Desarrollo ejercicio número 10. / Clase N°3

Sea P_n el conjunto de todos los polinomios de grado n, con coeficientes reales.

(1) $|p_x > \varepsilon$ $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$

(a). Demostrar que P_n es un espacio vectorial respecto a la suma de Polinomios por un número Real.

Para demostrar que los polinomios de grado n se debe ver que se verifiquen las propiedades indicadas en los capítulos anteriores. Para ello, será conveniente apoyarnos en la forma general vista en (1)

- Cerradura respecto a la suma. +

Sean $p(x)$ y $q(x) \in P_n$

$p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1}$ con $a, b \in \mathbb{R}$

$q(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_{n-1} x^{n-1}$

$\Rightarrow p(x) + q(x) = (a_0 + a_1 x + \dots a_{n-1} x^{n-1}) + (b_0 + b_1 x + \dots b_{n-1} x^{n-1})$

$= ((a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) x + \dots + (a_{n-1} + b_{n-1}) x^{n-1}$

$= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \dots + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1}$

Dado que a_i y $b_i \in \mathbb{R}$ y este a su vez es un cuerpo, es cerrado bajo la suma, es decir $\exists c_i \in \mathbb{R} \mid a_i \square b_i = c_i$

Por lo que se obtiene

$c_0 + c_1 x + \dots + c_{n-1}x^{n-1} = p(x) + q(x) = r(x) \in P_n$ -

- Conmutatividad.

$p(x) + q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \dots + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1}$,

$= (b_0 + a_0) + (b_1 + a_1)x + \dots + (b_{n-1} + a_{n-1})x^{n-1} = q(x) + p(x)$

Dado que los números reales son conmutativos.

$\forall a_i, b_i \in \mathbb{R} \rightarrow a_i + b_i = b_i + a_i$

4) Existencia elemento Neutro.

Sea $O(x)$ el polinomio de orden n con 0 ($\in \mathbb{R}$) en todos sus coeficientes.

$$O(x) = 0 + 0x + \dots + 0x^{n-1} \in P_{nx}$$

Se obtiene que $\forall p(x) \in P_n \mid p(x) + O(x) = p(x)$

$$p(x) + O(x) = (a_0 + 0) + (a_1 + 0)x + \dots + (a_{n-1} + 0)x^{n-1} =$$

nótese que al tratarse del modulo de la suma

$a_i + 0 = a_i \qquad i = \{0, 1, \dots, n-1\}$

$$= (a_0) + (a_1)x + \dots + (a_{n-1})x^{n-1} = p(x).$$

5) Existe un elemento simetrico.

Sean $\begin{cases} S(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} \\ M(x) = -a_0 + (-a_1)x \dots + (-a_{n-1}x^{n-1}) \end{cases}$

$$S(x) + M(x) = (a_0 + (-a_0)) + (a_1 + (-a_1))x + (a_{n-1} + (-a_{n-1})x)$$

$$= (0) + (0)x + \dots + (0)x^{n-1} = O(x)$$ elemento neutro.

Dado que $\forall a_i \in \mathbb{R} \ \exists -a_i \in \mathbb{R} \rightarrow a_i + (-a_i) = 0$.

$$S(x) + M(x) = (a_0 + (-a_0)) + (a_1 + (-a_1)x + (a_{n-1} + (-a_{n-1})x)$$

$$= (0) + (0)x + \dots + (0)x^{n-1} = 0_{(x)}$$ elemento neutro.

Dado que $\forall a_i \in \mathbb{R}$ $\exists -a_i \in \mathbb{R} \rightarrow$ $a_i + (-a_i) = 0$.

- Es cerrado bajo la multiplicación.

Sea $|p(x)\rangle \in P_n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$

Se define que $\alpha|p(x)\rangle = \alpha(a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1}x^{n-1})$

$$= (\alpha a_0 + \alpha a_1 x + \dots + \alpha a_{n-1} x^{n-1})$$

Nótese que al tratarse de un cuerpo, los números reales forman un grupo Abeliano con la multiplicación; es decir:

$$\exists c \in \mathbb{R} \mid c_i = \alpha a_i ; \ \alpha, a_i \in \mathbb{R} \ . \ i = \overrightarrow{0 \quad n-1}$$

$$= (c_0 + c_1 x + \dots + c_{n-1} x^{n-1})$$

c) El cero y todos de grado n-1.

Sí, nótese que para mostrar que es subespacio basta que $\forall p(x), q(x) \in S$

$p(x)+q(x) \in S$
$\alpha p(x) \in S$

| Cualquier vector de la forma $p(x) \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i \in S$ con $a_i \in \mathbb{R}$.

$$p(x)+q(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i + \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i$$

| $\forall a_i, b_i \in \mathbb{R}$
$\exists c_i \in \mathbb{R} \mid c_i = a_i + b_i$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i + b_i x^i = \sum_{i=0}^{n-1} (a_i+b_i) x^i = \sum_{i=0}^{n-1} c_i x^i$$

$\in S$ ✓

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$ se verifica que $\alpha (p(x)) \in P_n$

$$\alpha(p(x)) = \alpha \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha a_i x^i$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} c_i x^i$$

$\in S$.

| En los números reales se verifica la cerradura con la multiplicación.
Es decir, $\exists c_i \in \mathbb{R} \mid c_i = a_i \alpha$ con $a_i, \alpha \in \mathbb{R}$.

b) Polinomios de Grado par. Sea S los polinomios de la forma $a_0 + a_1 x + \dots + a_{2n-1} x^{2n-1} + a_{2n} x^{2n-1}$. con $a_i \in \mathbb{R}$ y $q(x)$ y $p(x) \in S$, se verifica que

$c_i \in \mathbb{R}$ // Por cerradura de $\mathbb{R}$.

- $p(x) + q(x) \in S$

$$\sum_{i=0}^{2n} a_i x^i + \sum_{i=0}^{2n} b_i x^i = \sum_{i=0}^{2n} a_i x^i + b_i x^i = \sum_{i=0}^{2n} (a_i + b_i) x^i \in S$$

- $$\alpha (p(x)) = \alpha \sum_{i=0}^{2n} a_i x^i = \sum_{i=0}^{2n} \alpha a_i x^i = \sum_{i=0}^{2n} c_i x^i \in S.$$

$\forall a_i, \alpha \in \mathbb{R} \ \exists c_i \mid c_i = a_i \alpha$

Primavera®

2) Si los coeficiente a_i son enteros ¿P_n será un espacio vectorial? ¿Por qué?

- No, cuando hablamos de un espacio vectorial es con respecto a un campo. $\mathbb{Z}$ no es un campo. No forma un grupo Abeliano con respecto a la multiplicación. Específicamente no cuenta con inversos multiplicativos.

Si quisieramos aplicar a otro campo nos encontramos con un problema. Los conjuntos de números que sí forman un campo son los racionales, Reales y complejos que contienen a $\mathbb{Z}$, pero, hay elementos que no se contemplan en $\mathbb{Z}$ con $1/4$, $\sqrt{2}$ o i. A la hora de "escalar" los vectores encontramos que los coeficientes ya no pertencen a $\mathbb{Z}$, por lo que no es cerrado bajo la multiplicación por escalar.

Sea $\alpha \in \mathbb{F} \mid \mathbb{F} = \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

y $q(x) \in P_n' \rightarrow$ Todos los polinomios de grado menor o igual que n. con coeficientes enteros

Nótese que para probar que P_n' NO es un espacio vectorial hace falta un caso donde no cumpla alguna propiedad. Es decir, $\exists\, p(x) \in P_n' \mid \alpha p(x) \notin P_n'$ con $\alpha \in \mathbb{F}$

S...

Sea $\alpha \in \mathbb{F}$ | $\mathbb{F} = \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

y $q(x) \in P'_n \rightarrow$ Todos los polinomios de grado menor o igual que n. con coeficientes enteros

Nótese que para probar que P'_n NO es un espacio vectoriall hace falta un caso donde no cumpla alguna propiedad. Es decir, $\exists\, p'(x) \in P_n' \mid \alpha|p'(x)\rangle \notin P'_n$ con $\alpha \in \mathbb{F}$

Se propone

$$p'(x) = 1 + x + \dots x^{n-1} \in P'_n$$

Ahora, si tomamos $\alpha_i \in \mathbb{F} \setminus \{\alpha_i \in \mathbb{Z}\}$ y escalamos el vector

$$\alpha_i|p'(x)\rangle = \alpha_i + \alpha_i x + \dots + \alpha_i x^{n-1} \notin P'_n$$ Al tratarse de coeficientes no enteros.

Se uso el resultado $\alpha \cdot 1 = \alpha \;\; \forall \alpha \in \mathbb{F}$.

III $\{ \quad p(x) = (a_0 + ax + \dots + a_{n-1}x^{n-1})$

$S = \{ \forall p(x) \in P_n \mid p(0) = 0 \}$

$\forall p(x)$ se verifica que

$x(p'(x)) = p(x) \rightarrow$ El grado de $p(x)$ es el de $p'(x) + 1$.

$x(a_1 + a_2 x + \dots + a_{n-2}x^{n-2}) = (a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-2}x^{n-1})$

Conrndura:

$p(x) + q(x) = (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \dots + (a_{n-2} + b_{n-2})x^{n-1}$

"Prueba plus. Si para cualquier par de $q(x)$ y $p(x) \in S$ se verifica que:

$\alpha(p(x)) + \beta(q(x)) = r(x) \in S$

$$\alpha|p(x)\rangle + \beta|q(x)\rangle = r(x) \in S$$

$$\alpha|p(0)\rangle + \beta|q(0)\rangle = r(0)$$

$$0 = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = r(0) \in S.$$

Nótese que se verifica $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

IV] Todos los polinomios que tienen $a(x-1)$ como factor.

$$S' = \{ \forall p(x) \in P_n' \mid p(1) = 0$$

Se verifica que

$\forall p(x), q(x) \in S'$

$$\alpha p(x) + \beta q(x) = r(x)$$

$$\alpha p(1) + \beta q(1) = r(1)$$

Se verifica $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$

$$0 = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = r(1) \in S'$$