

Descrevendo Circuitos Lógicos

(Continuação)

Teoremas Booleanos

CPCX – UFMS

Slides: Prof. Renato F. dos Santos

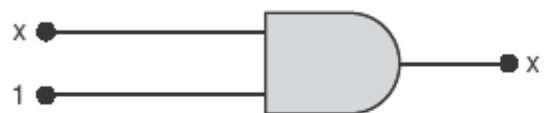
Adaptação: Prof. Fernando Maia da Mota

3.10 Teoremas booleanos

- Investigaremos os vários teoremas (regras) denominados *teoremas booleanos*
- Poderão ajudar a simplificar expressões lógicas e circuitos lógicos
- Em cada teorema x é uma variável lógica que pode ser 0 ou 1
- Cada teorema está acompanhado de um circuito lógico que demonstra sua validade



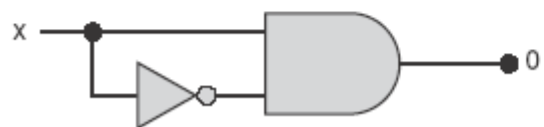
(1) $x \cdot 0 = 0$



(2) $x \cdot 1 = x$



(3) $x \cdot x = x$



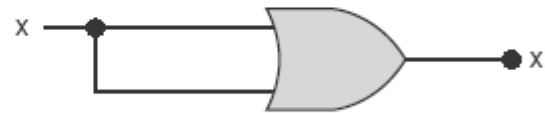
(4) $x \cdot \bar{x} = 0$



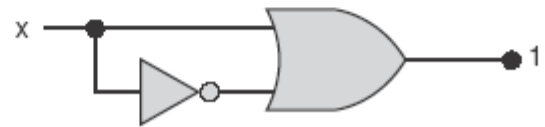
(5) $x + 0 = x$



(6) $x + 1 = 1$



(7) $x + x = x$



(8) $x + \bar{x} = 1$

FIGURA 3.25
Teoremas para uma
única variável.

3.10 Teoremas booleanos (Continuação)

- **Teoremas**
 1. Se for realizada uma operação AND de qualquer variável com 0, o resultado tem de ser 0.
 2. Também é obvio se fizermos a comparação com a multiplicação convencional
 3. Pode ser provado testando cada caso. Se $x = 0$, então $0 \cdot 0 = 0$; se $x = 1$, então $1 \cdot 1 = 1$. Portanto, $x \cdot x = x$.
 4. Pode-se argumentar que em qualquer momento a variável x ou seu inverso \bar{x} deve ser nível 0, então o produto lógico AND tem de ser 0.
 5. É simples, visto que 0 somado a qualquer valor não afeta esse valor, tanto na adição convencional como na lógica.

3.10 Teoremas booleanos (Continuação)

6. Se realizada uma operação OR de qualquer variável com 1, o resultado sempre será 1.
7. Pode ser provado pelo teste dos dois valores de x : $0 + 0 = 0$ e $1 + 1 = 1$.
8. Pode ser provado de maneira parecida, ou podemos argumentar em qualquer instante x ou \bar{x} tem de ser nível 1, de modo que sempre estaremos fazendo uma operação OR entre 0 e 1 que sempre resultará em 1.

3.10 Teoremas booleanos (Continuação)

- Vale ressaltar que, quando os teoremas de 1 a 8 são aplicados, a variável x pode realmente representar uma expressão que contém mais de uma variável
- Por exemplo, se tivéssemos a expressão $A\overline{B}(\overline{A\overline{B}})$, poderíamos aplicar o teorema 4, fazendo $x = A\overline{B}$
- Assim, podemos dizer que $A\overline{B}(\overline{A\overline{B}}) = 0$
- A mesma idéia pode ser usada em qualquer um desses teoremas

Teoremas com mais de uma variável

9. $x + y = y + x$

10. $x \cdot y = y \cdot x$

11. $x + (y + z) = (x + y) + z = x + y + z$

12. $x(yz) = (xy)z = xyz$

13. a) $x(y + z) = xy + xz$

b) $(w + x)(y + z) = wy + xy + wz + xz$

14. $x + xy = x$

15. a) $x + \bar{x}y = y + y$

b) $\bar{x} + xy = \bar{x} + y$

Teoremas com mais de uma variável (Continuação)

- Os teoremas 9 e 10 são chamados de leis comutativas as quais mostram que a ordem em que as variáveis aparecem nas operações OR e AND não importa; o resultado é o mesmo
- O teoremas 11 e 12 são as leis associativas, que dizem que podemos agrupar as variáveis em expressões AND ou OR do modo que desejarmos
- O teorema 13 é a lei distributiva, que diz que uma expressão pode ser expandida multiplicando termo a termo, da mesma maneira que na álgebra convencional. Esse teorema também indica que podemos colocar em evidência termos comuns em uma expressão. Por exemplo a expressão $A\bar{B}C + \bar{A}\bar{B}C$ podemos colocar em evidência a variável B :
 - $A\bar{B}C + \bar{A}\bar{B}C = \bar{B}(AC + \bar{A}C)$

Teoremas com mais de uma variável (Continuação)

- Considere, como outro exemplo, a expressão $ABC + ABD$. Aqui os dois termos têm as variáveis A e B em comum; assim, $A \cdot B$ pode ser colocado em evidência. Ou seja,
 - $ABC + ABD = AB(C + D)$
- Os teoremas de 9 a 13 são fáceis de lembrar e usar, pois são idênticos aos da álgebra convencional. Os teoremas 14 e 15, por outro lado, não possuem equivalentes na álgebra convencional. Cada um pode ser demonstrado, testando todas as possibilidades para x e y .

Teoremas com mais de uma variável (Continuação)

- Tabela de análise para a equação $x + xy$:

x	y	xy	$x + xy$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	1
1	1	1	1

- Observe que o valor da expressão toda $(x + xy)$ é sempre igual a x .

Teoremas com mais de uma variável (Continuação)

- O teorema 14 também pode ser provado, evidenciando variáveis e usando os teoremas 6 e 2 da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \bullet \quad x + xy &= x(1 + y) && \text{[Usando o teorema 6]} \\ &= x \cdot 1 && \text{[Usando o teorema 2]} \\ &= x \end{aligned}$$

- Os teoremas booleanos podem ser úteis na simplificação expressões lógicas, ou seja, na redução de termos em uma expressão
- Quando isso acontece, a expressão reduzida produz um circuito menos complexo do que o produzido pela expressão original

Exemplo 3.13

- Simplifique a expressão $y = A\bar{B}D + A\bar{B}\bar{D}$.

Solução

Colocando em evidência as variáveis comuns, AB , usando o teorema 13, temos:

$$y = A\bar{B}(D + \bar{D})$$

Usando o teorema 8, o termo entre parênteses é equivalente a 1. Assim,

$$y = A\bar{B} \cdot 1$$

$$= A\bar{B}$$

[Usando o teorema 2]

Exemplo 3.14

– Simplifique a expressão $z = (\bar{A} + B)(A + B)$.

Solução

A expressão pode ser expandida, multiplicando os termos [teorema 13]:

$$z = \bar{A} \cdot A + \bar{A} \cdot B + B \cdot A + B \cdot B$$

Aplicando o teorema 4, o termo $\bar{A} \cdot A = 0$. Além disso, $B \cdot B = B$ [teorema 3]:

$$z = 0 + \bar{A} \cdot B + B \cdot A + B = \bar{A}B + AB + B$$

Colocando em evidência a variável B [teorema 13], temos:

$$z = B(\bar{A} + A + 1)$$

Finalmente, usando os teoremas 2 e 6, temos:

$$z = B$$

Exemplo 3.15

– Simplifique $x = ACD + \bar{A}BCD$.

Solução

Colocando em evidência os termos comuns CD , temos:

$$x = CD(A + \bar{A}B)$$

Usando o teorema 15a, podemos substituir $A + \bar{A}B$ por $A + B$.

Assim,

$$\begin{aligned} x &= CD(A + B) \\ &= ACD + BCD \end{aligned}$$