1. Algoritmo simplex

El algoritmo simplex se usa para resolver PL que tienen muchas variables y restricciones.

1.1. Convertir un PL en forma estandar

Definición 1.1. (PL forma estándar) Un PL está en forma estándar si:

- Las restricciones son de igualdad.
- Las variables de decisión son no negativas.

Ejemplo 1.1. (Leather Limited)

1.2. Preliminares del algoritmo simplex

Suponga que se ha convertido un PL con m restricciones en su forma estándar. Si se supone que la forma estándar contiene n variables (denominadas por conveniencia $x_1, x_2, \ldots, x_n$), la forma estándar para tal PL es

$$\text{máx}\, o \, \text{mín}(z) = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \cdots + c_n \cdot x_n \tag{1}$$

sujeto a

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \cdots + a_{1n} \cdot x_n &= b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \cdots + a_{2n} \cdot x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \cdots + a_{mn} \cdot x_n &= b_m \\ x_1, x_2, \ldots, x_n &\geq 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Se define matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{3}$$

y

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \tag{4}$$

1.3. Variables básicas y no básicas

Con el sistema $A \cdot x = b$ de m ecuaciones lineales y n variables (suponga $n \geq m$).

Definición 1.2. (Solucion básica) Una solucion básica para $A \cdot x = b$ se obtiene haciendo $n - m$ variables iguales a cero, y luego se determinan los valores de las m variables restantes. Así se asume que al hacer las $n - m$ variables iguales a cero se llega a valores únicos para las m variables restantes, o que, en forma equivalente, las columnas para las m variables restantes son linealmente independientes.

1. Escoger un conjuto de $n - m$ variables no básicas (VNB).
2. Igualar a cero las variables no básicas.

Ejemplo 1.2.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 3 \\ -x_2 + x_3 &= -1 \end{aligned} \tag{5}$$

Variables no básicas (VNB): $n - m = 3 - 2 = 1$.

VNB = x_3, BV = $\{x_1, x_2\}$	VNB = x_2, BV = $\{x_1, x_3\}$	VNB = x_1, BV = $\{x_2, x_3\}$
$x_3 = 0$	$x_2 = 0$	$x_1 = 0$
$x_1 + x_2 = 3$ $x_2 = -1$	$x_1 = 3$ $x_3 = -1$	$x_2 = 3$ $-x_2 + x_3 = -1$
$x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 0$	$x_1 = 3, x_2 = 0, x_3 = -1$	$x_1 = 0, x_2 = 3, x_3 = 2$

Cuadro 1: Soluciones básicas

1.4. Soluciones factibles

Definición 1.3. (solución básica factible (sbf)) Cualquier solucion básica de (2) en la cual todas las variables son no negatiavas es una **solución factible básica (sfb)**.

Del ejemplo 1.2 se puede ver que las soluciones factibles básicas son: $(2, 1, 0)$ y $(0, 3, 2)$. Solución no factible básica: $(3, 0, -1)$, porque $x_3 < 0$.

Theorem 1. ***(punto estremo)*** *Un punto en la región factible de un PL es un punto extremo si y sólo si es una solución factible básica.*

1.5. Álgebra del método símplex

Ejemplo 1.3. Ejemplo tomado del video YouTube [1].

$$\max z = 7 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \tag{6}$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 2 \cdot x_1 + x_2 &\leq 20 \\ x_1 + x_2 &\leq 18 \\ x_1 &\leq 8 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned} \tag{7}$$

<u>Solución:</u>

1. Forma estándar o aumentada:

$$\begin{aligned} 2 \cdot x_1 + x_2 + s_1 &= 20 \\ x_1 + x_2 + s_2 &= 18 \\ x_1 + s_3 &= 8 \\ x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 &\geq 0 \end{aligned} \tag{8}$$

   Tenemos $m = 3$ restricciones y $n = 5$ variables. Por lo tanto, $n - m = 2$ variables no básicas y $m = 3$ variables básicas.

   Si $x_1 = x_2 = 0$, entonces $s_1 = 20$, $s_2 = 18$ y $s_3 = 8$. Por lo tanto, $(0, 0, 20, 18, 8)$ es una solución básica factible.

2. Determinación de la dirección de movimiento.

   Observando la funcion objetivo z aumenta más rápidamente si x_1 aumenta en una unidad. Por lo tanto, x_1 es la variable de entrada.

$$\begin{array}{lll} \text{¿Aumenta } x_1\text{?} & \text{Tasa de mejoramiento} & z = 7 \\ \text{¿Aumenta } x_2\text{?} & \text{Tasa de mejoramiento} & z = 4 \end{array} \tag{9}$$

   Con esto se determina la variable de entrada x_1.

3. Prueba del cociente mínimo. Cuanto aumentar el valor de la variable básica entrante x_1 antes de detenerse, para no salirse de la región factible.

Usando las restricciones y sabiendo que $x_2 = 0$, se obtiene:

$$\begin{aligned} 2 \cdot x_1 + s_1 &= 20 \quad (x_1 \leq 10) \\ x_1 + s_2 &= 18 \quad (x_1 \leq 18) \\ x_1 + s_3 &= 8 \quad\;\; (x_1 \leq 8) \qquad \leftarrow \text{mínimo} \\ x_1, s_1, s_2, s_3 &\geq 0 \end{aligned} \tag{10}$$

Se la restricción que más limita el crecimiento se despeja y se la coloca en las demás ecuaciones.

4. Resolución de una nueva solución BF. Se reemplaza $x_1 = 8 - s_3$ en las demás ecuaciones:

$$\begin{aligned} \max z &= 7 \cdot (8 - s_3) + 4 \cdot x_2 \\ &= 56 + 4 \cdot x_2 - 7 \cdot s_3 \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} 2 \cdot (8 - s_3) + x_2 + s_4 = 20 \quad &\longrightarrow \quad x_2 + s_1 - 2 \cdot s_3 = 4 \\ (8 - s_3) + x_2 + s_4 = 18 \quad &\longrightarrow \quad x_2 + s_2 - s_3 = 10 \end{aligned} \tag{12}$$

El sistema de ecuaciones equivalente es

$$\max z = 56 + 4 \cdot x_2 - 7 \cdot s_3 \tag{13}$$

$$\begin{aligned} x_2 + s_1 - 2 \cdot s_3 &= 4 \\ x_2 + s_2 - s_3 &= 10 \\ x_1 + s_5 &= 8 \\ x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 &\geq 0 \end{aligned} \tag{14}$$

5.