KTH Information and Communication Technology

Tentamen i Matematik, analys, IX1304

Onsdag 2016-12-21, 08.00 - 13.00, Sal: 205, 301, A

Hjälpmedel: Formelsamling (nedladdningsbar från kursens hemsida) samt skrivhjälpmedel som penna och linjal.

Examinator: Mattias Hammar, tel 08-7904375, e-mail: hammar@kth.se

Denna tentamen avser samtliga provkoder TEN1, TENA och TENB enligt anvisningarna nedan.

TENB Provet består av samtliga sju uppgifter som var och en kan ge upp till fyra poäng. De preliminära betygsgränserna är:

Poäng	<13	13	14	17	20	23	26
Betyg	F	Fx	E	D	C	B	A

TEN1
TENA Provet består av sex uppgifter (1-6) som var och en kan ge upp till fyra poäng. De preliminära betygsgränserna är:

Poäng	<11	11	12	15	18	21	23
Betyg	F	Fx	E	D	C	B	A

Godkänd kontrollskrivning *N* markeras med ett ”G” i rutan för uppgift *N*. För maximal poäng på en uppgift krävs att lösningen är korrekt och fullständig med korrekt notation och tydlig motivering. Ange även tydliga referenser till formelsamlingen där detta är aktuellt.

Resultatet kommer att anslås senast fredag 2017-01-13.

---

1. Skissa grafen till funktionen

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$$

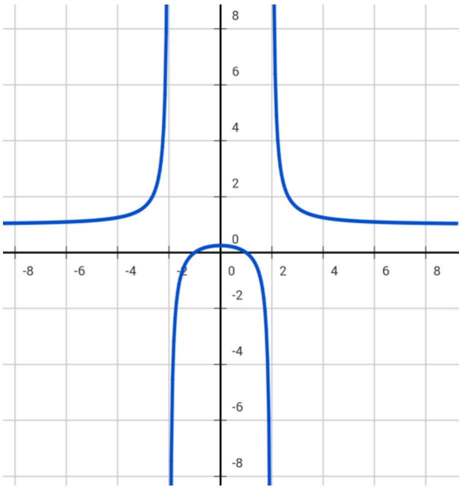
samt ange dess definitionsmängd och värdemängd (4 p)

Lösningsförslag
Vertikala asymptoter fås för $x = \pm 2$ och definieras av gränsvärdena
$\lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$
$\lim_{x\to -2^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to -2^-} f(x) = +\infty$

Horisontella asymptoterna fås ur gränsvärdena $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$

Lokala stationära punkter och deras karaktär fås med hjälp av första och andraderivatorna:
$f'(x) = \dfrac{-6x}{(x^2-4)^2}$, $f''(x) = \dfrac{6(3x^3+4)}{(x^2-4)^3}$
$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ och $f''(0) < 0$ indikerar ett lokalt maximum i punkten $(0,1/4)$

Dessutom gäller $y = 0 \Rightarrow x = \pm 1$ samt att $x = \pm 3 \Rightarrow y = 8/5$ och funktionen kan ritas ut enligt figuren nedan.



Definitionsmängd: $x \in (-\infty,-2) \cup (-2,+2) \cup (+2,+\infty)$
Värdemängd: $y \in (-\infty,\frac{1}{4}] \cup (1,+\infty)$

2. Lös integralen $\int_0^1 \ln x\, dx$

Lösningsförslag
Detta är en generaliserad integral och skriv som ett gränsvärde

$$\lim_{R\to 0^+} \int_R^1 \ln x\, dx = \{\text{Partiell integration eller utnyttja F.S. integral nr. } 100\ \} =$$

$$\lim_{R\to 0^+} [x\ln x - x]_R^1 = \lim_{R\to 0^+} (-1 - R\ln R + R) = \lim_{R\to 0^+} \left(-1 - \frac{\ln R}{1/R}\right) =$$

$$\{\text{l'Hôpital: "}\infty/\infty\text{"}\} = \lim_{R\to 0^+} \left(-1 - \frac{1/R}{-1/R^2}\right) = \lim_{R\to 0^+} (-1 + R) = -1$$

3. Vilken eller vilka punkter på parabeln $y = x^2$ ligger närmast punkten $(0,1)$? (4 p)

Lösningsförslag

Avståndet mellan punkten $(0,1)$ och kurvan $y = x^2$ är $L = \sqrt{(x-0)^2 + (y-1)^2} =$

$\{y = x^2\} = \sqrt{x^4 - x^2 + 1}$

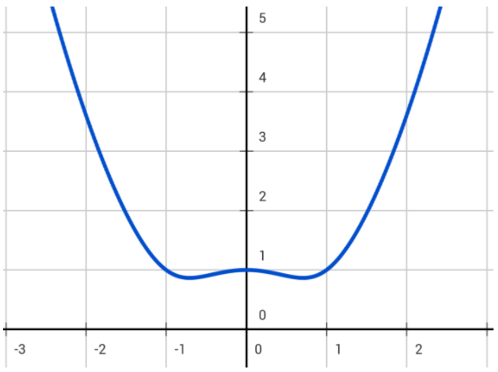
$$\frac{dL}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x^4 - x^2 + 1}}(4x^3 - 2x);\ \frac{dL}{dx} = 0 \Rightarrow 4x^3 - 2x = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_{2,3} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow y_1 = 0, y_{2,3} = \frac{1}{2}$$

$$L\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$L(0,0) = 1 > \frac{\sqrt{3}}{2}$; Lokalt maximum!

Svar: På parabeln $y = x^2$ ligger punkterna $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$ närmast punkten $(0,1)$. Figuren nedan visar $L(x)$



4. Härled uttrycket för volymen av en sfär med radie r $\left(V = \frac{4}{3}\pi r^3\right)$ genom att integrera fram rotationsvolymen som definieras när kurvan $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ får rotera runt x-axeln. (4 p)

Lösningsförslag

$$V = \int_{-r}^{r} \pi(r^2 - x^2)dx = 2\pi\left[r^2x - \frac{x^3}{3}\right]_0^r = 2\pi\left(r^3 - \frac{r^3}{3}\right) = \underline{\frac{4}{3}\pi r^2}$$

5. Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = x^2y^3 \\ y(1) = 3 \end{cases}$$

Lösningsförslag

Detta är en separabel differentialekvation som kan skrivas om enligt:

$\frac{dy}{y^3} = x^2 dx$, dvs $\int \frac{dy}{y^3} = \int x^2 dx$ och därmed $\frac{-1}{2y^2} = \frac{x^3}{3} + C$

$y(1) = 3$ ger sedan att $-\frac{1}{2 \cdot 3^2} = \frac{1^3}{3} + C \Rightarrow C = -\frac{7}{18}$

Insättning i $\frac{-1}{2y^2} = \frac{x^3}{3} + C$ ger då $y^2 = \frac{9}{6x^3 - 7}$ och slutligen $y = \frac{3}{\sqrt{6x^3 - 7}}$

eftersom endast den positiva roten kan uppfylla begynnelsevillkoret $y(1) = 3$

6. Beräkna medelvärdet av funktionen $f(x) = \sin x$ över en hel period samt över dess positiva halvperiod (dvs $0 \le x \le \pi$) (4 p)

Lösningsförslag
Medelvärdet av $\sin x$ över en hel period är noll. För att beräkna medelvärdet över dess positiva halvperiod utnyttjas integralkalkylens medelvärdessats:

$$\int_a^b f(x)dx = \bar{f}(x) \cdot (b - a) \Rightarrow \bar{f}(x) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

där $\bar{f}(x)$ betecknar funktionens medelvärde vilket för $f(x) = \sin x$ ger

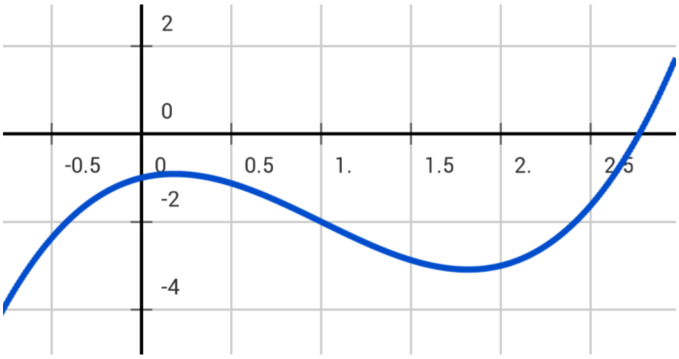
$$\bar{f}(x) = \frac{1}{\pi - 0}\int_0^\pi \sin x \, dx = \frac{1}{\pi}[-\cos x]_0^\pi = \frac{2}{\pi}$$

Denna uppgift ingår endast i TENB

7. Figuren nedan visar grafen till funktionen $f(x) = x^3 - 3x^2 + x - 1$. Man vill använda Newtons metod för att finna en approximativ lösning till ekvationen $f(x) = 0$ och ansätter därvid startvärdet x_0=1. Det hela konvergerar dock inte utan succesiva värden på x_i oscillerar mellan två konstanta värden. Vilka är dessa värden? Rita en enkel figur som visar vad som händer. Hur kan man förbättra oddsen för att hitta en lösning till ekvationen? {4 p)

Ledning: Newtons metod kan uttryckas som $x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$

där x_0 är ett approximerat startvärde.



Lösningsförlag

$f(x) = x^3 - 3x^2 + x - 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 6x + 1$

Med $x_0 = 1$ fås $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, dvs Newtons metod oscillerar mellan dessa två värden. Detta beror på ett olyckligt val av startvärde så att man kommer in i den oändliga slingan där tangenten till $f(x)$ i punkten (1,-2) skär origo medan tangenten till $f(x)$ i (0,-1)skär startpunkten (1,0). Oddsen för att hitta en lösning till ekvationen kan förbättras genom att välja en mer strategiskt vald startpunkt, t.ex. med x_0 i intervallet $2 \le x_0 \le 3$.