KTH Information and Communication Technology

Tentamen i Matematik, analys, IX1304

Måndag 2019-03-11, 08.00 - 13.00, Sal: 208, 301, 304, B, C

Hjälpmedel: Formelsamling (nedladdningsbar från kursens hemsida) samt skrivhjälpmedel som penna och linjal.

Examinator: Mattias Hammar, tel 08-7904375, e-mail: hammar@kth.se

Denna tentamen avser samtliga provkoder TEN1, TENA och TENB enligt anvisningarna nedan.

TENB Provet består av samtliga sju uppgifter som var och en kan ge upp till fyra poäng. De preliminära betygsgränserna är:

Poäng	<13	13	14	17	20	23	26
Betyg	F	Fx	E	D	C	B	A

TEN1
TENA Provet består av sex uppgifter (1-6) som var och en kan ge upp till fyra poäng. De preliminära betygsgränserna är:

Poäng	<11	11	12	15	18	21	23
Betyg	F	Fx	E	D	C	B	A

För maximal poäng på en uppgift krävs att lösningen är korrekt och fullständig med korrekt notation och tydlig motivering. Ange även tydliga referenser till formelsamlingen där detta är aktuellt. Använd ett nytt blad för varje lösning och använd ej rödpenna.

Resultatet kommer att anslås senast fredag 2019-04-01.

---

1. Bestäm gränsvärdet $\lim\limits_{x\to\pi/2} \dfrac{\sin(2x)}{\sin(4x)}$

Lösningsförslag

$$\lim_{x\to\pi/2} \frac{\sin(2x)}{\sin(4x)} = \left\{\frac{"0"}{0};\ \text{l'Hopital}\right\} = \lim_{x\to\pi/2} \frac{2\cos(2x)}{4\cos(4x)} = \left\{\begin{matrix} 2\cos 2x = 2\cos\pi = -2 \\ 4\cos 4x = 4\cos 2\pi = 4 \end{matrix}\right\} = -\frac{1}{2}$$

2. Skissa grafen till funktionen $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$ samt bestäm för vilka x som $f(x)<0$ (4 p)

Lösningsförslag

Använd följande gränsvärden och skärningspunkter för att konstruera grafen till $f(x)$:

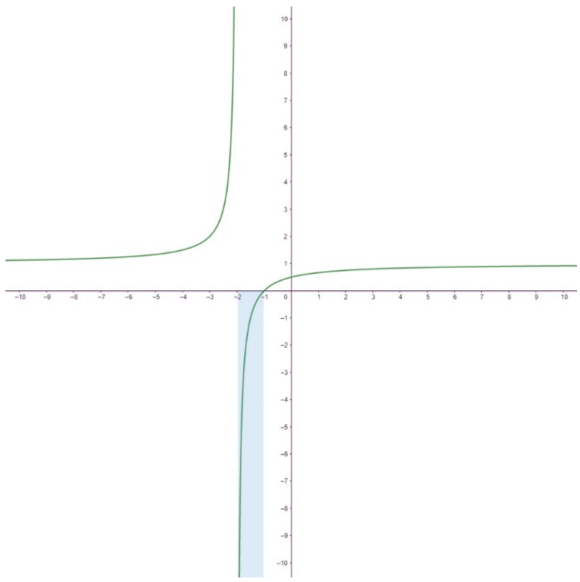
$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \{x+1<0, x+2<0 \Longrightarrow f(x)>0\} = \infty$$
$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \{x+1<0, x+2>0 \Longrightarrow f(x)>0\} = -\infty$$
$$\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{1+1/x}{1+2/x} = 1$$
$$x = 0 \Rightarrow f(x) = 1/2$$
$$f(x) = 0 \Rightarrow x = -1$$

För att lösa olikhetsekvationen konstaterar man att $f(x) < 0$ kräver att antingen $x+1$ eller $x+2$ måste vara <0. Undersök de två fallen $x+2<0$ och $x+2>0$:

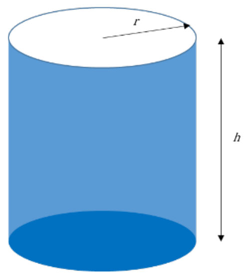
$x + 2 > 0 \Rightarrow \left\{\text{förläng } \frac{x+1}{x+2} < 0 \text{ med } x+2\right\} \Rightarrow x+1<0 \Rightarrow x<-1$

$x + 2 < 0 \Rightarrow \left\{\text{förläng } \frac{x+1}{x+2} < 0 \text{ med } x+2 \text{ men } x+2<0 \Rightarrow <\to>\right\} \Rightarrow x+1>0 \Rightarrow x>-1$vilket motsäger $x+2<0$ varför $f(x)<0$ inte kan vara uppfyllt i intervallet.

$\therefore f(x) < 0 \Longleftrightarrow -2 < x < -1$



3. Du ska konstruera en cylinderformad mugg (med botten men utan lock – se figur) som ska rymma en specifik volym vätska. Beräkna höjd och radie på muggen för minimal materialåtgång. Beräkna också förhållandet mellan höjd och radie på den färdiga muggen(4 p)



Ledning: *Materialåtgången approximeras som muggens ytterarea (cylinderns mantelyta plus bottenplattan). En given volym (V) kommer att svara mot en specifik radie (r) och höjd (h) på muggen varför man kan minimera arean (A) med avseende på antingen r eller h och därefter beräkna motsvarande h eller r.*

Lösningsförslag

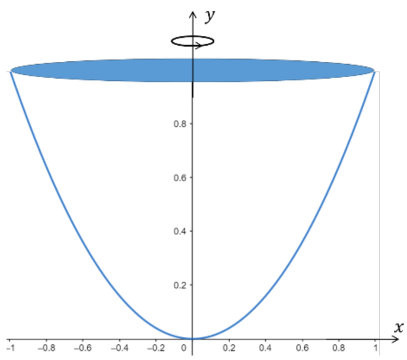
$A = \pi r^2 + 2\pi r h;\ V = h\pi r^2 \Rightarrow h = \frac{V}{\pi r^2}$

$$\Rightarrow A = \left\{h = \frac{V}{\pi r^2}\right\} = \pi r^2 + 2\pi r \frac{V}{\pi r^2} = \pi\left(r^2 + 2\frac{V}{\pi r}\right) \Rightarrow \frac{dA}{dr} = 2\pi\left(r - \frac{V}{\pi r^2}\right)$$

$$\frac{dA}{dr} = 0 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}, \frac{d^2A}{dr^2} = 2\pi\left(1 + \frac{2V}{\pi r^3}\right) > 0 \Rightarrow \text{minimum}$$

$$\text{dvs}, r = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}\ och\ h = \frac{V}{\pi r^2} \Rightarrow \frac{h}{r} = \frac{V}{\pi r^3} = 1$$

4. Beräkna dels rotationsvolymen (mängden vätska som får plats i en paraboliskt formad skål) och dels rotationsarean (skålens ytterarea) som fås då parabeln $y = x^2$ får rotera runt y-axeln för $0 \leq x \leq 1$ (4 p)



Lösningsförslag

Rotationsvolymen kan t.ex. fås genom skalmetoden (eller alternativt skivmetoden om man integrerar längs y-axeln):

$$dV = 2\pi x(1 - x^2)dx \Rightarrow V = 2\pi \int_0^1 x(1 - x^2)dx = 2\pi\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

För rotationsarean får man först plocka fram båglängden för varje areaelement:

$$ds = \sqrt{1 + (y')^2}dx = \sqrt{1 + 4x^2}dx \Rightarrow dA = 2\pi x ds \Rightarrow A = 2\pi \int_0^1 x\sqrt{1 + 4x^2}dx = \begin{Bmatrix} u = 1 + 4x^2 \\ du = 8xdx \\ x = 0 \Rightarrow u = 1 \\ x = 1 \Rightarrow u = 5 \end{Bmatrix} =$$

$$\frac{\pi}{4}\int_1^5 \sqrt{u}du = \left[\frac{2}{3}u^{3/2}\right]_1^5 = \frac{\pi}{6}(5\sqrt{5} - 1)$$

5. Utnyttja Taylorutveckling för att beräkna ett approximativt värde på nedanstående integral. Ta med åtminstone tre termer i integranden och ge en feluppskattning för fallet där man endast tagit med två termer.

$$\int_{-1}^{1} \cos(x^2)dx \qquad (4\text{ p})$$

Lösningsförslag

Eftersom integrationsintervallet är [-1,1] kan vi använda oss av Maclaurinutvecklingen (dvs Taylorutveckling runt $x = 0$). Formelsamlingen ger Maclaurinutvecklingen för $\cos x$:

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots \qquad -\infty < x < \infty$$

$$\Rightarrow \cos(x^2) = 1 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{4!}x^8 - \frac{1}{6!}x^{12} + \cdots \quad \Rightarrow \cos(x^2) \approx 1 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{4!}x^8$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} \cos(x^2)\,dx \approx \int_{-1}^{1} \left(1 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{4!}x^8\right)dx = \left[x - \frac{x^5}{10} + \frac{x^9}{216}\right]_{-1}^{1} = \frac{977}{540}$$

Den tredje termen tillför endast $2 \cdot \frac{1}{216}$ varför felet om man endast tar med två termer kan uppskattas vara mindre än 1% (eftersom det är fråga om en alternerande serie sätter den första försummade termen en övre gräns för felet).

6. Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 7x + 3}{y^2}, y(0) = 3$$

Lösningsförslag

Genom variabelseparation fås

$$y^2 dy = (x^2 + 7x + 3)dx \Rightarrow \int y^2 dy = \int (x^2 + 7x + 3)dx \Rightarrow$$

$$\frac{y^3}{3} = \frac{x^3}{3} + \frac{7x^2}{2} + 3x + C \Rightarrow y = \sqrt[3]{x^3 + \frac{21x^2}{2} + 9x + 3C}$$

$$y(0) = 3 \Rightarrow 3 = \sqrt[3]{3C} \Rightarrow C = 9$$

Dvs, $y = \sqrt[3]{x^3 + \frac{21x^2}{2} + 9x + 27}$

Denna uppgift ingår endast i TENB

7. a) Härled den rekursiva formeln $x_{n+1} = 2x_n + a \cdot x_n^2$ för att beräkna inversen till ett tal a, dvs $1/a$ (2 p)

b) Denna metod ställer dock krav på valet av x_0. Visa med ett enkelt exempel vad som händer om x_0 väljs för stort, t.ex. i fallet $a = 5$ och $x_0 = 1$ (1 p)

c) Härled den övre gränsen på x_0 för konvergens för $a = 5$ (1 p)

Ledning: *Använd Newton-Raphsons metod för att approximera nollställen till* $f(x) = 0$:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Lösningsförslag

Ansätt $f(x) = \frac{1}{x} - a \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ varvid $x_{n+1} = x_n - \frac{\frac{1}{x_n} - a}{-\frac{1}{x_n^2}} = 2x_n + a \cdot x_n^2$

Denna algoritm möjliggör t.ex. för datorer att beräkna en invers utan att behöva genomföra någon division.

Figuren visar vad som händer om x_0 väljs för stort. x_1 blir då negativt varvid det hela snabbt divergerar mot alltmer negativa x_n.

För att hitta ett största möjliga x_0 för konvergens i detta fall inser man att x_0 måste väljas så litet att x_1>0 (x_1=0 duger inte) vilket genom insättning i rekursionsformeln ger att $x_0 < 2/a$, dvs $x_0 < 0.4$ i fallet $a = 5$.