Projet Optimisation Robuste
Partie 1 - Modélisation papier

Benoit Duval, Raphaël Taisant

7 janvier 2024

1 Notations

Définissons les termes que nous allons utiliser. Soient :

- un graphe orienté $G = (V, A)$
- un sommet origine $s \in V$ et un sommet destination $t \in V$
- une durée de trajet d_{ij} associée à chaque arc $ij \in A$
- un poids p_i associé à chaque sommet $i \in V$

On a $d_{ij} \geq 0$ et $p_i \geq 0$.

Dans ce projet, on cherche à trouver un plus court chemin (en terme de temps) de s à t dont le poids des sommets utilisés est inférieur ou égal à un entier S.

2 Modélisation problème statique

Intéressons nous dans un premier temps au problème statique. Utilisons les variables binaires suivantes :

- $x_{ij} = 1$ si l'arc ij est utilisé, 0 sinon
- $y_i = 1$ si l'on passe par la ville i, 0 sinon

Pour simplifier les notations, on pourra considérer que les x_{ij} sont à la fois définis pour tout $i, j \in V^2$ (avec valeur 0 si $ij \notin A$) et définis uniquement pour $ij \in A$.

On peut modéliser ce problème à l'aide du PLNE 1 :

$$\begin{array}{rll}
min_{x,y} & \sum_{ij \in A} d_{ij} x_{ij} & \\
st & \sum_{i \in V} y_i p_i \leq S & \\
& \sum_{j \in V} x_{sj} = 1 & \\
& \sum_{i \in V} x_{it} = 1 & \\
& \sum_{j \in V} x_{ij} = y_i & \forall\, i \in V \setminus \{t\} \\
& \sum_{i \in V} x_{ij} = y_j & \forall\, j \in V \setminus \{s\} \\
& y_s = 1, y_t = 1 & \\
& x_{ij} \in \{0,1\} & \forall\, ij \in A \\
& y_i \in \{0,1\} & \forall\, i \in V
\end{array} \tag{1}$$

3 Modélisation problème robuste

On considère maintenant des incertitudes sur les durées.

$$\mathcal{U}^1 = \left\{ \left\{ d^1_{ij} = d_{ij}\left(1 + \delta^1_{ij}\right) \right\}_{ij \in A} \text{ st } \sum_{ij \in A} \delta^1_{ij} \leq d_1, \quad \delta^1_{ij} \in [0, D_{ij}] \quad \forall\, ij \in A \right\}$$

Avec D_{ij} et d_1 donnés. On considère également des incertitudes sur les poids.

$$\mathcal{U}^2 = \left\{ \left\{ p^2_i = p_i + \delta^2_i \hat{p}_i \right\}_{i \in V} \text{ st } \sum_{i \in V} \delta^2_i \leq d_2, \quad \delta^2_i \in [0, 2] \quad \forall\, i \in V \right\}$$

Avec $\hat{p}_i$ et d_2 donnés. On veut maintenant résoudre le problème robuste 2 :

$$\begin{array}{lll}
\min_{x,y} \max_{d^1 \in \mathcal{U}^1} & \sum_{ij \in A} d^1_{ij} x_{ij} & \\
st & \sum_{i \in V} y_i p^2_i \leq S & \forall p^2 \in \mathcal{U}^2 \\
& \sum_{j \in V} x_{sj} = 1 & \\
& \sum_{i \in V} x_{it} = 1 & \\
& \sum_{j \in V} x_{ij} = y_i & \forall\, i \in V \setminus \{t\} \\
& \sum_{i \in V} x_{ij} = y_j & \forall\, j \in V \setminus \{s\} \\
& y_s = 1, y_t = 1 & \\
& x_{ij} \in \{0,1\} & \forall\, ij \in A \\
& y_i \in \{0,1\} & \forall\, i \in V
\end{array} \tag{2}$$

4 Résolution par plans coupants et LazyCallback

On peut résoudre ce problème en utilisant des plans coupants. Pour cela, on commence par reformuler le problème robuste en faisant en sorte que la robustesse n'apparaisse plus dans l'objectif mais uniquement dans les contraintes, ce qui est fait dans le Pb. 3.

$$\begin{array}{lll}
\min_{x,y,z} & z & \\
st & \sum_{i \in V} y_i p^2_i \leq S & \forall p^2 \in \mathcal{U}^2 \\
& \sum_{j \in V} x_{sj} = 1 & \\
& \sum_{i \in V} x_{it} = 1 & \\
& \sum_{j \in V} x_{ij} = y_i & \forall\, i \in V \setminus \{t\} \\
& \sum_{i \in V} x_{ij} = y_j & \forall\, j \in V \setminus \{s\} \\
& y_s = 1, y_t = 1 & \\
& z \geq \sum_{ij \in A} d^1_{ij} x_{ij} & \forall d^1 \in \mathcal{U}^1 \\
& x_{ij} \in \{0,1\} & \forall\, ij \in A \\
& y_i \in \{0,1\} & \forall\, i \in V
\end{array} \tag{3}$$

On définit le problème maître à partir du Pb. 3 en remplaçant $\mathcal{U}^1$ et $\mathcal{U}^2$ par respectivement $\mathcal{U}^{1*}$ et $\mathcal{U}^{2*}$. Initialement, pour résoudre le problème maître, on peut partir de $\mathcal{U}^{1*} = \varnothing$ et $\mathcal{U}^{2*} = \varnothing$.

Après avoir résolu le problème maître et obtenu des x^*, y^* et z^*, on résout les sous problèmes ci-dessous. Pour les contraintes sur les durées, on résout le Pb. 4 :

$$\begin{array}{llll}
V^1 = & \max_{\delta^1} & \sum_{ij \in A} d_{ij}\left(1 + \delta^1_{ij}\right) x^*_{ij} & \\
& st & \sum_{ij \in A} \delta^1_{ij} \leq d_1 & \\
& & \delta^1_{ij} \in [0, D_{ij}] & \forall\, ij \in A
\end{array} \tag{4}$$

Pour les contraintes de poids, on résout le Pb. 5

$$V^2 = \begin{array}{ll} \max_{\delta^2} & \sum_{i\in V} x_i^* \left(p_i + \delta_i^2 \hat{p}_i\right) \\ st & \sum_{i\in V} \delta_i^2 \leq d_2 \\ & \delta_i^2 \in [0,2] \qquad\qquad \forall\, ij \in A \end{array} \tag{5}$$

Si on a :

$$\begin{cases} z^* \geq V^1 \\ S \geq V^2 \end{cases}$$

Alors, la solution du problème maître est optimale.

Si la contrainte de durée n'est pas respectée, on ajoute la coupe suivante au problème maître :

$$\sum_{ij\in A} d_{ij} \left(1 + \delta_{ij}^{1*}\right) x_{ij} \leq z$$

Si la contrainte de poids n'est pas respectée, on ajoute la coupe suivante au problème maître :

$$\sum_{i\in V} x_i \left(p_i + \delta_i^{2*} \hat{p}_i\right) \leq S$$

On résout le problème maître, puis les sous-problèmes. Tant que les conditions d'optimalité ne sont pas respectées, on ajoute des coupes et on itère.

5 Résolution par dualisation

On peut également résoudre ce problème en utilisant de la dualisation. On peut réécrire le problème comme présenté dans le Pb. 6, en explicitant les deux sous problèmes avec des couleurs différentes :

$$\begin{array}{lll} \min_{x,y} \max_{\delta^1} & \sum_{ij\in A} d_{ij}(1+\delta_{ij}^1) x_{ij} & \\ st & \sum_{ij\in A} \delta_{ij}^1 \leq d_1 & \\ & \delta_{ij}^1 \in [0, D_{ij}] \quad \forall\, ij \in A & \\ & \max_{\delta^2} \sum_{i\in V} \left(p_i + \delta_i^2 \hat{p}_i\right) y_i \leq S & \\ & \quad \sum_{i\in V} \delta_i^2 \leq d_2 & \\ & \quad \delta_i^2 \in [0,2] \quad \forall\, i \in V & \\ & \sum_{j\in V} x_{sj} = 1 & \\ & \sum_{i\in V} x_{it} = 1 & \\ & \sum_{j\in V} x_{ij} = y_i & \forall\, i \in V \setminus \{t\} \\ & \sum_{i\in V} x_{ij} = y_j & \forall\, j \in V \setminus \{s\} \\ & y_s = 1, y_t = 1 & \\ & x_{ij} \in \{0,1\} & \forall\, ij \in A \\ & y_i \in \{0,1\} & \forall\, i \in V \end{array} \tag{6}$$

On extrait du Pb. 7 le problème lié à la fonction objectif :

$$\begin{array}{llll} \max_{\delta^1} & \sum_{ij\in A} d_{ij}(1+\delta_{ij}^1) x_{ij} & & \\ st & \sum_{ij\in A} \delta_{ij}^1 \leq d_1 & & (\eta) \\ & \delta_{ij}^1 \leq D_{ij} & \forall\, ij \in A & (\lambda_{ij}) \\ & \delta_{ij}^1 \geq 0 & \forall\, ij \in A & \end{array} \tag{7}$$

On extrait le terme en $d_{ij} x_{ij}$ de l'objectif puisqu'il est indépendant de δ^1, et on peut dualiser le problème pour obtenir un problème de minimisation, en associant la variable duale η a la contrainte sur la somme des δ^1_{ij} et les variables λ_{ij} aux bornes sup sur les δ^1_{ij}. On obtient le Pb. 8:

$$\begin{array}{lll} \min_{\lambda,\eta} & d_1\eta + \sum_{ij\in A}(d_{ij}x_{ij} + D_{ij}\lambda_{ij}) & \\ st & \eta + \lambda_{ij} \geq d_{ij}x_{ij} & \forall\, ij \in A \\ & \eta \geq 0, \lambda_{ij} \geq 0 \quad \forall\, ij \in A & \end{array} \tag{8}$$

De même on extrait le Pb. 9 le problème lié à la contrainte robuste :

$$\begin{array}{llll} \max_{\delta^2} & \sum_{i\in V}(p_i + \delta^2_i \hat{p}_i)\, y_i & & \\ st & \sum_{i\in V}\delta^2_i \leq d_2 & & (\alpha) \\ & \delta^2_i \leq 2 & \forall\, i \in V & (\beta_i) \\ & \delta^2_i \geq 0 & \forall\, i \in V & \end{array} \tag{9}$$

On dualise le problème associé à la contrainte robuste, en introduisant la variable duale α à la contrainte sur la somme des δ^2_i et les variables β_i aux bornes sup sur les δ^2_i. On obtient alors le Pb. 10:

$$\begin{array}{lll} \min_{\alpha,\beta} & d_2\alpha + \sum_{i\in V}(p_i y_i + 2\beta_i) & \\ st & \alpha + \beta_i \geq \hat{p}_i y_i & \forall\, ij \in A \\ & \alpha \geq 0, \beta_i \geq 0 \quad \forall\, i \in V & \end{array} \tag{10}$$

On peut désormais intégrer les deux reformulations afin d'obtenir un seul problème linéaire en nombre entier, présenté dans le Pb. 11 :

$$\begin{array}{lll} \min_{x,y,\eta,\lambda,\alpha,\beta} & d_1\eta + \sum_{ij\in A}(d_{ij}x_{ij} + D_{ij}\lambda_{ij}) & \\ st & \eta + \lambda_{ij} \geq d_{ij}x_{ij} & \forall\, ij \in A \\ & d_2\alpha + \sum_{i\in V}(p_i y_i + 2\beta_i) \leq S & \\ & \alpha + \beta_i \geq \hat{p}_i y_i & \forall\, i \in V \\ & \sum_{j\in V} x_{sj} = 1 & \\ & \sum_{i\in V} x_{it} = 1 & \\ & \sum_{j\in V} x_{ij} = y_i & \forall\, i \in V \setminus \{t\} \\ & \sum_{i\in V} x_{ij} = y_j & \forall\, j \in V \setminus \{s\} \\ & y_s = 1, y_t = 1 & \\ & x_{ij} \in \{0,1\}, \lambda_{ij} \geq 0 & \forall\, ij \in A \\ & y_i \in \{0,1\}, \beta_i \geq 0 & \forall\, i \in V \\ & \alpha, \eta \geq 0 & \end{array} \tag{11}$$