Tarea 2
Filtrado Digital

Ana Fernanda Ponce Martínez
Procesamiento de Bioseñales

1. Filtrado Digital

Los filtros digitales se utilizan en el procesamiento de señales para eliminar las partes no deseadas de éstas, por ejemplo el ruido, o para permitir el paso de un cierto rango de frecuecias.

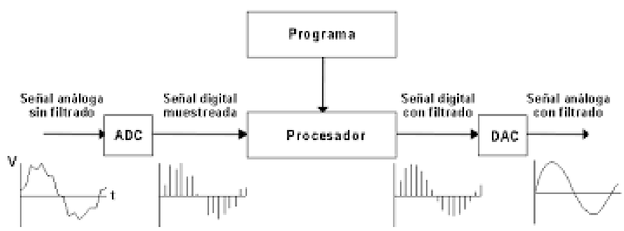

Figura 1: Proceso de filtrado digital

2. Tipos de Filtros Digitales

Principalmente, existen 4 tipos de filtros:

1. Filtro pasa-bajas: Corresponde a un filtro caracterizado por permitir el paso de las frecuencias más bajas y atenuar las frecuencias más altas.

2. Filtro pasa-altas: corresponde a un filtro caracterizado por permitir el paso de las frecuancias más altas y atenuar las frecuancias más bajas.

3. Filtro pasa-bandas: Deja pasar las frecuencias que están situadas en una determinada banda de frecuancias, es decir, entre un determinando rango de frecuencias.

4. Filtro rechaza-bandas: Deja pasar todas las frecuencias, excepto las que estánsituadas en un determinado rango de frecuencias.

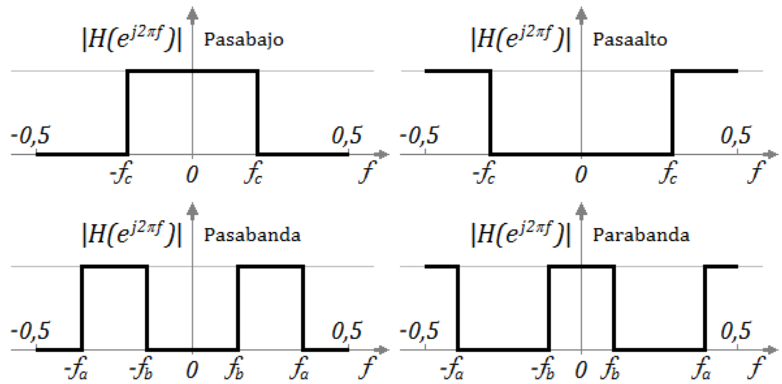

Figura 2: Tipos de filtros digitales de señales

3. Diseño de Filtros IIR

Los filtros IIR son un tipo de filtrado más eficiente. Un filtro IIR es aquel que tiene una respuesta infinita al impulso y que se caracterizan por tener una retroalimentación de la señal de salida. Es decir, se trata de filtros recursivos, donde la salida es función no sólo de la entrada actual y de las precedentes, sino también de las salidas anteriores, y por tanto se espera que (en general) posean una respuesta impulsional infinita.

Para diseñar un filtro IIR, es necesario:

1. Convertir las especificaciones del filtro digital a espacificaciones de un filtro analógico.
2. Determinar la función de transeferencia del filtro analógico y su correspondiente transformada de Laplace. Para esto, pueden emplearse funciones de aproximación tales como: Buttherworth, Chebyshev, Elíptico o Bessel.
3. Usar la función de transferencia que fue obtenida y transformada y convertirla a la función de transferencia digital deseada, por medio de técnicas como: transformación bilineal, invarianza al impulso, entre otros.

3.1. Especificaciones del filtro

En el diseño de un filtro, generalmente en la banda de paso, la banda atenuada y la banda de transición, la respuesta de amplitud y de fase están preestablecidas, tal y como hemos visto anteriormente en las plantillas de un filtro. La primera labor de un diseñador de filtros es obtener una función de transferencia H(s) que satisfaga estas especificaciones. Idealmente debería realizarse de forma que la transmisión en la banda de paso sea perfecta (sin pérdidas), una atenuación infinita en las bandas atenuadas (ganancia cero) y la anchura de las bandas de transición nula.
La ecuación de transferencia transformada en z y la ecuación de diferencias general son de la forma:

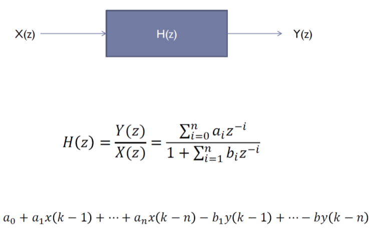

Figura 3: Ecuaciones de transferencia transformada en z y de diferencias, respectivamente.

3.2. Aproximaciones

El diseño de filtros generalmente pasa por la obtención de la función de transferencia de un filtro prototipo pasa-bajas normalizado en frecuencia con respecto a la pulsación de corte de la banda de paso, es decir, w=1, siendo el valor máximo de H(jw) = 1 en el margen 0<w>1.
Dada la imposibilidad de obtener la característica ideal de la función de transferencia de los mismos, será necesario obtener una función de transferencia que se aproxime lo más posible al ideal, partiendo de plantillas que limiten el comportamiento de ganancia o atenuación deseado para cada frecuencia. Para conseguir que la respuesta de amplitud del filtro quede dentro de estos márgenes preestablecidos se hace uso de funciones matemáticas denominadas funciones de aproximación.

3.2.1. Aproximación Butterworth, aproximación plana al máximo

Esta aproximación está definida siempre para el filtro pasa-bajas. Este filtro presenta una aproximación monótona en la banda de paso y en la banda supresión. La función caracteristica está definida en la ecuación 1.

$$F(w)^2 = (w/w_p)^{2n} \tag{1}$$

Este tipo de aproximación presenta una respuesta plana en la banda de paso, su caída en la banda atenuadda es de 20 db/década y el filtro es caracterizado por los valores de la frecuencia de corte (wc) y el órden del filtro (n).
Este tipo de aproximación es deseable para aplicaciones en aproximación.

3.2.2. Aproximación Chebyshev

Este tipo de aproximación está siempre definido para un filtro pasa-bajas. Presenta una función oscilante en la banda de paso y una función monótona en la banda de supresión.
Sus funciones características son expresadas en las ecuaciones 2 y 3.

$$F(w)^2 = (\varepsilon)^2 (C_n)^2 (w/w_p) \tag{2}$$

$$|H(w)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\varepsilon)^2 (C_n)^2 (w/w_p)}} \tag{3}$$

donde ε es el parámetro de rizado y C_n(x) son los polinomios de Chebyshev de grado n.

Con esta aproximación, obtenemos un filtro caracterizado por por los valores de ε y n. Dado el orden del filtro (n), a mayor rizado permitido en la banda de paso, mejor selectividad en frecuencia. Utilizado sobre todo para fases no lineales.

3.2.3. Aproximación Bessel

El filtro de Bessel tiene como característica principal la gran aproximación a la curva ideal dentro de la banda de paso, sobre todo para n elevado, así como una buena linealidad en la respuesta de la fase. La expresión del filtro Chebyshev es una función monótona en la banda de paso pero oscilante en la banda de supresión. Es también usada en fases no lineales. La expresión de este tipo de filtro viene dada por la ecuación 4:

$$H(s) = \frac{1}{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + b_n s^n} \tag{4}$$

donde los coeficientes b_i normalizados a una frecuencia de corte de $w_1 = 1$ rd/s se representan en tablas, dependiendo del orden n del filtro.

3.2.4. Filtros elípticos o de Cauer

La aproximación es más efectiva (de menor orden) si el error aceptable es distribuido de modo que el rizado sea constante en la banda de paso o en la banda atenuada. Un resultado más eficiente puede ser obtenido si se distribuye también el error entre la banda de paso y la banda atenuada en lugar de dejar que la atenuación se incremente monótonamente para w$\rightarrow \infty$. Como resultado se obtendrá una función de transferencia en la que habrá tanto polos como ceros, siendo éstos finitos a diferencia de lo que ocurre con los filtros de Butterworth o de Chebychev directo.
La función que cumpla esos requisitos tendrá la forma de la ecuación 5:

$$|H(jw)|^2 = \frac{1}{1 + (\varepsilon)^2 R_n^2(w)} \tag{5}$$

la cual tiene una función de atenuación con rizado en la banda de paso con valor máximo igual a α_p y rizado en la banda atenuada con valor mínimo igual a α_a, esto nos llevará al uso de funciones elípticas. Los filtros resultantes, por tanto, se llaman filtros elípticos. Estos filtros son oscilantes en la banda de paso y en la banda de supresión. Se obtiene una mayor atenuación que con las aproximaciones anteriores y se usa generalmente en fases fuertemente no lineales.

3.3. Función de Transferencia Digital Deseada

Todos los filtros de la sección anterior están definidos para características de un fitro pasa-bajas. Las transformaciones espectrales son entonces usadas para convertir de pasa bajas a cualquiera de los siguientes: pasa altas, pasa banda, o rechazo de banda.

3.3.1. Transformación Bilineal

Es una técnica alternativa para aproximar un sistema analógico caracterizado por la función de transferencia en términos de la transformada de Laplace en su homólogo digital caracterizado por la transformada z.
Su deducción se puede enfocar como la aproximación de una ecuación diferencial de primer orden mediante una ecuación en diferencias finitas.
Una de las ventajas operativas de la transformación bilineal es que evita el problema del aliasing.

3.3.2. Invarianza al impulso

El método del impulso invariante consiste en diseñar un filtro digital cuya respuesta impulsional h[h] sea lo más parecida posible a la del filtro analógico. Esta aproximación trata de obtener la respuesta impulsiva del filtro discreto muestreando la de un filtro continuo y se basa en tomar como respuesta al impulso del filtro digital una versión muestreada dela respuesta al impulso del sistema de tiempo continuo empleando un período de muestreo T, según la ecuación 6.

$$H[n] = kh_a(nT) \tag{6}$$

4. Diseño de Filtros FIR

El objetivo de estos filtros es obtener una función de transferencia H(z) realizable aproximándola a una respuesta en frecuencia deseable. Los filtros FIR pueden ser diseñados con fase lineal exacta y los transitorios iniciales del filtro tienen duración finita, pero el orden del filtro FIR es normalmente mucho mas alto que el orden de un filtro equivalente IIR que satisfacen las mismas especificaciones; por lo tanto, tienen una complejidad computacional mayor.

Para diseñar un filtro FIR,

1. Conviertir las especificaciones del filtro digital a especificaciones de un filtro análogo pasa-bajas prototipo. 2. Determine la función de transferencia |H(Ω)| del filtro pasa bajas análogo. Existen tablas disponibles para el diseño de filtros análogos. 3. Transforme |H(Ω)| a una función de transferencia deseada H(z).

Las técnicas de aproximación análogas son altamente avanzadas. El diseño del filtro FIR esta basado en una aproximación directa de la respuesta en magnitud especificada, con los requerimientos frecuentemente agregados de que la fase sea lineal (o algunas veces, mínima).

- Se comienza con un filtro ideal que satisfaga los criterios de diseño.
- Se toma la DTFT inversa de esta H() para obtener h[n]. Esta h[n] serádoblemente infinita y no causal; por lo que no será realizable.

- Se trunca usando una ventana,por ejemplo, rectangular, de tal forma que M+1 coeficientes de h[n] sean retenidos, y todos los otros sean descartados. Ahora se tiene un filtro de longitud finita (orden M), ht[n], sin embargo es aún no causal.
- Se desplaza la secuencia truncada h[n] a la derecha (aplicar retardos) en M/2 muestras, de tal forma que la primera muestra ocurre ahora en n=0. La respuesta al impulso resultante ht[n-M/2] es un filtro FIR causal y estable, el cual tiene una respuesta en magnitud y en fase casi idéntica que el filtro original.

4.1. Fenómeno de Gibbs

Truncar la respuesta al impulso de un filtro ideal para obtener un filtro realizable, crea oscilaciones en el dominio de la frecuencia, estas oscilaciones son conocidas como "fenómeno de Gibbs", el cual es simplemente un resultado de la operación de ventaneo.

4.2. Ventaneo

El fenómeno de Gibbs puede ser reducido (pero no eliminado) usando una ventana suavizadora que disminuye a zero, suavizando las ondulaciones de la señal. Una ventana rectangular tiene el acho más angosto del lóbulo principal, pero una pobre atenuación en lóbulo lateral, en cambio, Ventanas afiladas causan que la altura de los lóbulos laterales disminuyan, pero con un correspondiente incremento en el ancho del lóbulo principal, lo que causa una transición mas amplia en la frecuencia de corte.

Las ventanas más comunmente usadas son:

- Ventana Rectangular:

$$\begin{cases} 1, 0 \leq n \leq M \\ 0, otherwise \end{cases}$$

- Ventana Bartlett:

$$w(n) = 1 - \frac{2|n - M/2|}{M} \tag{7}$$

- Ventana Blackman

$$w(n) = 0{,}42 - 0{,}5cos(\frac{2\pi n}{M}) + 0{,}08cos(\frac{2\pi n}{M}) \tag{8}$$

- Ventana Blackman

$$w(n) = 0{,}54 - 0{,}46cos(\frac{2\pi n}{M}) \tag{9}$$

- Ventana Kaiser

$$w(n) = I_0\{\beta\sqrt{1 - (\frac{n - M/2}{M/2})^2}\} \tag{10}$$

Sin embargo, mientras que los métodos de las ventanas y muestreo en frecuencia son simples y poderosos, estos no permiten un control preciso de lasfrecuencias criticas ni proporcionan ondulaciones iguales en lasbandas de paso y de rechazo.
Existen otras técnicas de diseño computarizado de filtros, que permiten el control óptimo de bandas y filtos, por ejemplo, el algoritmo de Parks-McClellan.

Referencias

[1] M. Martínez, L. Gómez, A. J. Serrano,J. Vila, J. Gómez. *DISEÑO DE FILTROS IIR*. Escuela Técnica Superior de Ingeniería. Valencia. 2010.

[2] Departamento de teoría de las señales y comunicaciones. *Funciones de Aproximación*. Universidad de Alcalá.

[3] Departamento de Física y Arquitectura de Computadores. *Diseño de filtros por el método de la aproximación*. Universidad Miguel Hernandez de Elche.