não pode conter apenas valores true ou apenas valores false (restrição do problema NAE-3-SAT)

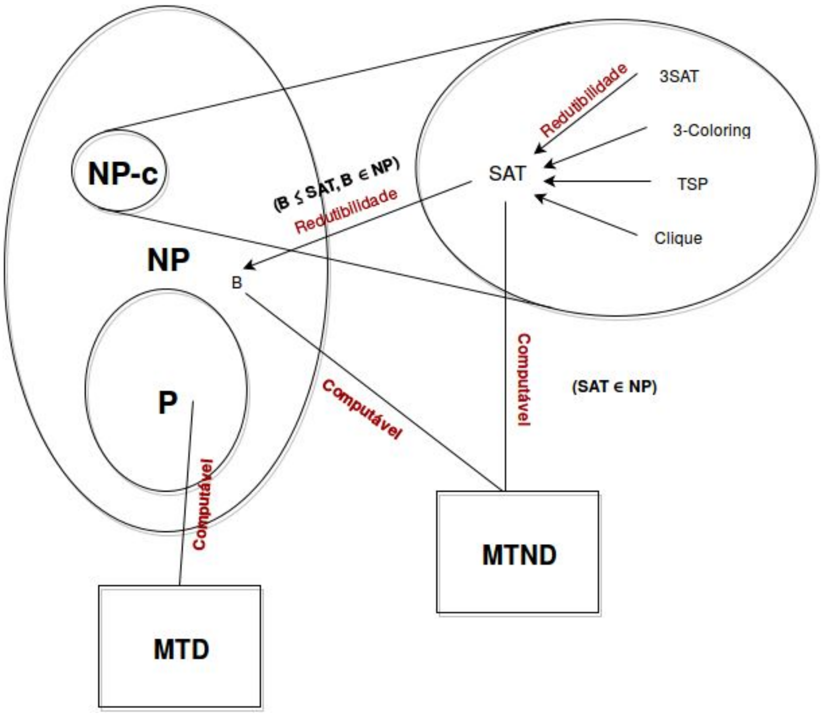
Segue um exemplo do problema NAE-3-SAT para os seguintes literais: x1 = 1, x2 = 0 e x3 = 1.

$$z = (x1 \lor x2 \lor x3) \land (\neg x1 \lor \neg x2 \lor x3) \land (\neg x1 \lor x3 \lor x2)$$
$$(1 \lor 0 \lor 1) \land (0 \lor 1 \lor 1) \land (0 \lor 1 \lor 0)$$
$$(1) \land (1) \land (1)$$
$$1$$
$$z = \text{true}$$

Um problema NP-completo pode ser redutível por qualquer outro problema que também seja da mesma classe de complexidade. Escolhemos o problema NAE-3-SAT pela conveniência que o problema nos traz pelo fato de ter seu contexto mais próximo do contexto do problema 3-Coloring. Vamos agora demonstrar que 3-Coloring é NP-c seguindo as duas condições necessárias.

3.1 3-Coloring ∈ NP.

Como já foi mostrado anteriormente o problema de coloração de grafos está em NP, logo o problema para um valor de k igual a 3 também está em NP.



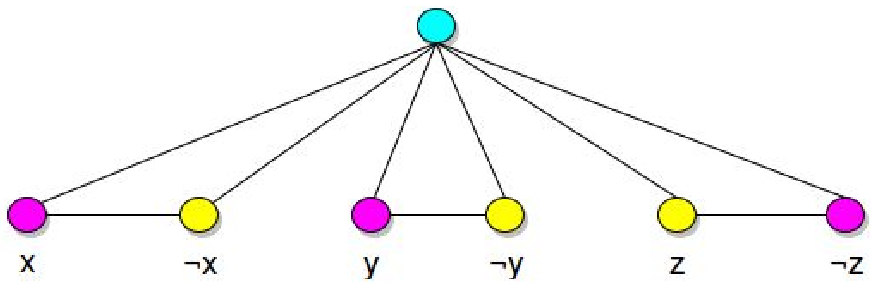
Esquema baseado no Teorema de Cook-Levin. A figura mostra o problema SAT satisfazendo as duas condições necessárias para ser um problema NP-completo. Outros problemas da mesma classe podem ser provados através da redução para SAT ou para qualquer outro problema da classe NP-c.

3.2 Para toda linguagem A ∈ NP, A é redutível a L

É desnecessário provar que um problema é NP-c mostrando este ser redutível por um problema da classe NP. Esta tarefa que não é trivial, já foi realizada pelo Teorema de Cook-Levin. Basta então reduzir nosso problema à um outro problema já conhecido ser NP-c.

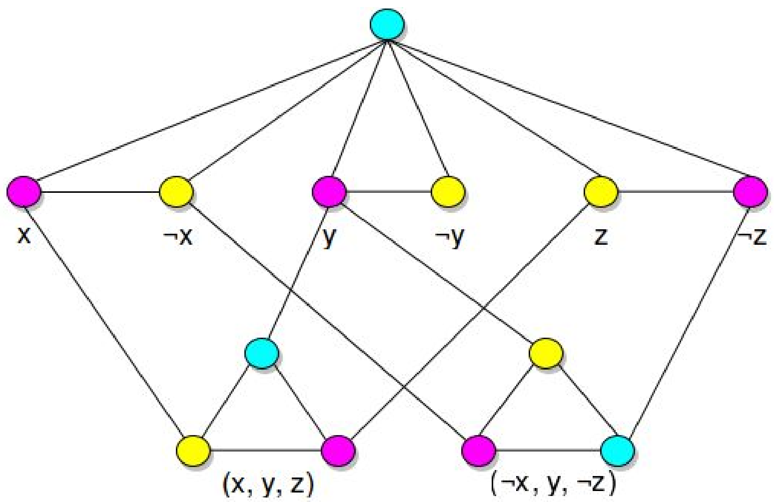
É muito importante ressaltar que a redução não serve, neste caso, para colorir um grafo ou satisfazer a fórmula NAE-3-SAT. Ela apenas serve para converter formulas em grafos, traduzindo a questão de satisfatibilidade em colorabilidade. Vamos aqui colorir o grafo para garantir um melhor entendimento.

Basicamente, uma típica redução consiste em construir dois dispositivos: os dispositivos de escolha que consiste em definir um dos possíveis valores para um literal, e os dispositivos de restrição – que forçam duas ou mais variáveis a obedecer uma certa restrição. No caso do problema 3-Coloring, o dispositivo de escolha precisa atribuir um valor booleano para cada literal ao modo que haja duas formas de colori-los. Para cada literal atribui-se então um par de vértices interconectados com um vértice pai que contém uma cor fixa e é compartilhado por todos os dispositivos de escolha. Definimos essa cor fixa como ciano. A figura abaixo ilustra o problema:



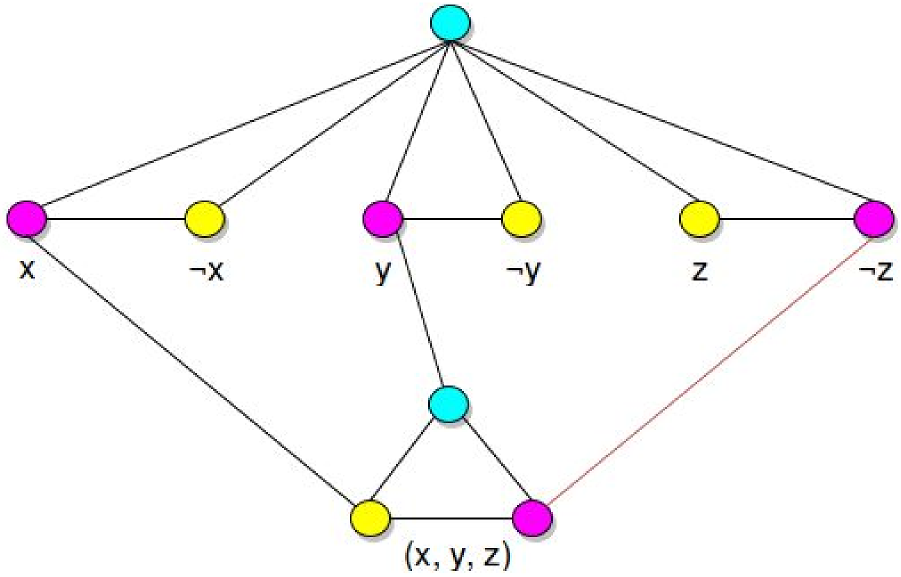
Dispositivos de escolha (triângulos). Cada literal (x, y, z) tem um dispositivo de escolha que consiste em um par de vértices e todos os dispositivos estão conectados com um vértice central. Para qualquer cor que o vértice central tiver, cada literal poderá ser colorido com duas cores que correspondem aos valores booleanos. Neste caso, **x** = true,**y** = true e **z** = false

O próximo objetivo é definir o dispositivo de restrição. Este deve ser representado por um grafo pequeno em que possamos associar cada vértice à um dispositivo de escolha. Um grafo apenas será colorido por 3 cores se e apenas se os três vértices anexados à ele não forem da mesma cor. Isso nos prova que: NAE-3-SAT **≤p** 3-Coloring



Dispositivos de restrição construídos seguindo a expressão NAE-3-SAT: s = (x V y V z) ^ (¬x V y, V ¬z) . Os dois grafos mínimos podem ser coloridos com 3 cores corretamente, pois as cláusulas (true V true V false) ^ (false V true V true) satisfazem a restrição imposta pelo problema NAE-3-SAT. Para colorir um vértice do grafo, basta escolher uma cor que não seja a mesma cor do vértice que representa o literal correspondente.

A imagem abaixo, mostra um caso em que a cláusula NAE-3-SAT não é satisfeita, em consequência, temos um grafo que não pode ser colorido corretamente com as três cores diferentes, uma vez que o vértice do dispositivo de restrição possui a mesma cor que o vértice do dispositivo de escolha.



Caso em que não é possível colorir um grafo mínimo com 3 cores, pois a restrição imposta por NAE-3-SAT não foi satisfeita.

É possível afirmar, então, que um grafo será colorido suficientemente com 3 cores se e somente se uma dada instância de NAE-3-SAT é satisfazível. Dado os vértices (a, b e c) de um grafo 3-colorível, se os vértices a e b assumirem o valor true, obrigatoriamente c deve ser falso ou vice-versa, caso contrário NAE-3-SAT não será satisfazível.

Por outro lado, dado um grafo 3-colorível com os vértices (a, b e c), assumimos que o vértice a tenha o valor do vértice pai. Os vértices b e c deverão assumir os valores x e ¬x restantes do dispositivo de escolha. Atribuindo x como true e ¬x como false (ou vice-versa) garanto que minha cláusula NAE-3-SAT não possui apenas valores true ou apenas valores false.

4. REFERÊNCIAS

http://www.professeurs.polymtl.ca/michel.gagnon/Disciplinas/Bac/Grafos/Color/color.html
http://www.revistas.unifacs.br/index.php/rsc/article/download/3028/2497
https://pt.wikipedia.org/wiki/Colora%C3%A7%C3%A3o_de_grafos
https://www.ic.unicamp.br/~atilio/slidesWtisc.pdf
https://npcompletoblog.wordpress.com/3-coloring/