5. Considere...

Queremos buscar una matriz tal que:

$$(A^*)^T = A$$

Cómo debería verse esta matriz?

$A \in M_2(\mathbb{C}) = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix}$ Transponiendo y conjugando se obtiene:

$z_1 = a+bi$
$z_2 = c+di$
$z_3 = e+fi$
$z_4 = g+hi$

$(A^*)^T = \begin{pmatrix} z_1^* & z_2^* \\ z_3^* & z_4^* \end{pmatrix}$

imponiendo la condición para ver la forma "estándar":

Nótese que, para que un número sea igual a su conjugado, este tiene que pertenecer a los Reales, es decir, parte imaginaria igual a cero.

ergo; $z_1 = x$ $\quad \forall x, y \in \mathbb{R}$
$z_4 = y$

Ahora, veamos que se debe cumplir para que:

$z_3^* = z_2$

$e - fi = c + di$

igualando partes

$e = c$
$-f = d$

es decir:

$u - vi$ y $u + vi$

$\forall u, v \in \mathbb{R}$

Construyendo a $H \rightarrow$ ev Matrices Hermíticas.

$= H = \{ M_2(\mathbb{C}) \mid \begin{pmatrix} x & u+vi \\ u-vi & y \end{pmatrix} \; x, y, u, v \in \mathbb{R} \}$

queremos comprobar que $\{\sigma_i\} \cup \{I\}^{2\times 2}$ son una base para H.

- Primero, se debe comprobar la independencia de ellas. Paso ya logrado en la sección anterior.

Ahora, se buscará verificar que $\forall h \in H$ podemos encontrar unos escalares $\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ tal que $h = \alpha^i \sigma_i$

$$\alpha_0\sigma_0 + \alpha_1\sigma_1 + \alpha_2\sigma_2 + \alpha_3\sigma_3 =$$

$$\alpha_0\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} + \alpha_1\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix} + \sigma_2\begin{pmatrix}0 & -i\\i & 0\end{pmatrix} + \sigma_3\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x & u+vi\\u-vi & y\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\alpha_0 + \alpha_3 & \alpha_1 - \sigma_2 i\\ \sigma_1 + \sigma_2 i & \alpha_0 - \alpha_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x & u-vi\\ u+vi & y\end{pmatrix}$$

con (1) en (2)

$$\alpha_0 + \alpha_3 = x \qquad \frac{x-y}{2}$$
$$\alpha_0 - \alpha_3 = y$$

$$2\alpha_0 = x+y$$
$$\alpha_0 = \frac{x+y}{2} \quad (1)$$

$$\sigma_1 - \sigma_2 i = u - yi$$

$$\sigma_1 = u$$
$$\sigma_2 = y$$

—— // —— // —— //

Con esta podemos ver que podemos escribir cualquier matriz en términos de $\{\sigma_i\}$ y se dice que $\{\sigma_i\}$ genera a H!

(Dado que se trabajó en Abstracto y x, y, u y v pueden tomar cualquier valor.)

$\langle a|b\rangle \rightleftarrows T_r(A^{+}B)$

Debe recordarse que: T_r toma las trazas (La suma de los elementos en la diagonal)

- Si $\langle a|b\rangle = 0$ decimos que a y B son ortogonales.

Nótese que para este ejercicio sería de gran ayuda apoyarse de una tabla de Multiplicaciones y herramientas computacionales

$T_r\langle A^{+}B\rangle$	σ_0	σ_1	σ_2	σ_3
σ_0	2	0	0	0
σ_1	0	2	0	0
σ_2	0	0	2	0
σ_3	0	0	0	2

Como la traza suma los elementos fuera de la diagonal son cero, Concluimos que el conjunto de matrices $\{\sigma_i\}$ es ortogonal.

Matriz de Gram

③ Si, Con las matrices $\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_3\}$ puedo construir una sub espacio.

$$\sigma_0\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + \sigma_1\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} + \sigma_3\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$ } Sub-espacio real de dimensión 3

Además, con σ_2 podemos construir hermíticas puramente imaginarias, la ~~variedad~~ única libertad es que $v \neq 0$ componente real.

$$\begin{pmatrix}0 & -vi\\ vi & 0\end{pmatrix} = v\,\sigma_2$$