Härledete

KTH Information and Communication Technology

Tentamen i Matematik, analys, IX1304

Fredag 2019-06-07, 08.00 - 13.00, Sal: Ka-205, Ka-210

Hjälpmedel: Formelsamling (nedladdningsbar från kursens hemsida) samt skrivhjälpmedel som penna och linjal.

Examinator: Mattias Hammar, tel 08-7904375, e-mail: hammar@kth.se

Denna tentamen avser samtliga provkoder TEN1, TENA och TENB enligt anvisningarna nedan.

TENB Provet består av samtliga sju uppgifter som var och en kan ge upp till fyra poäng. De preliminära betygsgränserna är:

Poäng	<13	13	14	17	20	23	26
Betyg	F	Fx	E	D	C	B	A

TEN1
TENA Provet består av sex uppgifter (1-6) som var och en kan ge upp till fyra poäng. De preliminära betygsgränserna är:

Poäng	<11	11	12	15	18	21	23
Betyg	F	Fx	E	D	C	B	A

För maximal poäng på en uppgift krävs att lösningen är korrekt och fullständig med korrekt notation och tydlig motivering. Ange även tydliga referenser till formelsamlingen där detta är aktuellt. Använd ett nytt blad för varje lösning och använd ej rödpenna.

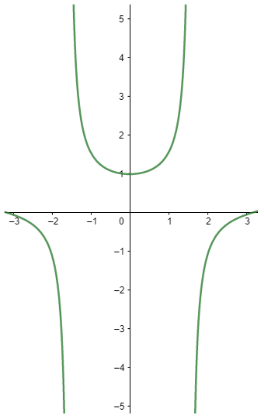
Resultatet kommer att anslås senast måndag 2019-07-01.

---

1. Skissa grafen till funktionen $f(x) = \frac{\tan x}{x}$ på intervallet -π ≤ x ≤ π

Lösningsförslag

Undersök kritiska gränsvärden, asymptoter och skärningspunkter: $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$, $\lim_{x\to\pi/2^-} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to\pi/2^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-\pi/2^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to-\pi/2^-} f(x) = -\infty$, $f(\pi) = 0$, $f(-\pi) = 0$



2. Undersök funktionen y=x^x med avseende på lokala extremvärden i $0 < x < 1$

__Ledning:__ Exponentialfunktioner behandlas enklast genom att man logaritmerar dem.

Lösningsförslag

Börja med att undersöka ändpunkterna. Direkt insättning ger att $y(1) = 1$ medan $\lim_{x\to 0} x^x$ beräknas genom att undersöka gränsvärdet $\lim_{x\to 0} \ln x^x$:

$$\lim_{x\to 0} x\ln x = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{1/x} = \left\{\frac{"\infty"}{\infty}, \text{l'Hopital}\right\} = \lim_{x\to 0}\frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0} x = 0 \Longrightarrow \lim_{x\to 0} x^x = \lim_{x\to 0} e^{x\ln x} = 1$$

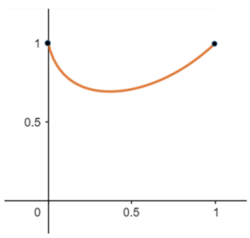
Stationära punkter fås genom att undersöka derivatan:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}x^x = \frac{d}{dx}e^{x\ln x} = e^{x\ln x}(\ln x + 1)$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 \Longrightarrow \ln x = -1 \Longrightarrow x = e^{-1} \Longrightarrow y_{min} = e^{(-e^{-1})}$$

Detta svarar mot ett minimum eftersom funktionsvärdena i ändpunkterna $\lim_{x\to o} y(x) = y(1) = 1 > e^{(-e^{-1})}$ (Notera att $0 < e^{-1} < 1 \Longrightarrow 0 < e^{(-e^{-1})} < 1$)

Svar: Funktionen har lokala maxima $y = 1$ i ändpunkterna $(x \to 0, 1)$ samt lokalt minimum $e^{(-e^{-1})}$ för $x = e^{-1}$

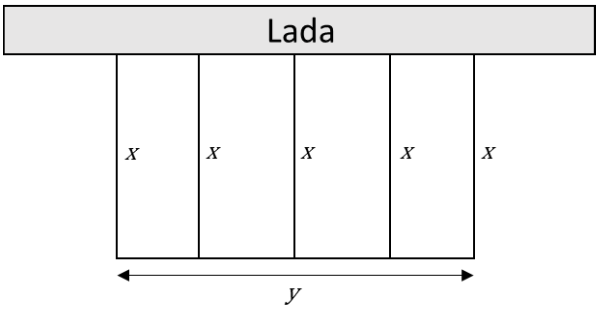


3. Visa att $\int \ln x\, dx = x\ln x - x + C$ genom partiell integration av vänstra ledet.

Lösningsförslag

$$\int \ln x\, dx = \begin{Bmatrix} U = \ln x, dV = dx \\ dU = \frac{1}{x}dx, V = x \end{Bmatrix} = x\ln x - \int x\frac{1}{x}dx = x\ln x - x + C$$

4. En bonde vill sätta upp rektangulära inhägnader mot sin lada. Till sitt förfogande har han 100 m staket. Han avser skapa fyra separata sammanhängande inhägnader enligt figuren. Vilken är den maximala totala area han kan hägna in på detta sätt? Notera att ladan själv utgör en sida av inhägnaden och att det därmed inte behövs något staket på den sidan. (4 p)



Lösningsförslag

Staketets längd: $5x + y = 100 \Longrightarrow y = 100 - 5x$

Inhägnadens area: $A = xy = x(100 - 5x) \Longrightarrow \frac{dA}{dx} = 100 - 10x$

$\frac{dA}{dx} = 0 \Longrightarrow x = 10 \text{ m} \Longrightarrow A_{max} = 10(100 - 5 \cdot 10) = 500 \text{ m}^2$

Att detta är ett maximum inses genom att $A \to 0$ då $x \to 0$ eller $y \to 0$

5. Utnyttja Taylorutveckling för att bestämma gränsvärdet

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + 2\cos x - 2}{3x^4} \qquad (4 \text{ p})$$

Lösningsförslag

Eftersom $x \to 0$ kan vi använda oss av Maclaurinutvecklingen (dvs Taylorutveckling runt $x = 0$). Formelsamlingen ger Maclaurinutvecklingen för $\cos x$:

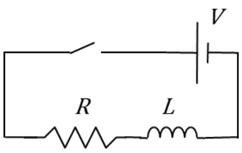
$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots \qquad -\infty < x < \infty$$

$$\Longrightarrow \lim_{x \to 0} \frac{x^2 + 2\cos x - 2}{3x^4} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 + 2\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots\right) - 2}{3x^4} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{360} + \cdots}{3x^4} \right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{36} - \frac{x^2}{1080} + \cdots \right) = \frac{1}{36}$$

6. Kretsen i figuren innehåller en brytare, en spänningskälla, en spole och en resistor i serie. Brytare sluts vid $t = 0$ varefter tidsberoendet i strömmen ges av begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} L\frac{dI}{dt} + RI = V \\ I(0) = 0 \end{cases}$$



Beräkna $I(t)$ vid en godtycklig tidpunkt $t > 0$. Vad blir strömmen i fortvarighet, dvs vad är $\lim_{t\to\infty} I(t)$?

Lösningsförslag

Ekvationen skrivs om på formen $\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \frac{V}{L}$ varvid lösningen kan skrivas $I(t) = e^{-\mu(t)} \int e^{\mu(t)} \frac{V}{L} dt$ där $\mu(t) = \int \frac{R}{L} dt = \frac{Rt}{L}$ är lösningen till motsvarande homogena ekvation (se Adams/Essex, kap. 7.9).

$I(t) = e^{-\mu(t)} \int e^{\mu(t)} \frac{V}{L} dt = e^{-\frac{Rt}{L}} \int e^{\frac{Rt}{L}} \frac{V}{L} dt = e^{-\frac{Rt}{L}} \left(\frac{L}{R} e^{\frac{Rt}{L}} \frac{V}{L} + C \right) = \frac{V}{R} + Ce^{-\frac{Rt}{L}}$

$I(0) = 0 \Longrightarrow 0 = \frac{V}{R} + C \Longrightarrow C = -\frac{V}{R}$

$\Longrightarrow I(t) = \frac{V}{R}\left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right), \lim_{t\to 0} I(t) = 0$

Denna uppgift ingår endast i TENB

7. a) Härled den rekursiva formeln $x_{k+1} = \frac{1}{n}\left((n-1)x_k + c \cdot x_k^{1-n}\right)$ för att beräkna $\sqrt[n]{c}$ där n och c är godtyckliga positiva konstanter (3 p)

b) Visa metoden med ett enkelt exempel, t.ex. $\sqrt[3]{9}$ med startvärde $x_0 = 2$ och en iteration (1 p)

Ledning: *Använd Newton-Raphsons metod för att approximera nollställen till* $f(x) = 0$:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Lösningsförslag

Ansätt $f(x) = x^n - c \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$ varvid $x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^n - c}{n x_k^{n-1}} = \frac{1}{n}\left((n-1)x_k + c \cdot x_k^{1-n}\right)$

För att approximera $\sqrt[3]{9}$ med $x_0 = 2$ fås $x_1 = \frac{1}{3}\left((3-1)\cdot 2 + 9 \cdot x_0^{1-3}\right) = \frac{25}{12} \approx 2.0833$, vilket kan jämföras med $\sqrt[3]{9} \approx 2.0801$