KTH Information and Communication Technology

Tentamen i Matematik, analys, IX1304

Måndag 2018-03-12, 08.00 - 13.00, Sal: Ka-208, Ka-301, Ka-304, Ka-308, Ka-Sal A samt FUNKA i egna salar

Hjälpmedel: Formelsamling (nedladdningsbar från kursens hemsida) samt skrivhjälpmedel som penna och linjal.

Examinator: Mattias Hammar, tel 08-7904375, e-mail: hammar@kth.se

Frågor under tentamens gång besvaras av Anders Hallén, tel 08-7904358, email: ahallen@kth.se

Denna tentamen avser samtliga provkoder TEN1, TENA och TENB enligt anvisningarna nedan.

TENB Provet består av samtliga sju uppgifter som var och en kan ge upp till fyra poäng. De preliminära betygsgränserna är:

Poäng	<13	13	14	17	20	23	26
Betyg	F	Fx	E	D	C	B	A

TEN1
TENA Provet består av sex uppgifter (1-6) som var och en kan ge upp till fyra poäng. De preliminära betygsgränserna är:

Poäng	<11	11	12	15	18	21	23
Betyg	F	Fx	E	D	C	B	A

Godkänd kontrollskrivning N markeras med ett "G" i rutan för uppgift N och kryssa även i på omslaget vilka uppgifter som behandlats. För maximal poäng på en uppgift krävs att lösningen är korrekt och fullständig med korrekt notation och tydlig motivering. Ange även tydliga referenser till formelsamlingen där detta är aktuellt. Använd ett nytt blad för varje lösning och använd ej rödpenna.

Resultatet kommer att anslås senast onsdag 2018-04-04.

---

1. Bestäm gränsvärdet

$$\lim_{x \to 0} \frac{2x - |x|}{|3x| - 2x}$$

eller ange om det inte existerar (4 p)

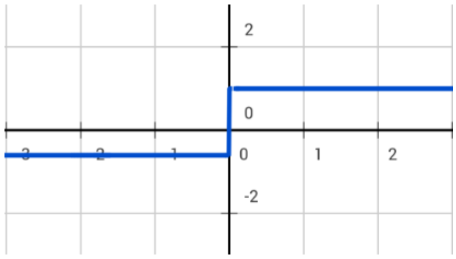
<u>Lösningsförslag</u>

Undersök fallen $x > 0$ och $x < 0$ separat:

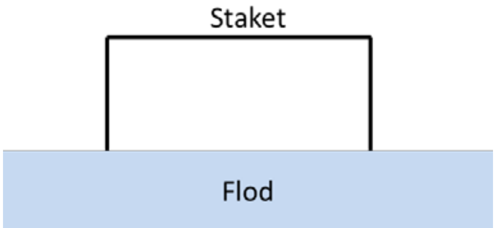
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2x-|x|}{|3x|-2x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x-x}{3x-2x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{2x-|x|}{|3x|-2x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{2x-(-x)}{(-3x)-2x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{3x}{-5x} = -\frac{3}{5}$$

Dvs, gränsvärdet existerar inte!



2. En rektangulär area ska inhägnas invid en flod enligt figuren nedan. Sammanlagt finns material för ett 96 meter långt staket. Detta måste byggas för avgränsning åt tre håll medan floden utgör den fjärde avgränsningen. Vilken är den största area som därmed kan inhägnas? (4 p)



<u>Lösningsförslag</u>

Ansätt de mostående sidornas längd till x och längden av sidan som är längsgående med floden till y. Staketets längd ($L = 96$ m) och den inneslutna arean (A) kan då tecknas

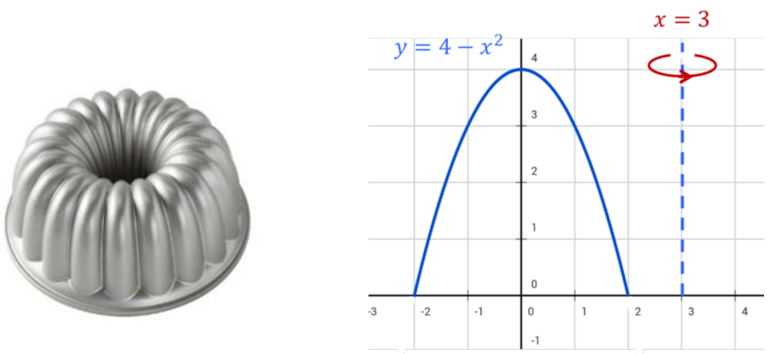
$$L = 2x + y \Rightarrow y = L - 2x$$

$$A = xy = x(L-2x) \Rightarrow \frac{dA}{dx} = L - 4x$$

$$\frac{dA}{dx} = 0 \Rightarrow x = \frac{L}{4}$$

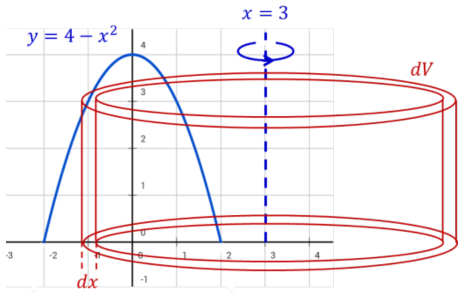
Eller med insatta siffror: $x = 24$ m, $y = 48$ m och $A = 48 \cdot 24 = 1152$ m^2

3. Volymen av en kakform kan approximeras med rotationsvolymen som uppstår då arean som begränsas av funktionen $y = 4 - x^2$ och x-axeln får rotera runt linjen $x = 3$; se figuren nedan. Beräkna denna volym!(4 p)



Figur till problem 3. Kakform vars volym ska approximeras samt tillhörande rotationsgeometri

Ledning: *Enklast använder man skalmetoden och integrerar längs x-axeln. Figuren nedan visar hur ett volymselement dV relaterar till differentialen dx i denna metod. Alternativt kan man använda skivmetoden (eller egentligen brickmetoden) och istället integrera längs y-axeln.*

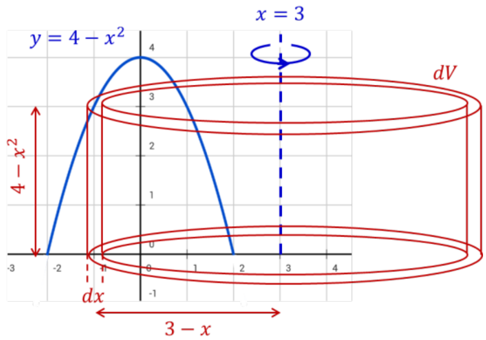


<u>Lösningsförslag</u>

Som indikerats i figuren nedan kan radien för varje skal skrivas $r = 3 - x$. Detta ger att varje volymselement kan skrivas som

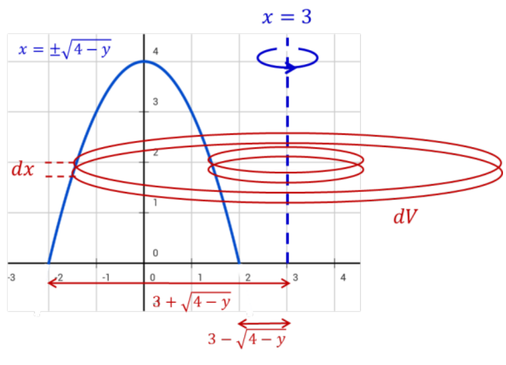
$dV = \{2\pi \cdot \text{radien} \cdot \text{höjden} \cdot \text{tjockleken}\} = 2\pi \cdot (3 - x) \cdot (4 - x^2) \cdot dx$, varvid

$$V = \int_{-2}^{2} 2\pi(3 - x)(4 - x^2)dx = 2\pi \int_{-2}^{2} (x^3 - 3x^2 - 4x + 12)dx = 64\pi$$

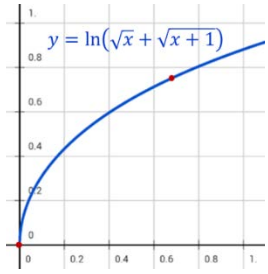


Alternativt kan man integrera fram rotationsvolymen med Brickmetoden längs y-axeln. I detta fall skrivs funktionen om som $x = \pm\sqrt{4 - y}$. Enligt figuren nedan noterar man sedan att den yttre radien $r_0 = 3 + \sqrt{4 - y}$ medan den inre radien $r_1 = 3 - \sqrt{4 - y}$, varvid

$$V = \int_{0}^{4} \pi\left(3 + \sqrt{4 - y}\right)^2 dy - \int_{0}^{4} \pi\left(3 - \sqrt{4 - y}\right)^2 dy = 64\pi$$



4. Visa att båglängden för funktionen $y = \ln\left(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}\right)$ mellan punkterna som svarar mot $x = 0$ och $x = 2/3$, dvs längden på kurvsegmentet mellan de röda punkterna i figuren, kan uttryckas som



$$L = \frac{1}{2}\int_0^{2/3} \frac{(2x+1)}{\sqrt{x^2+x}}\,dx$$

samt beräkna denna längd. (4 p)

Lösningsförslag

$$dL = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$$y = \ln\left(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}\right) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2+x}}$$

$$\Rightarrow 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \frac{1}{4(x^2+x)} = \frac{4x^2+4x+1}{4(x^2+x)} = \frac{(2x+1)^2}{4(x^2+x)}$$

$$\Rightarrow \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{1}{2}\frac{(2x+1)}{\sqrt{x^2+x}}$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2}\int_0^{2/3} \frac{(2x+1)}{\sqrt{x^2+x}}\,dx = \left\{\begin{matrix} u = x^2 + x \\ du = (2x+1)dx \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\int_{x=0}^{x=2/3} \frac{du}{\sqrt{u}} = \left[\sqrt{u}\right]_{x=0}^{x=2/3} =$$

$$\left[\sqrt{x^2+x}\right]_0^{2/3} = \frac{\sqrt{10}}{3}$$

Dvs, drygt en längdenhet vilket kan rimlighetsbedömas genom en jämförelse med skalan i figuren.

5. Bestäm gränsvärdet

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{\ln(x+1) - \ln x} - x\right) \text{ (4 p)}$$

Lösningsförslag

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{\ln(x+1) - \ln x} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} - x\right) = \left\{\begin{matrix} \text{Maclaurinutveckling av} \\ \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \end{matrix}\right\} =$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right)} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{x}\right)}{1 - \frac{1}{2x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)}\right) = \frac{1}{2}$$

6. En skadedjurspopulation växer enligt

$$\dot{p}(t) = \frac{dp(t)}{dt} = 2p(t)[1 - p(t)]$$

dvs enligt en logistisk tillväxt (logistic growth → ”S-kurvetillväxt”) där $p(t)$ betecknar populationen vid tiden t uttryckt i procent av sitt maximala värde för $t \to \infty$. Lös ekvationen för att få fram ett uttryck för $p(t)$ där populationen vid tidpunkten $t = 0$ sätts till p_o. Kommentera även lösningen som svarar mot $p(0) = 0$. (4 p)

Ledning: Detta är en separabel differentialekvation där partialbråks-uppdelningen $\frac{1}{p(1-p)} = \frac{1}{p} + \frac{1}{1-p}$ *kan utnyttjas*

Lösningsförslag

Se Adams, kapitel 7.9.

Detta är en separabel differentialekvation som kan skrivas om enligt

$$\frac{dp}{dt} = 2p[1-p] \Leftrightarrow \frac{dp}{p[1-p]} = 2dt$$

varvid bägge leden kan integreras:

$$\int \frac{dp}{p[1-p]} = \int \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{1-p}\right) dp = \int 2dt$$

$$\ln \frac{p}{1-p} = 2t + C \Leftrightarrow \frac{p}{1-p} = C_1 e^{2t} \Longrightarrow p = \frac{C_1 e^{2t}}{1 + C_1 e^{2t}}$$

Med $p(0) = p_0$ kan C_1 lösas ut till $C_1 = \frac{p_0}{1-p_0}$ varvid

$$p(t) = \frac{p_0}{p_0 + (1-p_0)e^{-2t}}$$

Med $p_0 = 0$ fås ingen tillväxt.

Denna uppgift ingår endast i TENB

7. Titta återigen på differentialekvationen för skadedjurspopulationstillväxten i problem 6:

$$\dot{p}(t) = \frac{dp(t)}{dt} = 2p(t)[1 - p(t)]$$

dvs en logistisk tillväxt där $p(t)$ betecknar populationen vid tiden t uttryckt i procent av sitt maximala värde för $t \to \infty$.

Vid vilken population är tillväxttakten som högst? Visa att denna population svarar mot en inflektionspunkt i $p(t)$ och skissa grafen till $p(t)$. (4 p)

Lösningsförslag

$\frac{d}{dp}\dot{p}(t) = 2(1-p) - 2p = 2(1-2p)$ vilket ger att $\frac{d}{dp}\dot{p}(t) = 0$ för $p = \frac{1}{2}$

Att detta svarar mot ett maximum inses genom att undersöka tecknet på andraderivatan $\left(\frac{d^2\dot{p}(t)}{dp^2} = -4 < 0\right)$ eller från att det är fråga om en strikt växande funktion där tillväxthastigheten ökar snabbt i början (exponentiell ökning) för att sedan asymptotiskts gå mot noll.

För att $p = \frac{1}{2}$ ska svara mot en inflektionspunkt krävs att $\left.\frac{dp^2(t)}{dt^2}\right]_{p=\frac{1}{2}} = 0$

$$\left.\frac{dp^2(t)}{dt^2}\right]_{p=\frac{1}{2}} = \left.\frac{d}{dt}\dot{p}(t)\right]_{p=\frac{1}{2}} = \left.\frac{d\dot{p}(t)}{dp}\frac{dp}{dt}\right]_{p=\frac{1}{2}} = \left\{\left.\frac{d\dot{p}(t)}{dp}\right]_{p=\frac{1}{2}} = 0 \text{ enligt ovan}\right\} = 0$$

Eftersom $p(t)$ är kontinuerlig i intervallet $[0,1]$ inses att den maximala tillväxttakten svarar mot en inflektionspunkt. Detta har en viss praktisk betydelse. Om man följer tillväxten i en population och noterar att den når en inflektionspunkt kan man (givet logistisk tillväxt) anta att populationen slutligen kommer att dubbleras från detta värde.