Mathematical Preliminaries

- Sets
- Graphs
- Proof Techniques

SETS

A set is a collection of elements

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$B = \{train, bus, bicycle, airplane\}$$

We write

$$1 \in A$$

$$ship \notin B$$

Set Representations

C = { a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k }

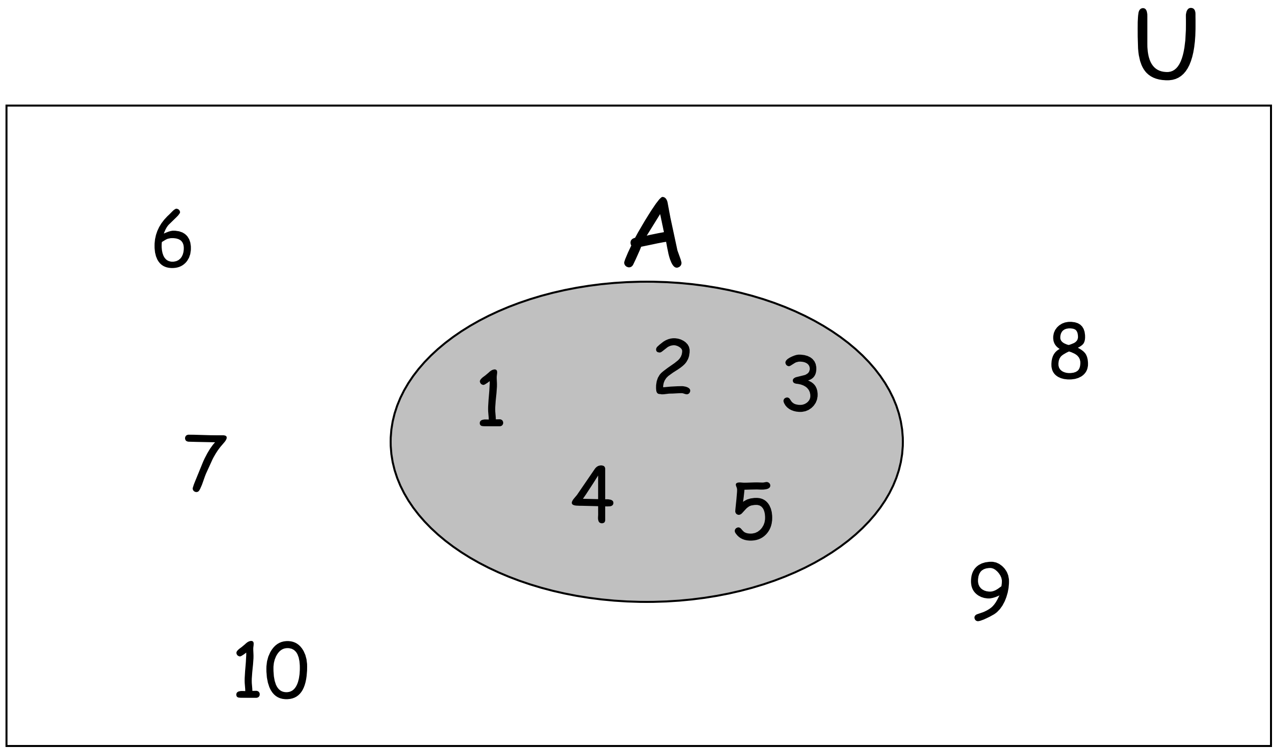
C = { a, b, ..., k } ⟶ *finite set*

S = { 2, 4, 6, ... } ⟶ *infinite set*

S = { j : j > 0, and j = 2k for some k>0 }

แทน k=1 , S = { 2, 4, 6 .... }

$A = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$



Universal Set: all possible elements

$U = \{ 1 , \ldots , 10 \}$

Set Operations

$A = \{ 1, 2, 3 \}$ $B = \{ 2, 3, 4, 5 \}$

- Union

$A \cup B = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$

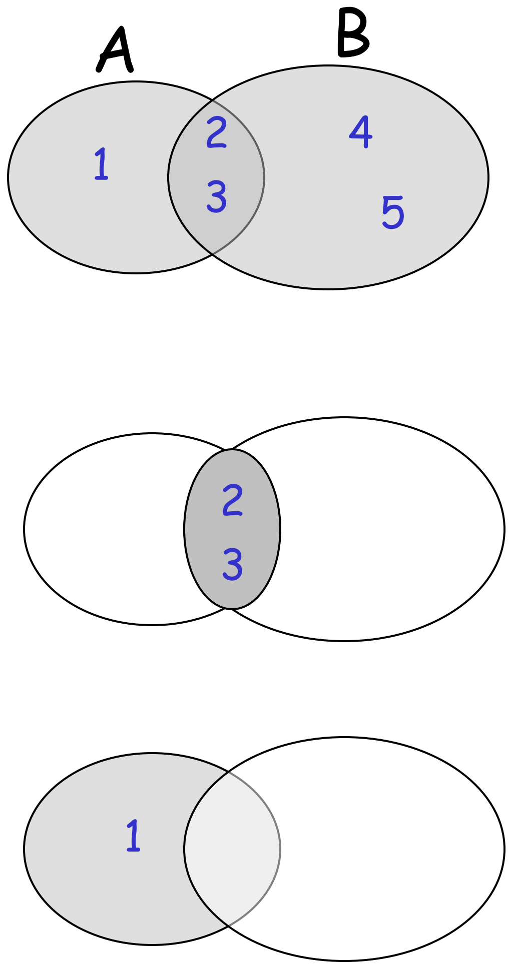
- Intersection

$A \cap B = \{ 2, 3 \}$

- Difference

$A - B = \{ 1 \}$

$B - A = \{ 4, 5 \}$

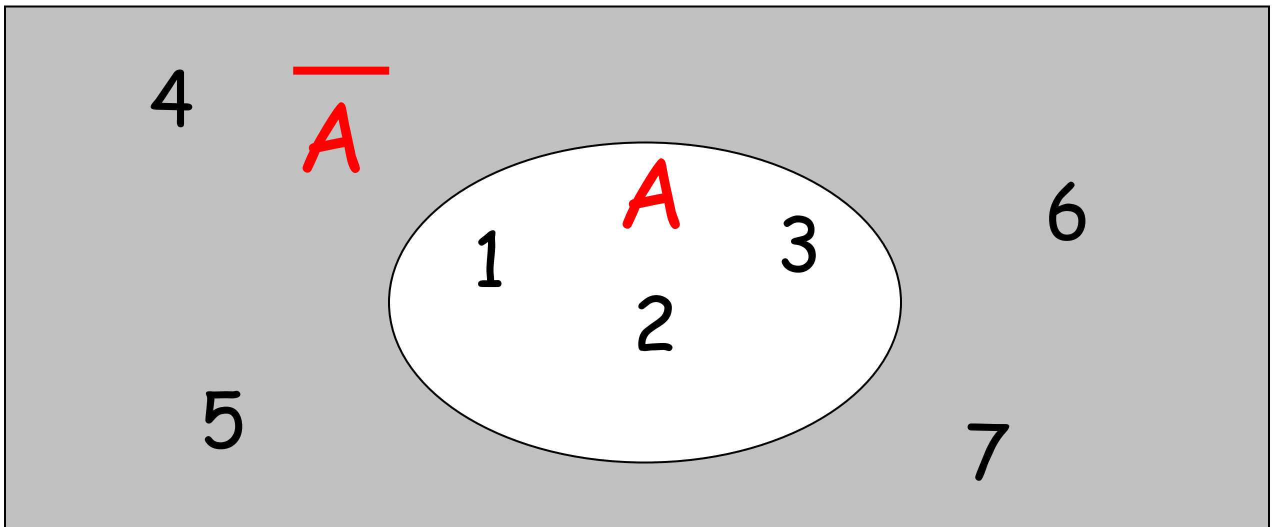


Venn diagrams

- Complement

Universal set = {1, …, 7}

$A = \{1, 2, 3\} \Rightarrow \overline{A} = \{4, 5, 6, 7\}$

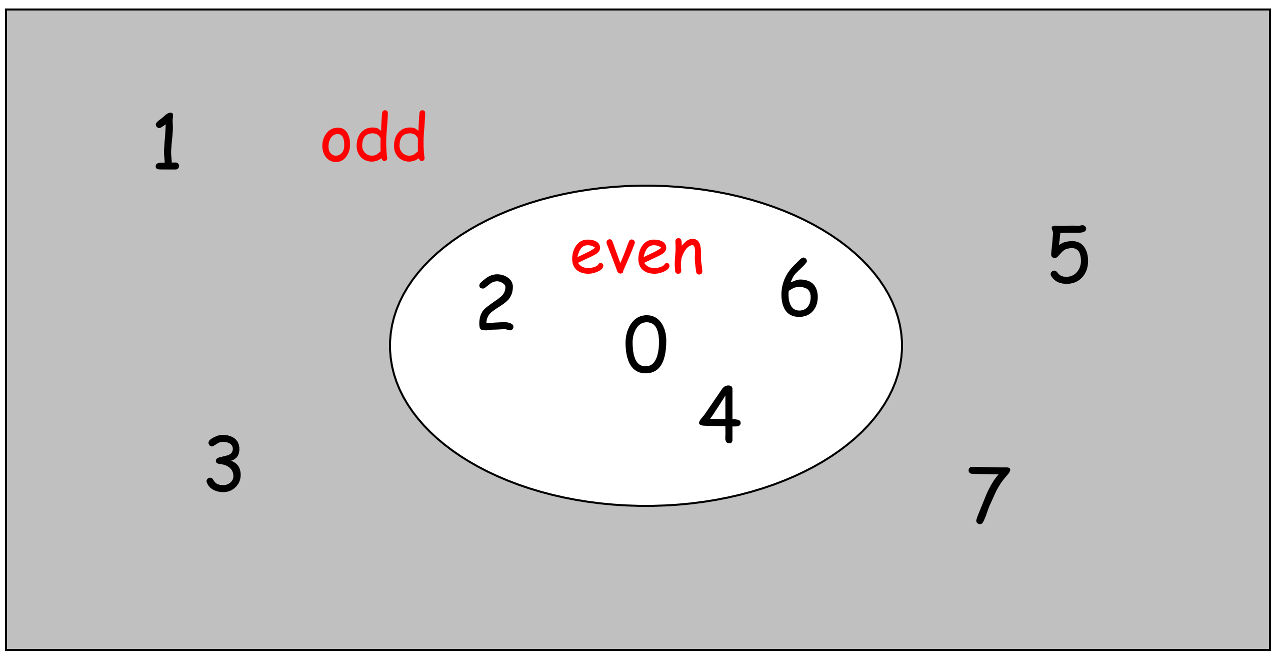


เหมือนเดิม

$\overline{\overline{A}} = A$

$$\overline{\{\text{ even integers }\}} = \{\text{ odd integers }\}$$

Integers



DeMorgan's Laws

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Empty, Null Set: $\emptyset$

$\emptyset = \{\ \}$

$S \cup \emptyset = S$

$S \cap \emptyset = \emptyset$

$\overline{\emptyset}$ = Universal Set

$S - \emptyset = S$

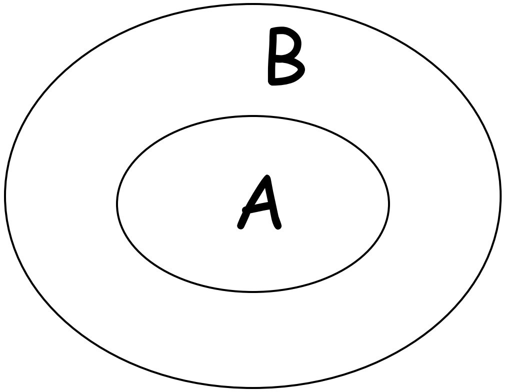
$\emptyset - S = \emptyset$

Subset

$A = \{ 1, 2, 3\}$ $B = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$

$$A \subseteq B$$

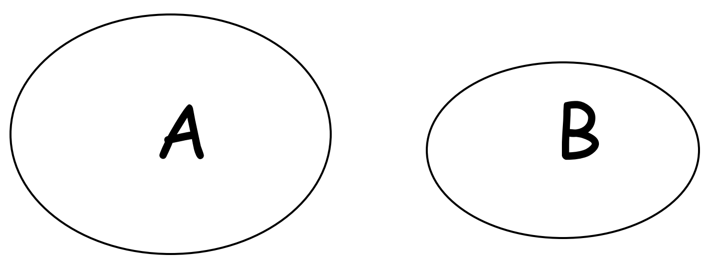
Proper Subset: $A \subset B$



ไม่มีสมาชิกร่วมกัน Disjoint Sets

$A = \{ 1, 2, 3 \}$ $\qquad$ $B = \{ 5, 6 \}$

$$A \cap B = \emptyset$$



ขนาดของ set

Set Cardinality

- For finite sets

$A = \{ 2, 5, 7 \}$

$|A| = 3$

(set size)

Powersets

A powerset is a set of sets

$S = \{ a, b, c \}$

เซ็ตของทุก sub set ที่เป็นไปได้

Powerset of S = the set of all the subsets of S

$2^S = \{ \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\} \}$

Observation: $| 2^S | = 2^{|S|}$ $\qquad$ $(8 = 2^3)$

การจับคู่

Cartesian Product

A = { 2, 4 }   B = { 2, 3, 5 }

A X B = { (2, 2), (2, 3), (2, 5), (4, 2), (4, 3), (4, 5) }

2 : 3

ขนาด A : ขนาด B

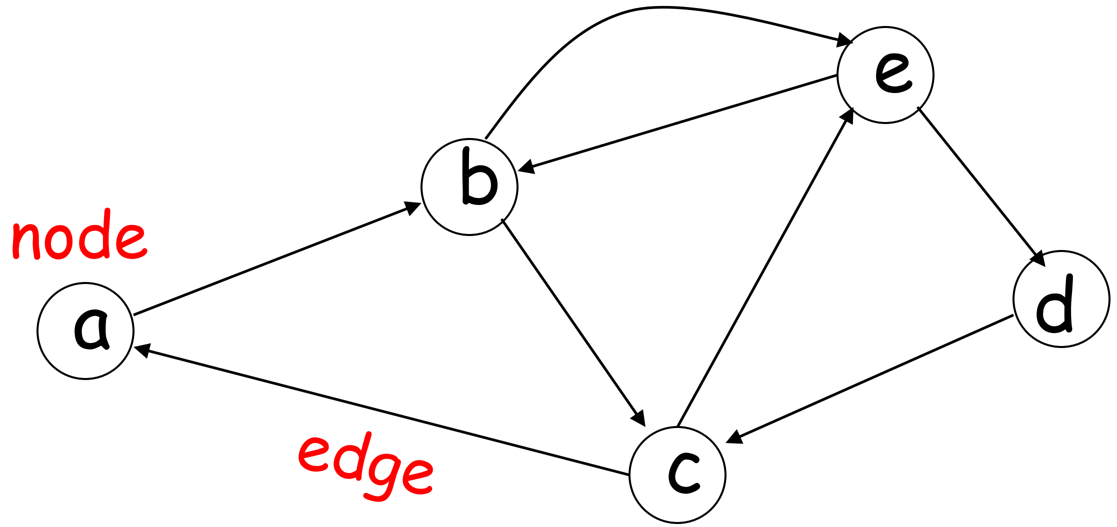
|A X B| = |A| |B|

Generalizes to more than two sets

A X B X … X Z

GRAPHS

A directed graph



- Nodes (Vertices)

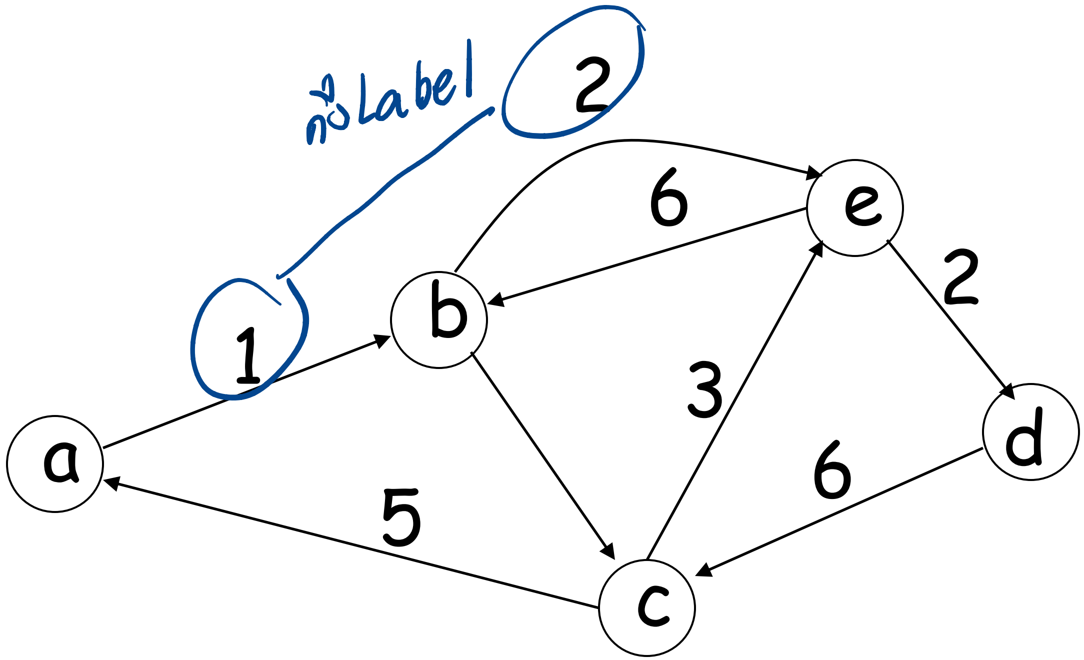
$$V = \{ a, b, c, d, e \}$$

- Edges

$$E = \{ (a,b), (b,c), (b,e), (c,a), (c,e), (d,c), (e,b), (e,d) \}$$

กราฟที่มีค่า

Labeled Graph

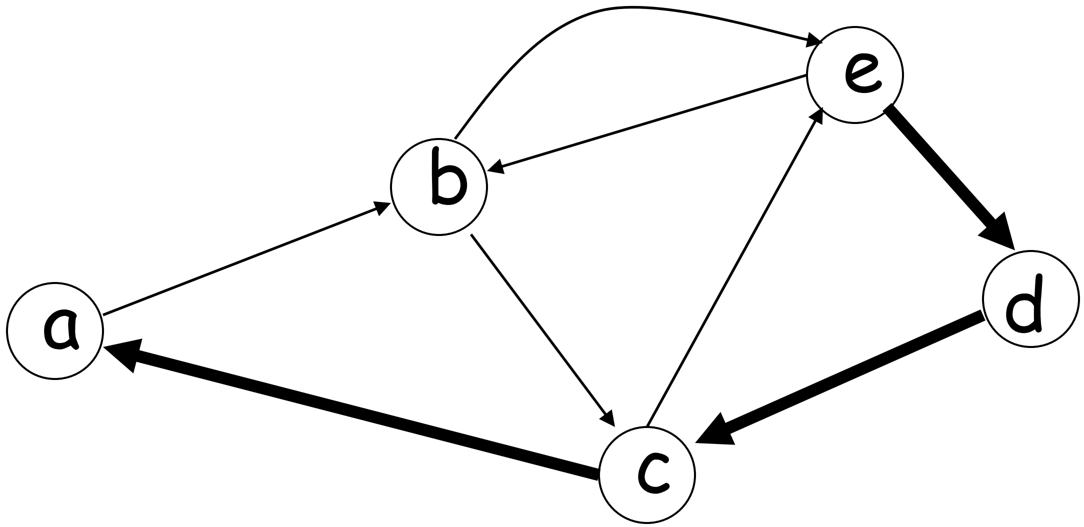


อาจเป็น

- cost ในการเดินทาง
- ลำดับการเกิด

Walk

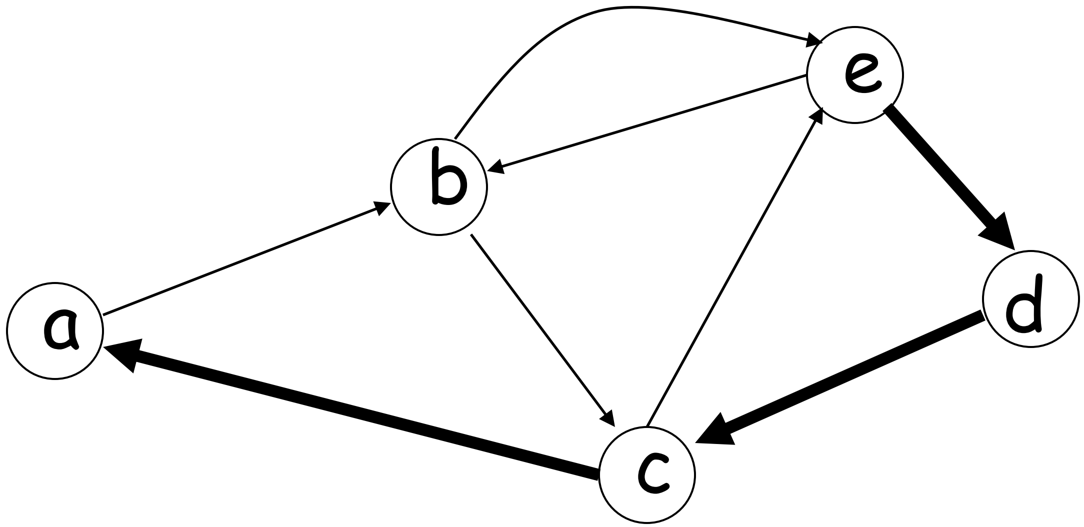
เดินทาง เดินซ้ำเส้นเดิมได้



Walk is a sequence of adjacent edges

(e, d), (d, c), (c, a)

Path



ห้ามซ้ำ

Path is a walk where no edge is repeated

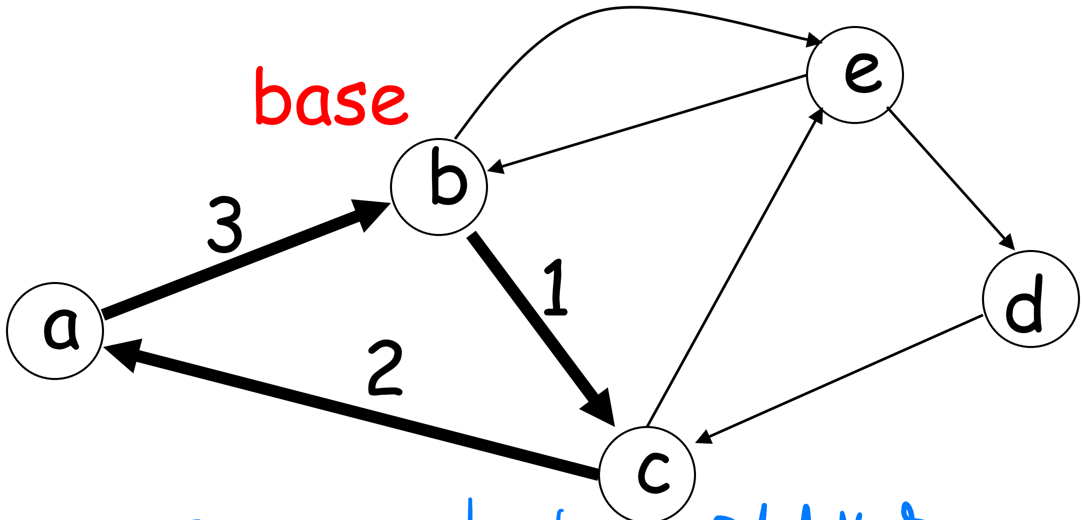
edge กับ node ห้ามซ้ำ

Simple path: no node is repeated

เดินกลับมาที่เดิม

Cycle

มี node 1 ที่เป็น base



เดินจาก node base ไปต้องมาพบเอง

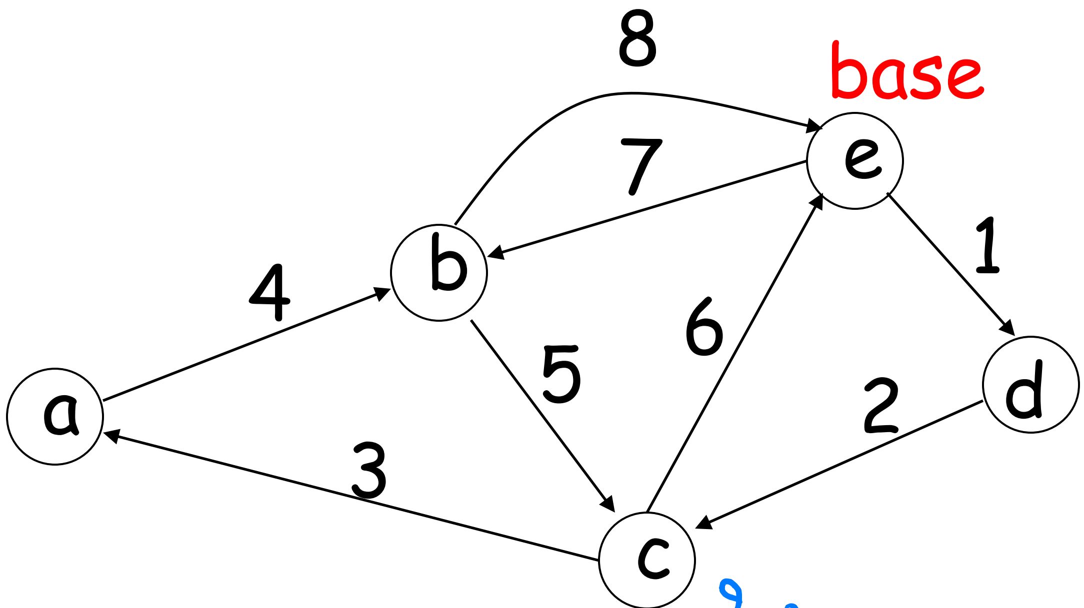
Cycle: a walk from a node (base) to itself

เฉพาะ ที่โดนซ้ำได้

Simple cycle: only the base node is repeated

“ผ่านทุก edge”

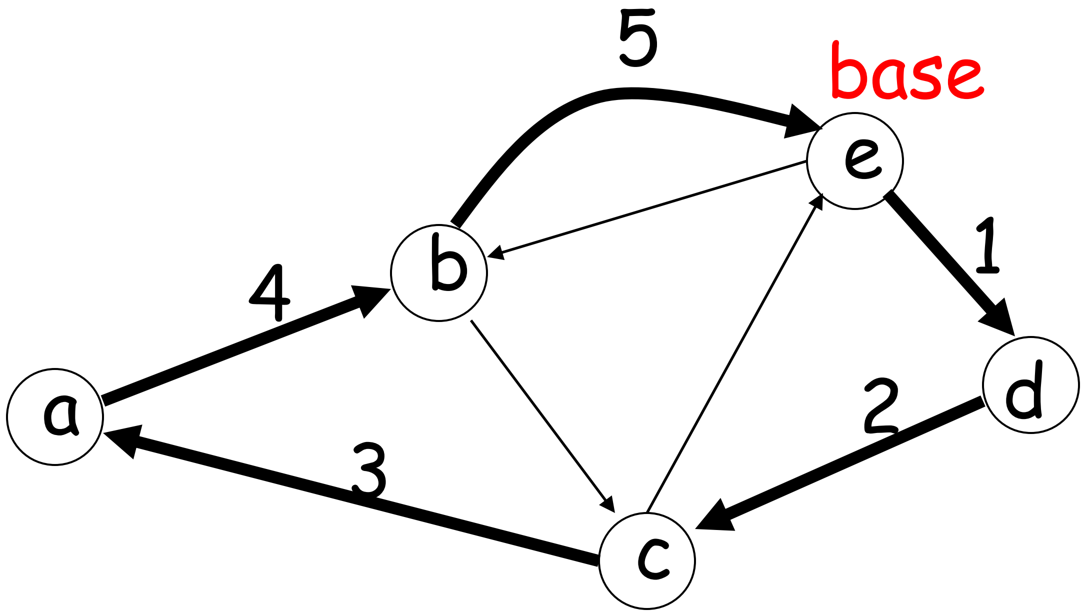
Euler Tour



(เส้น)
ผ่านแค่ edge แค่ครั้งเดียว

A cycle that contains each edge once

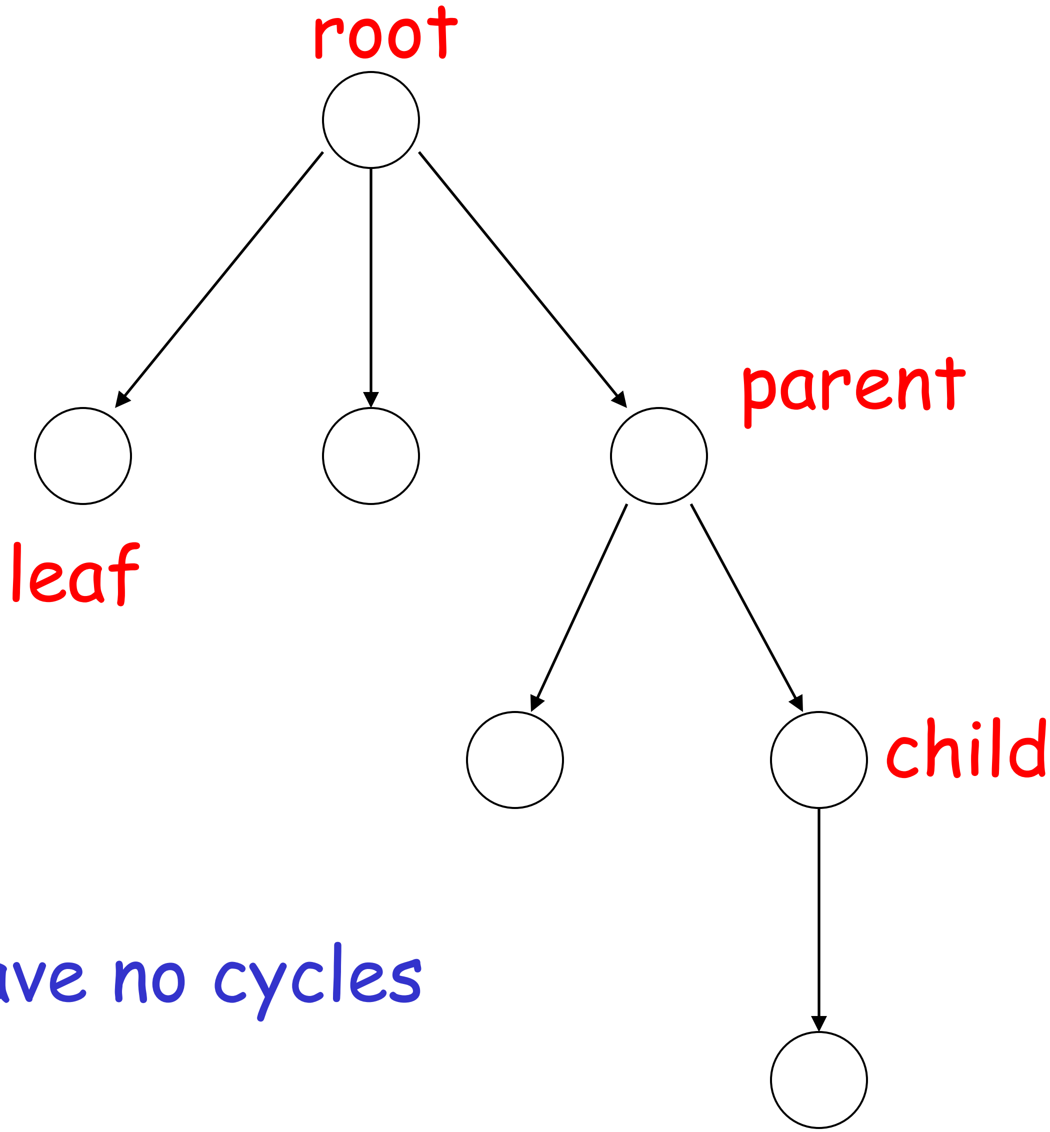
"ผ่านทุก node" Hamiltonian Cycle



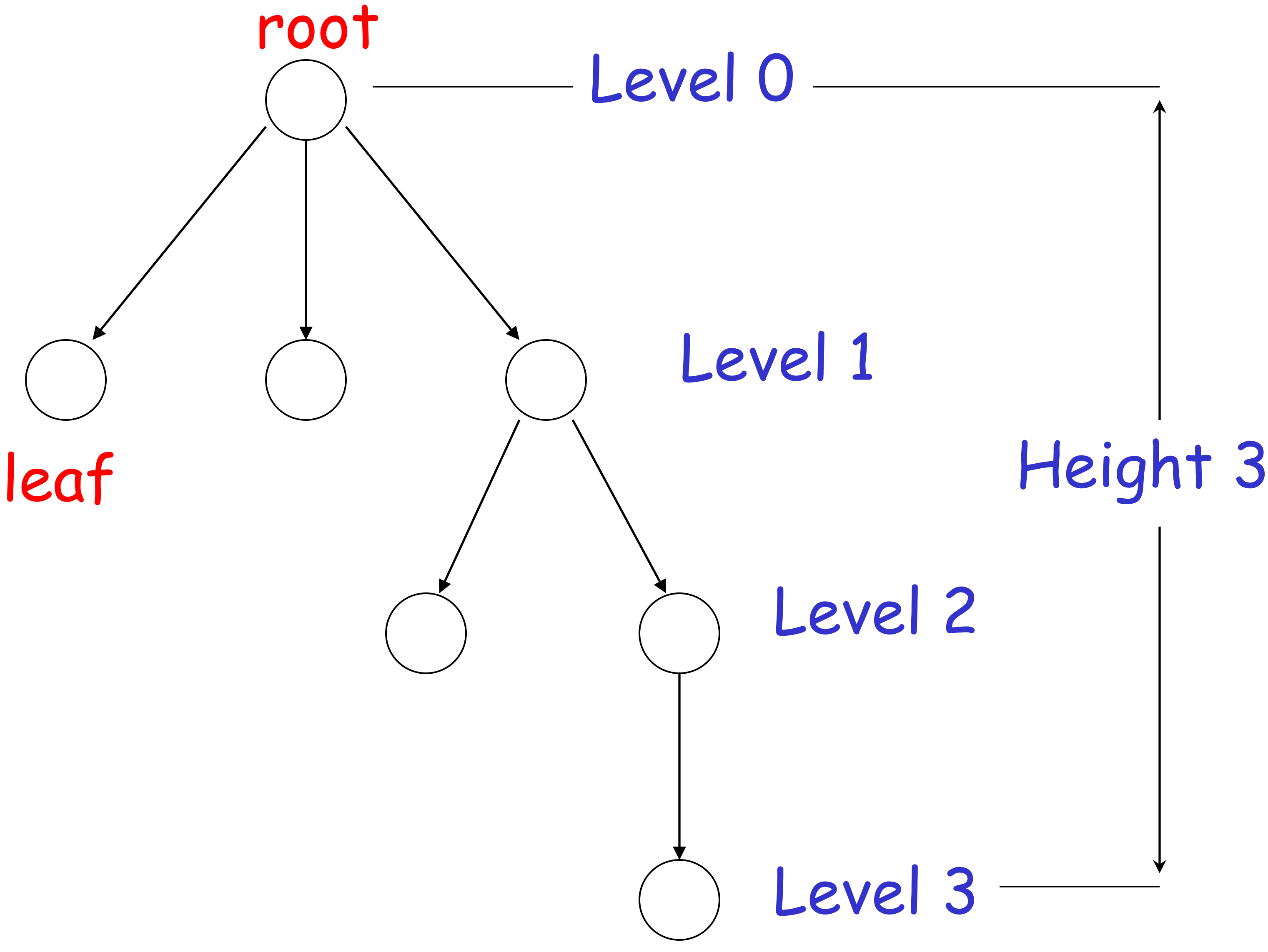
ผ่านครั้งเดียว แต่ผ่านทุก node

A simple cycle that contains all nodes

Trees

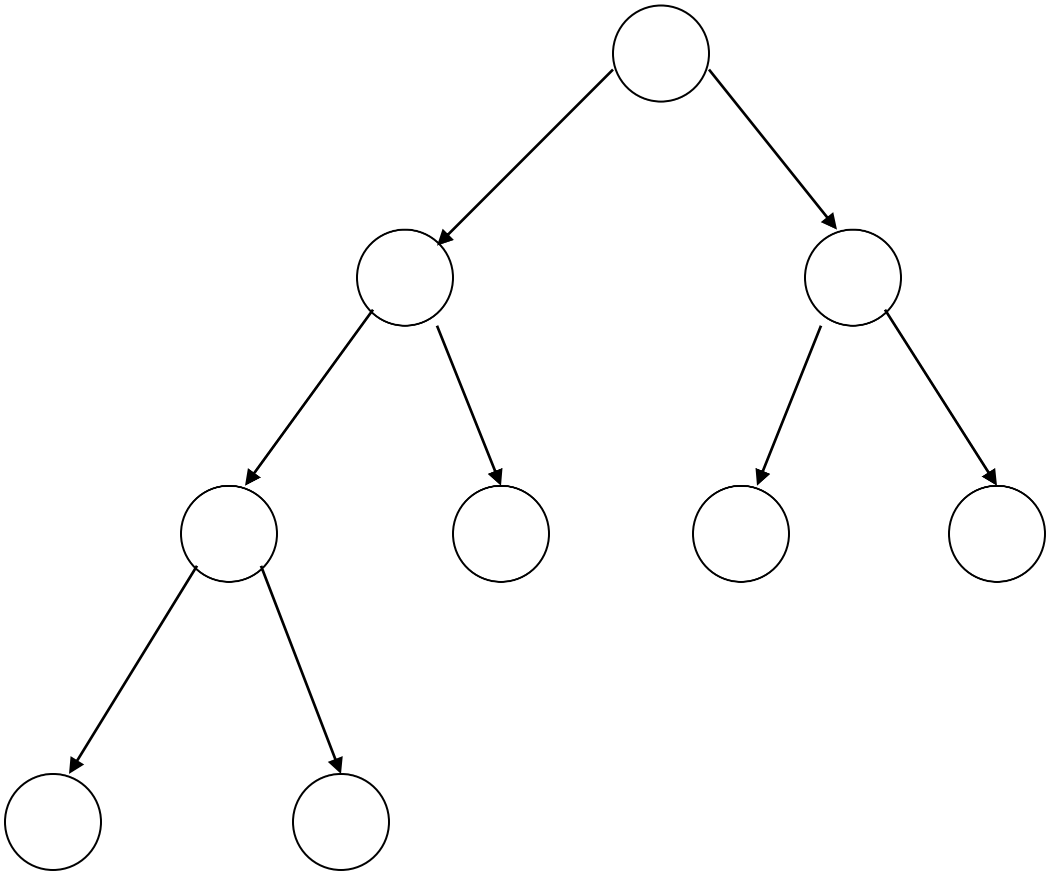


Trees have no cycles


root
Level 0
Level 1
leaf
Height 3
Level 2
Level 3

Binary Trees

แต่ละ node มีลูกได้ไม่เกิน 2 node



PROOF TECHNIQUES

- Proof by induction

- Proof by contradiction

Induction

พิสูจน์

We have statements $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_i$ เป็นจริง

If we know

รู้ว่า

- for some b that $P_1, P_2, \ldots, P_b$ are true
- for any $k >= b$ that

$$P_1, P_2, \ldots, P_k \text{ imply } P_{k+1}$$

(k=b) (k>b)

Then

Every P_i is true

Proof by Induction 3 step

หา base case

อาจมีหลาย case

1 • Inductive basis

Find P_1, P_2, …, P_b which are true

ตั้ง สมมติฐาน   สมมติให้เป็นจริง

๒ • Inductive hypothesis

Let's assume P_1, P_2, …, P_k are true,

for any k >= b

พิสูจน์

๓ • Inductive step

Show that P_{k+1} is true

Example

Theorem: A binary tree of height n

จำนวน leaves มากสุดไม่เกิน 2^n

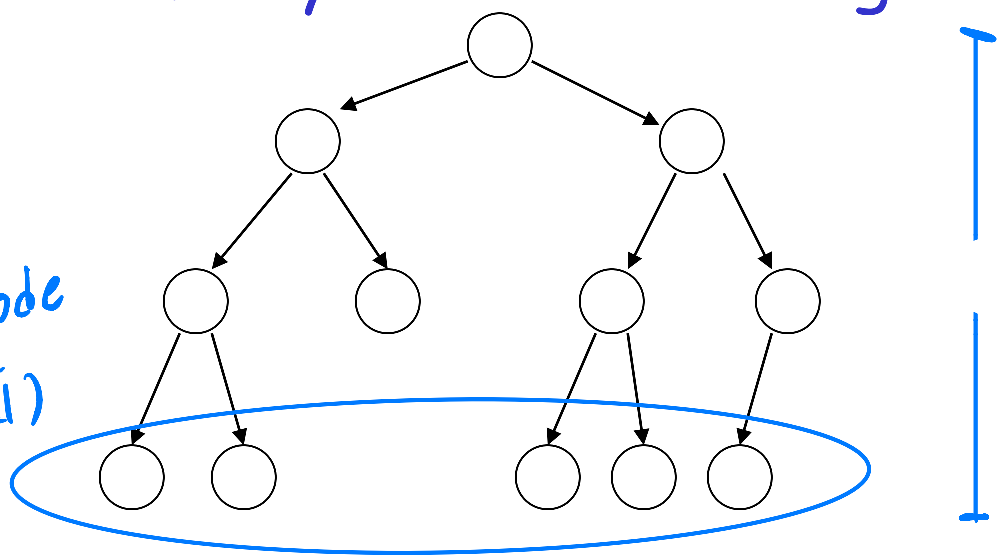
has at most 2^n leaves.

Proof by induction:

let $L(i)$ be the maximum number of

leaves of any subtree at height i

จำนวน node ที่ตามรูป $L(i)$

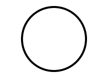


We want to show: $L(i) <= 2^i$

- Inductive basis

base case
(คิดเองได้)

$L(0) = 1$ (the root node)



ตั้งสมมติฐาน

- Inductive hypothesis

ให้ i มากสุด คือ k

Let's assume $L(i) <= 2^i$ for all $i = 0, 1, \ldots, k$

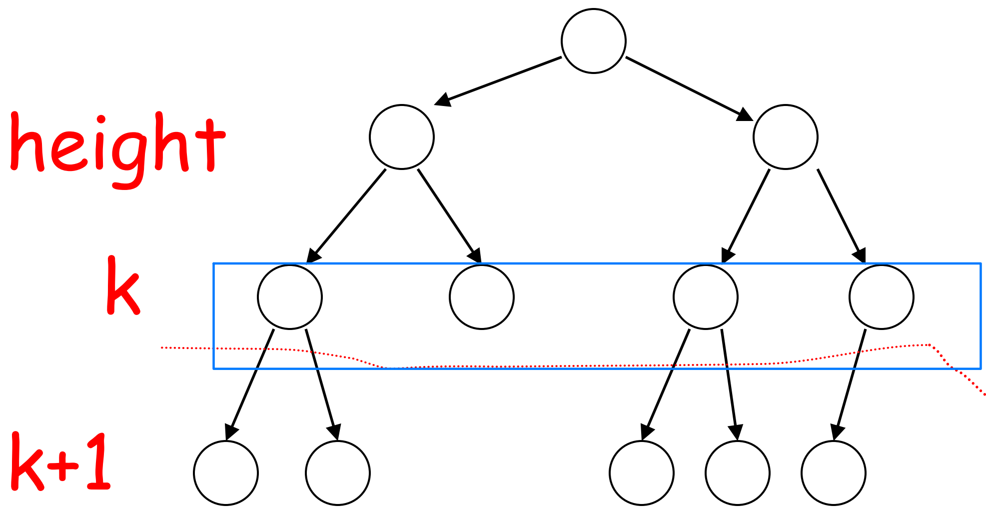
สิ่งที่พิสูจน์

- Induction step

แทนตรงๆไม่ได้ เพราะ ...

we need to show that $L(k + 1) <= 2^{k+1}$

Induction Step

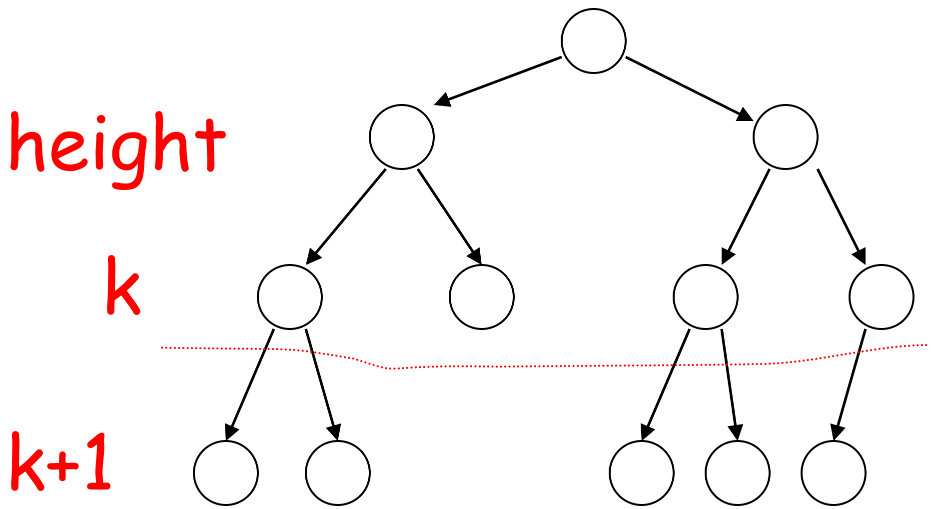


$i = k,\ L(k) \le 2^k$

$\therefore\ L(k+1) = 2^k \cdot 2$

From Inductive hypothesis: $L(k) <= 2^k$

Induction Step



$L(k) <= 2^k$

$$L(k+1) <= 2 * L(k) <= 2 * 2^k = 2^{k+1}$$

(we add at most two nodes for every leaf of level k)

Proof by Contradiction

การพิสูจแบบเงื่อนไข

We want to prove that a statement P is true

สมมติว่ามัน ผิด

- we assume that P is false

เจอข้อสรุปว่าผิด

- then we arrive at an incorrect conclusion

สรุปว่า

- therefore, statement P must be true

Example

ไม่ใช่ตรรกยะ

Theorem: $\sqrt{2}$ is not rational

Proof:

สมมติว่าเป็นตรรกยะ

Assume by contradiction that it is rational

$\sqrt{2}$ = n/m

ตัวประกอบร่วม

n and m have no common factors

We will show that this is impossible

$\sqrt{2} = n/m \Rightarrow 2m^2 = n^2$

① ↓ เลขคู่ ← ② เพราะ ③ $\boxed{2 \cdot m^2}$

Therefore, n^2 is even $\Rightarrow$ n is even

$$\boxed{n = 2k}$$

$(2k)^2$

$2m^2 = 4k^2 \Rightarrow m^2 = 2k^2 \Rightarrow$ m is even

เขียนในรูป $\boxed{m = 2p}$ ได้

มันมีตัวประกอบร่วม คือ 2   มันเป็นจริง

Thus, m and n have common factor 2

∴ สรุปว่า ..... เป็นจริง

Contradiction!

Languages

A language is a set of strings

String: A sequence of letters

Examples: "cat", "dog", "house", ...

letter

Defined over an alphabet:

$$\underbrace{\Sigma}_{\text{set ของ alphabet}} = \{a, b, c, \ldots, z\}$$

Alphabets and Strings

We will use small alphabets: $\Sigma = \{a, b\}$

สร้าง string ขึ้นจาก Σ ได้

Strings

a

ab

$abba$

$baba$

$aaabbbaabab$

ตัวแปร

$u = ab$

$v = bbbaaa$

$w = abba$

String Operations

$w = a_1 a_2 \cdots a_n$ $\quad$ $abba$

$v = b_1 b_2 \cdots b_m$ $\quad$ $bbbaaa$

เอามาต่อกัน

Concatenation

$wv = a_1 a_2 \cdots a_n b_1 b_2 \cdots b_m$ $\quad$ $abbabbbaaa$

$$w = a_1 a_2 \cdots a_n$$

ababaaabbb

การย้อน string (สลับ หลัง-หน้า)

Reverse

$$w^R = a_n \cdots a_2 a_1$$

bbbaaababa

ความยาวของ

String Length

$$w = a_1 a_2 \cdots a_n$$

Length: $|w| = n$

Examples:

$$|abba| = 4$$

$$|aa| = 2$$

$$|a| = 1$$

ความยาวของการ Length of Concatenation

$$|uv| = |u| + |v|$$

Example:

$$u = aab, \quad |u| = 3$$

$$v = abaab, \quad |v| = 5$$

$$|uv| = |aababaab| = 8$$

$$|uv| = |u| + |v| = 3 + 5 = 8$$

string ที่ไม่มี alphabet ตัวอักษร

Empty String

A string with no letters: λ / ε แทน empty string

จำตัวนี้

Observations: $$|\lambda| = 0$$

ต่อกับ string อื่น = string นั้น

$$\lambda w = w\lambda = w$$

$$\lambda abba = abba\lambda = abba$$

Substring

Substring of string:

a subsequence of consecutive characters

* ของแค่ติดกัน

String	Substring ของ string ใหญ่
$\underline{ab}bab$	ab
$\underline{abba}b$	$abba$
$ab\underline{b}ab$	b
$a\underline{bbab}$	$bbab$

substring " ส่วนหน้า ส่วนหลัง "

Prefix and Suffix

$$abbab$$

Prefixes	Suffixes
λ	$abbab$
a	$bbab$
ab	bab
abb	ab
$abba$	b
$abbab$	λ

$$w = uv$$

prefix

suffix

Another Operation

การทำซ้ำ w จน. n ครั้ง

$$w^n = \underbrace{ww\cdots w}_{n}$$

Example: $(abba)^2 = \underline{abba}\,\underline{abba}$

ทำซ้ำ ๐ ครั้ง = empty string

Definition: $\boxed{w^0 = \lambda}$

$$(abba)^0 = \lambda$$

The * Operation

Σ^* : the set of all possible strings from alphabet Σ

0, 1, 2, …, n ทำซ้ำตั้งแต่ 0 ครั้ง ขึ้นไป

$$\Sigma = \{a, b\}$$

มาจาก $\Sigma^0 \cup \Sigma^1 \cup \Sigma^2 \cup \ldots \Sigma^n$

$$\Sigma^* = \{\lambda, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, \ldots\}$$

$\Sigma^0 = \{\lambda\}$

$\Sigma^1 = \{a, b\}$

$\Sigma^2 = \{a, b\} . \{a, b\} = \{aa, ab, ba, bb\}$

$\Sigma^3 = \{a, b\} . \{a, b\} . \{a, b\} = \{aaa, aab, aba, abb, baa, bab, bba, bbb\}$

The + Operation

Σ^+ : the set of all possible strings from alphabet Σ except λ

ไม่มี empty string (λ)

$$\Sigma = \{a, b\}$$

$$\Sigma^* = \{\lambda, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, \ldots\}$$

$$\Sigma^+ = \Sigma^* - \lambda$$

$$\Sigma^+ = \{a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, \ldots\}$$

Languages

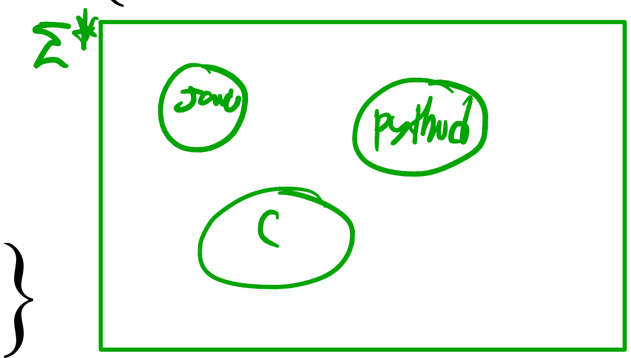
เป็น

A language is any subset of Σ^*

ใดๆ ของ

Example: $\Sigma = \{a, b\}$

universe $\longleftarrow$ $\Sigma^* = \{\lambda, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, \ldots\}$



Languages: $\{\lambda\}$

$\{a, aa, aab\}$

$\{\lambda, abba, baba, aa, ab, aaaaaa\}$

Note that:

$|\ldots| = 0$ $\qquad$ $|\ldots| = 1$

Sets $\qquad \emptyset = \{\ \} \neq \{\lambda\}$

Set size $\qquad |\{\ \}| = |\emptyset| = 0$

Set size $\qquad |\{\lambda\}| = 1$

String length $\qquad |\lambda| = 0$

Another Example

An infinite language $L = \{a^n b^n : n \geq 0\}$

$$\left.\begin{array}{ll} n=0 & \lambda \quad a^0=\lambda,\ b^0=\lambda \\ n=1 & ab \\ n=2 & aabb \\ n=5 & aaaaabbbbb \end{array}\right\} \in L$$

$abb \notin L$

ปกติ $a=2$ กับ $b=2$ ตัว

→ แบบที่ไม่อยู่ใน L

Operations on Languages

The usual set operations

$$\{a, ab, aaaa\} \cup \{bb, ab\} = \{a, ab, bb, aaaa\}$$

$$\{a, ab, aaaa\} \cap \{bb, ab\} = \{ab\}$$

$$\{a, ab, aaaa\} - \{bb, ab\} = \{a, aaaa\}$$

Complement: $\overline{L} = \Sigma^* - L$

$$\overline{\{a, ba\}} = \{\lambda, b, aa, ab, bb, aaa, \ldots\}$$

Reverse

Definition: $L^R = \{w^R : w \in L\}$

Examples: $\{ab, aab, baba\}^R = \{ba, baa, abab\}$

$$L = \{a^n b^n : n \geq 0\}$$

reverse $L^R = \{b^n a^n : n \geq 0\}$

Concatenation

การรวม

การทำ ... product ทร $\cdot$

Definition: $L_1L_2 = \{xy : x \in L_1, y \in L_2\}$

L_1 L_2

Example: $\{a, ab, ba\}\{b, aa\}$

$= \{ab, aaa, abb, abaa, bab, baaa\}$

Another Operation

เอาภาษาต่อกัน n ครั้ง

Definition:
$$L^n = \underbrace{LL \cdots L}_{n}$$

$$\{a,b\}^3 = \{a,b\}\{a,b\}\{a,b\} =$$
$$\{aaa, aab, aba, abb, baa, bab, bba, bbb\}$$

Special case: $L^0 = \{\lambda\}$

$$\{a, bba, aaa\}^0 = \{\lambda\}$$

More Examples

$$L = \{a^n b^n : n \geq 0\}$$

$$L^2 = \{a^n b^n a^m b^m : n, m \geq 0\}$$

$a^n b^n a^n b^n \longrightarrow$ ออกมาแบบตัวนี้ไม่ได้ $a^1 b^1 aabb$

$$aabbaaabbb \in L^2$$

Star-Closure (Kleene *)

Definition: $L^* = L^0 \cup L^1 \cup L^2 \cdots$

ทำซ้ำ ตั้งแต่ 0 - ....

Example:

$$\{a, bb\}^* = \left\{ \begin{array}{ll} \lambda, & L^0 \\ a, bb, & L^1 \\ aa, abb, bba, bbbb, & L^2 \\ aaa, aabb, abba, abbbb, \ldots & L^3 \end{array} \right\}$$

Positive Closure

ไม่มี empty (λ)

Definition: $$L^{+} = L^{1} \cup L^{2} \cup \cdots$$

$$= L^{*} - \{\lambda\}$$

$$\{a, bb\}^{+} = \left\{ \begin{array}{l} a, bb, \\ aa, abb, bba, bbbb, \\ aaa, aabb, abba, abbbb, \ldots \end{array} \right\}$$

Positive Closure

Definition:
$$L^+ = L^1 \cup L^2 \cup \cdots$$
$$= L^* - \{\lambda\}$$

$$\{a, bb\}^+ = \left\{\begin{array}{l} a, bb, \\ aa, abb, bba, bbbb, \\ aaa, aabb, abba, abbbb, \ldots \end{array}\right\}$$

Positive Closure

Definition:

$$L^+ = L^1 \cup L^2 \cup \cdots$$
$$= L^* - \{\lambda\}$$

$$\{a, bb\}^+ = \left\{ \begin{array}{l} a, bb, \\ aa, abb, bba, bbbb, \\ aaa, aabb, abba, abbbb, \ldots \end{array} \right\}$$