

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«ВОЛГОГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт математики и информационных технологий
Кафедра математического анализа и теории функций

«Допустить к защите»

Заведующий кафедрой МАТФ
д.ф.-м.н., доцент
Клячин Алексей Александрович
«__»_____ 2017 г.

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
по направлению подготовки бакалавров
02.03.01 «Математика и компьютерные науки»

**«Применение численных методов при визуализации решений некоторых
уравнений с частными производными на римановых многообразиях»**

ВЫПОЛНИЛ: студент гр. МКН-131
Давыдов Алексей Сергеевич

подпись

НАУЧНЫЙ РУКОВОДИТЕЛЬ:
к.ф.-м.н., доцент
Романова Ирина Андреевна

подпись

РЕЦЕНЗЕНТ:
к.ф.-м.н., доцент
Кондрашов Александр Николаевич

подпись

Волгоград 2017

Оглавление

Введение	3
1 Общие сведения	4
1.1 Теоретическая постановка задачи	4
1.2 Особенности численного решения уравнения	5
1.3 О среде разработки	8
2 Построение численной модели	9
2.1 Вывод уравнения теплопроводности на торе	9
2.2 Численное решение	12
2.3 Пример реализации	24
3 Визуализация	29
3.1 О подходе к моделированию	29
3.2 Результаты	30
3.2.1 Пример 1	30
3.2.2 Пример 2	31
3.2.3 Пример 3	32
3.2.4 Пример 4	33
Литература	34

Введение

Данная работа посвящена построению 3D модели решения классического уравнения теплопроводности на торе

$$u_t = a^2 \Delta u + f(x, t), \quad (1)$$

где $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $t \in \mathbb{R}$. Для визуализации функции трех переменных $u(x, t)$ использована стандартная интерпретация x как пространственной переменной, t как времени. Таким образом, визуальная модель решения уравнения на определенном временном интервале представляет собой видеоряд, демонстрирующий изменение значений функции.

Актуальность выбранной тематики обусловлена востребованностью научной визуализации в различных отраслях знания, в частности, в области визуального представления численных решений различных математических задач ([1], [2]).

Цель работы – разработка и реализация метода решения и визуального представления решения уравнений в частных производных на примере нестационарного уравнения теплопроводности на торе.

Для достижения поставленной цели решаются следующие задачи:

- Изучение методов аналитических решений уравнения (1).
- Изучение численных методов решения уравнений в частных производных.
- Построение модели решения уравнения (1).
- Создание программы на языке C++ для реализации численного решения.
- Передача полученных расчетов в 3D-редактор Blender.
- Визуализация построенной модели.

Глава 1

Общие сведения

1.1 Теоретическая постановка задачи

В курсе математической физики рассматриваются множество уравнений, позволяющих описать математические модели физических явлений, например: колебание струны, распространение тепла в стержне, движение жидкости, и т.п. Но в данной работе мы будем рассматривать уравнение теплопроводности как наиболее наглядный пример для визуализации.

Процесс распространение тепла описывается следующим уравнением:

$$c\rho u_t = \operatorname{div}(\kappa \operatorname{grad} u) + F(x, t). \quad (1.1)$$

Где $u = u(x, t)$ - температура среды в точке $x = (x_1, x_2, x_3)$ в момент времени t , c - удельная теплоемкость, ρ - плотность, κ - теплопроводность. А $F(x, t)$ - интенсивность источников тепла в точке x в момент времени t .

Если среда однородна, т.е. c, ρ и κ - постоянные, тогда уравнение (1.1) принимает вид

$$u_t = a^2 \Delta u + f(x, t), \quad (1.2)$$

где

$$a^2 = \frac{\kappa}{c\rho}, \quad f(x, t) = \frac{F(x, t)}{c\rho}.$$

Для полного описания процесса распространения тепла необходимо задать начальные и граничные условия:

$$\begin{aligned} u|_{t=0} &= u_0(x), \\ u|_S &= \mu(t). \end{aligned}$$

Здесь $u_0(x)$ - распределение тепла в среде в начальный момент времени $t = 0$, $\mu(t)$ - функция поддерживаемой на границе S распределения температуры. Существуют также другие граничные условия, более подробно об этом можно найти в [3].

1.2 Особенности численного решения уравнения

Как уже было сказано выше, найти аналитическое решение уравнения в частных производных зачастую затруднительно. И даже если для определенной области оно будет найдено, то при изменении начальных и граничных условий встает необходимость решать задачу практически заново.

В случае уравнения теплопроводности, основные трудности возникают при изменении области или системы координат, например уравнение (1.2) в бесконечном цилиндре принимает следующий вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right) + f(r, \varphi, t).$$

Для аналитического решения данного уравнения необходимо использовать функции Бесселя, которые являются достаточно нетривиальной конструкцией. И хотя использование специальных функций позволяет в некоторых случаях найти аналитическое решение, сама их специфика такова, что вычисление значения решения в какой-либо точке отнюдь не является тривиальной задачей. В таком контексте использование численных методов для нахождения приближенных решений не теряет своей актуальности.

Классическим способом численного решения уравнения теплопроводности является метод конечных разностей. Для его реализации необходимо покрыть область решения сеткой и для каждого узла записать разностное уравнение путем замены производных на конечные разности.

Пусть дано одномерное уравнение теплопроводности:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), & 0 < x < l, 0 < t \leq T \\ u(x, 0) = \varphi(x), & 0 \leq x \leq l \\ u(0, t) = \mu(t), \\ u(l, t) = \nu(t). & 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

Покроем непрерывную область $[0..l] \times [0..T]$ равномерной сеткой:

$$\begin{aligned} t^k &= k\Delta t, \quad k = 0, 1, 2, \dots, K, \\ x_i &= i\Delta x, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N, \end{aligned}$$

где Δt - шаг сетки по времени, Δx - шаг сетки по пространству

Вместо функций рассматриваются последовательности их значений в узлах сетки:

$$\begin{aligned} u_i^k &= u(x_i, t^k) \\ f_i^k &= f(x_i, t^k) \end{aligned}$$

По определению производной:

$$u_t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t},$$

зафиксировав Δt , получим:

$$u_t \approx \frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t}.$$

Производная по x имеет второй порядок и аппроксимируется следующим соотношением:

$$\begin{aligned} u_{xx} &\approx \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{u(x + \Delta x, t) - u(x, t)}{\Delta x} - \frac{u(x, t) - u(x - \Delta x, t)}{\Delta x} \right] = \\ &= \frac{u(x + \Delta x, t) - 2u(x, t) + u(x - \Delta x, t)}{\Delta x^2}. \end{aligned}$$

Переходя к конечно-разностному представлению производных

$$u_t = \frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\Delta t}, \quad u_{xx} = \frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{\Delta x^2}.$$

получим следующий вид задачи (1.2)

$$\begin{cases} \frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\Delta t} = a^2 \left(\frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{\Delta x^2} \right) + f_i^k & k = 0, 1, 2, \dots, K \quad i = 0, 1, 2, \dots, N \\ u_i^0 = \varphi_i^0, \\ u_0^k = \mu_0^k, \\ u_N^k = \nu_N^k. \end{cases}$$

где φ_i^0 - последовательность, задающая начальное условие, μ_0^k и ν_N^k - граничные условия на концах отрезка. Перегруппируем слагаемые уравнения и получим:

$$u_i^{k+1} = \frac{a^2 \Delta t}{\Delta x^2} u_{i+1}^k + \left(1 - 2 \frac{a^2 \Delta t}{\Delta x^2} u_i^k \right) + \frac{a^2 \Delta t}{\Delta x^2} u_{i-1}^k + \Delta t f_i^k.$$

Так как из условий задачи нам известно u_i^0 , то схема позволяет последовательно определять значение функции u_i^{k+1} , поэтому такая схема называется явной. Для нее характерно сравнительно мало вычислений, однако она является неустойчивой.

Для того, чтобы схема стала устойчивой, ее можно переписать в таком виде:

$$\frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\Delta t} = a^2 \left(\frac{u_{i+1}^{k+1} - 2u_i^{k+1} + u_{i-1}^{k+1}}{\Delta x^2} \right) + f_i^k \quad k = 0, 1, 2, \dots, K \quad i = 0, 1, 2, \dots, N$$

Такая схема называется неявной и для нахождения значений функции в узлах сетки необходимо на каждом временном слое решать систему линейных уравнений. Более подробно это будет рассмотрено во второй главе.

1.3 О среде разработки

Визуализацию поведения решения уравнения теплопроводности можно описать следующими этапами:

- 1) Нахождение значений решения разностного уравнения в узлах сетки.
- 2) Построение модели с помощью полученных данных в заданной ограниченной области. При этом данная процедура проводится для каждого временного слоя.
- 3) Компиляция отдельных моделей, заданных в определенный момент времени, в единый видеофайл.

Первый этап требует вычисления огромного количества арифметических операций. Поэтому для решения данной задачи была написана программа на C++. Данный язык обладает хорошим быстродействием и гибкостью.

Остальные два этапа реализованы с помощью программы трехмерного моделирования Blender. Данный редактор включает в себя все необходимые инструменты: создание полигональной модели, ее деформирование и изменение цвета во времени, анимирование полученного результата. Немаловажным преимуществом выбранной программы для моделирования является возможность использования Python-скриптов. Это позволяет автоматизировать весь процесс визуализации.

Так как само уравнение решается на C++, а визуализация реализована на Blender с помощью скриптов на языке Python, то возникает проблема обмена данных между этими несвязанными программными модулями. Очевидным решением является сохранение полученного решения на жестком диске и дальнейшее его использование при визуализации. Данный способ имеет очень серьезный недостаток - очень медленная скорость работы. Поэтому был выбран альтернативный подход. Программа на C++ преобразована в динамическую библиотеку и в дальнейшем, с помощью пакета ctypes, реализован доступ к функциям .dll файла из скрипта на Python.

Глава 2

Построение численной модели

2.1 Вывод уравнения теплопроводности на торе

Пусть дано уравнение теплопроводности:

$$u_t = a^2 \Delta u + f(x, t) \quad (2.1)$$

Рассмотрим его на торе. Но для этого потребуется найти оператор Лапласа на этой поверхности. Воспользуемся представлением оператора Лапласа-Бельтрами в криволинейных координатах:

$$\Delta u = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x^j} \right), \quad (2.2)$$

где n - размерность риманова многообразия, g - определитель матрицы метрического тензора, g^{ij} - обратная матрица.

Для применения формулы (2.2) найдем метрику

$$dr^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Пересчитаем ее через параметрическое уравнение тора:

$$\begin{cases} x = (R + r \cos \varphi) \cos \psi \\ y = (R + r \cos \varphi) \sin \psi \\ z = r \sin \varphi \end{cases}$$

Тогда:

$$dx^2 = d((R + r \cos \varphi) \cos \psi)^2 = (-r \sin \varphi \cos \psi d\varphi - (R + r \cos \varphi) \sin \psi)^2 = \\ r^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \psi d\varphi^2 + 2r(R + r \cos \varphi) \sin \varphi \sin \psi \cos \psi d\varphi d\psi + (R + r \cos \varphi)^2 \sin^2 \psi d\psi^2$$

$$dy^2 = d((R + r \cos \varphi) \sin \psi)^2 = (-r \sin \varphi \sin \psi d\varphi + (R + r \cos \varphi) \cos \psi)^2 = \\ r^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \psi d\varphi^2 - 2r(R + r \cos \varphi) \sin \varphi \sin \psi \cos \psi d\varphi d\psi + (R + r \cos \varphi)^2 \cos^2 \psi d\psi^2$$

$$dz^2 = r^2 \cos^2 \varphi d\varphi^2$$

$$dr^2 = r^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \psi d\varphi^2 + 2r(R + r \cos \varphi) \sin \varphi \sin \psi \cos \psi d\varphi d\psi + \\ + (R + r \cos \varphi)^2 \sin^2 \psi d\psi^2 + r^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \psi d\varphi^2 - \\ - 2r(R + r \cos \varphi) \sin \varphi \sin \psi \cos \psi d\varphi d\psi + (R + r \cos \varphi)^2 \cos^2 \psi d\psi^2 + r^2 \cos^2 \varphi d\varphi^2 = \\ = \boxed{r^2 d\varphi^2 + (R + r \cos \varphi)^2 d\psi^2}$$

Таким образом, матричный тензор имеет вид:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & (R + r \cos \varphi)^2 \end{pmatrix}$$

Так как матрицы диагональная, то не составит труда найти обратную матрицу:

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(R + r \cos \varphi)^2} \end{pmatrix}$$

И соответственно

$$\sqrt{g} = r(R + r \cos \varphi)$$

Учитывая проведенные вычисления, преобразуем формулу 2.2

$$\begin{aligned}
 \Delta u &= \frac{1}{r(R+r \cos \varphi)} \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{R+r \cos \varphi}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{r}{R+r \cos \varphi} \frac{\partial u}{\partial \psi} \right) \right] = \\
 &= \frac{1}{r(R+r \cos \varphi)} \left(-\sin \varphi \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{r(R+r \cos \varphi)}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{r}{R+r \cos \varphi} \frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} \right) = \\
 &= \boxed{\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} - \frac{\sin \varphi}{r(R+r \cos \varphi)} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{1}{(R+r \cos \varphi)^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2}} \quad (2.3)
 \end{aligned}$$

Таким образом, уравнение теплопроводности 2.1 на поверхности тора имеет вид:

$$u_t = a^2 \left(\frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} - \frac{\sin \varphi}{r(R+r \cos \varphi)} u_\varphi + \frac{1}{(R+r \cos \varphi)^2} u_{\psi\psi} \right) + f(\varphi, \psi, t)$$

Для решения данного уравнения необходимо начальное и граничные условия. Но поверхность тора не имеет границы, поэтому воспользуемся условием периодичности, которое позволяет обеспечить склейку решений вдоль линий $\varphi = 0$ и $\psi = 0$. Получим следующую задачу:

$$\begin{cases} u_t = a^2 \left(\frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} - \frac{\sin \varphi}{r(R+r \cos \varphi)} u_\varphi + \frac{1}{(R+r \cos \varphi)^2} u_{\psi\psi} \right) + f(\varphi, \psi, t) \\ u|_{t=0} = \theta(\varphi, \psi) \\ u|_{\varphi=0} = u|_{\varphi=2\pi} \\ u|_{\psi=0} = u|_{\psi=2\pi} \end{cases} \quad (2.4)$$

Аналитическое решение данной задачи затруднительно из-за наличия переменных коэффициентов. Но так как имеется свободный член, то подставив в уравнение гладкую произвольную функцию, удовлетворяющую условию периодичности, можно найти такую неоднородность и начальное условие, что данная функция будет являться решением.

Введем замену

$$p = \frac{R}{r}$$

Тогда уравнение преобразуется к виду:

$$u_t = \frac{a^2}{r^2} \left(u_{\varphi\varphi} - \frac{\sin \varphi}{(p+\cos \varphi)} u_\varphi + \frac{1}{(p+\cos \varphi)^2} u_{\psi\psi} \right) + f(\varphi, \psi, t) \quad (2.5)$$

Пусть решением задачи (2.4) будет являться функция:

$$u(\varphi, \psi, t) = e^{-xt}(p + \cos \varphi)^2 \cos \psi, \quad (2.6)$$

где x - произвольное вещественное число, отличное от нуля. Отсюда возникает начальное условие:

$$u|_{t=0} = (p + \cos \varphi)^2 \cos \psi$$

Подставляя (2.6) в (2.5) получим:

$$\begin{aligned} & -xe^{-xt}(p + \cos \varphi)^2 \cos \psi = \\ & = \frac{a^2}{r^2} [-2e^{-xt} \cos \psi (p \cos \varphi + \cos 2\varphi) + 2e^{-xt} \cos \psi \sin^2 \varphi - \cos \psi] + f(\varphi, \psi, t), \end{aligned}$$

Перегруппируем слагаемые и выразим $f(\varphi, \psi, t)$:

$$f(\varphi, \psi, t) = e^{-xt} \cos \psi \left[-x(p + \cos \varphi)^2 + \frac{a^2}{r^2} (2p \cos \varphi + 2 \cos 2\varphi - 2 \sin^2 \varphi + 1) \right],$$

и используя тригонометрические соотношения, получим:

$$f(\varphi, \psi, t) = e^{-xt} \cos \psi \left[-x(p + \cos \varphi)^2 + \frac{a^2}{r^2} (2p \cos \varphi + 3 \cos 2\varphi) \right] \quad (2.7)$$

Следовательно, функция 2.6 будет являться решением уравнения теплопроводности на торе при данной неоднородности.

Полученное нетривиальное решение будет использовано для сравнения с численным.

2.2 Численное решение

Пусть дана задача (2.4). Так как аналитическое решение затруднительно, то построим разностную схему для численного решения.

Покроем область $[0..2\pi] \times [0..2\pi] \times [0..T]$ равномерной сеткой:

$$\begin{aligned} t^k &= k\Delta t, \quad k = 0, 1, 2, \dots, K, \\ \varphi_i &= i\Delta\varphi, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N, \\ \psi_j &= j\Delta\psi, \quad j = 0, 1, 2, \dots, M. \end{aligned}$$

Где K, N, M - количество разбиений по t, φ, ψ соответственно и

$$\Delta t = \frac{T}{K}, \quad \Delta\varphi = \frac{2\pi}{N}, \quad \Delta\psi = \frac{2\pi}{M}.$$

Как и в первой главе, заменим непрерывные функции задачи на сеточные аналоги:

$$\begin{aligned} u_{i,j}^k &= u(t^k, \varphi_i, \psi_j), \\ f_{i,j}^k &= f(t^k, \varphi_i, \psi_j), \\ \theta_{i,j} &= \theta(\varphi_i, \psi_j), \end{aligned}$$

и заменяя производные на конечные разности по неявной схеме, перепишем исходную задачу (2.4):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^k}{\Delta t} = \frac{a^2}{r^2} \left(\frac{u_{i+1,j}^{k+1} - 2u_{i,j}^{k+1} + u_{i-1,j}^{k+1}}{\Delta\varphi^2} \right) - \frac{a^2 \sin \varphi_i}{r(R + r \cos \varphi_i)} \left(\frac{u_{i+1,j}^{k+1} - u_{i-1,j}^{k+1}}{2\Delta\varphi} \right) + \\ + \frac{a^2}{(R + r \cos \varphi_i)^2} \left(\frac{u_{i,j+1}^{k+1} - 2u_{i,j}^{k+1} + u_{i,j-1}^{k+1}}{\Delta\psi^2} \right) + f_{i,j}^k \\ u_{i,j}^0 = \theta_{i,j} \\ u_{0,j}^k = u_{N,j}^k \\ u_{i,0}^k = u_{i,M}^k \end{array} \right. \quad (2.8)$$

Прежде, чем решать уравнение по данной разностной схеме, необходимо ее проверить на аппроксимацию и устойчивость.

Как видно, в правой части стоит дифференциальный оператор с переменными коэффициентами, что вносит трудности в анализ уравнения. Для того, чтобы гарантировать гладкость и ограниченность коэффициентов оператора, введем некоторые ограничения на структуру тора. Везде далее коэффициенты будем

обозначать так:

$$X = \frac{a^2}{r^2},$$

$$Y_i = \frac{a^2 \sin \varphi_i}{r(R + r \cos \varphi_i)},$$

$$Z_i = \frac{a^2}{(R + r \cos \varphi_i)^2}.$$

Очевидно, что при $R = r$ тор вырождается, что также проявляется разрывом коэффициентов Y_i и Z_i . Поэтому необходимо, чтобы $R > r$, но данное условие не гарантирует ограниченность, поэтому введем более жесткие условия на R и r :

$$1 \leq r < \infty, \quad 2r \leq R < \infty.$$

Тогда для коэффициентов получим следующие ограничения:

$$0 < X \leq a^2,$$

$$-\frac{a^2}{\sqrt{3}} \leq Y_i \leq \frac{a^2}{\sqrt{3}},$$

$$0 < Z_i \leq a^2,$$
(2.9)

Полученные оценки в дальнейшем понадобятся для доказательства устойчивости схемы.

Обоснование применимости схемы (2.8) начнем с аппроксимации. Для удобства сдвинем разностную схему на один шаг назад по времени и тогда:

$$u_{i,j}^{k+1} \rightarrow u_{i,j}^k,$$

$$u_{i,j}^k \rightarrow u_{i,j}^{k-1}.$$

Обозначим:

$$u = u_{i,j}^k,$$

и разложим все значения сеточных функций входящих в уравнение (2.8)

относительно точки u :

$$\begin{aligned}
 u_{i,j}^{k-1} &= u - u_t \Delta t + u_{tt} \frac{\Delta t^2}{2!} - \dots, \\
 u_{i+1,j}^k &= u + u_\varphi \Delta \varphi + u_{\varphi\varphi} \frac{\Delta \varphi^2}{2!} + u_{\varphi\varphi\varphi} \frac{\Delta \varphi^3}{3!} + u_{\varphi\varphi\varphi\varphi} \frac{\Delta \varphi^4}{4!} + \dots, \\
 u_{i-1,j}^k &= u - u_\varphi \Delta \varphi + u_{\varphi\varphi} \frac{\Delta \varphi^2}{2!} - u_{\varphi\varphi\varphi} \frac{\Delta \varphi^3}{3!} + u_{\varphi\varphi\varphi\varphi} \frac{\Delta \varphi^4}{4!} - \dots, \\
 u_{i,j+1}^k &= u + u_\psi \Delta \psi + u_{\psi\psi} \frac{\Delta \psi^2}{2!} + u_{\psi\psi\psi} \frac{\Delta \psi^3}{3!} + u_{\psi\psi\psi\psi} \frac{\Delta \psi^4}{4!} + \dots, \\
 u_{i,j-1}^k &= u - u_\psi \Delta \psi + u_{\psi\psi} \frac{\Delta \psi^2}{2!} - u_{\psi\psi\psi} \frac{\Delta \psi^3}{3!} + u_{\psi\psi\psi\psi} \frac{\Delta \psi^4}{4!} - \dots
 \end{aligned}$$

Подставляя в разности, получим:

$$\begin{aligned}
 \frac{u_{i,j}^k - u_{i,j}^{k-1}}{\Delta t} &= u_t + O(\Delta t), \\
 \frac{u_{i+1,j}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i-1,j}^k}{\Delta \varphi^2} &= u_{\varphi\varphi} + O(\Delta \varphi^2), \\
 \frac{u_{i+1,j}^k - u_{i-1,j}^k}{2\Delta \varphi} &= u_\varphi + O(\Delta \varphi^2), \\
 \frac{u_{i,j+1}^k - u_{i,j}^k + u_{i,j-1}^k}{\Delta \psi^2} &= u_{\psi\psi} + O(\Delta \psi^2).
 \end{aligned}$$

Как видно, каждая из разностей с некоторой погрешностью аппроксимирует дифференциальные операторы разностного уравнения и в итоге схема будет иметь порядок аппроксимации $O(\Delta t, \Delta \varphi^2, \Delta \psi^2)$

Теперь докажем устойчивость. Для этого будет использован спектральный признак устойчивости ([9], стр 222). Но проблема заключается в том, что это условие действительно лишь для линейных операторов с постоянными коэффициентами. Поэтому будет также использован принцип замороженных коэффициентов.

Зафиксируем переменные перед разностными операторами. Так как X - константа, то этот коэффициент уже фиксирован. Пусть Y, Z - это некоторые постоянные, принадлежащие множествам точек Y_i, Z_i соответственно. Тогда разност-

ное уравнение (2.8) примет вид:

$$\frac{u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^k}{\Delta t} = X \left(\frac{u_{i+1,j}^{k+1} - 2u_{i,j}^{k+1} + u_{i-1,j}^{k+1}}{\Delta\varphi^2} \right) - Y \left(\frac{u_{i+1,j}^{k+1} - u_{i-1,j}^{k+1}}{2\Delta\varphi} \right) + Z \left(\frac{u_{i,j+1}^{k+1} - 2u_{i,j}^{k+1} + u_{i,j-1}^{k+1}}{\Delta\psi^2} \right) + f_{i,j}^k$$

Так как свободное слагаемое $f_{i,j}^k$ не зависит от искомой функции u , то оно не влияет на устойчивость, следовательно для дальнейшего анализа отбрасывается. Представим решение в виде гармоники:

$$u_{i,j}^k = \lambda^k e^{\iota\alpha i} e^{\iota\beta j},$$

где ι - мнимая единица, α, β - произвольные вещественные параметры, λ - спектр оператора послойного перехода. Получим:

$$\frac{\lambda^{k+1} e^{\iota\alpha i} e^{\iota\beta j} - \lambda^k e^{\iota\alpha i} e^{\iota\beta j}}{\Delta t} = X \left(\frac{\lambda^{k+1} e^{\iota\alpha(i+1)} e^{\iota\beta j} - 2\lambda^{k+1} e^{\iota\alpha i} e^{\iota\beta j} + \lambda^{k+1} e^{\iota\alpha(i-1)} e^{\iota\beta j}}{\Delta\varphi^2} \right) - Y \left(\frac{\lambda^{k+1} e^{\iota\alpha(i+1)} e^{\iota\beta j} - \lambda^{k+1} e^{\iota\alpha(i-1)} e^{\iota\beta j}}{2\Delta\varphi} \right) + Z_i \left(\frac{\lambda^{k+1} e^{\iota\alpha i} e^{\iota\beta(j+1)} - 2\lambda^{k+1} e^{\iota\alpha i} e^{\iota\beta j} + \lambda^{k+1} e^{\iota\alpha i} e^{\iota\beta(j-1)}}{\Delta\psi^2} \right).$$

Поделим обе части на $\lambda^k e^{\iota\alpha i} e^{\iota\beta j}$:

$$\frac{\lambda - 1}{\Delta t} = \lambda X \left(\frac{e^{\iota\alpha} - 2 + e^{-\iota\alpha}}{\Delta\varphi^2} \right) - \lambda Y \left(\frac{e^{\iota\alpha} - e^{-\iota\alpha}}{2\Delta\varphi} \right) + \lambda Z \left(\frac{e^{\iota\beta} - 2 + e^{-\iota\beta}}{\Delta\psi^2} \right).$$

Преобразуем комплексные числа из экспоненциальной формы в тригонометрическую:

$$\frac{\lambda - 1}{\Delta t} = \lambda X \left(\frac{2 \cos \alpha - 2}{\Delta\varphi^2} \right) - \lambda Y \left(\frac{\iota \sin \alpha}{\Delta\varphi} \right) + \lambda Z \left(\frac{2 \cos \beta - 2}{\Delta\psi^2} \right).$$

Используя тригонометрические тождества

$$\cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2},$$

получаем формулу, из которой выражаем $\frac{1}{\lambda}$:

$$\frac{1}{\lambda} = 1 + X \frac{4\Delta t \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\Delta \varphi^2} + Y \frac{\Delta t \sin \alpha}{\Delta \varphi} + Z \frac{4\Delta t \sin^2 \frac{\beta}{2}}{\Delta \psi^2}.$$

Преобразуем спектральный признак устойчивости

$$|\lambda| \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{|\lambda|} \geq 1,$$

И получим неравенство:

$$\left(1 + X \frac{4\Delta t \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\Delta \varphi^2} + Z \frac{4\Delta t \sin^2 \frac{\beta}{2}}{\Delta \psi^2} \right)^2 + \left(Y \frac{\Delta t \sin \alpha}{\Delta \varphi} \right)^2 \geq 1$$

Так как фиксированные значения X, Z не отрицательные, то исходя из этого, неравенство выполнено. Но этого не достаточно, так как Y, Z - это фиксированные значения переменных коэффициентов Y_i, Z_i . Пользуясь условиями (2.9) и тем, что α, β - произвольные вещественные числа, можно найти минимум правой части неравенства. X, Z не равны нулю, следовательно минимум возможен тогда и только тогда, когда $\alpha = 0, \beta = 0$. Полученный минимум удовлетворяет спектральному признаку, следовательно схема является устойчивой.

Разностная схема (2.8) удовлетворяет условиям аппроксимации и устойчивости, отсюда, по теореме Лакса-Рябенького, следует ее сходимость к решению уравнения (2.4). Доказательство теоремы можно найти в [9], стр 108. Даный факт теоретически обосновывает применение полученной разностной схемы для решения уравнения теплопроводности на торе. Но для практических вычислений данная схема не подходит, так как требует вычисления множества плохо обусловленных систем линейных уравнений. Поэтому преобразуем исходную схему с помощью метода дробных шагов к следующему виду:

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{u}_{i,j} - u_{i,j}^k}{\Delta t} &= Z_i \left(\frac{\tilde{u}_{i,j+1} - 2\tilde{u}_{i,j} + \tilde{u}_{i,j-1}}{\Delta \psi^2} \right) + \sigma_1 f_{i,j}^k \\ \frac{u_{i,j}^{k+1} - \tilde{u}_{i,j}}{\Delta t} &= X \left(\frac{u_{i+1,j}^{k+1} - 2u_{i,j}^{k+1} + u_{i-1,j}^{k+1}}{\Delta \varphi^2} \right) + Y_i \left(\frac{u_{i+1,j}^{k+1} - u_{i-1,j}^{k+1}}{2\Delta \varphi} \right) + \sigma_2 f_{i,j}^k \end{aligned} \quad (2.10)$$

Где X, Y_i, Z_i - коэффициенты перед разностями с ограничениями (2.9), $\tilde{u}_{i,j}$ - это

промежуточный временный слой, а σ_1, σ_2 удовлетворяют условию:

$$\sigma_1 + \sigma_2 = 1. \quad (2.11)$$

Метод дробных шагов заключается в преобразовании многомерной задачи к последовательным одномерным. Первая задача решает одномерную задачу на временном слое по координате ψ , а вторая, опираясь на $\tilde{u}_{i,j}$, пересчитывает по φ следующий слой. Тем самым последовательное применение одномерных задач решает исходную двумерную. При этом одномерные схемы являются неявными. Обоснуем применимость метода дробных шагов путем доказательство аппроксимации и устойчивости.

Запишем разности в операторном виде:

$$\begin{aligned}\Lambda_{\psi\psi}\tilde{u}_{i,j} &= \frac{\tilde{u}_{i,j+1} - 2\tilde{u}_{i,j} + \tilde{u}_{i,j-1}}{\Delta\psi^2}, \\ \Lambda_{\phi\phi}u_{i,j}^{k+1} &= \frac{u_{i+1,j}^{k+1} - 2u_{i,j}^{k+1} + u_{i-1,j}^{k+1}}{\Delta\varphi^2}, \\ \Lambda_\phi u_{i,j}^{k+1} &= \frac{u_{i+1,j}^{k+1} - u_{i-1,j}^{k+1}}{2\Delta\varphi}.\end{aligned}$$

Тогда схема(2.10) примет следующий вид:

$$\begin{aligned}\frac{\tilde{u}_{i,j} - u_{i,j}^k}{\Delta t} &= Z_i\Lambda_{\psi\psi}\tilde{u}_{i,j} + \sigma_1 f_{i,j}^k, \\ \frac{u_{i,j}^{k+1} - \tilde{u}_{i,j}}{\Delta t} &= X\Lambda_{\varphi\varphi}u_{i,j}^{k+1} + Y_i\Lambda_\varphi u_{i,j}^{k+1} + \sigma_2 f_{i,j}^k\end{aligned}$$

Выразим в первом выражение действие операторов на $\tilde{u}_{i,j}$ и во втором на $u_{i,j}^{k+1}$:

$$\begin{aligned}(E - \Delta t Z_i \Lambda_{\psi\psi})\tilde{u}_{i,j} &= u_{i,j}^k + \Delta t \sigma_1 f_{i,j}^k, \\ (E - \Delta t X \Lambda_{\varphi\varphi} + \Delta t Y_i \Lambda_\varphi)u_{i,j}^{k+1} &= \tilde{u}_{i,j} + \Delta t \sigma_2 f_{i,j}^k,\end{aligned}$$

где E - единичный оператор. Подействуем оператором $(E - \Delta t Z_i \Lambda_{\psi\psi})$ на обе части второго равенства.

$$\begin{aligned}(E - \Delta t Z_i \Lambda_{\psi\psi})(E - \Delta t X \Lambda_{\varphi\varphi} + \Delta t Y_i \Lambda_\varphi)u_{i,j}^{k+1} &= \\ = (E - \Delta t Z_i \Lambda_{\psi\psi})\tilde{u}_{i,j} + (E - \Delta t Z_i \Lambda_{\psi\psi})\Delta t \sigma_2 f_{i,j}^k, &\end{aligned}$$

но $(E - \Delta t Z_i \Lambda_{\psi\psi}) \tilde{u}_{i,j} = u_{i,j}^k + \Delta t \sigma_1 f_{i,j}^k$:

$$\begin{aligned} & (E - \Delta t Z_i \Lambda_{\psi\psi})(E - \Delta t X \Lambda_{\varphi\varphi} + \Delta t Y_i \Lambda_\varphi) u_{i,j}^{k+1} = \\ & = u_{i,j}^k + \Delta t \sigma_1 f_{i,j}^k + (E - \Delta t Z_i \Lambda_{\psi\psi}) \Delta t \sigma_2 f_{i,j}^k, \end{aligned}$$

Тем самым был исключен промежуточный слой $\tilde{u}_{i,j}$. Раскрывая скобки и преобразуя полученную формулу, получим:

$$\begin{aligned} \frac{u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^k}{\Delta t} &= X \Lambda_{\varphi\varphi} u_{i,j}^{k+1} - Y_i \Lambda_\varphi u_{i,j}^{k+1} + Z_i \Lambda_{\psi\psi} u_{i,j}^{k+1} + (\sigma_1 + \sigma_2) f_{i,j}^k \\ &\quad - \Delta t Z_i (X \Lambda_{\psi\psi} \Lambda_{\varphi\varphi} u_{i,j}^{k+1} - Y_i \Lambda_{\psi\psi} \Lambda_\varphi u_{i,j}^{k+1} + \sigma_2 \Lambda_{\psi\psi} f_{i,j}^k) \end{aligned}$$

Правое слагаемое вносит погрешность порядка $O(\Delta t)$. Так как порядок аппроксимации исходной задачи $O(\Delta t, \Delta\varphi^2, \Delta\psi^2)$, то отсюда следует, что метод дробных шагов этот порядок не меняет. Данная формула также обосновывает ограничение (2.11) на σ_1 и σ_2 .

Для проверки устойчивости применим принцип замороженных коэффициентов и решение будем искать в виде двух гармоник λ_1 и λ_2 :

$$\begin{aligned} u_{i,j}^k &= e^{\iota\alpha i} e^{\iota\beta j}, \\ \tilde{u}_{i,j}^k &= \lambda_1 u_{i,j}^k = \lambda_1 e^{\iota\alpha i} e^{\iota\beta j}, \\ u_{i,j}^{k+1} &= \lambda_2 \tilde{u}_{i,j}^k = \lambda_1 \lambda_2 u_{i,j}^k = \lambda_1 \lambda_2 e^{\iota\alpha i} e^{\iota\beta j}. \end{aligned}$$

Тогда 2.10 примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_1 e^{\iota\alpha i} e^{\iota\beta j} - e^{\iota\alpha i} e^{\iota\beta j}}{\Delta t} &= Z \left(\frac{\lambda_1 e^{\iota\alpha i} e^{\iota\beta(j+1)} - 2\lambda_1 e^{\iota\alpha i} e^{\iota\beta j} + \lambda_1 e^{\iota\alpha i} e^{\iota\beta(j-1)}}{\Delta\psi^2} \right), \\ \frac{\lambda_1 \lambda_2 e^{\iota\alpha i} e^{\iota\beta j} - \lambda_1 e^{\iota\alpha i} e^{\iota\beta j}}{\Delta t} &= X \left(\frac{\lambda_1 \lambda_2 e^{\iota\alpha(i+1)} e^{\iota\beta j} - 2\lambda_1 \lambda_2 e^{\iota\alpha i} e^{\iota\beta j} + \lambda_1 \lambda_2 e^{\iota\alpha(i-1)} e^{\iota\beta j}}{\Delta\varphi^2} \right) - \\ &\quad - Y \left(\frac{\lambda_1 \lambda_2 e^{\iota\alpha(i+1)} e^{\iota\beta j} - \lambda_1 \lambda_2 e^{\iota\alpha(i-1)} e^{\iota\beta j}}{2\Delta\varphi} \right), \end{aligned}$$

поделим первое равенство на $e^{\iota\alpha i}e^{\iota\beta j}$, а второе на $\lambda_1 e^{\iota\alpha i}e^{\iota\beta j}$

$$\begin{aligned}\frac{\lambda_1 - 1}{\Delta t} &= \lambda_1 Z \left(\frac{e^{\iota\beta} - 2 + e^{-\iota\beta}}{\Delta\psi^2} \right), \\ \frac{\lambda_2 - 1}{\Delta t} &= \lambda_2 X \left(\frac{e^{\iota\alpha} - 2 + e^{-\iota\alpha}}{\Delta\varphi^2} \right) - \lambda_2 Y \left(\frac{e^{\iota\alpha} - e^{-\iota\alpha}}{\Delta\varphi} \right).\end{aligned}$$

Пользуясь аналогичными преобразованиями и выражая $\frac{1}{\lambda_1}$ и $\frac{1}{\lambda_2}$ получим:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda_1} &= 1 + \frac{4\Delta t Z \sin^2 \frac{\beta}{2}}{\Delta\psi^2} \\ \frac{1}{\lambda_2} &= 1 + \frac{4\Delta t X \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\Delta\varphi^2} + \iota \frac{\Delta t Y \sin \alpha}{\Delta\varphi}\end{aligned}$$

Окончательный спектр послойного перехода представим из произведения спектров промежуточных этапов.

$$\lambda = \lambda_1 \lambda_2,$$

Преобразуем спектральный признак устойчивости

$$|\lambda| \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{|\lambda|} \geq 1,$$

и тогда получим неравенство:

$$\left(1 + \frac{4\Delta t Z \sin^2 \frac{\beta}{2}}{\Delta\psi^2} \right) \left[\left(1 + \frac{4\Delta t X \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\Delta\varphi^2} \right)^2 + \left(\frac{\Delta t Y \sin \alpha}{\Delta\varphi} \right)^2 \right] \geq 1.$$

Можно заметить, что при любых $\alpha, \beta, Z \in Z_i, Y \in Y_i$ неравенство выполнено, следовательно схема является устойчивой. Аналогично опираясь на теорему Лакса-Рябенького, она сходится к решению уравнения теплопроводности на торе.

Полученные неявные разностные схемы образуют системы линейных уравнений. Так как они имеют трехдиагональную структуру, то их можно решить методом циклической прогонки. Пусть дана система вида

$$a_i u_{i-1} - c_i u_i + b_i u_{i+1} = -f_i \tag{2.12}$$

с условиями

$$a_{i+N} = a_i, \quad b_{i+N} = b_i, \quad c_{i+N} = c_i, \quad f_{i+N} = f_i,$$

Возникает алгебраическая задача:

$$\begin{cases} a_1 u_N - c_1 u_1 + b_1 u_2 = -f_1; \\ a_i u_{i-1} - c_i u_i + b_i u_{i+1} = -f_i; \quad i = 2, 3, \dots, N-1 \\ a_N u_{N-1} - c_N u_N + b_N u_{N+1} = -f_N. \end{cases} \quad (2.13)$$

Решение системы (2.13) ищем в виде:

$$u_i = p_i + u_N q_i, \quad (2.14)$$

где

$$\begin{aligned} p_i &= \alpha_{i+1} p_{i+1} + \beta_{i+1}, \\ q_i &= \alpha_{i+1} q_{i+1} + \gamma_{i+1} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Непосредственно подстановкой (2.15) в (2.14) можно убедиться, что равенство (2.14) эквивалентно следующему:

$$u_i = \alpha_{i+1} u_{i+1} + \beta_{i+1} + u_N \gamma_{i+1} \quad (2.16)$$

или

$$u_{i-1} = \alpha_i u_i + \beta_i + u_N \gamma_i$$

Подставляем последнее соотношение в уравнение системы (2.13) и группируем слагаемые. В итоге получим прогоночные коэффициенты:

$$\alpha_{i+1} = \frac{b_i}{c_i - \alpha_i a_i}, \quad \beta_{i+1} = \frac{f_i + a_i \beta_i}{c_i - \alpha_i a_i}, \quad \gamma_{i+1} = \frac{a_i \gamma_i}{c_i - \alpha_i a_i}$$

Границные условия.

Из (2.13) и (2.16) имеем:

$$\begin{cases} c_1 u_1 = b_1 u_2 + f_1 + a_1 u_N, \\ u_1 = \alpha_2 u_2 + \beta_2 + \gamma_2 u_N \end{cases} \Rightarrow \alpha_2 = \frac{b_1}{c_1}, \beta_2 = \frac{f_1}{c_1}, \gamma_2 = \frac{a_1}{c_1}$$

Из (2.14) и (2.16) и условия периодичности $u_{i+N} = u_i$ находим:

$$\begin{aligned} u_{N+1} &= u_1 = p_1 + u_N q_1, \\ u_N &= \alpha_{N+1} u_{N+1} + \beta_{N+1} + u_N \gamma_{N+1}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$u_N = \frac{p_1 \alpha_{N+1} + \beta_{N+1}}{1 - \gamma_{N+1} - q_1 \alpha_{N+1}}$$

Имеется дополнительное соотношение:

$$\begin{cases} u_{N-1} = p_{N-1} + u_N q_{N-1} \\ u_{N-1} = \alpha_N u_N + \beta_N + u_N \gamma_N \end{cases} \Rightarrow p_{N-1} = \beta_N, q_{N-1} = \alpha_N + \gamma_N$$

Для устойчивости метода циклической прогонки необходимо условие диагонального преобладания:

$$|c_i| \geq |a_i| + |b_i|, \quad i = 0 \dots N$$

Приведем обе схемы задачи (2.10) к виду (2.12). Для этого раскроем все скобки и перегруппируем слагаемые. Для первого уравнения:

$$-\frac{\Delta t Z_i}{\Delta \psi^2} \tilde{u}_{i,j-1} + \left(1 + \frac{2\Delta t Z_i}{\Delta \psi^2}\right) \tilde{u}_{i,j} - \frac{\Delta t Z_i}{\Delta \psi^2} \tilde{u}_{i,j+1} = u_{i,j}^k + \sigma_1 f_{i,j}^k,$$

отсюда

$$A_j = -\frac{\Delta t Z_i}{\Delta \psi^2}, \quad C_j = -\left(1 + \frac{2\Delta t Z_i}{\Delta \psi^2}\right), \quad B_j = -\frac{\Delta t Z_i}{\Delta \psi^2}, \quad F_j = -(u_{i,j}^k + \sigma_1 f_{i,j}^k).$$

Проверим диагональное преобладание:

$$\left| 1 + \frac{2\Delta t Z_i}{\Delta \psi^2} \right| \geq \left| \frac{\Delta t Z_i}{\Delta \psi^2} \right| + \left| \frac{\Delta t Z_i}{\Delta \psi^2} \right|$$

Так как $Z_i > 0$

$$1 + \frac{2\Delta t Z_i}{\Delta \psi^2} \geq \frac{\Delta t Z_i}{\Delta \psi^2} + \frac{\Delta t Z_i}{\Delta \psi^2},$$

$$1 \geq 0$$

Следовательно метод циклической прогонки устойчив для первого уравнения.

Аналогичные действия выполним для второго уравнения.

$$\left(-\frac{\Delta t X}{\Delta \varphi^2} - \frac{\Delta t Y_i}{2\Delta \varphi} \right) u_{i-1,j}^{k+1} + \left(1 + \frac{2\Delta t X}{\Delta \varphi^2} \right) u_{i,j}^{k+1} + \left(-\frac{\Delta t X}{\Delta \varphi^2} + \frac{\Delta t Y_i}{2\Delta \varphi} \right) u_{i+1,j}^{k+1} =$$

$$= \tilde{u}_{i,j} + \sigma_2 f_{i,j}^k,$$

$$A_j = -\frac{\Delta t X}{\Delta \varphi^2} - \frac{\Delta t Y_i}{2\Delta \varphi}, \quad C_j = -\left(1 + \frac{2\Delta t X}{\Delta \varphi^2} \right), \quad B_j = -\frac{\Delta t X}{\Delta \varphi^2} + \frac{\Delta t Y_i}{2\Delta \varphi},$$

$$F_j = -(\tilde{u}_{i,j} + \sigma_2 f_{i,j}^k).$$

Проверим устойчивость

$$\left| 1 + \frac{2\Delta t X}{\Delta \varphi^2} \right| \geq \left| -\frac{\Delta t X}{\Delta \varphi^2} - \frac{\Delta t Y_i}{2\Delta \varphi} \right| + \left| -\frac{\Delta t X}{\Delta \varphi^2} + \frac{\Delta t Y_i}{2\Delta \varphi} \right|$$

Воспользуемся неравенством треугольника

$$\left| 1 + \frac{2\Delta t X}{\Delta \varphi^2} \right| \geq \left| \frac{\Delta t X}{\Delta \varphi^2} \right| + \left| \frac{\Delta t Y_i}{2\Delta \varphi} \right| + \left| \frac{\Delta t X}{\Delta \varphi^2} \right| + \left| \frac{\Delta t Y_i}{2\Delta \varphi} \right|$$

Так как $X > 0$, раскроем модули

$$1 + \frac{2\Delta t X}{\Delta \varphi^2} \geq \frac{\Delta t X}{\Delta \varphi^2} + \left| \frac{\Delta t Y_i}{2\Delta \varphi} \right| + \frac{\Delta t X}{\Delta \varphi^2} + \left| \frac{\Delta t Y_i}{2\Delta \varphi} \right|$$

$$1 \geq \frac{\Delta t}{\Delta \varphi} |Y_i|$$

Из условий 2.9 есть дополнительное неравенство:

$$|Y_i| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

В итоге получим условную устойчивость с условием:

$$\frac{\Delta \varphi}{\Delta t} \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Данная оценка условной устойчивости метода циклической прогонки говорит о том, что при малых шагах по пространству относительно шага по времени, полученное решение системы может расходиться с истинным. При реализации данный факт требует дополнительной проверки путем прямой подстановки решения в исходную систему линейных уравнений.

2.3 Пример реализации

Для проверки сходимости численного решения к аналитическому составим программу для следующей задачи:

$$\begin{cases} u_t = \frac{a^2}{r^2} \left(u_{\varphi\varphi} - \frac{\sin \varphi}{(p + \cos \varphi)} u_\varphi + \frac{1}{(p + \cos \varphi)^2} u_{\psi\psi} \right) + \\ + e^{-xt} \cos \psi \left[-x(p + \cos \phi)^2 + \frac{a^2}{r^2} (2p \cos \varphi + 3 \cos 2\varphi) \right] \\ u|_{t=0} = (p + \cos \varphi)^2 \cos \psi \\ u|_{\varphi=0} = u|_{\varphi=2\pi} \\ u|_{\psi=0} = u|_{\psi=2\pi} \end{cases} \quad (2.17)$$

Как было показано в конце первой главы, решением уравнения является данная функция:

$$u(\varphi, \psi, t) = e^{-xt} (p + \cos \varphi)^2 \cos \psi. \quad (2.18)$$

Численное решение будем искать с помощью разностной схемы 2.10, а для систем линейных уравнений применим метод циклической прогонки. Область решения покроем сеткой с количеством разбиений $K = 10$, $N = 10$, $M = 10$, с

ограничением по времени $T = 3$. Зададим параметры тора. Пусть $R = 8$, $r = 4$, отсюда по формуле $p = \frac{R}{r}$, $p = 2$. В качестве коэффициента температуропроводности возьмем единичное значение $a^2 = 1$. Также пусть $x = \frac{a^2}{r^2}$

Для нахождения решения была написана следующая программа на C++.

```
#include "stdafx.h"
using namespace std;

int g(int i, int size)
{
    if (i < 0) i = size - 1;
    if (i > size) i = 1;
    return i;
}

double u0(double phi, double psi, double a, double p, double r)
{
    return (p + cos(phi))*(p + cos(phi))*cos(psi);
}

double f(double phi, double psi, double t, double a, double p, double r)
{
    double x = a / (r*r);
    return exp(-x*t)*cos(psi)*(a*(2 * p*cos(phi) + 3 * cos(2.0*phi)) / (r*r) -
        x*(p + cos(phi))*(p + cos(phi)));
}

double U(double phi, double psi, double t, double a, double p, double r)
{
    double x = a / (r*r);
    return exp(-x*t)*cos(psi)*(p + cos(phi))*(p + cos(phi));
}

void reduce(double* mas, double* A, double* C, double* B, double* F, int S)
{
    double *p = new double[S], *q = new double[S];
    double *alpha = new double[S + 2], *beta = new double[S + 2], *gamma = new
        double[S + 2];
    alpha[2] = B[1] / C[1];
    beta[2] = F[1] / C[1];
    gamma[2] = A[1] / C[1];
    for (int i = 2; i <= S; i++)
    {
        alpha[i + 1] = B[i] / (C[i] - alpha[i] * A[i]);
        beta[i + 1] = (F[i] + beta[i] * A[i]) / (C[i] - alpha[i] * A[i]);
        gamma[i + 1] = (A[i] * gamma[i]) / (C[i] - alpha[i] * A[i]);
    }
    p[S - 1] = beta[S];
    q[S - 1] = alpha[S] + gamma[S];
    for (int i = S - 2; i>0; i--)
    {
        p[i] = alpha[i + 1] * p[i + 1] + beta[i + 1];
        q[i] = alpha[i + 1] * q[i + 1] + gamma[i + 1];
    }
    mas[S] = (p[1] * alpha[S + 1] + beta[S + 1]) / (1 - gamma[S + 1] - q[1] *
        alpha[S + 1]);
    mas[0] = mas[S];
    for (int i = 1; i<S; i++)
    {
        mas[i] = p[i] + mas[S] * q[i];
    }
    delete[] p; delete[] q; delete[] alpha; delete[] beta; delete[] gamma;
}
}
```

```

int main()
{
    const int K = 10, N = 10, M = 10;
    static double u[K][N+1][M+1], Y[N+1], Z[N+1], mas[N+1], u_half[N+1][M+1];
    static double AM[M + 1], CM[M + 1], BM[M + 1], FM[M + 1];
    static double AN[N + 1], CN[N + 1], BN[N + 1], FN[N + 1];
    const double R = 8.0, r = 4.0, dt = 3.0 / K, a = 1.0, dn = (2.0 * M_PI) /
        N, dm = (2.0 * M_PI) / M;
    const double X = a / (r*r), p = R / r;
    double error = 0.0, error_temp = 0.0;
    for (int i = 0; i <= N; i++)
    {
        for (int j = 0; j <= M; j++)
        {
            u[0][i][j] = u0(dn*i, dm*j, a, p, r);
        }
        Y[i] = a*sin(i*dn) / (r*(R + r*cos(i*dn)));
        Z[i] = a / ((R + r*cos(i*dn))*(R + r*cos(i*dn)));
    }
    for (int k = 0; k<K - 1; k++)
    {
        for (int i = 0; i <= N; i++)
        {
            for (int j = 1; j <= M; j++)
            {
                AM[j] = -(dt*Z[i]) / (dm*dm);
                CM[j] = -1.0 + 2.0*AM[j];
                BM[j] = AM[j];
                FM[j] = -(u[k][i][j] + dt*f(dn*i, dm*j, dt*k, a, p
                    , r));
            }
            reduce(u_half[i], AM, CM, BM, FM, M);
        }
        for (int j = 0; j <= M; j++)
        {
            for (int i = 1; i <= N; i++)
            {
                AN[i] = -(dt / dn)*(X / dn + 0.5*Y[i]);
                CN[i] = -1.0 - (2.0*dt*X) / (dn*dn);
                BN[i] = -(dt / dn)*(X / dn - 0.5*Y[i]);
                FN[i] = -u_half[i][j];
            }
            reduce(mas, AN, CN, BN, FN, N);
            for (int i = 0; i <= N; i++)
                u[k + 1][i][j] = mas[i];
        }
        for (int i = 0; i <= N; i++)
        {
            for (int j = 0; j <= M; j++)
            {
                error_temp = abs(u[k][i][j] - U(i*dn, j*dm, k*dt,
                    a, p, r)) / (abs(U(i*dn, j*dm, k*dt, a, p, r))
                    + 1.0);
                if (error_temp > error) error = error_temp;
            }
        }
    }
    cout << "False: " << error << endl;
    system("pause");
}

```

Немного пояснений по данной программе. Функция g необходима для того, чтобы избежать выхода за предела массива. Для этого используется условие периодичности. Далее идут функции, задающие поведение решения: u_0 - начальное условие, f - свободный член, U - аналитическое решение. Метод циклической прогонки удалось отделить в функцию `reduce` от основного кода. Это позволило избавиться от излишнего кода, так как решение систем уравнений необходимо для каждой из одномерных задач.

Результатом программы является оценка погрешности численного решения с помощью формулы:

$$\delta = \max \left(\frac{|U(k, i, j) - u(i, j, k)|}{1 + |U(k, i, j)|} \right),$$

где $U(k, i, j)$ - значение аналитического решения в узле сетки, $u(k, i, j)$ - численное решение. При этом максимум берется по всей области сетки. Изменяя параметры мелкости разбиения, были получены следующие значения δ :

K \ N, M	10, 10	20, 20	40, 40	80, 80	160, 160
10	$1.0933 \cdot 10^{-2}$	$4.4150 \cdot 10^{-3}$	$2.7611 \cdot 10^{-3}$	$2.3479 \cdot 10^{-3}$	$2.2500 \cdot 10^{-3}$
20	$1.0930 \cdot 10^{-2}$	$3.6820 \cdot 10^{-3}$	$1.8445 \cdot 10^{-3}$	$1.3835 \cdot 10^{-3}$	$1.2726 \cdot 10^{-3}$
40	$1.0823 \cdot 10^{-2}$	$3.2117 \cdot 10^{-3}$	$1.2905 \cdot 10^{-3}$	$8.0707 \cdot 10^{-4}$	$6.8827 \cdot 10^{-4}$
80	$1.0743 \cdot 10^{-2}$	$2.9613 \cdot 10^{-3}$	$9.9002 \cdot 10^{-4}$	$4.9553 \cdot 10^{-4}$	$3.7263 \cdot 10^{-4}$
160	$1.0696 \cdot 10^{-2}$	$2.8273 \cdot 10^{-3}$	$8.3397 \cdot 10^{-4}$	$3.3399 \cdot 10^{-4}$	$2.0900 \cdot 10^{-4}$

Как было показано ранее, порядок аппроксимации используемой разностной имеет следующий вид:

$$O(\Delta t, \Delta\varphi^2, \Delta\psi^2),$$

где

$$\Delta t = \frac{T}{K}, \quad \Delta\varphi = \frac{2\pi}{N}, \quad \Delta\psi = \frac{2\pi}{M}$$

Используя данные первого справа столбца, видно, что при относительно малом шаге по пространству, погрешность линейно зависит от мелкости разбиения по времени. Но если посмотреть на последнюю строку, то при относительно ма-

лом шаге по времени, погрешность уменьшается квадратично, в зависимости от мелкости разбиения по пространству. Следовательно, порядок сходимости численного решения удовлетворяет теоретическому порядку аппроксимации.

Глава 3

Визуализация

3.1 О подходе к моделированию

Поведение решения уравнения теплопроводности при визуализации можно иллюстрировать следующими способами:

- 1) Изменение геометрии исходной поверхности путем привязки ее параметров к температуре.
- 2) Преобразование температуры в цвет с дальнейшей закраской модели. Конкретно для тора рассмотрены оба варианта интерпретации температуры. Для изменения геометрии используется привязка значения функции к малому радиусу тора по формуле:

$$\tilde{r}(t) = \begin{cases} 0.5, & t \leq t_{\min} \\ R - 0.5, & t \geq t_{\max} \\ 0.5 + \frac{t - t_{\min}}{t_{\max} - t_{\min}}(R - 1), & t_{\min} < t < t_{\max} \end{cases}$$

В итоге полученный малый радиус будет лежать в отрезке $[0.5, R - 0.5]$, что исключает вырожденность тора.

В случае закраски используется преобразование температуры в цвет со следующим спектром:

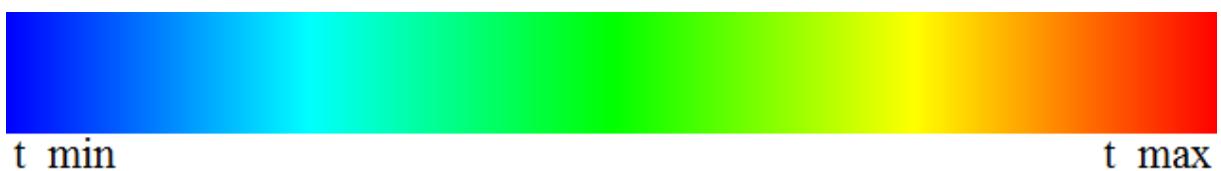


Рис. 3.1: Спектр зависимости цвета от температуры

3.2 Результаты

Зададим параметры тора и сетки, пусть $R = 8$, $r = 4$, $K = 300$, $N = 100$, $M = 200$. Тогда получим тор:

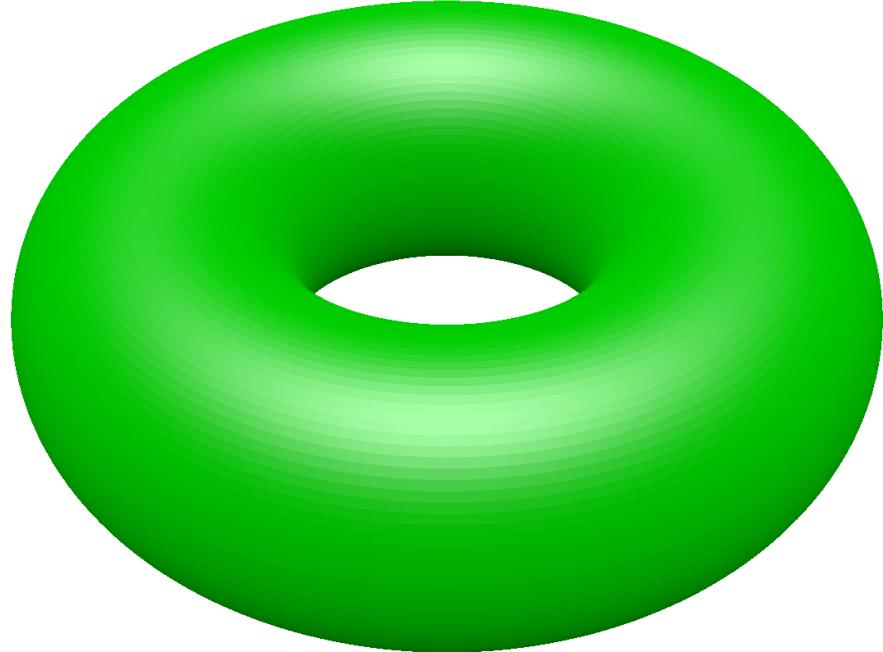


Рис. 3.2

Везде далее будем использовать цвет в качестве индикатора температуры. Для этого зададим минимум и максимум решения:

$$t_{min} = -9 \quad , t_{max} = 9$$

3.2.1 Пример 1

$$\begin{cases} u_t = \frac{1}{16} \left(u_{\varphi\varphi} - \frac{\sin \varphi}{(2 + \cos \varphi)} u_\varphi + \frac{1}{(2 + \cos \varphi)^2} u_{\psi\psi} \right) \\ u|_{t=0} = 7 \\ u|_{\varphi=0} = u|_{\varphi=2\pi} \\ u|_{\psi=0} = u|_{\psi=2\pi}, \quad T = 3 \end{cases}$$

Так как уравнение является однородным и начальная условие - константа, то исходя из принципа максимума - это же константа и является решением исходного уравнения, т.е:

$$u(\varphi, \psi, t) = 7$$

Проверим это при визуализации

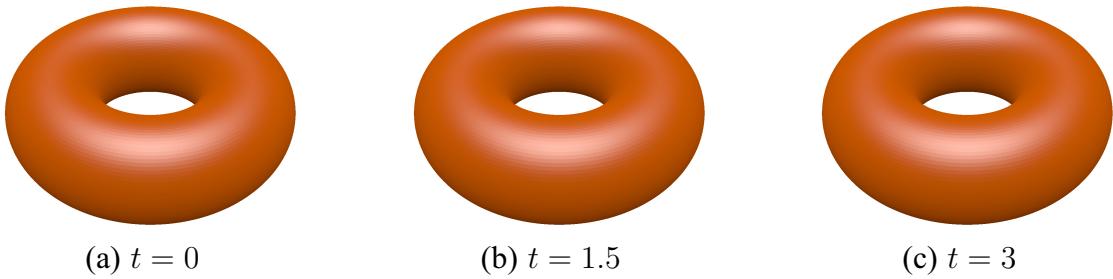


Рис. 3.3

И действительно, распределение температуры в торе не меняется с течением времени, что соответствует решению.

3.2.2 Пример 2

Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} u_t = \frac{1}{16} \left(u_{\varphi\varphi} - \frac{\sin \varphi}{(2 + \cos \varphi)} u_\varphi + \frac{1}{(2 + \cos \varphi)^2} u_{\psi\psi} \right) + \\ + \frac{e^{-\frac{t}{16}} \cos \psi}{16} [-(2 + \cos \phi)^2 + (4 \cos \varphi + 3 \cos 2\varphi)] \\ u|_{t=0} = (2 + \cos \varphi)^2 \cos \psi \\ u|_{\varphi=0} = u|_{\varphi=2\pi} \\ u|_{\psi=0} = u|_{\psi=2\pi}, \quad T = 20 \end{cases}$$

Как было показано в первой главе, данное уравнение имеет следующее решение:

$$u(\varphi, \psi, t) = e^{-\frac{t}{16}} (2 + \cos \varphi)^2 \cos \psi$$

Следовательно, если $t \rightarrow \infty$, то $u \rightarrow 0$. Убедимся в этом наглядно:

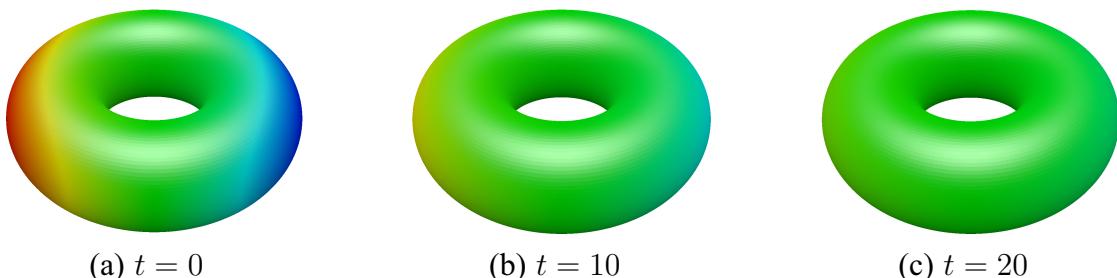


Рис. 3.4

Сравнивая цвет тора на картинке 3.4с со спектром 3.1, можно убедиться, что решение в каждой точке поверхности стремится к нулю.

3.2.3 Пример 3

$$\begin{cases} u_t = \frac{1}{16} \left(u_{\varphi\varphi} - \frac{\sin \varphi}{(2 + \cos \varphi)} u_\varphi + \frac{1}{(2 + \cos \varphi)^2} u_{\psi\psi} \right) + 18e^{-\frac{t}{4}} \cos 4\varphi \cos 4\psi \\ u|_{t=0} = 0 \\ u|_{\varphi=0} = u|_{\varphi=2\pi} \\ u|_{\psi=0} = u|_{\psi=2\pi}, \quad T = 10 \end{cases}$$

Данное уравнение содержит свободный член. Физический смысл его заключается в источнике тепла извне. Следовательно, при достаточно малом t , распределение температуры в торе будет крайне неоднородным, но по мере роста времени оно станет равномерным.

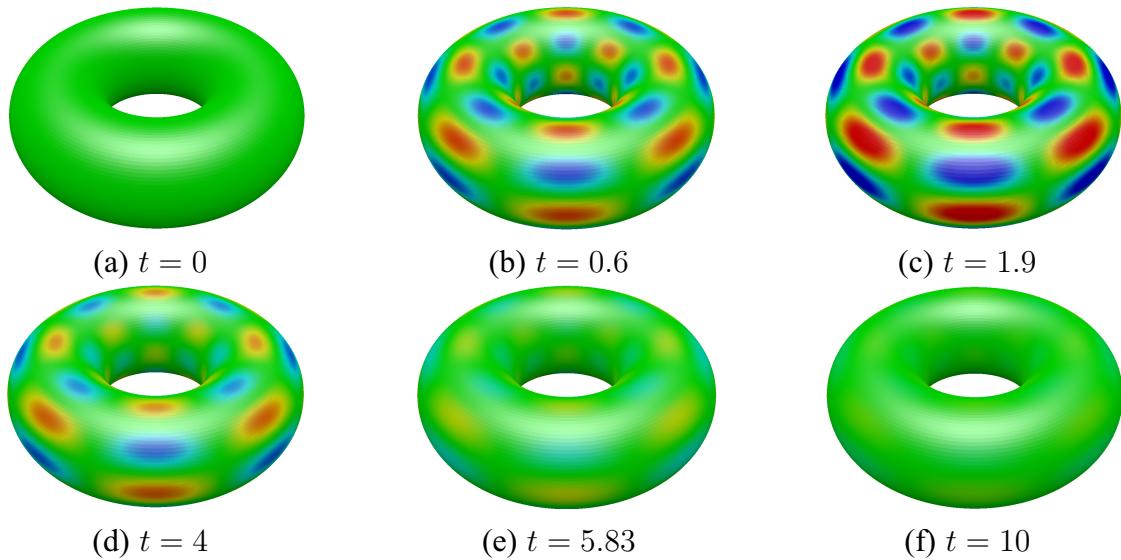


Рис. 3.5

Наличие тригонометрических функций в источнике тепла вносит периодичность в распределение температуры. Но как и предполагалось, при большом t тор приходит снова в состояние равновесия.

3.2.4 Пример 4

Пусть дана задача:

$$\begin{cases} u_t = \frac{1}{16} \left(u_{\varphi\varphi} - \frac{\sin \varphi}{(2 + \cos \varphi)} u_\varphi + \frac{1}{(2 + \cos \varphi)^2} u_{\psi\psi} \right) + f(\varphi, \psi, t) \\ u|_{t=0} = 0 \\ u|_{\varphi=0} = u|_{\varphi=2\pi} \\ u|_{\psi=0} = u|_{\psi=2\pi}, \quad T = 150 \end{cases}$$

Где $f(\varphi, \psi, t)$ определяется следующим образом:

$$f(\varphi, \psi, t) = \begin{cases} \cos \psi, & t < 30 \\ 2 \sin \varphi, & t \geq 30 \end{cases}$$

Проведем визуализацию численного решения:

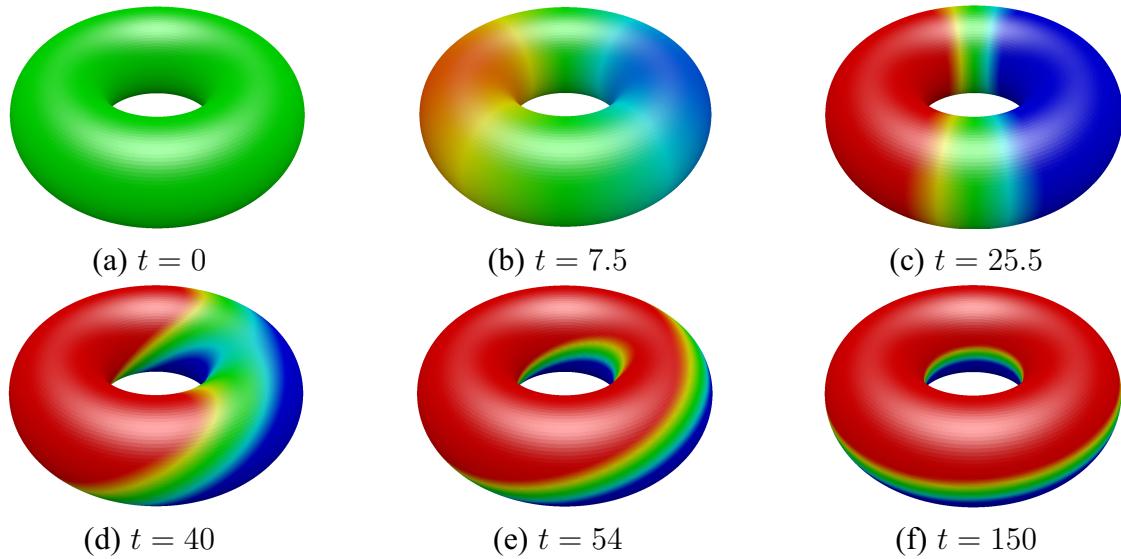


Рис. 3.6

На рисунке 3.6е видно, как из-за изменения промежутка кусочной функции меняется и распределение температуры на торе.

Литература

- [1] Клячин, А.А. Расчет формы поверхностей минимальной площади // Проблемы и перспективы физико-математического и технического образования Сборник материалов
- [2] Клячин А.А., Клячин В.А., Григорьева Е.Г. Визуализация расчета формы поверхностей минимальной площади // Научная визуализация. 2014. Т. 6. № 2. С. 34-42.
- [3] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. –Изд 4-е. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981. – 512с.
- [4] Князева А.Г. Различные варианты метода прогонки. Методические указания к выполнению лабораторных работ. Томск: ТПУ, 2006 http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/books/Knyazeva_progonka_2006ru.pdf
- [5] Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы: Учеб, пособие для вузов,— М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1989.— 432 с.— ISBN 5-02-013996-3.
- [6] Крайнов А.Ю., Миньков Л.Л. Численные методы решения задач тепло- и массопереноса : учеб. пособие.— Томск : STT, 2016. 92с.
- [7] Позняк Э.Г., Шикин Е.В. Дифференциальная геометрия. Первое знакомство. –М.: Изв-во МГУ. 1990.
- [8] Blender Documentation Contents <https://docs.blender.org/api/2.78b>
- [9] Годунов С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы. Введение в теорию. Изд.2, перераб. и доп. — Наука, 1977, 440с.