Apunte Modelos y Optimización - FIUBA

lcondoriz

Agosto 2023

Índice

1. Introducción a la construción de modelos

La investigación de operaciones (IO) es, simplemente, un enfoque científico en la toma de decisiones que busca el mejor diseño y operar un sistema.

Por **sistema**, se quiere dar a entender una organización de componentes interdependientes, que trabajan juntos para lograr el objetivo del sistema.

El en enfoque científico de toma de decisiones, se requiere el uso de uno o más **modelos matemáticos**.

1.1. Modelos prescriptivos o de optimización

Este tipo de modelos dicta el comportamiento para la organización que le permitirá alcanzar sus objetivos.

Elementos de un modelo de optimización:

- **Función objetivo:** es una función matemática de las variables de decisión que se debe maximizar o minimizar.
- **Variables de decisión:** son las variables que se pueden controlar para lograr los objetivos del sistema.
- **Restricciones:** son las limitaciones que se deben satisfacer.

Un modelo de optimización trata de encontrar valores, entre el conjunto de todos los valores para las variables de decisión, que optimicen (maximicen o minimicen) la función objetivo, y que satisfagan las restricciones.

1.2. Modelos estáticos y dinámicos

Un modelo estático es aquel que no considera el paso del tiempo. Un modelo dinámico, en cambio, sí lo hace.

Un modelo dinámico puede ser **determinístico** o **estocástico**. Un modelo determinístico es aquel en el que todos los parámetros son conocidos. Un modelo estocástico es aquel en el que al menos un parámetro es desconocido.

2. Programación lineal

La programción lineal (PL) es una herramienta para resolver problemas de optimización.

Ejemplo 2.1. Glapetto's Woodcarving (Juguetes de madera Giapetto)
Giapetto's Woodcarving, Inc., manufactura dos tipos de juguetes de madera: soldados y trenes. Un soldado se vende en 27 dólares y requiere 10 dólares de materia prima. Cada soldado que se fabrica incrementa la mano de obra variable y los costos globales de Giapetto en 14 dólares. Un tren se vende en 21 dólares y utiliza 9 dólares de su valor en materia prima. Todos los trenes fabricados aumentan la mano de obra variable y los costos globales de Giapetto en 10 dólares. La fabricación de soldados y trenes de madera requiere dos tipos de mano de obra especializada: carpintería y acabados. Un soldado necesita dos horas de trabajo de acabado y una hora de carpinteria. Un tren requiere una hora de acabado y una hora de carpinteria. Todas las semanas, Giapetto consigue todo el material necesario, pero sólo 100 horas de trabajo de acabado y 80 de carpinteria. La demanda de trenes es ilimitada, pero se venden cuando mucho 40 soldados por semana. Giapetto desea maximizar las utilidades semanales (ingresos - costos). Diseñe un modelo matemático para la situación de Giapetto que se use para maximizar las utilidades semanales de la empresa.

Solución:

- **Variables de decisión** Se debe decidir cuántos soldados y trenes se deben fabricar cada semana.

$$\begin{aligned} x_1 &= \text{ número de soldados fabricados por semana.} \\ x_2 &= \text{ número de trenes fabricados por semana.} \end{aligned} \tag{1}$$

- **Función objetivo** Se desea maximizar las utilidades semanales de la empresa.

$$\begin{aligned} \text{Ingresos por semana} &= \text{Ingresos por soldados} + \text{Ingresos por trenes} \\ &= \left(\frac{\text{dólares}}{\text{soldado}}\right) \cdot \left(\frac{\text{soldados}}{\text{semana}}\right) + \left(\frac{\text{dólares}}{\text{tren}}\right) \cdot \left(\frac{\text{trenes}}{\text{semana}}\right) \\ &= 27 \cdot x_1 + 21 \cdot x_2 \end{aligned} \tag{2}$$

Asimismo

$$\begin{aligned} \text{Costo de la materia prima a la semana} &= 10 \cdot x_1 + 9 \cdot x_2 \\ \text{Otros costos variables a la semana} &= 14 \cdot x_1 + 10 \cdot x_2 \end{aligned} \tag{3}$$

Entonce, se quiere maximizar

$$\begin{aligned} \text{Utilidades semanales} &= \text{Ingresos semanales} - \text{Costos semanales} \\ &= 27 \cdot x_1 + 21 \cdot x_2 - (10 \cdot x_1 + 9 \cdot x_2 + 14 \cdot x_1 + 10 \cdot x_2) \\ &= 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \end{aligned} \tag{4}$$

La función objetivo es

$$\text{Maximizar } z = 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \tag{5}$$

- **<u>Restricciones:</u>**
  - Restricción 1: Se puede usar cada semana no más de 100 horas de tiempo de acabado.
  - Restricción 2: Cada semana se puede usar no más de 80 horas de tiempo de carpintería.
  - Restricción 3: Debido a la demanda limitada, cuando mucho se debe producir cada semana 40 soldados.

La cantidad de materia prima en existencia es ilimitada, asi que no hay restricción alguna relacionada con eso.

Para expresar la restricción 1 de acuerdo con x_1 y x_2.

$$\begin{aligned} \frac{\text{Total de horas de acabado}}{\text{Semana}} &= \left(\frac{\text{horas de acabado}}{\text{soldado}}\right) \cdot \left(\frac{\text{soldados frabricados}}{\text{semana}}\right) \\ &+ \left(\frac{\text{horas de acabado}}{\text{tren}}\right) \cdot \left(\frac{\text{trenes frabricados}}{\text{semana}}\right) \\ &= 2 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \end{aligned} \tag{6}$$

Entonces, la restricción 1 se puede expresar como

$$2 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \leq 100 \tag{7}$$

Para la restricción 2 en términos de x_1 y x_2.

$$\begin{aligned} \frac{\text{Total de horas de carpintería}}{\text{Semana}} &= \left(\frac{\text{horas de carpintería}}{\text{soldado}}\right) \cdot \left(\frac{\text{soldados fabricados}}{\text{semana}}\right) \\ &+ \left(\frac{\text{horas de carpintería}}{\text{tren}}\right) \cdot \left(\frac{\text{trenes fabricados}}{\text{semana}}\right) \\ &= 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \end{aligned} \tag{8}$$

Entonces, la restricción 2 se puede expresar como

$$1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \leq 80 \tag{9}$$

Para la restricción 3 en términos de x_1 y x_2.

$$x_1 \leq 40 \tag{10}$$

- **Restricciones de signo**

$$\begin{aligned} x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned} \tag{11}$$

Presentamos el modelo de PL para el problema de Giapetto's Woodcarving.

$$\text{Maximizar } z = 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \tag{12}$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\leq 100 && \text{(Restricción de acabado)} \\ x_1 + x_2 &\leq 80 && \text{(Restricción de carpintería)} \\ x_1 &\leq 40 && \text{(Restricción de demanda)} \\ x_1 &\geq 0 && \text{(Restricción de signo)} \\ x_2 &\geq 0 && \text{(Restricción de signo)} \end{aligned} \tag{13}$$

Ahora vamos a resolver el problema de Giapetto's Woodcarving.

Usando la región factible se busca la solución óptima, la cual es el punto de la región factible con el valor más grande de $z = 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2$. En este caso, la solución óptima es, recta roja gráfico, punto C:

$$x_1 = 20, \quad x_2 = 60, \quad z = 180 \tag{14}$$

Definición 2.1: Problema de programación lineal

Un problema de programación lineal (PL) es un problema de optimización para el cual se efectúa lo siguiente:

1. Se intenta maximizar (minimizar) una función lineal de las variables de decisión. La función lineal se llama **función objetivo**.
2. Los valores de las variables de decisión deben satisfacer un conjunto de restricciones. Cada restricción debe ser una ecuación lineal o una inecuación lineal.
3. Se relaciona un *restricción de signo* con cada variable de decisión.

2.1. Regiones factibles y solución óptima

Definición 2.1. (Región factible) La región factible para una PL, es el conjunto de todos los puntos que satisfacen las limitaciones y las restricciones de signo de la PL.

Definición 2.2. (Solución óptima) Para un problema de maximización, una solución óptima para una PL es un punto con el valor de la función objetivo más grande en la región factible. De igual manera, para un problema de minimización, una solución óptima es un punto con el valor de la función objetivo más pequeño en la región factible.

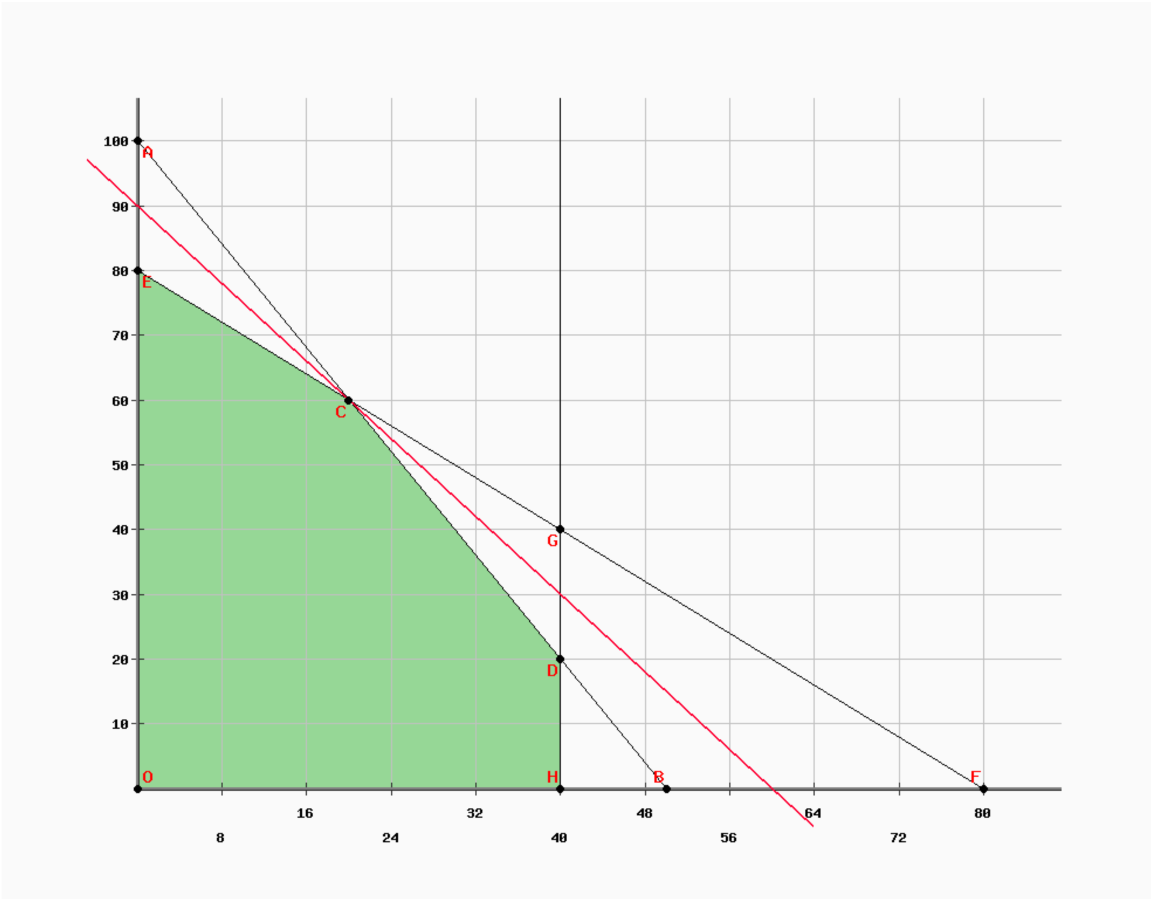


Figura 1: Región factible para el problema de Giapetto's Woodcarving.

2.2. Restricciones activas

Definición 2.3. (Restricciones activas) Una restricción es activa u obligatoria si tanto el primero como el segundo miembro de las restricciones son iguales cuando los valores óptimos de las variables de decisión se sustituyen en la restricción.

Definición 2.4. (Restricciones inactiva) Una restricción es inactiva si no son iguales el primero y el segundo miembro de la restricción cuando los valores óptimos de las variables de decisión se sustituyen en la restricción.

En el Ejemplo 2.1,

$$\begin{aligned} 2 \cdot \overbrace{(20)}^{x_1} + \overbrace{(60)}^{x_2} &= 100 \quad &\text{(Restricción activa)} \\ (20) + (60) &= 80 \quad &\text{(Restricción activa)} \\ (20) &\leq 40 \quad &\text{(Restricción inactiva)} \end{aligned} \tag{15}$$

2.3. Casos especiales

Tres tipos de PL que no tienen solución óptima única:

1. Tienen un número infinito de soluciones óptimas. (*soluciones óptimas múltiples o alternativas*)
2. No tienen soluciones factibles. (*soluciones no factibles*)

3. Son no acotadas: hay puntos en la región factible con valores z arbitrariamente grandes (en problemas de maximización).

Ejemplo 2.2.

3. Algoritmo simplex

El algoritmo simplex se usa para resolver PL que tienen muchas variables y restricciones.

3.1. Convertir un PL en forma estandar

Definición 3.1. (PL forma estándar) Un PL está en forma estándar si:

- Las restricciones son de igualdad.
- Las variables de decisión son no negativas.

Ejemplo 3.1. (Leather Limited)

3.2. Preliminares del algoritmo simplex

Suponga que se ha convertido un PL con m restricciones en su forma estándar. Si se supone que la forma estándar contiene n variables (denominadas por conveniencia $x_1, x_2, \ldots, x_n$), la forma estándar para tal PL es

$$\text{máx}\, o\, \text{mín}(z) = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \cdots + c_n \cdot x_n \tag{16}$$

sujeto a

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \cdots + a_{1n} \cdot x_n &= b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \cdots + a_{2n} \cdot x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \cdots + a_{mn} \cdot x_n &= b_m \\ x_1, x_2, \ldots, x_n &\geq 0 \end{aligned} \tag{17}$$

Se define matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{18}$$

y

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \tag{19}$$

3.3. Variables básicas y no básicas

Con el sistema $A \cdot x = b$ de m ecuaciones lineales y n variables (suponga $n \geq m$).

Definición 3.2. (Solucion básica) Una solucion básica para $A \cdot x = b$ se obtiene haciendo $n - m$ variables iguales a cero, y luego se determinan los valores de las m variables restantes. Así se asume que al hacer las $n - m$ variables iguales a cero se llega a valores únicos para las m variables restantes, o que, en forma equivalente, las columnas para las m variables restantes son linealmente independientes.

1. Escoger un conjuto de $n - m$ variables no básicas (VNB).
2. Igualar a cero las variables no básicas.

Ejemplo 3.2.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 3 \\ -x_2 + x_3 &= -1 \end{aligned} \tag{20}$$

Variables no básicas (VNB): $n - m = 3 - 2 = 1$.

VNB $= x_3$, BV $= \{x_1, x_2\}$	VNB $= x_2$, BV $= \{x_1, x_3\}$	VNB $= x_1$, BV $= \{x_2, x_3\}$
$x_3 = 0$	$x_2 = 0$	$x_1 = 0$
$x_1 + x_2 = 3$ $x_2 = -1$	$x_1 = 3$ $x_3 = -1$	$x_2 = 3$ $-x_2 + x_3 = -1$
$x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 0$	$x_1 = 3, x_2 = 0, x_3 = -1$	$x_1 = 0, x_2 = 3, x_3 = 2$

Cuadro 1: Soluciones básicas

3.4. Soluciones factibles

Definición 3.3. (solución básica factible (sbf)) Cualquier solucion básica de (17) en la cual todas las variables son no negatiavas es una **solución factible básica (sfb)**.

Del ejemplo 3.2 se puede ver que las soluciones factibles básicas son: $(2, 1, 0)$ y $(0, 3, 2)$. Solución no factible básica: $(3, 0, -1)$, porque $x_3 < 0$.

Theorem 1. ***(punto estremo)*** *Un punto en la región factible de un PL es un punto extremo si y sólo si es una solución factible básica.*

3.5. Álgebra del método símplex

Ejemplo 3.3. Ejemplo tomado del video YouTube [1].

$$\text{máx}\, z = 7 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \tag{21}$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 2 \cdot x_1 + x_2 &\leq 20 \\ x_1 + x_2 &\leq 18 \\ x_1 &\leq 8 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned} \tag{22}$$

<u>Solución:</u>

1. Forma estándar o aumentada:

$$\begin{aligned} 2 \cdot x_1 + x_2 + s_1 &= 20 \\ x_1 + x_2 + s_2 &= 18 \\ x_1 + s_3 &= 8 \\ x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 &\geq 0 \end{aligned} \tag{23}$$

   Tenemos $m = 3$ restricciones y $n = 5$ variables. Por lo tanto, $n - m = 2$ variables no básicas y $m = 3$ variables básicas.

   Si $x_1 = x_2 = 0$, entonces $s_1 = 20$, $s_2 = 18$ y $s_3 = 8$. Por lo tanto, $(0, 0, 20, 18, 8)$ es una solución básica factible.

2. Determinación de la dirección de movimiento.

   Observando la funcion objetivo z aumenta más rápidamente si x_1 aumenta en una unidad. Por lo tanto, x_1 es la variable de entrada.

$$\begin{aligned} &\text{¿Aumenta } x_1\text{?} \quad \text{Tasa de mejoramiento} \quad z = 7 \\ &\text{¿Aumenta } x_2\text{?} \quad \text{Tasa de mejoramiento} \quad z = 4 \end{aligned} \tag{24}$$

   Con esto se determina la variable de entrada x_1.

3. Prueba del cociente mínimo. Cuanto aumentar el valor de la variable básica entrante x_1 antes de detenerse, para no salirse de la región factible.

   Usando las restricciones y sabiendo que $x_2 = 0$, se obtiene:

$$\begin{aligned} 2 \cdot x_1 + s_1 &= 20 \quad (x_1 \leq 10) \\ x_1 + s_2 &= 18 \quad (x_1 \leq 18) \\ x_1 + s_3 &= 8 \quad\;\; (x_1 \leq 8) \qquad \leftarrow \text{mínimo} \\ x_1, s_1, s_2, s_3 &\geq 0 \end{aligned} \tag{25}$$

   Se la restricción que más limita el crecimiento se despeja y se la coloca en las demás ecuaciones.

4. Resolución de una nueva solución BF. Se reemplaza $x_1 = 8 - s_3$ en las demás ecuaciones:

$$\begin{aligned} \max z &= 7 \cdot (8 - s_3) + 4 \cdot x_2 \\ &= 56 + 4 \cdot x_2 - 7 \cdot s_3 \end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned} 2 \cdot (8 - s_3) + x_2 + s_4 = 20 \quad &\longrightarrow \quad x_2 + s_1 - 2 \cdot s_3 = 4 \\ (8 - s_3) + x_2 + s_4 = 18 \quad &\longrightarrow \quad x_2 + s_2 - s_3 = 10 \end{aligned} \tag{27}$$

   El sistema de ecuaciones equivalente es

$$\max z = 56 + 4 \cdot x_2 - 7 \cdot s_3 \tag{28}$$

$$\begin{aligned} x_2 + s_1 - 2 \cdot s_3 &= 4 \\ x_2 + s_2 - s_3 &= 10 \\ x_1 + s_5 &= 8 \\ x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 &\geq 0 \end{aligned} \tag{29}$$

5.

4. Guía de ejercicios

4.1. Guía 1

Ejercicio 4.1. Una pequeña empresa de productos químicos debe consumir más de 40 M^3/mes de un determinado alcohol, debido a que ha firmado un contrato con la municipalidad de la zona (este alcohol es producido allí mismo). En compensación recibe beneficios impositivos.

Produce dos tipos de fertilizantes: A y B. En la tabla siguiente se da la información básica:
Disponibilidad de ciclohexano: 20 tn. por mes.

Con estas restricciones, y sabiendo que la contribución marginal es 1.200 \$/u para el producto A y 400 \$/u para el producto B, ¿cuál es el plan óptimo de producción?.

Solución:

	Producto A	**Producto B**
Consumo de alcohol	3 M^3/unidad	2/3 M^3/unidad
Consumo de ciclohexano	1 tn/unidad	2 tn/unidad

Cuadro 2: Tabla de datos

1. Objetivo del problema: Maximizar la contribución marginal total.

2. Definir variables de decisión:

$$\begin{aligned} x_1 &= \text{unidades producidas de fertilizante A [unidad/mes]} \\ x_2 &= \text{unidades producidas de fertilizante B [unidad/mes]} \end{aligned} \tag{30}$$

3. Función objetivo (maximizar contribución marginal):

$$\max Z = 1200 \cdot x_1 + 400 \cdot x_2 \tag{31}$$

4. Restricciones:

$$\begin{aligned} 3 \cdot x_1 + \frac{2}{3} \cdot x_2 \geq 40 \quad & \text{(Restricción de consumo de alcohol)} \\ x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 20 \quad & \text{(Restricción de consumo de ciclohexano)} \\ x_1, x_2 \geq 0 \quad & \text{(No se pueden producir cantidades negativas de productos)} \end{aligned} \tag{32}$$

Ejercicio 4.2. Hay tres máquinas disponibles para la producción de dos productos. Cada uno de ellos requiere los tiempos de proceso que se indican en la tabla siguiente (expresados en horas/unidad).

Producto	**Máq. A**	**Máq. B**	**Máq. C**
1	2	3	4
2	4	2	2
Disponibilidad (hs/mes)	80	60	100

Cuadro 3: Tabla de datos

El esquema del proceso productivo es el siguiente:

- Ambos productos deben pasar sucesivamente por las tres máquinas (en el orden “A→B→C”) para quedar totalmente terminados. Una máquina puede procesar un solo producto por vez.
- El precio de venta de 1 es de 60 \$/u y el de 2 es de 50 \$/u. Se planea la operación para el mes que viene.

¿Cuál es el uso óptimo de estos recursos frente al objetivo de maximizar las ganancias?.

Solución:

1. Objetivo del problema: Maximizar las ganancias.

2. Definir variables:

$$\begin{aligned} x_1 &= \text{unidades producidas de producto 1 [unidad/mes]} \\ x_2 &= \text{unidades producidas de producto 2 [unidad/mes]} \end{aligned} \tag{33}$$

3. Función objetivo (maximizar ganancias):

$$\max Z = 60 \cdot x_1 + 50 \cdot x_2 \tag{34}$$

4. Restricciones:

$$\begin{aligned}
2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \leq 80 & \quad \text{(Restricción de disponibilidad de máquina A)} \\
3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 60 & \quad \text{(Restricción de disponibilidad de máquina B)} \\
4 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 100 & \quad \text{(Restricción de disponibilidad de máquina C)} \\
x_1, x_2 \geq 0 & \quad \text{(No se pueden producir cantidades negativas de productos)}
\end{aligned} \tag{35}$$

5. Representación gráfica:

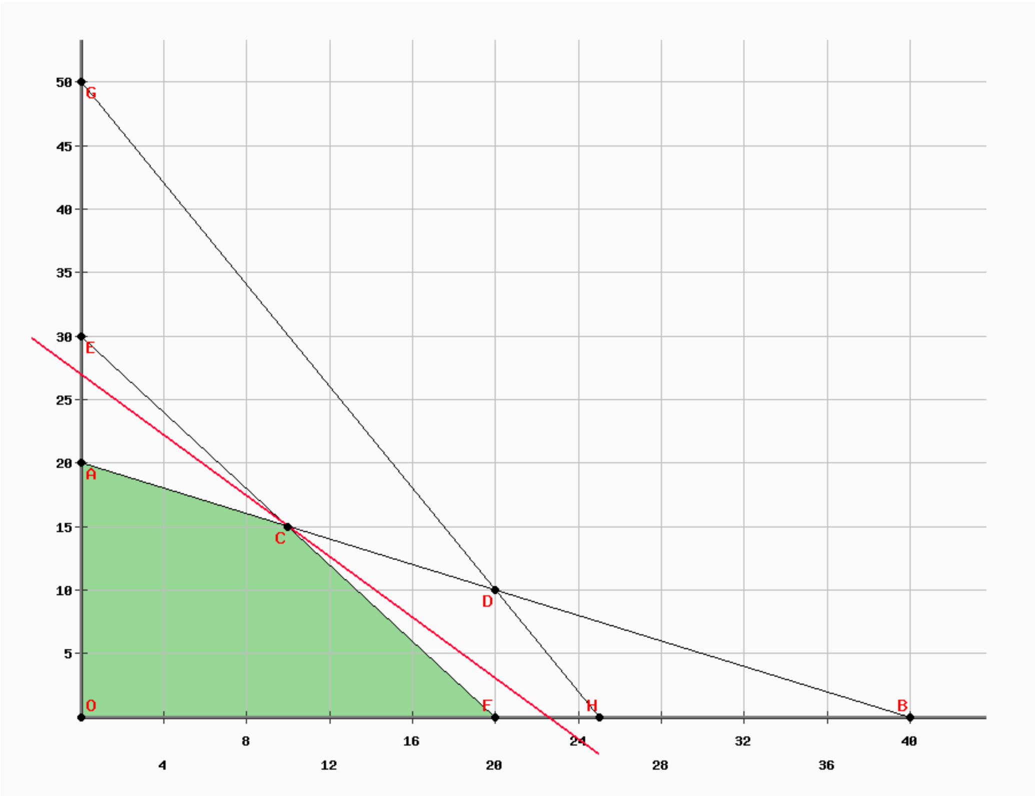


Figura 2: Representación gráfica del problema

Observando el gráfico, se puede ver que el punto óptimo es el punto $C(10, 15)$, con un valor de $Z = 1350$.

6. Obtención algebraicamente de la solución: Tenemos que usar variables de holgura o slack variables para poder expresar las restricciones de igualdad como restricciones de desigualdad. Para ello, definimos las variables de holgura s_1, s_2 y s_3:

$$\begin{aligned} s_1 &= \text{variable de holgura de la restricción de disponibilidad de máquina A} \\ s_2 &= \text{variable de holgura de la restricción de disponibilidad de máquina B} \\ s_3 &= \text{variable de holgura de la restricción de disponibilidad de máquina C} \end{aligned} \tag{36}$$

Con estas variables, podemos expresar las restricciones de igualdad como restricciones de desigualdad:

$$\begin{aligned} 2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + s_1 = 80 &\quad \text{(Restricción de disponibilidad de máquina A)} \\ 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + s_2 = 60 &\quad \text{(Restricción de disponibilidad de máquina B)} \\ 4 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + s_3 = 100 &\quad \text{(Restricción de disponibilidad de máquina C)} \\ x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0 &\quad \text{(No se pueden producir cantidades negativas de productos)} \end{aligned} \tag{37}$$

Ejercicio 4.3. Se desea definir las cantidades a fabricar de dos productos, A y B cuyo procesamiento se realiza en dos centros de máquinas, conociéndose los datos referentes a los tiempos de proceso y disponibilidades en los centros. Se sabe además que debe cumplirse con un pedido mínimo de 50 unidades de A. Al mismo tiempo, la producción de B debe ser por lo menos cuatro veces superior a la producción de A.

Se conocen los márgenes brutos de beneficio de cada producto.

		Producto		**Disponibilidad**
		A	**B**	
Tiempos unitarios	**Máquina I**	1	0,4	200
	Máquina II	0,5	1	200
Margen bruto unitario		12	8	

Cuadro 4: Tabla de datos

Solución:

1. Objetivo del problema: Dado que se quiere maximizar el beneficio, el objetivo es producir la cantidad adecuada de cada producto para maximizar los ingresos.

2. Definimos variables de decisión:

$$\begin{aligned} x_A &= \text{Cantidad de unidades del Producto A a fabricar.} \\ x_B &= \text{Cantidad de unidades del Producto B a fabricar.} \end{aligned} \tag{38}$$

3. Función objetivo (maximizar beneficio):

$$\max Z = 12 \cdot x_A + 8 \cdot x_B \tag{39}$$

4. Restricciones:

$$\begin{aligned} x_A \geq 50 &\quad \text{(Restricción de pedido mínimo de A)} \\ x_B \geq 4 \cdot x_A &\quad \text{(Restricción de producción de B)} \\ x_A + 0,4 \cdot x_B \leq 200 &\quad \text{(Restricción de disponibilidad de máquina I)} \\ 0,5 \cdot x_A + x_B \leq 200 &\quad \text{(Restricción de disponibilidad de máquina II)} \\ x_A, x_B \geq 0 &\quad \text{(No se pueden producir cantidades negativas de productos)} \end{aligned} \tag{40}$$

Nota:
En este caso x_A y x_B [unidades].
La Disponibilidad en cada máquina: 200 [unidades].

Ejercicio 4.4. La empresa Seventeen SRL se dedica a la fabricación de manteles de mesa. Fabrica dos modelos que se adaptan al 90 % de las mesas argentinas: el redondo y el rectangular. Cada uno de estos modelos consume 2 y 3 m^2 de tela, respectivamente. Además deben ser cortados y cosidos a mano, tarea que lleva una hora para los manteles rectangulares y dos para los redondos (es más complejo el corte). Por último, a los manteles rectangulares se les deben colocar cuatro esquineros de refuerzo.

Semanalmente se pueden conseguir 600 m^2 de tela, 600 esquineros y 500 horas de corte y costura. Los márgenes de ganancias son de \$8 para los manteles redondos y \$10 para los rectangulares.

¿Qué es lo mejor que puede hacer Seventeen con esta información?

Solución:

1. Objetivo del problema: Maximizar el beneficio total.

2. Definir variables de decisión:

$$\begin{aligned} x_C &= \text{Cantidad de manteles redondos (circular) a fabricar.} \\ x_R &= \text{Cantidad de manteles rectangulares a fabricar.} \end{aligned} \tag{41}$$

Podemos construir una tabla con los datos de la tabla del enunciado:

	Producto		Disponibilidad	Unidades
	Redondo x_C	Rectangular x_R		
Consumo de tela	2	3	600	$[m^2]$
Tiempo de corte y costura	2	1	500	hs
Esquineros	-	4	600	
Ganancia	8	10		\$

Cuadro 5: Tabla de datos

3. Función objetivo (maximizar beneficio):

$$\text{máx}\, Z = 8 \cdot x_C + 10 \cdot x_R \tag{42}$$

4. Restricciones:

$$\begin{aligned} 2 \cdot x_C + 3 \cdot x_R &\leq 600 && \text{(Restricción de disponibilidad de tela)} \\ 2 \cdot x_C + x_R &\leq 500 && \text{(Restricción de disponibilidad de corte y costura)} \\ 4 \cdot x_R &\leq 600 && \text{(Restricción de disponibilidad de esquineros)} \\ x_C, x_R &\geq 0 && \text{(No se pueden producir cantidades negativas de productos)} \end{aligned} \tag{43}$$

Ejercicio 4.5. Es necesario alimentar racionalmente un rebaño de cabezas de ganado.

Los alimentos deben contener imprescindiblemente, cuatro componentes nutritivos: A, B, C y D.

Se encuentran disponibles en el mercado dos alimentos M y N cuyas propiedades son:

- Un kilogramo de alimento M contiene 100 gr. de nutriente A, 100 gr. de C, y 200 gr. de D.
- Un kilogramo de alimento N contiene 100 gr. de nutriente B, 200 gr. de C y 100 gr. de D.

Cada animal debe consumir como mínimo, por día, 400 gr. de nutriente A, 600 gr. de B, 2.000 gr. de C y 1.700 gr. de D.

El alimento M cuesta 10 \$/kg, y el N cuesta 4 \$/kg.

¿Qué cantidad de alimentos M y N debe suministrarse a cada animal diariamente para que la ración sea la más económica?.

Solución:

1. Objetivo del problema: Minimizar el costo total de la ración.
2. Definir variables de decisión:

$$\begin{aligned} x_M &= \text{Cantidad de alimento M a suministrar [kg/día]} \\ x_N &= \text{Cantidad de alimento N a suministrar [kg/día]} \end{aligned} \tag{44}$$

   Podemos construir una tabla con los datos de la tabla del enunciado:

	Producto		**Consumo**
Nutrientes	**M**	**N**	**mínimo**
A	100	-	400
B	-	100	600
C	100	200	2000
D	200	100	1700
Ganancia	10	4	

Cuadro 6: Tabla de datos

3. Función objetivo (minimizar costo total):

$$\text{mín}\, Z = 10 \cdot x_M + 4 \cdot x_N \tag{45}$$

4. Restricciones:

$$\begin{aligned} 100 \cdot x_M &\geq 400 && \text{(Restricción de consumo mínimo de nutriente A)} \\ 100 \cdot x_N &\geq 600 && \text{(Restricción de consumo mínimo de nutriente B)} \\ 100 \cdot x_M + 200 \cdot x_N &\geq 2000 && \text{(Restricción de consumo mínimo de nutriente C)} \\ 200 \cdot x_M + 100 \cdot x_N &\geq 1700 && \text{(Restricción de consumo mínimo de nutriente D)} \\ x_M, x_N &\geq 0 && \text{(No se pueden producir cantidades negativas de productos)} \end{aligned} \tag{46}$$

Ejercicio 4.6. Dado el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\begin{aligned} 4 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 &\leq 4 \\ 4 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 &\leq 8 \\ x_1 + x_2 &\geq 0 \end{aligned} \tag{47}$$

Y el funcional:

$$\text{máx}\, Z = 8 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \tag{48}$$

Se pide:

a) Encontrar un enunciado compatible con el mismo.

b) Resolverlo gráficamente.

c) Indicar la o las soluciones del problema que optimicen el funcional.

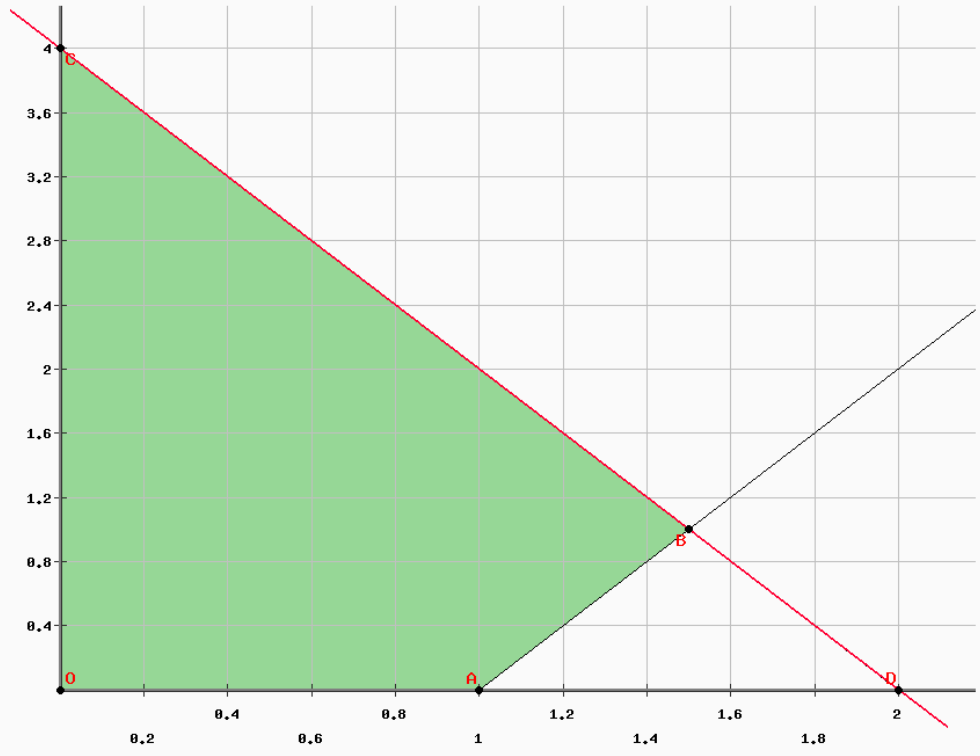
d) Dar el valor de las variables débiles o slacks, sus unidades y significado en cada uno de los vértices del poliedro.

Solución:

a)

b) Simulado con la página [2].

c) Observando la Figura 3, se puede ver que el punto óptimo es el punto $B(1{,}5, 1)$ y $C(0, 4)$, con un valor de $Z = 16$.



Punto	Coordenada X (X_1)	Coordenada Y (X_2)	Valor de la función objetivo (Z)
O	0	0	0
A	1	0	8
B	1.5	1	16
C	0	4	16
D	2	0	16

Figura 3: Representación gráfica del problema

4.2. Guía 2

Ejercicio 4.7. Un taller de tejido elabora varios modelos de pullóver. Estos modelos de pullóver se pueden agrupar, desde un punto de vista técnico-económico, en tres tipos diferentes de prendas, a los cuales llamaremos A, B y C.

El taller posee dos máquinas (I y II). Los pullóveres A sólo pueden hacerse en la máquina I, los C sólo pueden hacerse en la máquina II y los B pueden hacerse tanto en la máquina I como en la II.

Las dos máquinas trabajan dos turnos por día, 8 horas en cada turno, de lunes a viernes.

La materia prima utilizada es lana de dos calidades distintas (Mejorada y Normal). La lana Mejorada se utiliza para los pullóveres de tipo A y C. Los pullóveres de tipo B se hacen con lana Normal. De la lana Mejorada se pueden conseguir hasta 20 kg./semana y de la lana Normal hasta 36 kg./semana.

Existe un compromiso de entregar 10 pullóveres B por semana a un importante distribuidor.

No es necesario que las prendas que comienzan a fabricarse en una semana se terminen durante la misma, es decir que pueden quedar pullóveres a medio hacer de una semana para la próxima.

Los estándares de producción y materia prima y los beneficios unitarios para cada tipo de pullóver, se indican en el siguiente cuadro:

Tipo de pullóver	**Estándar de producción hs/pullover**		**Estándar de materia prima kg/pullover**		**Beneficio unitario $/pullover**
	Máquina I	**Máquina II**	**Mejorada**	**Normal**	
A	5	-	1,6	-	10
B	6	4	-	1,8	15
C	-	4	1,2	-	18

Cuadro 7: Tabla de datos

Solución:

Referencias

[1] Método Simplex Algebraico. En: 1 (). URL: https://www.phpsimplex.com/simplex/simplex.htm?l=es.

[2] Simulador online de programación lineal. En: 1 (). URL: https://www.phpsimplex.com/simplex/simplex.htm?l=es.