Apunte Modelos y Optimización - FIUBA

lcondoriz

Agosto 2023

Índice

1. Introducción a la construción de modelos **3**
1.1. Modelos prescriptivos o de optimización 3
1.2. Modelos estáticos y dinámicos 3

2. Programación lineal **3**
2.1. Regiones factibles y solución óptima 7
2.2. Restricciones activas 7
2.3. Casos especiales 7

3. Algoritmo simplex **7**
3.1. Convertir un PL en forma estandar 7

4. Guía de ejercicios **8**
4.1. Guía 1 8

1. Introducción a la construción de modelos

La investigación de operaciones (IO) es, simplemente, un enfoque científico en la toma de decisiones que busca el mejor diseño y operar un sistema.

Por **sistema**, se quiere dar a entender una organización de componentes interdependientes, que trabajan juntos para lograr el objetivo del sistema.

El en enfoque científico de toma de decisiones, se requiere el uso de uno o más **modelos matemáticos**.

1.1. Modelos prescriptivos o de optimización

Este tipo de modelos dicta el comportamiento para la organización que le permitirá alcanzar sus objetivos.

Elementos de un modelo de optimización:

- **Función objetivo:** es una función matemática de las variables de decisión que se debe maximizar o minimizar.
- **Variables de decisión:** son las variables que se pueden controlar para lograr los objetivos del sistema.
- **Restricciones:** son las limitaciones que se deben satisfacer.

Un modelo de optimización trata de encontrar valores, entre el conjunto de todos los valores para las variables de decisión, que optimicen (maximicen o minimicen) la función objetivo, y que satisfagan las restricciones.

1.2. Modelos estáticos y dinámicos

Un modelo estático es aquel que no considera el paso del tiempo. Un modelo dinámico, en cambio, sí lo hace.

Un modelo dinámico puede ser **determinístico** o **estocástico**. Un modelo determinístico es aquel en el que todos los parámetros son conocidos. Un modelo estocástico es aquel en el que al menos un parámetro es desconocido.

2. Programación lineal

La programción lineal (PL) es una herramienta para resolver problemas de optimización.

Ejemplo 2.1. Glapetto's Woodcarving (Juguetes de madera Giapetto)
Giapetto's Woodcarving, Inc., manufactura dos tipos de juguetes de madera: soldados y trenes. Un soldado se vende en 27 dólares y requiere 10 dólares de materia prima. Cada soldado que se fabrica incrementa la mano de obra variable y los costos globales de Giapetto en 14 dólares. Un tren se vende en 21 dólares y utiliza 9 dólares de su valor en materia prima. Todos los trenes fabricados aumentan la mano de obra variable y los costos globales de Giapetto en 10 dólares. La fabricación de soldados y trenes de madera requiere dos tipos de mano de obra especializada: carpintería y acabados. Un soldado necesita dos horas de trabajo de acabado y una hora de carpinteria. Un tren requiere una hora de acabado y una hora de carpinteria. Todas las semanas, Giapetto consigue todo el material necesario, pero sólo 100 horas de trabajo de acabado y 80 de carpinteria. La demanda de trenes es ilimitada, pero se venden cuando mucho 40 soldados por semana. Giapetto desea maximizar las

utilidades semanales (ingresos - costos). Diseñe un modelo matemático para la situación de Giapetto que se use para maximizar las utilidades semanales de la empresa.

Solución:

- **Variables de decisión** Se debe decidir cuántos soldados y trenes se deben fabricar cada semana.

$$\begin{aligned} x_1 &= \text{ número de soldados fabricados por semana.} \\ x_2 &= \text{ número de trenes fabricados por semana.} \end{aligned} \tag{1}$$

- **Función objetivo** Se desea maximizar las utilidades semanales de la empresa.

$$\begin{aligned} \text{Ingresos por semana} &= \text{Ingresos por soldados} + \text{Ingresos por trenes} \\ &= \left(\frac{\text{dólares}}{\text{soldado}}\right) \cdot \left(\frac{\text{soldados}}{\text{semana}}\right) + \left(\frac{\text{dólares}}{\text{tren}}\right) \cdot \left(\frac{\text{trenes}}{\text{semana}}\right) \\ &= 27 \cdot x_1 + 21 \cdot x_2 \end{aligned} \tag{2}$$

  Asimismo

$$\begin{aligned} \text{Costo de la materia prima a la semana} &= 10 \cdot x_1 + 9 \cdot x_2 \\ \text{Otros costos variables a la semana} &= 14 \cdot x_1 + 10 \cdot x_2 \end{aligned} \tag{3}$$

  Entonce, se quiere maximizar

$$\begin{aligned} \text{Utilidades semanales} &= \text{Ingresos semanales} - \text{Costos semanales} \\ &= 27 \cdot x_1 + 21 \cdot x_2 - (10 \cdot x_1 + 9 \cdot x_2 + 14 \cdot x_1 + 10 \cdot x_2) \\ &= 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \end{aligned} \tag{4}$$

  La función objetivo es

$$\text{Maximizar } z = 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \tag{5}$$

- **Restricciones:**
  - Restricción 1: Se puede usar cada semana no más de 100 horas de tiempo de acabado.
  - Restricción 2: Cada semana se puede usar no más de 80 horas de tiempo de carpintería.
  - Restricción 3: Debido a la demanda limitada, cuando mucho se debe producir cada semana 40 soldados.

  La cantidad de materia prima en existencia es ilimitada, asi que no hay restricción alguna relacionada con eso.

  Para expresar la restricción 1 de acuerdo con x_1 y x_2.

$$\begin{aligned} \frac{\text{Total de horas de acabado}}{\text{Semana}} &= \left(\frac{\text{horas de acabado}}{\text{soldado}}\right) \cdot \left(\frac{\text{soldados frabricados}}{\text{semana}}\right) \\ &+ \left(\frac{\text{horas de acabado}}{\text{tren}}\right) \cdot \left(\frac{\text{trenes frabricados}}{\text{semana}}\right) \\ &= 2 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \end{aligned} \tag{6}$$

Entonces, la restricción 1 se puede expresar como

$$2 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \leq 100 \tag{7}$$

Para la restricción 2 en términos de x_1 y x_2.

$$\begin{aligned}\frac{\text{Total de horas de carpintería}}{\text{Semana}} &= \left(\frac{\text{horas de carpintería}}{\text{soldado}}\right) \cdot \left(\frac{\text{soldados fabricados}}{\text{semana}}\right) \\ &+ \left(\frac{\text{horas de carpintería}}{\text{tren}}\right) \cdot \left(\frac{\text{trenes fabricados}}{\text{semana}}\right) \\ &= 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2\end{aligned} \tag{8}$$

Entonces, la restricción 2 se puede expresar como

$$1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \leq 80 \tag{9}$$

Para la restricción 3 en términos de x_1 y x_2.

$$x_1 \leq 40 \tag{10}$$

- **Restricciones de signo**

$$\begin{aligned} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{aligned} \tag{11}$$

Presentamos el modelo de PL para el problema de Giapetto's Woodcarving.

$$\text{Maximizar } z = 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \tag{12}$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 \leq 100 &\quad \text{(Restricción de acabado)} \\ x_1 + x_2 \leq 80 &\quad \text{(Restricción de carpintería)} \\ x_1 \leq 40 &\quad \text{(Restricción de demanda)} \\ x_1 \geq 0 &\quad \text{(Restricción de signo)} \\ x_2 \geq 0 &\quad \text{(Restricción de signo)} \end{aligned} \tag{13}$$

Ahora vamos a resolver el problema de Giapetto's Woodcarving.

Usando la región factible se busca la solución óptima, la cual es el punto de la región factible con el valor más grande de $z = 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2$. En este caso, la solución óptima es, recta roja gráfico, punto C:

$$x_1 = 20, \quad x_2 = 60, \quad z = 180 \tag{14}$$

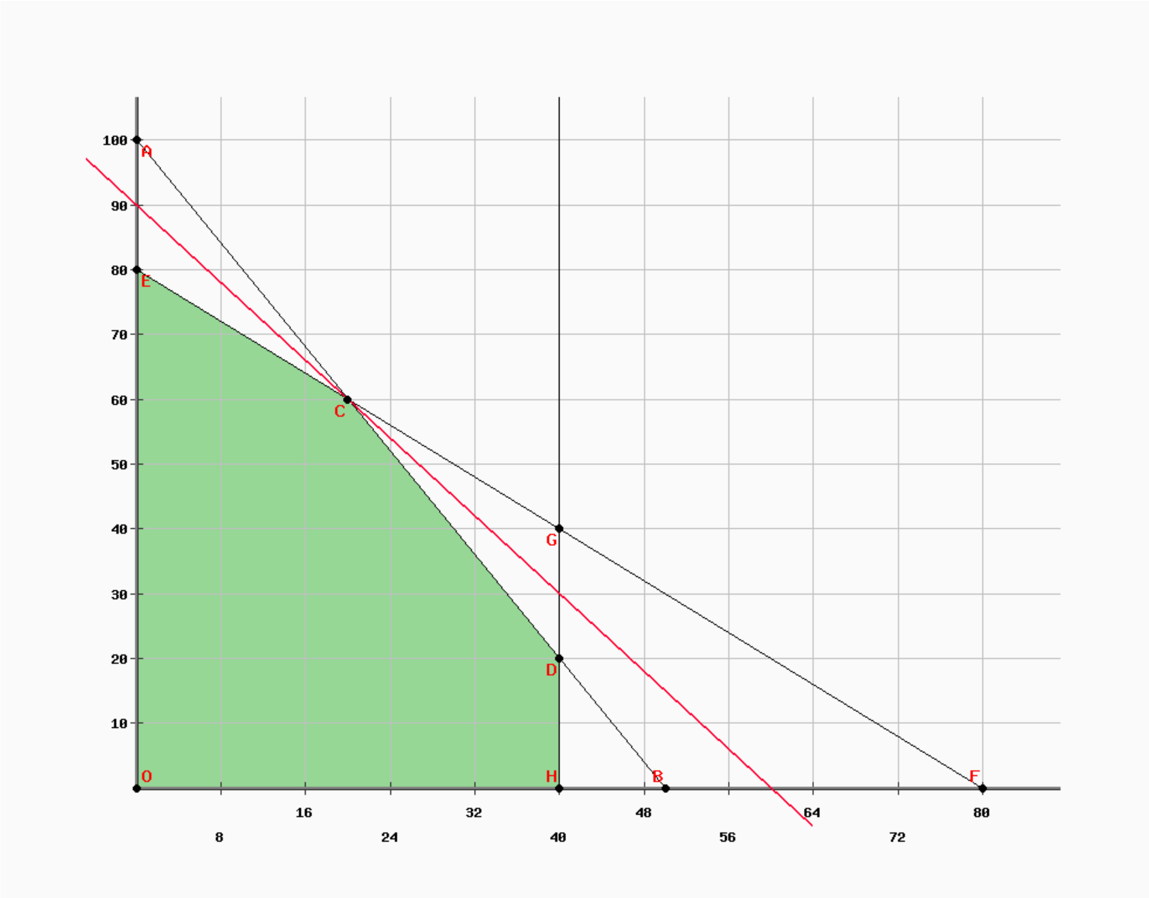

Figura 1: Región factible para el problema de Giapetto's Woodcarving.

Definición 2.1: Problema de programación lineal

Un problema de programación lineal (PL) es un problema de optimización para el cual se efectúa lo siguiente:

1. Se intenta maximizar (minimizar) una función lineal de las variables de decisión. La función lineal se llama **función objetivo**.

2. Los valores de las variables de decisión deben satisfacer un conjunto de restricciones. Cada restricción debe ser una ecuación lineal o una inecuación lineal.

3. Se relaciona un *restricción de signo* con cada variable de decisión.

2.1. Regiones factibles y solución óptima

Definición 2.1. (Región factible) La región factible para una PL, es el conjunto de todos los puntos que satisfacen las limitaciones y las restricciones de signo de la PL.

Definición 2.2. (Solución óptima) Para un problema de maximización, una solución óptima para una PL es un punto con el valor de la función objetivo más grande en la región factible. De igual manera, para un problema de minimización, una solución óptima es un punto con el valor de la función objetivo más pequeño en la región factible.

2.2. Restricciones activas

Definición 2.3. (Restricciones activas) Una restricción es activa u obligatoria si tanto el primero como el segundo miembro de las restricciones son iguales cuando los valores óptimos de las variables de decisión se sustituyen en la restricción.

Definición 2.4. (Restricciones inactiva) Una restricción es inactiva si no son iguales el primero y el segundo miembro de la restricción cuando los valores óptimos de las variables de decisión se sustituyen en la restricción.

En el Ejemplo 2.1,

$$\begin{aligned} 2 \cdot \overbrace{(20)}^{x_1} + \overbrace{(60)}^{x_2} &= 100 \quad &\text{(Restricción activa)} \\ (20) + (60) &= 80 \quad &\text{(Restricción activa)} \\ (20) &\leq 40 \quad &\text{(Restricción inactiva)} \end{aligned} \tag{15}$$

2.3. Casos especiales

Tres tipos de PL que no tienen solución óptima única:

1. Tienen un número infinito de soluciones óptimas. (*soluciones óptimas múltiples o alternativas*)
2. No tienen soluciones factibles. (*soluciones no factibles*)
3. Son no acotadas: hay puntos en la región factible con valores z arbitrariamente grandes (en problemas de maximización).

Ejemplo 2.2.

3. Algoritmo simplex

El algoritmo simplex se usa para resolver PL que tienen muchas variables y restricciones.

3.1. Convertir un PL en forma estandar

Definición 3.1. (PL forma estándar) Un PL está en forma estándar si:

- Las restricciones son de igualdad.
- Las variables de decisión son no negativas.

Ejemplo 3.1. (Leather Limited)

4. Guía de ejercicios

4.1. Guía 1

Ejercicio 4.1. Una pequeña empresa de productos químicos debe consumir más de 40 M^3/mes de un determinado alcohol, debido a que ha firmado un contrato con la municipalidad de la zona (este alcohol es producido allí mismo). En compensación recibe beneficios impositivos.

Produce dos tipos de fertilizantes: A y B. En la tabla siguiente se da la información básica:

	Producto A	**Producto B**
Consumo de alcohol	3 M^3/unidad	2/3 M^3/unidad
Consumo de ciclohexano	1 tn/unidad	2 tn/unidad

Cuadro 1: Tabla de datos

Disponibilidad de ciclohexano: 20 tn. por mes.

Con estas restricciones, y sabiendo que la contribución marginal es 1.200 \$/u para el producto A y 400 \$/u para el producto B, ¿cuál es el plan óptimo de producción?.

Solución:

1. Objetivo del problema: Maximizar la contribución marginal total.
2. Definir variables de decisión:

$$\begin{aligned} x_1 &= \text{unidades producidas de fertilizante A [unidad/mes]} \\ x_2 &= \text{unidades producidas de fertilizante B [unidad/mes]} \end{aligned} \tag{16}$$

3. Función objetivo (maximizar contribución marginal):

$$\max Z = 1200 \cdot x_1 + 400 \cdot x_2 \tag{17}$$

4. Restricciones:

$$\begin{aligned} 3 \cdot x_1 + \frac{2}{3} \cdot x_2 \geq 40 &\quad \text{(Restricción de consumo de alcohol)} \\ x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 20 &\quad \text{(Restricción de consumo de ciclohexano)} \\ x_1, x_2 \geq 0 &\quad \text{(No se pueden producir cantidades negativas de productos)} \end{aligned} \tag{18}$$

Ejercicio 4.2. Hay tres máquinas disponibles para la producción de dos productos. Cada uno de ellos requiere los tiempos de proceso que se indican en la tabla siguiente (expresados en horas/unidad).

Producto	**Máq. A**	**Máq. B**	**Máq. C**
1	2	3	4
2	4	2	2
Disponibilidad (hs/mes)	80	60	100

Cuadro 2: Tabla de datos

El esquema del proceso productivo es el siguiente:

- Ambos productos deben pasar sucesivamente por las tres máquinas (en el orden “A→B→C”) para quedar totalmente terminados. Una máquina puede procesar un solo producto por vez.
- El precio de venta de 1 es de 60 $/u y el de 2 es de 50 $/u. Se planea la operación para el mes que viene.

¿Cuál es el uso óptimo de estos recursos frente al objetivo de maximizar las ganancias?.

Solución:

1. Objetivo del problema: Maximizar las ganancias.
2. Definir variables:

$$\begin{aligned} x_1 &= \text{unidades producidas de producto 1 [unidad/mes]} \\ x_2 &= \text{unidades producidas de producto 2 [unidad/mes]} \end{aligned} \tag{19}$$

3. Función objetivo (maximizar ganancias):

$$\text{máx}\, Z = 60 \cdot x_1 + 50 \cdot x_2 \tag{20}$$

4. Restricciones:

$$\begin{aligned} 2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 &\leq 80 && \text{(Restricción de disponibilidad de máquina A)} \\ 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 &\leq 60 && \text{(Restricción de disponibilidad de máquina B)} \\ 4 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 &\leq 100 && \text{(Restricción de disponibilidad de máquina C)} \\ x_1, x_2 &\geq 0 && \text{(No se pueden producir cantidades negativas de productos)} \end{aligned} \tag{21}$$

5. Representación gráfica:

   Observando el gráfico, se puede ver que el punto óptimo es el punto $C(10, 15)$, con un valor de $Z = 1350$.

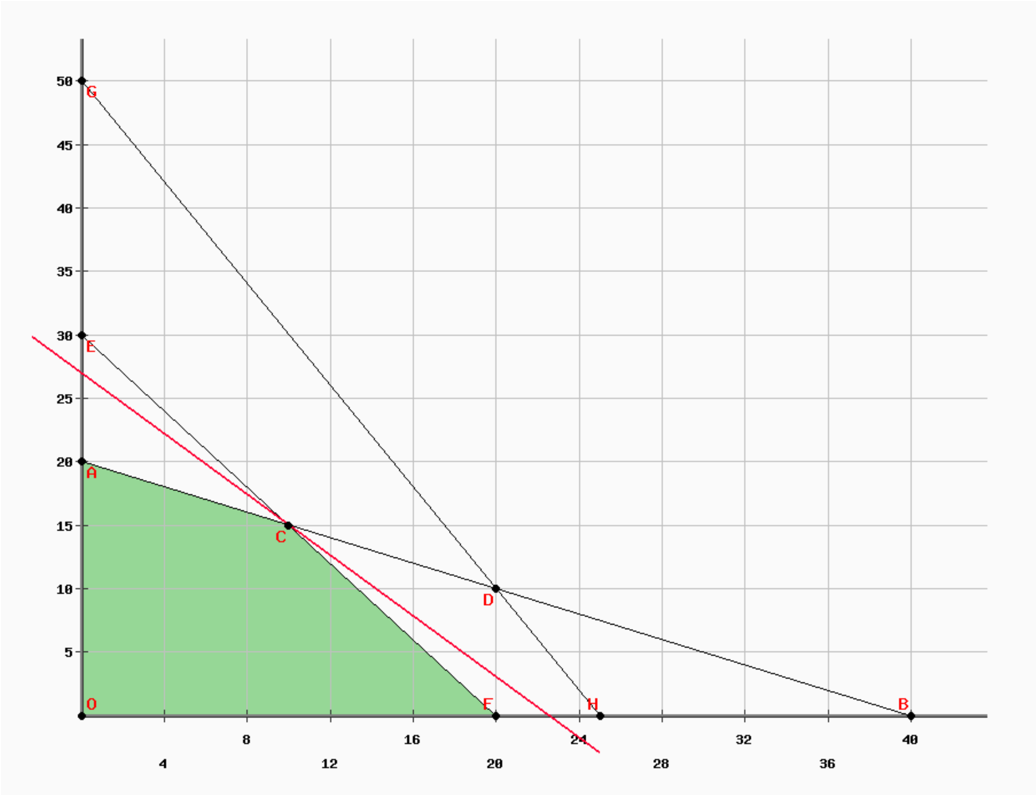

Figura 2: Representación gráfica del problema

6. Obtención algebraicamente de la solución: Tenemos que usar variables de holgura o slack variables para poder expresar las restricciones de igualdad como restricciones de desigualdad. Para ello, definimos las variables de holgura s_1, s_2 y s_3:

$$\begin{aligned} s_1 &= \text{variable de holgura de la restricción de disponibilidad de máquina A} \\ s_2 &= \text{variable de holgura de la restricción de disponibilidad de máquina B} \\ s_3 &= \text{variable de holgura de la restricción de disponibilidad de máquina C} \end{aligned} \tag{22}$$

Con estas variables, podemos expresar las restricciones de igualdad como restricciones de desigualdad:

$$\begin{aligned} 2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + s_1 &= 80 && \text{(Restricción de disponibilidad de máquina A)} \\ 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + s_2 &= 60 && \text{(Restricción de disponibilidad de máquina B)} \\ 4 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + s_3 &= 100 && \text{(Restricción de disponibilidad de máquina C)} \\ x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 &\geq 0 && \text{(No se pueden producir cantidades negativas de productos)} \end{aligned} \tag{23}$$

Referencias

[1] Simulador online de programación lineal. En: 1 (). URL: https://www.phpsimplex.com/simplex/simplex.htm?l=es.