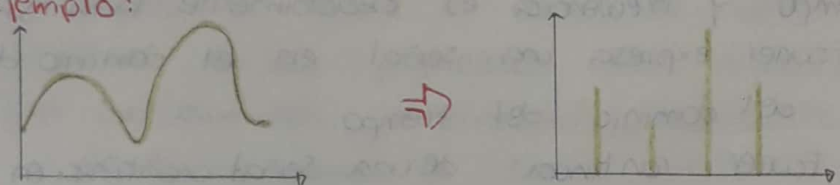
Procesamiento de Bioseñales
Ana Fernanda Ponce Martínez
Síntesis

▸ Muestreo y reconstrucción de una señal.

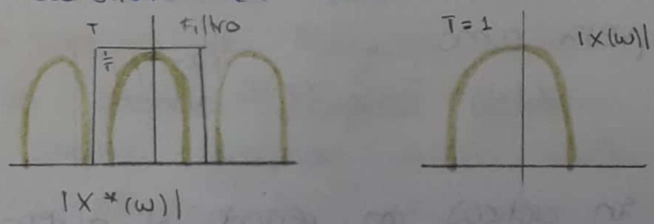
El muestreo se refiere a la cantidad de veces que medimos el valor de la señal en un periodo de tiempo determinado; generalmente el valor de referencia es 1 segundo.
El muestreo significa que una señal continua es reemplazada por una secuencia de números que representan los valores de la señal en los instantes de muestreo.

Ejemplo:



señal original ⇒ valores obtenidos del muestreo.

La reconstrucción consiste en obtener la señal continua original a partir de la señal muestreada. La idea principal consiste en filtrar uno de los espectros de la señal original y aplicar "transformada inversa" a ésta.
Es importante vigilar que las repeticiones de $X(\omega)$ no se solapen, si el tiempo de muestreo aumenta, se solaparán y será imposible reconstruir la señal.



Los centros de las repeticiones del espectro de $X(\omega)$ están separados por $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$ rad / s.

Es vital elegir adecuadamente la frecuencia de muestreo para que sea posible la reconstrucción de la señal, y para ello se emplea el Teorema de muestreo:

$f_{muestreo} \geq 2 f$ más alta presente en la señal a muestrear

Este teorema también es conocido como teorema de Nyquist-Shannon, y se usa para no perder información de la señal a muestrear. El fenómeno de Aliasing o enmascaramiento de frecuencias aparece cuando se muestrea una señal a una tasa inferior y se intenta reconstruir después; cuando se intenta, se obtiene una señal diferente.

▸ Cuantización

Se define como el número de símbolos que se utilizan para guardar la medida de una señal. Para guardar la medida se codifica como un conjunto de bits. A mayor número de bits empleados para guardar la medida, mayor exactitud. Usualmente se emplean valores de 8 y 16 bits por el canal de información para almacenar los valores de las medidas adquiridas.

▸ Transformada de Fourier

La información en tiempo y frecuencia es exactamente la misma, la transformada de Fourier expresa una señal en el dominio de la frecuencia, en lugar del dominio del tiempo.

La transformada de Fourier continua de una señal continua en el tiempo $G(f)$ se define como:

$$G(f) = FT\{g(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-2j\pi ft}\,dt$$

▸ Transformada Discreta de Fourier

Una señal discreta puede ser representada en sus espectros de amplitud y fase, estos dos elementos de análisis se encontrarán limitados por una banda de frecuencias f_N.

Una señal con periodo N tal que $x(n) = x(n+N)$ puede ser representada como una serie de Fourier, la cual contendrá N funciones exponenciales y se expresa como

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{\frac{i2\pi kn}{N}} \quad , \quad X(N) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-i2\pi kn/N}$$

Los coeficientes discretos de Fourier son cíclicos con periodo N; al desarrollar la exponencial compleja y reagrupando los términos se pueden representar las expresiones en su primer y segunda forma trigonométrica; y dependiendo de ésta se dan los coeficientes discretos de Fourier C_0, C_k A_0, A_k, B_k y la dimensión d está en función del número de muestras contenidas en la señal:

$$d = \begin{cases} N/2 & N \text{ par} \\ N-1/2 & N \text{ impar} \end{cases} \quad (\text{Frecuencia de Nyquits})$$

Señales periódicas y discretas originan un espectro periódico y discreto, esto resulta al contemplar el periodo fundamental.

La Transformada Discreta de Fourier (DFT) surge al tender el periodo fundamental al infinito, esto sucede con señales transitorias y al suponer una discretización desde menos infinito hasta infinito; aunque se consideran transitorias y finitas en la práctica, con lo que se define la transformada ahora de la siguiente forma $X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-i 2k\pi n/N}$ $k = 0, 1, 2 \ldots N-1$

▸ Transformada rápida de Fourier

Aplicar la FT representa $N \times N$ multiplicaciones y sumas complejas; pues para cada uno de los N valores de K es necesaria N multiplicaciones por $x(n)$ y $N-1$ suma de resultados. El algoritmo de la FFT ayuda a reducir el número de operaciones en $N \log_2 N$, ya que basándose en las propiedades de separabilidad, simetría y periodicidad se elimina información redundante.

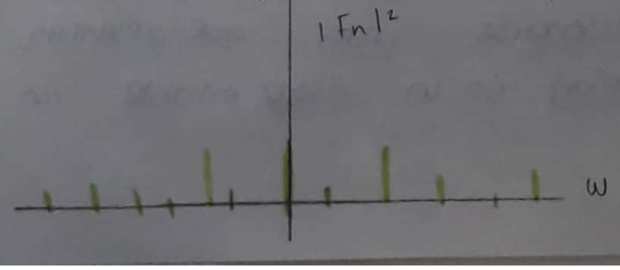
El algoritmo trabaja de forma eficiente cuando la señal es una potencia de dos; ya que con un análisis cuidadoso podemos dividir la transformada de Fourier en una parte par y otra impar: $X(k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n) W_N^{2nk} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n+1) W_N^{(2n+1)k}$

Y así, en lugar de tener la DFT de N elementos, se tiene la FT de 2 series de $N/2$ elementos, las cuales se pueden subdividir a su vez en 2 partes y continuar hasta la etapa $\log_2 N$, y luego finalmente tenemos $N \log_2 N$ sumas complejas.

▸ Espectro de Potencia (Teorema de Parseval)

La potencia disipada promedio normalizada de una señal periódica (potencia disipada en una resistencia de 1Ω debido a la señal $f(t)$) es $P = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} |f(t)|^2 \, dt$ Watts, lo que quiere decir que si se conoce la señal en función del tiempo $f(t)$ se puede hallar la potencia promedio y también puede calcularse si se conocen sus coeficientes de Fourier.

Si se representan los términos $|F_n|^2$ frente a la frecuencia obtenemos el denominado espectro de potencias discreto.

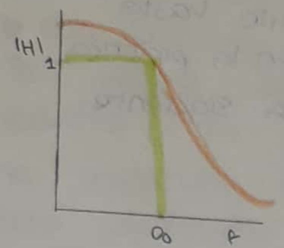


$\omega = 2\pi f$

$f = 1/T$

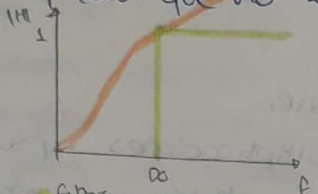
Diseño de Filtros:

$P(f) \longrightarrow \boxed{H(f)} \longrightarrow Q(f)$ $\quad$ H(f) filter, P(f) signal
Q(f) processed signal

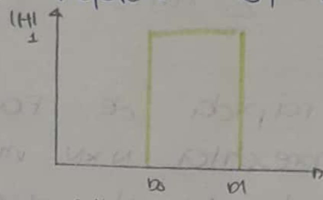


Filtro pasabajas ideal
Butterworth

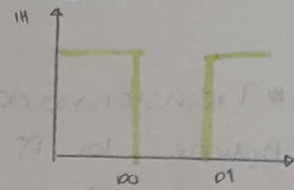
Para cada caso, las frecuencias deseadas se conservan y las que no se requieren son eliminadas.



Filtro pasa altas ideal
Butterworth



Filtro pasabanos ideal



Filtro rechazabanda

En la práctica se tienen algunas limitaciones para construir dichos filtros, así como subidas o bajadas abruptas en filtros ideales, por lo cual se usan algunas aproximaciones de los filtros ideales, buscando que tales aproximaciones sean similares de forma general y no tengan saltos bruscos en ellos. Una de las aproximaciones que se usan con frecuencia es la aproximación Butterworth; en ella no hay una elección clara de la frecuencia de corte y se considera que la magnitud del filtro cae a $1/\sqrt{2}$ del valor pico como valor de frecuencia de corte aproximada. Debido a su curva completamente suave, los FB también se conocen como "maximamente plano". La matemática es la siguiente:

$$H(f) = \frac{B(f)}{A(f)} = \frac{b_1 (jf)^n + b_2 (jf)^{n-1} + \dots + b_{n+1}}{a_1 (jf)^n + a_2 (jf)^{n-1} + \dots a_{n+1}}$$

Existen otras aproximaciones que también permiten diseñar filtros a conveniencia, pero ~~todas~~ parten de los coeficientes de Fourier, ya que la FT es de las más usadas en el procesamiento de señales.

Filtros FIR:

Sistemas que presentan una respuesta al impulso de duración finita, y son caracterizados por la transformada Z de la respuesta al impulso. $H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] z^{-n} = \sum_{k=0}^{z-1} b_k z^{-k}$ Estos filtros son siempre estables y pueden diseñarse para que presenten fase lineal (condiciones de simetría). Es un filtro estable con coeficientes cuantificados.

▸ Fenómeno de Gibs: Truncar ~~el~~ respuesta a un impulso de un filtro ideal para obtener un filtro realizable, crea oscilaciones en el dominio de la frecuencia.
La respuesta al impulso $h_t[n - M/2]$ en un filtro FIR es causal y estable, el cual tiene una respuesta en magnitud y en fase casi igual al filtro original. El fenómeno de Gibs es simplemente el resultado de la operación de ventaneo.
1: Identificar una ventana
2: Hago la multiplicación para discretizar (tablas).
3: Truncamiento → oscilaciones
4: Corrimiento

▸ Filtros IIR: Son sistemas cuya salida depende de salidas anteriores y que estando en reposo, al ser estimulados con la entrada impulsional su salida no vuelve al reposo, de ahí el nombre.
La ecuación de diferencias es:

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + \cdots + b_M x(n-M) - a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2) - a_N y(n-N) = \sum_{k=0}^{M} b_k \cdot x(n-k) - \sum_{k=1}^{N} a_k \cdot y(n-k)$$

donde el orden es igual al máximo de M y N.
La función de transferencia en Z del filtro es

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k \cdot z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k \cdot z^{-k}}$$

Si no es necesario que el sistema sea causal (no funciona en tiempo real) se puede conseguir fase lineal mediante filtros IIR realizando un filtrado Bidereccional, el cual consiste en filtrar la señal, invertir el orden de las muestras obtenidas y volver a filtrar de nuevo. La señal obtenida no tendrá distorsión de fase.
La condición de estabilidad para sistemas causales implica que los polos se encuentran en la interior de la circunferencia unidad. Los ceros no tienen efecto sobre la estabilidad del sistema y pueden encontrarse en el interior o en el exterior.

▸ Transformada wavelet:
Define funciones que son usadas para muestrear la señal que se desea analizar y se propone la siguiente ecuación:

$$S(\tau, a) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \frac{1}{\sqrt{a}} \psi^* \left(\frac{t-\tau}{a} \right) dt$$

donde ψ^* es el conjugado de la wavelet madre que será escalada y recorrida a punto para determinar los niveles de comparación de la señal s(t).

Existen muchas wavelets madre agrupadas en familias según su utilidad. La familia Daubechies, por ejemplo, es un conjunto de wavelets ortonormales apropiadas para el análisis de señales discretas u ortonormales; y es muy útil para reconstrucción de imágenes.

El análisis de las frecuencias de mayor rango se hace utilizando ventanas ~~anchas~~ angostas y el análisis de frecuencia de menor rango se hace utilizando frecuencia de menor rango. más anchas.

- Wavelet Packet: Introducida por Coifman et Al, es una generalización de wavelet y ofrece una gama detallada de posibilidades para el análisis de la señal. Se calcula utilizando un conjunto de filtros que conducen a la disminución de la resolución de tiempo y aumento de la resolución de frecuencia. Los componentes de frecuencia a diferencia de la TW son de igual tamaño, ya que WP divide no solo la subbanda de baja frecuencia, sino también la de baja frecuencia.

- Fourier vs Wavelet: con Fourier se pierde información y requiere mucho tiempo de cómputo (latencia).
Wavelet madre descompone en pasa-altas y pasa-bajas y trata de sacar el coeficiente A de la matriz.