Aproximando π

Fernando Gerardo Flores García

April 2, 2021

1 Recordemos el teorema generalizado del binomio.

$$(y+x)^r = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} y^{r-k} x^k$$

donde r es cualquier real y

$$\binom{r}{k} = \frac{1}{k!} \prod_{n=0}^{k-1} (r-n)$$

2 Ecuación de un circulo unitario

$$x^2 + y^2 = 1$$

despejamos a y

$$y = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$$

Notamos que podemos usar el teorema, apliquémoslo a los primeros 5 términos.

Veamos que la expresión $(1-x)^n$ con el teorema esta dado por:

$$(1-x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + ...$$

Sólo reemplazamos n por $\frac{1}{2}$

3 Obetenemos los 5 terminos de la expresión

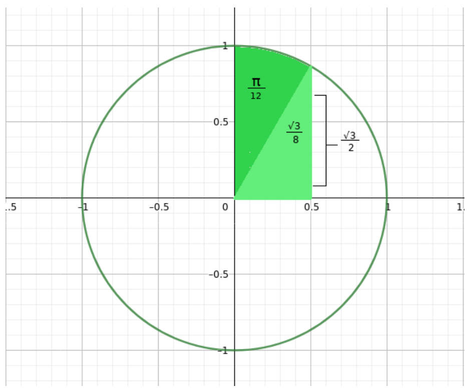
$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128}$

4 Expresión substituyendo x por $-x^2$

$(1-x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{\left(x^2\right)^2}{8} - \frac{\left(x^2\right)^3}{16} - \frac{5\left(x^2\right)^4}{128}$

5 Integrando de 0 a $\frac{1}{2}$:

Estámos integrando para calcular el área de 0 a $\frac{1}{2}$ del circulo.
$\int_0^{\frac{1}{2}} (1-x^2)^{\frac{1}{2}}\, dx = \int_0^{\frac{1}{2}} 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{\left(x^2\right)^2}{8} - \frac{\left(x^2\right)^3}{16} - \frac{5\left(x^2\right)^4}{128}\, dx$



Resultado

Sabemos que el área es $\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8}$ entonces lo reemplazamos por la integral.del lado izquierdo e integramos el lado derecho para así poder despejar π

$\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8} = \frac{9874097}{20643840}$

6 Despejando π

$\pi = 12[\frac{9874097}{20643840} - \frac{\sqrt{3}}{8}]$, $\pi = \frac{9874097}{1720320} - \frac{3\sqrt{3}}{2}$

7 Aproximación final con 5 Términos:

3.141610009814838821613592392503096211490554024046333819821051435584005

8 Aproximación final con 30 Términos:

3.141592653589793238462687821176775737951367639638530438603345241975616

9 Aproximación final con 40 Términos:

3.141592653589793238462643383300709202877844257122545275152949650133547