

## 1. Algoritmo simplex

El algoritmo simplex se usa para resolver PL que tienen muchas variables y restricciones.

### 1.1. Convertir un PL en forma estandar

**Definición 1.1. (PL forma estándar)** Un PL está en forma estándar si:

- Las restricciones son de igualdad.
- Las variables de decisión son no negativas.

**Ejemplo 1.1. (Leather Limited)**

### 1.2. Preliminares del algoritmo simplex

Suponga que se ha convertido un PL con  $m$  restricciones en su forma estándar. Si se supone que la forma estándar contiene  $n$  variables (denominadas por conveniencia  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ), la forma estándar para tal PL es

$$\text{máx o mín}(z) = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \dots + c_n \cdot x_n \quad (1)$$

sueto a

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n &= b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \dots + a_{mn} \cdot x_n &= b_m \\ x_1, x_2, \dots, x_n &\geq 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Se define matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (3)$$

y

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad (4)$$

### 1.3. Variables básicas y no básicas

Con el sistema  $A \cdot x = b$  de  $m$  ecuaciones lineales y  $n$  variables (suponga  $n \geq m$ ).

**Definición 1.2. (Solucion básica)** Una solución básica para  $A \cdot x = b$  se obtiene haciendo  $n - m$  variables iguales a cero, y luego se determinan los valores de las  $m$  variables restantes. Así se asume que al hacer las  $n - m$  variables iguales a cero se llega a valores únicos para las  $m$  variables restantes, o que, en forma equivalente, las columnas para las  $m$  variables restantes son linealmente independientes.

1. Escoger un conjunto de  $n - m$  variables no básicas (VNB).
2. Igualar a cero las variables no básicas.

**Ejemplo 1.2.**

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 3 \\ -x_2 + x_3 &= -1 \end{aligned} \quad (5)$$

Variables no básicas (VNB):  $n - m = 3 - 2 = 1$ .

VNB = $x_3$ , BV = $\{x_1, x_2\}$	VNB = $x_2$ , BV = $\{x_1, x_3\}$	VNB = $x_1$ , BV = $\{x_2, x_3\}$
$x_3 = 0$	$x_2 = 0$	$x_1 = 0$
$x_1 + x_2 = 3$	$x_1 = 3$	$x_2 = 3$
$x_2 = -1$	$x_3 = -1$	$-x_2 + x_3 = -1$
$x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 0$	$x_1 = 3, x_2 = 0, x_3 = -1$	$x_1 = 0, x_2 = 3, x_3 = 2$

Cuadro 1: Soluciones básicas

### 1.4. Soluciones factibles

**Definición 1.3. (solución básica factible (sbf))** Cualquier solución básica de (2) en la cual todas las variables son no negativas es una **solución básica factible (sfb)**.

Del ejemplo 1.2 se puede ver que las soluciones factibles básicas son:  $(2, 1, 0)$  y  $(0, 3, 2)$ . Solución no factible básica:  $(3, 0, -1)$ , porque  $x_3 < 0$ .

**Theorem 1. (punto extremo)** Un punto en la región factible de un PL es un punto extremo si y sólo si es una solución básica factible.

### 1.5. Álgebra del método simplex

**Ejemplo 1.3.** Ejemplo tomado del video YouTube [1].

$$\text{máx } z = 7 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \quad (6)$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 2 \cdot x_1 + x_2 &\leq 20 \\ x_1 + x_2 &\leq 18 \\ x_1 &\leq 8 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned} \quad (7)$$

**Solución:**

1. Forma estándar o aumentada:

$$\begin{aligned} 2 \cdot x_1 + x_2 + s_1 &= 20 \\ x_1 + x_2 + s_2 &= 18 \\ x_1 + s_3 &= 8 \\ x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 &\geq 0 \end{aligned} \quad (8)$$

Tenemos  $m = 3$  restricciones y  $n = 5$  variables. Por lo tanto,  $n - m = 2$  variables no básicas y  $m = 3$  variables básicas.

Si  $x_1 = x_2 = 0$ , entonces  $s_1 = 20$ ,  $s_2 = 18$  y  $s_3 = 8$ . Por lo tanto,  $(0, 0, 20, 18, 8)$  es una solución básica factible.

2. Determinación de la dirección de movimiento.

Observando la función objetivo  $z$  aumenta más rápidamente si  $x_1$  aumenta en una unidad. Por lo tanto,  $x_1$  es la variable de entrada.

$$\begin{aligned} \text{¿Aumenta } x_1? & \text{ Tasa de mejoramiento } z = 7 \\ \text{¿Aumenta } x_2? & \text{ Tasa de mejoramiento } z = 4 \end{aligned} \quad (9)$$

Con esto se determina la variable de entrada  $x_1$ .

3. Prueba del cociente mínimo. Cuanto aumentar el valor de la variable básica entrante  $x_1$  antes de detenerse, para no salirse de la región factible.

Usando las restricciones y sabiendo que  $x_2 = 0$ , se obtiene:

$$\begin{aligned} 2 \cdot x_1 + s_1 &= 20 & (x_1 \leq 10) \\ x_1 + s_2 &= 18 & (x_1 \leq 18) \\ x_1 + s_3 &= 8 & (x_1 \leq 8) \quad \leftarrow \text{mínimo} \\ x_1, s_1, s_2, s_3 &\geq 0 \end{aligned} \tag{10}$$

Se la restricción que más limita el crecimiento se despeja y se la coloca en las demás ecuaciones.

4. Resolución de una nueva solución BF. Se reemplaza  $x_1 = 8 - s_3$  en las demás ecuaciones:

$$\begin{aligned} \text{máx } z &= 7 \cdot (8 - s_3) + 4 \cdot x_2 \\ &= 56 + 4 \cdot x_2 - 7 \cdot s_3 \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} 2 \cdot (8 - s_3) + x_2 + s_4 &= 20 & \longrightarrow & x_2 + s_1 - 2 \cdot s_3 = 4 \\ (8 - s_3) + x_2 + s_4 &= 18 & \longrightarrow & x_2 + s_2 - s_3 = 10 \end{aligned} \tag{12}$$

El sistema de ecuaciones equivalente es

$$\text{máx } z = 56 + 4 \cdot x_2 - 7 \cdot s_3 \tag{13}$$

$$\begin{aligned} x_2 + s_1 - 2 \cdot s_3 &= 4 \\ x_2 + s_2 - s_3 &= 10 \\ x_1 + s_3 &= 8 \\ x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 &\geq 0 \end{aligned} \tag{14}$$

5.