Desarrollo ejercicio Numero 6.

• (a) Compruebe... Que es un espacio Vetorial

- Cerradura bajo la suma

Sean $q = q^{\mu} e_{\mu}$, $p = p^{\mu} e_{\mu}$

$$q + p = (q^{\mu} + p^{\mu}) e_{\mu}$$

↳ Como son reales, es cerrado.

- Existencia del neutro aditivo.

Sea $0 = 0^{\mu} e_{\mu}$ con $0^{\mu} = 0$

$$q + 0 = (q^{\mu} + 0) e_{\mu} = q^{\mu} e_{\mu} = q$$

- Existencia inverso aditivo

$$q + (-q) = (q^{\mu} + (-q^{\mu})) e_{\mu} = 0^{\mu} e_{\mu} = 0.$$

$$q+(-q) = (q^{\mu}+(-q^{\mu}))e_{\mu} = 0^{\mu}e_{\mu} = 0.$$

- Multiplicación por escalares reales.

$$\alpha q = (\alpha q^{\mu})e_{\mu}.$$

Cerradura en $\mathbb{R}$ bajo multiplicaciones.

- Propiedades distributivas.

1. Para escalares.

$$(\alpha+\beta)q = ((\alpha+\beta)q^{\mu})e_{\mu} = (\alpha q^{\mu}+\beta q^{\mu})e_{\mu} = \alpha q+\beta q$$

Para vectores.

$$\alpha(q+p) = \alpha((q^{\mu}+p^{\mu})e_{\mu}) = (\alpha q^{\mu}+\alpha p^{\mu})e_{\mu} = \alpha q+\alpha p$$

• b) Dados dos cuaterniones cualesquiera $|b\rangle = (b^0, \mathbf{b})$ y $|r\rangle = (r^0, \mathbf{r})$ muestre que el producto de estos cuaterniones $|d\rangle = |b\rangle \odot |r\rangle$ podría representarse como:

$$|d\rangle = |b\rangle \odot |r\rangle \longleftrightarrow (d^0, \mathbf{d}) = (b^0 r^0 - \mathbf{b}\cdot\mathbf{r}\, ,\, r^0\mathbf{b} + b^0\mathbf{r} + \mathbf{b}\times\mathbf{r})$$

Demostración:

Sean:

$$|b\rangle = b_0 + b^i|q_i\rangle \quad \text{y} \quad |r\rangle = r_0 + r^j|q_j\rangle$$

$\Longrightarrow$

$$|b\rangle\odot|r\rangle = (b^0 + b^i|q_i\rangle)(r^0 + r^j|q_j\rangle$$

$$b^0r^0 + b^0 r^j|q_j\rangle + b^i|q_i\rangle r^0 + b^i r^j |q_i\rangle|q_j\rangle \qquad (1)$$

Observando la tabla de multiplicaciones y la intervención del producto cruz, sugiere la utilización del símbolo de Levi-Civita. Ahora, descifraremos el "algoritmo" que me devuelva el resultado esperado.

devuelva el resultado esperado.

$\lvert q_i\rangle \odot \lvert q_j\rangle$	$\lvert q_1\rangle$	$\lvert q_2\rangle$	$\lvert q_3\rangle$
$\lvert q_1\rangle$	-1	$\lvert q_3\rangle$	$-\lvert q_2\rangle$
$\lvert q_2\rangle$	$-\lvert q_3\rangle$	-1	$\lvert q_1\rangle$
$\lvert q_3\rangle$	$\lvert q_2\rangle$	$-\lvert q_1\rangle$	-1

$$\lvert q_i\rangle \odot \lvert q_j\rangle = -\delta^i_j + \varepsilon^{kij}\lvert q_k\rangle$$

Sustituyendo en (1)

$$b^0 r^0 + b^0 \mathbf{r} + r^0 \mathbf{b} + b^i r^j\left(-\delta^i_j + \varepsilon^{kij}\lvert q_k\rangle\right)$$

$$b^0 r^0 + b^0 r^j \lvert q_j\rangle + r^0 b^i \lvert q_i\rangle + \left(-b^i r^j \delta^i_j + b^i r^j \varepsilon^{kij}\lvert q_k\rangle\right)$$

$$b^0 r^0 - b^i r^i + b^0 r^k \lvert q_k\rangle + r^0 b^k \lvert q_k\rangle + \varepsilon^{kij} b_i r_j \lvert q_k\rangle$$

$$(b^0 r^0 - b_i r^i), (b^0 r^k + r^0 b^k + \varepsilon^{kij} b_i r_j)\lvert q_k\rangle$$

$$(\underbrace{b^0 r^0 - \mathbf{b}\cdot\mathbf{r}}, \quad \underbrace{b^0\mathbf{r} + r^0\mathbf{b} + \mathbf{b}\times\mathbf{r}})$$

• (c) Ahora, con índices: Dados $|b\rangle = b^{\alpha}|q_{\alpha}\rangle$ y $|r\rangle = r^{\alpha}|q_{\alpha}\rangle$

Comprobar que el producto $|d\rangle = |b\rangle \odot |r\rangle$ puede ser escrito de la forma.

$$|d\rangle = |b\rangle \odot |r\rangle = a|q_0\rangle + S^{(\alpha j)}\delta^{0}_{\alpha}|q_j\rangle + A^{[\alpha k]j} b_j r_k |q_i\rangle$$

Del punto anterior, se obtuvo que:

$$|d\rangle = |b\rangle \odot |r\rangle = \{ b^0 r^0 - b_i r^i |q_0\rangle, + (b^0 r^k + r^0 b^k)|q_k\rangle + \varepsilon^{kij} b_i r_j |q_k\rangle$$

Si identificamos término a término

Término Simetrico.

$a = b^0 r^0 - b^i r^i$

– término simétrico: $S^{(\alpha j)}\delta^{0}_{\alpha}|q_j\rangle$ } funciona como un objeto simetrico en los índices α y j

$b^0 r^k + r^0 b^k \rightarrow$ dado que las letras son mudas, se tiene que $b^0 r^j + r^0 b^j = b^0 r^k + r^0 b^k$

y dado que $r^0 b^j + b^0 r^j = b^0 r^j + r^0 b^j$ decimos que es simétrico y podemos denotarlo con $S^{(\alpha j)}$ donde el paréntesis encapsula las permutaciones entre α y j, además, el simbolo δ^{0}_{α} aparece solo para seleccionar nuestras variables de interes. Para este caso, la parte escalar de los vectores originales

$$b^0 w + r^0 b^j = b^0 r^k + r^0 b^k$$

y dado que $r^0 b^j + b^0 r^j = b^0 r^j + r^0 b^j$ decimos que es simétrico y podemos denotarlo con $S^{(\alpha j)}$ donde el paréntesis encapsula las permutaciones entre αj, además, el símbolo $\int_\alpha^0$ aparece solo para seleccionar nuestras variables de interés. Para este caso, la parte escalar de los vectores originales.

y se llega a que: $S^{(\alpha j)} \int_\alpha^0 |q_j\rangle = b^0 r^k + r^0 b^k$.

Como última parte a equiparar, tenemos a $A^{[jk]i}$ que su naturaleza antimétrica nos recuerda mucho al producto cruz.

$$A^{[jk]i} \rightarrow A^{jki} = -A^{kji} \rightarrow (A^{jki} b_j r_k - A^{kji} b_j r_k) |q_i\rangle$$

Que representan un conjunto de objetos antisimétricos en jk. Permítase notar que es exactamente lo que testa en nuestra ecuación, producto cruz.

$\varepsilon^{ijk} b_j r_k \Rightarrow -\varepsilon^{ikj} r_k b_j$ Por lo que son equivalentes y se obtiene que:

$$\varepsilon^{kij} b_i r_j |q_k\rangle = \varepsilon^{jik} b_i r_k |q_j\rangle = A^{[jk]i} b_j r_k |q_k\rangle$$

Demostración.

$\varepsilon^{ijk} = -\varepsilon^{ikj}$

$\varepsilon^{ijk} \begin{cases} 1 & \text{(orden cíclico) Número Par de Cambios} \\ -1 & \text{(Orden anticíclico) Número impar de Cambios} \\ 0 & i=j \wedge k=i \end{cases}$

$(\overset{1}{i}, \overset{2}{j}, \overset{3}{k})$

d) Identifique las cantidades $S^{(ij)}$, $A^{[jk]i}$ ... Vector o pseudo vector.

Hace falta analizar cómo transforma el componente vectorial d^i bajo paridad (inversión espacial P: $x \to -x$

- r^0 y b^0 Son escalares, no cambian bajo P.

Como bajo P una cambia de signo y la otra no

No podemos clasificarlo como vector o pseudovector.

$d^i = r^0 b^i + b^0 r^i + \varepsilon^{ijk} b_j r_k$

Parte Polar, cambia de signo bajo paridad.

No cambia de signo bajo P.

e)

Primero, veamos una definición algebraica de lo que son los cuaterniones

$\mathbb{H} \to$ Tiene dimensión 4 y tienen como base a los vectores. $\{1, \hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$

Queremos demostrar que las matrices $\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ pueden ser una base para $\mathbb{H}$ si cumplen las mismas propiedades algebraicas que $\{1, \hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$

Primero, se debe verificar la independencia lineal de $\{\sigma_i\}$ $i = 1 \ldots 4$.

$a^i \sigma_i = 0$

$$a^0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + a^1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a^2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + a^3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) $a^0 - a^3 = 0$
(2) $a^0 + a^3 = 0$
(3) $a^1 - ia^2 = 0$
(4) $a^1 + ia^2 = 0$

De ellos, se evidencia que la única solución al sistema es cuando $a^0, a^1, a^2, a^3 = 0$.

Una vez mostrado que son L.I. queda probar si los grupos son isomorfos con ayuda de tablas de multiplicación.

- "Las Matrices Complejas pueden ser consideradas como cuaterniones"

$$\begin{pmatrix} z & w \\ -w^* & z^* \end{pmatrix} \quad z = x + yi \quad w = a + bi$$

Ahora solo basta con ver si puedo escribir cualquier matriz de esa forma en virtud de la base anterior

$$a_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + a_4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} x+iy & a+ib \\ -a+ib & x-iy \end{pmatrix}$$

$$a_1 + a_4 = x + iy$$

$$a_1 - a_4 = x - iy$$

$$a_2 - i a_3 = a + ib$$

$$a_2 + i a_3 = -a + ib.$$

Es tarea fácil ver que tiene solución. Por lo que se puede concluir que esta matriz compleja si es un cuaternión.

• f) Muestre...- $\{1, \hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}\}$

Primero, se asignarán vectores de la base $|\hat{\imath}_i\rangle$ con las propuestas $|q_i\rangle$. Entonces, decimos que:

$\hat{\imath} = i_1$ corresponde a $|q_1\rangle$

$\hat{\jmath} = \hat{\imath}_2$ corresponde a $|q_2\rangle$

$\hat{k} = \hat{\imath}_3$ Corresponde a $|q_3\rangle$

y $\hat{\imath}_0$ Correspondería entonces a la identidad.

Ahora, con ayuda de la tabla de multiplicaciones, verificamos que se cumplan las propiedades algebraicas de los cuaterniones.

$\odot$	$\hat{\imath}_1$	$\hat{\imath}_2$	$\hat{\imath}_3$
$\hat{\imath}_1$	-1	$\hat{\imath}_3$	$-\hat{\imath}_2$
$\hat{\imath}_2$	$-\hat{\imath}_3$	-1	$\hat{\imath}_1$

En primeras instancias, se verificará que el cuadrado de nuestros elementos nos "devuelva" el negativo de nuestra identidad.

$$|q_1\rangle^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$$

que se cumplan las propiedades algebraicas de los cuaterniones.

$\odot$	$\hat{\imath}_1$	$\hat{\imath}_2$	$\hat{\imath}_3$
$\hat{\imath}_1$	-1	$\hat{\imath}_3$	$-\hat{\imath}_2$
$\hat{\imath}_2$	$-\hat{\imath}_3$	-1	$\hat{\imath}_1$
$\hat{\imath}_3$	$\hat{\imath}_2$	$-\hat{\imath}_1$	-1

En primeras instancias se verificara que el cuadrado de nuestros elementos nos "devuelva" el negativo de nuestra identidad.

$$|q_1\rangle^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$$

equivalente a $i^2 = -1$.

$$|q_2\rangle^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I \; \} \; \hat{\jmath}^2 = -1$$

$$|q_3\rangle^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I \; \} \; \hat{k}^2 = -1$$

Producto $|q_1\rangle|q_2\rangle$

$$|q_1\rangle|q_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = |q_3\rangle \Big\} ij = k$$

$$|q_2\rangle|q_3\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = |q_1\rangle \Big\} jk = \hat{i}$$

$$|q_3\rangle|q_1\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = |q_2\rangle \Big|$$

- Dado que las matrices no son diagonales y además $\neq I$ se tiene que $AB=-BA$ verificando así todos los elementos de la tabla.

+3 +1

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = |q_2\rangle$$

- Dado que los matrices no son diagonales y además $\neq I$ se tiene que $AB=-BA$, verificando así todos los elementos de la tabla.

De esta forma se muestra que $|q_i\rangle$, $i=1,2,3$ junto con la matriz identidad satisface todas las relaciones fundamentales de los cuaterniones, y por lo tanto es una representación matricial válida.

• g)

Para verificar que, representa una buena definición de producto interno. Debemos verificar las propiedades de producto interno.

$\langle a|b\rangle = |a\rangle^{+} \odot |b\rangle$

Veamos la forma de los elementos.

$|a\rangle = a_0 + a^i|q_i\rangle \; ; \; |a\rangle^{+} = a_0 - a^i|q_i\rangle$

Primero, verificaremos las propiedades vistas en la sección 2.2.3.1

1ra $\langle a|a\rangle = |a\rangle^{+} \odot |a\rangle$

$= (a_0 - a^i|q_i\rangle)(a_0 + a^i|q_i\rangle) = a_0^2 - (a^i)^2|q_i\rangle^2$ $\quad -1 \; \forall q_i$

"Diferencia de cuadrados" $= a_0^2 - (a^i)^2(-1)$

$= a_0^2 + (a^i)^2$

$= a_0^2 + (a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2 = \in \mathbb{R}$

y además, $\langle a|a\rangle \geq 0 \quad \forall a \in \mathbb{H}$

2da Propiedad.

$\langle a|b\rangle = \langle b|a\rangle^{+}$

$\langle a|b\rangle = (a_0 - a^i|q_i\rangle)(b^0 + b^i|q_i\rangle) = (a_0 b_0 - a_i b_i|q_i\rangle^2 + \text{term}_2$

$\nearrow \sqrt{|q_i|}$

$= (a_0 b_0 + a_i b_i) + a_0 b_i|q_i\rangle - b^0 a^i|q_i\rangle$

$(a_0 b_0 + a^i b^i) + (a^0 b^i - b^0 a^i)|q_i\rangle$

$\langle b|a\rangle = (b^0 - b^i|q_i\rangle)(a^0 + a^i|q_i\rangle)$

$= (a^0 b^0 + a^i b^i) + (b^0 a^i|q_i\rangle - a^0 b^i|q_i\rangle)$

(ii) $= (a^0 b^0 + a^i b^i) + (b^0 a^i - a^0 b^i)|q_i\rangle = \langle b|a\rangle$

$\triangleright (a^0 b^0 + a^i b^i) - (b^0 a^i - a^0 b^i)|q_i\rangle = \langle b|a\rangle^*$

$= (a^0 b^0 + a^i b^i) + (a^0 b_i - b^0 a^i)|q_i\rangle = \langle b|a\rangle^* = \langle a|b\rangle$

3er Propiedad:

$$\langle a|\alpha b+\gamma c\rangle = \alpha\langle a|b\rangle + \gamma\langle a|c\rangle$$

$$\langle a|\alpha b+\gamma c\rangle = (a_0 - a^i|q_i\rangle)\,[(\alpha b_0+\gamma c_0)+(\alpha b^i+\gamma c^i)|q_i\rangle]$$

$$(a_0(\alpha b_0+\gamma c_0) + a_0(\alpha b^i+\gamma c^i)|q_i\rangle - a^i|q_i\rangle(\alpha b_0+\gamma c_0)$$

Cómo se ve

$$+(a^i(\alpha b^i+\gamma c^i)|q_i\rangle^2 \quad \forall |q_i\rangle \in H$$

$$(\alpha b_0+\gamma c_0)+(\alpha b^i+\gamma c^i)|q_i\rangle$$

$$+a^i(\alpha b^i+\gamma c^i)$$

$$\alpha a_0 b_0 + \gamma a_0 c_0 + \alpha a_0 b^i|q_i\rangle + \gamma a_0 c^i|q_i\rangle - \alpha a^i b_0|q_i\rangle - \gamma a^i c_0|q_i\rangle +$$

$$\alpha a^i b^i + \gamma a^i c^i$$

Igualando partes escalares y vectoriales

$$(\alpha a_0 b_0 + \alpha a^i b^i) + (\alpha a_0 b^i|q_i\rangle - \alpha a^i b_0|q_i\rangle) + (\gamma a_0 c_0 + \gamma a^i c^i) + (\gamma a_0 c^i|q_i\rangle - \gamma a^i c_0|q_i\rangle)$$

$$\alpha(a_0 b_0 + a^i b^i + a_0 b_i|q_i\rangle - a_i b_0|q_i\rangle) + \gamma(a_0 c_0 + a^i c^i + a_0 c^i|q_i\rangle - a^i c_0|q_i\rangle)$$

$$\alpha(a_0 - a^i|q_i\rangle)(b_0 + b^i|q_i\rangle) + \gamma(a_0 - a^i|q_i\rangle)(c_0 + c^i|q_i\rangle)$$

$$\alpha \langle a|b\rangle + \gamma \langle a|c\rangle$$

4ta Propiedad

$$\langle \alpha a + \beta b | c\rangle = (\alpha a_0 + \beta b_0) - (\alpha a_i + \beta b_i)|q_i\rangle (c_0 + c^i|q_i\rangle)$$

$$(\alpha a_0 + \beta b_0)c_0 + (\alpha a_0 + \beta b_0)c^i|q_i\rangle - (\alpha a^i + \beta b^i)|q_i\rangle c_0 + (\alpha a^i + \beta b^i)c^i$$

$$\alpha a_0 c_0 + \beta b_0 c_0 + \alpha a_0 c^i|q_i\rangle + \beta b_0 c^i|q_i\rangle - \alpha a^i|q_i\rangle c_0 - \beta b^i|q_i\rangle c_0 + \alpha a^i c^i + \beta b^i c^i$$

$$(\alpha a_0 c_0 + \alpha a^i c^i + \alpha a_0 c^i|q_i\rangle - \alpha a^i|q_i\rangle c_0) + (\beta b_0 c_0 + \beta b^i c^i + \beta b_0 c^i|q_i\rangle - \beta b^i|q_i\rangle c_0$$

$$\alpha\underbrace{(a_0 c_0 + a_0 b^i|q_i\rangle - a^i|q_i\rangle c_0 - (a^i c^i|q_i\rangle)^2)}_{\langle a|c\rangle} + \beta\underbrace{(b_0 c_0 + b_0 c^i|q_i\rangle - b^i|q_i\rangle c_0 - (b^i c^i|q_i\rangle)^2)}_{\langle b|c\rangle}$$

$$= \alpha\langle a|c\rangle + \beta\langle b|c\rangle$$

$$= \alpha^*\langle a|c\rangle + \beta^*\langle b|c\rangle$$

dado que $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\alpha^*, \beta^* = \alpha, \beta$; respec...

• h) Verificacion propiedades.

1ra.

$$\langle a|a\rangle = \frac{1}{2}\left[\langle \widehat{a|a}\rangle - |q_1\rangle \odot \langle \widehat{a|a}\rangle \odot |q_1\rangle\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[a_0^2 + a_i^2 - |q_1\rangle \odot \left(\left(a_0^2 + a_i^2\right)|q_1\rangle\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[a_0^2 + a_i^2 \left(\left(a_0^2 + a_i^2\right)|q_1\rangle - |q_1\rangle^2 \left(a_0^2 + a_i^2\right)\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(a_0^2 + a_i^2\right)^2 |q_1\rangle + \left(a_0^2 + a_i^2\right)\right] \geq 0 \quad \forall a_i \in \mathbb{R} \qquad i = \overline{a \quad 3}$$

2da.

$$\langle a|b\rangle = \frac{1}{2}\left[\langle \widehat{a|b}\rangle - |q_1\rangle \odot \langle \widehat{a|b}\rangle \odot q_1\right] = \frac{1}{2}\left[x - q_1 \, x \, q_1\right]$$

$$\langle \widehat{a|b}\rangle = c_0 + c^i|q_1\rangle = x$$

$$\underbrace{(a_0 b_0 + a^i b^i)}_{c_0} + \underbrace{(a^0 b^i - b^0 a^i)}_{c^i}|q_1\rangle$$

Demostracion

$$\frac{1}{2}\left[x - q_1 \, x \, q_1\right] = x_0 + x_1 q_1$$

Primero, escribimos cualquier vector generico en la base $\{1, i, j, k\} \equiv \{q_q\}$ $i = 0, 3$

$$\langle \hat{q} | b \rangle = c_0 + c^i | q_i \rangle = \boxed{x}$$

$$(q_0 b_0 + a^i b^i) + (a^0 b^i - b^0 a^i) | q_i \rangle$$

$$c_0 \quad + \quad c^i$$

Demostración

$$\frac{1}{2}\left[x - q_1 x q_1 \right] = x_0 + x_1 q_1$$

Primero, escribimos cualquier vector genérico en la base $\{1, i, j, k\} \equiv \{q_i\}$ $i = 0, 3$

$$x = (x_0 + x^i | q_i \rangle)$$

Operando con ⊙ a x por q_1 por derecha se obtiene

$$x | q_1 \rangle = (x_0 | q_1 \rangle + x^i | q_i \rangle | q_j \rangle)$$

$$x | q_1 \rangle = (x_0 | q_i \rangle + x^i (- \delta^j_i + \varepsilon_{ijk} \, q_k)$$

$$x | q_1 \rangle = x_0 | q_1 \rangle + x^i (- \delta^1_i + \varepsilon_{i1k} | q_k \rangle)$$

$$x | q_1 \rangle = x_0 | q_1 \rangle + [- \delta^1_i x^i + x^i \varepsilon_{i1k} | q_k \rangle]$$

$$x | q_1 \rangle = x_0 | q_1 \rangle + (- x^1 + x^2 q^3 + x^3 q_2)$$

Multiplicando a $|q_1\rangle$ por izquierda

$$|q_1\rangle x |q_1\rangle = - x^0 q_0 - x^1 q_1 + x^2 q_2 + x^3 q_3$$

$$x - |q_1\rangle x |q_1\rangle =$$

$$= 2 x^0 q_0 + 2 x^1 q_1$$

$$\frac{1}{2} (x - |q_1\rangle x |q_1\rangle) = x^0 q_0 + x^1 q_1$$

Es decir: $\langle a|b\rangle = x_0 + x_1|q_1\rangle$

$\langle b|a\rangle =$

$$y = \underbrace{(b^0 a^0 + b^1 a^1)}_{y_0} + \underbrace{(b^0 a^1 - a^0 b^1)}_{y}|q_1\rangle$$ utilizando el resultado

Anteriormente, mostramos como este producto interno equivale "a la parte compleja"

$$\langle b|a\rangle = y_0 + y^1|q_1\rangle$$

$$y_0 = (b^0 a^0 + b^1 a^1) = x_0$$

$$y^1 = (b^0 a^1 - a^0 b^1) = -(a^0 b^1 - b^0 a^1) = -x_1$$

Conjugando $\langle b|a\rangle^+$ se obtendría que $-y^1 = -x^1$ $\downarrow$ $x^1 = y^1$

→ Por lo que tanto parte escalar y ~~vectorial~~ compleja son equivalentes, es decir, $y = x$

3ra. $\langle a | \beta b + \gamma c \rangle = z_0 + z^1 |q_1\rangle$

$$z = \underbrace{(a_0(\beta b_0 + \gamma c_0))}_{z_0} + \underbrace{(a^0(\beta b^1 + \gamma c^1) - (\beta b^0 + \gamma c^0) a^1)}_{z^1} |q_1\rangle$$

$$z^1 |q_1\rangle$$

$$\text{De } (1) = a_0 \beta b_0 + a_0 \gamma c_0 + a^0 \beta b^1 + a^0 \gamma c^1 + a^1 \gamma c^0 - a^1 \beta b^0$$

$$\underbrace{a_0(\beta b_0 + \gamma c_0)}_{z_0} + \underbrace{(a^0(\beta b^1 + \gamma c^1) - (\gamma c^0 + \beta b^0) a^1)}_{z_1} |q_1\rangle$$

$$z_1 |q_1\rangle$$

$$\beta \langle a | b \rangle + \gamma \langle a | c \rangle$$

$$\beta (x_0 + x^1 |q_1\rangle) + \gamma (y_0 + y^1 |q_1\rangle)$$

$$(1) \;\; \beta ((a^0 b^0 + b^1 a^1) + (a^0 b^1 - b^0 a^1)|q_1\rangle) + (\gamma ((a^0 c^0 + c^1 a^1) + (c^1 a^0 - a^1 c^0) |q_1\rangle$$

$a_2 + 10a_3 = \ldots$

i) Compruebe...

$n(|a\rangle) = \|a\| = \sqrt{\langle a|a\rangle} = \sqrt{|a\rangle^* \circ |a\rangle}$

Inicialmente, mostraremos que

$\||v_1\rangle\| \geq 0$ } solo es cero si $|v_1\rangle \equiv 0$

$|a\rangle^* \circ |a\rangle = (a_0 - a^i |q_i\rangle)(a_0 + a^i |q_i\rangle)$

diferencia de cuadrados.

$n(|a\rangle) =$

$\sqrt{a_0^2 + a_i^2}$

$(a_0^2 - (|q_i\rangle)^2 a^{i\,2})$ con $(|q_i\rangle)^2 = -1$

$a_0^2 + a_i^2 \geq 0 \ \forall \ a_i \in \mathbb{R}^2$

Además, la raíz me exige la existencia de un número positivo además debe verse que solo es cero si $a_i^2 = 0 \} \Leftrightarrow a_i = 0 \ \forall i \in \{1,2,3\}$.

$\|a|v_i\rangle\| = |a| \, \||v_i\rangle\|$

$\|\alpha|v_1\rangle\|^2 = \|\alpha(b_0 + \vec{b})\|^2 = (\alpha b_0 + \alpha\vec{b}) \circ / \alpha(b_0 + \alpha\vec{b})$

$= \alpha^2(b_0^2 - \vec{b} \circ \vec{b})$

$= \alpha^2 \||v_i\rangle\|^2$

con

$\langle p, q\rangle \leq \|p\| \, \|q\|$

$\||v_i\rangle\|^2 + \||v_j\rangle\|^2 + 2\langle v_i, v_j\rangle \leq \||v_i\rangle\|^2 + \||v_j\rangle\|^2 + 2 \||v_i\rangle\| \, \||v_j\rangle\|$

$\||v_i\rangle + |v_j\rangle\| \leq \||v_i\rangle\| + \||v_j\rangle\|$ //

Desigualdad triangular (Dualidad I)

$$\| |a\rangle + |b\rangle \|^2 = \| (a_0 + b_0) + (\vec{a} + \vec{b}) \|$$

$$\| (a_0 + b_0) + (\vec{a} + \vec{b}) \| =$$

$$((a_0 + b_0) - (\vec{a} + \vec{b})) \circ ((a_0 + b_0) + (\vec{a} + \vec{b}))$$

$$(a_0 + b_0)^2 - (a_i + b_i) | q_i | (a_i b_i) | q_i)$$

$$(a_0^2 + b^2) + (a_i + b_i)^2$$

$$= a_0^2 + b_0^2 + 2a_0 b_0 + a_i^2 + b_i^2 + 2a b_0$$

1) Compruebe...

$|\bar{a}\rangle = \frac{|a\rangle^*}{\|a\|^2}$ } Puede ser con ... el inverso

$|\bar{a}\rangle = \left(\frac{(a_0 - a_i|q_i\rangle)}{a_\alpha^2} \right)$

$|\bar{a}\rangle \odot |a\rangle = \left(\frac{(a_0 - a_i|q_i\rangle}{a_\alpha^2} \right) \odot (a_0 + a^i|q_i\rangle = \left(\frac{a_0}{a_\alpha^2} - \frac{a_i|q_i\rangle}{a_\alpha^2} \right) \odot$

$\frac{a_0^2}{a_\alpha^2} + \frac{a_0\, a^i|q_i\rangle}{a_\alpha^2} - \frac{a_i|q_i\rangle(a_0)}{a_\alpha^2} - \frac{a^i|q_i\rangle}{a_\alpha^2} \left(a_i|q_i\rangle a_0 + a^i|q_i\rangle \right.$

$= \frac{a_0^2}{a_\alpha^2} - \frac{a_i^2}{a_\alpha^2}(-1) = \frac{a_0^2 + a_i^2}{a_\alpha^2} = \frac{a_\alpha^2}{a_\alpha^2} = 1$

1) Comprobar si el siguiente producto conserva la norma.

$$||(v'||^2 = ||v'||^2 = ||V||^2$$

$$|v'\rangle = \overline{|a\rangle} \odot |V\rangle \odot |a\rangle$$ } Como es grupo, es asociativo.

Para demostrar lo anterior, será de utilidad notar que

$$|| |p\rangle \odot |q\rangle || = || |p\rangle || \; || |q\rangle ||$$

$$|| |p\rangle \odot |q\rangle ||^2 = \overline{|p\rangle \odot |q\rangle} \odot (|p\rangle \odot |q\rangle)$$

$$= (|q\rangle^* \odot |p\rangle^*) \odot (|p\rangle \odot |q\rangle)$$

$$= |q\rangle^* \odot (|p\rangle^* \odot |p\rangle \odot |q\rangle)$$

$$|q\rangle^* \odot ||p||^2 \odot |q\rangle$$

$$||p||^2 \; ||q||^2$$

$$\overline{|p\rangle \odot |q\rangle}$$

$$(p_0 q_0 - \vec{p}\vec{q},\; p_0\vec{q} + q_0\vec{p} + \vec{p}\times\vec{q})$$

$$\rightarrow (p_0 q_0 - \vec{p}\vec{q},\; -p_0\vec{q} - q_0\vec{p} - \vec{p}\times\vec{q})$$

$$\overline{|q\rangle} \odot \overline{|p\rangle}$$

$$(p_0 q_0 - \vec{q}\vec{p},\; q_0(-\vec{p}) + p_0(-\vec{q}) +$$

$$(-\vec{q}) \times (-\vec{p}))$$

$$= p_0 q_0 - \vec{q}\vec{p}\;\; (q_0 - \vec{p}) - p_0\vec{q} -$$

$(p_0 q_0 - \vec{q}\,\vec{p},\ q_0(-\vec{p}) + p_0(-\vec{q}) +$

$(-\vec{q}) \times (-\vec{p})$

$= p_0 q_0 - \vec{q}\,\vec{p}\ (q_0 - \vec{p}) - p_0 \vec{q} -$

$\vec{p} \times \vec{q}$

Entonces:

$\| |v'\rangle \| = \left\| \frac{|a\rangle''}{\|a\|^2} \odot |v\rangle \odot |a\rangle \right\|$

$\left\| \cancel{\frac{|a\rangle''}{\|a\|^2}} \| |v\rangle \| \cancel{\| |a\rangle \|} \right\| = \| v \|$