KTH Information and Communication Technology

Tentamen i Matematik, analys, IX1304

Torsdag 2018-06-07, 14.00 - 19.00, Sal: Ka-205, Ka-303, Ka-304 samt FUNKA i egna salar

Hjälpmedel: Formelsamling (nedladdningsbar från kursens hemsida) samt skrivhjälpmedel som penna och linjal.

Examinator: Mattias Hammar, tel 08-7904375, e-mail: hammar@kth.se

Frågor under tentamens gång besvaras av Anders Hallén, tel 08-7904358, email: ahallen@kth.se

Denna tentamen avser samtliga provkoder TEN1, TENA och TENB enligt anvisningarna nedan.

TENB Provet består av samtliga sju uppgifter som var och en kan ge upp till fyra poäng. De preliminära betygsgränserna är:

Poäng	<13	13	14	17	20	23	26
Betyg	F	Fx	E	D	C	B	A

TEN1
TENA Provet består av sex uppgifter (1-6) som var och en kan ge upp till fyra poäng. De preliminära betygsgränserna är:

Poäng	<11	11	12	15	18	21	23
Betyg	F	Fx	E	D	C	B	A

Godkänd kontrollskrivning *N* markeras med ett ”G” i rutan för uppgift *N* och kryssa även i på omslaget vilka uppgifter som behandlats. För maximal poäng på en uppgift krävs att lösningen är korrekt och fullständig med korrekt notation och tydlig motivering. Ange även tydliga referenser till formelsamlingen där detta är aktuellt. Använd ett nytt blad för varje lösning och använd ej rödpenna.

Resultatet kommer att anslås senast fredag 2018-06-29.

---

1. Bestäm gränsvärdena

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+16}\right) \text{ samt } \lim_{x\to-\infty}\left(x-\sqrt{x^2+16}\right)$$

(4 p)

Lösningsförslag

$x \to +\infty$

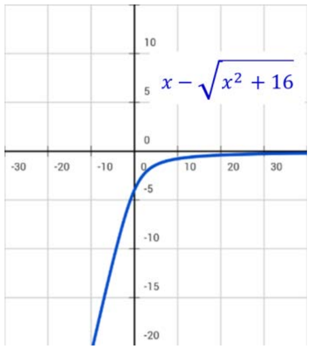
Eftersom bägge termerna i uttrycket går mot positiva oändligheten när $x \to \infty$ går det inte att beräkna gränsvärdet direkt (det går inte att subtrahera ∞ från ∞). Istället får man förlänga uttrycket med dess konjugat för att få ett ekvivalent algebraiskt uttryck:

$$\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+16}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+16}\cdot\frac{x+\sqrt{x^2+16}}{x+\sqrt{x^2+16}}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-(x^2+16)}{x+\sqrt{x^2+16}}=$$

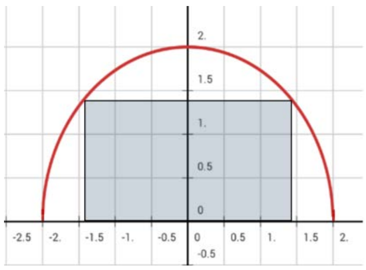
$$\lim_{x\to\infty}\frac{-16}{x+\sqrt{x^2+16}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-16/x}{1+\sqrt{1+16/x^2}}=0$$

$x \to -\infty$

I detta fall går första termen mot negativa oändligheten medan andra termen går mot positiva oändligheten varför gränsvärdet måste gå mot $-\infty$.



2. Vilken är den största möjliga arean för en rektangel som är inskriven i en halvcirkel med radien 2 cm? (4 p)



Lösningsförslag

Halvcirkelns funktion ges as $y=\sqrt{4-x^2}$ varvid rektangelns övre hörnkoordinat i första kvadranten är $\left(x,\sqrt{4-x^2}\right)$. Detta ger att rektangelns area kan skrivas:

$$A=2x\cdot\sqrt{4-x^2}$$

$$\frac{dA}{dx}=2\sqrt{4-x^2}+\frac{2x\cdot(-2x)}{2\sqrt{4-x^2}}=2\sqrt{4-x^2}-\frac{2x^2}{\sqrt{4-x^2}}$$

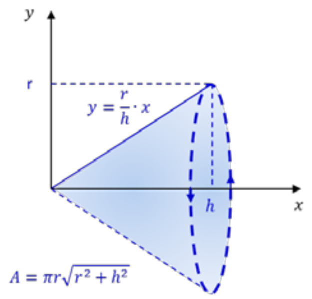
$$\frac{dA}{dx}=0\Rightarrow\sqrt{4-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}=0\Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$$

$\Rightarrow A = 4\ \text{cm}^2$ (väljs positivt)

Detta inses vara ett maximum eftersom $A(0)=A(2)=0$ och $A>0\ \forall\ x\in(0,-2)$.

3. Härled ekvationen för konens mantelyta (arean av den välvda ytan), $A = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$ där r är konens bottenradie och h är dess höjd; se sid 1 i formelsamlingen. (4 p)

Ledning: *Beräkna mantelytan som den rotationsarea som uppstår då funktionen* $y = \frac{r}{h} \cdot x$ *får rotera runt* x *-axeln.*



Lösningsförslag

$$A = \int_0^h 2\pi \cdot y \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \left\{ y = \frac{r}{h} \cdot x \Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \left(\frac{r}{h}\right)^2 \right\} =$$

$$\int_0^h 2\pi \cdot \frac{r}{h} x \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{r}{h}\right)^2}\, dx = \left[2\pi \frac{r}{h} \frac{x^2}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{r}{h}\right)^2} \right]_0^h = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$$

4. Beräkna arean som innesluts av funktionerna $f(x) = \sqrt{2x + 1}$ och $g(x) = 2x + 1$ (4 p)

Lösningsförslag

Skärningspunkterna mellan kurvorna ges av $f(x) = g(x)$, dvs

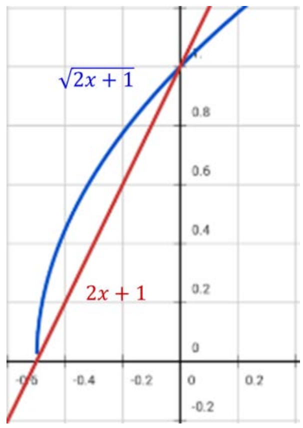
$$2x + 1 = \sqrt{2x + 1} \Leftrightarrow 4x^2 + 2x = 0 \Longrightarrow x_1 = -\frac{1}{2}\ ;\ x_2 = 0$$

Den inneslutna arean kan då skrivas ($\sqrt{2x + 1} > 2x + 1$ i intervallet):

$$A = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} \left(\sqrt{2x + 1} - (2x + 1)\right) dx =$$

$$\left\{ \begin{array}{c} 2x + 1 = u \\ 2dx = du \\ x = -\frac{1}{2} \Rightarrow u = 0 \\ x = 0 \Longrightarrow u = 1 \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \int_0^1 (\sqrt{u} - u) du =$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}u^{3/2} - \frac{1}{2}u^2\right]_0^1 = \frac{1}{12}$$



5. Bestäm gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{e^{x^4}-1}}{x^2} \quad (4\text{ p})$$

Ledning: *Eftersom detta gränsvärde är av typen "0/0" kan det kännas naturligt att använda sig av l'Hôspitals regel. Detta fungerar dock inte eftersom derivatan av täljaren får en komplicerad form som bara leder till ett än mer komplicerat uttryck. Istället kan man Maclaurinutveckla termen e^{x^4} för att få fram ett rent algebraiskt uttryck som det är betydligt enklare att hantera.*

Lösningsförslag

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{e^{x^4}-1}}{x^2} = \left\{\begin{matrix}\text{Maclaurinutveckling:} \\ e^{x^4} = 1 + x^4 + O(x^8)\end{matrix}\right\} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^4+O(x^8)-1}}{x^2} =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^4+O(x^8)}}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\sqrt{1+O(x^4)}}{x^2} = \lim_{x\to 0}\sqrt{1+O(x^4)} = 1$$

6. En kaffekopp har temperaturen 80°C när den hälls upp. Efter att den fått stå och svalna i två minuter i ett rum som håller 20°C har temperaturen sjunkit till 75°C. Bestäm kaffets temperatur vid en godtycklig tidpunkt t efter att kaffet serverats och beräkna också vid vilken tidpunkt temperaturen sjunkit till 50°C. (4 p)

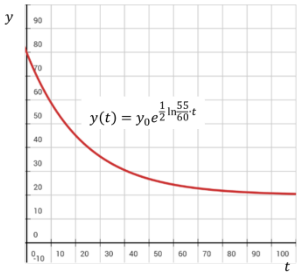
Ledning: Antag att avkylningen är proportionell mot temperaturskillnaden mellan kaffet och dess omgivning ("Newton's law of cooling"), dvs $y'(t) = k(y(t) - T_s)$ där $y(t)$ är temperaturen vid tidpunkten t och T_s är omgivningens temperatur.

Lösningsförslag

$y'(t) = k(y(t) - 20)$ kan med substitutionen $u(t) = y(t) - 20$ skrivas om som $u'(t) = ku(t)$ vilket har lösningen $u(t) = u_0 e^{kt}$ där $u_0 = u(0) = y(0) - 20 = 60°C$.

$$u(2) = u_0 e^{2k} = y(2) - 20 = 55°C \implies k = \frac{1}{2}\ln\frac{55}{60}$$

$$y(t) = 50 \implies u(t) = 30 \implies 60e^{kt} = 30 \implies t = \frac{1}{k}\ln\frac{30}{60} \approx 15.9\text{ min}$$



Denna uppgift ingår endast i TENB

7. Härled formeln för rekursiv rotutdragning:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{c}{x_n}\right) \text{ för att approximera } \sqrt{c}$$

samt illustrera med ett enkelt exempel (t.ex. $c = 5$ och $x_0 = 2$; en iteration räcker). (4 p)

Ledning: *Använd Newton-Raphsons metod för att approximera nollställen till motsvarande funktion* $f(x)$:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Lösningsförslag

Ansätt $f(x) = x^2 - c \Rightarrow f'(x) = 2x$ varvid $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - c}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{c}{x_n}\right)$

Notera att om $x_n < \sqrt{c}$ så är $\frac{c}{x_n} > \sqrt{c}$ och att x_{n+1} därmed måste vara en bättre approximation än x_n till $\sqrt{c}$ eftersom $x_n < \sqrt{c} < \frac{c}{x_n}$ och x_{n+1} är ett medelvärde av x_n och $\frac{c}{x_n}$.

$$c = 5 \text{ och } x_0 = 2 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{5}{2}\right) = \frac{9}{4} \Longrightarrow x_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{9}{4} + \frac{5}{\frac{9}{4}}\right) = \frac{161}{72} \Longrightarrow \cdots$$

$$x_1^2 = \left(\frac{9}{4}\right)^2 = \frac{81}{16} = 5 + \frac{1}{16}\ ;\ x_2^2 = \left(\frac{161}{72}\right)^2 = \frac{25921}{5184} = 5 + \frac{1}{5184};\ \ldots$$

Denna metod har varit känd sedan antikens dagar (dvs långt före Newton-Raphsons metod) och har tidigare även lärts ut i svenska grundskolan som en metod att göra approximativ rotutdragning. Den konvergerar alltid och ger en bra approximation efter bara en eller några få iterationer beroende på val av initialvärde x_0.