Применение численных методов при визуализации решений некоторых уравнений с частными производными на римановых многообразиях

Давыдов Алексей Сергеевич, группа МКН-131

Волгоградский государственный университет

Научный руководитель — к.ф.-м.н. **И.А. Романова**

Волгоград
2017г.

Актуальность

Востребованность научной визуализации в различных отраслях знаний, в частности, в области визуального представления численных решений математических задач.

Цели и задачи

Цель работы:

Разработка и реализация метода решения и визуального представления решения уравнений в частных производных на примере нестационарного уравнения теплопроводности на торе

Задачи:

- Теоретическое исследование уравнения
- Построение модели численного решения
- Написание программы для решения уравнения
- Визуализация полученных данных

Аналитическая постановка задачи

- Общий вид уравнения

$$u_t = a^2 \Delta u + f(x,t) \tag{1}$$

- Начальное условие

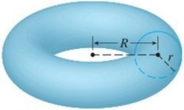
$$u|_{t=0} = u_0(x) \tag{2}$$

- Граничные условия

$$u|_S = \mu(t) \tag{3}$$

На поверхности тора:

$$\begin{cases} u_t = a^2 \left(\dfrac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} - \dfrac{\sin\varphi}{r(R + r\cos\varphi)} u_\varphi + \dfrac{1}{(R + r\cos\varphi)^2} u_{\psi\psi} \right) + f(\varphi, \psi, t) \\ u|_{t=0} = \theta(\varphi, \psi) \\ u|_{\varphi=0} = u|_{\varphi=2\pi} \\ u|_{\psi=0} = u|_{\psi=2\pi} \end{cases} \tag{4}$$



Преимущества численных методов

- Применимость для сложных областей
- Возможность автоматизации численного решения с помощью программирования
- Использование полученных расчетов для визуализации

Метод конечных разностей

- Размер шага

$$\Delta t = \frac{T}{K}, \quad \Delta\varphi = \frac{2\pi}{N}, \quad \Delta\psi = \frac{2\pi}{M}.$$

- Координаты узлов сетки на области $[0..2\pi] \times [0..2\pi] \times [0..T]$

$$\begin{aligned} t^k &= k\Delta t, \quad k = 0, 1, 2..., K, \\ \varphi_i &= i\Delta\varphi, \quad i = 0, 1, 2..., N, \\ \psi_j &= j\Delta\psi, \quad j = 0, 1, 2..., M. \end{aligned}$$

- Коэффициенты перед разностными операторами

$$X = \frac{a^2}{r^2}, \quad Y_i = \frac{a^2 \sin\varphi_i}{r(R + r\cos\varphi_i)}, \quad Z_i = \frac{a^2}{(R + r\cos\varphi_i)^2}.$$

- Последовательности значений функций в узлах сетки

$$\begin{aligned} u_{i,j}^k &= u(t^k, \varphi_i, \psi_j), \\ f_{i,j}^k &= f(t^k, \varphi_i, \psi_j), \\ \theta_{i,j} &= \theta(\varphi_i, \psi_j), \end{aligned}$$

Разностная схема

$$\begin{cases} \dfrac{\tilde{u}_{i,j} - u^k_{i,j}}{\Delta t} & = Z_i \left(\dfrac{\tilde{u}_{i,j+1} - 2\tilde{u}_{i,j} + \tilde{u}_{i,j-1}}{\Delta \psi^2} \right) + f^k_{i,j} \\ \dfrac{u^{k+1}_{i,j} - \tilde{u}_{i,j}}{\Delta t} & = X \left(\dfrac{u^{k+1}_{i+1,j} - 2u^{k+1}_{i,j} + u^{k+1}_{i-1,j}}{\Delta \varphi^2} \right) + Y_i \left(\dfrac{u^{k+1}_{i+1,j} - u^{k+1}_{i-1,j}}{2\Delta \varphi} \right) \\ u^0_{i,j} = \theta_{i,j} \\ u^k_{0,j} = u^k_{N,j} \\ u^k_{i,0} = u^k_{i,M} \end{cases}$$

- Порядок аппроксимации $O(\Delta t, \Delta\varphi^2, \Delta\psi^2)$
- Абсолютная устойчивость
- Применимость метода циклической прогонки к обеим подсхемам

Иллюстрация температуры

Спектр зависимости цвета от температуры

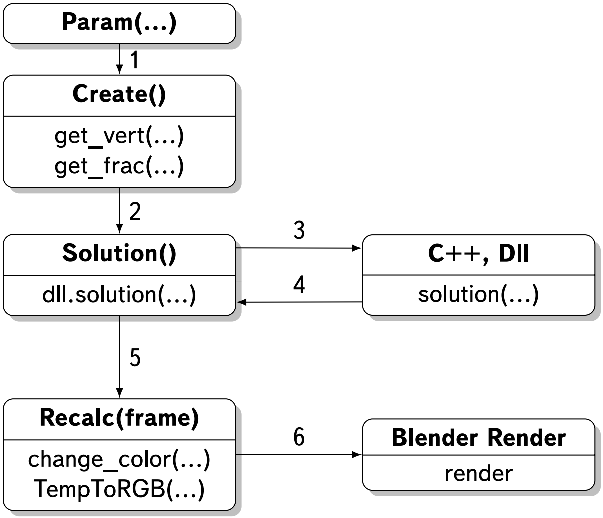
Среда разработки

blender

python

Visual Studio

Схема работы программы



Пример 1

Затухающий источник с периодическим неравномерным распределением тепла

$$\begin{cases} u_t = \dfrac{1}{16}\left(u_{\varphi\varphi} - \dfrac{\sin\varphi}{(2+\cos\varphi)}u_\varphi + \dfrac{1}{(2+\cos\varphi)^2}u_{\psi\psi}\right) + f(\varphi,\psi,t) \\ u|_{t=0} = 0 \\ u|_{\varphi=0} = u|_{\varphi=2\pi} \\ u|_{\psi=0} = u|_{\psi=2\pi}, \qquad T = 10 \end{cases}$$

$$f(\varphi,\psi,t) = 18e^{-\frac{t}{4}}\cos 4\varphi\cos 4\psi$$

Пример 2

Внешний источник, меняющий область воздействия со временем

$$\begin{cases} u_t = \dfrac{1}{16}\left(u_{\varphi\varphi} - \dfrac{\sin\varphi}{(2+\cos\varphi)}u_\varphi + \dfrac{1}{(2+\cos\varphi)^2}u_{\psi\psi}\right) + f(\varphi,\psi,t) \\ u|_{t=0} = 0 \\ u|_{\varphi=0} = u|_{\varphi=2\pi} \\ u|_{\psi=0} = u|_{\psi=2\pi}, \qquad T = 150 \end{cases}$$

$$f(\varphi,\psi,t) = \begin{cases} \cos\psi, & t < 30 \\ 2\sin\varphi, & t \geq 30 \end{cases}$$

Пример 3

Точечное внешнее воздействие

$$\begin{cases} u_t = \frac{1}{16}\left(u_{\varphi\varphi} - \frac{\sin\varphi}{(2+\cos\varphi)}u_\varphi + \frac{1}{(2+\cos\varphi)^2}u_{\psi\psi}\right) + f(\varphi,\psi,t) \\ u|_{t=0} = 0 \\ u|_{\varphi=0} = u|_{\varphi=2\pi} \\ u|_{\psi=0} = u|_{\psi=2\pi} \end{cases}$$

- Один источник

$$f(\varphi,\psi,t) = \begin{cases} 10, & \sin(\varphi) > 0.95 \text{ и } \sin(\psi) > 0.95 \\ 0, & \text{в других случаях} \end{cases}$$

$$T = 280$$

- Два источника

$$f(\varphi,\psi,t) = \begin{cases} 5, & \sin(\varphi) > 0.95 \text{ и } \sin(\psi) > 0.95 \\ 5, & \sin(\varphi) > 0.95 \text{ и } \sin(\psi+\pi) > 0.95 \\ 0, & \text{в других случаях} \end{cases}$$

$$T = 200$$

Заключение

- Исследована применимость конечно-разностных методов для уравнения теплопроводности на торе
- Разработан оптимальный и автоматизированный программный продукт для визуализации численных расчетов
- Имеется возможность усложнения области решения

Спасибо за внимание!