KTH Information and Communication Technology

Tentamen i Matematik, analys, IX1304

Onsdag 2017-06-07, 08.00 - 13.00, Sal: 205, 301, A

Hjälpmedel: Formelsamling (nedladdningsbar från kursens hemsida) samt skrivhjälpmedel som penna och linjal.

Examinator: Mattias Hammar, tel 08-7904375, e-mail: hammar@kth.se

Denna tentamen avser samtliga provkoder TEN1, TENA och TENB enligt anvisningarna nedan.

TENB Provet består av samtliga sju uppgifter som var och en kan ge upp till fyra poäng. De preliminära betygsgränserna är:

Poäng	<13	13	14	17	20	23	26
Betyg	F	Fx	E	D	C	B	A

TEN1
TENA Provet består av sex uppgifter (1-6) som var och en kan ge upp till fyra poäng. De preliminära betygsgränserna är:

Poäng	<11	11	12	15	18	21	23
Betyg	F	Fx	E	D	C	B	A

För maximal poäng på en uppgift krävs att lösningen är korrekt och fullständig med korrekt notation och tydlig motivering. Ange även tydliga referenser till formelsamlingen där detta är aktuellt. Kryssa i på omslaget vilka uppgifter som behandlats, använd ett nytt blad för varje lösning och använd ej rödpenna. Observera att kontrollskrivningsresultaten från ht 2016 ej tillgodoräknas på denna tentamen.

Resultatet kommer att anslås senast fredag 2017-06-30.

---

1. Skissa grafen till funktionen

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}-2}{x^2-16},$$

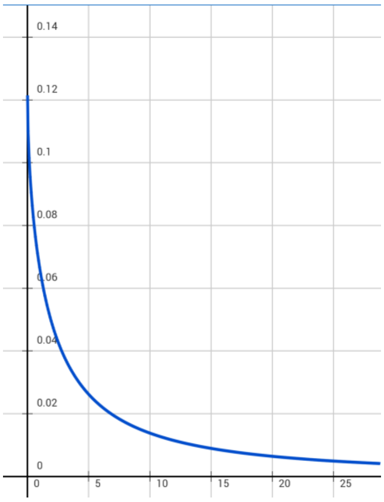
beräkna dess gränsvärde då $x \to 4$ samt ange dess definitionsmängd och värdemängd. (4 p)

Lösningsförslag
Definitionsmängden ges av $0 \leq x < 4$ samt $x > 4$

Beräkna gränsvärdena $\lim_{x\to o} f(x) = 1/8$ och $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

$$\lim_{x\to 4} f(x) = \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x^2-16} = \{l'Hospital\} = \lim_{x\to 4} \frac{1/2\sqrt{x}}{2x} = \lim_{x\to 4} \frac{1}{4x^{3/2}} = \frac{1}{32}$$

Eftersom $f'(x) < 0 \ \in x > 0$ ges värdemängden av $0 < f(x) \leq 1/8$



2. Härled formel 82 i formelsamlingen, $\int x \sin x dx = \sin x - x \cos x + C$, genom partiell integration av vänstra ledet. (4 p)

Lösningsförslag
Partiell integration innebär att man utnyttjar sambandet $\int u dv = uv - \int v du$. I detta fall väljer man lämpligen $u = x$ och $dv = \sin x dx$ (strategi: integranden består av ett polynom (u) och en enkel integrerabar funktion $(\sin x)$ → sätt u= polynomet och dv=resten):

$$\int x \sin x dx = \begin{Bmatrix} u = x & dv = \sin x dx \\ du = dx & v = -\cos x \end{Bmatrix} = \int u dv$$
$$= uv - \int v du = -x \cos x - \int (-\cos x dx) = -x \cos x + \sin x + C$$

3. Vilken är den största rektangulära yta som kan inneslutas av ett snöre med längden L? (4 p)

Lösningsförslag
Om rektangelns kort och långsida benämns a respektive b kommer den inneslutna arean ges av $A = ab$. Dessutom gäller att $L = 2a + 2b$ varur $b = \frac{1}{2}(L - 2a)$ och $A = \frac{L}{2}a - a^2$. A kan nu deriveras m.a.p. a: $\frac{dA}{da} = \frac{L}{2} - 2a$. $\frac{dA}{aa} = 0$ ger slutligen ett extremvärde för den inneslutna arean $a = \frac{L}{4}$ (dvs arean är en kvadrat med sida $\frac{L}{4}$) som ger $A = \frac{L^2}{16}$. Att detta är ett maximum kan man övertyga sig om genom att undersöka tecknet på andraderivatan ($f''(a) = -2 < 0$ oberoende av a).

4. Härled uttrycket för arean av en sfär med radie r ($A = 4\pi r^2$) genom att integrera fram rotationsarean som definieras när kurvan $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ får rotera runt x-axeln. (4 p)

Lösningsförslag

$$A = 2\pi \int_{-r}^{r} f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$$

$$= \left\{ f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}, f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}} \Rightarrow 1 + (f'(x))^2 = \frac{r^2}{r^2 - x^2} \right\} =$$

$$2\pi \int_{-r}^{r} r dx = 2\pi [rx]_{-r}^{r} = 4\pi r^2$$

5. a) Visa att $C_1 \cos kt + C_2 \sin kt = A \sin(kt + \delta)$ där $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ och $\tan\delta = \frac{C_1}{C_2}$. A är funktionens amplitud och δ är dess fasskift. (2 p)

b) Använd resultatet i a) för att beräkna amplitud och fasskift för lösningen till begynnelsevärdesproblemet:

$$\begin{cases} y'' + 9y = 0 \\ y(0) = 3 \\ y'(0) = -6 \end{cases} \qquad (2\text{ p})$$

Ledning: Tänk på att $\tan\alpha$ inte är en ett-till-ett-funktion.

Lösningsförslag

$A \sin(kt + \delta) = \{\text{F.S. sid 2}\} = A(\sin kt \cos\delta + \cos kt \sin\delta) = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1 = A\sin\delta \text{ och } C_2 = A\cos\delta \Rightarrow A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \\ \tan\delta = \dfrac{\sin\delta}{\cos\delta} = \dfrac{A\sin\delta}{A\cos\delta} = \dfrac{C_1}{C_2} \end{cases}$$

$y'' + 9y = 0$ ger den karakteristiska ekvationen $r^2 + 9 = 0 \Rightarrow r = \pm 3i$

$\Rightarrow y = C_1\cos(3t) + C_2\sin(3t)$

$y(0) = C_1 = 3$

$y' = -3C_1 \sin 3t + 3C_2 \cos 3t \Rightarrow y'(0) = 3C_2 = -6 \Rightarrow C_2 = -2$

$\Rightarrow y = 3\cos 3t - 2\sin 3t = \sqrt{13}\sin(3t + \delta)$ med $\delta = \pi + \tan^{-1}(-3/2)$,

(Tecknen på C_1 och C_2 ger att δ ligger i andra kvadranten medan $\delta = \tan^{-1}(-3/2)$ ligger i fjärde kvadranten.)

6. Använd femte ordningens Taylorutveckling för att hitta en approximativ lösning till $\int_{-1}^{1} \frac{\sin x}{x} dx$. (4 p)

Lösningsförslag

Först noteras att detta inte är en generaliserad integral. Även om integranden är diskontinuerlig vid $x = 0$ existerar gränsvärdet $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ och den kan därmed utökas till en kontinuerlig funktion $g(x)$ med $g(0) = 1$.

Taylorutvecklingen av $\sin x$ runt $x = 0$ (dvs Maclaurinutvecklingen av $\sin x$)upp till $n = 5$ kan skrivas

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \text{ vilket ger att } \frac{\sin x}{x} \approx 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!}$$

Detta ger att integralen kan beräknas som

$$\int_{-1}^{1} \frac{\sin x}{x} dx \approx \int_{-1}^{1} \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!}\right) dx = \int_{-1}^{1} \left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120}\right) dx = \left[x - \frac{x^3}{18} + \frac{x^5}{600}\right]_{-1}^{1} = \frac{1703}{900}$$

Denna uppgift ingår endast i TENB

7. Studera funktionen $f(x) = e^{-x} \sin x$

a) Skissa funktionen i intervallet $0 \leq x \leq \pi$ samt ange alla nollställen och extremvärden. Ange även funktionens konkavitet och eventuella inflektionspunkter i intervallet. (3 p)

b) Tillsammans med x-axeln innesluter funktionen i detta intervall en area. Beräkna arean. (1 p)

Ledning: $e^{-\pi/4} \sin\frac{\pi}{4} \approx 0.3$

Lösningsförslag

a) Nollställen fås för $x = 0$ och $x = \pi$.

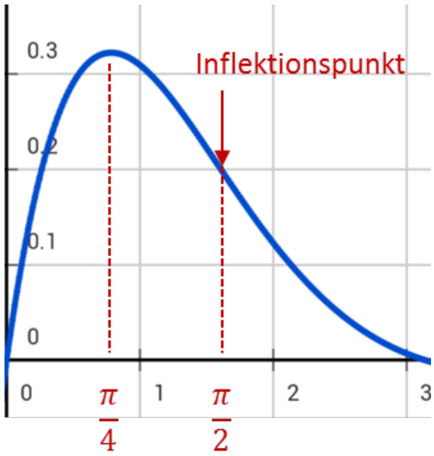
$f(x) = e^{-x} \sin x \Rightarrow f'(x) = e^{-x}(\cos x - \sin x)$, dvs $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pi/4$

Detta måste motsvara ett maxvärde eftersom såväl $\sin x$ som $e^{-x} > 0$ i intervallet

För att få fram kurformen och konkaviteten studeras andraderivatan:

$$f''(x) = -2e^{-x} \cos x = \begin{cases} < 0 \text{ för } x < \frac{\pi}{2} \\ > 0 \text{ för } x > \pi > \frac{\pi}{2} \end{cases},$$

dvs funktionen har en inflektionspunkt vid $x = \frac{\pi}{2}$ där konkaviteten ändras från nedåtgående till uppåtgående.



b) Arean får genom partiell ekvation eller genom att utnyttja formelsamlingen (nr 98).

Partiell integration:

$$\int e^{-x}\sin x dx = \begin{Bmatrix} u = e^{-x} \; dv = \sin x dx \\ du = -e^{-x} dx \; v = -\cos x \end{Bmatrix} = \int u dv$$
$$= uv - \int v du = -e^{-x}\cos x - \int e^{-x}\cos x dx + C$$

$$\int e^{-x}\cos x dx = \begin{Bmatrix} u = e^{-x} \; dv = \cos x dx \\ du = -e^{-x} dx \; v = \sin x \end{Bmatrix} = \int u dv$$
$$= uv - \int v du = -e^{-x}\sin x + \int e^{-x}\sin x dx + C_2$$

Insättning: $\int_0^\pi e^{-x}\sin x = [-e^{-x}\cos x]_0^\pi - \int_0^\pi e^{-x}\sin x = e^{-\pi} + 1 + [-e^{-x}\sin x]_0^\pi$
$- \int e^{-x}\sin x dx = A$

$$\Rightarrow A = e^{-\pi} + 1 - A \Rightarrow A = \frac{e^{-\pi}+1}{2}$$