Partiendo de dos bases ortonormales $\{e_{i'}\}$ y $\{e_j\}$

$e_{i'} \cdot e_j = \cos \hat{\theta}_{\langle i'|j\rangle}$ } Se interpreta como la proyección del vector primado sobre la inicial.

Además, nótese que al formar base, podemos escribir a los vectores $e_{i'}$ como combinación lineal, de esta forma.

$e_{i'} = A^{i'}_j e_j$

Ex/

$e_{i'} = A^{i'}_1 e_1 + A^{i'}_2 e_2 + A^{i'}_3 e_3$

$e^{i'} \cdot e^{i'} = (A^{i'}_j e^j) \cdot (A^{i'}_k e^k)$

$e^{i'} \cdot e^{i'} = A^{i'}_j A^{i'}_k \underbrace{e^j \cdot e^k}_{\delta^k_j}$

$e^{i'} \cdot e^{i'} = (A^{i'}_j)^2 = 1$ ↳ base ortonormal.

$A^{i'\,2}_1 = \cos^2(\alpha)$

$A^{i'\,2}_2 = \cos^2(\beta)$

$A^{i'\,2}_3 = \cos^2(\gamma)$

Comprobación que $A^{i'}_j = \cos \theta_{\langle i'|j\rangle}$

$e_j \cdot e_{i'} = \cos \theta_{\langle i'|j\rangle}$

Nótese que $e_{i'} = A^{i'}_k e_k$ ↳ | Vectores de la base inicial.

$e_j \cdot A^{i'}_k e_k = \cos \theta_{\langle i'|j\rangle}$

$A^{i'}_k e_j \cdot e_k = \cos \theta \langle i'|j\rangle$

Al ser una base ortonormal, tenemos que

$$e_j \cdot e_k \begin{cases} 1 & j = k \\ 0 & j \neq k \end{cases} = \delta^k_j$$

$A^{i'}_k \delta^k_j = \cos \theta \langle i'|j\rangle$

$A^{i'}_j = \cos \theta \langle i'|j\rangle$

$(x,y) \to (-y,x)$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$x' = -y$
$y' = x$ | $A^{j'}_{j}$

$y = -x'$
$x = y'$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} A^{j}_{i'}$

$$A^{i'}_{j} A^{j}_{i'} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

i.e/ Es una base Ortonormal y por lo tanto, transforma el vector en componentes verdaderas.

$(x,y) \to (x,-y)$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$x' = x$
$y' = -y$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$y = -y'$
$x = x'$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$A^{i'}_{j} A^{j}_{i'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

i.e/ Forma una base ortonormal y por consiguiente las componentes del vector en el nuevo sistema son verdaderos.

$(x,y) \to (x-y, x+y)$

$\Rightarrow$

$x' = x - y$
$y' = x + y$ $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} A^{i'}_{j}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} A^{j}_{i'}$

$$A^{i'}_{j} A^{j}_{i'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \neq I$$

i.e/ No son verdaderas componentes, dado que no es ortonormal.

$(x,y) \to (x+y), x-y)$

$x' = x + y$
$y' = x - y$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

i.e/ No es ortonormal no transforma en verdaderas componentes

Teniendo que:

$$x' = y\,\text{sen}\,\theta + x\cos\theta$$
$$y' = y\cos\theta - x\,\text{sen}\,\theta$$
$$z' = z$$

Es fácil observar que:

$$A^{i'}_j = \begin{array}{ccc} A^{1'}_1 & A^{1'}_2 & A^{1'}_3 \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \text{sen}\,\theta & 0 \\ -\text{sen}\,\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Además; como la matriz es invertible el determinante no se anula y se tiene que:

$$x_j = A^{j'}_j x_i \quad \text{con} \quad A^{i}_j = \cancel{\frac{\partial x_j}{\partial x_i}}$$

$$A^{i'}_j A^{v}_{i'} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \text{sen}\,\theta & 0 \\ -\text{sen}\,\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\,\theta & 0 \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(\qquad\right.$$

$$= \begin{pmatrix} \overset{1}{\cancel{\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta}} & \overset{0}{-\cos\theta\,\cancel{\text{sen}\,\theta} + \text{sen}\,\theta\cos\theta} & 0 \\ -\text{sen}\,\theta\,\cancel{\cos\theta} + \text{sen}\,\theta\cos\theta & \underset{1 \quad 0}{\cancel{\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta}} & 0 \\ 0 \quad 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \delta^k_j \begin{cases} 1 & j = k \\ 0 & j \neq k \end{cases}$$