随机过程

第五章第四题:

此题目全网没有一个正确的详细解答 笔者给出如下答案作为参考

4.(1)A,B 两罐总共装着 N 个球,在时刻 n 先从 N 个球中等概率地任取一球然后从 A,B 两罐中任选一个,选中 A 的概率为 p,选中 B 的概率为 1-p;之后再将选出的球放入选好的罐中,设 x_n 为每次试验时 A 罐中的球数,试求此 Markov 链的转移概率矩阵,

(2)重复掷一枚质地均匀的硬币直到连续出现两次正面为止,试引入以连续出现次数为状态空间的 Markov 链,并求出平均需要擦多少次试验才可以结束

解: (1) $P_{ii}=P(X_n\text{时刻A中i个球}，X_{n+1}\text{时刻A中i个球})$

$=P(\text{B中取，放入B})+P(\text{A中取，放入A})$

$=\dfrac{N-\mathrm{i}}{N}(1-p)+\dfrac{\mathrm{i}}{N}p=\dfrac{1}{N}((N-\mathrm{i})(1-p)+ip)$

$P_{ii+1}=P(\text{B中取，放入A})=\dfrac{N-\mathrm{i}}{N}p$

$P_{ii-1}=P(\text{A中取，放入B})=\dfrac{\mathrm{i}}{N}(1-p)$

当$|\mathrm{i}-\mathrm{j}|>1$时，$P_{\mathrm{ij}}=0$

(2) 设X_n为第n次抛币时连续出现正面的次数，则由题，$X_n=0,1,2$

当给定X_n时，X_{n+1}与$X_1 \dots X_{n-1}$无关，故$\{X_n\}$为Markov 链，且时齐。

$$\text{转移概率矩阵p}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\text{状态转移方程}X_{n+1}=\left\{\begin{matrix}0,\text{第n+1次出现反面}\\ X_n+1,\ \text{第n+1次出现正面}\end{matrix}\right\}$$

设N为连续出现两次正面时的总抛币次数

$P(N=2)=P(X_1=1,X_2=2)=\frac{1}{2^2}$

$P(N=3)=P(X_0=0,X_1=1,X_2=2)=\frac{1}{2^3}$

$P(N=4)=P(X_1=0,X_2=0,X_3=1,X_4=2)+P(X_1=1,X_2=0,X_3=1,X_4=2)=2*\frac{1}{2^4}$

...

对$N\geq 4$，因X_n状态只能有（$0\to 0, 0\to 1, 1\to 0, 1\to 2$）四种，将符合条件的过程分解为$X_1,\ldots,X_n,0,1,2$两部分，其中最后3位取值固定为012，代表连续正面达到两次结束。前n 步为 0,1组成的序列，且其中不存在排列为11的子序列（因为X_n不可能由$1\to 1$）

下面求长度为 n（n>0）的 01 序列中不含 11 相邻的排列的排列总数，设总长度为 n，其中有 k 个 1，问题可以看做 k 个 1 插入到 n-k 个 0 构成的 n-k+1 个缝隙中（包含头尾），可以看出 k>n/2 时，序列中必存在 11 相邻情况，因此 k 的取值为 0<=k<=n/2 故得总排列数为：

$$S_n = C_{n+1}^0 + C_n^1 + \ldots + \begin{cases} n=2k+1\text{时}\ (k=0,1,2\ldots)\ \text{最后一项为k+1个1插入k个0的 k+1 个缝隙：}\quad C_{k+1}^{k+1} \\ n=2k\text{时}\ \ (k=1,2\ldots)\ \ \text{最后一项为k个1插入k个0的 k+1 个缝隙：}\quad C_{k+1}^{k} \end{cases}$$

因此对总步数为N=n+3的情况来说，其概率为$P(N=n+3)=S_n*\frac{1}{2^{n+3}}$ ，　$(N\geq 4)$

于是平均次数为：$E(X)=\sum_{i=1}^{\infty} X_i P(i) = 2*\frac{1}{2^2}+3*\frac{1}{2^3}+\lim_{n\to\infty}(4*2*\frac{1}{2^4}+5*3*\frac{1}{2^5}+6*5*\frac{1}{2^6}+\ldots+n*S_{n-3}*\frac{1}{2^n})$

下面用程序计算 E(x):

```
#include <iostream>

#include <string>

#include <map>

long long cnm(long long n, long long m)//n>=m>=0

{

    long long i,a;

 if(m+m>n) m=n-m;//be faster

 for(i=1,a=1;i<=m;i++,n--) a=a*n/i;

 return a;

}


long long Sn(long long n){

    long long i = n+1;

    long long j = 0;

    long long result = 0;

    while (j<=i) {

        result+=cnm(i, j);

        i--;

        j++;

    }
```

```
    return result;
}

int main()//主程序
{
    /*
     n = 1开始
     */
    double pi = 0;
    long long si = 0;
    double resultEx = 0;
    for(int i = 1;i<1000;i++){//步数为4--1002的项
        si = Sn(i);
        pi= si/(pow(2, i+3));
        resultEx += (i+3)*pi;
    }
    resultEx+=+0.5+0.375;//单独加步数为2和3的两项
    printf("\n\n\nEx = %lf",resultEx);
    return 0;
}
```

输出：

Ex = 5.999999Program ended with exit code: 0

由此可得 E（x） = 6