Aproximando π

Fernando Gerardo Flores García

April 2, 2021

1 Recordemos el teorema generalizado del binomio.

$$(y+x)^r = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} y^{r-k} x^k$$

donde r es cualquier real y

$$\binom{r}{k} = \frac{1}{k!} \prod_{n=0}^{k-1} (r-n)$$

2 Ecuación de un circulo unitario

$$x^2 + y^2 = 1$$

despejamos a y

$$y = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$$

Notamos que podemos usar el teorema, apliquémoslo a los primeros 20 términos.

Veamos que la expresión $(1-x)^n$ con el teorema esta dado por:

$$(1-x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + ...$$

Sólo reemplazamos n por $\frac{1}{2}$

3 Obetenemos los 20 terminos de la expresión

$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}-\frac{5x^4}{128}+\frac{7x^5}{256}-\frac{21x^6}{1024}+\frac{33x^7}{2048}-\frac{429x^8}{32768}+\frac{715x^9}{65536}-\frac{2431x^{10}}{262144}+\frac{4199x^{11}}{524288}-\frac{29393x^{12}}{4194304}+\frac{52003x^{13}}{8388608}-\frac{185725x^{14}}{33554432}+\frac{334305x^{15}}{67108864}-\frac{9694845x^{16}}{2147483648}+\frac{17678835x^{17}}{4294967296}-\frac{64822395x^{18}}{17179869184}+\frac{119409675x^{19}}{34359738368}$

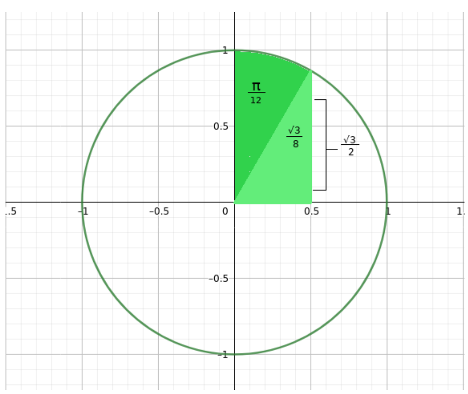
4 Expresión substituyendo x por $-x^2$

$(1-x^2)^{\frac{1}{2}} = 1-\frac{x^2}{2}-\frac{\left(x^2\right)^2}{8}-\frac{\left(x^2\right)^3}{16}-\frac{5\left(x^2\right)^4}{128}-\frac{7\left(x^2\right)^5}{256}-\frac{21\left(x^2\right)^6}{1024}-\frac{33\left(x^2\right)^7}{2048}-\frac{429\left(x^2\right)^8}{32768}-\frac{715\left(x^2\right)^9}{65536}-\frac{2431\left(x^2\right)^{10}}{262144}-\frac{4199\left(x^2\right)^{11}}{524288}-\frac{29393\left(x^2\right)^{12}}{4194304}-\frac{52003\left(x^2\right)^{13}}{8388608}-\frac{185725\left(x^2\right)^{14}}{33554432}-\frac{334305\left(x^2\right)^{15}}{67108864}-\frac{9694845\left(x^2\right)^{16}}{2147483648}-\frac{17678835\left(x^2\right)^{17}}{4294967296}-\frac{64822395\left(x^2\right)^{18}}{17179869184}-\frac{119409675\left(x^2\right)^{19}}{34359738368}$

5 Integrando de 0 a $\frac{1}{2}$:

Estámos integrando para calcular el área de 0 a $\frac{1}{2}$ del circulo.

$\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} 1-\frac{x^2}{2}-\frac{\left(x^2\right)^2}{8}-\frac{\left(x^2\right)^3}{16}-\frac{5\left(x^2\right)^4}{128}-\frac{7\left(x^2\right)^5}{256}-\frac{21\left(x^2\right)^6}{1024}-\frac{33\left(x^2\right)^7}{2048}-\frac{429\left(x^2\right)^8}{32768}-\frac{715\left(x^2\right)^9}{65536}-\frac{2431\left(x^2\right)^{10}}{262144}-\frac{4199\left(x^2\right)^{11}}{524288}-\frac{29393\left(x^2\right)^{12}}{4194304}-\frac{52003\left(x^2\right)^{13}}{8388608}-\frac{185725\left(x^2\right)^{14}}{33554432}-\frac{334305\left(x^2\right)^{15}}{67108864}-\frac{9694845\left(x^2\right)^{16}}{2147483648}-\frac{17678835\left(x^2\right)^{17}}{4294967296}-\frac{64822395\left(x^2\right)^{18}}{17179869184}-\frac{119409675\left(x^2\right)^{19}}{34359738368}\,dx$



Resultado

Sabemos que el área es $\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{8}$ entonces lo reemplazamos por la integral.del lado izquierdo e integramos el lado derecho para así poder despejar π

$\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{8} = \frac{215504754054377723938464761066140037}{450558579162591653650057271653171200}$

6 Despejando π

$\pi = 12[\frac{215504754054377723938464761066140037}{450558579162591653650057271653171200}-\frac{\sqrt{3}}{8}]$, $\pi = \frac{215504754054377723938464761066140037}{37546548263549304470838105971097600}-\frac{3\sqrt{3}}{2}$

7 Aproximación final con 20 Términos:

3.141592653589793788192614809472082044757528844658106127058568505152839

8 Aproximación final con 30 Términos:

3.141592653589793238462687821176775737951367639638530438603345241975616

9 Aproximación final con 40 Términos:

3.141592653589793238462643383300709202877844257122545275152949650133547