KTH Information and Communication Technology

Tentamen i Matematik, analys, IX1304

Tisdag 2017-10-24, 14.00 - 19.00, Sal: 304, 308, 210

Hjälpmedel: Formelsamling (nedladdningsbar från kursens hemsida) samt skrivhjälpmedel som penna och linjal.

Examinator: Mattias Hammar, tel 08-7904375, e-mail: hammar@kth.se

Denna tentamen avser samtliga provkoder TEN1, TENA och TENB enligt anvisningarna nedan.

TENB Provet består av samtliga sju uppgifter som var och en kan ge upp till fyra poäng. De preliminära betygsgränserna är:

Poäng	<13	13	14	17	20	23	26
Betyg	F	Fx	E	D	C	B	A

TEN1
TENA Provet består av sex uppgifter (1-6) som var och en kan ge upp till fyra poäng. De preliminära betygsgränserna är:

Poäng	<11	11	12	15	18	21	23
Betyg	F	Fx	E	D	C	B	A

För maximal poäng på en uppgift krävs att lösningen är korrekt och fullständig med korrekt notation och tydlig motivering. Ange även tydliga referenser till formelsamlingen där detta är aktuellt. Kryssa i på omslaget vilka uppgifter som behandlats, använd ett nytt blad för varje lösning och använd ej rödpenna. Observera att kontrollskrivningsresultaten från ht 2016 ej tillgodoräknas på denna tentamen.

Resultatet kommer att anslås senast onsdag 2017-11-15.

---

1. För vilka värden på x är nedanstående villkor uppfyllt ($x \neq -3, x \neq 0$)?

$$\frac{1}{x+3} > \frac{x+3}{3x}$$

(4 p)

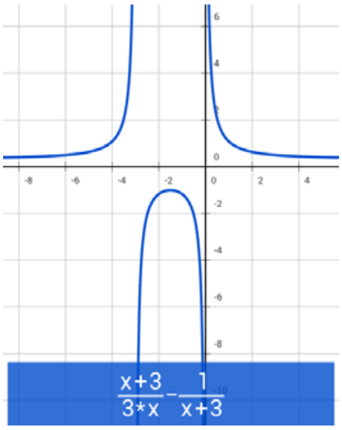
<u>Lösningsförslag</u>
(Problemet är inspirerat av högskoleprovet (provpass 4: 20), våren 2014.)
Ansätt $f(x) = \frac{x+3}{3x} - \frac{1}{x+3}$ och undersök villkoret för att $f(x) < 0$
Undersök först gränsvärdena $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$, $\lim_{x\to 0^{\pm}} f(x)$ samt $\lim_{x\to -3^{\pm}} f(x)$:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \frac{1}{3}$$
$$\lim_{x\to 0^{\pm}} f(x) = \pm\infty$$
$$\lim_{x\to -3^{\pm}} f(x) = \mp\infty$$

Detta innebär att $f(x)$ kan vara mindre än noll endast i intervallet (-3, 0). Det återstår nu att undersöka om $f(x) > 0$ någonstans i detta intervall och i så fall var. Leta efter extremvärden i intervallet genom att undersöka när $f'(x) = 0$:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+3}\right) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+3)^2}$$
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - (x+3)^2 = -6x - 9 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$$
$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = -1$$

Funktionen antar alltså ett maxvärde $f(x) = -1$ för $x = -\frac{3}{2}$ och $\frac{1}{x+3} > \frac{x+3}{3x}$ gäller för hela intervallet $x \in (-3,0)$. (Att det är fråga om ett maxvärde inses från kurvformen och ändpunkterna.)



2. Utgå från definitionen av derivata, $f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, för att beräkna derivatan av $\sqrt{2x+1}$ (4 p)

<u>Lösningsförslag</u>
Detta problem motsvarar den rekommenderade uppgiften 2.2.17 i Adams:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{2(x+h)+1} - \sqrt{2x+1}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2(x+h)+1-2x-1}{h\left(\sqrt{2(x+h)+1}+\sqrt{2x+1}\right)} =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{2}{\sqrt{2(x+h)+1}+\sqrt{2x+1}} = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$$

3. Du kör jeep genom ett ökenlandskap där du antingen kan hålla hastigheten v_a på preparerade vägar eller hastigheten v_b om du istället tar genväg över sanddynerna. Du befinner dig i byn A som är belägen a km söder om en väg som löper i öst-västlig riktning och är på väg till staden B som ligger längst denna väg och som är beläget b km öster om A. Var ska du ansluta på vägen för att minimera restiden till B? (4 p)

Ledning: Ta hänsyn till funktionens värdemängd för att få ett allmängiltigt svar.

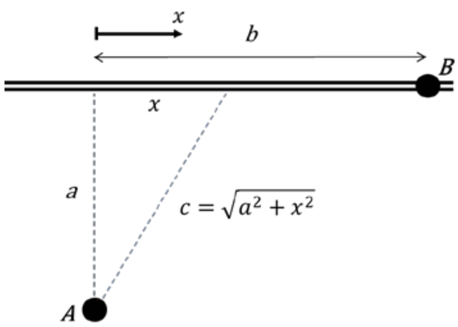
Lösningsförslag

Problemet är baserat på det rekommenderade talet 4.8.21 (samt 4.8.22) i Adams. Den totala restiden kan tecknas (se figur):

$$t = \frac{c}{v_b} + \frac{b-x}{v_a} = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{v_b} + \frac{b-x}{v_a} \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{1}{v_b}\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{1}{v_a}$$

$$\frac{dt}{dx} = 0 \Rightarrow x = \frac{v_b a}{\sqrt{v_a^2 - v_b^2}}$$

Detta inses motsvara ett minimum eftersom tecknet på andraderivatan, $\frac{d^2t}{dx^2} = \frac{1}{v_b}\frac{a^2}{(a^2+x^2)^{3/2}}$, är strikt positiv. Man måste dock notera att uttrycket för x endast gäller om $x < b$, dvs för $b > \frac{v_b a}{\sqrt{v_a^2 - v_b^2}}$. I annat fall ska man köra direkt till B.



4. Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0}\frac{x - \sin x}{x^3}$$

Lösningsförslag

(Adams 4.3.14) Eftersom gränsvärdet är av typen "0/0" kan l'Hôpitals regel tillämpas:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{6x} = \left\{\frac{0}{0}\right\}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\cos x}{6} = \frac{1}{6}$$

5. Beräkna arean som begränsas av funktionen $y = e^x$, linjen $x = 0$ samt funktionens tangent vid $x = 1$. (4 p)

Lösningsförslag
(Adams 5.7.29) Tangentens ekvation fås ur $(y - y_0) = m \cdot (x - x_0)$ där m är derivatan i punkten (x_0, y_0), dvs $m = y'(1) = e \Rightarrow y = ex$. Tangentens skärningspunkt med y-axeln fås i punkten $(0,0)$ och arean kan skrivas:

$$A = \int_0^1 e^x dx - \int_0^1 exdx = \left[e^x - e\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \left(e - \frac{1}{2}e - (1 - 0)\right) = \frac{e}{2} - 1 \text{ areaenheter}$$

6. Använd första ordningen Taylorutveckling av $\sqrt{x}$ runt $x = 25$ för att ta fram ett approximativt värde på $\sqrt{26}$ och gör även en uppskattning av det maximala felet i denna approximation.

Lösningsförslag

(Adams, exempel 4.10.4) För första ordningen Taylorutveckling gäller (se formelsamlingen, avsnitt 8.5):

$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + R_2(x)$, där

$R_2(x) = \frac{f''(s)}{2!}(x - a)^2$ där s ligger emellan a och x

Insättning ger:

$\sqrt{26} = \sqrt{25} + \frac{1}{2\sqrt{25}}(26 - 25) + \frac{1}{2}f''(s)(26 - 25)^2$ där $s \in [25,26]$

Med $f''(x) = -\frac{1}{4}\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ ger detta ett maximalt fel (med s=25) på $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{500} = \frac{1}{1000}$

$\sqrt{26}$ kan alltså approximeras att ligga i intervallet $[5.1 - 0.001, 5.1]$

Denna uppgift ingår endast i TENB

7. Ibland stöter man på integraler som inte går att lösa analytiskt. Ingen av de kända angreppssätten som t.ex. substitutionsmetoden eller partiell integration fungerar och de återfinns inte i tabellverk över kända integraler. Alternativt behöver man integrera en kurva som består av mätvärden som inte svarar mot någon känd funktion. Beskriv hur man kan lösa sådana integraler numeriskt. Gör en lämplig ansats och visa hur resultatet kan uttryckas i form av en summa. Ange också en approximativ metodik för att uppnå en viss noggrannhet. (4 p)

Lösningsförslag

Se t.ex. kap. 6.6 i Adams som beskriver de s.k. trapets- och mittpunkts-metoderna för numerisk approximation av integraler.