El sistema de Lorenz, l'aplicació de Poincaré i òrbites periòdiques inestables

Universitat Politècnica de Catalunya

Ferran Delgà Fernández

Maig 2021

En aquesta pràctica estudiarem la dinàmica del sistema de Lorenz. El sistema en qüestió és el següent:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y-x) \\ \dot{y} &= rx - y - zx \\ \dot{z} &= -bz + xy \end{aligned}$$

Prendrem els valors; $\sigma = 10$ i $b = 8/3$. Explorarem valors de r entre 0 i 25.

El primer que farem serà buscar punts d'equilibri i si aquests presenten bifurcacions per diferents valors de r.

Els punts d'equilibri es poden trobar de forma analítica:

Imposem

$$\dot{x} = 0 \Longrightarrow x = y$$

$$\dot{y} = 0 \Longrightarrow rx - y - xz = 0 \Longrightarrow (r+1)x - zx = 0 \Longrightarrow \boxed{z = r+1}$$

$$\dot{z} = 0 \Longrightarrow bz = x^2 = y^2 \longrightarrow \boxed{x = y = \pm\sqrt{b(r-1)}}$$

Per tant tenim:

$$x_0 = (0,0,0)$$

solució trivial del sistema i punt d'equilibri definit per tot $r \geq 0$.
També tindrem:

$$q_\pm = (\pm\sqrt{b(r-1)}, \pm\sqrt{b(r-1)}, r-1)$$

punts d'equilibri definits quan $r > 1$.

Estudiarem ara el caràcter d'aquests punts d'equilibri pels diferents valors de r. Busquem doncs, la matriu Df del sistema:

$$Df = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r-z & -1 & -x \\ y & x & -b \end{pmatrix}$$

Estudiem els valors propis d'aquesta matriu evaluada en els punts d'equilibri:

$\boxed{x_0 = (0,0,0)}$

Tenim $Df_{x_0} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}$. Calculant el polinomi caracterísic, obtenim:

$$p_{\text{char}}(\lambda) = (b+\lambda)(-\lambda^2 - (\sigma+1)\lambda + (r-1)\sigma = 0$$

Les arrels del qual són:

$$\lambda_1 = -b, \qquad \lambda_\pm = \frac{-\sigma - 1 \pm \sqrt{\sigma^2 + 2\sigma(2r-1)+1}}{2}$$

Si $\boxed{0 < r < 1}$ aleshores tots els valors propis són amb part real negativa i per tant, el punt $x_0 = (0,0,0)$ és linealment estable.

Fixem-nos que en $\boxed{r = 1}$, tenim:

$$\lambda_1 = -b$$

$$\lambda_+ = \frac{-\sigma - 1 + \sqrt{\sigma^2 + 2\sigma + 1}}{2} = \frac{-\sigma - 1 + \sqrt{(\sigma+1)^2}}{2} = 0$$

$$\lambda_- = \frac{-\sigma - 1 - \sqrt{\sigma^2 + 2\sigma + 1}}{2} = \frac{-\sigma - 1 - \sqrt{(\sigma+1)^2}}{2} = -\sigma - 1$$

Per $\boxed{r > 1}$ l'origen és inestable, ja que el valor propi λ_+ té part real positiva.

Hem vist doncs, que a $r = 1$ l'origen passa de ser estable a ser inestable, i a més, tal i com hem vist en l'estudi dels punts d'equilibri, apareixen dos punts d'equilibri més $q_\pm$. Anem a comprovar l'estabilitat en aquests punts:

$$\boxed{q_\pm = (\pm\sqrt{b(r-1)}, \pm\sqrt{b(r-1)}, r-1), \quad r > 1}$$

Evaluem la matriu Df en els punts:

$$Df_{q_\pm} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & \pm\sqrt{b(r-1)} \\ \pm\sqrt{b(r-1)} & \pm\sqrt{b(r-1)} & -b \end{pmatrix}$$

El polinomi característic per $q_\pm$ és:

$$p_{\text{char}}(\mu) = \mu^3 + (\sigma + 1 + b)\mu^2 + \mu b(\sigma + r) + 2b\sigma(r-1)$$

Notem que si derivem aquesta expressió ens queda:

$$p'_{\text{char}}(\mu) = 3\mu^2 + 2(\sigma + 1 + b)\mu + b(\sigma + r) > 0, \quad \forall \mu \geq 0$$

Per $\mu = 0$ tenim $p_{\text{char}}(0) > 0$. Com que és un polinomi de grau 3 i el coeficient de grau tres és positiu, podem deduïr que **totes les seves arrels reals són negatives**, i que almenys una d'elles és real. Sigui $\mu_1 < 0$ aquest valor propi real i siguin $\mu_\pm = \alpha \pm i\gamma$ els valors propis conjugats.

Notem que en $r = 1.2$, els tres valors propis són reals i en canvi en $r = 1.4$, ja tenim un de real i dos de complexos conjugats. Amb una petita cerca dicotòmica podem trobar que en aproximadament $r = 1.345617179251390e + 00$ els valors propis passen de ser reals a complexos. Sigui aquest valor r_1. Per $r < r_1$, els punts d'equilibri $q_\pm$ són nodes estables.

Arribats a aquest punt, hem confirmat que en $r = 1$ passem de tenir una solució estable ($x_0 = (0,0,0)$) a tenir-ne una d'inestable i dues d'estables (ja que les parts reals dels valors propis prop de $r = 1$ són negatives). Així doncs, concloem que en $r = 1$ hi ha una **bifurcació PITCHFORK supercrítica (Q1)**.

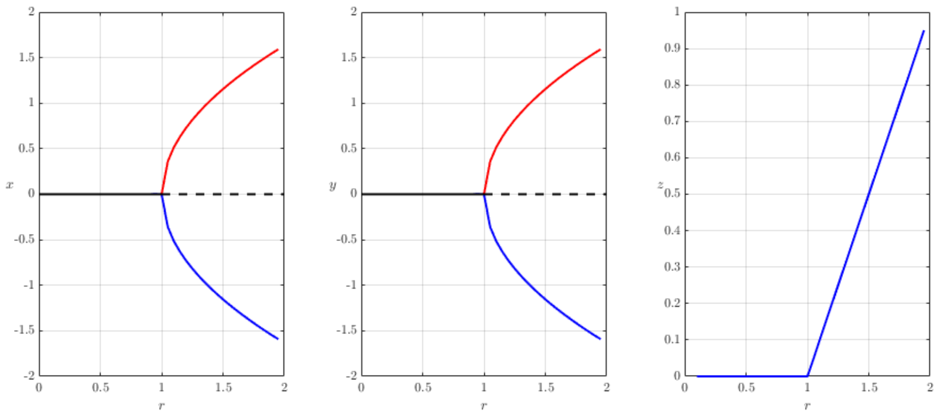

Figura 1: En aquests gràfics podem veure les projeccions en els diferents eixos de la bifurcació de Pitchfork en $r = 1$. A partir de $r = 1$ la línia vermella representa el valor de q_+ en els diferents eixos, i la blava el de q_-. En el cas de z, les solucions són la mateixa per q_+ i per q_-. La línia negra ens indica l'estabilitat de l'origen.

A partir d'aquí, es demana trobar si aquestes bifurcacions presenten una altra bifurcació (Q2 i Q3). Per fer-ho, recuperem el nostre estudi dels punts d'equilibri $q_\pm$. Considerem la part real dels seus valors propis $\mu_\pm = \alpha \pm i\gamma$:

Si $\alpha < 0$ aleshores els tres valors propis tenen part real negativa $\implies q_\pm$ són focus estables.

Si $\alpha > 0$ aleshores tenim punts de sella.

Si $\alpha = 0$ aleshores els valors propis són imaginaris purs. Anem a estudiar per quin valor de r tindrem $\alpha = 0$. Ho farem mitjançant el polinomi característic i imposant que l'arrel sigui imaginària pura:

$$p_{\text{char}}(i\gamma) = (i\gamma)^3 + (\sigma + 1 + b)(i\gamma)^2 + (i\gamma)b(\sigma + r) + 2b\sigma(r - 1) =$$
$$-\gamma^3 - (\sigma + 1 + b)\gamma^2 + i(b(\sigma + r) - \gamma^2)\gamma = 0$$

Solucionant aquest sistema trobarem la r per la qual els valors propis complexos són imaginaris purs:

$$2b\sigma(r - 1) - (\sigma + 1 + b)\gamma^2 = 0$$
$$b(\sigma + r) - \gamma^2 = 0$$

D'on obtenim: $\gamma^2 = b(\sigma + r) \Longrightarrow r(\sigma - 1 - b) = \sigma(\sigma + b + 3)$. I per tant, l'$r_c$ crític que estem buscant és:

$$r_c = \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - 1 - b} \approx 24.7368421$$

Resumint:
Per $r < r_c$ els punts $q_\pm$ són estables, ja que tots els valors propis tenen part real negativa.
Per $r = r_c$ aleshores els valors propis són:

$$\mu_1 = -(\sigma + b + 1) \qquad \mu_\pm = \pm i\sqrt{\frac{2\sigma(\sigma + 1)}{\sigma - b - 1}}$$

Per $r > r_c$ els punts $q_\pm$ són inestables.

Tenim doncs, una bifurcació a $r = r_c$ de tipus **HOPF subcrítica**, ja que els valors propis complexos han passat de tenir part real negativa a positiva. Per veure una pseudorepresentació de la bifurcació: Figures 12 i 13 de l'arxiu `lorenz.m`

Anem a estudiar ara dues situacions ($r = 18$ i $r = 21$) i trobar els cicles límits inestables que apareixen deguts a la bifurcació de Hopf subcrítica.
Tal i com s'indica a l'enunciat de la pràctica, utilitzem l'aplicació de Pioncaré per trobar els punts d'aquesta òrbita. Els detalls de com s'ha procedit numèricament es troben en el fitxer `lorenz.m` inclós en l'entrega de la pràctica.
Sabem que en $r < r_c$ els dos punts $q_\pm$ són estables, i per tant tindrem moltes òrbites al voltant d'ells. En ambdues situacions, m'ha resultat més fàcil treballar amb el pla $\Sigma : \{z = r - 1\}$. Com que $q\pm$ estan situats a $z = r - 1$, el pla més adequat per trobar els punts que se'ns demanen és aquest.

A partir d'aquí i un cop s'ha escollit un punt inicial suficientment bo i tal que $x_0 \in \Sigma$ (el que he fet ha estat aplicar la funció de Poincaré un cop a un x_0 "dolent"per acostar-me on hi ha més punts), entra en joc l'aplicació $P : \Sigma \longrightarrow \Sigma$. Els detalls de la definició d'aquesta aplicació es troben en el fitxer `P.m`. Ara només queda trobar punts fixos d'una nova aplicació $Q(x) = P(x) - x$. El fitxer que especifica aquesta funció és `Q.m`.

Per trobar-los he utilitzat la funció *fsolve* del matlab. Els resultats han estat satisfactoris **(Q4)**:

r	x	y	z	T
18.0	1.102657569709761e+01	1.451626702256982e+01	1.7e+01	1.035750974041850e+00
21.0	1.085928029295390e+01	1.393651045483733e+01	2.0e+01	8.162223634995835e-01

Tots els detalls i figures complementàries es poden trobar executant el fitxer `lorenz.m` seguint les pertinents instruccions incloses en el codi.
Per acabar, representem aquestes òrbites:

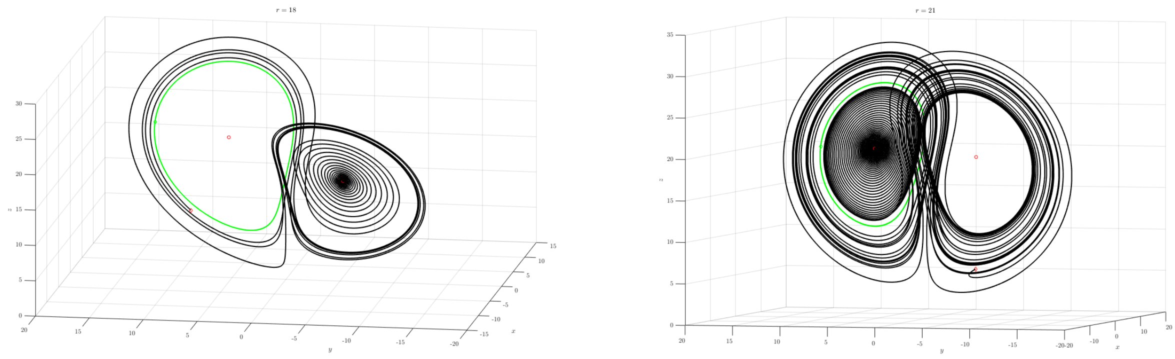

Figura 2: El cicle límit està representat de color verd. Esquerra ($r = 18$): El punt inicial de la trajectòria negra és $x_0 = [5.5, 10, 7]$. Dreta ($r = 21$): El punt inicial de la trajectòria negra és $x_0 = [1, -5, 6]$.

Tal i com es demana, representem les òrbites en el pla xy:

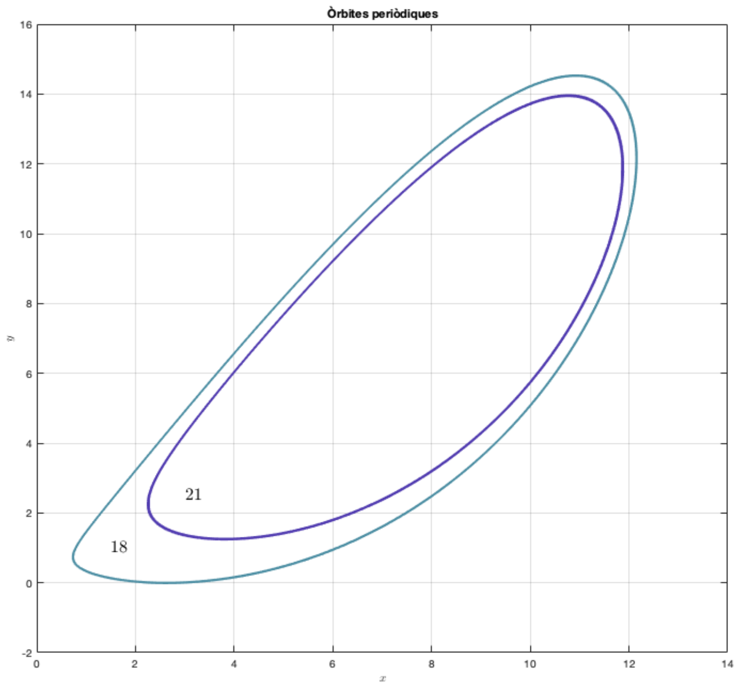

Figura 3: Els nombres indiquen el valor de r utilitzat per computar les òrbites.

Per acabar, representem els valors $x(t), y(t), z(t)$ per certificar que evidentment durant un temps suficientment llarg (al ser un estudi numèric el cicle límit no és exacte), tenim període:

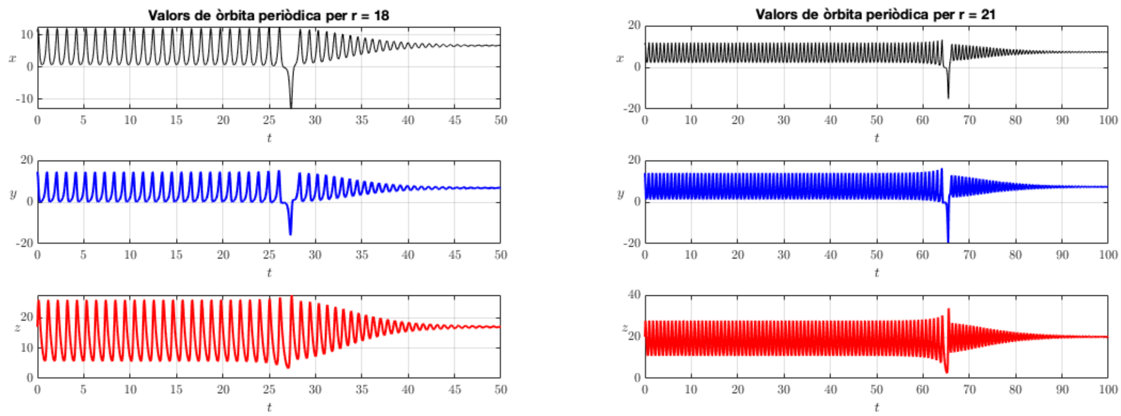

Figura 4: Podem observar com en el primer cas ($r = 18$) el cicle límit es manté aproximadament 27 unitats de temps. Per $r = 21$ es manté gairebé 65 unitats de temps