

Verossimilhança — Capítulos 1 e 2

Revisão de resultados da Teoria de Probabilidades

26 de abril de 2013

Sumário

Verossimilhança

MATH 232

Variáveis
aleatórias
Discretas
Contínuas

Variáveis
aleatórias
bidimensionais

Esperança de
variáveis
aleatórias

Distribuições
de
probabilidade

Teorema do
Limite Central

- 1 Variáveis aleatórias
 - Variáveis aleatórias discretas
 - Variáveis aleatórias contínuas
- 2 Variáveis aleatórias bidimensionais
- 3 Esperança de variáveis aleatórias
- 4 Distribuições de probabilidade
- 5 Teorema do Limite Central

Sumário

Verossimilhança

MATH 232

Variáveis
aleatórias

Discretas
Contínuas

Variáveis
aleatórias
bidimensionais

Esperança de
variáveis
aleatórias

Distribuições
de
probabilidade

Teorema do
Limite Central

- 1 Variáveis aleatórias
 - Variáveis aleatórias discretas
 - Variáveis aleatórias contínuas
- 2 Variáveis aleatórias bidimensionais
- 3 Esperança de variáveis aleatórias
- 4 Distribuições de probabilidade
- 5 Teorema do Limite Central

Variáveis aleatórias

Verossimilhança

MATH 232

Variáveis
aleatórias

Discretas
Contínuas

Variáveis
aleatórias
bidimensionais

Esperança de
variáveis
aleatórias

Distribuições
de
probabilidade

Teorema do
Limite Central

Vamos considerar apenas variáveis quantitativas (qualitativas devem ser tratadas de maneira apropriada . . .)

Definição “intuitiva”

- Uma **variável** é uma característica de uma população que pode ser mensurada
- Uma **variável** é dita **aleatória** quando não podemos determinar seu resultado (embora possamos prever, conforme será mostrado adiante)

Variáveis aleatórias

Verossimilhança

MATH 232

Variáveis
aleatórias

Discretas
Contínuas

Variáveis
aleatórias
bidimensionais

Esperança de
variáveis
aleatórias

Distribuições
de
probabilidade

Teorema do
Limite Central

Definição “fraca” (Meyer, Dantas)

- Variável Aleatória (VA) é uma função $X(\omega)$, de um evento (realização) ω , definida em um espaço amostral Ω , que assume valores reais \mathbb{R}

$$X(\omega) = \omega; \quad X(\omega) \in \mathbb{R}, \omega \in \Omega$$

- Se a VA $X(\omega)$ assume valores enumeráveis (não necessariamente finitos), são denominadas **discretas**
- Se a VA $X(\omega)$ assume valores em um intervalo da reta real, são denominadas **contínuas**

Variáveis aleatórias

Verossimilhança

MATH 232

Variáveis
aleatórias

Discretas
Contínuas

Variáveis
aleatórias
bidimensionais

Esperança de
variáveis
aleatórias

Distribuições
de
probabilidade

Teorema do
Limite Central

Definição “forte” (formal) (Magalhães, James)

- Definida em função de σ -álgebra, ...
 - Não

Sumário

Verossimilhança

MATH 232

Variáveis
aleatórias

Discretas

Contínuas

Variáveis
aleatórias
bidimensionais

Esperança de
variáveis
aleatórias

Distribuições
de
probabilidade

Teorema do
Limite Central

- 1 Variáveis aleatórias
 - Variáveis aleatórias discretas
 - Variáveis aleatórias contínuas
- 2 Variáveis aleatórias bidimensionais
- 3 Esperança de variáveis aleatórias
- 4 Distribuições de probabilidade
- 5 Teorema do Limite Central

Variáveis aleatórias discretas

Verossimilhança

MATH 232

Variáveis
aleatórias

Discretas

Contínuas

Variáveis
aleatórias
bidimensionais

Esperança de
variáveis
aleatórias

Distribuições
de
probabilidade

Teorema do
Limite Central

Uma VA **discreta** é uma função que atribui uma probabilidade a cada valor específico. É denominada *função discreta de probabilidade*, *função massa de probabilidade* e é denotada por

$$P(X = x_i) = p(x_i) = p_i, \quad i = 1, 2, \dots$$

e tem as seguintes propriedades:

- ❶ $\sum_i P(X = x_i) = 1$
- ❷ $0 \leq P(X = x_i) \leq 1$

Variáveis aleatórias discretas

Verossimilhança

MATH 232

Variáveis
aleatórias

Discretas

Contínuas

Variáveis
aleatórias
bidimensionais

Esperança de
variáveis
aleatórias

Distribuições
de
probabilidade

Teorema do
Limite Central

- Exemplos . . .
- Principais “funções” discretas
 - Binomial
 - Poisson
 - Hipergeométrica
 - Binomial negativa

Sumário

Verossimilhança

MATH 232

Variáveis
aleatórias
Discretas

Contínuas

Variáveis
aleatórias
bidimensionais

Esperança de
variáveis
aleatórias

Distribuições
de
probabilidade

Teorema do
Limite Central

- 1 Variáveis aleatórias
 - Variáveis aleatórias discretas
 - Variáveis aleatórias contínuas
- 2 Variáveis aleatórias bidimensionais
- 3 Esperança de variáveis aleatórias
- 4 Distribuições de probabilidade
- 5 Teorema do Limite Central

Variáveis aleatórias contínuas

Verossimilhança

MATH 232

Variáveis
aleatórias
Discretas

Contínuas

Variáveis
aleatórias
bidimensionais

Esperança de
variáveis
aleatórias

Distribuições
de
probabilidade

Teorema do
Limite Central

- Para uma VA **contínua**, não é possível atribuir uma probabilidade a um valor específico, pois existe uma quantidade não enumerável de valores positivos em um ponto da reta, e portanto a soma não poderia ser 1.
- Por isso, devemos atribuir probabilidades à **intervalos** de valores da VA contínua, por meio da função $f(x)$ que a descreve. Essa função deve ter as seguintes propriedades:
 - 1 $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in (-\infty, \infty)$
 - 2 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

Portanto, para calcular uma probabilidade para um intervalo entre $a \leq b$, temos a relação

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

Variáveis aleatórias contínuas

Verossimilhança

MATH 232

Variáveis
aleatórias
Discretas
Contínuas

Variáveis
aleatórias
bidimensionais

Esperança de
variáveis
aleatórias

Distribuições
de
probabilidade

Teorema do
Limite Central

VAs contínuas também podem ser definidas pela *função de distribuição acumulada* $F(x)$,

$$F(X) = P(X \leq x)$$

que possui as seguintes propriedades

- 1 $0 \leq F(x) \leq 1$
- 2 $F(x)$ é não decrescente, e contínua à direita
- 3 $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$

Variáveis aleatórias contínuas

Verossimilhança

MATH 232

Variáveis
aleatórias
Discretas
Contínuas

Variáveis
aleatórias
bidimensionais

Esperança de
variáveis
aleatórias

Distribuições
de
probabilidade

Teorema do
Limite Central

Pelas definições da fda, podemos agora calcular probabilidades entre x e $x + dx$ (onde $dx > 0$ é um valor incremental), através de

$$P(x \leq X \leq x + dx) = F(x + dx) - F(x)$$

Variáveis aleatórias contínuas

Verossimilhança

MATH 232

Variáveis
aleatórias
Discretas

Contínuas

Variáveis
aleatórias
bidimensionais

Esperança de
variáveis
aleatórias

Distribuições
de
probabilidade

Teorema do
Limite Central

- Exemplos . . .
- Principais “funções” contínuas
 - Beta
 - Exponencial
 - Gama
 - Uniforme
 - Normal
 - t-Student

Sumário

Verossimilhança

MATH 232

Variáveis
aleatórias
Discretas
Contínuas

Variáveis
aleatórias
bidimensionais

Esperança de
variáveis
aleatórias

Distribuições
de
probabilidade

Teorema do
Limite Central

- 1 Variáveis aleatórias
 - Variáveis aleatórias discretas
 - Variáveis aleatórias contínuas
- 2 Variáveis aleatórias bidimensionais
- 3 Esperança de variáveis aleatórias
- 4 Distribuições de probabilidade
- 5 Teorema do Limite Central

Variáveis aleatórias bidimensionais

Verossimilhança

MATH 232

Variáveis
aleatórias
Discretas
Contínuas

Variáveis
aleatórias
bidimensionais

Esperança de
variáveis
aleatórias

Distribuições
de
probabilidade

Teorema do
Limite Central

Sumário

Verossimilhança

MATH 232

Variáveis
aleatórias
Discretas
Contínuas

Variáveis
aleatórias
bidimensionais

Esperança de
variáveis
aleatórias

Distribuições
de
probabilidade

Teorema do
Limite Central

- 1 Variáveis aleatórias
 - Variáveis aleatórias discretas
 - Variáveis aleatórias contínuas
- 2 Variáveis aleatórias bidimensionais
- 3 Esperança de variáveis aleatórias
- 4 Distribuições de probabilidade
- 5 Teorema do Limite Central

Esperança de variáveis aleatórias

Verossimilhança

MATH 232

Variáveis
aleatórias

Discretas
Contínuas

Variáveis
aleatórias
bidimensionais

Esperança de
variáveis
aleatórias

Distribuições
de
probabilidade

Teorema do
Limite Central

Sumário

Verossimilhança

MATH 232

Variáveis
aleatórias

Discretas
Contínuas

Variáveis
aleatórias
bidimensionais

Esperança de
variáveis
aleatórias

Distribuições
de
probabilidade

Teorema do
Limite Central

- 1 Variáveis aleatórias
 - Variáveis aleatórias discretas
 - Variáveis aleatórias contínuas
- 2 Variáveis aleatórias bidimensionais
- 3 Esperança de variáveis aleatórias
- 4 Distribuições de probabilidade
- 5 Teorema do Limite Central

Distribuições de probabilidade

Verossimilhança

MATH 232

Variáveis
aleatórias
Discretas
Contínuas

Variáveis
aleatórias
bidimensionais

Esperança de
variáveis
aleatórias

Distribuições
de
probabilidade

Teorema do
Limite Central

A maioria das distribuições de probabilidade tradicionais estão implementadas no R, e podem ser utilizadas para substituir as tabelas estatísticas tradicionais. Existem 4 itens fundamentais que podem ser calculados para cada distribuição:

- d^* Calcula a densidade de probabilidade ou probabilidade pontual
- p^* Calcula a função de probabilidade acumulada
- q^* Calcula o quantil correspondente a uma dada probabilidade
- r^* Gera números aleatórios (ou “pseudo-aleatórios”)

Distribuições de probabilidade

Verossimilhança

MATH 232

Variáveis
aleatórias
Discretas
Contínuas

Variáveis
aleatórias
bidimensionais

Esperança de
variáveis
aleatórias

Distribuições
de
probabilidade

Teorema do
Limite Central

As distribuições de probabilidade mais comuns são:

Distribuição	Nome no R	Parâmetros
Binomial	*binom	size, prob
χ^2	*chisq	df
Normal	*norm	mean, sd
Poisson	*pois	lambda
t	*t	df
Uniforme	*unif	min, max

Distribuições de probabilidade

Verossimilhança

MATH 232

Variáveis
aleatórias

Discretas
Contínuas

Variáveis
aleatórias
bidimensionais

Esperança de
variáveis
aleatórias

Distribuições
de
probabilidade

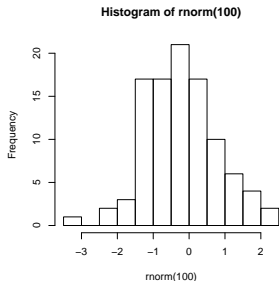
Teorema do
Limite Central

Aplicando no R

```
> rnorm(10)
```

```
[1]  0.048592  0.219971 -0.402351  0.147845  1.167548  
[6] -0.924155 -0.173920  0.719823  1.522894 -0.595841
```

```
> hist(rnorm(100))
```



Distribuições de probabilidade

Verossimilhança

MATH 232

Variáveis
aleatórias

Discretas
Contínuas

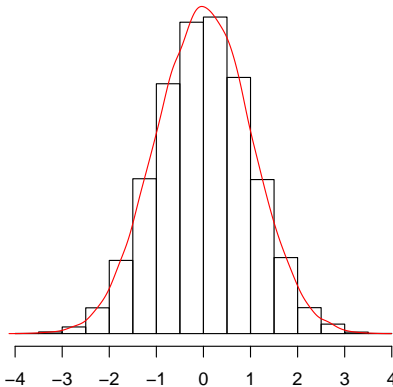
Variáveis
aleatórias
bidimensionais

Esperança de
variáveis
aleatórias

Distribuições
de
probabilidade

Teorema do
Limite Central

Distribuição normal padrão $N(0,1)$



Distribuições de probabilidade

Verossimilhança

MATH 232

Variáveis
aleatórias

Discretas
Contínuas

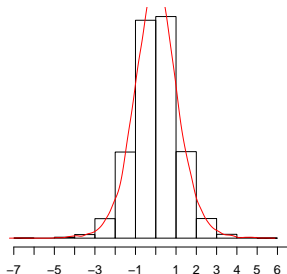
Variáveis
aleatórias
bidimensionais

Esperança de
variáveis
aleatórias

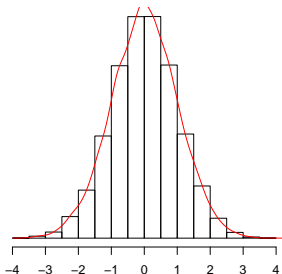
Distribuições
de
probabilidade

Teorema do
Limite Central

Distribuição $t(df)$; $df = 10$



Distribuição $t(df)$; $df = 100$



Distribuições de probabilidade

Verossimilhança

MATH 232

Variáveis
aleatórias

Discretas
Contínuas

Variáveis
aleatórias
bidimensionais

Esperança de
variáveis
aleatórias

Distribuições
de
probabilidade

Teorema do
Limite Central

Alguns exemplos:

```
> # quantis de z  
> qnorm(0.025)
```

```
[1] -1.96
```

```
> qnorm(0.975)
```

```
[1] 1.96
```

```
> # quantis de t com diferentes G.L.  
> qt(0.025, df = 9)
```

```
[1] -2.2622
```

```
> qt(0.025, df = 900)
```

```
[1] -1.9626
```

Sumário

Verossimilhança

MATH 232

Variáveis
aleatórias
Discretas
Contínuas

Variáveis
aleatórias
bidimensionais

Esperança de
variáveis
aleatórias

Distribuições
de
probabilidade

Teorema do
Limite Central

- 1 Variáveis aleatórias
 - Variáveis aleatórias discretas
 - Variáveis aleatórias contínuas
- 2 Variáveis aleatórias bidimensionais
- 3 Esperança de variáveis aleatórias
- 4 Distribuições de probabilidade
- 5 Teorema do Limite Central

Teorema do Limite Central

Verossimilhança

MATH 232

Variáveis
aleatórias

Discretas
Contínuas

Variáveis
aleatórias
bidimensionais

Esperança de
variáveis
aleatórias

Distribuições
de
probabilidade

Teorema do
Limite Central