

## 1. Sistemas de Ecuaciones Lineales y No Lineales

**Definición 1.1.** Una matriz que tiene la misma cantidad de las que de columnas ( $A$  es de  $n \times n$  dimensiones) se denomina **matriz cuadrada**.

**Definición 1.2.** Una matriz cuyo determinante es no nulo ( $\det(A) \neq 0$ ) se denomina **matriz no singular**.

Matrices Especiales:

■ **Diagonal Dominante:**

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}| \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

■ **Simétrica:**  $A = A^T$

■ **Definida Positiva:**  $x^T \cdot A \cdot x > 0 \quad \forall x \neq 0$

**Definición 1.3.** (Norma infinito) Dada una matriz  $A$  de  $n \times n$  dimensiones, se define la norma infinito de  $A$  como:

$$\|A\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \quad (2)$$

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 5 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \|A\|_{\infty} = 7 \quad (3)$$

Paso a paso:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^3 &= |1| + |2| + |-1| = 4 \\ \sum_{j=1}^3 &= |0| + |3| + |-1| = 4 \\ \sum_{j=1}^3 &= |5| + |-1| + |1| = 7 \end{aligned} \quad (4)$$

### 1.1. Eliminación de Gauss y sustitución inversa

El Método de Eliminación de Gauss es un método directo muy efectivo que transforma una matriz cualquiera en una matriz triangular superior y luego aplica el método de sustitución inversa para obtener la solución del sistema dado. Para ello se basa en la propiedad que tienen las matrices de que la misma no cambia si se reemplaza alguna de sus filas por una combinación lineal de ella con alguna de las restantes filas. El procedimiento en líneas generales es:

### 1.1.1. Estrategias de pivoteo

Establecer como pivote un valor alto en módulo, para evitar el mal condicionamiento del algoritmo.

- **Pivoteo parcial:** Se intercambian las filas de la matriz para que el pivote sea el mayor en módulo.

Paso  $k$ :

- Buscar  $r$  tal que  $|a_{rk}^{(k)}| = \max |a_{ik}^{(k)}|$ ,  $k \leq i \leq n$
- intercambiar filas  $r$  y  $k$

- **Pivoteo total:** Se intercambian las filas y las columnas de la matriz para que el pivote sea el mayor en módulo.

Paso  $k$ :

- Buscar  $r$  y  $s$  tal que  $|a_{rs}^{(k)}| = \max |a_{ij}^{(k)}|$ ,  $k \leq i, j \leq n$
- intercambiar filas  $r$  y  $k$  y columnas  $s$  y  $k$

Usando la estrategia de pivoteo se logra que el error de representación sea mínimo (Video P03b min 3:25).

## 1.2. Factorización LU

Descomposición o Factorización LU consiste en descomponer la matriz  $A$  original en el producto de dos matrices: una triangular inferior ( $L$ ) y una triangular superior ( $U$ ), para armar el siguiente sistema:

$$A \cdot x = B \quad \Rightarrow \quad L \cdot U \cdot x = B, \quad \text{con} \quad A = L \cdot U \quad (5)$$

De esta forma obtenemos dos sistemas de ecuaciones:

$$\begin{aligned} L \cdot y &= B \\ U \cdot x &= y \end{aligned} \quad (6)$$

Para obtener la matriz  $U$  se triangula la matriz  $A$  mediante el método de eliminación de Gauss. Para obtener la matriz  $L$  se utiliza el mismo método, pero se guardan los *multiplicadores* en la matriz  $L$  (Ver libro Peole pag 189).

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 3 \\ -2 & 5 & 5 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 3 \\ -2 & 5 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3+R_1]{R_2-2R_1} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 6 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3-2R_2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = U \quad (8)$$

Con eso se obtiene la matriz  $U$ . Para obtener la matriz  $L$  se guarda los multiplicadores en la matriz  $L$ .

Los multiplicadores que se obtuvieron en la matriz  $L$  son:

$$\begin{aligned} R_2 - 2R_1 &\Rightarrow m_{21} = 2 \\ R_3 + R_1 &\Rightarrow m_{31} = -1 \\ R_3 - 2R_2 &\Rightarrow m_{32} = -2 \end{aligned} \tag{9}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \tag{10}$$

### 1.3. Refinamiento Iterativo de la Solución

Si  $A \cdot x = b$ . Conocemos la solución  $\tilde{x}$  aproximada.

1. Calculamos el residuo con

$$R = b - A \cdot \tilde{x} \tag{11}$$

Se utiliza doble precisión para calcular el residuo  $2t$ .

2. Calcular el vector de corrección  $\delta x = x - \tilde{x}$  con

$$A \cdot \delta x = R \tag{12}$$

3. Calcular la solución corregida  $x = \tilde{x} + \delta x$

### 1.4. Métodos

- **Métodos Directos:** Se obtiene la solución en un número finito de pasos. Se suelen usar con matrices densas o casi llenas.
- **Métodos Iterativos:** Se obtiene la solución en un número infinito de pasos.
  - Método de Jacobi
  - Método de Gauss-Seidel
  - Método de SOR

Se suelen usar con matrices rala, con muchos ceros.

## 1.5. Método de Jacobi

La forma tradicional:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \cdot x_j^{(k)} \quad (13)$$

El método estacionario más sencillo es el Método de Jacobi.

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 30 \\ -24 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Despejamos de la ecuación  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$  en cualquier orden.

$$\begin{aligned} 4 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 &= 24 & x_1 &= \frac{1}{4} \cdot (24 - 3 \cdot x_2) \\ 3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 - x_3 &= 30 & x_2 &= \frac{1}{4} \cdot (30 + x_3 - 3 \cdot x_1) \\ -x_2 + 4 \cdot x_3 &= -24 & x_3 &= \frac{1}{4} \cdot (-24 + x_2) \end{aligned} \quad (15)$$

Forma general:

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{4} \cdot (24 - 3 \cdot x_2^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{4} \cdot (30 + x_3^{(k)} - 3 \cdot x_1^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} &= \frac{1}{4} \cdot (-24 + x_2^{(k)}) \end{aligned} \quad (16)$$

Colocamos la condición inicial para el vector  $x$ ; se elige cualquier valor. Comumente se elige  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ .

## 1.6. Método de Gauss-Seidel

La forma tradicional:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \cdot x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \cdot x_j^{(k)} \quad (17)$$

Utilizando la ecuación (15), pero esta vez usando los valores de  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$  de la iteración anterior.

Forma general de la ecuación (15) es:

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{4} \cdot (24 - 3 \cdot x_2^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{4} \cdot (30 - 3 \cdot x_1^{(k+1)} + x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} &= \frac{1}{4} \cdot (-24 + x_2^{(k+1)}) \end{aligned} \quad (18)$$

## 1.7. Método de SOR

La forma tradicional:

$$x_i^{(k+1)} = (1 - \omega) \cdot x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}} \cdot \left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \cdot x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} \cdot x_j^{(k)} \right) \quad (19)$$

De Gauss-Seidel se obtiene  $x_i^{(k+1)}$  y el residuo  $r_i^{(k)} = x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}$ . Entonces la sobre-relajación de los residuos es:

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \omega \cdot r_i^{(k)} \quad (20)$$

Solo reemplazamos en el residuo  $r_i^{(k)}$  el valor de  $x_i^{(k+1)}$  de Gauss-Seidel, lo demás se queda como esta.

## 1.8. Criterios de interrupción

Podemos tomar como criterios para interrumpir las iteraciones, que  $x - x^{(n)} < Tol$ , siendo  $Tol$  un valor definido arbitrariamente, generalmente relacionado con la precisión utilizada ( $\mu$ ). Existen varios criterios que pueden aplicarse. Estos son:

- **Criterio de la norma infinito:**

$$\|x^{(n)} - x\|_{\infty} < Tol \quad (21)$$

- **Criterio de la norma 1:**

$$\|x^{(n)} - x\|_1 < Tol \quad (22)$$

- **Criterio de la norma 2:**

$$\|x^{(n)} - x\|_2 < Tol \quad (23)$$

- **Criterio de la norma relativa:**

$$\frac{\|x^{(n)} - x\|_{\infty}}{\|x^{(n)}\|_{\infty}} < Tol \quad (24)$$

## 1.9. Convergencia

El Método de Jacobi y Gauss-Seidel convergen rápidamente si la matriz  $A$  es *estrictamente diagonal dominante*, como se verá más adelante. En cambio, la convergencia es lenta si la matriz  $A$  es cualquiera de las otras dos. Finalmente, si la matriz  $A$  no cumple con ninguna de las definiciones anteriores, el método de Jacobi no converge.

■ **Diagonal dominantencia:**

$$|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \quad (25)$$

■ **Estrictamente Diagonal dominantencia:**

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \quad (26)$$

### 1.10. Resumen